

В. В. БЕЛЕЦКИЙ, А. М. ЯНШИН

---

ВЛИЯНИЕ  
АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ  
СИЛ  
НА ВРАЩАТЕЛЬНОЕ  
ДВИЖЕНИЕ  
ИСКУССТВЕННЫХ  
СПУТНИКОВ

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1984

**Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников / Беленкий В. В., Яншин А. М.— Киев : Наук. думка, 1984.— 188 с.**

В книге систематически изложены в рамках асимптотических методов нелинейной механики теория вращательного движения искусственных спутников Земли (ИСЗ) под действием аэродинамических сил и результаты исследования аэродинамических характеристик вращающихся тел в свободномолекулярном режиме обтекания. Основное внимание уделено изучению динамики вращательного движения ИСЗ. Многие из рассмотренных в книге задач могут быть использованы при исследовании влияния потока света на вращательное движение спутника.

Для научных работников в области динамики космического полета и теоретической механики, преподавателей, аспирантов и студентов механико-математических факультетов.

Ил. 57. Табл. 7. Библиогр.: с. 181—185 (97 назв.).

Ответственный редактор

*В. М. Ковтуненко*

Рецензенты

*В. А. Ярошевский, В. П. Басс*

Редакция физико-математической литературы

Б  $\frac{2105000000-284}{M221(04)-87}$  292-84

© Издательство «Наукова думка», 1984

Аэродинамические эффекты во вращательном движении искусственных спутников Земли (ИСЗ), перигеи орбит которых расположены сравнительно не высоко, являются доминирующими. Влияние аэродинамических сил на вращение и ориентацию спутника рассматривалось в работе [7]. За последние годы накопилось много новых теоретических и экспериментальных факторов — открыты новые аэродинамические эффекты во вращении спутников, построены более общие теории явлений. В предлагаемой вниманию читателей монографии и собраны накопившиеся сведения. Она продолжает задуманную авторами серию книг о динамике вращательного движения искусственных и естественных небесных тел. В первой из этих книг [7] рассмотрены основные эффекты динамики вращательного движения ИСЗ под действием гравитационных, магнитных и аэродинамических моментов. В книге [8] подробно рассмотрена динамика вращательного движения небесных тел в гравитационных полях с упором на резонансные эффекты. Наконец, в настоящей книге, следуя задуманному плану, детально исследованы аэродинамические эффекты, причем особое внимание уделено динамике вращательного движения спутников сложной формы.

Условно ее можно разделить на три части: анализ аэродинамических сил, действующих на спутник (гл. 2, 3);

исследование динамики вращательного движения спутников под действием аэродинамических сил (гл. 4, 5); анализ фактического движения ряда конкретных спутников под действием аэродинамических сил и решение на основе этого анализа ряда обратных задач (гл. 6). Глава I является обзорной и содержит необходимые сведения о параметрах верхней атмосферы и кинетической теории газов.

В основу книги положены специальный курс лекций, прочитанный В. В. Белецким на механико-математическом факультете Московского государственного университета в 1970/71 учебном году, и ряд более поздних публикаций авторов.

*В. В. Белецкий, А. М. Янин*

На движение искусственных спутников Земли (ИСЗ) действуют различные физические поля и среда, заполняющая околоземное космическое пространство. Гравитационное поле Земли является основным фактором, определяющим выбор проектных параметров спутника и его орбиты, а аэродинамические силы, действующие на ИСЗ, определяют такой важный параметр спутника, как срок его существования на орбите. При выборе системы ориентации ИСЗ необходимо учитывать влияние всевозможных возмущающих моментов, действующих на спутник, в том числе и момента аэродинамических сил. Этот момент, как и плотность атмосферы, изменяется с высотой по экспоненциальному закону и в среднем до высот около 300 км превалирует над гравитационным и магнитным моментами, а на высоте 800 км становится сравнимым с моментом сил светового давления.

Аэродинамические силы обладают стабилизирующим действием, что дает возможность использовать их для пассивной ориентации спутников. Именно таким образом была осуществлена стабилизация низколетящих спутников «Космическая стрела» (ИСЗ «Космос-149», «Космос-320») [56]. Аэродинамические силы поверхностные, поэтому зависят от формы спутника и его ориентации относительно вектора скорости. В силу этого существует взаимосвязь вращательного и поступательного движений ИСЗ и возникает необходимость определения среднего (по периоду вращения) коэффициента его лобового сопротивления. Для решения указанных задач необходимо исследовать состав и структуру верхней атмосферы Земли, а также механизмы взаимодействия частиц атмосферы с поверхностью спутника, разработать методы расчета аэродинамических сил и моментов, действующих на космические аппараты и, наконец, исследовать динамику вращательного движения спутников под действием аэродинамических сил.

На высоте полета ИСЗ атмосфера разрежена настолько, что длина свободного пробега молекул воздуха значительно больше характерных размеров спутника. Поведение газа в таких условиях подчиняется уравнениям кинетической теории, а

режим обтекания спутников газом является свободномолекулярным. Если пренебречь собственными тепловыми скоростями молекул газа по сравнению со скоростью спутника на орбите (гипертепловое или гиперзвуковое приближение), то выражение для силы, действующей на элемент поверхности спутника, с точностью до коэффициентов одинаково как для потока частиц газа, падающего на спутник, так и для потока света. Эта так называемая аэродинамическая аналогия позволяет многие результаты распространить на случай влияния светового потока на вращательное движение спутника.

Аэродинамические характеристики космических аппаратов рассчитываются путем интегрирования выражений для давлений и касательных напряжений по поверхности спутника, что связано с некоторыми трудностями. Так, давлений и касательные напряжения зависят от механизма взаимодействия молекул газа атмосферы с поверхностью спутника и эта зависимость тем сильнее, чем разреженней газ. Для определения силового воздействия молекул газа на поверхность спутника необходимы данные о параметрах обмена импульсом и энергией между молекулами и поверхностью. На газодинамическом уровне эти параметры вводятся эмпирически. При этом используется аналогия чисто механического взаимодействия молекул с поверхностью: абсолютно упругое соударение соответствует зеркальной схеме взаимодействия, полностью неупругое — диффузной. Фактические схемы взаимодействия строятся путем линейной интерполяции этих двух предельных схем с помощью коэффициентов аккомодации. Последние определяются путем численного или лабораторного моделирования. В настоящее время принято считать [54], что расчетная погрешность коэффициентов аэродинамических сил и моментов составляет 25 — 40 %. Попытки снизить эту погрешность с помощью более детального описания процессов взаимодействия (переход на больцмановский и молекулярный уровни) не приводят к желаемому результату, поскольку требуют дополнительных параметров взаимодействия, определение которых связано со значительными трудностями.

Для исследования динамики движения спутников относительно центра масс необходимы аналитические выражения аэродинамических сил и моментов, действующих на спутник. Эти выражения можно получить для выпуклых тел вращения, осевая симметрия которых приводит к тому, что силы и моменты являются функциями лишь пространственного угла атаки. Для конкретных тел вращения силы и моменты можно аппроксимировать в виде ряда по косинусу пространственного угла атаки. В таком виде их легко использовать для решения ди-

намических уравнений Эйлера. С другой стороны, если центр масс спутника расположен на оси его геометрической симметрии, то на такой спутник действуют две составляющие аэродинамической силы — сила лобового сопротивления и подъемная сила и одна составляющая момента силы — восстанавливающий момент. При произвольном вращении спутника к указанным силам и моменту добавляются (пропорциональные параметру Струхаля) сила Магнуса, демпфирующий и прецессирующий моменты. В общем случае силу и момент, зависящие от вращения спутника, можно представить в виде свертки соответствующих тензоров с вектором угловой скорости вращения спутника. При наличии той или иной симметрии формы спутника эти тензоры упрощаются. Нами явный вид компонент этих тензоров получен для простейших геометрических тел — диска, сферы, цилиндра и конуса.

Аналитические выражения аэродинамических моментов сил существенно усложняются, если центр масс спутника не расположен на оси геометрической симметрии. В этом случае в зависимости от ориентации осей главных центральных моментов инерции спутника по отношению к его геометрической оси симметрии аэродинамический момент имеет в общем случае три составляющие: восстанавливающий момент, момент смещения и авторотации. Наиболее сложную структуру имеет момент пропеллирования, действующий на кососимметричные солнечные батареи спутников «Протон».

Для описания вращательного движения спутника используется система шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Три уравнения описывают поведение вектора кинетического момента в абсолютной системе координат, остальные — поведение спутника относительно этого вектора. Для консервативных аэродинамических моментов сил построены потенциальные функции. Вековая эволюция вращательного движения спутника анализируется методом осреднения.

Восстанавливающий момент, действующий на спутник, приводит к тому, что вектор кинетического момента спутника начинает прецессировать вокруг направления касательной к орбите в ее перигее (область наибольшего скоростного напора). На круговой орбите вековых возмущений вектора кинетического момента нет. Возможны случаи, когда полюсом аэродинамической прецессии является нормаль к плоскости орбиты. В общем случае на прецессию вектора кинетического момента относительно полюсов накладываются малые нутационные колебания. Вращение атмосферы приводит к небольшому сдвигу координат полюсов и изменению скорости прецессии.

Если учитывать суточный эффект атмосферного вздутия, то вблизи круговой орбите восстанавливающий момент приводит к вращению вектора кинетического момента.

Момент сил аэродинамической диссипации гасит угловую скорость вращения спутника, а сам спутник ориентирует в режиме наибольшего аэродинамического сопротивления. Если учитывать вращение атмосферы, то угловая скорость вращения спутника в абсолютной системе координат стремится совпасть с угловой скоростью вращения атмосферы. Учет изменения плотности атмосферы по длине спутника приводит к аэроградиентному эффекту — набегающий поток газа раскручивает спутник в направлении его вращения по орбите.

Момент смещения, действующий на спутник, приводит к тому, что регулярная прецессия вектора кинетического момента искажается. Угол собственного вращения спутника начинает изменяться неравномерно — возникают колебания угла нутации, а динамически симметричный спутник начинает вращаться так, будто симметрия отсутствует. Авторотационный момент стремится увеличить угловую скорость вращения спутника и в зависимости от начальных условий — асимптотически ввести спутник в режим «чистого» вращения или кувыркания. Эта задача (динамика авторотационного момента) имеет аналитическое решение и при наличии резонанса между скоростями прецессии и собственного вращения спутника. Заменой переменных резонансные параметры спутника можно разнести по частотам их изменения и к новым переменным вновь применить метод осреднения. Задача допускает стационарные решения, определяющие аэродинамические полюсы. При движении к этим полюсам след вектора кинетического момента спутника на небесной сфере описывает двойную спираль Корню (клотоиду).

Под действием пропеллирующего момента вектор кинетического момента, его ориентация в абсолютной системе координат и угол нутации спутника совершают долгопериодические колебания. Спутник постоянно переходит из режима осевой закрутки в режим кувыркания. На этих предельных углах нутации происходит максимальная раскрутка спутника атмосферой. На средних углах нутации угловая скорость спутника уменьшается. Колебания вектора кинетического момента происходят в одной плоскости, определяемой направлением перигейной касательной орбиты спутника и начальными условиями.

Результаты исследования динамики вращательного движения спутников позволяют построить модель движения относительно центра масс ряда конкретных ИСЗ. Из сравнения этих

моделей с фактически наблюдаемым движением спутников появляется возможность решения обратных задач определения параметров схемы взаимодействия потока газа с поверхностью спутников или плотности атмосферы. Для спутников «Протон» таким образом оценены параметры диффузной и диффузно-зеркальной схем взаимодействия. Наблюдаемое движение ИСЗ «Космос-230» легко понять, если учесть квазизеркальный характер отражения молекул от поверхности его солнечных батарей на больших углах падения. Анализ затухания вращения целого ряда спутников показывает, что основным диссипативным фактором, действующим на искусственные спутники Земли, является магнитный момент от вихревых токов, индуцируемых геомагнитным полем в проводящих материалах спутников. Аэродинамический демпфирующий момент для спутников становится существенным в среднем на высотах ниже 160 км, т. е. на последних витках полета спутников и при их входе в плотные слои атмосферы.

Зависимость параметров верхней атмосферы от времени характеризуется вариациями, имеющими квазипериодический характер. Основные из этих вариаций установлены достаточно точно. Природа их связана с переменностью солнечной энергии, поступающей атмосферой. Существенно переменной при этом является интенсивность солнечной радиации в дальнем ультрафиолете, мягком рентгене и радиодиапазоне в противоположность почти неизменной в видимой и инфракрасной областях спектра. Это обстоятельство имеет большое значение для понимания процессов, происходящих в верхней атмосфере. Корреляция параметров атмосферы с значительными колебаниями и геомагнитной активности описывается различными

В общем случае  $\rho$ ,  $M$ ,  $T$  являются функциями высоты, широты и долготы, а также времени. Основные трудности построения модели атмосферы связаны со сложными зависимостями  $M$  и  $T$  от времени. До запусков искусственных спутников Земли о параметрах атмосферы было известно очень мало. Современная модель атмосферы основана на измерениях со спутников, прием следует различать прямые измерения параметров атмосферы с помощью различных приборов — манометров, масс-спектрометров, акселерометров и других, и косвенные расчеты плотности атмосферы по данным о торможении спутников. К последним можно отнести и данные о плотности атмосферы, полученные из информации о вращательном движении искусственных спутников.

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0 M_0}{T M} \exp \left( - \int_h^{h_0} \frac{R_0 T_0}{R T} dh \right) \quad (1.3)$$

$$P = P_0 \exp \left( - \int_h^{h_0} \frac{R_0 T_0}{R T} dh \right);$$

Интегрируя (1.1) и (1.2) совместно, получаем

плотность атмосферы.  
 частиц газа;  $g$  — ускорение силы тяжести на высоте  $h$ ;  $\rho$  —  
 ная болыпмана ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/град);  $m$  — средняя масса  
 постоянная ( $R_0 = 8,32 \cdot 10^3$  Дж/град  $\cdot$  кмоль);  $k$  — постоянная  
 температура;  $P$  — давление;  $R_0$  — универсальная газовая  
 где  $M$  — средний молекулярный вес газа;  $T$  — абсолютная

$$\rho = \frac{P M}{R T} = \frac{P m}{k T}, \quad (1.2)$$

$$dP = - \rho g dh, \quad (1.1)$$

новесия и формулы Клапейрона — Менделеева

Атмосфера Земли оказывает существенное влияние на движение искусственного спутника относительно центра масс в широким диапазоне высот. Вплоть до высоты 300 км от поверхности Земли это влияние превалирует над влиянием гравитационного и магнитных полей. Наиболее общие выражения гравитационной и магнитной сил, действующих на спутник, содержат ряд параметров атмосферы: температур, молекулярный состав, отношение удельных теплотемкостей и др. Однако основным параметром атмосферы, влияющим на вращения тел в движении спутника, является плотность. Именно по этой причине аэродинамический момент, как и плотность атмосферы, изменяется с высотой по экспоненциальному закону в отличие от гравитационных и магнитных моментов, изменяющихся как  $1/R^2$ . Изучением параметров и свойств атмосферы занимается аэрономия [63]. Не останавливаясь подробно на всех свойствах атмосферы, рассмотрим лишь ее влияние космических аппаратов и баллистических расчетов. Для оупорного и баллистического расчета плотности по высоте определяется из уравнения гидростатического рав-

### 1.1. Верхняя атмосфера Земли и ее модели

В гл. I приведены необходимые сведения о параметрах верхней атмосферы Земли и кинетической теории газов. Основные свойства верхней атмосферы Земли представляются в виде молекулярной зависимости плотности атмосферы от координат пространства и времени. Временная зависимость является следствием вращения Земли и активности Солнца. В необходимых мере приведены те элементы кинетической теории газов, которые позволяют определить силовое воздействие газа на поверхность спутника. Это прежде всего параметры самого потока газа, а также кинематические и энергетические соотношения, описывающие некоторые наиболее распространенные модели взаимодействия молекулы газа с твердыми поверхностями.

### ПАРАМЕТРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ СПУТНИКА

ми индексами ( $A_p$ ,  $k_p$  и другие), из которых наиболее часто употребляется индекс уровня солнечной активности  $F_{10,7}$ , характеризующий интенсивность радиации в «крайнем» ультрафиолете. В табл. 1 указаны причины основных вариаций плотности верхней атмосферы, их периодичность и относительное влияние на плотность.

Условно атмосферу можно разделить на три основные области: нижняя (до 30 км), средняя (от 30 до 100 км) и верхняя (100 км и выше). В зависимости от молекулярного состава и

Таблица 1

Вариации	Период	Отношение максимальной плотности к минимальной для $h$ , равных (км)		
		200	500	800
Суточные вариации максимум солнечной активности минимум солнечной активности активность отдельных областей Солнца	1 сут	1,3	3,5	5,6
		1,7	6,8	1,6
	27 сут	1,2	2	2
Полугодовые вариации (причины не установлены)	6 мес	1,5	2,5	2
Активность Солнца дневные вариации ночные вариации	11 лет	1,7	13	16
		2,2	2	2
Геомагнитная активность	Нерегулярные	1,5	3	3

температуры она имеет и другие характерные области. Трудности построения моделей атмосферы в целом во многом связаны с необходимостью установления связей между параметрами нижней и верхней атмосферы. Недостаточное понимание этих связей, а также механизмов физических процессов, протекающих в средней атмосфере и на ее границах, привело к тому, что в настоящее время не существует строгой и точной модели всей атмосферы. Наиболее изучена нижняя атмосфера. Прямые измерения с помощью искусственных спутников Земли, а также данные об эволюции орбит спутников дали обширный материал о параметрах верхней атмосферы в области 180 км и выше. Диапазон высот от 30 до 180 км изучен плохо, поскольку прямых измерений параметров атмосферы в этой области с помощью ракет и зондов мало, а спутники на этих высотах летать не могут.

Первой моделью верхней атмосферы, построенной по данным о торможении спутников, была статическая модель

CIRA-1961. Эта модель учитывает только высотный (по  $h$ ) профиль плотности верхней атмосферы и дает завышенные значения плотности, поскольку построена по данным, полученным в годы максимальной активности Солнца. Широкое применение для баллистических расчетов получила модель CIRA-1965 [82]. В диапазоне высот от 120 до 800 км эта модель с помощью эмпирических формул учитывает уровень солнечной и геомагнитной активности, суточные и полугодовые вариации. Модель CIRA-1965 используется для определения параметров верхней атмосферы на широтах ниже  $40^\circ$  и, как показывает опыт ее применения для баллистических расчетов, в диапазоне высот от 180 до 300 км средние модельные значения плотности завышены на 8 %, а максимальные расхождения достигают 60 %. Все последующие модели верхней атмосферы — Яккия-1971, Яккия-1972 и другие, а также модель Института космических исследований АН СССР [60], представляют собой результат усовершенствования моделей верхней атмосферы по тем или иным параметрам. Сравнительный анализ этих моделей кратко изложен в работе [54].

Дальнейшее улучшение моделей верхней атмосферы связано со следующими основными трудностями. Прежде всего создание динамических моделей верхней атмосферы требует надежной информации о временном поведении ее параметров. Построенные в основном по данным о торможении искусственных спутников за определенный период наблюдений модели верхней атмосферы учитывают временное изменение ее параметров только за этот период. Однако опыт сравнения моделей верхней атмосферы с данными наблюдений в последующие периоды времени указывает на то, что все модели относительно удовлетворительно описывают средние по короткопериодическим флуктуациям параметры атмосферы только внутри отдельных одиннадцатилетних циклов солнечной активности. Это связано с тем, что до сих пор не установлена природа солнечной активности, что в свою очередь не позволяет достаточно точно прогнозировать не только амплитуду, но и фазу одиннадцатилетнего цикла. По этой причине ошибки моделей верхней атмосферы на последующих циклах могут достигать 100 %. Короткопериодические флуктуации — суточные и месячные — для каждого из циклов моделируются сравнительно точно, однако на них накладываются нерегулярные вариации так, что в отдельные периоды погрешности моделей верхней атмосферы могут быть сравнимы с амплитудой одиннадцатилетнего цикла, оставаясь сравнительно точными в среднем.

Другая существенная трудность построения моделей верхней атмосферы состоит в том, что исходной информацией для них слу-

жат данные о торможении искусственных спутников, которые сравнительно надежны и точны лишь для произведения плотности атмосферы на коэффициент лобового сопротивления спутника  $\rho C_V$ , причем это произведение осреднено на интервале наблюдения. При этом, во-первых, сглаживается вся информация о пространственных и временных неоднородностях  $\rho$  на орбите спутника за интервал наблюдения, а, во-вторых, значения  $\rho$  из  $\rho C_V$  получают обычно при допущении о постоянстве  $C_V$ . Погрешность же значений  $C_V$  для отдельных спутников может достигать более 30 %.

Таким образом, построение более точных моделей верхней атмосферы связано с созданием теории солнечной активности и с необходимостью использования данных прямых комплексных измерений ее параметров. Ниже для оценочных расчетов будут использоваться упрощенные модели верхней атмосферы, учитывающие в основном только высотный профиль атмосферы. К таким моделям относится изотермическая модель. Она получается из (1.3), если положить  $T = T_0$  и  $M = M_0$ . Тогда

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{h-h_0}{H}\right), \quad (1.4)$$

где  $H = RT_0/gM_0 = \text{const}$  — так называемая высота однородной атмосферы. В более общем случае  $H$  является сложной функцией высоты  $h$  (статическая или локально изотермическая модель). Для модели Института космических исследований АН СССР [60] эта зависимость представлена на рис. 1. Для орбит спутников  $h$  изменяется в пределах  $h_\pi \leq h \leq h_\alpha$ , поэтому вместо формулы (1.4) используется выражение

$$\rho = \rho_\pi \exp\left(-\frac{h-h_\pi}{H_\pi}\right), \quad H_\pi = H(h_\pi). \quad (1.5)$$

Следует еще раз обратить внимание на условность формул (1.4) и (1.5), не учитывающих даже суточных вариаций. Суточный эффект атмосферного вздутия на подсолнечной стороне Земли (рис. 2) в модели верхней атмосферы [60] представлен следующей зависимостью:

$$\rho = \rho_h k_1, \quad \rho_h = g \exp[a_1 - a_2(h - a_3)^{1/2}];$$

$$k_1 = 1 + \{C_1 + C_2 h + C_3 \exp[-(h + C_4)^2/C_5^2]\} \cos^m \frac{\varphi}{2}; \quad (1.6)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{r} [z \sin \delta_\odot + \cos \delta_\odot (x \cos \gamma + y \sin \gamma)];$$

$$\gamma = \alpha_\odot + \varphi_1 - S^* - \omega_3 (t - 10\,800),$$

где  $t$  — московское время;  $h$  — геометрическая высота над поверхностью общего земного эллипсоида;  $\alpha_\odot, \delta_\odot$  — прямое вос-

хождение и склонение Солнца;  $\omega_3$  — угловая скорость вращения Земли;  $S^*$  — звездное время в гринвичскую полночь;  $\lambda, y, z$  — гринвичские координаты точки пространства;  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ;  $\rho_n$  — ночная плотность атмосферы;  $a_i, c_i, m_1, \Phi_1$  — постоянные, зависящие от индекса солнечной активности  $F_{10,7}$ . Зависимость (1.6) характеризует фазовую структуру отставания горба вздутия верхней атмосферы от линии Земля — Солнце в зависимости от координат пространства. Это отставание по времени равно 2 ч.

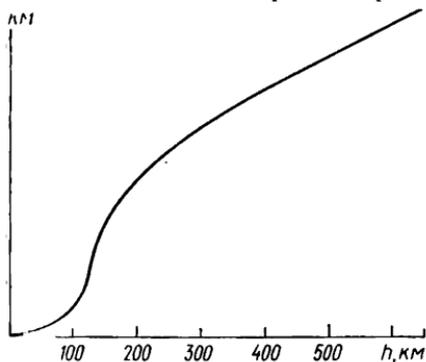


Рис. 1. Зависимость высоты однородной атмосферы  $H$  от высоты полета спутника  $h$  при уровне солнечной активности  $F_{10,7} = 150$ .

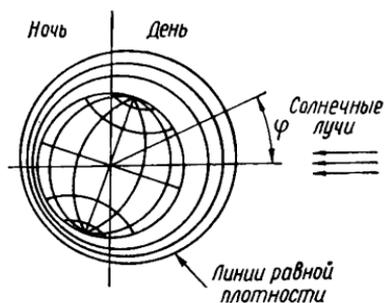


Рис. 2. Схематическое изображение суточного эффекта верхней атмосферы Земли.

Одним из немаловажных динамических параметров верхней атмосферы является ветер. Вопрос о том, увлекается ли атмосфера вращающейся Земли, в какой мере и в какой зависимости от высоты, представлял интерес с давних пор. Этот вопрос имел принципиальное значение при постановке опытов Майкельсона по определению скорости света во времена, когда господствовала теория эфира. Однако обнаружен был ветер после запусков первых спутников — изменение наклонов орбит первых спутников привело Кинг-Хили [86] к гипотезе о паличии ветров в верхней атмосфере. Дальнейший анализ эволюций наклонений орбит спутников позволил сделать вывод о преобладании западных ветров в верхней атмосфере. Обобщая выводы ряда работ по ветрам в верхней атмосфере (см. обзор [54]), для среднесуточного значения зональной компоненты атмосферного ветра  $\lambda_\omega$  (отношения угловой скорости вращения атмосферы к угловой скорости вращения Земли) можно составить хорошо аппроксимирующую ветер линейную зависимость

$$\lambda_\omega = 1,773 \cdot 10^{-3} h + 0,7822, \quad (1.7)$$

справедливую в диапазоне высот от 150 до 370 км;  $\lambda_{\infty} = 1$  при  $h = 123$  км, а выше скорость ветра в среднем превышает скорость вращения Земли (эффект суперротации).

Существуют меридиональные и радиальные компоненты ветра, однако по величине они на 1—2 порядка меньше зональных ветров, имеют пространственную и временную периодичность и не оказывают заметного векового влияния на параметры орбит спутников.

## 1.2. Свободномолекулярный поток и его характеристики

Режим обтекания тел потоком газа характеризуется безразмерным числом Кнудсена ( $Kn$ ), представляющим собой отношение средней длины свободного пробега молекул газа  $\bar{l}$  к характерному размеру тела  $L_*$ . В предельном случае  $Kn \rightarrow 0$  режим обтекания становится континуальным, при  $Kn \rightarrow \infty$  — свободномолекулярным. Однако аэродинамические характеристики тел далеко не во всем диапазоне чисел  $Kn$  одинаково чувствительны к изменению режима обтекания. При  $Kn \gg 1$  они практически не зависят от  $Kn$ , поэтому свободномолекулярный режим достаточно определить условием  $Kn \gg 1$ . При этом можно считать, что число столкновений между молекулами газа в окрестности тела пренебрежимо мало по сравнению с числом столкновений с поверхностью тела. Для космических аппаратов с размерами, не превышающими 10 м, свободномолекулярный режим устанавливается в среднем на высотах 150—200 км. В данном случае имеется в виду среднее по возможным вариациям плотности атмосферы значение длины свободного пробега молекул  $\bar{l}$ . При этом  $Kn \geq 10$ .

Равновесное состояние газа описывается максвелловской функцией распределения молекул по скоростям [55]

$$f = n_{\infty} (2\pi RT_{\infty})^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2RT_{\infty}} [(v_x - V_x)^2 + (v_y - V_y)^2 + (v_z - V_z)^2] \right\}, \quad (1.8)$$

где  $R$  — газовая постоянная;  $n_{\infty}$ ,  $T_{\infty}$  — концентрация и температура молекул в набегающем потоке вдали от тела;  $V_i$  ( $i = x, y, z$ ) — компоненты макроскопической скорости молекул в выбранных осях;  $v_i$  — проекции молекулярных скоростей частиц;  $C_i = v_i - V_i$  — тепловые скорости молекул. Среднее значение тепловой скорости молекул  $\bar{C} = \sqrt{2RT_{\infty}/\pi}$ , наиболее вероятная тепловая скорость молекулы  $C_m = \sqrt{2RT_{\infty}}$  [55]. Отличительной характеристикой свободномолекулярного

молекулярного режима обтекания тел является то, что отраженный от тела поток частиц не возмущает падающий поток и не искажает вид функции распределения. Это обстоятельство существенно упрощает расчет аэродинамических характеристик тел, которые определяются в данном случае только параметрами потока и граничными условиями на поверхности тела. Для заряженных частиц даже при  $Kn \gg 1$  падающий поток в общем случае нельзя считать невозмущенным и расчет аэродинамических характеристик тел при этом значительно усложняется [1, 32].

Для произвольно вращающегося тела, движущегося в потоке разреженного газа, вектор относительной скорости встречи молекул газа с элементом поверхности тела можно представить в виде

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + [\omega \mathbf{r}] + \mathbf{C}, \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{V}_0$  — скорость поступательного движения тела;  $\omega$  — вектор угловой скорости вращения тела;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор элемента поверхности тела от его центра масс. Оценим порядок тех составляющих вектора  $\mathbf{V}$ :  $|\mathbf{V}_0| = 8$  км/с,  $\bar{C} \approx 0,875$  км/с для  $h = 200$  км и  $\bar{C} \approx 1,095$  км/с для  $h = 400$  км (для модели CIRA-1961). Таким образом,  $\bar{C}/V_0 \approx 0,1$ .

Обычно для определения отношения макроскопической скорости движения молекул к тепловой используется так называемое скоростное отношение (модифицированное число Маха). В зависимости от величины этого отношения поток частиц условно разделяют на максвелловский и гипертепловой (гиперзвуковой). Последний строго реализуется при  $s \rightarrow \infty$ , однако на практике при расчете аэродинамических характеристик спутников тепловыми скоростями молекул пренебрегают обычно при  $s \geq 10$ . В отдельных случаях, когда космические аппараты имеют большие плоскости, ориентированные вдоль потока падающих частиц, пренебрежение конечностью  $s$  вносит существенные погрешности в значения их аэродинамических характеристик.

Для оценки порядка члена  $[\omega \mathbf{r}]$  в формуле (1.9) допустим, что  $r = 1$  м,  $\omega = 1$  рад/с. Тогда  $\omega r/V_0 = 10^{-4}$ . Отношение  $\omega L_*/V_0$ , где  $L_*$  — характерный размер тела, называется числом Струхалея (Sh). Таким образом, для типичных неориентированных спутников  $Sh \approx 10^{-4}$ , т. е. величина  $[\omega \mathbf{r}]$  на три порядка меньше  $\bar{C}$ . Однако далее будет показано, что члены с угловой скоростью  $\omega$  вносят качественно новые эффекты в динамику вращательного движения спутников, определяя демпфирование космических аппаратов.

### 1.3. Аэродинамические силы, действующие на элементарную площадку

Рассмотрим элементарную площадку  $ds$ , движущуюся в разреженном газе со скоростью  $\mathbf{V}_0$ , направленной под углом  $\delta_m$  к внешней нормали площадки. Тогда макроскопическая скорость потока частиц на  $ds$  равна  $\mathbf{V}_\infty = -\mathbf{V}_0$ . Свяжем с площадкой  $ds$  локальную систему координат  $x, y, z$  следующим образом. Ось  $x$  направим по нормали к поверхности  $\mathbf{n}$ . Ось  $y$  расположим в плоскости векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{V}_0$ . Ось  $z$  дополняет систему до правого ортогонального репера (рис. 3).

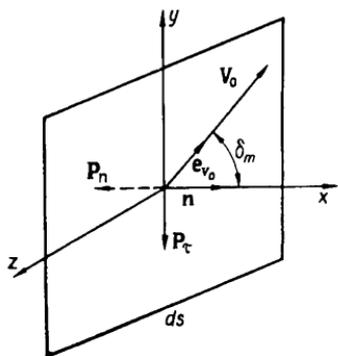


Рис. 3. Локальная система координат.

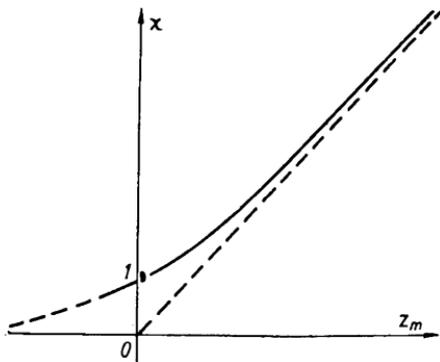


Рис. 4. Вид функции  $\chi(z_m)$ .

Функция распределения молекул набегающего потока по скоростям имеет вид (1.8). Согласно теории свободномолекулярных течений составляющие потока импульса падающих частиц на  $ds$  (давление и касательное напряжение) [55]

$$\begin{aligned} P_{ni} &= \iiint mn_\infty f C_x^2 dC_x dC_y dC_z; \\ P_{\tau i} &= \iiint mn_\infty f C_x C_y dC_x dC_y dC_z. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Интегрирование по  $C_y$  и  $C_z$  ведется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а по  $C_x$  — от 0 до  $+\infty$ . Подставляя в (1.10) выражение для  $f$  (1.8) и интегрируя в пространстве скоростей, получаем

$$P_{ni} = \frac{\rho V_0^2}{2} \left\{ \cos \delta_m \frac{C_m}{V_0} \frac{e^{-\left(\frac{V_0}{C_m} \cos \delta_m\right)^2}}{\sqrt{\pi}} + \right.$$

$$+ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{C_m}{V_0} \right)^2 + \cos^2 \delta_m \right] \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{V_0}{C_m} \cos \delta_m \right) \right] \}; \quad (1.11)$$

$$P_{\text{тi}} = \frac{\rho V_0^2}{2} \left\{ \sin \delta_m \frac{C_m}{V_0} \frac{e^{-\left( \frac{V_0}{C_m} \cos \delta_m \right)^2}}{\sqrt{\pi}} + \sin \delta_m \cos \delta_m \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{V_0}{C_m} \cos \delta_m \right) \right] \right\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$z_m = \frac{V_0}{C_m} \cos \delta_m = s \cos \delta_m = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}); \quad A = \frac{1}{2} \frac{\rho V_0^2}{s^2 \sqrt{\pi}};$$

$$\chi(z_m) = e^{-z_m^2} + z_m \sqrt{\pi} [1 + \operatorname{erf}(z_m)];$$

$$\xi(z_m) = \chi(z_m) z_m + \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 + \operatorname{erf}(z_m)];$$

$$\operatorname{erf}(z_m) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_m} e^{-x^2} dx.$$

Тогда (1.11) можно представить в виде

$$P_{\text{нi}} = A \xi(z_m); \quad P_{\text{тi}} = A s \sin \delta_m \chi(z_m).$$

Если поток гипертепловой, то условие  $z_m = 0$  определяет границу обтекаемой потоком части тела, а область интегрирования тела определяется условием  $z_m \geq 0$ . Функция  $\chi(z_m)$ , представленная на рис. 4, фактически определяет потоки частиц, взаимодействующих с телом на «освещенной» части и в его «тени» [55].

Согласно работе [93] при выполнении условия

$$\frac{1}{S} \int_S z_m ds \geq 1 \quad (1.12)$$

выражение  $\operatorname{erf}(z_m)$  можно записать в виде

$$\operatorname{erf}(z_m) \simeq 1 - \frac{e^{-z_m^2}}{z_m \sqrt{\pi}}.$$

Тогда

$$\chi = 2z_m \sqrt{\pi}; \quad \xi = 2z_m^2 \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( 2 - \frac{e^{-z_m^2}}{z_m \sqrt{\pi}} \right)$$

и интегрирование ведется только по освещенной поверхности тела. Однако условие (1.12) выполняется не всегда. При умень-

нении скоростного отношения, т. е. при увеличении относительного вклада тепловых скоростей частиц (следует отметить что  $s$  уменьшается с ростом высоты полета спутника), и для  $\delta_m$ , близких к  $\pi/2$ , т. е. для скользящих местных углов атаки условие (1.12) нарушается. Для пластины  $\delta_m = \text{const}$  и условие (1.12) можно представить в виде  $z_m \geq 1$ . При  $s = 10$   $z_m = 1$ , когда  $\cos \delta_m = 0,1$ . Значит, условие (1.12) нарушается для  $85^\circ \leq \delta_m \leq 90^\circ$ . Именно по этой причине, как отмечалось выше, аэродинамические характеристики плоских тел по скользящими углами атаки очень чувствительны к параметру  $s$ .

Оценим погрешность аппроксимации (1.12) для сферы. Исключим на освещенной части полусферы область интегрирования, не удовлетворяющую условию (1.12). Легко показать что отношение площади шарового слоя  $\Delta S$ , ограниченного углом  $\delta_m \geq 85^\circ$  и не удовлетворяющего условию (1.12), к площади полусферы  $S_{\text{п.с}}$  пропорционально  $\cos \delta_m$ . Тогда относительная погрешность аппроксимации (1.12) для аэродинамической силы, действующей на сферу,  $\Delta S/(sS_{\text{п.с}}) \approx 1\%$  для  $s = 10$ . Следует отметить, что здесь рассмотрен вклад в силу только от падающих молекул. Учет вклада отраженных молекул увеличивает эту погрешность. Более подробно о погрешностях аэродинамических характеристик тел в гипертепловом приближении см. в § 2.5.

#### 1.4. Схемы взаимодействия потока разреженного газа с поверхностью спутника

Набегающий поток газа состоит из разнообразных частиц характеризующих состав атмосферы. Эти частицы могут быть нейтральными, возбужденными, ионизированными, могут находиться в связанном молекулярном состоянии или быть диссоциированными на атомы. В молекулах внутренняя энергия распределена на вращательных и колебательных уровнях. Поверхности космических аппаратов характеризуются еще большим числом параметров (химический состав, кристаллическая структура, температура, заряд, шероховатость, адсорбционный слой и т. д.). Процессы взаимодействия частиц с поверхностями (рассеивание, распыление, захват, спонтанная эмиссия [2]) на молекулярном уровне определяются потенциалами взаимодействия и описываются аппаратом квантовой механики.

На больцмановском уровне описания взаимодействия газа с поверхностью необходимо знать характеристики взаимодействия ансамбля частиц с элементом поверхности. Такой характеристикой является функция взаимодействия, определяющая

ция плотность распределения по скоростям отраженных от поверхности частиц. Функция взаимодействия зависит от многих переменных и полностью определяет силовое и тепловое воздействие потока на поверхность. На газодинамическом уровне описания силовых и тепловых процессов взаимодействия газа с поверхностью функция взаимодействия имеет избыточную информацию и осредняется по скоростям частиц. Поэтому вместо нее вводят осредненные характеристики — коэффициенты переноса, определяющие кинематические и энергетические параметры взаимодействия. В дальнейшем будет использоваться только газодинамический уровень описания процессов взаимодействия.

При всей сложности физических процессов, описывающих взаимодействие газа с поверхностью тела на газодинамическом уровне, можно построить достаточно простую модель этих взаимодействий с помощью ограниченного числа эмпирических коэффициентов. Поскольку нас интересуют кинематические и энергетические характеристики процессов взаимодействия, будем считать, что эти взаимодействия происходят сугубо механическим путем. Предельными схемами взаимодействия в этом случае будут следующие. Если отражение молекулы от поверхности тела является абсолютно упругим и энергия газа телу не передается, то такая схема взаимодействия называется зеркальной. В этом случае, очевидно, параметрами импульса отраженного потока будут

$$P_{nr}^s = -P_{ni}; \quad P_{\tau r}^s = P_{\tau i}. \quad (1.13)$$

В другом предельном случае, когда столкновение газа с поверхностью является абсолютно неупругим, схема называется полностью диффузной. При этом падающие молекулы приходят в полное термодинамическое равновесие с поверхностью и отражаются от нее с максвелловским распределением, соответствующим температуре поверхности,

$$f_r^d = n_w (2\pi RT_w)^{-3/2} \exp\left(-\frac{C_i^2}{2RT_w}\right).$$

Аналогично (1.11), интегрируя  $f_r^d$ , получаем

$$P_{nr}^d = -A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{T_w}{T_\infty}\right)^{1/2} \chi(z_m); \quad P_{\tau r}^d = 0. \quad (1.14)$$

Определим действительное отражение путем линейной интерполяции двух предельных схем взаимодействия

$$P_{nr} = (1 - \sigma_n) P_{nr}^s + \sigma_n P_{nr}^d; \quad P_{\tau r} = (1 - \sigma_\tau) P_{\tau r}^s + \sigma_\tau P_{\tau r}^d, \quad (1.15)$$

где введены эмпирические коэффициенты аккомодации давления ( $\sigma_n$ ) и касательного напряжения ( $\sigma_\tau$ ). Для двух предельных схем взаимодействия имеем:  $\sigma_n = \sigma_\tau = 1$  для чисто зеркального взаимодействия и  $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$  для чисто диффузного. Разрешая (1.15) относительно  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$  с учетом (1.13) и (1.14) получаем

$$\sigma_n = \frac{P_{ni} - P_{nr}}{P_{ni} - P_{nr}^d}; \quad \sigma_\tau = \frac{P_{\tau i} - P_{\tau r}}{P_{\tau i}}. \quad (1.16)$$

Аналогичным образом можно ввести коэффициент аккомодации энергии

$$\sigma_E = \frac{E_i - E_r}{E_i - E_r^d}. \quad (1.17)$$

Результирующее давление, действующее на тело, пропорционально количеству движения, передаваемого телу. Это количество движения равно векторной разности между количеством движений набегающего и отраженного потоков. Таким образом,

$$P_n = P_{ni} - P_{nr}; \quad P_\tau = P_{\tau i} - P_{\tau r}. \quad (1.18)$$

Подставляя (1.13), (1.14) и (1.15) в (1.18), получаем

$$P_n = (2 - \sigma_n) P_{ni} - \sigma_n P_{nr}^d; \quad P_\tau = \sigma_\tau P_{\tau i}.$$

Тогда сила, действующая на  $ds$ ,

$$d\mathbf{F} = -(P_n \mathbf{n} + P_\tau \boldsymbol{\tau}) ds. \quad (1.19)$$

Дальнейшее вычисление аэродинамических сил сводится к интегрированию (1.19) по поверхности. Из-за сложности выражений (1.11) и (1.14) вычислять эти интегралы аналитически даже для спутников простой конфигурации трудно. Поэтому часто в расчетах используется гипертепловое приближение. Найдем гипертепловой предел выражения (1.19) для случая  $\cos \delta_m \neq 0$ . При  $s \rightarrow \infty$   $z_m \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{erf}(z_m) \rightarrow 1$  и  $e^{-z_m^2} \rightarrow 0$ . При этом

$$\chi(z_m) \rightarrow 2\sqrt{\pi} z_m; \quad \xi(z_m) \rightarrow 2\sqrt{\pi} z_m^2.$$

Подставляя эти значения в (1.18) и (1.19), получаем

$$d\mathbf{F} = -A \{ [(2 - \sigma_n) 2z_m^2 \sqrt{\pi} + A_W 2\sigma_n z_m \sqrt{\pi} - \sigma_\tau 2z_m^2 \sqrt{\pi}] \mathbf{n} + 2\sigma_\tau z_m \sqrt{\pi} s \} ds, \quad (1.20)$$

где  $A_W = \sqrt{\frac{T_W}{T_\infty}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Подставляя в (1.20) выражения для  $A$ ,  $A_w$ ,  $s$  и  $z_m$ , окончательно получаем

$$dF = -\frac{\rho V_0^2}{2} \left\{ [2(2 - \sigma_n - \sigma_\tau)(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^2] \mathbf{n} + \right. \\ \left. + 2\sigma_\tau(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_{V_0} + 2\sigma_n(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \frac{v}{V_0} \mathbf{n} \right\} ds, \quad (1.21)$$

где  $v = \frac{V\sqrt{\pi}}{2} C_m = \frac{V\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{2RT_w}$  — параметр, пропорциональный наиболее вероятной тепловой скорости диффузно отраженных молекул;  $\mathbf{e}_{V_0} = \mathbf{V}_0/|\mathbf{V}_0|$ . Вклад в  $dF$  от падающего потока легко получить, положив  $\sigma_n = \sigma_\tau = 1$  и  $v/V_0 = 0$ .

Первая диффузно-зеркальная схема взаимодействия была предложена Максвеллом еще в 1890 г. Строится эта модель следующим образом. Предполагается, что часть молекул  $\epsilon$  отражается от поверхности зеркально, остальная часть  $(1 - \epsilon)$  — диффузно с максвелловским распределением, соответствующим некоторой температуре  $T_r$ . Тогда для зеркально отраженных молекул суммарное давление  $P_n^s = 2P_{ni}$ , а касательное напряжение  $P_\tau^s = 0$ . Для диффузно взаимодействующих молекул  $P_n^d = P_{ni} + P_{nr}^d$ , а  $P_\tau^d = P_{\tau i}$ . Здесь

$$P_{nr}^d = A \frac{V\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{T_r}{T_\infty} \right)^{1/2} \chi(z_m).$$

Тогда общее давление

$$P_n = 2\epsilon P_{ni} + (1 - \epsilon)(P_{ni} + P_{nr}^d),$$

а касательное напряжение

$$P_\tau = (1 - \epsilon) P_{\tau i}.$$

Подставляя сюда выражение для  $P_{ni}$ ,  $P_{\tau i}$  и  $P_{nr}^d$  в гипертепловом приближении, получаем

$$P_n = \rho V_0^2 (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^2 \left\{ 2\epsilon + (1 + \epsilon) \left[ 1 - \frac{V\sqrt{\pi}}{2} \frac{V\sqrt{2RT_\infty}}{V_0(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})} \left( \frac{T_r}{T_\infty} \right)^{1/2} \right] \right\};$$

$$P_\tau = \rho V_0^2 (1 - \epsilon) \sin \delta_m (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}).$$

Тогда сила, действующая на  $ds$ ,

$$dF = -\rho V_0^2 \left\{ (1 - \epsilon)(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_{V_0} + 2\epsilon(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} + \right. \\ \left. + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right\} ds. \quad (1.22)$$

Здесь  $v = \frac{V\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{2RT_r}$ .

Схемы (1.21) и (1.22) совпадают для предельных случаев чисто диффузной и чисто зеркальной схем взаимодействия. Для чисто диффузной схемы  $\varepsilon = 0$ , для чисто зеркальной  $\varepsilon = 1$ ,  $v/V_0 = 0$ . Однако при произвольных параметрах взаимодействия эти схемы не взаимопроводимы. Существенное отличие этих схем состоит в том, что первая из них — трехпараметрическая  $(\sigma_n, \sigma_\tau, v/V_0 (\sigma_E))$ , вторая — двухпараметрическая  $(\varepsilon, v/V_0 (\sigma_E))$ . Обе схемы диффузно-зеркальные. Для их отличия схему, использующую коэффициенты accommodations (1.16), (1.17), будем называть газодинамической. С точки зрения кинематики взаимодействия большее число параметров газодинамической схемы позволяет описать произвольное количество индикатрис (отношение углового распределения потоков, отраженных от поверхности частиц, к величине падающего потока) рассеяния; диффузно-зеркальная схема описывает только зеркальные и диффузные (подчиняющиеся закону косинуса Ламберта) индикатрисы. В некоторых случаях используется так называемая схема Ньютона, учитывающая вклад в силы и моменты только нормальной составляющей импульса падающих частиц. Ньютоновская схема получается из выражения (1.22), если положить  $\varepsilon = 1$  и  $v/V_0 = 0$  ( $\sigma_n = 1$ ,  $\sigma_\tau = v/V_0 = 0$ ). Отметим, что вся теория возмущенного движения спутника в аэродинамическом потоке, построенная в книге [7], отвечает частному случаю (1.22), когда  $\varepsilon = 0$ ,  $v = 0$ .

Схемы (1.21) и (1.22) далеко не полностью отражают все многообразие процессов взаимодействия молекул с поверхностями. Существует целый ряд других способов их описания, однако эти способы невозможно реализовать без привлечения дополнительных параметров. Хотя картина взаимодействия в реальных условиях значительно сложнее, тем не менее на газодинамическом уровне описания процессов схемы (1.21) и (1.22) для подавляющего числа практических расчетов дают удовлетворительные результаты. Это связано со следующими обстоятельствами. Вообще говоря, параметры взаимодействия  $\sigma_n$ ,  $\sigma_\tau$ ,  $\sigma_E (v/V_0)$ ,  $\varepsilon$  в общем случае не постоянные, а зависят прежде всего от угла падения, энергии (скорости) падающих частиц и ряда других характеристик газа и поверхности. При определении аэродинамических характеристик тел, т. е. при интегрировании  $dF$  по поверхности тела, эти параметры считаются постоянными. Если же  $\sigma_n$ ,  $\sigma_\tau$  и  $v/V_0$  считать зависящими от угла падения, то для выпуклых тел, где реализуется широкий спектр местных (локальных) углов падения, эта зависимость при интегрировании осредняется таким образом, что практически всегда в интервале  $(0, 1)$  найдется такой набор параметров  $\sigma_n$ ,  $\sigma_\tau$ ,  $v/V_0$ , не зависящих от углов падения,

который с большой точностью дает те же значения интегральных аэродинамических характеристик этих тел. По этой причине выпуклые тела, в частности сфера, наиболее консервативны к различным схемам взаимодействия. Для предельно невыпуклого тела — пластины — картина противоположна — картина наиболее чувствительна к схемам взаимодействия, поскольку незначительные локальные «дефекты» схемы при интегрировании по пластине суммируются.

При решении обратных задач, т. е. при определении схем взаимодействия из интегральных аэродинамических характеристик тел, консерватизм выпуклых тел к схемам взаимодействия естественно приводит к тому, что сфера становится наиболее некорректным телом для восстановления локальных схем взаимодействия, пластина, наоборот, дает наиболее точные схемы. Кроме того, центральная симметрия сферы приводит к тому, что подъемная сила и момент, действующие на нелицующую сферу, равны нулю. Определить же два или три параметра схемы взаимодействия, исходя только из информации о силе лобового сопротивления, однозначно невозможно.

## СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Рассчитать аэродинамические характеристики реальных спутников, большинство из которых имеет сложную геометрию поверхности, довольно трудно. Даже при использовании методов численного интегрирования [4, 55] приходится прибегать к аппроксимации их форм набором ряда простых аэродинамических тел. В этом смысле простыми телами в аэродинамике прежде всего принято считать те тела, для которых аэродинамические характеристики можно получить аналитически в конечном виде. К ним относятся пластина, сфера, цилиндр, конус и некоторые другие. Исследованиям аэродинамических характеристик этих тел в различных режимах обтекания посвящено большое количество работ (в свободномолекулярном режиме обтекания, в частности, это работа [31]). Однако исследований вращающихся тел существенно меньше потому что при произвольном вращении тела режим его обтекания является нестационарным.

В настоящей главе в соответствии с [12, 28, 29, 33, 49, 59, 75, 76, 80, 94] в гипертепловом приближении и с учетом конечности скоростного отношения получены аэродинамические характеристики ряда простейших тел, причем основное внимание уделено именно аэродинамическим характеристикам, зависящим от вращения тел. Поскольку при исследовании динамики вращательного движения спутника используются аэродинамические характеристики тел, полученные в гипертепловом приближении, в § 2.4, 2.5 проведен анализ погрешностей гипертеплого приближения аэродинамических характеристик этих тел.

Анализ аэродинамических сил позволил, в частности, установить, что в условиях свободномолекулярного и континуального обтеканий эффект Магнуса имеет противоположные знаки. Таким образом, тождественное равенство нулю эффекта Магнуса может определять условную границу между континуальным и свободномолекулярным режимами обтекания. С существенное внимание уделено аппроксимации аэродинамич

ских характеристик для тел достаточно общей формы. Изучение динамических эффектов во вращении спутников было бы невозможно без такой аппроксимации.

## 2.1. Произвольно вращающиеся осесимметричные тела

Примем выражение для аэродинамической силы, действующей на элементарную площадку  $ds$ , в форме (1.22).

Пусть  $V$  — полная скорость элементарной площадки  $ds$  относительно атмосферы,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + [\omega \mathbf{r}]. \quad (2.1)$$

Сила и момент, действующие на тело,

$$\mathbf{F} = \int_S d\mathbf{F}; \quad \mathbf{M} = - \int_S [d\mathbf{F} \mathbf{r}]. \quad (2.2)$$

Здесь  $S$ , строго говоря, определяется условием  $(\mathbf{e}_V \cdot \mathbf{n}) \geq 0$ , однако, учитывая малость параметра  $Sh$  для реальных условий движения спутника ( $Sh \sim 10^{-1}$ ), область интегрирования с большой точностью можно определить условием  $(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \geq 0$  (подробно об этом см. § 2.5).

Подставляя (1.22) и (2.1) в (2.2), получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2; \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2,$$

где

$$\mathbf{F}_1 = -\rho V_0^2 \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \left[ (1 - \varepsilon) \mathbf{e}_{V_0} + 2\varepsilon (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \mathbf{n} \right] ds; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\rho V_0 \left\{ (1 - \varepsilon) \int_S \{ (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) [\omega \mathbf{r}] + ([\omega \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_{V_0} \} ds + 4\varepsilon \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) ([\omega \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n}) nds + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \int_S ([\omega \cdot \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n}) nds \right\}; \quad (2.4)$$

$$\mathbf{M}_1 = \rho V_0^2 \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \left\{ (1 - \varepsilon) \mathbf{e}_{V_0} + 2\varepsilon (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \mathbf{n} \right\} \times \mathbf{r} ds, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M}_2 = \rho V_0 \left\{ (1 - \varepsilon) \int_S \{ ([\omega \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{r}] + (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) [[\omega \mathbf{r}] \cdot \mathbf{r}] \} ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 4\varepsilon \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) ([\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}] \mathbf{n}) [\mathbf{n} \mathbf{r}] ds + \\
& + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \int_S ([\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}] \mathbf{n}) [\mathbf{n} \mathbf{r}] ds \}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{M}_2$  — сила и момент, не зависящие и зависящие от вращения тела соответственно. Следует отметить, что в выражениях  $\mathbf{F}_2$  и  $\mathbf{M}_2$  мы пренебрегли членами, пропорциональными  $\omega^2$ , из-за их малости в натуральных условиях. При

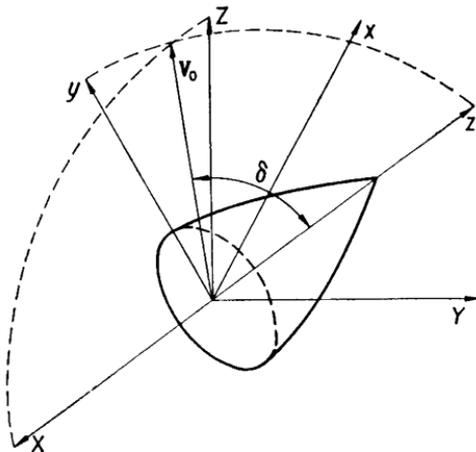


Рис. 5. Полусвязанная система координат.

симметричном вращении тел и для произвольного вращения сферы эти члены тождественно равны нулю. Предположим, что у спутника оси геометрической и динамической симметрий совпадают. Центр масс спутника совпадает с геометрическим центром. Введем правую прямоугольную систему координат  $x, y, z$  с осями  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , связанную со спутником следующим образом (рис. 5): центр системы совпадает с центром масс спутника, ось  $z$  совпадает с осью симметрии, ось  $y$  направлена так, что вектор  $V_0$  лежит в плоскости  $yz$ , причем  $(\mathbf{j}V_0) \geq 0$ . Угол между  $V_0$  и  $\mathbf{k}$  обозначим через  $\delta$ . Назовем эту систему координат полусвязанной. Для тел вращения полусвязанная система координат наиболее удобна, поскольку позволяет использовать аксиальную симметрию тела путем сведения угловых переменных к одной — пространственному углу атаки  $\delta$ .

В системе координат  $x, y, z$  векторы  $\mathbf{e}_{V_0}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{V_0} &= \mathbf{j} \sin \delta + \mathbf{k} \cos \delta; \quad \mathbf{n} = \mathbf{i}n_x + \mathbf{j}n_y + \mathbf{k}n_z; \\
\mathbf{r} &= \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z; \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}\omega_x + \mathbf{j}\omega_y + \mathbf{k}\omega_z. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Запишем выражения (2.3) — (2.6) для осесимметричного тела. Учтем при этом, что вследствие полной симметрии задачи относительно плоскости  $yz$  выражения, содержащие множитель

а или  $n_x$  в нечетной степени, после интегрирования обращаясь в нуль, т. е.

$$\int_S x^{(2k+1)} f(y, z, n_y, n_z, \delta) ds = 0;$$

$$\int_S n_x^{(2k+1)} f(y, z, n_y, n_z, \delta) ds = 0,$$

где  $f$  — произвольная функция своих параметров, а  $k = 0, 1, 2, \dots$  Подставляя (2.7) в (2.3) — (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 = & -\rho V_0^2 \left\{ \mathbf{j} \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) \left[ (1 - \epsilon) \sin \delta + \right. \right. \\ & + 2\epsilon (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) n_y + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} n_y \left. \right] ds + \\ & + \mathbf{k} \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) \left[ (1 - \epsilon) \cos \delta + \right. \\ & \left. + 2\epsilon (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) n_z + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} n_z \right] ds \left. \right\}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2 = & -\rho V_0 [\mathbf{i} (J_{11}\omega_x + J_{12}\omega_y + J_{13}\omega_z) + \\ & + \mathbf{j} (J_{21}\omega_x + J_{22}\omega_y + J_{23}\omega_z) + \mathbf{k} (J_{31}\omega_x + J_{32}\omega_y + J_{33}\omega_z)]. \end{aligned}$$

Для тела вращения  $J_{11} = J_{22} = J_{33} = J_{23} = J_{32} = 0$ ;

$$\begin{aligned} J_{12} = & (1 - \epsilon) \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) z ds + \\ & + 4\epsilon \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (zn_x - xn_z) n_x ds + \\ & + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (zn_x - xn_z) n_x ds; \end{aligned}$$

$$J_{13} = - (1 - \epsilon) \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) y ds;$$

$$\begin{aligned} J_{21} = & - (1 - \epsilon) \int_S [(n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) z + (zn_y - yn_z) \sin \delta] ds + \\ & + 4\epsilon \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (yn_z - zn_y) n_y ds + \\ & + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (yn_z - zn_y) n_y ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{31} &= (1 - \epsilon) \int_S [(n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) y + (yn_z - zn_y) \cos \delta] ds + \\
&+ 4\epsilon \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (yn_z - zn_y) n_z ds + \\
&+ (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (yn_z - zn_y) n_z ds; \\
\mathbf{M}_1 &= \rho V_0^2 \mathbf{i} \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) \left[ (1 - \epsilon) (z \sin \delta - y \cos \delta) + \right. \\
&+ 2\epsilon (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (zn_y - yn_z) + \\
&+ \left. (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} (zn_y - yn_z) \right] ds; \\
\mathbf{M}_2 &= \rho V_0 [\mathbf{i} (-D_{11}\omega_x + D_{12}\omega_y + D_{13}\omega_z) + \\
&+ \mathbf{j} (D_{21}\omega_x - D_{22}\omega_y + D_{23}\omega_z) + \mathbf{k} (D_{31}\omega_x + D_{32}\omega_y - D_{33}\omega_z)]; \\
&D_{12} = D_{21} = D_{31} = D_{13} = 0; \\
D_{11} &= (1 - \epsilon) \int_S [(y \cos \delta - z \sin \delta) (yn_z - zn_y) + \\
&+ (n_z \cos \delta + n_y \sin \delta) (z^2 + y^2)] ds + \\
&+ 4\epsilon \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (n_y z - yn_z)^2 ds + \\
&+ (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (n_y z - n_z y)^2 ds; \\
D_{22} &= (1 - \epsilon) \int_S [x (xn_z - zn_x) \cos \delta + (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) \times \\
&\times (x^2 + z^2)] ds + 4\epsilon \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (n_z x - n_x z)^2 ds + \\
&+ (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (n_z x - n_x z)^2 ds; \\
D_{23} &= (1 - \epsilon) \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) yz ds; \\
D_{32} &= (1 - \epsilon) \int_S [x (xn_z - zn_x) \sin \delta + (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) yz] ds; \\
D_{33} &= (1 - \epsilon) \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (x^2 + y^2) ds.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Если осесимметричное тело обладает еще плоскостью симметрии, перпендикулярной оси симметрии (двояксимметричное тело), то можно показать, что в выражениях (2.8) и (2.9) члены, содержащие интегралы вида

$$\int_S n_z y f(x, n_x, \delta) ds; \quad \int_S n_y z f(x, n_x, \delta) ds, \quad (2.10)$$

равны нулю. При этом  $F_1$  и  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) не меняют своего вида.

## 2. Тела простой геометрической формы

Рассмотрим ряд простейших геометрических тел (диск, сферу, цилиндр, конус) и получим для них выражения (2.8) и (2.9) в конечном виде.

**Диск.** Рассмотрим диск (рис. 6, а). Для диска имеем

$$n_x = n_y = 0; \quad x = R \cos \varphi;$$

$$n_z = \begin{cases} 1, & z > 0, \quad y = R \sin \varphi; \\ -1, & z < 0, \quad z = 0; \end{cases}$$

$$(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) = \pm \cos \delta; \quad n_z \cos \delta = |\cos \delta|;$$

$$n_z = \text{sign}(\cos \delta); \quad ds = R dR d\varphi.$$

Подставляя эти параметры в (2.8) и (2.9) и интегрируя полученные выражения, имеем

$$F_1 = -\rho V_0^2 \pi R^2 |\cos \delta| \left\{ j(1 - \varepsilon) \sin \delta + \right.$$

$$\left. + k \left[ (1 + \varepsilon) \cos \delta + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \text{sign}(\cos \delta) \right] \right\};$$

$$J_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad \mathbf{M}_1 = 0;$$

$$D_{11} = D_{22} = \left[ (1 - \varepsilon) \frac{\pi R^4}{2} + \varepsilon \pi R^4 \right] |\cos \delta| +$$

$$+ (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \frac{\pi R^4}{4}; \quad D_{23} = 0;$$

$$D_{33} = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \varepsilon) |\cos \delta|;$$

$$D_{32} = (1 - \varepsilon) \frac{\pi R^4}{4} \sin \delta \text{sign}(\cos \delta).$$
(2.11)

**Сфера.** Для интегрирования (2.8) и (2.9) по сфере (рис. 6, б) повернем систему координат  $x, y, z$  вокруг оси  $Ox$  так, чтобы

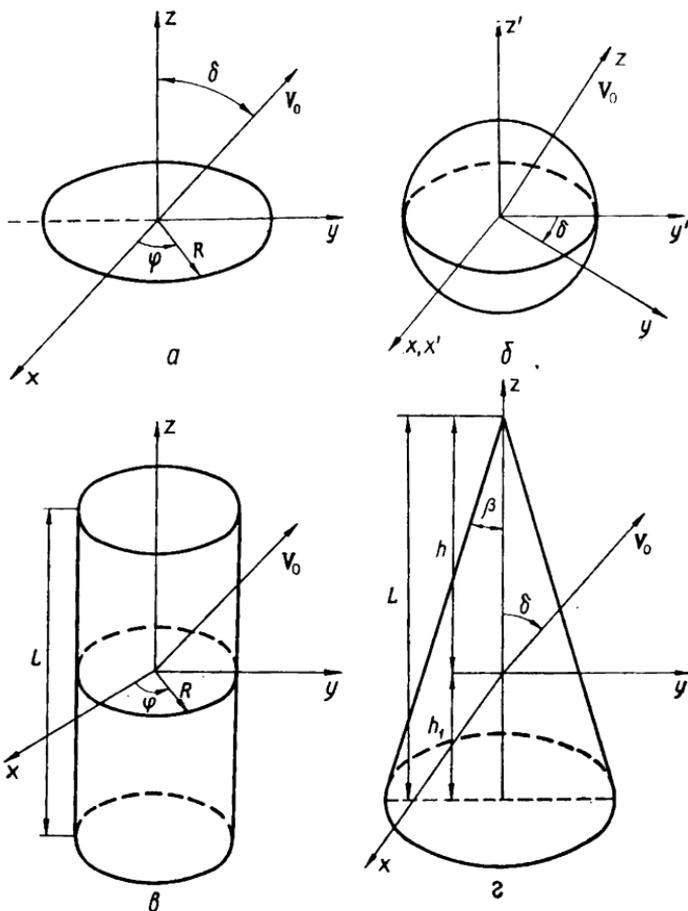


Рис. 6. Простейшие аэродинамические тела:  
 а — диск; б — сфера; в — цилиндр; г — конус.

ось  $z$  совпала с  $e_{V_0}$ . Тогда

$$\begin{aligned} x &= x'; & x' &= R \sin \theta \sin \varphi; \\ y &= y' \cos \delta + z' \sin \delta; & y' &= R \sin \theta \cos \varphi; \\ z &= -y' \sin \delta + z' \cos \delta; & z' &= R \cos \theta. \end{aligned}$$

Аналогично для  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}$

$$(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) = \cos \theta; \quad ds = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Область интегрирования определяется полусферой  $n_z \geq 0$

Интегрируя (2.8) и (2.9), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \rho V_0^2 \pi R^2 \left[ 1 + \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \right] (\mathbf{j} \sin \delta + \mathbf{k} \cos \delta); \\ \mathbf{M}_1 &= 0; \\ J_{12} &= \frac{2}{3} \pi R^3 \cos \delta (1 - \varepsilon) = -J_{21}; \\ J_{13} &= -(1 - \varepsilon) \frac{2}{3} \sin \delta \pi R^3 = -J_{31}; \\ D_{11} &= (1 - \varepsilon) \frac{3\pi R^4}{4}; \quad D_{22} = (1 - \varepsilon) \frac{\pi R^4}{4} (2 + \cos^2 \delta); \\ D_{33} &= (1 - \varepsilon) \frac{\pi R^4}{4} (2 + \sin^2 \delta); \\ D_{23} &= D_{32} = (1 - \varepsilon) \frac{\pi R^4}{4} \sin \delta \cos \delta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Цилиндр.** Для цилиндра (рис. 6, в) без оснований имеем

$$x = R \cos \varphi; \quad n_z = 0; \quad (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) = \sin \delta \sin \varphi;$$

$$y = R \sin \varphi; \quad |z| \leq \frac{L}{2}; \quad ds = R d\varphi dz;$$

$$z = z; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Подставляя эти выражения в (2.8) и (2.9) и интегрируя полученные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \rho V_0^2 \left\{ \mathbf{j} R L \sin \delta \left[ 2(1 - \varepsilon) \sin \delta + \frac{8}{3} \varepsilon \sin \delta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\pi}{2} \frac{v}{V_0} (1 - \varepsilon) \right] + \mathbf{k} 2 R L \sin \delta \cos \delta (1 - \varepsilon) \right\}; \\ J_{12} = J_{21} &= 0; \quad J_{13} = -J_{31} = -(1 - \varepsilon) \frac{\pi R^2 L}{2} \sin \delta; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{M}_1 = -i \rho V_0^2 \frac{\pi R^2 L}{2} \sin \delta \cos \delta (1 - \varepsilon);$$

$$D_{11} = 2a_0 \sin \delta + C_0; \quad D_{22} = a_0 \sin \delta + C_0;$$

$$D_{33} = b_0 \sin \delta; \quad D_{23} = D_{32} = 0,$$

где

$$a_0 = (1 - \varepsilon) \left( \frac{2}{3} R^3 L + \frac{1}{6} R L^3 \right) + \frac{2}{9} \varepsilon R L^3;$$

$$b_0 = 2(1 - \varepsilon) R^3 L; \quad C_0 = (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \frac{\pi R L^3}{24}.$$

**Конус.** Рассмотрим прямой неусеченный конус без основания. Поместим начало координат системы  $x, y, z$  в точку, являющуюся центром масс конуса при равномерном распределении плотности в его объеме (рис. 6, z). Уравнение конуса имеет вид

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - \operatorname{tg}^2 \beta (h - z)^2 &= 0; \\h &= \frac{L}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,7904L; \quad R = \operatorname{tg} \beta (h - z); \\x &= R \sin \varphi; \quad n_x = \cos \beta \sin \varphi; \\y &= R \cos \varphi; \quad n_y = \cos \beta \cos \varphi; \\z &= z; \quad n_z = \sin \beta.\end{aligned}$$

Область интегрирования конуса определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) &\geq 0; \quad \cos \beta \sin \delta \cos \varphi + \sin \beta \cos \delta \geq 0; \\&\cos \varphi \geq -\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \delta; \\-\arccos(-\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \delta) &\leq \varphi \leq \arccos(-\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \delta); \\-h_1 &\leq z \leq h; \\ \Pi &= \begin{cases} \pi, & \delta \leq \beta; \\ \arccos(-\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \delta), & \beta < \delta < \pi - \beta; \\ 0, & \delta \geq \pi - \beta. \end{cases}\end{aligned}$$

Используя эти соотношения и интегрируя (2.8) и (2.9), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= -2\rho V_0^2 \operatorname{tg} \beta L^2 \left\{ \mathbf{j} \left[ (1 - \epsilon) \sin \delta (\cos \beta \sin \delta T_1 + \right. \right. \\&\quad + \Pi \sin \beta \cos \delta) + 2\epsilon \cos \beta (\cos^2 \beta \sin^2 \delta T_3 + \\&\quad + 2 \sin \beta \cos \beta \sin \delta \cos \delta T_2 + \sin^2 \beta \cos^2 \delta T_1) + \\&\quad \left. + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \cos \beta (\cos \beta \sin \delta T_2 + \sin \beta \cos \delta T_1) \right] + \\&\quad + \mathbf{k} \left[ (1 - \epsilon) \cos \delta (\cos \beta \sin \delta T_1 + \Pi \sin \beta \cos \delta) + \right. \\&\quad + 2\epsilon \sin \beta (\cos^2 \beta \sin^2 \delta T_2 + 2 \sin \beta \cos \beta \sin \delta \cos \delta T_1 + \\&\quad + \Pi \sin^2 \beta \cos^2 \delta) + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \sin \beta (\cos \beta \sin \delta T_1 + \\&\quad \left. \left. + \Pi \sin \beta \cos \delta) \right] \right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{12} &= (1 - \epsilon) 2P_4 (\cos \beta \sin \delta T_1 + \Pi \sin \beta \cos \delta) + \\
&+ 8\epsilon \cos \beta (P_4 \cos \beta - P_5 \sin \beta) [\cos \beta \sin \delta (T_1 - T_3) + \\
&+ \sin \beta \cos \delta T_4] + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} 2T_4 (P_4 \cos \beta - P_5 \sin \beta); \\
J_{13} &= - (1 - \epsilon) 2P_5 (\cos \beta \sin \delta T_2 + \sin \beta \cos \delta T_1); \\
J_{21} &= 2(1 - \epsilon) [P_4 (2T_1 \cos \beta \sin \delta + \Pi \sin \beta \cos \delta) - \\
&P_5 T_1 \sin \beta \cos \delta] + 8\epsilon \cos \beta (P_5 \sin \beta - P_4 \cos \beta) \times \\
&\times (T_3 \cos \beta \sin \delta + T_2 \sin \beta \cos \delta) + \\
&+ 2(1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} T_2 \cos \beta (P_5 \sin \beta - P_4 \cos \beta); \\
J_{31} &= 2(1 - \epsilon) [P_5 2T_1 \sin \beta \cos \delta + T_2 \cos \beta \sin \delta] - \\
&- P_4 T_4 \cos \beta \cos \delta] + 8\epsilon \sin \beta (P_5 \sin \beta - P_4 \cos \beta) \times \\
&\times (\cos \beta \sin \delta T_2 + \sin \beta \cos \delta T_1) + \\
&+ 2(1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} T_1 \sin \beta (P_5 \sin \beta - P_4 \cos \beta); \\
\mathbf{M}_1 &= 2\rho V_0^2 \mathbf{i} \left\{ (1 - \epsilon) [P_4 \sin \delta (T_1 \cos \beta \sin \delta + \right. \\
&+ \Pi \sin \beta \cos \delta) - P_5 \cos \delta (\cos \beta \sin \delta T_2 + \cos \beta \cos \delta T_1)] + \\
&+ 2\epsilon (P_4 \cos \beta - P_5 \sin \beta) (\cos^2 \beta \sin^2 \delta T_3 + \\
&+ 2 \cos \beta \sin \beta \cos \delta \sin \delta T_2 + \sin^2 \beta \cos^2 \delta T_1) + \\
&\left. + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} T_1 (P_4 \cos \beta - P_5 \sin \beta) \right\}; \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{11} &= (1 - \epsilon) 2 [P_1 (2 \sin \beta \cos \delta T_2 + \cos \beta \sin \delta T_3) - \\
&- P_2 (\cos \beta \cos \delta T_2 + \sin \beta \sin \delta T_1) + P_3 (\Pi \sin \beta \cos \delta + \\
&+ 2T_1 \cos \beta \sin \delta)] + 8\epsilon (P_1 \sin^2 \beta - 2P_2 \sin \beta \cos \beta + \\
&+ P_3 \cos^2 \beta) (T_3 \cos \beta \sin \delta + T_2 \sin \beta \cos \delta) + \\
&+ 2(1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} T_2 (P_1 \sin^2 \beta - 2P_2 \sin \beta \cos \beta + P_3 \cos^2 \beta); \\
D_{22} &= 2(1 - \epsilon) \left\{ P_1 \left[ \frac{1}{3} \cos \beta \sin \delta T_1^3 + 2 \sin \beta \cos \delta T_4 \right] - \right. \\
&- P_2 \cos \beta \cos \delta T_4 + P_3 (\cos \beta \sin \delta T_1 + \Pi \sin \beta \cos \delta) \left. \right\} + \\
&+ 8\epsilon (P_1 \sin^2 \beta - 2P_2 \sin \beta \cos \beta + P_3 \cos^2 \beta) \times \\
&\times [(T_1 - T_3) \cos \beta \sin \delta + \sin \beta \cos \delta T_4] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2(1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} (P_1 \sin^2 \beta - 2P_2 \sin \beta \cos \beta + P_3 \cos^2 \beta) T_4; \\
 D_{33} &= 2(1 - \varepsilon) P_1 (T_1 \cos \beta \sin \delta + \Pi \sin \beta \cos \delta); \\
 D_{23} &= 2(1 - \varepsilon) P_2 (T_2 \cos \beta \sin \delta + T_1 \sin \beta \cos \delta); \\
 D_{32} &= 2(1 - \varepsilon) [P_1 T_4 \sin \beta \sin \delta + \\
 &+ P_2 (\sin 2\Pi \cos \beta \sin \delta + T_1 \sin \beta \cos \delta)],
 \end{aligned}$$

где

$$P_1 = \operatorname{tg}^3 \beta \frac{L^4}{4} \frac{1}{\cos \beta}; \quad P_2 = \operatorname{tg}^2 \beta L^3 \left( \frac{h}{3} - \frac{L}{4} \right) \frac{1}{\cos \beta};$$

$$P_3 = \operatorname{tg} \beta \left[ \frac{h_1^4 - h^4}{4} + \frac{h}{3} (h_1^3 + h^3) \right] \frac{1}{\cos \beta};$$

$$P_4 = \operatorname{tg} \beta L^2 \left( \frac{h}{2} - \frac{L}{3} \right) \frac{1}{\cos \beta}; \quad P_5 = \operatorname{tg}^2 \beta \frac{L^3}{3} \frac{1}{\cos \beta};$$

$$T_1 = \sin \Pi; \quad T_2 = \frac{1}{2} \Pi + \frac{1}{4} \sin 2\Pi;$$

$$T_3 = \sin \Pi - \frac{1}{3} \sin^3 \Pi; \quad T_4 = \frac{1}{2} \Pi - \frac{1}{4} \sin 2\Pi.$$

Выражения (2.14) справедливы также для усеченного конуса, где  $L$  — высота усеченного конуса, а  $h$  и  $h_1$  имеют тот же смысл относительно усеченного конуса.

Итак, для произвольного выпуклого тела вращения имеются две силы  $F_{1y}$  и  $F_{1z}$  и один момент  $M_{1x}$  (восстанавливающий), не зависящие от вращения тела. Силы и моменты, зависящие от вращения тела, определяются с помощью матриц

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} &= -\rho V_0 \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & 0 & 0 \\ J_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \begin{pmatrix} M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{pmatrix} &= \rho V_0 \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -D_{22} & D_{23} \\ 0 & D_{32} & -D_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Переход от полусвязанной системы координат к системе координат, связанной с вектором скорости  $V_0$ , осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_n &= (F_y \sin \delta + F_z \cos \delta) \mathbf{e}_{V_0}; \\
 \mathbf{F}_u &= (-F_y \cos \delta + F_z \sin \delta) \mathbf{e}_{\perp V_0},
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $F_n$  — сила лобового сопротивления;  $F_{\Pi}$  — подъемная сила. Вращение диска не приводит к появлению добавочных сил, зависящих от его вращения. Лобовое сопротивление и подъемная сила для него соответственно имеют вид

$$F_n = -\rho V_0^2 \pi R^2 |\cos \delta| \left[ 1 + \epsilon \cos 2\delta + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} |\cos \delta| \right];$$

$$F_{\Pi} = \rho V_0^2 \pi R^2 |\cos \delta| \left[ \epsilon \sin 2\delta + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \sin \delta \operatorname{sign}(\cos \delta) \right].$$

Для сферы

$$F_n = -\rho V_0^2 \pi R^2 \left[ 1 + \frac{2}{3} (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \right];$$

$$F_{\Pi} = -\rho V_0 (1 - \epsilon) \frac{2}{3} \pi R^3 \omega_x.$$

Таким образом, вращение сферы не влияет на ее лобовое сопротивление, а подъемная сила обусловлена только вращением сферы относительно оси  $x$ . Причем подъемная сила отрицательна [74].

Для цилиндрической поверхности

$$F_n = -\rho V_0^2 \left\{ RL \sin^2 \delta \left[ 2(1 - \epsilon) \sin \delta + \frac{8}{3} \epsilon \sin \delta + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\pi}{2} \frac{v}{V_0} (1 - \epsilon) \right] + 2RL \sin \delta \cos^2 \delta (1 - \epsilon) \right\} -$$

$$-\rho V_0 \omega_x (1 - \epsilon) \frac{\pi R^2 L}{2} \sin \delta \cos \delta;$$

$$F_{\Pi} = \rho V_0^2 \sin \delta \cos \delta \left\{ RL \left[ 2(1 - \epsilon) \sin \delta + \frac{8}{3} \epsilon \sin \delta + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\pi}{2} \frac{v}{V_0} (1 - \epsilon) \right] - 2RL \sin \delta (1 - \epsilon) \right\} -$$

$$-\rho V_0 \omega_x (1 - \epsilon) \frac{\pi R^2 L}{2} \sin^2 \delta.$$

Таким образом, для цилиндра лобовое сопротивление и подъемная сила зависят от вращения тела, причем часть подъемной силы, зависящей от вращения тела, также отрицательна.

Аналогичные выражения для сил можно получить и для конуса [76].

Приведем выражения  $J_{ij}$  и  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $F_1$  и  $M_1$  для диска, цилиндра и сферы в рамках схемы (1.21). Для диска

$$F_1 = -\rho V_0^2 |\cos \delta| \pi R^2 \left\{ j \sigma_{\tau} \sin \delta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{k} \left[ (2 - \sigma_n) \cos \delta + \sigma_n \frac{v}{V_0} \operatorname{sign}(\cos \delta) \right]; \\
D_{11} = D_{22} &= \frac{\pi R^4}{4} \left[ 2(2 - \sigma_n) |\cos \delta| + \sigma_n \frac{v}{V_0} \right]; \quad (2.17) \\
D_{33} &= \sigma_\tau |\cos \delta| \frac{\pi R^4}{2}; \quad D_{23} = 0; \\
D_{32} &= \frac{\pi R^4}{4} \sigma_\tau \sin \delta \operatorname{sign}(\cos \delta).
\end{aligned}$$

Для цилиндра

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= -\rho V_0^2 \sin \delta RL \left\{ \mathbf{j} \left[ \frac{4}{3} \sin \delta (2 - \sigma_n - \sigma_\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi}{2} \sigma_n \frac{v}{V_0} + 2\sigma_\tau \sin \delta \right] + \mathbf{k} 2\sigma_\tau \cos \delta \right\}; \\
\mathbf{M}_1 &= -\mathbf{i} \frac{\pi}{2} \rho V_0^2 R^2 L \sin \delta \cos \delta \sigma_\tau; \\
J_{13} = -J_{31} &= -\frac{\pi}{2} \sigma_\tau \sin \delta R^2 L; \quad (2.18) \\
D_{11} = 2a_0 \sin \delta - b_0; \quad D_{22} &= a_0 \sin \delta - b_0; \\
D_{33} &= 2\sigma_\tau \sin \delta R^3 L; \\
a_0 &= \frac{1}{9} (2 - \sigma_n) RL^3 + \frac{1}{18} \sigma_\tau RL^3 + \frac{2}{3} \sigma_\tau R^3 L; \\
b_0 &= \frac{\pi}{24} \sigma_n \frac{v}{V_0} RL^3.
\end{aligned}$$

Для сферы

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= -\rho V_0^2 R^2 2\pi C_0 (\mathbf{j} \sin \delta + \mathbf{k} \cos \delta); \\
C_0 &= \frac{2 - \sigma_n}{4} + \frac{\sigma_n}{3} \frac{v}{V_0} + \frac{\sigma_\tau}{4}; \\
J_{12} = -J_{21} &= \frac{2\pi}{3} \sigma_\tau R^3 \cos \delta; \\
J_{13} = -J_{31} &= -\frac{2\pi}{3} \sigma_\tau R^3 \sin \delta; \quad (2.19) \\
D_{11} = \sigma_\tau \frac{3\pi}{4} R^4; \quad D_{22} &= \sigma_\tau \frac{\pi R^4}{4} (2 + \cos^2 \delta); \\
D_{33} = \sigma_\tau \frac{\pi R^4}{4} (2 + \sin^2 \delta); \quad D_{23} = D_{32} &= \frac{\sigma_\tau \pi R^4}{4} \sin \delta \cos \delta.
\end{aligned}$$

Выражения (2.17) — (2.19) совпадают с выражениями (2.11) — (2.13) в предельных случаях чисто диффузной и чисто зеркальной схем взаимодействия.

### Р.3. Эффект Магнуса

Вчитывая свойства матриц (2.15), можно сказать, что вращение произвольного осесимметричного тела относительно оси  $x$  (симметричное вращение) и относительно оси  $y$  не влияет на лобовое сопротивление и подъемную силу, а приводит только к появлению боковой силы  $F_x$  — силы Магнуса. В случае симметричного вращения тела (см. (2.8))

$$F_x = \rho V_0 (1 - \varepsilon) \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) y \omega_z ds = \\ = \rho V_0 (1 - \varepsilon) \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) y \omega_z ds. \quad (2.20)$$

Это выражение знакоопределено. Действительно,  $\varepsilon \leq 1$ , область интегрирования  $S$  определяется из условия  $(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \geq 0$ , на освещенной поверхности  $y \geq 0$ , поскольку полуэллипсоидная система координат определена таким образом, что  $(V_{0y})_0 > 0$ . Следовательно,  $F_x \geq 0$  и направлена по вектору  $[\mathbf{V}_0 \boldsymbol{\omega}]$ . Доказать знакоопределенность коэффициента  $J_{12}$ , т.е. силы Магнуса, обусловленной вращением тела относительно оси  $y$  для произвольного тела, довольно трудно, однако для частного случая сферы имеем

$$F_x = -\rho V_0 J_{12} \omega_y = -\rho V_0 \frac{2}{3} \pi R^3 \cos \delta (1 - \varepsilon) \omega_y.$$

Поскольку  $\delta \in [0, \pi]$ , то  $F_x$  знакоопределена и отрицательна, т.е.  $F_x$  также направлена по вектору  $[\mathbf{V}_0 \boldsymbol{\omega}]$ . Легко видеть, что отрицательная подъемная сила, обусловленная вращением тела относительно оси  $x$ , та же сила Магнуса, поскольку она направлена по вектору  $[\mathbf{V}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}]$ , но в данном случае приобрела смысл подъемной силы, так как расположена в плоскости векторов  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{k}$  и перпендикулярна  $\mathbf{V}_0$ . Следует обратить внимание, что обычный эффект Магнуса для континуального обтекания вращающихся тел направлен по вектору  $[\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_0]$ , т.е. в направлении, обратном направлению свободномолекулярного эффекта Магнуса. Впервые на это обстоятельство (по отношению к подъемной силе) обратил внимание Вонг [94], рассматривая частный случай вращения сферы в потоке разреженного газа. Хотя на первый взгляд знакопеременность эффекта Магнуса относительно режима обтекания кажется парадоксальной, на самом деле она глубоко физична и понятна из следующих соображений. Обратимся к рис. 7. Пусть вектор вращения тела расположен нормально к плоскости рисунка. Рассмотрим результирующие силы, действующих на тело в симметричных относительно оси  $y$  точках  $A$  и  $B$ . Пусть  $\mathbf{V}_n$  —

линейная скорость поверхности тела,  $V_{\text{п}}$  — вектор поступательной скорости. Тогда  $F_a$  — результирующие аэродинамические силы, действующие на тело в точках  $A$  и  $B$ . Суммирование этих сил по левой полуплоскости дает равнодействующую силу  $F_M^c$ , направленную по оси  $x$  в отрицательном направлении. Аналогичная результирующая сила в полуплоскости  $y >$  не компенсирует ее, поскольку поток молекул на затененную

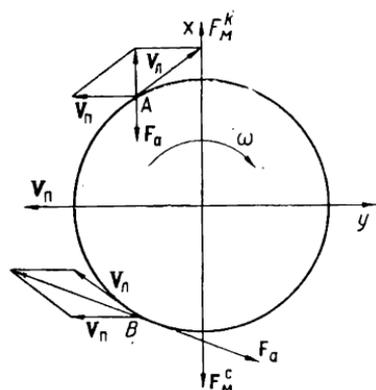


Рис. 7. Эффект Магнуса.

часть тела существенно меньше. Если бы тело вращалось в континуальной среде, то вращение его привело бы к возрастанию скорости потока газа в верхней полуплоскости и уменьшению нижней. Возникшая при этой разнице давления в окрестности тела привела бы к силе Магнуса  $F_M^k$ , действующей в положительном направлении оси  $x$ . Таким образом, принципиальное различие свободномолекулярного и континуального эффектов Магнуса обусловлено силовым воздействием набегающего

потока непосредственно на поверхность тела в первом случае и перераспределением давления в его окрестности во втором. Исчезновения эффекта Магнуса при этом естественно ожидать в период формирования пограничного слоя, переводящего силовое воздействие с поверхности тела в его окрестность.

Сила Магнуса пропорциональна параметру  $Sh$  и в свободномолекулярной области мала. С другой стороны, она является единственной аэродинамической силой, знакопеременной вследствие режима обтекания, и это обстоятельство имеет глубокие методологические следствия. Дело в том, что между свободномолекулярным и континуальными режимами обтекания тел существует область переходного режима, в которой в той или иной мере проявляются эффекты свободномолекулярных и континуальных течений, так что строгой границы раздела двух принципиально различных областей — свободномолекулярной и континуальной — нет. Знакопеременность силы Магнуса в настоящее время, пожалуй, единственный эффект, который в явном виде может определить условную границу раздела двух режимов обтекания. Для каждой конфигурации тела, его размеров и параметра Струхала такой границей будет режим обтекания (высота полета спутника), при котором эффект Магнуса равен нулю.

## 2.4. Аэродинамические характеристики вращающихся тел с учетом конечности скоростного отношения

Влияние конечности скоростного отношения на аэродинамические характеристики вращающихся тел рассматривалось в работах [80, 94]. В работе [94] получены выражения дополнительных сил (зависящих от вращения тела), действующих на сферу, вращающуюся перпендикулярно скоростному потоку, в работе [80] — выражения сил, действующих на произвольное симметрично вращающееся тело.

В соответствии с работой [49] рассмотрим выпуклое тело вращения, закрученное относительно оси симметрии с угловой скоростью  $\omega$ . Однородный свободномолекулярный поток обтекает тело со среднемолекулярной скоростью  $V_\infty$  под углом  $\delta$  к оси вращения. Введем следующие системы координат (рис. 8). неподвижную систему  $x^0 y^0 z^0$  с ортами  $i^0, j^0, k^0$ , осью  $z^0$ , направленной по оси вращения тела, и осью  $y^0$ , направленной таким образом, чтобы вектор  $V_\infty$  лежал в плоскости  $z^0 y^0$ .

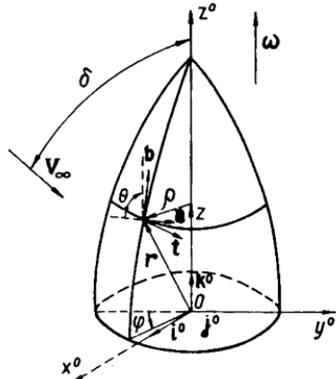


Рис. 8. Системы координат (неподвижная и локальная), связанные с произвольным симметрично вращающимся телом.

На поверхности тела в точке с координатами  $\rho, z, \varphi$  построим связанную с центром площадки  $ds$  локальную систему координат с ортами  $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ , заданными следующим образом:  $\mathbf{n}$  — внутренняя нормаль к поверхности,  $\mathbf{t}$  направлен по вектору  $[\mathbf{k}^0 \cdot \mathbf{r}]$ ,  $\mathbf{b} = [\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}]$ . Тогда

$$\omega = \omega \mathbf{k}^0; \quad \delta = \arccos \left( - \frac{V_\infty}{|V_\infty|} \mathbf{k}^0 \right);$$

$$V_\infty = V_\infty (\sin \delta \mathbf{j}^0 - \cos \delta \mathbf{k}^0);$$

$$\mathbf{n} = - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i}^0 + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j}^0 - \cos \theta \mathbf{k}^0;$$

$$\mathbf{b} = - \cos \theta \sin \varphi \mathbf{i}^0 + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{j}^0 + \sin \theta \mathbf{k}^0;$$

$$\mathbf{t} = \cos \varphi \mathbf{i}^0 + \sin \varphi \mathbf{j}^0; \quad \theta = \arccos (- \mathbf{n} \mathbf{k}^0).$$

Скорость встречи элементарной площадки  $ds$  с набегающим потоком  $\mathbf{V} = V_\infty - [\omega \mathbf{r}]$ .

Учитывая (1.8) и (1.10), для давления и касательных напряжений получаем

$$P_{ni} = A\xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}); \quad P_{bi} = A(\mathbf{s} \cdot \mathbf{b})\chi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}); \\ P_{ti} = A(\mathbf{s} \cdot \mathbf{t})\chi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}),$$

где

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{s}_\infty \cdot \mathbf{n} = s_\infty (\sin \delta \sin \theta \cos \varphi + \cos \delta \cos \theta) = \\ = a \cos \varphi + c; \\ (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{s}_\infty \cdot \mathbf{t} - [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}] \cdot \mathbf{t} = s_\infty \sin \delta \sin \varphi - \Omega \rho; \\ (\mathbf{s} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{s}_\infty \cdot \mathbf{b} = s_\infty (\sin \delta \cos \theta \cos \varphi - \cos \delta \sin \theta); \quad (2.2) \\ \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{2RT_\infty}}.$$

Учитывая вклад отраженных молекул, в рамках г. модели амплитудной схемы имеем

$$P_n = (2 - \sigma_n) P_{ni} + \sigma_n P_W; \quad P_t = \sigma_\tau P_{ti}; \\ P_b = \sigma_\tau P_{bi}; \quad P_W = A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{T_W}{T_\infty} \right)^{1/2} \chi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}).$$

Таким образом, вследствие симметричного вращения тела и меняется только касательное напряжение  $P_t$  на величину

$$P_t^0 = A\sigma_\tau \chi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \{- [\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{r}] \cdot \mathbf{t}\}.$$

Выражения для силы и момента, действующих на элементарную площадку  $ds$ , имеют вид

$$d\mathbf{F} = (P_n \cdot \mathbf{n} + P_b \cdot \mathbf{b} + P_t \cdot \mathbf{t}) ds = AB(z_m) \mathbf{n} + A\sigma_\tau \chi(z_m) \mathbf{s}; \\ d\mathbf{M} = [\mathbf{r} d\mathbf{F}] = AB(z_m) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}] + A\sigma_\tau \chi(z_m) [\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}]; \\ \mathbf{r} = \rho \sin \varphi \mathbf{i}^0 - \rho \cos \varphi \mathbf{j}^0 + z \mathbf{k}^0; \\ B(z_m) = (2 - \sigma_n) \xi(z_m) + \sigma_n \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{T_W}{T_\infty} \right)^{1/2} \chi(z_m) - \\ - z_m \sigma_\tau \chi(z_m); \quad (2.2)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_\infty - [\mathbf{\Omega} \mathbf{r}] = -\Omega \rho \cos \varphi \mathbf{i}^0 + \\ + (s_\infty \sin \delta - \Omega \rho \sin \varphi) \mathbf{j}^0 - s_\infty \cos \delta \mathbf{k}^0; \\ [\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}] = [s_\infty (\rho \cos \varphi \cos \delta - z \sin \delta) + \Omega \rho z \sin \varphi] \mathbf{i}^0 + \\ + (s_\infty \cos \delta \sin \varphi \rho - \Omega \rho z \cos \varphi) \mathbf{j}^0 + (s \sin \delta - \Omega \rho^2) \mathbf{k}^0; \\ [\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}] = \cos \varphi (\rho \cos \theta - z \sin \theta) \mathbf{i}^0 + \\ + \sin \varphi (\rho \cos \theta - z \sin \theta) \mathbf{j}^0.$$

Используя (2.21), представим (2.22) в проекциях на неподвижные оси координат и проинтегрируем по всей поверхности тела. Получим

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} [-E \sin \theta \sin \varphi + K(N \cos \varphi - s_{\infty} H \cos \theta \sin \varphi)] ds; \\
 J &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} [E \sin \theta \cos \varphi + K(N \sin \varphi + s_{\infty} H \cos \theta \cos \varphi)] ds; \\
 K &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} (-E \cos \theta + K s_{\infty} H \sin \theta) ds; \\
 & \hspace{25em} (2.23)
 \end{aligned}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} [E \rho_1 \cos \varphi - K(N z \sin \varphi + s_{\infty} H \rho_2 \cos \varphi)] ds;$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} [E \rho_1 \sin \varphi + K(N z \cos \varphi - s_{\infty} H \rho_2 \sin \varphi)] ds;$$

$$N = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} KN \rho ds,$$

и

$$L = \left[ (C_{22} - \sigma_n) \xi (a \cos \varphi + c) + \sigma_n \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_{\infty}}} \chi (a \cos \varphi + c) \right];$$

$$K = \sigma_{\tau} \chi (a \cos \varphi + c); \quad N = s_{\infty} \sin \delta \sin \varphi - \Omega \rho;$$

$$H = \sin \delta \cos \theta \cos \varphi - \cos \delta \sin \theta; \quad ds = \frac{\rho}{\sin \theta} d\varphi dz;$$

$$\rho_1 = \rho \cos \theta - z \sin \theta; \quad \rho_2 = \rho \sin \theta + z \cos \theta.$$

Используя четность функций  $\chi (a \cos \varphi + c)$  и  $\xi (a \cos \varphi + c)$ , нетрудно доказать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \chi (a \cos \varphi + c) \sin \varphi d\varphi = 0; \\
 & \int_0^{2\pi} \xi (a \cos \varphi + c) \sin \varphi d\varphi = 0; \\
 & \int_0^{2\pi} \chi (a \cos \varphi + c) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 0.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Выпишем составляющие сил и моментов, зависящие от угловой скорости вращения тела. Выражения аэродинамических характеристик невращающихся осесимметричных тел с учетом конечности  $s$  можно найти в работе [3]. Используя (2.2) получаем

$$\begin{aligned}
 F_{x^0}^{\omega} &= -A \int_Z \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_{\tau} \chi (a \cos \varphi + c) \frac{\Omega \rho^2}{\sin \theta} \cos \varphi d\varphi dz; \\
 F_{y^0}^{\omega} &= F_{z^0}^{\omega} = M_{x^0}^{\omega} = 0; \\
 M_{y^0}^{\omega} &= -A \int_Z \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_{\tau} \chi (a \cos \varphi + c) \Omega \rho^2 z \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} d\varphi dz; \\
 M_{z^0}^{\omega} &= -A \int_Z \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_{\tau} \chi (a \cos \varphi + c) \frac{\Omega \rho^3}{\sin \theta} d\varphi dz.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Следовательно, симметричное вращение тела не влияет на лобовое сопротивление, подъемную силу и восстанавливающий момент. В работе [80] для аналогичных условий показано, что симметричное вращение тел приводит к появлению добавочных сил и моментов  $F_{y^0}^{\omega}$ ,  $F_{z^0}^{\omega}$  и  $M_{x^0}^{\omega}$ , зависящих от вращения тела, но пропорциональных при медленных вращениях малой величины  $Sh$ . Использование соотношений (2.24) показывает, что  $F_{y^0}^{\omega}$ ,  $F_{z^0}^{\omega}$  и  $M_{x^0}^{\omega}$  тождественно равны нулю.

Как и для выражения (2.20), докажем знакоопределенность силы Магнуса  $F_{x^0}^{\omega}$  из (2.25). Имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \chi (a \cos \varphi + c) \cos \varphi d\varphi &= 2 \int_0^{\pi} \chi (a \cos \varphi + c) \cos \varphi d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \chi (a \cos \varphi + c) \cos \varphi d\varphi - 2 \int_0^{\pi/2} \chi (-a \cos \varphi + c) \cos \varphi d\varphi
 \end{aligned}$$

Так как  $s_{\infty} > 0$  и  $\delta, \theta \in [0, \pi]$ , то  $a = s_{\infty} \sin \delta \sin \theta \geq 0$  и  $a \cos \varphi + c \geq -a \cos \varphi + c$  для  $\varphi \in [0, \pi/2]$ , а  $\chi(z_m)$  является положительной монотонно возрастающей функцией  $z_m$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \chi (a \cos \varphi + c) &\geq \chi (-a \cos \varphi + c); \\
 f(z) &= \int_0^{2\pi} \chi (a \cos \varphi + c) \cos \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} [\chi (a \cos \varphi + c) - \\
 &\quad - \chi (-a \cos \varphi + c)] \cos \varphi d\varphi \geq 0.
 \end{aligned}$$

Положим для любых  $z$

$$\int_z^{\infty} f(z) \rho^2(z) \frac{dz}{\sin \theta} \geq 0.$$

Таким образом, с учетом тепловых скоростей молекул сила Милнуса также отрицательна и направлена по вектору  $[\omega \mathbf{V}_\infty]$ .

Ниже выражения (2.23) проинтегрированы для ряда простейших геометрических тел — диска, сферы, цилиндрической и конической поверхностей. Для диска, цилиндра и сферы моменты сил рассмотрены относительно их геометрического центра, для конуса — относительно середины основания. Для конуса интегралы (2.23) аналитически берутся только в предельных случаях продольного и поперечного обтеканий. Постановку для сферы не имеет смысла пространственный угол  $\delta$ , то  $\delta = (\mathbf{V}_\infty \hat{\omega})$ . Для диска

$$\begin{aligned} F_{x^0}(\omega) = M_{y^0}(\omega) = 0; \quad M_{z^0}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} DR^4 [\chi(s_\infty \cos \delta) + \\ &+ \chi(-s_\infty \cos \delta)]; \quad M'_{z^0}(\omega) = -\pi^{3/2} DR^3 s_\infty \cos \delta; \\ M''_{z^0}(\omega) &= -\pi DR^4. \end{aligned}$$

Для цилиндра

$$\begin{aligned} F_{x^0}(\omega) &= -\pi^{3/2} DLR^2 s_\infty \sin \delta; \\ M_{z^0}(\omega) &= -2\pi DLR^3 \exp(-s_1) [(1 + 2s_1) I_0(s_1) + 2s_1 I_1(s_1)]; \\ M'_{z^0}(\omega) &= -4\sqrt{\pi} DLR^3 s_\infty \sin \delta; \\ M''_{z^0}(\omega) &= -2\pi DR^3 L. \end{aligned}$$

Для конуса при  $\delta = 0$

$$\begin{aligned} F_{x^0}(\omega) = M_{y^0}(\omega) = 0; \quad M_{z^0}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} DLR^3 \frac{\chi(s_\infty \sin \beta)}{\cos \beta}; \\ M'_{z^0}(\omega) &= -\pi^{3/2} DLR^3 s_\infty \operatorname{tg} \beta; \quad M''_{z^0}(\omega) = -\frac{\pi}{2} DLR^3, \end{aligned}$$

при  $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} F_{x^0}(\omega) &= -\frac{\pi^{3/2}}{3} DLR^2 s_\infty; \quad M_{y^0}(\omega) = -\frac{\pi^{3/2}}{12} DL^2 R^2 s_\infty; \\ M_{z^0}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} DLR^3 \frac{1}{\cos \beta} \exp(-s_2) [(1 + 2s_2) I_0(s_2) + \\ &+ 2s_2 I_1(s_2)]; \\ M'_{z^0}(\omega) &= -\sqrt{\pi} DLR^3 s_\infty; \quad M''_{z^0}(\omega) = -\frac{\pi}{2} DLR^3. \end{aligned}$$

Для сферы

$$F_{x^0}(\omega) = -\frac{4}{3} \pi^{3/2} DR^3 s_\infty \sin \delta; \quad M_{y^0}(\omega) = 2\pi DR^4 \cos \delta \sin \delta C;$$

$$M_{z^0}(\omega) = -2\pi DR^4 (B + C \cos^2 \delta);$$

$$M'_{y^0}(\omega) = -\frac{\pi^{3/2}}{2} DR^4 \cos \delta \sin \delta s_{\infty};$$

$$M_{y^0}^0(\omega) = 0; \quad M'_{z^0}(\omega) = -\frac{\pi^{3/2}}{2} DR^4 (3 - \cos^2 \delta) s_{\infty};$$

$$M_{z^0}^0(\omega) = -\frac{8}{3} \pi DR^4;$$

$$B = \frac{1}{2} s_{\infty}^{-3} \left[ \frac{1}{2} \exp(-s_{\infty}^2) s_{\infty} \left( 3s_{\infty}^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left( 3s_{\infty}^4 + s_{\infty}^2 + \frac{1}{4} \right) \operatorname{erf} s_{\infty} \right];$$

$$C = \frac{1}{2} s_{\infty}^{-3} \left[ \frac{1}{2} \exp(-s_{\infty}^2) s_{\infty} \left( -s_{\infty}^2 + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left( -s_{\infty}^4 + s_{\infty}^2 - \frac{3}{4} \right) \operatorname{erf} s_{\infty} \right];$$

$$D = A\sigma_{\tau}\Omega; \quad s_1 = s_{\infty}^2 \frac{\sin^2 \delta}{2}; \quad s_2 = s_{\infty}^2 \frac{\cos^2 \beta}{2}.$$

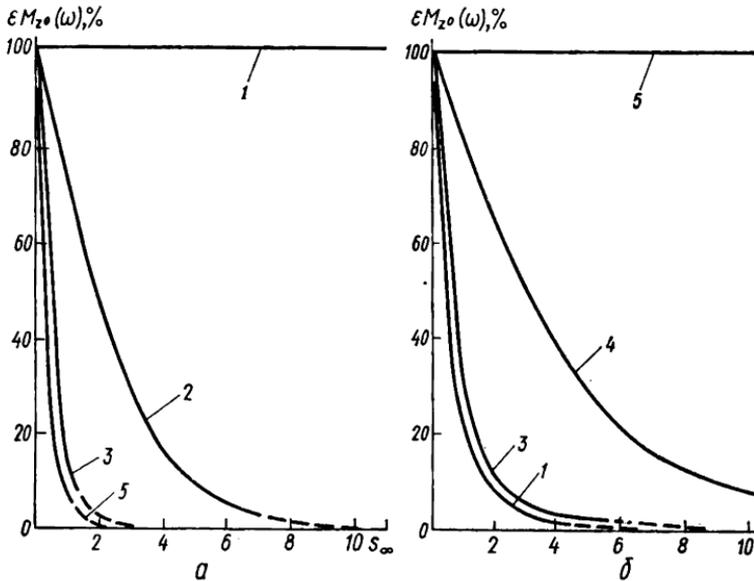


Рис. 9. Относительная погрешность гипертеплого приближения деформирующего момента диска (а) и цилиндра (б) от скоростного отношения при различных пространственных углах атаки  $\delta$ :

1 —  $\delta = 90^\circ$ ; 2 —  $\delta = 80^\circ$ ; 3 —  $\delta = 45^\circ$ ; 4 —  $\delta = 10^\circ$ ; 5 —  $\delta = 0$ .

Числа  $R$  — радиус диска, сферы, цилиндра и основания конуса;  $l$  — высота цилиндра, конуса;  $\beta$  — угол полураствора конуса.  $M^r(\omega)$  — гипертепловые значения моментов;  $M^0(\omega)$  — значения моментов при  $s_\infty = 0$  (покоящийся газ). Гипертепловые пределы моментов для диска, цилиндра и сферы совпадают с полученными ранее (см. (2.17) — (2.19)), а  $F_{x^0}(\omega)$  для сферы при  $\delta = \pi/2$  совпадает с выражением, полученным в работе [94].

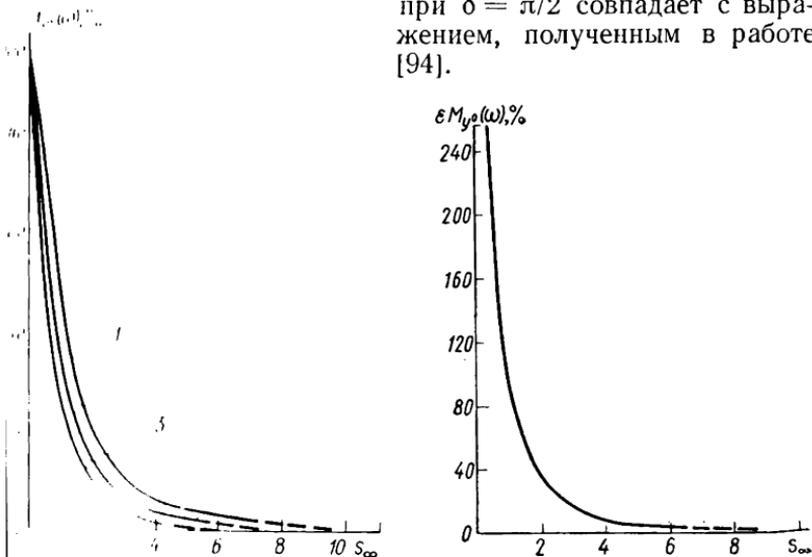


рис. 10. Относительная погрешность гипертеплого приближения демпферного момента сферы  $\varepsilon M_{z^0}(\omega)$  в зависимости от скоростного отношения  $s_\infty$  при различных углах между векторами  $V_\infty$  и  $\omega$ : 1 —  $\delta = 90^\circ$ ; 2 —  $\delta = 45^\circ$ ; 3 —  $\delta = 0^\circ$ .

рис. 11. Относительная погрешность гипертеплого приближения прецессионного момента сферы  $\varepsilon M_{y^0}(\omega)$  в зависимости от скоростного отношения  $s_\infty$  при  $\delta = 45^\circ$  и  $0^\circ$ .

На рис. 9 - 11 представлены графики относительной погрешности гипертеплого приближения для моментов сил при чисто диффузной схеме отражения

$$\varepsilon M(\omega) = \frac{M(\omega) - M^r(\omega)}{M(\omega)} \cdot 100 \%$$

в зависимости от скоростного отношения  $s_\infty$  для различных значений угла атаки  $\delta$ . Из рисунков видно, что на углах атаки  $\delta = 90^\circ$  (для диска) и  $\delta = 0$  (для цилиндра) погрешность гипертеплого приближения равна 100 % и не зависит от скоростного отношения  $s_\infty$ . Однако для углов, отличных от

указанных выше даже на  $10^\circ$ , эта погрешность резко падает ростом  $s_\infty$ . Для натуральных условий, когда  $s_\infty \approx 7$ , погрешность гипертеплого приближения для диска составляет 2 % при  $\delta = 80^\circ$ , для цилиндра — 16 % при  $\delta = 10^\circ$  и 2 % при  $\delta = 30^\circ$ . Для сферы зависимость  $\varepsilon M_{y^0}(\omega)$  от  $\delta$  слабая, и при  $s_\infty = 7$  составляет 2 % для любых  $\delta$ . Погрешность гипертеплого приближения прецессирующего момента сферы от  $\delta$  вообще не зависит и при  $s_\infty = 7$  также равна 2 %. При  $s \rightarrow \varepsilon M_{y^0}(\omega) \rightarrow \infty$ .

## 2.5. Нестационарное обтекание осесимметричных тел с учетом конечности скоростного отношения

Рассмотрим выпуклое осесимметричное тело, вращающееся относительно произвольной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Направление вектора  $\omega$  определим двумя углами  $\gamma_1$  и  $\lambda_1$  ( $\gamma_1 = \widehat{\omega z^0}$ ,  $\lambda_1$  — угол между осью  $x^0$  и проекцией вектора  $\omega$  на плоскость  $x^0 y^0$ ) таким образом, что в системе координат  $x^0 y^0 z^0$  вектор  $\omega$  будет иметь вид

$$\omega = \omega (\sin \gamma_1 \sin \lambda_1 i^0 - \sin \gamma_1 \cos \lambda_1 j^0 + \cos \gamma_1 k^0).$$

Введем обозначения

$$z_m = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = s_\infty \cdot \mathbf{n} - [\Omega \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n} = b_1 + c_1; \quad b_1 = s_\infty \cdot \mathbf{n}; \\ c_1 = -[\Omega \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n}.$$

В соответствии с [67] представим  $\chi(z_m)$  и  $\xi(z_m)$  в виде

$$\chi(z_m) = \int_0^{z_m} \kappa(t) dt + 1, \quad \kappa(t) = \sqrt{\pi} [1 + \operatorname{erf}(t)]; \\ \xi(z_m) = 2 \int_0^{z_m} \kappa(t) t dt + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(z_m) + \frac{1}{2} \kappa(z_m). \quad (2.21)$$

Применяя теорему о среднем значении определенного интеграла в виде  $\int_{b_1}^{b_1+c_1} F(t) dt = c_1 F(b_1 + c_1 \delta_1)$ , где  $0 \leq \delta_1 \leq 1$ , преобразует (2.26) следующим образом:

$$\chi(z_m) = \int_0^{b_1+c_1} \kappa(t) dt = \int_0^{b_1} \kappa(t) dt + 1 + \int_{b_1}^{b_1+c_1} \kappa(t) dt = \\ = \kappa(b_1) + c_1 \kappa(b_1 + c_1 \delta_1) = \chi(b_1) + \sqrt{\pi} c_1 + 2c_1 \int_0^{b_1+c_1 \delta_1} e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \chi(b_1) + \sqrt{\pi} c_1 + 2c_1 \int_0^{b_1} e^{-t^2} dt + 2c_1 \int_{b_1}^{b_1+c_1\delta_1} e^{-t^2} dt = \\
 &= \chi(b_1) + c_1 \kappa(b_1) + 2c_1 \int_{b_1}^{b_1+c_1\delta_1} e^{-t^2} dt.
 \end{aligned}$$

ПАЛОГИЧНО

$$\xi(z_m) = \xi(b_1) + 2c_1 \chi(b_1) + 2c_1 \int_{b_1}^{b_1+c_1\delta_1} \kappa(t) dt.$$

пк как  $c_1 = -[\Omega \mathbf{r}] \cdot \mathbf{n}$ , то члены

$$2c_1 \int_{b_1}^{b_1+c_1\delta_1} e^{-t^2} dt \quad \text{и} \quad 2c_1 \int_{b_1}^{b_1+c_1\delta_1} \kappa(t) dt$$

пропорциональны  $\Omega^2$ . Пренебрегая для медленных вращений этими членами, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 \chi(z_m) &= \chi(b_1) + c_1 \kappa(b_1); \quad \xi(z_m) = \xi(b_1) + 2c_1 \chi(b_1); \\
 \chi(z_m) z_m &= \chi(b_1) z_m + b_1 c_1 \kappa(b_1).
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Считывая (2.27), представим элементарную силу и момент, действующие на тело, в виде

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{F}(z_m, s) &= d\mathbf{F}_1(b_1, s_\infty) + d\mathbf{F}_2(b_1, s_\infty, \Omega); \\
 d\mathbf{M}(z_m, s) &= [r d\mathbf{F}_1] + [r d\mathbf{F}_2],
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

и

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{F}_1(b_1, s_\infty) &= A \{ [(2 - \sigma_n) \xi(b_1) + A_w \sigma_n \chi(b_1) - \\
 &\quad - \sigma_\tau \chi(b_1) b_1] \mathbf{n} + \sigma_\tau \chi(b_1) s_\infty \} ds
 \end{aligned}$$

представляет собой силу, действующую на элемент поверхности тела при  $\Omega = 0$ , а

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{F}_2 &= A \sigma_\tau \chi(b_1) [-\Omega \mathbf{r}] + A \{ [(4 - 2\sigma_n - \sigma_\tau) \chi(b_1) + \\
 &\quad + A_w \sigma_n \chi(b_1) - \sigma_\tau b_1 \chi(b_1)] \mathbf{n} + \sigma_\tau \chi(b_1) s_\infty \} [-\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}] \Omega
 \end{aligned} \quad (2.29)$$

дополнительную силу, обусловленную именно вращением тела.

При расчете аэродинамических характеристик вращающихся тел в гипертепловом приближении область интегрирования  $d\mathbf{F}$  и  $d\mathbf{M}$  находится из условия  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}_\infty \cdot \mathbf{n} - [\Omega \mathbf{r}] \times \mathbf{n} \geq 0$ , которое для медленных вращений заменяют более простым условием  $\mathbf{s}_\infty \cdot \mathbf{n} \geq 0$ , полагая при этом, что погрешность такой замены порядка  $\Omega^2$ . Воспользуемся соотношениями (2.28) и (2.29) для определения порядка этой погрешности. Так как  $d\mathbf{F}_1$  есть сила, действующая на элемент поверхности тела при  $\Omega = 0$ , то область интегрирования в гипертепловом приближении автоматически переходит во второе условие.

В противном случае  $dF_1$  в (2.28) должно зависеть от  $\Omega$ . В пертепловом приближении  $dF_2$  можно представить в виде

$$dF_2 = A_2 \sqrt{\pi} \{ b_1 [-\Omega \mathbf{r}] + [(4 - 2\sigma_n - \sigma_\tau) b_1 + A_w \sigma_n] \mathbf{n} + \sigma_\tau [s_\infty - (s_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] [-\mathbf{r} \mathbf{n}] \Omega \} ds.$$

Приведенные условия отличаются областью, в которой

$$b_1 = s_\infty \cdot \mathbf{n} \leq [\Omega \mathbf{r}] \mathbf{n} = |c_1|.$$

Следовательно, в  $dF_2$  погрешность от замены областей интегрирования для всех членов, пропорциональных  $b_1$ , будет 1-го порядка  $\Omega^2$ , т. е.

$$\int_{(A)} \Omega b_1 ds - \int_{(B)} \Omega b_1 ds \sim \Omega^2.$$

Погрешность остальных членов в  $dF_2$ , равных  $-A_2 \sqrt{\pi} \times \{ A_w \sigma_n \mathbf{n} - \sigma_\tau s_\infty \} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}] \Omega$ , в общем случае порядка  $\Omega$ . Для рассмотренных в этой главе тел (диска, сферы, цилиндра, конуса) эти члены равны нулю.

В § 2.4 рассмотрен случай, когда  $\omega = \omega \mathbf{k}^0$ . Пусть  $\omega = \omega \mathbf{j}^0$ . Вращение тела относительно оси  $x^0$  является частным случаем вращения тела относительно оси  $y^0$  при  $\delta = 0$ . Можно строго показать, что произвольное вращение осесимметричного тела полностью определяется симметричным вращением и выкрутанием тела относительно оси  $y^0$  при произвольном

Введем дополнительную систему координат  $x'y'z'$ , жестко связанную с телом, причем  $y^0 = y'$ ;  $z'$  направим по оси симметрии тела;  $\beta_1$  — угол поворота системы  $x'y'z'$  относительно  $x^0y^0z^0$ . Для векторов  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{s}$  в связанной системе координат имеем

$$\mathbf{n} = -\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i}' + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j}' - \cos \theta \mathbf{k}';$$

$$\mathbf{r} = \rho \sin \varphi \mathbf{i}' - \rho \cos \varphi \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}';$$

$$\mathbf{s} = (s_\infty \cos \delta \sin \beta_1 - \Omega z') \mathbf{i}' + s_\infty \sin \delta \mathbf{j}' - (s_\infty \cos \delta \cos \beta_1 - \Omega \rho \sin \varphi) \mathbf{k}';$$

$$ds = \frac{\rho}{\sin \theta} dz' d\varphi.$$

Подставим эти выражения в  $dF_2$  и найдем силы и моменты, висящие от вращения тела, для кувыркающихся цилиндра и диска.

Для прямого кругового цилиндра без оснований, вращающегося относительно геометрического центра, в связанной системе координат имеем

$$F_{x'}(\omega) = F_{y'}(\omega) = 0;$$

$$F_{z'}(\omega) = F_{z'}^r(\omega) = -A2\pi^{3/2}\sigma_\tau\Omega s_\infty R^2 L \cos \delta \sin \beta_1;$$

$$F_{z'}^0(\omega) = M_{z'}(\omega) = 0;$$

$$M_{x'}(\omega) = \frac{4}{3}\pi A\Omega RLq \left[ \sigma_\tau R^2 + \frac{2}{3}(2 - \sigma_n)L^2 + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_\tau}{3}L^2 \right] \left[ I_0(u) + I_1(u) \left( 1 - \frac{1}{2u} \right) \right];$$

$$M_{x'}^r(\omega) = A \frac{8}{3} \sqrt{\pi} \Omega RL \frac{q}{s_\infty \sin \psi} \left[ \sigma_\tau R^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3}(2 - \sigma_n)L^2 + \frac{\sigma_\tau}{3}L^2 \right];$$

$$M_{y'}(\omega) = -A\Omega RL \left\{ \frac{4}{3}\pi\sigma_\tau L^2 e^{-u} [I_0(u) + \right. \quad (2.30)$$

$$+ 2u [I_0(u) + I_1(u)] \left. \right\} + \frac{2}{3}\pi\sigma_\tau L^2 e^{-u} \left\{ I_0(u) - \frac{p}{u} I_1(u) + \right. \\ \left. + 2f^2 [I_0(u) + I_1(u)] \right\} + 2\pi e^{-u} \left[ \frac{2}{3}(2 - \sigma_n)L^2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{3}\sigma_\tau L^2 + \sigma_\tau R^2 \right] \left\{ -\frac{p}{3} \left[ 4I_0(u) + \left( 4 + \frac{1}{u} \right) I_1(u) \right] + \right. \\ \left. + I_0(u) + 2f^2 [I_0(u) + I_1(u)] \right\} + A_W \frac{2}{3} \pi^{3/2} \sigma_n L^2 \left. \right\};$$

$$M_{y'}^r(\omega) = -A\Omega LR \left\{ \frac{8}{3} \sqrt{\pi} \sigma_\tau L^2 \left( s_\infty \sin \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f^2}{s_\infty \sin \psi} \right) + \frac{8}{3} \sqrt{\pi} (2f^2 + e^2) \frac{1}{s_\infty \sin \psi} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \frac{2}{3} L^2 (2 - \sigma_n) - \frac{2}{3} \sigma_\tau L^2 + \sigma_\tau R^2 \right] + A_W \frac{2}{3} \pi^{3/2} \sigma_n L^2 \right\};$$

$$M_{y'}^0(\omega) = -AA_W \frac{2}{3} \pi^{3/2} \sigma_n \Omega L^3 R.$$

Здесь  $L$  — полудлина цилиндра;

$$u = \frac{s_\infty^2}{2} \sin^2 \psi; \quad \sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \delta \cos^2 \beta_1;$$

$$f = -s_\infty \cos \delta \sin \beta_1; \quad e = s_\infty \sin \delta;$$

$$p = \frac{f^2}{2} - \frac{e^2}{2}; \quad q = -fe.$$

Для диска относительно его центра имеем

$$F_{z'}(\omega) = M_{x'}(\omega) = 0;$$

$$\begin{aligned}
M_{y'}(\omega) &= -A\Omega R^4 \left\{ \pi(2 - \sigma_n) [e^{-b^2} + \sqrt{\pi} b \operatorname{erf}(b)] + \right. \\
&\quad \left. + A_W \frac{\pi^{3/2}}{2} \sigma_n \right\}; \\
M_{y'}^L(\omega) &= -A\Omega R^4 \left[ \pi^{3/2} (2 - \sigma_n) b \operatorname{sign}(b) + A_W \frac{\pi^{3/2}}{2} \sigma_n \right]; \\
M_{y'}^0(\omega) &= -A\Omega R^4 \left[ \pi(2 - \sigma_n) + A_W \frac{\pi^{3/2}}{2} \sigma_n \right]; \\
M_{z'}(\omega) &= -A \frac{\pi^{3/2}}{2} \sigma_n \Omega s_\infty R^4 \operatorname{erf}(b) \sin \delta; \\
M_{z'}^L(\omega) &= -A \frac{\pi^{3/2}}{2} \sigma_n \Omega s_\infty \operatorname{sign}(b) \sin \delta \cdot R^4, \quad (2.31) \\
b &= s_\infty \cos \delta \cos \beta_1.
\end{aligned}$$

Спроектируем силы  $F_{z'}$  ( $\omega$ ) и  $F_{x'}$  ( $\omega$ ) для цилиндра на оси  $x^0$  и  $z^0$  неподвижной системы координат и осредним их по углу вращения  $\beta_1$ . Получим

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{z^0}^{\beta_1}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F_{z'}(\omega) \cos \beta_1 - F_{x'}(\omega) \sin \beta_1] d\beta_1 = 0; \\
\bar{F}_{x^0}^{\beta_1}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [F_{x'}(\omega) \cos \beta_1 + F_{z'}(\omega) \sin \beta_1] d\beta_1 = \\
&= A\pi^{3/2} \sigma_n \Omega s_\infty R^2 L \cos \delta.
\end{aligned}$$

Итак, на кувыркающийся цилиндр действует сила Магнуса, направленная по вектору  $[\omega \cdot \mathbf{V}_0]$ . Произвольное вращение диска не приводит к появлению дополнительных сил.

Вращение цилиндра и диска относительно оси  $y^0$  приводит к возникновению демпфирующих  $M_{y^0}(\omega) = M_{y'}(\omega)$  и прецессирующих моментов ( $M_{x'}(\omega)$  для цилиндра и  $M_{z'}(\omega)$  для диска), причем прецессирующие моменты в среднем за один оборот тела равны нулю.

Из рис. 12 видно, что если ось кувыркания диска направлена по потоку газа ( $\delta = 90^\circ$ ), то погрешность гипертеплого приближения демпфирующего момента, осредненного по  $\beta_1$  за период кувыркания, равна не 100 % (хотя диск расположен ребром к потоку), а 70 %, причем  $\varepsilon \bar{M}_{y^0}(\omega)$  не зависит от  $s_\infty$ . Это указывает, что при такой ориентации векторов  $\omega$  и  $\mathbf{V}_\infty$  гипертепловое приближение  $\bar{M}_{y^0}(\omega)$  отлично от нуля. Если  $\delta = 0$ , т. е. ось кувыркания диска перпендикулярна набегающему потоку, то  $\varepsilon \bar{M}_{y^0}(\omega)$  наиболее сильно зависит от

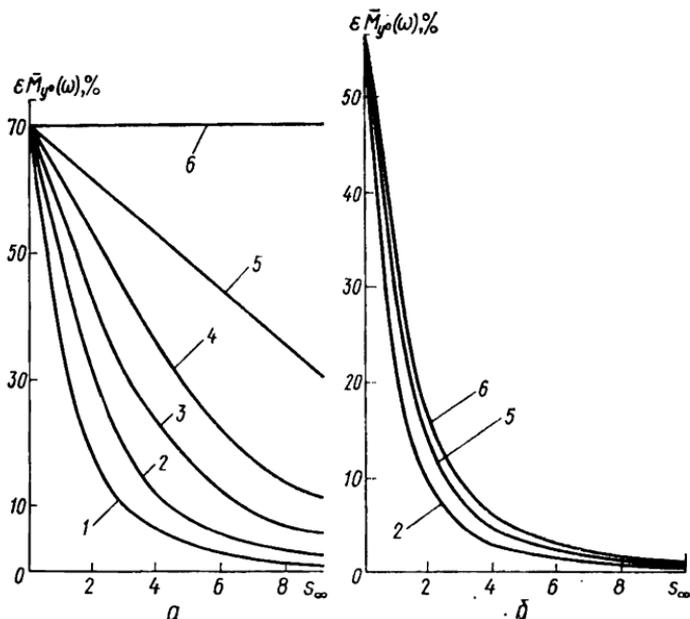


Рис. 12. Относительная погрешность гипертеплого приближения среднего по периоду кувыркания демпфирующего момента диска (а) и цилиндра (б) в зависимости от скоростного отношения  $s_\infty$  при различных углах  $\delta$  между вектором  $V_\infty$  и осью  $z_0$ :

1 —  $\delta = 0^\circ$ ; 2 —  $\delta = 9^\circ$ ; 3 —  $\delta = 18^\circ$ ; 4 —  $\delta = 27^\circ$ ; 5 —  $\delta = 45^\circ$ ;  
6 —  $\delta = 90^\circ$ .

$s_\infty$  и для  $s_\infty \simeq 7$  не превышает 2 %. Для цилиндрической поверхности зависимость  $\varepsilon \bar{M}_{\gamma^0}(\omega)$  от  $\delta$  слабая и при  $s_\infty \simeq 7$   $\varepsilon \bar{M}_{\gamma^0}(\omega)$  менее 3 % для любых  $\delta$ .

Чтобы от выражений (2.30) и (2.31) в связанной системе координат перейти к выражениям в полусвязанной системе, достаточно  $\beta_1$  положить равным нулю.

## 2.6. Аэроградиентный момент

До сих пор при выводе выражений для аэродинамических сил и моментов предполагалось, что плотность атмосферы  $\rho$  постоянна на расстояниях длины спутника. Для большинства реальных спутников, не превышающих нескольких метров, это допущение вполне оправдано. Для весьма длинных спутников имеет смысл оценить аэроградиентный эффект. Как показано ниже, учет градиента плотности на длине спутника не только приво-

дит к более точным количественным результатам, но и дает дополнительные качественные эффекты.

Как обычно, в первом приближении предполагаем, что  $\rho$  меняется по экспоненциальному закону

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\Delta h}{H}\right) \simeq \rho_0 \left(1 - \frac{\Delta h}{H}\right).$$

Здесь  $\rho_0$  соответствует высоте центра масс спутника. Если ввести единичный геоцентрический радиус-вектор центра масс спутника  $\mathbf{e}_{R_0}$ , то  $\Delta h$  можно представить в виде  $\Delta h = (\mathbf{e}_{R_0} \cdot \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор элементарной площадки, отсчитанный от центра масс спутника. Итак,

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{\mathbf{e}_{R_0} \cdot \mathbf{r}}{H}\right].$$

Тогда, подставляя  $\rho_0$  в (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_3 = & -\frac{\rho_0}{H} \int_S V_0^2 (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e}_{R_0} \cdot \mathbf{r}) \left\{ (1 - \varepsilon) \mathbf{e}_{V_0} + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \mathbf{n} \right\} \times \mathbf{r} ds. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Этот момент учитывает влияние изменения плотности воздуха в пределах длины спутника. Будем называть этот момент аэроградиентным. Найдем выражения аэроградиентного момента для простейших конфигураций спутника — цилиндра, сферы и гантели. Рассмотрим влияние только падающего потока и положим в (2.32)  $\varepsilon = v/V_0 = 0$ . Далее предположим, что спутник вращается в плоскости орбиты, причем  $\mathbf{e}_{V_0} \perp \mathbf{e}_{R_0}$ . Тогда вектор  $\mathbf{e}_{R_0}$  можно представить в виде

$$\mathbf{e}_{R_0} = \mathbf{j} \cos \delta - \mathbf{k} \sin \delta. \quad (2.33)$$

Подставляя (2.33) и (2.7) в (2.32) и учитывая осевую симметрию спутника, получаем

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{i} \frac{\rho V_0^2}{H} \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) (y \cos \delta - z \sin \delta)^2 ds. \quad (2.34)$$

В данном случае орт  $\mathbf{i}$  полусвязанной системы координат совпадает с направлением вектора нормали к плоскости орбиты. Поскольку  $(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \geq 0$ , аэроградиентный момент  $\mathbf{M}_3$  существенно положительный и приводит к раскрутке спутника в направлении его вращения по орбите. Интегрируя (2.34) по освещенной части сферы и боковой поверхности цилиндра, соот-

нественно получаем

$$M_3 = \frac{\rho_0 V_0^2}{H} \frac{\pi R^4}{4} i \quad \text{для сферы,}$$

$$M_3 = \frac{\rho_0 V_0^2}{H} \frac{RL}{3} \sin \delta \left( 4R^2 \cos^2 \delta + \frac{L^2}{2} \sin^2 \delta \right) i \quad \text{для цилиндра.}$$

Рассмотрим спутник, состоящий из двух сфер радиусом  $R$ , соединенных стержнем длины  $L$ . Пусть стержень настолько тонок, что его аэродинамикой можно пренебречь по сравнению с аэродинамикой сфер. Аэроградиентный момент создается тогда за счет разности динамического напора на верхнюю и нижнюю сферы и вычисляется по формуле

$$M_3 = \frac{\rho_0 V_0^2}{H} 2\pi R^2 L^2 \sin^2 \delta i.$$

Существуют проекты орбитальных тросовых систем, например проект зондирования атмосферы Земли на высотах порядка 100 км с помощью спутника-зонда, соединенного тросом длиной около 100 км со спутником-носителем (спутник-носитель летит на высоте порядка 200 км) [26, 27]. Для таких больших космических систем аэроградиентный момент играет весьма существенную роль и в силу своего «раскручивающего» эффекта является основным механизмом возможной неустойчивости системы.

## 2.7. Аппроксимация моментов аэродинамических сил

Использовать выражения моментов аэродинамических сил в общем виде для аналитического исследования их влияния на динамику спутника относительно центра масс практически невозможно по целому ряду причин. Прежде всего эти выражения очень сложным образом зависят от пространственного угла атаки, что делает невозможным, не прибегая к аппроксимациям, решить систему уравнений Эйлера даже для простейшей конфигурации спутника — цилиндра. Только лишь для сферы, относительно ее геометрического центра, можно строго решить систему эволюционных уравнений. При описании динамики движения спутника относительно центра масс пренебрежем влиянием тепловых скоростей молекул (конечностью скоростного отношения), что для большинства реальных условий вполне допустимо. Оценки погрешностей гипертеплового приближения для диска, цилиндра и сферы приведены на рис. 9—12. Следует иметь в виду, что основной вклад в силы и моменты

вносит падающий поток. Отраженный поток для диффузной схемы отражения имеет порядок  $1/s$  и для реальных  $s$  ( $s \sim$  мал). По этой причине ниже в основном будет использовано выражение для аэродинамической силы  $dF = \rho V_0^2 (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_{V_0}$ , учитывающей только падающий поток газа и соответствующую

(1.22), если положить  $\mathbf{e} = \mathbf{v}/V_0 = 0$ . Выражения (2.9) в этом случае существенно упрощаются.

При динамических расчетах обычно используются аэродинамические характеристики тел, представляющие собой силы и моменты, нормированные сл

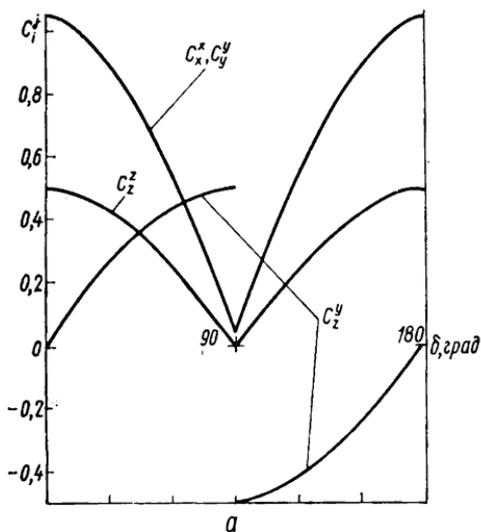
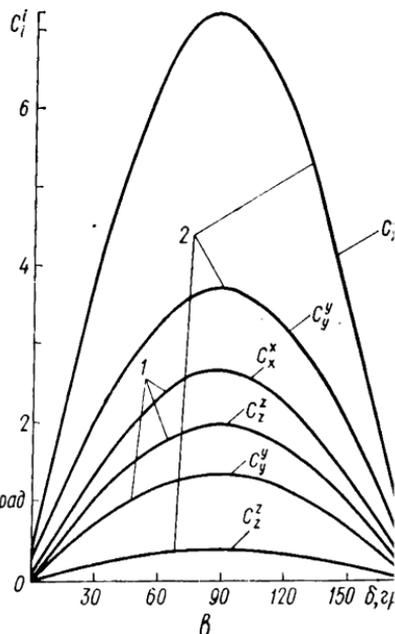
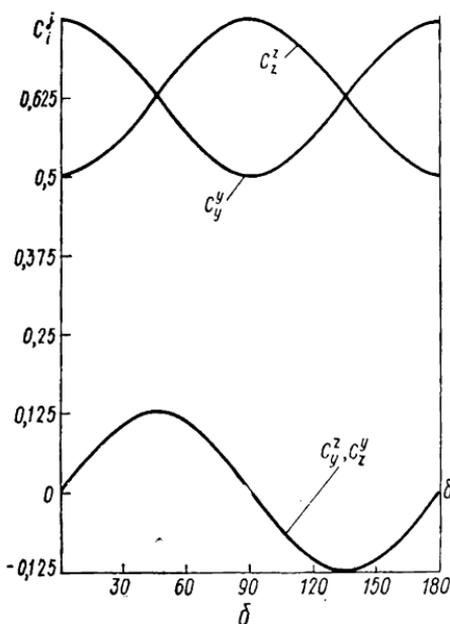


Рис. 13. Зависимость вращательных производных диска (а), сферы (б) и цилиндра (в) от угла атаки  $\delta$ :

1 —  $R/L = 0.5$ ; 2 —  $R/L = 0.1$ .



дующим образом [57]:

$$C_{F_1} = \frac{F_1}{1/2 \rho V_0^2 S}; \quad C_{M_1} = \frac{M_1}{1/2 \rho V_0^2 S L},$$

где  $S$ ,  $L$  — характерные площадь и линейный размер тела. Часто в качестве  $S$  выбирают миделево сечение тела (наибольшее сечение тела плоскостью, перпендикулярной его оси симметрии). По аналогии можно ввести аэродинамические характеристики, зависящие от вращения тела,

$$C_{F_2} = \frac{F_2}{1/2 \rho V_0^2 \frac{\omega L}{V_0} S}; \quad C_{M_2} = \frac{M_2}{1/2 \rho V_0^2 \frac{\omega L}{V_0} S L}.$$

Однако в данном случае  $S$  и  $L$  не являются площадью миделя и плечом силы — они только по размерности соответствуют площади и длине. Следует отметить, что размерность коэффициентов  $J_{ij}$  есть  $L^3$ , а коэффициентов  $D_{ij}$  —  $L^4$ . Для аэродинамических характеристик, зависящих от вращения тела, наиболее употребительны так называемые вращательные производные, определяемые следующим образом:

$$C_i^j = \frac{\partial C_i}{\partial \omega_j}.$$

Для сил и моментов, линейно зависящих от вращения тел (именно в такой постановке они получены выше), вращательные производные от  $\omega$  не зависят.

На рис. 13—16 в соответствии с формулами (2.11) — (2.14) представлены кривые зависимости коэффициентов восстанавливающего момента  $C_{M_1}$  (для конуса) и вращательных производных  $C_i^j$  для диска, сферы, цилиндра и конуса от углов атаки  $\delta$ . Все расчеты проведены для диффузной схемы взаимодействия ( $\varepsilon = 0$ ,  $v/V_0 = 0,1$ );  $C_i^i$  для диска и сферы отнесены к  $\pi R^4$ , для цилиндра — к  $R^2 L^2$ , для конуса — к  $L^4$  ( $C_{M_1}$  отнесены к  $L^3$ ). Видно, что все диагональные производные  $C_i^i \geq 0$ , а коэффициенты прецессирующих моментов  $C_i^j$  ( $j \neq i$ ) в общем случае знакопеременны (для диска  $C_z^y$  ( $D_{32}$ ) имеет разрыв при  $\delta = \pi/2$ ). Для сферы средние по  $\delta$  значения  $C_i^i$  совпадают, а среднее значение  $C_y^y = C_z^z$  равно нулю. Для цилиндра все  $C_i^i$  имеют максимум на угле  $\delta = \pi/2$ . С увеличением  $R/L$   $C_x^x$  и  $C_y^y$  возрастают, а  $C_z^z$  уменьшается. Коэффициент момента  $C_{M_1}$  конуса знакопеременный. Углы  $\delta$ , при которых  $C_{M_1} = 0$ , соответствуют положению равновесия конуса в потоке. Из рис. 9, б видно, что для конуса существуют «косые» положения

равновесия (неустойчивые). Вращательные производные конуса  $C_i^i$  имеют особенности на углах атаки, совпадающих с углами полураствора конуса; для острых конусов  $C_i^i$  имеют максимумы. Недиagonальные производные  $C_i^j (i \neq j) \geq 0$  имеют

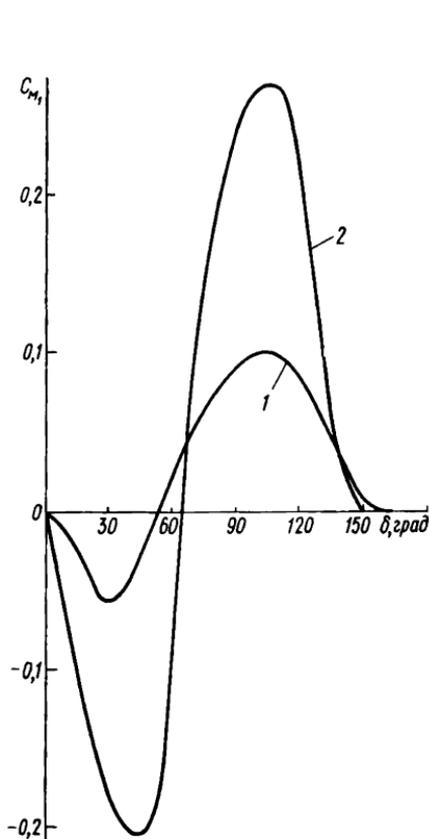


Рис. 14. Зависимость коэффициента момента  $C_{M_1}$  конуса от угла атаки  $\delta$ : 1 —  $\beta = 15^\circ$ ; 2 —  $\beta = 30^\circ$ .

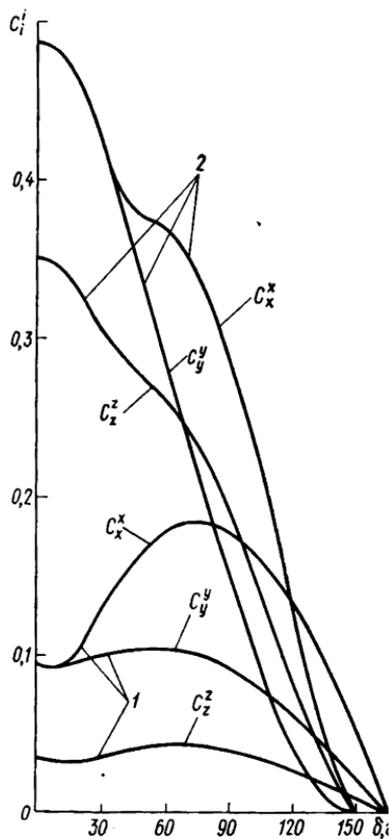


Рис. 15. Зависимость вращательных производных  $C_i^j$  конуса от угла атаки  $\delta$ : 1 —  $\beta = 15^\circ$ ; 2 —  $\beta = 30^\circ$ .

один максимум и равны нулю на углах  $\delta = 0$  и  $150^\circ$  ( $165^\circ$ ). С увеличением угла полураствора конуса  $C_{M_1}$  и  $C_i^i$  растут.

Перейдем к аппроксимации моментов  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ . В первом приближении учтем только вклад падающего потока в величину этих моментов. Аппроксимирующие члены для более общего случая введем попутно. Рассмотрим восстанавливающий мо-

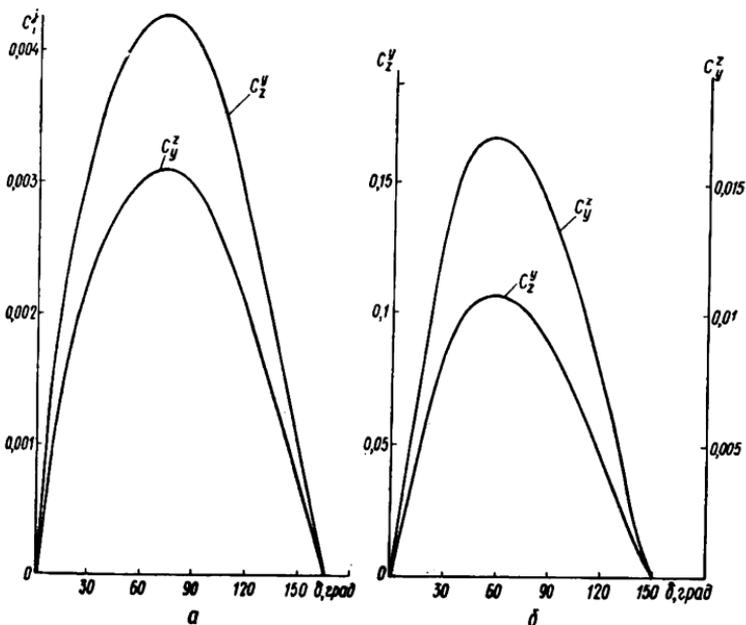


Рис. 16. Зависимость  $C_y^z$  и  $C_z^y$  конуса для  $\beta = 15^\circ$  (а) и  $\beta = 30^\circ$  (б) от угла атаки  $\delta$ .

мент (2.9). С учетом только падающего потока его можно представить в виде

$$\mathbf{M}_1 = \rho V_0^2 \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{r}] ds = \frac{\rho V_0^2}{2} C(\delta) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}], \quad (2.35)$$

где

$$C(\delta) = 2 \int_S (n_y \sin \delta + n_z \cos \delta) (z \sin \delta - y \cos \delta) \frac{ds}{\sin \delta}$$

или

$$C(\delta) = W_1 \cos \delta + W_2 \sin \delta - W_3 \operatorname{ctg} \delta \cos \delta;$$

$$W_1 = 2 \int_S (n_z z - n_y y) ds; \quad W_2 = 2 \int_S n_y z ds; \quad W_3 = 2 \int_S n_z y ds.$$

Очевидно, что

$$C(\pi - \delta) = C(\delta). \quad (2.36)$$

Это отражает свойства абсолютно неупругого соударения: момент сил зависит только от величины и положения относительно спутника сечения  $S(\delta)$ , поэтому  $C(\delta)$  не изменяется при указанном повороте. Из вида  $W_2$  и  $W_3$  следует, что при

$\delta = 0$   $\pi - W_2(0) = W_3(0) = 0$ , так как интегрирование проходит по всей боковой поверхности тела, т. е. по в пределах от 0 до  $2\pi$ . Поэтому можно допустить, что  $W_2 = \sin \delta f_2(\delta)$ ,  $W_3 = \sin \delta f_3(\delta)$  и  $C(\delta)$  представится в виде

$$C(\delta) = W_1(\delta) \cos \delta + f_2(\delta) - [f_2(\delta) + f_3(\delta)] \cos^2 \delta. \quad (2.37)$$

Будем искать  $C(\delta)$  в виде степенного ряда по  $\cos \delta$ . Учитывая (2.36), можно заметить, что простейшая аппроксимация (2.37) такова:

$$W_1(\delta) \cos \delta + f_2(\delta) = a_0^\delta; \quad - [f_2(\delta) + f_3(\delta)] = a_2^\delta,$$

где  $a_0^\delta$  и  $a_2^\delta$  — постоянные. Тогда

$$C(\delta) = a_0^\delta + a_2^\delta \cos^2 \delta. \quad (2.38)$$

При этом коэффициенты  $a_0^\delta$  и  $a_2^\delta$  легко вычислять через постоянные  $C(0)$  и  $C(\pi/2)$ , но можно выбирать  $a_0^\delta$  и  $a_2^\delta$  другим способом, чтобы аппроксимирующая формула (2.38) достаточно хорошо отражала истинную зависимость  $C(\delta)$ . Для вытянутого тела, например, может быть  $a_0^\delta > 0$ ,  $a_2^\delta < 0$ . В самом простом случае можно положить даже  $a_2^\delta = 0$ ,  $C(\delta) = a_0^\delta$ . Тогда  $a_0^\delta > 0$  означает, что центр давления лежит «впереди» центра масс при  $\delta > \pi/2$ ,  $a_0^\delta < 0$  означает, что центр давления лежит «позади» центра масс при  $\delta < \pi/2$ . Если часть молекулы отражается не абсолютно неупруго ( $\epsilon \neq 0$ ,  $v/V_0 \neq 0$ ), то условие (2.36) может быть не выполнено, так как тогда не безразлично, летит спутник «вперед носом» или «вперед днищем». Хотя общие формулы для этого случая здесь не выводились, но можно представить и на этот случай аппроксимирующую формулу типа

$$C(\delta) = a_0^\delta + a_1^\delta \cos \delta + a_2^\delta \cos^2 \delta, \quad (2.39)$$

которая и дает простейший учет того факта, что

$$C(\pi - \delta) \neq C(\delta). \quad (2.40)$$

Будем в основном оперировать аппроксимирующей формулой (2.38), а при рассмотрении добавочных эффектов, связанных с условием (2.40), будем пользоваться аппроксимирующей формулой (2.39). Отметим, что если спутник симметричен еще и относительно некоторой плоскости, нормальной к оси вращения спутника (например, спутник, имеющий форму эллипсоида вращения), то  $C(\pi - \delta) = C(\delta)$  независимо от характера отражения молекул. В этом случае в аппроксимирующей формуле также следует положить  $a_1^\delta = 0$ . Заметим еще, что

для малых углов атаки можно принять

$$C(\delta) = C(0) = a_0^\delta + a_1^\delta + a_2^\delta = \text{const.}$$

Перейдем теперь к аппроксимированию коэффициентов  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ). Для симметричных тел этих коэффициентов пять. В качестве аппроксимирующих формул возьмем основные члены величин  $D_{ij}$ . Интегралы, содержащиеся в подынтегральной функции множитель  $\cos \varphi$ , как было сказано выше, можно представить в виде  $\sin \delta f(\delta)$ . Учитывая это, видим, что в случае  $\varepsilon = v/V_0 = 0$   $D_{33}$  можно считать положительной величиной при любом значении  $\delta$ , как и  $D_{11}$  и  $D_{22}$ . Для этих функций основная часть является некоторой постоянной (положительной по физическому смыслу) величиной. Следует еще заметить, что разность  $D_{22} - D_{11}$  обращается в нуль при интегрировании по всей боковой поверхности, т. е. при  $\delta = 0, \pi$ . Поэтому основные части  $D_{11}$  и  $D_{22}$  аппроксимируются постоянными величинами, равными друг другу. Величины  $D_{23}$  и  $D_{32}$  нельзя аппроксимировать постоянными числами — их можно аппроксимировать постоянными величинами, умноженными на синус угла атаки. Итак, будем предполагать, что в первом приближении

$$\begin{aligned} D_{11} = D_{22} = \text{const}; \quad D_{33} = \text{const}; \quad D_{32} = D'_{32} \sin \delta; \\ D_{23} = D'_{23} \sin \delta. \end{aligned} \quad (2.41)$$

При этом  $D'_{32}$  в общем случае не равно  $D'_{23}$ .

Вычислить коэффициенты  $D_{ij}$  произвольных сложных тел крайне сложно, однако можно оценить их величину на предельных углах атаки ( $\delta = 0, \pi/2$ ) и брать среднее арифметическое от этих двух крайних значений. Оценить погрешность изложенных аппроксимаций в общем случае довольно сложно. Для конкретных простых тел такие оценки будут проведены попутно.

## АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СМЕЩЕННОГО ЦЕНТРА МАСС

Для несимметричных тел определять аналитически аэродинамические характеристики сложно. Вообще говоря, строение таких вычислений можно провести для поверхностей второго порядка, при этом аэродинамические характеристики можно представить аналитически в конечном виде. Однако пользоваться полусвязанной системой координат в этом случае нельзя — восстанавливающий момент  $M_1$  будет иметь три составляющие, а матрица  $D_{ij}$  в общем случае будет иметь 9 компонент. Используя результаты гл. 2, можно получить выражения аэродинамических характеристик составных тел, т. е. тел вращения, образующая которых кусочно непрерывна. При этом естественно, составные тела должны быть выпуклыми, чтобы исключить влияние эффектов затенения одних элементов другими, а также эффектов интерференции, т. е. попадания на те частицы, отраженных от него ранее.

В настоящей главе исследуются дополнительные аэродинамические моменты, возникающие вследствие того, что центр масс тел не совпадает с геометрическим центром, а оси геометрической и динамической симметрий также не совпадают. Дополнительные моменты, обусловленные этими причинами, назовем моментом смещения, авторотационным и пропеллирующими моментами.

### 3.1. Авторотационный момент и момент смещения

Предположим, что спутник имеет оси геометрической и динамической симметрий, которые не пересекаются и составляют друг с другом угол  $\chi$ . Взаимное расположение ортов осей геометрической и динамической симметрий  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , геометрического центра  $O$  и центра масс  $O'$  определяется расстояниями  $R_1$  и  $\Delta$  углами  $\chi$  и  $\xi$  (рис. 17). Орты  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$  направлены по главным центральным осям инерции спутника  $R_1 \perp \mathbf{k}$ . Таким образом вектор  $\mathbf{r}$  можно представить в виде

$$\mathbf{r} = R_1 + k_1 \Delta \mathbf{l} + \mathbf{r}_c, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор точки поверхности спутника, отсчитанной от его геометрического центра. Будем считать, что  $R_1$

$= |R_1|$  и  $\Delta l$  — величины первого порядка малости по сравнению со средним значением  $|r|$ . Определим векторы  $\mathbf{k}$ ,  $R_1$  через орты  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$ ,  $\mathbf{k}'$ . Из рис. 17 находим, что

$$\mathbf{k} = \mathbf{i}' \sin \kappa + \mathbf{k}' \cos \kappa;$$

$$\mathbf{R}_1 = \frac{R_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \kappa \cos^2 \xi}} (\mathbf{i}' \cos \xi \cos^2 \kappa + \mathbf{j}' \sin \xi - \mathbf{k}' \cos \xi \sin \kappa \cos \kappa) = \mathbf{i}' R_{1x'} + \mathbf{j}' R_{1y'} + \mathbf{k}' R_{1z'}. \quad (3.2)$$

Подставим (3.1) в (2.5) и, пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\mathbf{M}'_1 = [\mathbf{F}' R_1] + [\mathbf{F}' \mathbf{k}] \Delta l + \mathbf{M}_1, \quad (3.3)$$

где

$$\mathbf{F}' = \rho V_0^2 \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \left\{ (1 - \varepsilon) \mathbf{e}_{V_0} + \right. \\ \left. + 2\varepsilon (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \mathbf{n} \right\} ds, \quad (3.4)$$

а  $\mathbf{M}_1$  совпадает с выражением (2.5), в котором вместо  $\mathbf{r}$  фигурирует  $\mathbf{r}_c$ . Демпфирующий аэродинамический момент  $\mathbf{M}_2$  и аэроградиентный момент  $\mathbf{M}_3$  для рассматриваемого случая будут иметь тот же вид, но выражение для  $\mathbf{r}$  необходимо брать в виде (3.1).

Для дальнейшего рассмотрения момента  $\mathbf{M}'_1$  конкретизируем форму спутника. Пусть кроме оси симметрии спутник обладает еще плоскостью симметрии, перпендикулярной оси симметрии. Будем называть такой спутник двоякосимметричным. В полусвязанной системе координат выражения для  $\mathbf{e}_{V_0}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  имеют вид (2.7). Для двоякосимметричного спутника выражение  $C(\delta)$  из (2.35) с учетом (2.10) примет вид

$$C(\delta) = 2\varepsilon \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^2 (n_y z - n_z y) \frac{ds}{\sin \delta} + \\ + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) (n_y z - n_z y) \frac{ds}{\sin \delta} - \\ - (1 - \varepsilon) \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) y \operatorname{ctg} \delta ds.$$

Вычислим теперь  $\mathbf{F}'$ . Для этого представим вектор  $\mathbf{n}$  в виде

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + \frac{n_y}{\sin \delta} \mathbf{e}_{V_0} + (n_z - \operatorname{ctg} \delta n_y) \mathbf{k}. \quad (3.5)$$

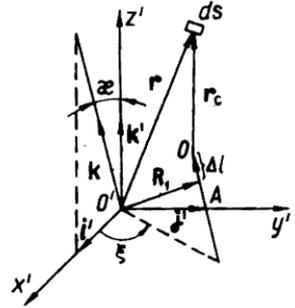


Рис. 17. Взаимное расположение осей геометрической и динамической симметрий спутника.

Подставим в (3.4)  $\mathbf{n}$  в виде (3.5) и  $\mathbf{e}_{V_0}$  из (2.7). Выполняя интегрирование и учитывая (2.10), получаем

$$\mathbf{F}' = \rho V_0^2 [F_{V_0}(\delta) \mathbf{e}_{V_0} + F_k(\delta) \mathbf{k}], \quad (3.6)$$

где

$$F_{V_0}(\delta) = (1 - \varepsilon) \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) ds + 2\varepsilon \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^2 \frac{n_y}{\sin \delta} ds + \\ + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \frac{n_y}{\sin \delta} ds; \quad (3.7)$$

$$F_k(\delta) = 2\varepsilon \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^2 (n_z - n_y \operatorname{ctg} \delta) ds + \\ + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \int_S (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) (n_z - n_y \operatorname{ctg} \delta) ds. \quad (3.8)$$

Итак,

$$\mathbf{M}'_1 = \rho V_0^2 \{F_{V_0}(\delta) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1] + F_k(\delta) [\mathbf{k} \mathbf{R}_1] + \\ + [F_{V_0}(\delta) \Delta l + C(\delta)] [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}]\} = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{13}. \quad (3.9)$$

Назовем момент  $\mathbf{M}_{11}$  моментом смещения, а момент  $\mathbf{M}_{12}$  моментом авторотации. Ниже будет показано, что средние по времени значения моментов  $\mathbf{M}_{11}$  и  $\mathbf{M}_{12}$  имеют знакопеременную проекцию на направление вектора кинетического момента спутника, т. е. в зависимости от вида функций  $F_{V_0}(\delta)$  и  $F_k(\delta)$ , а также от режимов вращения эти моменты могут ускорять или замедлять вращение спутника. Момент  $\mathbf{M}_{13}$  является фактически обычным восстанавливающим моментом. Этот момент консервативный и в среднем не влияет на модуль вектора кинетического момента спутника. Из (3.9) следует, что в отличие от восстанавливающего ( $\mathbf{M}_{13}$ ) момента и момента смещения ( $\mathbf{M}_{11}$ ) момент авторотации ( $\mathbf{M}_{12}$ ) зависит только от параметров отраженного потока  $\varepsilon$  и  $v$ , т. е. априори от величин малых. Вид функций  $F_{V_0}(\delta)$  и  $F_k(\delta)$  зависит от формы спутника. Приведем значения этих функций для некоторых простейших тел для диска

$$F_{V_0}(\delta) = 2\pi R^2 (1 - \varepsilon) |\cos \delta|;$$

$$F_k(\delta) = 2\pi R^2 \cos \delta [2\varepsilon |\cos \delta| + (1 - \varepsilon) v/V_0],$$

для сферы

$$F_{V_0}(\delta) = \pi R^2 \left[ 1 + \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \right]; \quad F_k(\delta) = 0,$$

для цилиндрической поверхности

$$F_{V_0}(\delta) = 2RL \left[ \sin \delta + \frac{1}{3} \varepsilon \sin \delta + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \frac{\pi}{4} \right];$$

$$F_k(\delta) = -RL \cos \delta \left[ \frac{8}{3} \varepsilon \sin \delta + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \frac{\pi}{2} \right],$$

для цилиндра с плоскими торцами

$$F_{V_0}(\delta) = RL \left[ \left( 2 + \frac{2}{3} \varepsilon \right) \sin \delta + \frac{\pi}{2} \frac{(1 - \varepsilon)v}{V_0} + \frac{(1 - \varepsilon)\pi R}{L} |\cos \delta| \right]; \quad (3.10)$$

$$F_k(\delta) = \cos \delta \left\{ \frac{(1 - \varepsilon)v}{V_0} \pi R \left( R - \frac{L}{2} \right) + 2\varepsilon R \left[ \pi R |\cos \delta| - \frac{4}{3} L \sin \delta \right] \right\}.$$

Если аппроксимировать выражения (3.10) рядами

$$F_{V_0}(\delta) = F_{V_0} + F_{V_1} \cos \delta + F_{V_2} \cos^2 \delta; \quad (3.11)$$

$$F_k(\delta) = F_{k_0} + F_{k_1} \cos \delta + F_{k_2} \cos^2 \delta$$

так, чтобы значения рядов и точных формул совпадали при  $\delta = 0, \pi/2, \pi$ , то из сравнения (3.10) с (3.11) для цилиндра с плоскими торцами получим

$$F_{V_0} = RL \left[ \left( 2 + \frac{2}{3} \varepsilon \right) + \frac{\pi}{2} \frac{(1 - \varepsilon)v}{V_0} \right];$$

$$F_{V_2} = RL \left[ (1 - \varepsilon) \frac{\pi R}{L} - \left( 2 + \frac{2}{3} \varepsilon \right) \right];$$

$$F_{k_1} = \frac{(1 - \varepsilon)v}{V_0} \pi R \left( R - \frac{L}{2} \right) + 2\varepsilon R \left( \pi R - \frac{4}{3} L \right);$$

$$F_{V_1} = F_{k_0} = F_{k_2} = 0.$$

Для сферы  $F_k(\delta) = 0$ . Следовательно, при любом расположении центра масс авторотационный момент для сферы равен нулю.

### 3.2. Момент пропеллирования

Рассмотрим упрощенную конфигурацию спутника «Протон» (рис. 18). Считаем, что центры каждой пары батарей расположены на линиях, пересекающих продольную ось спутника в одной точке. Расстояние от этой точки до центра масс спутника равно  $d$  (предполагаем, что центр масс лежит на продольной оси  $z'$  спутника). Пусть «плечо» (расстояние от центра площадки до продольной оси спутника) равно  $a$ , нормали к пло-

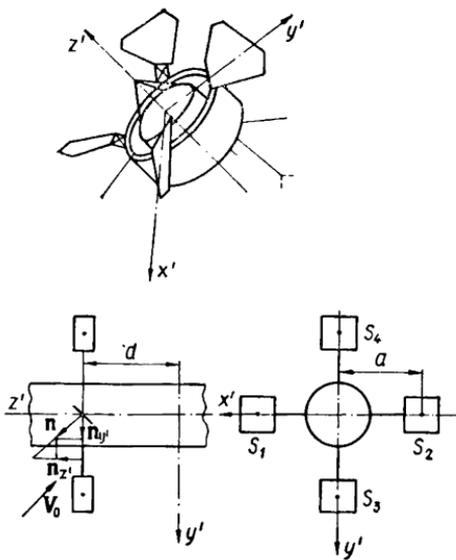


Рис. 18. Схематическое изображение спутника «Протон».

щадкам составляют продольной осью один и тот же острый угол косинус которого  $n_1$ . Пусть  $n_1 = \sqrt{1 - n_0^2}$ . Сосставим осям  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  связанным со спутником репер  $i'$ ,  $j'$ ,  $k'$ , а четыре площадки батарей назовем  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Ось  $z'$  направим коллинеарно линии, соединяющей центры двух противоположных площадок ось  $y'$  — коллинеарно линии, соединяющей центры двух других площадок. Начало координат системы совпадает с центром масс спутника. Тогда положение этих площадок и вектора  $e_{V_0}$

относительно спутника определяется следующими матрицами

$$\begin{array}{c|ccc}
 & i' & j' & k' \\
 \hline
 e_{V_0} & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\
 S_1 \begin{cases} n_1 \\ r_1 \end{cases} & 0 & -n_1 & n_0 \\
 & a & 0 & d \\
 S_2 \begin{cases} n_2 \\ r_2 \end{cases} & 0 & n_1 & n_0 \\
 & -a & 0 & d \\
 S_3 \begin{cases} n_3 \\ r_3 \end{cases} & n_1 & 0 & n_0 \\
 & 0 & a & d \\
 S_4 \begin{cases} n_4 \\ r_4 \end{cases} & -n_1 & 0 & n_0 \\
 & 0 & -a & d
 \end{array} \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (2.5) и интегрируя, для момента сил, действующих на батареи, получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = \rho V_0^2 S_* \left\{ (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^4 |e_{V_0} \cdot n_i| [e_{V_0} \cdot r_i] + 2\varepsilon \sum_{i=1}^4 |e_{V_0} \cdot n_i| \times \right. \\
 \left. \times (e_{V_0} \cdot n_i) [n_i \cdot r_i] + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \sum_{i=1}^4 (e_{V_0} \cdot n_i) [n_i \cdot r_i] \right\}. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Здесь  $S_*$  — площадь батареи. Будем еще употреблять обозначение  $(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_i) = \cos \delta_i$ . Распишем компоненты момента (3.13) по осям  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ . Три суммы, входящие в (3.13), обозначим через  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ . Распишем значения каждой из этих сумм в компоненте по оси  $x'$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_{1x'} &= d\alpha' \sum_{i=1}^4 |\cos \delta_i| + \alpha\alpha'' (|\cos \delta_4| - |\cos \delta_3|); \\ \Sigma_{2x'} &= dn_1 (\cos \delta_2 |\cos \delta_2| - \cos \delta_1 |\cos \delta_1|) + \\ &\quad + an_0 (\cos \delta_4 |\cos \delta_4| - \cos \delta_3 |\cos \delta_3|); \\ \Sigma_{3x'} &= dn_1 (\cos \delta_2 - \cos \delta_1) + an_0 (\cos \delta_4 - \cos \delta_3).\end{aligned}\quad (3.14)$$

При этом

$$\begin{aligned}\cos \delta_4 &= -\alpha n_1 + \alpha'' n_0; & \cos \delta_3 &= \alpha n_1 + \alpha'' n_0; \\ \cos \delta_2 &= \alpha' n_1 + \alpha'' n_0; & \cos \delta_1 &= -\alpha' n_1 + \alpha'' n_0.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\Sigma_{1y'} &= -d\alpha \sum_{i=1}^4 |\cos \delta_i| - \alpha\alpha'' (|\cos \delta_2| - |\cos \delta_1|); \\ \Sigma_{2y'} &= dn_1 (\cos \delta_4 |\cos \delta_4| - \cos \delta_3 |\cos \delta_3|) - \\ &\quad - an_0 (\cos \delta_2 |\cos \delta_2| - \cos \delta_1 |\cos \delta_1|); \\ \Sigma_{3y'} &= dn_1 (\cos \delta_4 - \cos \delta_3) - an_0 (\cos \delta_2 - \cos \delta_1).\end{aligned}\quad (3.16)$$

Наконец,

$$\begin{aligned}\Sigma_{1z'} &= a \{ (|\cos \delta_2| - |\cos \delta_1|) \alpha' - (|\cos \delta_4| - |\cos \delta_3|) \alpha \}; \\ \Sigma_{2z'} &= an_1 \sum_{i=1}^4 \cos \delta_i |\cos \delta_i|; \\ \Sigma_{3z'} &= an_1 \sum_{i=1}^4 \cos \delta_i.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Подставляя в (3.14), (3.16), (3.17) выражения (3.15) и учитывая (3.13), можно получить формулы для вычисления компонент момента от панелей батарей. К сожалению, эти формулы неудобны для анализа. Чтобы избавиться от этого неудобства, необходимо разумно аппроксимировать выражения (3.14), (3.16), (3.17). Для выявления основных свойств движения достаточно рассмотреть лишь модельные выражения для действующих моментов.

Используем следующие соображения, которые фактически уже использовались в аналогичных ситуациях ранее. В реальных условиях аэродинамические характеристики являются

гладкими функциями углов. Поэтому неаналитические функции разумно аппроксимировать аналитическими, например рядами по косинусам углов. Число членов ряда, оставляемых для рассмотрения, определяется числом точек, в которых требуется совпадение точных и аппроксимирующих формул. Подходя с этими соображениями, например, к неаналитической функции  $|\cos \delta_i|$ , обнаружим, что простейшая ее аппроксимация есть  $|\cos \delta_i| \approx \cos \delta_i$ . Будем использовать именно эту аппроксимацию в выражениях (3.14)—(3.17). Среднеинтегральная погрешность этой аппроксимации  $\Delta$  на реальном интервале изменения углов может быть оценена сверху следующим образом:

$$\Delta \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos \delta - \cos^2 \delta) d\delta = \frac{4 - \pi}{\pi} \simeq 0,27.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} |\cos \delta_4| - |\cos \delta_3| &\sim \cos^2 \delta_4 - \cos^2 \delta_3 = -4n_0 n_1 \alpha \alpha''; \\ |\cos \delta_2| - |\cos \delta_1| &\sim 4n_0 n_1 \alpha' \alpha''; \\ \sum_{i=1}^4 |\cos \delta_i| &\sim 2n_1^2 \alpha^2 + 2n_0^2 \alpha'^2 + 2n_1^2 \alpha'^2 + 2n_0^2 \alpha''^2 = \\ &= 4n_0^2 \alpha'^2 + 2n_1^2 (1 - \alpha'^2); \\ \cos \delta_4 |\cos \delta_4| - \cos \delta_3 |\cos \delta_3| &\sim -2n_1^3 \alpha^3 - \\ &\quad - 6n_1 n_0^2 \alpha \alpha''; \\ \cos \delta_2 |\cos \delta_2| - \cos \delta_1 |\cos \delta_1| &\sim 2n_1^3 \alpha'^3 + 6n_1 n_0^2 \alpha' \alpha''; \\ \sum \cos \delta_i |\cos \delta_i| &\sim 4n_0^3 \alpha'^3 + 6n_0 n_1^2 \alpha'' (1 - \alpha'^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Кроме того,  $\cos \delta_4 - \cos \delta_3 = -2n_1 \alpha$ ;  $\cos \delta_2 - \cos \delta_1 = 2n_1 \alpha'$ ;  $\sum \cos \delta_i = 4n_0 \alpha''$ . Подставляя (3.18) в (3.14), (3.16), (3.17) и учитывая (3.13), для компонент вычисляемого момента получим выражения

$$\begin{aligned} M_{x'} &= \rho V_0^2 S_* \{ \alpha' [C_0 + C_2 \alpha'^2 + C' \alpha'^2] - \alpha [a_0 + a_2 \alpha'^2 + a' \alpha'^2] \}; \\ M_{y'} &= \rho V_0^2 S_* \{ -\alpha [C_0 + C_2 \alpha'^2 + C' \alpha'^2] - \alpha' [a_0 + a_2 \alpha'^2 + a' \alpha'^2] \}; \\ M_{z'} &= \rho V_0^2 S_* \alpha'' (k_0 + k_2 \alpha'^2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_0 &= 2n_1^2 d (1 - \varepsilon) \left( 1 - \frac{v}{V_0} \right); \\ C_2 &= d (1 - \varepsilon) (4n_0^2 - 2n_1^2) + 6\varepsilon d n_0 n_1^2; \\ C' &= 2n_1^4 \varepsilon d; \end{aligned}$$

$$a_0 = a(1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} 2n_0 n_1; \quad a_2 = a(1 - \varepsilon) 4n_0 n_1 + 6\varepsilon a n_1^3 n_0^3;$$

$$a' = 2\varepsilon a n_1^3 n_0;$$

$$k_0 = 4a n_0 n_1 (1 - \varepsilon) \left(1 + \frac{v}{V_0}\right) + 6\varepsilon a n_1^3 n_0;$$

$$k_2 = -4a(1 - \varepsilon) n_1 n_0 - 6\varepsilon a n_1^3 n_0 + 4\varepsilon a n_1 n_0^3.$$

Рассматривая формулы (3.19), видим, что они распадаются по характеру влияния на две части. Первая часть — первые члены в  $M_{x'}$ ,  $M_{y'}$ , обусловленные множителем  $d$ . Эти члены дают обычные консервативные эффекты восстанавливающего момента. Вторая часть — вторые члены в  $M_{x'}$ ,  $M_{y'}$  и все выражение  $M_{z'}$ . Эти члены пропорциональны величине  $a$  и вызывают принципиально новые эффекты, которые являются собственно эффектами пропеллирования. В гл. 5 будет показано, что эти моменты долгопериодическим образом то раскручивают спутник до большой угловой скорости, то, наоборот, медленно гасят эту угловую скорость.

### 3.3. Моменты аэродинамического демпфирования составных тел

В гл. 2 для ряда простейших фигур (диска, сферы, цилиндра, конуса) получены коэффициенты аэродинамической диссипации  $D_{ij}$ . Ниже получены коэффициенты  $D_{ij}$  для ряда спутников, анализ динамики вращательного движения которых исследуется в гл. 6. К этим спутникам относятся первый и третий советские ИСЗ, ИСЗ 1958  $\delta_1$ , «Космос-196», «Протон». Естественно, конфигурация этих спутников довольно сложная (рис. 19). Аппроксимируем конфигурацию этих спутников набором простейших тел и, используя методы, изложенные в предыдущей главе, найдем значения  $D_{ij}$  отдельных элементов ИСЗ.

I. Для сферы, центр которой вынесен на расстоянии  $a$  от центра масс спутника, имеем

$$D_{11} = D_{11}^0 + 2a^2 \pi R^2 (1 + \sin \delta) + \frac{2}{3} a \pi R^3 \cos \delta;$$

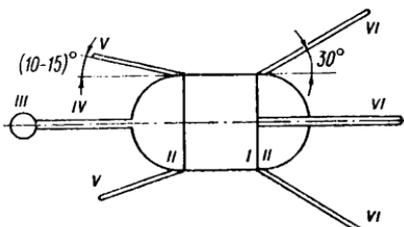


Рис. 19. Схематическое изображение ИСЗ «Космос-196».

$$D_{22} = D_{22}^0 + a^2 \pi R^2 + \frac{2}{3} a \pi R^3 \cos \delta;$$

$$D_{33} = D_{33}^0; \quad D_{32} = D_{32}^0; \quad D_{23} = D_{23}^0 + \frac{2}{3} \pi a R^3 (1 + \sin 2\delta),$$

где  $D_{ij}^0$  — коэффициенты сферы относительно ее геометрического центра.

II. Для цилиндрической поверхности, центр которой вынесен по оси на расстояние  $a$  от центра масс спутника, имеем

$$D_{11} = D_{11}^0 + 4a^2 RL; \quad D_{33} = D_{33}^0;$$

$$D_{22} = D_{22}^0 + 2a^2 RL \sin \delta - \frac{1}{2} \pi a R^2 L \cos \delta;$$

$$D_{23} = D_{23}^0 + \frac{a}{2} \pi R^2 L \sin \delta; \quad D_{32} = D_{32}^0,$$

где  $D_{ij}^0$  — коэффициенты цилиндра относительно его центра

III. Для двух полусфер, являющихся основаниями цилиндра, относительно центра цилиндра имеем

$$D_{11} = D_{11}^0 + (1 - \epsilon) \left[ \pi R^2 L^2 + \frac{4}{3} R^3 L \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \cos \delta + \right. \\ \left. + 4R^3 L \sin \delta \right] + 3\epsilon \pi R^2 L^2 (1 + \sin^2 \delta) + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \frac{2}{3} \pi R^2 L^2;$$

$$D_{22} = D_{22}^0 + (1 - \epsilon) \left[ \pi R^2 L^2 + \frac{4}{3} R^3 L \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \cos \delta + \right. \\ \left. + \frac{8}{3} R^3 L \sin \delta \right] + \epsilon \pi R^2 L^2 + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \frac{2}{3} \pi R^2 L^2;$$

$$D_{23} = D_{23}^0 + (1 - \epsilon) \frac{4}{3} R^3 L \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \sin \delta; \quad D_{33} = D_{33}^0;$$

$$D_{32} = D_{32}^0,$$

где  $D_{ij}^0$  — коэффициенты сферы относительно ее геометрического центра.

IV. Для прямого кругового цилиндра с основаниями относительно его геометрического центра имеем

$$D_{11} = 2a_0 \sin \delta + C_0 |\cos \delta| + k_0;$$

$$D_{22} = a_0 \sin \delta + C_0 |\cos \delta| + k_0;$$

$$D_{33} = b_0 \sin \delta + 2d_0 |\cos \delta|; \quad (3.2)$$

$$D_{32} = d_0 \sin \delta \operatorname{sign}(\cos \delta);$$

$$D_{23} = 0,$$

где

$$a_0 = (1 - \varepsilon) \left( \frac{2}{3} R^3 L + \frac{1}{6} R L^3 \right) + \frac{2}{9} \varepsilon R L^3;$$

$$b_0 = 2(1 - \varepsilon) R^3 L;$$

$$C_0 = (1 - \varepsilon) \left( \frac{\pi R^4}{2} + \frac{\pi R^2 L^2}{4} \right) + \varepsilon \pi R^4;$$

$$d_0 = (1 - \varepsilon) \frac{\pi R^4}{4};$$

$$k_0 = (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \left( \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R L^3}{24} \right).$$

V. Для прямого кругового конуса с основанием относительно точки, расположенной на оси конуса и отстоящей от его вершины на расстоянии  $h = L/\sqrt[3]{2}$  (эта точка является центром масс конуса при равномерном распределении плотности в его объеме), имеем

$$\begin{aligned} D_{11} = & (1 - \varepsilon) \left\{ F_1 \left[ 2 \sin \beta \cos \delta \left( \Pi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \cos \beta \sin \delta \left( \sin \Pi_1 - \frac{1}{3} \sin^3 \Pi_1 \right) \right] - \right. \\ & - F_2 \left[ \cos \beta \cos \delta \left( \Pi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) + 2 \sin \beta \sin \delta \sin \Pi_1 \right] + \\ & + F_3 [2\Pi_1 \sin \beta \cos \delta + 4 \cos \beta \sin \delta \sin \Pi_1] + \\ & + 4\varepsilon [F_1 \sin^2 \beta - 2F_2 \sin \beta \cos \beta + F_3 \cos^2 \beta] \times \\ & \times \left[ 2 \cos \beta \sin \delta \left( \sin \Pi_1 - \frac{1}{3} \sin^3 \Pi_1 \right) + \sin \beta \cos \delta \times \right. \\ & \left. \left( \Pi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) \right] + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} (F_1 \sin^2 \beta - 2F_2 \sin \beta \cos \beta + \\ & + F_3 \cos^2 \beta) \left( \Pi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) + \\ & + \Pi_2 \left\{ (\varepsilon - 1) \pi R^2 \cos \delta \left[ \frac{R^2}{2} + (L - h)^2 \right] - \varepsilon \pi R^4 \cos \delta + \right. \\ & \left. + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \frac{\pi R^4}{4} \right\}; \\ D_{22} = & (1 - \varepsilon) F_1 \left[ \frac{2}{3} \cos \beta \sin \delta \sin^3 \Pi_1 + \sin \beta \cos \delta \times \right. \\ & \left. \times (2\Pi_1 - \sin 2\Pi_1) \right] - F_2 \cos \beta \cos \delta \left( \Pi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2F_3 (\cos \beta \sin \delta \sin \Pi_1 + \Pi_1 \sin \beta \cos \delta) \} + \\
& + 4\epsilon [F_1 \sin^2 \beta - 2F_2 \sin \beta \cos \beta + F_3 \cos^2 \beta] \left[ \frac{2}{3} \cos \beta \times \right. \\
& \quad \times \sin \beta \sin^3 \Pi_1 + \sin \beta \cos \delta \left( \Pi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) \left. \right] - \\
& - (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} (F_1 \sin^2 \beta - 2F_2 \sin \beta \cos \beta + F_3 \cos^2 \beta) \times \\
& \quad \times \left( \Pi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) + \Pi_2 \left\{ (\epsilon - 1) \pi R^2 \cos \delta \times \right. \\
& \quad \times \left[ \frac{R^2}{2} + (L - h)^2 \right] - \epsilon \pi R^4 \cos \delta + (1 - \epsilon) \frac{v}{V_0} \frac{\pi R^4}{4} \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{33} = (1 - \epsilon) F_1 (2 \cos \beta \sin \delta \sin \Pi_1 + 2\Pi_1 \sin \beta \cos \delta) - \\
- \Pi_2 (1 - \epsilon) \frac{\pi R^4}{2} \cos \delta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{23} = (1 - \epsilon) F_2 \left[ \cos \beta \sin \delta \left( \Pi_1 + \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) + \right. \\
\left. + 2 \sin \beta \cos \delta \sin \Pi_1 \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{32} = (1 - \epsilon) \left\{ F_1 \sin \beta \sin \delta \left( \Pi_1 - \frac{1}{2} \sin 2\Pi_1 \right) + \right. \\
\left. + F_2 (\cos \beta \sin \delta \sin 2\Pi_1 + 2 \sin \beta \cos \delta \sin \Pi_1) \right\} - \\
- \Pi_2 (1 - \epsilon) \frac{\pi R^4}{4} \sin \delta;
\end{aligned}$$

$$F_1 = \frac{L^4}{4} \frac{\operatorname{tg}^3 \beta}{\cos \beta}; \quad F_2 = \left( \frac{hL^3}{3} - \frac{L^4}{4} \right) \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\cos \beta};$$

$$F_3 = \left\{ \frac{(L - h)^4 - h^4}{4} + \frac{h}{3} [(L - h)^3 + h^3] \right\} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta};$$

$$\Pi_1 = \begin{cases} \pi, & \delta \leq \beta; \\ \arccos(-\operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \delta), & \beta < \delta < \pi - \beta; \\ 0, & \delta \geq \pi - \beta; \end{cases}$$

$$\Pi_2 = \begin{cases} 1, & \cos \delta < 0; \\ 0, & \cos \delta \geq 0. \end{cases}$$

Здесь  $R$  — радиус сферы, полусферы, цилиндра, диска, основания конуса;  $L$  — длина цилиндра, высота конуса;  $\beta$  — угол полураствора конуса.

Найдем коэффициенты  $D_{ij}$  для солнечных батарей спутника «Протон». Текущее значение нормали к поверхности батареи дается формулой

$$\mathbf{n}_i^T = \mathbf{n}_i \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_i). \quad (3.21)$$

Введем обозначение

$$(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_i^T) = |\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_i| = |\cos \delta_i|. \quad (3.22)$$

Учитывая (3.12), имеем  $|\cos \delta_3| = |\cos \delta_4|$ . Выражение (2.6) для момента  $M_2$  с учетом (3.21) и (3.22) можно представить в виде

$$\begin{aligned} M_2 = \rho V_0 S_* \left\{ (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^4 ([\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i] n_i \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_i)) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{r}_i] + \right. \\ \left. + |\cos \delta_i| [[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i] \mathbf{r}_i] + 4\varepsilon \sum_{i=1}^4 |\cos \delta_i| \times \right. \\ \left. \times ([\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i] \cdot \mathbf{n}_i) [\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i] + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \sum_{i=1}^4 ([\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i] n_i) [\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{r}_i] \right\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Тогда, подставляя в (3.23) (3.12), окончательно получаем

$$\begin{aligned} D_{11} = & -(1 - \varepsilon) S_* \{ d^2 n_1 \alpha' [\operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1) - \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2)] - \\ & - 2a^2 n_0 \alpha'' \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_3) - d^2 (|\cos \delta_1| + |\cos \delta_2|) - \\ & - 2(a^2 + d^2) |\cos \delta_3| \} - 4\varepsilon S_* \{ -d^2 n_1^2 (|\cos \delta_1| + |\cos \delta_2|) - \\ & - 2a^2 n_0^2 |\cos \delta_3| \} - 2(1 - \varepsilon) S_* \frac{v}{V_0} (n_0^2 a^2 + n_1^2 d^2); \\ D_{12} = & (1 - \varepsilon) S_* \{ a n_0 d \alpha' [\operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2) - \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1)] - \\ & - 2 a d n_1 \alpha'' \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_3) \} + \\ & + 4\varepsilon S_* \{ a d n_0 n_1 (|\cos \delta_1| + |\cos \delta_2| - 2|\cos \delta_3|) \}; \\ D_{13} = & -(1 - \varepsilon) S_* \{ a d n_1 \alpha' [\operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1) + \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2)] + \\ & + 2 a d n_1 \alpha' \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_3) - a d (|\cos \delta_1| - |\cos \delta_2|) \} + \\ & + 4\varepsilon S_* \{ a d n_1^2 (|\cos \delta_1| - |\cos \delta_2|) \}; \quad (3.24) \\ D_{21} = & (1 - \varepsilon) S_* a d n_1 \alpha'' [\operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1) + \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2)] + \\ & + 4\varepsilon S_* a d n_0 n_1 (|\cos \delta_1| + |\cos \delta_2| - 2|\cos \delta_3|); \\ D_{22} = & (1 - \varepsilon) S_* \{ a^2 n_0 \alpha'' [\operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1) + \operatorname{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2)] + \\ & + (a^2 + d^2) (|\cos \delta_1| + |\cos \delta_2|) + 2d^2 |\cos \delta_3| \} + \\ & + 4\varepsilon S_* \{ a^2 n_0^2 (|\cos \delta_1| + |\cos \delta_2|) + 2d^2 n_1^2 |\cos \delta_3| \} + \\ & + 2(1 - \varepsilon) S_* \frac{v}{V_0} (n_0^2 a^2 + n_1^2 d^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{23} &= (1 - \varepsilon) S_* a^2 n_1 \alpha' [\text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2) - \text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1)] + \\
&\quad + 4\varepsilon S_* a^2 n_1 n_0 (|\cos \delta_2| - |\cos \delta_1|); \\
D_{31} &= (1 - \varepsilon) S_* \{-ad n_1 \alpha' [\text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1) + \\
&\quad + \text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2)] + ad (|\cos \delta_1| - |\cos \delta_2|)\} + \\
&\quad + 4\varepsilon S_* a d n_1^2 (|\cos \delta_1| - |\cos \delta_2|); \\
D_{32} &= (1 - \varepsilon) S_* a^2 n_0 \alpha' [\text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1) + \text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2) + \\
&\quad + 4\varepsilon S_* a^2 n_1^2 (|\cos \delta_1| + \\
&\quad + |\cos \delta_2| + 2|\cos \delta_3|) + 4(1 - \varepsilon) S_* \frac{v}{V_0} n_1^2 a^2; \\
D_{33} &= -(1 - \varepsilon) S_* \{a^2 n_1 \alpha' [\text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_1) - \text{sign}(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}_2)] - \\
&\quad - a^2 (|\cos \delta_1| + |\cos \delta_2| + 2|\cos \delta_3|)\} + 4\varepsilon S_* a^2 n_1^2 (|\cos \delta_1| + \\
&\quad + |\cos \delta_2| + 2|\cos \delta_3|) + 4(1 - \varepsilon) S_* \frac{v}{V_0} n_1^2 a^2.
\end{aligned}$$

В выражениях (3.24) диагональные члены  $D_{ii}$  взяты с противположным знаком в соответствии с выражением (2.9).

### 3.4. Сравнительная оценка различных моментов сил

Проведем сравнительный анализ всех рассмотренных моментов аэродинамических сил.

Восстанавливающий момент  $\mathbf{M}_1$  пропорционален трем членам:  $(1 - \varepsilon) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{r}]$ ,  $\varepsilon [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}]$ ,  $(1 - \varepsilon) v/V_0 [\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}]$ . Члены рассчитанные относительно центра компактных тел и сдержанные сомножителем  $[\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}]$ , малы и в предельном случае сферы равны нулю. По современным представлениям схемы взаимодействия газа с поверхностью спутника таквы, что  $\varepsilon$  и  $v/V_0$  — величины малые (как показано в гл. 1  $\varepsilon \approx 0,1$  и  $v/V_0 \approx 0,1$ ), поэтому основной вклад в  $\mathbf{M}_1$  дает член  $[\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{r}]$ . При  $\varepsilon = v/V_0 = 0$  этот член определяет силовое воздействие на тело от падающего потока газа, который обычно на порядок выше вклада от отраженных частиц. Момент  $\mathbf{L}$  при принятых в гл. 2 допущениях всегда консервативен и имеет потенциальную функцию. При вращении тела положение центра давления постоянно меняется, а восстанавливающий момент стремится совместить линию центр масс — центр давления тела с направлением вектора скорости набегающего потока. Потенциальная функция в этом положении имеет минимум, а сам момент  $\mathbf{M}_1 = 0$ . Это свойство восстанавливающ

го момента используется для стабилизации космических аппаратов по вектору скорости [56].

Момент аэродинамического трения  $M_2$  пропорционален параметру Струхалья  $Sh$  и, следовательно, на 3—4 порядка меньше момента  $M_1$ . Момент  $M_2$  диссипативный. Он стремится погасить угловую скорость и становится равным нулю, когда  $\omega = 0$ . Момент  $M_2$  можно представить в виде свертки тензора коэффициентов аэродинамической диссипации  $D_{ij}$  с вектором угловой скорости вращения  $\omega$ , причем чисто диссипативными являются диагональные члены тензора  $D_{ij}$ , а недиагональные члены приводят к возникновению так называемых прецессирующих моментов, стремящихся переориентировать тело. Коэффициенты  $D_{ij}$  имеют высокую ( $L^4$ ) размерность по линейным размерам спутника, поэтому даже небольшие элементы спутника, но отнесенные от центра масс на значительные расстояния, могут давать больший вклад в его демпфирование, чем крупногабаритные тела, но расположенные в окрестности центра масс.

При произвольном расположении осей геометрической и динамической симметрий спутника в соответствии с рис. 17 в общем случае возникают три составляющие момента: момент смещения, пропорциональный  $[\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1]$ ; авторотационный момент, пропорциональный  $[\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1]$ , и обычный восстанавливающий момент. Момент смещения и авторотационный момент имеют отличные от нуля проекции на направление вектора кинетического момента спутника и в зависимости от вида функций  $F_{V_0}$  и  $F_k(\delta)$ , а также от режимов вращения могут приводить как к возрастанию, так и к уменьшению угловой скорости вращения спутника. Величина этих моментов зависит от модуля вектора смещения  $R_1$  между осями геометрической и динамической симметрий спутника. Технология же конструирования спутников такова, что  $R_1$ , как правило, величина малая.

Момент пропеллирования (3.19) имеет консервативную составляющую (типа восстанавливающего момента), зависящую от  $d$ , и составляющую, зависящую от «плеча пропеллера»  $a$ , которая пропорциональна члену  $(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{a})$  и ответственна за изменение угловой скорости вращения спутника. Аэргradientный момент заведомо пропорционален для обычных спутников малой величине  $(\mathbf{e}_{R_0} \cdot \mathbf{r})/H \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$ . По порядку величины он несколько меньше момента трения и приводит к раскрутке спутника по направлению его вращения по орбите. В табл. 2 приведены рассмотренные моменты аэродинамических сил, ниже — векторные формулы аэродинамических сил и моментов для тел вращения с несовпадающими геомет-

Момент	Структура	Причина возникновения	Главный эффект
Восстанавливающий	$[\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}]$	Смещение центра масс от центра давления	Совмещение лини центр масс — цен давления с направлением $V_0$
Смещения	$[\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1]$	Смещение осей геометрической и динамической симметрий спутника	Раскрутка спутника (увеличение $\omega$ )
Авторотации	$[\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1]$	Смещение осей ( $\varepsilon \neq 0, \nu \neq 0$ )	То же
Пропеллирования	$(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}$	Пропеллер	Периодическая раскрутка и затухание $\omega$
Трения	$D_{ij}\omega_j$	Вращение спутника	Затухание $\omega$
Градиентный	$\frac{\Delta h}{H} \mathbf{n}_{орб}$	Градиент плотности атмосферы	Раскрутка спутника

рическими и динамическими осями:

$$\mathbf{F}_\Sigma = \rho V_0^2 [F_{V_0}(\delta) \mathbf{e}_{V_0} + F_k(\delta) \mathbf{k}] - \rho V_0 [\mathbf{i} (J_{12}\omega_y + J_{13}\omega_z) + \mathbf{j} J_{21}\omega_x + \mathbf{k} J_{31}\omega_x]; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M}_\Sigma = \rho V_0^2 \{F_{V_0}(\delta) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1] + F_k(\delta) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1] + (F_{V_0}(\delta) \Delta l + C(\delta)) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}]\} + \rho V_0 [\mathbf{i} (-D_{11}\omega_x) + \mathbf{j} (-D_{22}\omega_y + D_{23}\omega_z) + \mathbf{k} (D_{32}\omega_y - D_{33}\omega_z)]. \quad (3.2)$$

В простейшем случае сферы (со смещенным центром масс) получим из (3.25), (3.26)

$$\mathbf{F}_\Sigma = -\rho V_0^2 \pi R^2 \left[ 1 + \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \right] \mathbf{e}_{V_0} + \rho V_0 (1 - \varepsilon) \frac{3}{16} \pi^2 R^2 [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \boldsymbol{\omega}]; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M}_\Sigma = \rho V_0^2 \pi R^2 \left[ 1 + \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \right] [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1] + \rho V_0 (1 - \varepsilon) \frac{\pi}{4} R^4 [-3\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_{V_0}) \mathbf{e}_{V_0}]. \quad (3.2)$$

Формулы (3.25) — (3.28) получены без учета взаимного влияния трения ( $\omega$ ) и смещения ( $R_1$ ).

Чтобы составить представления об отброшенных членах, выпишем полное выражение для момента аэродинамических сил, действующего на сферу, полученное в работе [62] для случая абсолютно неупругого удара ( $\varepsilon = 0$ ,  $v = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\Sigma = & \pi R^2 \rho V_0 \left\{ V_0 [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1] - \frac{3}{4} R^2 \boldsymbol{\omega} + \right. \\ & + \frac{1}{4} R^2 (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_{V_0}) \mathbf{e}_{V_0} + \frac{2}{3} R R_1 \left[ \omega_R \mathbf{e}_{V_0} - \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{\mathbf{R}_1}{R_1} \cdot \mathbf{e}_{V_0} \right) \left( \omega_R \frac{\mathbf{R}_1}{R_1} + \boldsymbol{\omega}' \right) \right] - R_1^2 \boldsymbol{\omega}' + R_1 (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \boldsymbol{\omega}') [\mathbf{e}_{V_0} \mathbf{R}_1] \right\}. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_R$  — проекция  $\boldsymbol{\omega}$  на  $\mathbf{R}_1$ , а  $\boldsymbol{\omega}'$  — составляющая  $\boldsymbol{\omega}$  на плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{R}_1$ . Видно, что при  $R_1 \ll R$  добавочные члены по сравнению с учтенными в (3.28) малы (первого или второго порядка малости). Таким образом, при малых смещениях можно пользоваться принципом линейной суперпозиции и использовать выражения (3.25) — (3.28) и аналогичные им. В § 3.3 выражения, эквивалентные (3.29), получены путем учета смещения непосредственно в коэффициентах  $D_{ij}$ .

При построении модели движения спутников относительно центра масс под действием аэродинамических сил, а также при решении обратных задач по определению плотности атмосферы или схем взаимодействия молекул газа с поверхностью спутника обилие аэродинамических моментов (часто близких по величине) требует тщательного анализа сравнительного влияния этих моментов на динамику спутников.

## ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Предыдущие главы были посвящены в основном анализу аэродинамических сил (моментов сил), действующих на спутник. Теперь предстоит исследовать динамику вращательного движения спутника под действием этих моментов сил. В настоящей главе такое исследование проводится для спутников простой формы. Действие возмущающих моментов на быстро вращающийся спутник таково, что движение спутника представляет суперпозицию быстрого вращения относительно вектора кинетического момента и медленной эволюции самого этого вектора. Этот факт используется при анализе уравнений движения — применяется специальный аппарат исследования (эволюционные уравнения и асимптотические методы их анализа).

### 4.1. Системы координат и матрицы перехода

Для описания динамики вращательного движения искусственных спутников введем следующие системы координат (рис. 20):  $x'y'z'$  — система, связанная с главными центральными моментами инерции спутника (рис. 20, б);  $XYZ$  — «перигейная» система, ось  $Z$  которой направлена параллельно радиусу-вектору перигея орбиты, ось  $Y$  параллельна нормали к плоскости орбиты, а ось  $X$  параллельна касательной в перигее орбиты в сторону движения центра масс спутника (рис. 20, а, в);  $L_1L_2L$  — система, связанная с вектором кинетического момента  $\mathbf{L}$  вращательного движения спутника. Ось  $OL$  направлена по  $\mathbf{L}$ ;  $OL_1$  расположена в плоскости  $LY$  перпендикулярно  $OL$  и образует тупой угол с  $Y$ ; ось  $OL_2$  дополняет систему до правой (рис. 20, б, в);  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  — «орбитальная» система. Ось  $\bar{z}$  направлена по текущему радиусу-вектору орбиты, оси  $\bar{y}$  и  $\bar{x}$  параллельны соответственно нормали к плоскости орбиты и трансверсали. Орбита может приниматься оскулирующей (рис. 20, а);  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  — неподвижная (абсолютная) система с началом координат в центре  $C$  Земли. Ось  $\bar{Y}$  направлена по оси Земли,  $\bar{X}$  и  $\bar{Z}$  лежат в экваториальной плоскости Земли, а ось  $\bar{Z}$  направлена в точку весеннего равноденствия (рис. 20, а). Взаимное

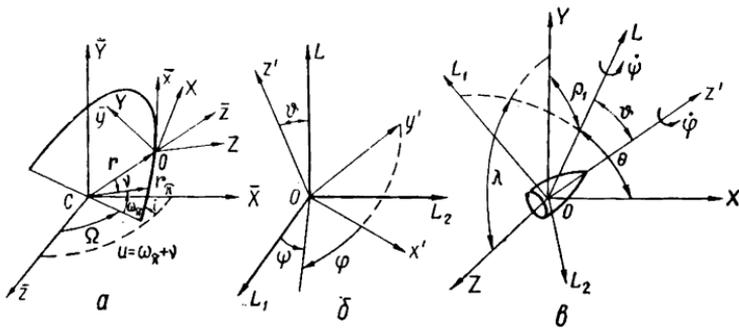


Рис. 20. Основные системы координат и оскулирующие элементы.

положение этих систем определим следующими таблицами направляющих косинусов:

а)	$\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$	$\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{array}$
б)	$\begin{array}{c} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{array}$	$\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}$	$\begin{array}{c} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\gamma}_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} \tilde{\alpha}_2 \\ \tilde{\beta}_2 \\ \tilde{\gamma}_2 \end{array}$	$\begin{array}{c} \tilde{\alpha}_3 \\ \tilde{\beta}_3 \\ \tilde{\gamma}_3 \end{array}$

в)	$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}$	$\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{array}$
г)	$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L \end{array}$	$\begin{array}{c} x' \\ y' \\ z' \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{array}$

д)	$\begin{array}{c} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{array}$	$\begin{array}{c} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{array}$	$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}$	$\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}$	$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array}$
е)	$\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}$	$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L \end{array}$	$\begin{array}{c} m_1 \\ n_1 \\ k_1 \end{array}$	$\begin{array}{c} m_2 \\ n_2 \\ k_2 \end{array}$	$\begin{array}{c} m \\ n \\ k \end{array}$

и др.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i; \\
 b_1 &= -\cos \Omega \sin i; \quad c_1 = \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i; \\
 a_2 &= \cos u \sin i; \quad b_2 = \cos i; \quad c_2 = \sin u \sin i; \\
 a_3 &= -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos u \cos i; \\
 b_3 &= \sin \Omega \sin i; \quad c_3 = \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Здесь  $u = \omega_{\pi} + v$ , где  $\omega_{\pi}$  — угловое расстояние периге орбиты от линии узлов (рис. 20, а);  $v$  — истинная аномалия;  $\Omega$  — долгота восходящего узла орбиты от точки Весны, в которую, по предположению, направлена ось  $\bar{Z}$ ;  $i$  — наклон орбиты к экватору.

Введем  $\theta$  — угол между  $\mathbf{L}$  и  $OX$ ,  $\lambda$  — угол между  $O$  и проекцией вектора  $\mathbf{L}$  на плоскость  $OZY$ . Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= -\sin \theta, & m_2 &= 0, & m &= \cos \theta, \\ n_1 &= -\cos \theta \sin \lambda, & n_2 &= -\cos \lambda, & n &= -\sin \theta \sin \lambda, \\ k_1 &= \cos \theta \cos \lambda, & k_2 &= -\sin \lambda, & k &= \sin \theta \cos \lambda. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Направляющие косинусы  $\alpha_{ij}$  выразим через эйлеровы углы  $\theta, \psi, \varphi$  (рис. 20, б):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi; \\ a_{21} &= \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi; \\ a_{31} &= \sin \theta \sin \varphi; \\ a_{12} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi; \\ a_{22} &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi; \\ a_{32} &= \sin \theta \cos \varphi; & a_{13} &= \sin \theta \sin \psi; \\ a_{23} &= -\sin \theta \cos \psi; & a_{33} &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Часто будут употребляться выражения  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  через  $\theta, \psi, \varphi$ . С помощью (4.3) и (4.4) получим

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= -\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi; \\ \beta_3 &= -\cos \theta \sin \lambda \sin \varphi \sin \psi + \cos \lambda \sin \varphi \cos \psi - \\ &\quad - \sin \theta \sin \lambda \cos \varphi; \\ \gamma_3 &= \cos \theta \cos \lambda \sin \varphi \sin \psi + \sin \lambda \sin \varphi \cos \psi + \sin \theta \cos \lambda \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Выпишем также средние по  $\psi$  значения этих величин и некоторых их комбинаций:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_3 &= \cos \theta \cos \varphi; \\ \bar{\beta}_3 &= -\sin \theta \sin \lambda \cos \varphi; \\ \bar{\gamma}_3 &= \sin \theta \cos \lambda \cos \varphi; \\ \bar{\alpha}_3^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) \cos^2 \varphi; \\ \bar{\beta}_3^2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right) \sin^2 \theta \sin^2 \lambda; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\overline{\gamma_3^2} &= \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta\right) \sin^2 \theta \cos^2 \lambda; \\ \overline{\alpha_3 \beta_3} &= -\sin \theta \cos \theta \sin \lambda \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta\right); \\ \overline{\alpha_3 \gamma_3} &= \sin \theta \cos \theta \cos \lambda \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta\right); \\ \overline{\beta_3 \gamma_3} &= -\sin^2 \theta \sin \lambda \cos \lambda \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta\right).\end{aligned}$$

В некоторых случаях вместо углов  $\theta$  и  $\lambda$  будут использоваться углы  $\rho_1$  и  $\sigma_1$ , где  $\rho_1$  — угол между вектором  $\mathbf{L}$  и осью  $OY$ ;  $\sigma_1$  — угол, отсчитанный от оси  $OZ$  до проекции вектора  $\mathbf{L}$  на плоскость  $OZX$ .

#### 4.2. Уравнения движения в эволюционных элементах

Если на тело не действуют моменты внешних сил, то оно совершает относительно своего центра масс движение Эйлера — Пуансо. Геометрически это движение можно интерпретировать как качение трехосного эллипсоида вокруг вектора кинетического момента по неподвижной плоскости, перпендикулярной этому вектору. Подобное движение спутника назовем невозмущенным движением.

Здесь рассматривается движение под действием аэродинамических моментов. Будем предполагать, что эти моменты малы в том смысле, что кинетическая энергия вращательного движения спутника существенно превосходит работу возмущающих моментов. Тогда можно считать, что на небольшом интервале времени движение близко к движению Эйлера — Пуансо. Однако на достаточно большом интервале времени действие малых возмущающих моментов может привести к накоплению возмущений в движении и к постепенной его эволюции. Такое движение назовем эволюционным. (В книге [7] движение этого типа названо ротационным.)

Основная цель анализа возмущенного движения — исследование его эволюции в течение длительного времени; при этом естественно применить асимптотические методы нелинейной механики.

В небесной механике существует мощный аппарат исследования уравнений возмущенного движения — метод оскулирующих элементов (метод вариации постоянных). Оскулирующими элементами называются такие характеристики орбиты, которые остаются постоянными в невозмущенном движении

и меняются со временем в возмущенном. Оскулирующие элементы суть первые интегралы уравнений невозмущенного движения. Уравнения, записанные в оскулирующих элементах удобны тем, что их исследование и приближенное решение можно провести с помощью асимптотических методов. При этом уже первое приближение «ухватывает» основные закономерности возмущенного движения.

В задаче о движении спутника относительно центра масс можно найти элементы, аналогичные оскулирующим элементам орбитальной небесной механики. Однако можно не требовать, чтобы все элементы были постоянными в невозмущенном движении. Достаточно, чтобы этому условию удовлетворяла лишь часть элементов. Критерии, которыми будем руководствоваться, таковы.

1. Переменные, описывающие движение, должны иметь простой механический и геометрический смысл.

2. В случае отсутствия возмущающих моментов выбранные переменные должны дать уравнения, достаточно просто описывающие движение Эйлера — Пуансо.

3. В случае возмущенного движения уравнения в выбранных переменных должны быть удобны для применения асимптотических методов нелинейной механики. Переменные должны делиться на «медленные» и «быстрые», медленные переменные в невозмущенном движении постоянны.

Переменные (элементы), удовлетворяющие этим трем условиям, назовем эволюционными переменными. Они могут быть выбраны неоднозначно. Здесь будет использована система эволюционных переменных, употреблявшаяся в книгах [7—9]. В качестве оскулирующих элементов, описывающих траекторное движение спутника, будем использовать переменные  $P, e, i, \Omega, \omega_{\pi}, \nu(t)$  или  $u = \omega_{\pi} + \nu$ , в качестве эволюционных элементов, описывающих вращательное движение спутника, —  $L, \theta, \lambda, \vartheta, \psi(\varphi), \varphi(\varphi)$  [7]. Выбранные переменные удобны тем, что в невозмущенном движении динамически симметричного спутника величины  $L, \theta, \lambda, \vartheta$  постоянны, а углы  $\varphi, \psi$  описывают эйлерово движение по известным формулам, причем  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  также постоянны. Таким образом, для динамически симметричного спутника переменные  $L, \theta, \lambda, \vartheta$  медленные, а переменные  $\varphi, \psi$  быстрые. Для трехосного спутника элементы  $L, \theta, \lambda$  всегда являются медленными переменными.

При воздействии момента сил  $\mathbf{M}$  на тело его кинетический момент  $\mathbf{L}$  изменяется по закону

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (4.7)$$

Проекция вектора  $\mathbf{L}$  на оси  $X, Y, Z$

$$L_X = L \cos \theta; \quad L_Y = -L \sin \theta \sin \lambda; \quad L_Z = L \sin \theta \cos \lambda. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.7) в скалярной форме распадается на три:

$$\dot{L}_X = M_X; \quad \dot{L}_Y = M_Y; \quad \dot{L}_Z = M_Z.$$

Подставляя в левые части этих уравнений выражения (4.8), получаем

$$\begin{aligned} \dot{L} \cos \theta - L \sin \theta \dot{\theta} &= M_X; \\ -\dot{L} \sin \theta \sin \lambda - L \cos \theta \sin \lambda \dot{\theta} - L \sin \theta \cos \lambda \dot{\lambda} &= M_Y; \\ L \sin \theta \cos \lambda + L \cos \theta \cos \lambda \dot{\theta} - L \sin \theta \sin \lambda \dot{\lambda} &= M_Z. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Умножим второе уравнение на  $\sin \lambda$ , третье на  $\cos \lambda$  и вычтем из третьего уравнения второе. Получим

$$\dot{L} \sin \theta + L \cos \theta \dot{\theta} = M_Z \cos \lambda - M_Y \sin \lambda. \quad (4.10)$$

Решая систему уравнений (4.10) совместно с первым уравнением (4.9) относительно  $\dot{L}$  и  $\dot{\theta}$ , получаем

$$\dot{L} = M_X \cos \theta + M_Z \sin \theta \cos \lambda - M_Y \sin \theta \sin \lambda = M;$$

$$L \dot{\theta} = M_Z \cos \theta \cos \lambda - M_Y \cos \theta \sin \lambda - M_X \sin \theta = M_1. \quad (4.11)$$

Далее умножим второе уравнение (4.9) на  $\cos \lambda$ , третье на  $\sin \lambda$  и сложим. Получим

$$L \sin \theta \dot{\lambda} = -M_Y \cos \lambda - M_Z \sin \lambda = M_2, \quad (4.12)$$

где  $M, M_1$  и  $M_2$  — проекции вектора  $\mathbf{M}$  соответственно на оси  $L, L_1$  и  $L_2$ . Поскольку  $M_X, M_Y$  и  $M_Z$  зависят также от  $\varphi, \psi$  и  $\theta$ , то систему уравнений (4.12), (4.11) необходимо замкнуть уравнениями для  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$  и  $\dot{\theta}$ .

Пусть  $\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}$  — проекции абсолютной угловой скорости спутника на главные центральные моменты инерции  $A, B, C$ . Тогда, например,

$$\omega_{x'} = \frac{A \omega_{x'}}{A} = \frac{L_{x'}}{A} = \frac{L \alpha_{31}}{A}, \quad (4.13)$$

где  $\alpha_{31}$  — элемент матрицы  $\gamma$  (4.1). С другой стороны, величина  $\omega_{x'}$  как проекция абсолютной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  на ось  $x'$  запишется согласно рис. 20, б и матрицы  $\gamma$  (4.1) в виде

$$\omega_{x'} = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \alpha_{31} + \dot{\theta} \alpha_{21} + \dot{\lambda} \cos(\widehat{x'X}). \quad (4.14)$$

Приравняв правые части (4.13) и (4.14), получаем одно из уравнений для переменных, в которых описывается движение. Используя аналогичные построения относительно компонент

$\omega_{y'}$ ,  $\omega_{z'}$ , получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{L\alpha_{31}}{A} &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi}\alpha_{31} + \dot{\theta}\alpha_{21} + \dot{\lambda}(\alpha_{11}m_1 + \alpha_{31}m); \\ \frac{L\alpha_{32}}{B} &= -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi}\alpha_{32} + \dot{\theta}\alpha_{22} + \dot{\lambda}(\alpha_{12}m_1 + \alpha_{32}m); \\ \frac{L\alpha_{33}}{C} &= \dot{\varphi} + \dot{\psi}\alpha_{33} + \dot{\theta}\alpha_{23} + \dot{\lambda}(\alpha_{13}m_1 + \alpha_{33}m).\end{aligned}\quad (4.1)$$

Умножим первое уравнение (4.15) на  $\cos \varphi$ , второе на  $(-\sin \varphi)$  и сложим их. Учтем, что согласно (4.4) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\alpha_{31} \cos \varphi - \alpha_{32} \sin \varphi &= 0; \quad \alpha_{21} \cos \varphi - \alpha_{22} \sin \varphi = \sin \psi; \\ \alpha_{11} \cos \varphi - \alpha_{12} \sin \varphi &= \cos \psi.\end{aligned}$$

В результате получим

$$\dot{\vartheta} = L \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\lambda} \cos \psi \sin \theta.$$

Учитывая (4.11) и (4.12), имеем окончательно

$$\dot{\vartheta} = L \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{1}{L} (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi), \quad (4.1)$$

Далее умножим первое из уравнений (4.15) на  $\sin \varphi$ , второе на  $\cos \varphi$  и сложим. При этом учтем, что согласно (4.4)

$$\begin{aligned}\alpha_{31} \sin \varphi + \alpha_{32} \cos \varphi &= \sin \vartheta; \quad \alpha_{21} \sin \varphi + \alpha_{22} \cos \varphi = \\ &= \cos \psi \cos \vartheta; \quad \alpha_{11} \sin \varphi + \alpha_{12} \cos \varphi = -\sin \psi \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Разрешая полученное уравнение относительно  $\dot{\psi}$ , получаем

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= L \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_1}{L} \cos \psi \operatorname{ctg} \vartheta - \\ &- \frac{M_2}{L} (\operatorname{ctg} \theta + \sin \psi \operatorname{ctg} \vartheta).\end{aligned}\quad (4.1)$$

Теперь, подставляя в третье из уравнений (4.15) выведенные выражения (4.16) и (4.17), получаем уравнение

$$\dot{\varphi} = L \cos \vartheta \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L \sin \vartheta}.$$

Итак, получена полная замкнутая система шести уравнений для величин  $L$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ . Входящие в эти уравнения моменты  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  действующих сил считаются явно выраженными функциями этих величин и, быть может, времени

Выпишем эти уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= M; \quad \dot{\theta} = \frac{M_1}{L}; \quad \dot{\lambda} = \frac{M_2}{L \sin \theta}; \\ \dot{\vartheta} &= L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \\ &+ \frac{1}{L} (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi); \\ \dot{\psi} &= L \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_1}{L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \\ &- \frac{M_2}{L} (\operatorname{ctg} \theta + \sin \psi \operatorname{ctg} \vartheta); \\ \dot{\varphi} &= L \cos \vartheta \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L \sin \theta}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  выражаются через компоненты  $\mathbf{M}$  в абсолютной инерционной системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} M &= M_X \cos \theta + M_Z \sin \theta \cos \lambda - M_Y \sin \theta \sin \lambda; \\ M_1 &= M_Z \cos \theta \cos \lambda - M_Y \cos \theta \sin \lambda - M_X \sin \theta; \\ M_2 &= -M_Y \cos \lambda - M_Z \sin \lambda. \end{aligned}$$

Уравнения (4.18) назовем уравнениями возмущенного движения в первой форме. Если на тело не действуют моменты внешних сил, т. е.  $\mathbf{M} = 0$ , то из уравнений (4.18) получается система уравнений Уиттекера, описывающая невозмущенное движение твердого тела — движение Эйлера — Пуансо. Анализ этих уравнений содержится в книге [8].

### 4.3. Возмущенное движение в общем случае при наличии силовой функции

Момент аэродинамических сил в общем случае имеет консервативную и диссипативную составляющие. Консервативная составляющая момента, в частности восстанавливающий момент, обладает силовой функцией.

Пусть в общем случае силовая функция зависит от всех элементов матрицы  $a$  (4.1), а также от времени, т. е.

$$U = U(t, \alpha, \beta, \gamma). \quad (4.19)$$

Тогда, как известно, момент внешних сил дается формулой

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 [\mathbf{e}_i \operatorname{grad}_{\mathbf{e}_i} U],$$

где  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — орты осей  $x', y', z'$  соответственно. В компонентах по осям  $X, Y, Z$  получим

$$M_X = \sum_{i=1}^3 \beta_i \frac{\partial U}{\partial \gamma_i} - \gamma_i \frac{\partial U}{\partial \beta_i}; \quad M_Y = \sum_{i=1}^3 \gamma_i \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} - \alpha_i \frac{\partial U}{\partial \gamma_i};$$

$$M_Z = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial U}{\partial \beta_i} - \beta_i \frac{\partial U}{\partial \alpha_i}. \quad (4.20)$$

Подставив (4.20) в (4.18) и воспользовавшись преобразованием, аналогичным приведенным в работе [8, с. 156], нетрудно получить систему (4.18) в следующем виде:

$$L \sin \theta \dot{\lambda} = \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad L \sin \theta \dot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \psi};$$

$$\dot{L} = \frac{\partial U}{\partial \psi}; \quad L \sin \theta \dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial \psi} (T - U) + \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \psi};$$

$$L \sin \theta \dot{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \theta} (T - U); \quad (4.21)$$

$$\psi = L \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \vartheta \right),$$

где

$$T = \frac{1}{2} L^2 \left[ \sin^2 \vartheta \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{\cos^2 \vartheta}{C} \right]$$

есть кинетическая энергия вращательного движения спутника.

Если вместо переменных  $L, \theta, \lambda, \vartheta, \psi, \varphi$  ввести новые переменные  $L, L_x = L \cos \theta, l = L \cos \vartheta, \lambda, \psi$  и  $\varphi$  и подставить их в (4.7), сделав соответствующие замены переменных, то не трудно убедиться, что эти новые переменные канонические. Уравнения (4.21) в этих переменных приобретают вид

$$\dot{L} = \frac{\partial H}{\partial \psi}; \quad \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial L}; \quad \dot{L}_x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda};$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial L_x}; \quad \dot{l} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial l},$$

где  $H = T - U$  — функция Гамильтона.

В практических задачах зачастую приходится сталкиваться со спутниками, для которых можно считать  $A = B \neq C$ . Динамическая симметрия спутников упрощает уравнения, описывающие их движение около центра масс. Эти уравнения изучены наиболее полно [8].

Положим в (4.18) и (4.21)  $A = B$ . Получим

$$\dot{L} = M; \quad \dot{\theta} = \frac{M_1}{L}; \quad \dot{\lambda} = \frac{M_2}{L \sin \theta};$$

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \frac{1}{L} (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi); \\ \dot{\psi} &= \frac{L}{A} - \frac{M_1}{L} \cos \psi \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{M_2}{L} (\operatorname{ctg} \theta + \sin \psi \operatorname{ctg} \vartheta); \\ \dot{\varphi} &= L \cos \vartheta \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L \sin \vartheta}.\end{aligned}$$

Для системы уравнений (4.21) соответственно имеем

$$\begin{aligned}L \sin \theta \dot{\lambda} &= \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad L \sin \theta \dot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \psi}; \\ \dot{L} &= \frac{\partial U}{\partial \psi}; \quad L \sin \vartheta \dot{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (T - U) + \cos \vartheta \frac{\partial U}{\partial \psi}; \quad (4.22) \\ L \sin \vartheta \dot{\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial \vartheta} (T - U); \\ \dot{\psi} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right); \\ T &= \frac{1}{2} L^2 \left( \frac{\sin^2 \vartheta}{A} + \frac{\cos^2 \vartheta}{C} \right).\end{aligned}$$

Если кроме динамической симметрии поверхность спутника обладает еще и геометрической симметрией, причем оси симметрий совпадают, то силовая функция  $U$  не зависит от  $\varphi$ . В системе уравнений (4.22) уравнение для  $\varphi$  при этом может быть проинтегрировано отдельно после того, как будут проинтегрированы остальные пять уравнений. Условие  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$  автоматически приводит к наличию первого интеграла системы (4.22)

$$L \cos \vartheta = I_0. \quad (4.23)$$

При этом система (4.22) может быть сведена к системе следующих четырех уравнений:

$$\begin{aligned}L \sin \theta \dot{\lambda} &= \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad L \sin \theta \dot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \cos \theta \frac{\partial U}{\partial \psi}; \quad (4.24) \\ \dot{L} &= \frac{\partial U}{\partial \psi}; \quad \dot{\psi} = \frac{L}{A} - \frac{1}{L} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right),\end{aligned}$$

в которой  $\vartheta$  выражен через  $L$  с помощью (4.23). Системе (4.24) в каноническом виде соответствует система уравнений

$$\dot{L} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}; \quad \dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial L}; \quad \dot{L}_x = -\frac{\partial H}{\partial \lambda}; \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial L_x},$$

причем интеграл (4.23) автоматически вытекает из уравнения  $\dot{L} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}$ , поскольку при  $A = B$   $H$  не зависит от  $\varphi$ .

#### 4.4. Влияние восстанавливающего момента на эволюционное движение спутника

Восстанавливающий момент представим в виде (2.35)

$$\mathbf{M} = \frac{\rho V_0^2}{2} C(\delta) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}], \quad (4.2)$$

где для  $C(\delta)$  примем аппроксимацию (2.39)

$$C(\delta) = C(\cos \delta) = a_0^\delta + a_1^\delta \cos \delta + a_2^\delta \cos^2 \delta.$$

Силовая функция, порождающая момент (4.25), имеет вид

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\rho V_0^2}{2} \int C(\cos \delta) d \cos \delta = \\ &= -\frac{\rho V_0^2}{2} \left( a_0^\delta \cos \delta + \frac{1}{2} a_1^\delta \cos^2 \delta + \frac{1}{3} a_2^\delta \cos^3 \delta \right). \end{aligned}$$

В этом случае для исследования поведения  $\mathbf{L}$  применимы формулы предыдущего параграфа.

Представим момент (4.25) в перигейной системе координ

$$M_X = \frac{\rho V_0}{2} C(\cos \delta) [V_Y \gamma_3 - V_Z \beta_3];$$

$$M_Y = \frac{\rho V_0}{2} C(\cos \delta) [V_Y \alpha_3 - V_X \gamma_3];$$

$$M_Z = \frac{\rho V_0}{2} C(\cos \delta) [V_X \beta_3 - V_Y \alpha_3];$$

$$\cos \delta = \frac{V_X \alpha_3 + V_Y \beta_3 + V_Z \gamma_3}{V_0};$$

$$V_X = \sqrt{\frac{\mu}{P}} (e + \cos v) - \omega_3 \frac{P}{1 + e \cos v} \cos i \cos v;$$

$$V_Y = \omega_3 \frac{P}{1 + e \cos v} \sin i \cos(\omega_\pi + v);$$

$$V_Z = -\sqrt{\frac{\mu}{P}} \sin v + \omega_3 \frac{P}{1 + e \cos v} \cos i \sin v;$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\{ \frac{\mu}{P} (1 + e^2 + 2e \cos v) - 2 \sqrt{\frac{\mu}{P}} \omega_3 P \cos i + \right. \\ &\left. + \omega_3^2 \frac{P^2}{(1 + e \cos v)^2} [\cos^2 i + \sin^2 i \cos^2(\omega_\pi - v)] \right\}^{1/2}. \quad (4.2) \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_3$  — угловая скорость вращения атмосферы. Положим  $\omega_n = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{(e + \cos v) \alpha_3 - \sin v \gamma_3}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}; \\ V_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{P}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}; \\ U &= -\frac{\rho_\pi}{2} \sqrt{\mu P \bar{\rho}} \frac{1 + e^2 + 2e \cos v}{(1 + e \cos v)^2} \times \\ &\times \left( a_0^\delta \cos \delta + \frac{a_1^\delta}{2} \cos^2 \delta + \frac{a_2^\delta}{3} \cos^3 \delta \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Здесь  $\rho_\pi$  — плотность атмосферы в перигее орбиты;  $\bar{\rho} = \rho(h)/\rho_\pi$  — безразмерная функция плотности;  $\bar{\rho}(0) = 1$ . Примем, например,  $\rho = \exp(-h/H)$ , где

$$h = r - r_\pi = \frac{P}{1 + e \cos v} - \frac{P}{1 + e}$$

— превышение текущей точки орбиты над перигеем;  $H$  — высота однородной атмосферы (1.4). Введем обозначения

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}{(1 + e \cos v)^2} (e + \cos v) dv; \\ J_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{(e + \cos v)^2}{(1 + e \cos v)^2} dv; \\ J_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{\sin^2 v}{(1 + e \cos v)^2} dv; \\ J_4 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{(e + \cos v)^3 dv}{(1 + e \cos v)^2 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}; \\ J_5 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{(e + \cos v) \sin^2 v dv}{(1 + e \cos v)^2 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Параметры  $J_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) будут использованы при исследовании эволюции движения. При фиксированной высоте  $h_\pi$  перигея они зависят от высоты  $h_\alpha$  апогея, а также от  $H$  (рис. 21).

Для исследования вековой эволюции вектора кинетического момента применим асимптотический метод Боголюбова — Кры-

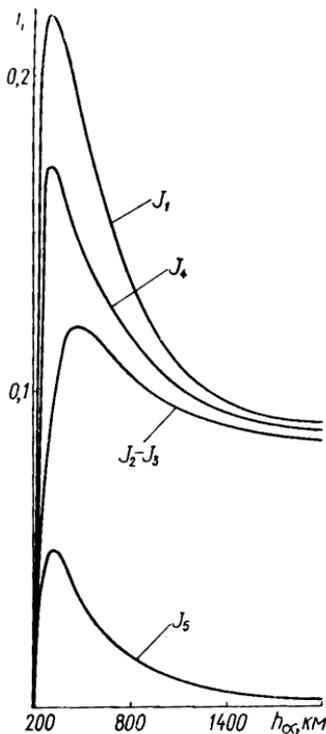


Рис. 21. Зависимость интегралов  $J_i$  от высоты  $h_\alpha$  апогея орбиты при фиксированной высоте  $h_\pi$  перигея орбиты.

лова (схема Волосова [31]). Принятых в гл. 4 предположениях  $L$  велико. Но при этом и  $\dot{\psi}$  велико, причем по сравнению не только со скоростью изменения других оскулирующих элементов, но и с угловой скоростью движения центра масс спутника по орбите  $\dot{\nu}$ . Предположим, что между  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\varphi}$ , а также между  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\nu}$  нет резонансных соотношений, т. е. для любых целых  $n_1$  и  $n_2$  всегда

$$n_1\dot{\psi} + n_2\dot{\varphi} \neq 0; \quad n_1\dot{\psi} + n_2\dot{\nu} \neq 0. \quad (4.2)$$

Тогда для выявления вековых эволюционных эффектов [31] следует усреднить уравнения движения по быстрой переменной  $\psi$ . Это отвечает первому приближению в асимптотических методах.

Согласно (4.19) и (4.1)  $U$  от  $\psi$  зависит периодически с периодом  $2\pi$ . Тогда для третьего уравнения системы (4.22) получим

$$\dot{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \psi} d\psi = \frac{1}{2\pi} [U(2\pi) - U(0)] = 0,$$

т. е.  $L = L_0$  и, следовательно,  $\cos \vartheta = \cos \vartheta_0$ . Кроме того,

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{L_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \bar{U}^\psi}{\partial \theta}; \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{L_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \bar{U}^\psi}{\partial \lambda}; \quad \bar{U}^\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U d\psi$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_0}{A} - \frac{1}{L_0} \left( \frac{\partial \bar{U}^\psi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{\partial \bar{U}^\psi}{\partial \vartheta} \operatorname{ctg} \vartheta \right) \approx \dot{\psi}_0. \quad (4.3)$$

Если поверхность спутника не симметрична относительно динамической оси симметрии, то  $U$  зависит от  $\varphi$  и к уравнению (4.30) необходимо добавить уравнения для  $\varphi$  и  $\dot{\vartheta}$

$$L \sin \vartheta \dot{\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \vartheta} (T - \bar{U}^\psi); \quad L \sin \vartheta \dot{\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (T - \bar{U}^\psi). \quad (4.3)$$

Таким образом, при периодической зависимости  $U$  от  $\psi$  задача свелась к исследованию двух уравнений для  $\theta$  и  $\lambda$ , описывающих ориентацию вектора  $\mathbf{L}$  в абсолютной системе координат. Уравнения (4.30) неавтономны, зависят явно от времени через  $v$ . Однако переменную  $v$  можно считать быстрой и применить повторно процедуру асимптотических методов уже к уравнениям (4.30) с целью их исследования.

Перейдем в уравнениях (4.30) от переменной  $t$  к переменной  $v$  и осредним эти уравнения по  $v$  за период обращения спутника по орбите. Переход от  $t$  к  $v$  определяется с помощью уравнения движения центра масс спутника

$$\frac{dv}{dt} = \omega_0 = \frac{V\sqrt{\mu P}}{R^2} = \frac{V\sqrt{\mu P}}{P^2} (1 + e \cos v)^2. \quad (4.32)$$

Введем функцию

$$U^v = \frac{P^2}{V\sqrt{\mu P} (1 + e \cos v)^2} U$$

и ее среднее по  $v$  значение

$$\bar{U}^v = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^v dv.$$

Тогда уравнения (4.30) примут вид

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{1}{L_0 \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}^v}{\partial \lambda}; \quad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{L_0 \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}^v}{\partial \theta}. \quad (4.33)$$

Учитывая (4.29), можно провести двойное независимое осреднение по  $\psi$  и  $v$ , тогда окончательно получим

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{1}{L_0 \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}^{\psi, v}}{\partial \lambda}; \quad \frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{L_0 \sin \theta} \frac{\partial \bar{U}^{\psi, v}}{\partial \theta};$$

$$\bar{U}^{\psi, v} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P^2}{V\sqrt{\mu P} (1 + e \cos v)^2} U d\psi dv. \quad (4.34)$$

В (4.34)  $\bar{U}^{\psi, v}$  не зависит от  $v$ , следовательно, существует первый интеграл уравнений (4.34)

$$\bar{U}^{\psi, v}(\theta, \lambda) = \text{const},$$

описывающий траекторию вектора кинетического момента.

Как будет показано ниже, для восстанавливающего аэродинамического момента на круговой орбите уравнения (4.33) могут быть проинтегрированы в замкнутом виде с помощью следующей замены переменных. Пусть  $U^v$  зависит от  $\lambda$  и  $v$  только через их разность  $\kappa_v = \lambda - v$ :  $\bar{U}^v = \bar{U}^v(\theta, \kappa_v)$ .

При этом углы  $\theta$  и  $\kappa_v$  определяют положение вектора во вращающейся системе координат  $\mathbf{n}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{n}$  направлен по нормали к плоскости орбиты,  $\boldsymbol{\tau}$  — по трансверсали. Уравнения (4.33) в переменных  $\theta$ ,  $\kappa_v$  принимают вид

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{1}{L_0 \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_v}; \quad \frac{d\kappa_v}{dv} = \frac{1}{L_0 \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad (4.3)$$

$$\Phi = L_0 \cos \theta + U^v.$$

Поскольку  $\Phi$  не зависит явно от  $v$ , то уравнения (4.35) имеют первый интеграл  $\Phi = \text{const}$ , дающий траекторию вектора во вращающейся системе координат. Этот интеграл позволяя проинтегрировать уравнения (4.35) до конца.

В дальнейшем будет показано, что и для уравнений, описывающих диссипативные аэродинамические процессы, не имеющие силовой функции, применим метод осреднения.

Используя указанную процедуру, осредним функцию (4.27) по  $\psi$  и  $v$ . Получим

$$\bar{U}^{\psi, v} = \bar{U}_1^{\psi, v} + \bar{U}_2^{\psi, v} = \bar{U}_0^{\psi, v},$$

$$\bar{U}_1^{\psi, v} = -\frac{\sqrt{\mu P}}{2} \rho_{\pi} \left\{ \cos \theta \cos \vartheta \left[ a_0^{\delta} J_1 + \frac{a_2^{\delta}}{2} J_4 \sin^2 \vartheta + \right. \right.$$

$$\left. + a_2^{\delta} J_5 \left( \frac{\sin^2 \vartheta}{2} + \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos^2 \lambda \right) \right] +$$

$$\left. + \frac{a_1^{\delta}}{2} (J_2 - J_3) \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos^2 \theta + \right.$$

$$\left. + \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \vartheta \right) \left[ \frac{a_2^{\delta}}{3} J_4 - a_2^{\delta} J_5 \cos^2 \lambda \right] \cos^3 \theta \cos \vartheta \right\}; \quad (4.8)$$

$$\bar{U}_2^{\psi, v} = -\frac{1}{4} \rho_{\pi} \sqrt{\mu P} a_1^{\delta} J_3 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \sin^2 \rho_1.$$

Член  $\bar{U}_2^{\psi, v}$  имеет такую же структуру, как и вековая час силовой функции гравитационных моментов [7]. В сумме они дадут

$$\bar{U}_n^{\psi, v} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \left[ 3 \frac{\sqrt{\mu}}{P^{3/2}} (A - C) - \right.$$

$$\left. - \rho_{\pi} \sqrt{\mu P} a_1^{\delta} J_3 \right] \sin^2 \rho_1 \equiv K_0^* \sin^2 \rho_1. \quad (4.9)$$

Уравнения (4.34) с силовой функцией  $\bar{U}_1^{\psi, v}$  имеют вид

$$\frac{d\lambda}{dv} = \frac{\rho_{\pi}}{2} \frac{\sqrt{\mu P}}{L_0} \left\{ \cos \vartheta \left[ a_0^{\delta} J_1 + \frac{a_2^{\delta}}{2} J_4 \sin^2 \vartheta + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + a_2^\delta J_5 \left( \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta + \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos^2 \lambda \right) \Big] + \\
& + a_1^\delta (J_2 - J_3) \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos \theta + \\
& + 3 \cos \vartheta \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \vartheta \right) \left[ \frac{a_2^\delta}{3} J_4 - a_2^\delta J_5 \cos^2 \lambda \right] \cos^2 \theta \Big\}; \quad (4.38) \\
& \frac{d}{dv} \cos \theta = \frac{\rho_\pi V \sqrt{\mu P}}{L_0} a_2^\delta J_5 \cos \vartheta \times \\
& \times \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos \theta \sin^2 \theta \cos \lambda \sin \lambda.
\end{aligned}$$

Здесь  $J_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) вычисляются по формулам (4.28).

Укажем основные свойства аэродинамических возмущений при некоторых допущениях.

1. При  $e = 0$  коэффициенты ( $J_2 - J_3$ ),  $J_1$ ,  $J_4$ ,  $J_5$  равны нулю. Следовательно, на круговой орбите вековых возмущений нет.

2. Как видно из рис. 21,  $J_5$  на порядок меньше других интегральных коэффициентов, поэтому в первом приближении коэффициентом  $J_5$  можно пренебречь, положив  $J_5 \approx 0$ . Тогда из (4.38) следует  $\theta \approx \theta_0$ , т. е. под влиянием  $\bar{U}_1^{\varphi, v}$  вектор  $\mathbf{L}$  прецессирует на постоянном угловом расстоянии вокруг направления перигейной касательной со скоростью прецессии  $d\lambda/dv$  из (4.38), где следует положить  $J_5 = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ . Это и есть главный эффект возмущенного вращения спутника в аэродинамическом потоке [66].

3. Коэффициент  $a_1^\delta \neq 0$ , если одновременно выполняются два условия: а) достаточно велика доля молекул, отражающихся от спутника по законам, отличным от абсолютного неупругого соударения; б) форма спутника отличается от двояко-симметричной (спутник хотя и обладает осью симметрии, но выглядит по-разному с носа и кормы). Так как условие а) скорее всего не выполняется, то можно, видимо, считать, что  $a_1^\delta \ll a_0^\delta$ ,  $a_2^\delta$ , и полагать  $a_1^\delta = 0$ . Для двояко-симметричных спутников это условие выполняется независимо от выполнения условия а). Тогда, учитывая, что и  $J_5 = 0$ , получим

$$\begin{aligned}
\theta = \theta_0; \quad \frac{d\lambda}{dv} &= \frac{\rho_\pi}{2} \frac{V \sqrt{\mu P}}{L_0} \cos \vartheta_0 [k_0^\delta + k_1^\delta \cos^2 \theta_0]; \\
k_0^\delta &= a_0^\delta J_1 + \frac{a_2^\delta}{2} J_4 \sin^2 \vartheta_0; \quad k_1^\delta = \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \vartheta_0 \right) a_2^\delta J_4. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

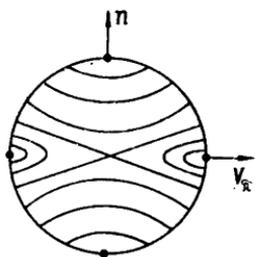


Рис. 22. Траектории векового движения вектора кинетического момента под влиянием аэродинамических возмущений в случае  $a_0^\delta = a_2^\delta = 0, a_1^\delta \neq 0$ .

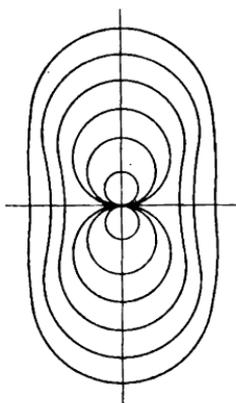


Рис. 23. Траектории конца вектора кинетического момента в малой окрестности аэрополюсов ( $h_\alpha = 900$  км).

чаем уравнение, интегрируемое в квадратурах. Его решение приближенно описывает нутационные колебания вектора  $L$ . Полагая  $\theta \approx \theta_0 + \Delta\theta$ , получаем

$$\Delta\theta = - \frac{\rho_\pi V' \mu \bar{P} a_2^\delta J_5}{2L_0 \lambda'} \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \theta \right) \cos \theta \cos \theta_0 \sin \theta_0 \sin^2 \lambda, \quad (4.41)$$

где  $\lambda'$  — приближенная средняя скорость вековой прецессии, определяемая формулой (4.39). Следовательно, малый круг

В простейшем случае, когда и  $a_2^\delta = 0$  получим

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = \frac{\rho_\pi}{2} \frac{V' \mu \bar{P}}{L_0} \cos \vartheta_0 a_0^\delta J_1. \quad (4.40)$$

Из (4.39) и (4.40) следует, что при  $\vartheta = \pi/2$ , т. е. когда спутник вращается в режиме кувыркания, аэродинамический восстанавливающий момент не создает векового эффекта. При  $a_1^\delta \neq 0$  это утверждение неверно. Рассмотрим предельный случай, когда  $a_1^\delta \neq 0$ , а  $a_2^\delta = a_0^\delta = 0$ , что соответствует гипотезе используемой в работе [83]. Тогда траектория  $\bar{U}_{v_1}^{\psi, \nu} + \bar{U}_{v_2}^{\psi, \nu} = \text{const}$  принимает вид

$$(J_2 - J_3) \cos^2 \theta + J_3 \sin^2 \rho_1 = \text{const}.$$

Семейство траекторий на эллиптической орбите ( $e \neq 0, J_2 \neq J_3$ ) изображено на рис. 22.

Вектор кинетического момента будет прецессировать вокруг нормали  $n$  к плоскости орбиты или вокруг перигейной касательной  $V_\pi$  в зависимости от того, будет ли соответственно

$$\cos \rho_1^0 \geq \sqrt{\frac{J_2 - J_3}{J_3}} \cos \theta_0,$$

где  $\rho_1^0, \theta_0$  — начальные координаты вектора кинетического момента.

Рассмотрим теперь влияние малого коэффициента  $J_5$ , которым пренебрегли выше. Подставляя  $\theta = \text{const}$  в правую часть второго из уравнений (4.38) и переходя к переменной  $\lambda$  вместо  $\nu$ , получаем уравнение, интегрируемое в квадратурах. Его решение

приближенно описывает нутационные колебания вектора  $L$ . Полагая  $\theta \approx \theta_0 + \Delta\theta$ , получаем

$\theta = 0_0$  под влиянием  $J_5 \neq 0$  (появление  $\Delta\theta$ ) несколько растягивается и превращается в овал (рис. 23). Формулы (1.41) показывают, что нутационные колебания по  $\theta$  возможны только при  $a_2^\delta \neq 0$ , т. е. коэффициент аэродинамического момента не является постоянным. Для реальных спутников описанные колебания по  $\theta$  не превышают 2—3°.

В силу колебаний  $\theta$  в малой окрестности перигея возможны искажения траектории. Покажем приближенно, как это происходит. Для простоты в траектории (4.36) будем учитывать только члены, содержащие  $\cos \theta$ , и отбросим члены, содержащие  $\cos^2 \theta$  и  $\cos^3 \theta$ . Тогда интеграл уравнений (4.36) может быть записан в виде

$$\cos \theta = \frac{C}{1 + \varepsilon_\lambda \cos^2 \lambda}, \quad (4.42)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования;  $\varepsilon_\lambda$  — постоянная, зависящая от  $J_i$  и  $a_i^\delta$ . Пусть  $\varepsilon_\lambda > 0$ . Схема траекторий, соответствующих решению (4.36), показана на рис. 23. Кривая  $\theta(\lambda)$  представляет собой при  $C < 1$  овал, при  $C = 1$  восьмерку, касающуюся плоскости  $XU$ , при  $C >$

$1$  восьмерки, не соприкасающиеся с плоскостью  $XU$ , т. е. образующие отличный от нуля угол с  $U$ . На кривых  $C > 1$  при  $\lambda = 0$  имеем  $\cos \theta =$

$\frac{C}{1 + \varepsilon_\lambda} < 1$ , т. е.  $1 < C < 1 + \varepsilon_\lambda$ ; значения  $\lambda = 90^\circ$  не могут быть достигнуты на этих кривых ( $\lambda$  колеблется в определенных пределах; граничное значение определяется при  $\theta = 0$ ;  $\cos^2 \lambda^* = \frac{C-1}{\varepsilon_\lambda}$ ). Такая картина наблюдается только в малой окрестности ( $\theta \sim 2 \div 3^\circ$ ) перигея. При расширении области движения траектории концы вектора  $\mathbf{L}$  превращаются в овалы, близкие к окружностям. При  $\varepsilon_\lambda < 0$  картина будет такой же, только перевернутой на  $90^\circ$  вокруг оси  $X$ .

Рассмотрим числовой пример. Примем следующие значения характеристик орбиты, конструкции спутника и параметров его вращения вокруг центра масс:  $h_\pi = 225$  км;  $h_\alpha =$

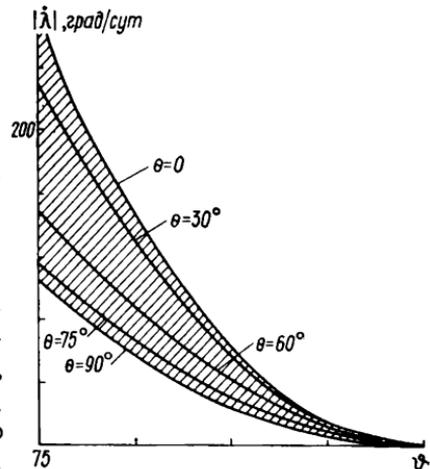


Рис. 24. Угловая скорость вековой прецессии вектора кинетического момента под влиянием аэродинамических возмущений.

900 км;  $\rho_{\text{л}} = 3,225 \cdot 10^{-10}$  кг/м<sup>3</sup>;  $|L_0| = 8,6 \cdot 10^4$  кг · м<sup>2</sup>/с  
характерная площадь  $S_* = 6$  м<sup>2</sup>; расстояние от центра масс  
до центра давления  $L_* = 0,3$  м. Коэффициент  $C(\delta)$  имеет  
максимальное и минимальное значения соответственно  $C_{\text{max}} =$   
 $= 18$ ,  $C_{\text{min}} = 3$ . По этим данным можно рассчитать коэффи-  
циенты  $a_0^\delta$  и  $a_2^\delta$ , а затем по формуле (4.39) — скорость вековой  
прецессии. Результаты расчета приведены на рис. 24, где за-  
штрихована область возможных значений угловой скорости  
вековой прецессии в зависимости от угла нутации  $\vartheta$  и угла  
 $\theta$  между вектором  $\mathbf{L}$  и направлением касательной к перигею.  
Видим, что в режиме кувыркания ( $90^\circ > \nu > 80^\circ$ ) угловая  
скорость вековой прецессии может достигнуть в рассматрива-  
емом примере  $50^\circ$  за сутки. (Отметим, что за сутки спутник  
совершает 15—16 оборотов по орбите.)

#### 4.5. Влияние вращения атмосферы на вековые возмущения

Чтобы выявить основные эффекты, обусловленные вращением  
атмосферы, для  $C(\delta)$  примем простейшую аппроксимацию  
 $C(\delta) = a_0^\delta = \text{const}$ , тогда из (4.27) имеем

$$U^\nu = -\frac{\rho_\pi}{2} \sqrt{\mu P \bar{\rho}} \frac{1 + e^2 + 2e \cos \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} a_0^\delta \cos \delta, \quad (4.43)$$

где  $\cos \delta$  определяется из (4.26). Подставляя в (4.43)  $\cos i$   
и значения компонент вектора скорости  $\mathbf{V}$  из (4.26) и сохраняя  
только члены, линейные по  $\omega_3$ , получаем

$$U^\nu = -\frac{\rho_\pi}{2} \sqrt{\mu P} \frac{\bar{\rho} a_0^\delta}{(1 + e \cos \nu)^2} \left\{ \left[ (e + \cos \nu) \times \right. \right. \\
\times \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2} - \frac{P^{3/2} \omega_3}{\sqrt{\mu}} \cos i \frac{e + \cos \nu}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}} \left. \right] \alpha'' - \\
- \left[ \sin \nu \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu} - \frac{P^{3/2} \omega_3}{\sqrt{\mu}} \cos i \times \right. \\
\times \left. \frac{\sin \nu}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}} \right] \gamma'' \left. \right\} - \\
- \frac{\rho_\pi}{2} P^2 \omega_3 \bar{\rho} \frac{a_0^\delta}{1 + e \cos \nu} \{ -\cos i \cos \nu \alpha'' + \sin i \cos(\omega_\pi + \nu) \beta'' + \\
+ \cos i \sin \nu \gamma'' \}.$$

Введем обозначения

$$F_0 = J_1 - \frac{P^2 \omega_3}{\sqrt{\mu}} \cos i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho} (e + \cos v) dv}{(1 + e \cos v)^2 \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}},$$

где  $J_1$  взято из (4.28),

$$S_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}{(1 + e \cos v)^2} dv.$$

Тогда осредненное по  $\psi$  и  $v$  значение силовой функции примет вид

$$\bar{U}^{\psi, v} = -\frac{\rho \pi}{2} \sqrt{\mu} P a_0^{\delta} F_0 \cos \vartheta \cos \theta + \rho \pi \omega_3 P^2 a_0^{\delta} S_0 \cos \vartheta (\cos i \cos \theta + \sin i \sin \omega_{\pi} \sin \theta \sin \lambda). \quad (4.44)$$

Обозначим также

$$\sin \theta_{\omega}^* = \frac{\sin i \sin \omega_{\pi}}{\sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \omega_{\pi}}};$$

$$\cos \theta_{\omega}^* = \frac{\cos i}{\sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \omega_{\pi}}};$$

$$k_S = \frac{1}{2} \rho_{\pi} \omega_3 P^2 a_0^{\delta} S_0 \cos \vartheta \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \omega_{\pi}};$$

$$k_F = \frac{1}{2} \rho_{\pi} \sqrt{\mu} P a_0^{\delta} F_0 \cos \vartheta;$$

$$\cos \kappa_{\omega} = \cos \theta_{\omega}^* \cos \theta + \sin \theta_{\omega}^* \sin \theta \sin \lambda.$$

Тогда

$$\bar{U}^{\psi, v} = -k_F \cos \theta + k_S \cos \kappa_{\omega} = \bar{U}^{\psi, v} \quad (4.45)$$

есть уравнение траектории, которое можно представить в виде  $\cos \theta = C_0 - a_{\omega} \cos \kappa_{\omega}$ . Так как

$$a_{\omega} = \frac{P \omega_3 \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \omega_{\pi}}}{\sqrt{\frac{\mu}{P}}} \frac{S_0}{F_0} \sim \frac{P \omega_3}{\sqrt{\frac{\mu}{P}}}$$

есть величина малая, то траектория мало отличается от кривой  $\cos \theta = \cos \theta_0$ , т. е. как и следовало ожидать, влияние вращения атмосферы мало по сравнению с основным атмосферным влиянием.

Определить посылы траекторий. Для этого, подставив (4.44) в (4.40), получим

$$\frac{d\theta}{d\nu} = \frac{k_F}{L_0} - \frac{k_S}{L_0} \cos \theta_\omega^* + \frac{k_S}{L_0} \sin \theta_\omega^* \operatorname{ctg} \theta \sin \lambda;$$

$$\frac{d\theta}{d\nu} = -\frac{k_S}{L_0} \sin \theta_\omega^* \sin \theta \cos \lambda.$$

Тогда

$$\lambda_r = 90^\circ (270^\circ); \quad \pm \operatorname{tg} \theta_r = \frac{k_S \sin \theta_\omega^*}{k_F - k_S \cos \theta_\omega^*}. \quad (4.46)$$

Так как  $k_S \ll k_F$ , то полюс близок к  $\theta_r^0 = 0 (\pi)$ , отклоняясь от этого значения, как показывают оценки, на  $2-3^\circ$ . Уравнение траектории (4.45) можно представить в виде

$$\sqrt{k_F^2 + k_S^2 - 2k_F k_S \cos \theta_\omega^*} \cos \kappa_L = \text{const},$$

где  $\kappa_L$  — угловое расстояние вектора кинетического момента от полюса прецессии  $(\lambda_r, \theta_r)$ . Отсюда следует, что вектор кинетического момента прецессирует вокруг полюса, координаты  $\lambda_r, \theta_r$  которого определяются соотношениями (4.46), на постоянном угловом расстоянии  $\kappa_L$  со скоростью

$$\frac{d\lambda_\kappa}{d\nu} = -\frac{1}{L_0} \sqrt{k_F^2 + k_S^2 - 2k_F k_S \cos \theta_\omega^*} \approx$$

$$\approx -\frac{k_F}{L_0} \left\{ 1 - \frac{k_S}{k_F} \cos \theta_\omega^* \right\}. \quad (4.47)$$

Таким образом, влияние вращения атмосферы приводит к небольшому смещению полюса прецессии вектора кинетического момента (согласно (4.46)) и к небольшому изменению скорости прецессии этого вектора (согласно (4.47)). Если вместе с вращением атмосферы учесть также суточный эффект в виде (1.6), то вместо  $F_0$  и  $S_0$  необходимо ввести интегралы

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\rho_\pi} V V_i \frac{P}{\mu (1 + \epsilon \cos \nu)^2} d\nu \quad (i = X, Y, Z),$$

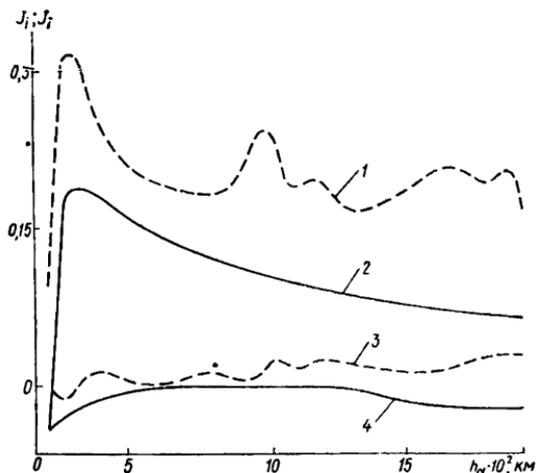
где  $\rho$  необходимо брать из (1.6), а  $V$  и  $V_i$  — из (4.26). Силовая функция  $U^\nu$  при этом принимает вид

$$U^\nu = -\frac{\rho_\pi}{2} \sqrt{\mu P} (J_X \bar{\alpha}_3 + J_Y \bar{\beta}_3 + J_Z \bar{\gamma}_3).$$

В количественном отношении интегралы  $J_i$  подчиняются неравенству  $J_X \gg J_Z \gg J_Y$  и слабо зависят от  $\alpha_\odot, \delta_\odot$  и  $i$ . На рис. 25 представлены интегралы  $J_X$  и  $J_Z$  и их средние за сутки

Рис. 25. Интегралы  $J_i$  и  $\bar{J}_i$  с учетом суточного эффекта верхней атмосферы:

1 —  $\bar{J}_X$ ; 2 —  $J_X$ ; 3 —  $\bar{J}_Z$ ; 4 —  $J_Z$ .



значения в зависимости от  $h_\alpha$  при  $i = 45^\circ$ ,  $\alpha_\odot = 90^\circ$ ,  $\delta_\odot = 23,5^\circ$ ,  $\Omega = \omega_\pi = 0$ ,  $h_\pi = 200$  км. Эти интегралы имеют основные максимумы на околокруговых орбитах и ряд локальных экстремумов. С ростом  $h_\alpha$  они в среднем уменьшаются. Существенно, что при  $e = 0$  —  $J_X$   $J_Z \neq 0$ , что приводит к вековым эффектам в эволюции L.

#### 4.6. Периодические возмущения.

##### Анализ движения на круговой орбите

До сих пор рассматривались вековые эффекты, вызываемые восстанавливающими аэродинамическими моментами. Рассмотрим более точную картину движения с учетом периодических (по  $v$ ) возмущений. Такой анализ тем более необходим, что вековые аэродинамические возмущения возникают только на эллиптической орбите. В случае круговой орбиты, если допустить, что  $a_1^\delta = 0$ , и пренебречь вращением атмосферы и суточным эффектом, они отсутствуют. Положим  $C(\delta) = a_0^\delta$  и запишем соответствующее этой аппроксимации выражение для  $U^v$ , пренебрегая вращением атмосферы:

$$U^v = -\frac{\rho_\pi}{2} \sqrt{\mu P \bar{\rho}} \frac{1 + e^2 + 2e \cos v}{(1 + e \cos v)^2} a_0^\delta \cos \delta. \quad (4.48)$$

Осредним (4.48) по  $\psi$ , учитывая выражение (4.26) для  $\cos \delta$  и выражения (4.5) для  $\alpha_3$  и  $\gamma_3$ . Получим

$$\bar{U}^{v\psi} = -\frac{\sqrt{\mu P}}{2} \rho_{\pi\bar{\rho}} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}{(1 + e \cos v)^2} a_0^\delta \cos \theta [(e + \cos v) \cos \theta - \sin v \sin \theta \cos \lambda].$$

Уравнения движения согласно (4.33) имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = P_v \sin v \sin \lambda; \quad \frac{d\lambda}{dv} = P_v [(e + \cos v) + \sin v \operatorname{ctg} \theta \cos \lambda];$$

(4.49)

$$P_v = \frac{\sqrt{\mu P_{0\pi} a_0^{\delta} \cos \vartheta}}{2L_0} \bar{\rho} \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}{(1 + e \cos v)^2}.$$

Из (4.49) хорошо видно, что на монотонное увеличение угла  $\lambda$  (вековое возмущение) в рассматриваемой постановке накладываются еще периодические (по  $v$ ) колебания угла  $\theta$  (и  $\lambda$ ). Однако для наиболее интересного здесь случая круговой орбиты ( $e = 0$ ), когда отсутствуют вековые эффекты, удобнее рассматривать уравнения (4.49) в переменных  $\rho_1, \sigma_1$ :

$$\frac{d\rho_1}{dv} = P_v [(e + \cos v) \cos \sigma_1 + \sin v \sin \sigma_1];$$

$$\frac{d\sigma_1}{dv} = -P_v \operatorname{ctg} \rho_1 [(e + \cos v) \sin \sigma_1 - \sin v \cos \sigma_1].$$

Заменой переменных  $\sigma_1 - v = \kappa_v$  эти уравнения приводятся к виду (4.35) и имеют первый интеграл  $\Phi = \text{const}$ :

$$\cos \rho_1 - n^* \sin \rho_1 \sin \kappa_v = \text{const}, \quad n^* = \frac{\rho_1 \sqrt{\mu P_{0\pi} a_0^{\delta} \cos \vartheta}}{2L_0},$$

представляющий траекторию  $\mathbf{L}$  во вращающейся (орбитальной) системе координат. Обозначим через  $\Lambda$  угол между  $\mathbf{L}$  и текущим вектором скорости центра масс спутника. Тогда  $\sin \rho_1 \times \sin \kappa_v = \cos \Lambda$  и траектория вектора  $\mathbf{L}$  запишется в виде  $\cos \rho_1 - n^* \cos \Lambda = \text{const}$ . Отсюда видно, что траектория вектора  $\mathbf{L}$  на единичной сфере есть окружность, центр которой лежит на меридиане, проходящем через след нормали к плоскости орбиты и след вектора скорости центра масс; центр окружности лежит на угловом расстоянии  $\rho_1^*$  от нормали к плоскости орбиты, причем  $\operatorname{tg} \rho_1^* = -n^*$ . Скорость движения вектора  $\mathbf{L}$  кинетического момента по этой окружности постоянна и равна

$$\frac{d\lambda_{\Lambda}}{dv} = -\sqrt{1 + n^{*2}}.$$

Если  $n^*$ , т. е. влияние возмущений, очень мало, то  $\rho_1^* \approx 0$  и вектор кинетического момента вращается вокруг нормали к плоскости орбиты с угловой скоростью  $\lambda'_{\Lambda} \approx -1$ , т. е. остается почти неподвижным в абсолютном пространстве. Если же  $n^*$  очень велико, то  $\rho_1^*$  близко к  $\pi/2$  и вектор кинети-

ческого момента вращается вокруг направления набегающего потока. Таким образом, аэродинамический момент оказывает определенное стабилизирующее влияние на спутник.

Заметим, что однократно (по  $\psi$ ) осредненные теоретические значения будут достаточно точны даже при таких больших возмущениях, при которых двукратное осреднение (по  $\psi$  и  $\nu$ ) даст неточные результаты. Критерий применимости теории приблизительно таков: движение, полученное осреднением, должно совершаться существенно медленней, чем движение, по которому происходит осреднение. В данном случае требуется, чтобы

$$\left| \frac{d\lambda_{\Lambda}}{d\nu} \right| \ll \left| \frac{d\psi}{d\nu} \right|.$$

Пусть, например,  $\dot{\psi} = 14$  град/с, а угловая скорость движения по орбите  $dv/dt = 0,07$  град/с. Тогда теория будет достаточно точной при  $\left| \frac{d\lambda_{\Lambda}}{d\nu} \right| \ll 200$ , т. е. при  $n \ll 10 \div 20$ . Двукратное осреднение проходит здесь лишь при  $n \ll 1$ .

#### 4.7. Влияние момента сил аэродинамической диссипации

Аэродинамический демпфирующий момент для осесимметричного спутника примем в виде (2.9)

$$\mathbf{M}_2 = \rho V_0 [-i D_{11} \omega_x - j (D_{22} \omega_y - D_{23} \omega_z) - k (D_{33} \omega_z - D_{32} \omega_y)]. \quad (4.50)$$

Перейдем от полусвязанной системы  $x, y, z$  к системе координат, связанной с главными моментами инерции спутника  $x', y', z'$ . В предположении, что оси геометрической  $z$  и динамической  $z'$  симметрий спутника совпадают, связь этих систем дается соотношениями

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}'; \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}' \cos \varphi_0 + \mathbf{i}' \sin \varphi_0; \quad \mathbf{i} = -\mathbf{j}' \sin \varphi_0 + \mathbf{i}' \cos \varphi_0, \quad (4.51)$$

где  $\varphi_0$  — угол поворота связанной системы относительно полусвязанной. Можно показать, что

$$\begin{aligned} \cos \varphi_0 &= \frac{\cos(\widehat{\mathbf{e}_{1a}, \mathbf{j}'})}{\sin \delta} = \frac{\alpha'}{\sin \delta}; \\ \sin \varphi_0 &= \frac{\cos(\widehat{\mathbf{e}_{1a}, \mathbf{i}'})}{\sin \delta} = \frac{\alpha}{\sin \delta}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Компоненты угловой скорости спутника  $\omega$  при повороте осей также изменяются аналогично (4.51):

$$\begin{aligned}\omega_z &= \omega_z; & \omega_x &= -\omega_{y'} \sin \varphi_0 + \omega_{x'} \cos \varphi_0; \\ \omega_y &= \omega_{y'} \cos \varphi_0 + \omega_{x'} \sin \varphi_0.\end{aligned}\quad (4.53)$$

Подставляя (4.51) и (4.53) в (4.50) и учитывая (4.52), получаем

$$\begin{aligned}M_2 &= \rho V_0 \{ \mathbf{i}' [-\omega_{x'} D_{22} + \omega_{z'} D_{23} \cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{i}')] + \\ &+ \mathbf{j}' [-\omega_{y'} D_{22} + \omega_{z'} D_{23} \cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{j}')] + \\ &+ \mathbf{k}' [-\omega_{z'} D_{33} + D_{32} (\omega_{x'} \cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{i}') + \omega_{y'} \cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{j}'))] \}.\end{aligned}\quad (4.54)$$

Здесь мы положили  $D_{11} = D_{22}$ . Пренебрегая вращением атмосферы, запишем

$$\cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{i}') = \frac{1}{V_0} [V_X \alpha_1 + V_Z \gamma_1];$$

$$\cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{j}') = \frac{1}{V_0} [V_X \alpha_2 + V_Z \gamma_2];$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{P}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}; \quad V_X = \sqrt{\frac{\mu}{P}} (e + \cos v);$$

$$V_Z = -\sqrt{\frac{\mu}{P}} \sin v; \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}\omega_{x'} \cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{i}') + \omega_{z'} \cos(\mathbf{e}_{V_0}, \mathbf{j}') &= \\ = \frac{1}{V_0} \{ V_X (\omega_{x'} \alpha_1 + \omega_{y'} \alpha_2) + V_Z (\omega_{x'} \gamma_1 + \omega_{y'} \gamma_2) \}.\end{aligned}$$

Если  $A = B$ , то

$$\begin{aligned}\omega_{y'} \alpha_2 + \omega_{x'} \alpha_1 &= \frac{L_X - C \omega_{z'} \alpha_3}{A}; \\ \omega_{y'} \gamma_2 + \omega_{x'} \gamma_1 &= \frac{L_Z - C \omega_{z'} \gamma_3}{A}.\end{aligned}\quad (4.56)$$

Учитывая (4.56) и (4.55), из (4.54) можно получить уравнение движения относительно оси симметрии  $\mathbf{k}'$

$$\begin{aligned}C \frac{d\omega_{z'}}{dt} &= -\rho V_0 D_{33} \omega_{z'} + \\ + \rho \frac{D'_{32}}{A} \{ V_X (L_X - C \omega_{z'} \alpha_3) + V_Z (L_Z - C \omega_{z'} \gamma_3) \},\end{aligned}\quad (4.57)$$

а также компоненты момента сил по перигейным осям

$$M_X = \rho V_0 \left\{ -\frac{D_{22}}{A} (L_X - C \omega_{z'} \alpha_3) - D_{33} \omega_{z'} \alpha_3 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + D'_{23} \frac{\omega_z'}{V_0} [V_X (1 - \alpha_3^2) + V_Z (-\alpha_3 \gamma_3)] + \\
& + \frac{D'_{32}}{V_0 A} \alpha_3 [V_X (L_X - C \omega_z' \alpha_3) + V_Z (L_Z - C \omega_z' \gamma_3)] \Big\}; \\
M_Y = & \rho V_0 \left\{ -\frac{D_{22}}{A} (L_Y - C \omega_z' \beta_3) - D_{33} \omega_z' \beta_3 + \right. \\
& + D'_{23} \frac{\omega_z'}{V_0} [V_X (-\alpha_3 \beta_3) + V_Z (-\beta_3 \gamma_3)] + \\
& + \frac{D'_{32}}{V_0 A} \beta_3 [V_X (L_X - C \omega_z' \alpha_3) + V_Z (L_Z - C \omega_z' \gamma_3)] \Big\}; \quad (4.58) \\
M_Z = & \rho V_0 \left\{ -\frac{D_{22}}{A} (L_Z - C \omega_z' \gamma_3) - D_{33} \omega_z' \gamma_3 + \right. \\
& + D'_{23} \frac{\omega_z'}{V_0} [V_X (-\alpha_3 \gamma_3) + V_Z (1 - \gamma_3^2)] + \\
& + \frac{D'_{32}}{V_0 A} \gamma_3 [V_X (L_X - C \omega_z' \alpha_3) + V_Z (L_Z - C \omega_z' \gamma_3)] \Big\}.
\end{aligned}$$

Уравнения движения вектора кинетического момента имеют вид

$$\dot{L}_X = M_X; \quad \dot{L}_Y = M_Y; \quad \dot{L}_Z = M_Z. \quad (4.59)$$

Исследуем вековую эволюцию  $\mathbf{L}$ . Перейдем, используя (4.32), от независимой переменной  $t$  к переменной  $\nu$  и осредним (4.57) — (4.59) по  $\psi$  и  $\nu$ . Введем

$$\begin{aligned}
N_0^\partial &= \rho \pi P \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{\sqrt{1 - e^2 + 2e \cos \nu}}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu = \rho \pi P \bar{N}_0^\partial; \\
N_1^\partial &= \rho \pi P \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{e + \cos \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu = \rho \pi P \bar{N}_1^\partial. \quad (4.60)
\end{aligned}$$

В осредненных комбинациях (4.6) значения направляющих косинусов вектора  $\mathbf{L}$  выразим через отношения компонент к его модулю с помощью следующих соотношений:

$$L_X = L \cos \theta; \quad L_Y = L \sin \theta \sin \lambda; \quad L_Z = L \sin \theta \cos \lambda.$$

Получим систему эволюционных уравнений

$$\frac{dL_X}{d\nu} = -k_0^\partial L_X + k_1^\partial \cos \vartheta \frac{L_X^2}{L} + k_2^\partial \cos \vartheta L;$$

$$\begin{aligned}\frac{dL_Y}{dv} &= -k_0^\partial L_Y + k_1^\partial \cos \vartheta \frac{L_X L_Y}{L}; \\ \frac{dL_Z}{dv} &= -k_0^\partial L_Z + k_1^\partial \cos \vartheta \frac{L_X L_Y}{L}; \\ C \frac{d\omega_{z'}}{dv} &= -N_0^\partial D_{33} \omega_{z'} + \frac{D'_{32} N_1^\partial}{A} \sin^2 \vartheta L_{x'}; \\ \cos \vartheta &= \frac{C \omega_{z'}}{L};\end{aligned}\quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}k_0^\partial(\vartheta) &= N_0^\partial \left( \frac{D_{22}}{A} \sin^2 \vartheta + \frac{D_{33}}{C} \cos^2 \vartheta \right); \\ k_1^\partial(\vartheta) &= \left[ -\frac{D'_{23} N_1^\partial}{C} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) + \frac{D'_{32} N_1^\partial}{A} \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right]; \\ k_2^\partial(\vartheta) &= \left[ \frac{D'_{23} N_1^\partial}{C} \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) - \frac{D'_{32} N_1^\partial}{A} \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right].\end{aligned}$$

На круговой орбите  $N_1^\partial = 0$ ,  $k_1^\partial = k_2^\partial = 0$  и движение носит весьма простой характер. В общем случае эллиптической орбиты из уравнений (4.61) следует, что

$$\frac{L_Z}{L_Y} = \text{const.}$$

Это означает, что плоскость, проходящая через вектор  $\mathbf{L}$  и касательную в перигее орбиты — ось  $X$ , сохраняет свое положение в пространстве и если вектор  $\mathbf{L}$  движется, то только в этой плоскости. Далее, из первых трех уравнений (4.61) имеем

$$\frac{dL}{dv} = -k_0^\partial L + \cos \vartheta (k_1^\partial + k_2^\partial) L_X. \quad (4.62)$$

Поскольку

$$L_X = L \cos \vartheta; \quad -L \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dv} = \frac{dL_X}{dv} - \frac{dL}{dv} \cos \vartheta, \quad (4.63)$$

то, подставляя в правую часть (4.62)  $dL/dv$  из (4.62) и  $dL_X/dv$  из (4.63), получаем после сокращения на  $L \sin \vartheta$

$$\frac{d\vartheta}{dv} = -k_2^\partial \cos \vartheta \sin \vartheta,$$

откуда

$$\text{tg} \frac{\vartheta}{2} = \text{tg} \frac{\vartheta_0}{2} \exp \left( - \int_{v_0}^v k_2^\partial \cos \vartheta dv \right), \quad (4.64)$$

где  $k_2^\partial(\vartheta)$  и  $\cos \vartheta$ , вообще говоря, медленно меняются в силу уравнений движения (4.61). В первом приближении можно положить  $k_2^\partial(\vartheta) \cos \vartheta \simeq k_2^\partial(\vartheta_0) \cos \vartheta_0$ . Но и при учете медленного изменения  $k_2^\partial(\vartheta) \cos \vartheta$  сохранится та же асимптотическая картина, что и при постоянном  $k_2^\partial \cos \vartheta$ , так как асимптотически  $k_2^\partial \cos \vartheta$  имеет вполне определенный знак. Из (4.64) видим, что если  $k_2^\partial \cos \vartheta > 0$ , то  $\vartheta \rightarrow 0$ , если  $k_2^\partial \cos \vartheta < 0$ , то  $\vartheta \rightarrow \pi$  при  $\nu \rightarrow \infty$ . В обоих случаях вектор кинетического момента стремится совпасть с направлением касательной к орбите в ее перигее. Приближенно можно считать

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \exp \left\{ -k_2^\partial(\vartheta_0) \cos \vartheta_0 \right\} (\nu - \nu_0).$$

Для круговой орбиты  $k_2^\partial = 0$  и направление вектора  $\mathbf{L}$  сохраняется неизменным. Возвращаясь к (4.62), имеем

$$\frac{dL}{d\nu} = L \left\{ -k_0^\partial + \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \cos \theta N_1^\partial \left( \frac{D'_{32}}{A} + \frac{D'_{23}}{C} \right) \right\};$$

$$L = L_0 \exp \int \left\{ -k_0^\partial + \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \cos \theta N_1^\partial \left( \frac{D'_{32}}{A} + \frac{D'_{23}}{C} \right) \right\} d\nu.$$

Так как  $k_0^\partial > 0$  не обращается в нуль на круговой орбите, а  $N_1^\partial = 0$  при  $e = 0$ , то  $N_1^\partial$  можно считать малым по сравнению с  $k_0^\partial$ . Кроме того, ниже будет показано, что  $\vartheta \rightarrow 0$  или  $\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , поэтому асимптотически в фигурных скобках стоит величина существенно отрицательная и  $L \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow \infty$ ; вместе с тем уменьшается и угловая скорость прецессии  $\dot{\varphi} \approx L/A$ . Приближенно можно положить  $k_0^\partial = \text{const}$  и пренебречь  $N_1^\partial$ . Тогда

$$L = L_0 \exp \left\{ -k_0^\partial (\nu - \nu_0) \right\}.$$

В таком же приближении, как видно из последнего уравнения (4.61), можно получить угловую скорость в проекции на ось симметрии спутника

$$\omega_{z'} = \omega_{z'}^0 \exp \left\{ -\frac{N_0^\partial D_{33}}{C} (\nu - \nu_0) \right\}.$$

Посмотрим, как ведет себя угол  $\vartheta$ . Имеем

$$\frac{d \cos \vartheta}{d\nu} = -\frac{C \omega_{z'}}{L^2} \frac{dL}{d\nu} + \frac{C}{L} \frac{d\omega_{z'}}{d\nu}.$$

Подставляя значения  $\frac{dL}{dv}$  и  $\frac{d\omega_{z'}}{dv}$  из (4.61), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d \cos \vartheta}{dv} = \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \left( \frac{D_{22}}{A} - \frac{D_{33}}{C} \right) + \\ + N_1^{\partial} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{D'_{32}}{A} \sin^2 \vartheta - \frac{D'_{23}}{C} \cos^2 \vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Снова пренебрегая  $N_1^{\partial}$  по сравнению с  $N_0^{\partial}$  и интегрируя, получаем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \vartheta_0 \exp \left\{ \frac{D_{33}}{C} - \frac{D_{22}}{A} \right\} N_0^{\partial} (v - v_0). \quad (4.66)$$

Отсюда  $\vartheta \rightarrow 0$ , если  $\left( \frac{D_{33}}{C} - \frac{D_{22}}{A} \right) < 0$ , и  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ , если  $\left( \frac{D_{33}}{C} - \frac{D_{22}}{A} \right) > 0$ . Если предположить, что коэффициенты диссипации приблизительно одинаковы:  $D_{22} \approx D_{33}$ , то  $\vartheta \rightarrow 0$  при  $A < C$  и  $\vartheta \rightarrow \pi/2$  при  $A > C$ . Иначе говоря, динамически сжатый спутник стабилизируется вокруг оси симметрии ( $\vartheta \rightarrow 0$ ), а динамически вытянутый опрокидывается ( $\vartheta \rightarrow \pi/2$ ). Учитывая еще асимптотику вектора кинетического момента (4.64), можно сформулировать следующую общую закономерность: под влиянием сил аэродинамической диссипации спутник стремится установиться в режиме наибольшего аэродинамического сопротивления. Действительно, вектор  $\mathbf{L}$  стремится установиться вдоль линии наибольшего аэродинамического напора (вдоль касательной в перигее орбиты), а угол  $\vartheta$  меняется так, что в перигее орбиты устанавливается наибольшая площадь поверхности спутника. Затухание вращения будет происходить быстрее, чем движение вектора  $\mathbf{L}$  по направлению к касательной орбиты, так как скорости затухания вращения определяются параметром  $N_0^{\partial}$ , а скорость движения  $\mathbf{L}$  — параметром  $N_1^{\partial}$ , порядок которого  $eN_0^{\partial}$ , где  $e$  — эксцентриситет орбиты.

В работе [84] получен критерий асимптотического поведения угла нутации  $\vartheta$  из неосредненных по  $\psi$  уравнений (для частного случая обтекания цилиндра). В работе [84] уравнение, аналогичное (4.65), имеет вид

$$\frac{d \ln |\operatorname{ctg} \vartheta|}{dt} = C_0 \sin \delta \left( \frac{1}{p_1} - 1 + \frac{1}{p_1} \sin^2 \xi \right),$$

где  $C_0$  — постоянная;  $p_1 = \frac{A}{C}$ ;  $\xi = (\widehat{\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1}$ ;  $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1$  — орты, перпендикулярные  $z'$  и лежащие в плоскостях  $z'$  и  $\mathbf{V}_0$  соответ-

ственно. В этом случае, если  $\rho_1 > 2$  и  $\delta$  не равно 0 и  $\pi$ , то  $\vartheta \rightarrow \pi/2$  (режим кувыркания), если  $P_1 < 1$ , то  $\vartheta \rightarrow 0$  (чистое вращение) при  $t \rightarrow \infty$ . При  $1 < P_1 < 2$  поведение  $\vartheta$  неопределенно и зависит от угла  $\xi$  и ориентации  $\mathbf{L}$ . Изучение поведения в этом случае требует более детального анализа полной эволюции  $\mathbf{L}$ .

Совместное влияние диссипативных и гравитационных сил на движение спутника относительно центра масс рассмотрено в работе [61].

Выражение (4.54) получено в предположении, что  $D_{11} = D_{22}$ . В общем случае это не так. Будем считать  $D_{11} \neq D_{22}$  и найдем более строгую (неосредненную) формулу торможения вращения осесимметричного спутника

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M = \left( \mathbf{M} \frac{\mathbf{L}}{L} \right) = (M_{x'} A \omega_{x'} + M_{y'} A \omega_{y'} + M_{z'} C \omega_{z'}) \frac{1}{L} = \\ &= \rho V_0 \left\{ \frac{A}{L} \left[ - \frac{(D_{11} + D_{22})}{2} (\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2) + \right. \right. \\ &+ \frac{(D_{11} - D_{22})}{2} \cos 2\varphi_0 (\omega_{y'}^2 + \omega_{x'}^2) + (D_{11} - D_{22}) \sin 2\varphi_0 \omega_{x'} \omega_{y'} + \\ &\quad \left. \left. + D_{23} \omega_{z'} (\omega_{x'} \sin \varphi_0 + \omega_{y'} \cos \varphi_0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C \omega_{z'}}{L} \left[ - D_{33} \omega_{z'} + D_{32} (\omega_{x'} \sin \varphi_0 + \omega_{y'} \cos \varphi_0) \right] \right\}. \quad (4.67) \end{aligned}$$

Учитывая (4.53), а также то, что  $\cos(\mathbf{e}_{v_0}, \widehat{\mathbf{k}'}) = \alpha''$ , сделаем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} \sin \varphi_0 + \omega_{y'} \cos \varphi_0 &= \frac{1}{\sin \delta} (\alpha \omega_{x'} + \alpha' \omega_{y'}) = \\ &= \frac{1}{\sin \delta} \left[ \frac{1}{A} (A \omega_{x'} \alpha + A \omega_{y'} \alpha' + C \omega_{z'} \alpha'') - \frac{C \omega_{z'}}{A} \alpha'' \right] = \\ &= \frac{1}{\sin \delta} \left[ \frac{1}{A} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_{v_0}) - \frac{C}{A} \omega_{z'} \alpha'' \right]. \quad (4.68) \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi_0 (\omega_{y'}^2 - \omega_{x'}^2) + 2 \sin 2\varphi_0 \omega_{x'} \omega_{y'} &= \\ &= \frac{1}{\sin^2 \delta} [2(\alpha \omega_{x'} + \alpha' \omega_{y'})^2 - (1 - \alpha'^2)(\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2)]. \quad (4.69) \end{aligned}$$

Подставляя (4.68), (4.69) в (4.67), после несложных преобразований получаем

$$\frac{dL}{dt} = \rho V_0 L \left\{ - \frac{D_{11}}{A} \sin^2 \vartheta - \frac{D_{33}}{C} \cos^2 \vartheta + \right.$$

$$\left\{ \left( \frac{D_{12}}{A} \mid \frac{D_{23}}{C} \right) \cos \vartheta \frac{1}{\sin \delta} [(\mathbf{e}_L \mathbf{e}_{V_0}) - \cos \vartheta \cos \delta] + \right. \\ \left. + \frac{D_{11} - D_{22}}{A} \frac{1}{\sin^2 \delta} [(\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_{V_0}) - \cos \vartheta \cos \delta]^2 \right\}. \quad (4.70)$$

Здесь использованы соотношения

$$\omega_{x'} = \frac{L}{A} \sin \vartheta \sin \varphi; \quad \omega_{y'} = \frac{L}{A} \sin \vartheta \cos \varphi; \quad \omega_z = \frac{L}{C} \cos \vartheta.$$

Как и следовало ожидать, в силу динамической и геометрической осевой симметрий спутника выражение (4.70) не зависит от угла  $\varphi$ . Если ввести угол  $\kappa_1$  между плоскостями  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{e}_{V_0}$  и  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{e}_L$ , которые заданы их нормальными, т. е. ввести угол согласно соотношению

$$\cos \kappa_1 = ([\mathbf{k}' \mathbf{e}_{V_0}] \cdot [\mathbf{k}' \mathbf{e}_L]),$$

то  $(\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_{V_0})$  можно представить в виде

$$(\mathbf{e}_L \cdot \mathbf{e}_{V_0}) = \cos \vartheta \cos \delta + \sin \vartheta \sin \delta \cos \kappa_1.$$

Тогда для  $dL/dt$  окончательно получим

$$\frac{dL}{dt} = \rho V_0 L \left[ -\frac{D_{11}}{A} \sin^2 \vartheta - \frac{D_{33}}{C} \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + \left( \frac{D_{32}}{A} + \frac{D_{23}}{C} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \kappa_1 + \frac{D_{11} - D_{22}}{A} \sin^2 \vartheta \cos^2 \kappa_1 \right]. \quad (4.71)$$

#### 4.8. Аэродинамическое демпфирование сферического спутника с учетом зонального ветра

Выражение для  $\mathbf{M}_2$  запишем в виде (4.50), а выражение  $D_{ij}$  для сферы — в виде (2.12) и перейдем от полусвязанной системы координат к связанной с помощью соотношений (4.51) — (4.53). Подставляя (2.12) и (4.51) — (4.53) в (4.50), получаем

$$\mathbf{M}_2 = \rho V D [-3(\omega_{x'} \mathbf{i}' + \omega_{y'} \mathbf{j}' + \omega_z \mathbf{k}') + \\ + (\omega_x \alpha + \omega_y \alpha' + \omega_z \alpha'')(\alpha \mathbf{i}' + \alpha' \mathbf{j}' + \alpha'' \mathbf{k}'), \quad (4.72)$$

где  $D = (1 - \varepsilon) \frac{\pi R^4}{4}$ ;  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{V}$  в связанной системе координат.

Если ввести угол  $\varphi_1 = (\widehat{\mathbf{V}_0, \boldsymbol{\omega}}$ , то, очевидно, выражение (4.72) представимо в виде (ср. с (3.28))

$$\mathbf{M}_2 = \rho V D [-3\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_V) \mathbf{e}_1] = \rho V D [-\boldsymbol{\omega} (3 - \cos^2 \varphi_1) + \\ + \boldsymbol{\omega} \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \mathbf{e}_{V \perp \boldsymbol{\omega}}], \quad (4.73)$$

где  $\mathbf{e}_{V \perp \omega}$  — орт в направлении проекции вектора  $\mathbf{V}$ , перпендикулярной вектору  $\omega$ . В выражении (4.73) момент  $\mathbf{M}_2$  для сферы разделится на две составляющие: чисто тормозящую и прецессионную. Из выражения прецессионной составляющей видно, что  $\omega$  асимптотически стремится совпасть с направлением  $\mathbf{V}$  или установиться перпендикулярно ему. Модуль вектора стремится к нулю, поскольку только в этом случае  $\mathbf{M}_2 = 0$ .

Введем в рассмотрение зональную компоненту атмосферного ветра. Тогда  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_a + [(\omega_0 - \omega_a) \mathbf{r}]$ , где  $\mathbf{V}_0$  и  $\omega_0$  — скорость и угловая скорости спутника в абсолютной системе координат при покоящейся атмосфере;  $\mathbf{V}_a$  и  $\omega_a$  — скорости и угловая скорость вращения атмосферы в абсолютной системе координат. Следует отметить, что количественное соотношение всех составляющих вектора  $\mathbf{V}$  для спутника радиусом 1 м следующее:

$$V_0 : V_a : |[\omega_0 \mathbf{r}]| : |[\omega_a \mathbf{r}]| = 8 \cdot 10^3 : 70 : 1 : 10^{-5}.$$

Запишем выражение (4.73) с учетом ветра. Используем соотношение типа  $\cos \alpha = \frac{1}{V} (V_{\bar{X}} \tilde{\alpha}_1 + V_{\bar{Y}} \tilde{\alpha}_2 + V_{\bar{Z}} \tilde{\alpha}_3)$  и аналогично для  $\cos \alpha'$  и  $\cos \alpha''$  получим

$$M_{x'} = \rho D \left[ -3V (\omega_{x'} - \omega_3 \lambda_{\omega} \tilde{\beta}_1) + \frac{1}{V} (V_{\bar{X}} \tilde{\alpha}_1 + V_{\bar{Y}} \tilde{\beta}_1 + V_{\bar{Z}} \tilde{\gamma}_1) B \right];$$

$$M_{y'} = \rho D \left[ -3V (\omega_{y'} - \omega_3 \lambda_{\omega} \tilde{\beta}_2) + \frac{1}{V} (V_{\bar{X}} \tilde{\alpha}_2 + V_{\bar{Y}} \tilde{\beta}_2 + V_{\bar{Z}} \tilde{\gamma}_2) B \right];$$

$$M_{z'} = \rho D \left[ -3V (\omega_{z'} - \omega_3 \lambda_{\omega} \tilde{\beta}_3) + \frac{1}{V} (V_{\bar{X}} \tilde{\alpha}_3 + V_{\bar{Y}} \tilde{\beta}_3 + V_{\bar{Z}} \tilde{\gamma}_3) B \right];$$

$$B = V_{\bar{X}} (\omega_{x'} \tilde{\alpha}_1 + \omega_{y'} \tilde{\alpha}_2 + \omega_{z'} \tilde{\alpha}_3) + V_{\bar{Y}} (\omega_{x'} \tilde{\beta}_1 + \omega_{y'} \tilde{\beta}_2 + \omega_{z'} \tilde{\beta}_3) + V_{\bar{Z}} (\omega_{x'} \tilde{\gamma}_1 + \omega_{y'} \tilde{\gamma}_2 + \omega_{z'} \tilde{\gamma}_3) - \omega_3 \lambda_{\omega} V_{\bar{Y}}; \quad (4.74)$$

$$\omega_a = \omega_3 \lambda_{\omega} \mathbf{e}_Y;$$

$\lambda_{\omega}$  — коэффициент захвата (суперротации) атмосферы (1.7).

В системе координат  $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  (4.74) принимает вид

$$M_{\bar{X}} = \rho D \left[ -3V (\omega_{x'} \tilde{\alpha}_1 + \omega_{y'} \tilde{\alpha}_2 + \omega_{z'} \tilde{\alpha}_3) + \frac{V_{\bar{X}}}{V} B \right];$$

$$M_{\bar{Y}} = \rho D \left[ -3V (\omega_{x'} \tilde{\beta}_1 + \omega_{y'} \tilde{\beta}_2 + \omega_{z'} \tilde{\beta}_3) + \frac{V_{\bar{Y}}}{V} B - 3V \omega_3 \lambda_{\omega} \right];$$

$$M_{\bar{Z}} = \rho D \left[ -3V (\omega_{x'} \tilde{\gamma}_1 + \omega_{y'} \tilde{\gamma}_2 + \omega_{z'} \tilde{\gamma}_3) + \frac{V_{\bar{Z}}}{V} B \right].$$

Осредняя эти уравнения по  $\psi$  и используя соотношения типа

$$\omega_x \tilde{\alpha}_1 + \omega_y \tilde{\alpha}_2 = \frac{L_{\bar{X}} - C\omega_z \tilde{\alpha}_3}{A}, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\bar{X}}^\psi &= \rho D \left\{ \Delta \left[ -3L_{\bar{X}}V + \frac{V_{\bar{X}}}{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{L}) \right] - \frac{V_{\bar{X}}V_{\bar{Y}}}{V} \omega_3 \lambda_\omega \right\}; \\ \bar{M}_{\bar{Y}}^\psi &= \rho D \left\{ \Delta \left[ -3L_{\bar{Y}}V + \frac{V_{\bar{Y}}}{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{L}) \right] - \omega_3 \lambda_\omega \left( 3V - \frac{V_{\bar{Y}}^2}{V} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\bar{Z}}^\psi &= \rho D \left\{ \Delta \left[ -3L_{\bar{Z}}V + \frac{V_{\bar{Z}}}{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{L}) \right] - \frac{V_{\bar{Z}}V_{\bar{Y}}}{V} \omega_3 \lambda_\omega \right\}; \\ \Delta &= \frac{\sin^2 \vartheta}{A} + \frac{\cos^2 \vartheta}{C}. \end{aligned}$$

Используя соотношения (4.26), а также матрицы перехода от орбитальной к абсолютной  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  системе координат (4.1), выпишем компоненты вектора  $\mathbf{V}$  в системе координат  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  с учетом ветра:

$$\begin{aligned} V_{\bar{X}} &= V_x \cos u + \cos i - V_y \sin i + V_z \sin u \cos i; \\ V_{\bar{Y}} &= V_x \cos u \sin i + V_y \cos i + V_z \sin u \sin i; \\ V_{\bar{Z}} &= -V_x \sin u + V_z \cos u; \\ V_x &= V_0 (1 + e \cos v) - \omega_3 \lambda_\omega R \cos i; \\ V_y &= \omega_3 \lambda_\omega R \sin i \cos u; \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$V_z = V_0 e \sin v; \quad V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{P}}; \quad R = \frac{P}{1 + e \cos v},$$

где  $V_x, V_y, V_z$  — компоненты скорости  $\mathbf{V}$  в орбитальной системе координат. В выражениях (4.76) долготу восходящего узла орбиты  $\Omega$  полагаем равной нулю, поскольку ее влияние на достаточном промежутке времени стирается вследствие вращения Земли.

Осредним (4.75) еще раз по истинной аномалии  $v$  и перейдем от переменной  $t$  (время) к переменной  $v$ . С этой целью обозначим

$$N_V = \rho \pi \frac{1}{2\pi} \frac{P^2}{\sqrt{\mu P}} \int_0^{2\pi} \frac{V}{(1 + e \cos v)^2} dv;$$

$$N_{i_j} = \rho_\pi \frac{1}{2\pi} \frac{P^2}{V^2 |U P|} \int_0^{2\pi} \bar{\rho} \frac{V_i V_j}{V(1 + e \cos v)^2} dv; \quad (4.77)$$

$$i, j = \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}.$$

Уравнение движения вектора кинетического момента имеет вид  $\frac{d\mathbf{L}}{dv} = \bar{M}^{\psi, v}$ . Для того чтобы система (4.75) была замкнутой, добавим к ней уравнение для  $\vartheta$ . По аналогии с (4.65) для сферы получим

$$\frac{d \cos \vartheta}{dv} = 3DN_V \cos \vartheta \sin^2 \vartheta \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right).$$

Это уравнение интегрируется. При этом  $\vartheta \rightarrow 0$  при  $A < C$  и  $\vartheta \rightarrow \pi/2$  при  $A > C$ . С учетом (4.77) система уравнений для вектора  $\mathbf{L}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dL_{\bar{X}}}{dv} &= \bar{M}_{\bar{X}}^{\psi, v} = D\Delta (-3L_{\bar{X}}N_V + N_{\bar{X}\bar{X}}L_{\bar{X}} + N_{\bar{X}\bar{Y}}L_{\bar{Y}} + \\ &\quad + N_{\bar{X}\bar{Z}}L_{\bar{Z}}) - DN_{\bar{X}\bar{Y}}\omega_3\lambda_\omega; \\ \frac{dL_{\bar{Y}}}{dv} &= \bar{M}_{\bar{Y}}^{\psi, v} = D\Delta (-3L_{\bar{Y}}N_V + N_{\bar{X}\bar{Y}}L_{\bar{X}} + N_{\bar{Y}\bar{Y}}L_{\bar{Y}} + \\ &\quad + N_{\bar{Y}\bar{Z}}L_{\bar{Z}}) + D\omega_3\lambda_\omega(3N_V - N_{\bar{Y}\bar{Y}}); \\ \frac{dL_{\bar{Z}}}{dv} &= \bar{M}_{\bar{Z}}^{\psi, v} = D\Delta (-3L_{\bar{Z}}N_V + N_{\bar{X}\bar{Z}}L_{\bar{X}} + N_{\bar{Y}\bar{Z}}L_{\bar{Y}} + \\ &\quad + N_{\bar{Z}\bar{Z}}L_{\bar{Z}}) - DN_{\bar{Y}\bar{Z}}\omega_3\lambda_\omega. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Рассмотрим решение этой системы. С этой целью выпишем явный вид компонент  $V_i V_j$ :

$$\begin{aligned} V_{\bar{X}}V_{\bar{X}} &= V_0^2 e^2 \cos^2 i \cos^2 \omega_\pi + 2V_0^2 e \cos^2 i \cos u \cos \omega_\pi + \\ &\quad + V_0^2 \cos^2 i \cos^2 u - 2V_0 e \omega_3 \lambda_\omega R \cos i \cos u \cos \omega_\pi - \\ &\quad - 2V_0 \omega_3 \lambda_\omega R \cos i \cos^2 u + \omega_3^2 \lambda_\omega^2 R^2 \cos^2 u; \\ V_{\bar{Y}}V_{\bar{Y}} &= V_0^2 e^2 \sin^2 i \cos^2 \omega_\pi + 2V_0^2 e \sin^2 i \cos u \cos \omega_\pi + \\ &\quad + V_0^2 \sin^2 i \cos^2 u; \\ V_{\bar{Z}}V_{\bar{Z}} &= V_0^2 e^2 \sin^2 \omega_\pi + 2V_0^2 e \sin u \sin \omega_\pi + \\ &\quad + V_0^2 \sin^2 u - 2V_0 e \cos i \sin u \sin \omega_\pi - \\ &\quad - 2V_0 \omega_3 \lambda_\omega R \cos i \sin^2 u + \omega_3^2 \lambda_\omega^2 R^2 \cos^2 i \sin^2 u; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{\bar{X}}V_{\bar{Y}} &= V_0^2 e^2 \sin i \cos i \cos^2 \omega_\pi + \\
&+ 2V_0^2 e \sin i \cos i \cos u \cos \omega_\pi + V_0^2 \sin i \cos i \cos^2 u - \\
&- V_0 e \omega_3 \lambda_\omega R \sin i \cos u \cos \omega_\pi - V_0 \omega_3 \lambda_\omega R \sin i \cos^2 u; \\
V_{\bar{X}}V_{\bar{Z}} &= -V_0^2 e^2 \cos i \sin \omega_\pi \cos \omega_\pi - V_0^2 e \cos i (\cos u \sin \omega_\pi + \\
&+ \sin u \cos \omega_\pi) - V_0^2 \cos i \sin u \cos u + \\
&+ V_0 e \omega_3 \lambda_\omega R (\cos^2 i \sin u \cos \omega_\pi + \cos u \sin \omega_\pi) + \\
&+ V_0 \omega_3 \lambda_\omega R \sin u \cos u (1 + \cos^2 i) - \omega_3^2 \lambda_\omega^2 R^2 \cos i \sin u \cos u; \\
V_{\bar{Y}}V_{\bar{Z}} &= -V_0^2 e^2 \sin i \sin \omega_\pi \cos \omega_\pi - \\
&- V_0^2 e \sin i (\cos u \sin \omega_\pi + \sin u \cos \omega_\pi) - V_0^2 \sin i \sin u \cos u + \\
&+ V_0 e \omega_3 \lambda_\omega R \sin i \cos i \sin u \cos \omega_\pi + V_0 \omega_3 \lambda_\omega R \sin i \cos i \sin u \cos u.
\end{aligned}$$

Система (4.78) существенно упрощается только для экваториальной орбиты ( $i = 0$ ). При этом  $N_{\bar{X}\bar{Y}} = N_{\bar{Y}\bar{Z}} = N_{\bar{Y}\bar{X}} = 0$ . Полагая  $e = 0$ , получаем

$$N_V = \rho \frac{R^2}{V \sqrt{\mu R}} \left( \sqrt{\frac{\mu}{R}} - \omega_3 \lambda_\omega R \right); \quad N_{\bar{X}\bar{X}} = N_{\bar{Z}\bar{Z}} = \frac{1}{2} N_V, \quad N_{\bar{X}\bar{Z}} = 0$$

и система (4.78) принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{dL_{\bar{X}}}{dv} &= -\frac{5}{2} D\Delta N_V L_{\bar{X}}; & \frac{dL_{\bar{Z}}}{dv} &= -\frac{5}{2} D\Delta N_V L_{\bar{Z}}; \\
\frac{dL_{\bar{Y}}}{dv} &= 3DN_V (-\Delta L_{\bar{Y}} + \omega_3 \lambda_\omega).
\end{aligned}$$

Из двух первых уравнений следует, что составляющие  $L_{\bar{X}}$  и  $L_{\bar{Z}}$  асимптотически стремятся к нулю. Уравнение для  $L_{\bar{Y}}$  имеет следующее решение:

$$L_{\bar{Y}} = L_{\bar{Y}_0} \exp(-3DN_V \Delta v) + \frac{\omega_3 \lambda_\omega}{\Delta} [1 - \exp(-3DN_V \Delta v)].$$

При  $v \rightarrow \infty$   $L_{\bar{Y}} \rightarrow L \rightarrow \frac{\omega_3 \lambda_\omega}{\Delta}$ . Угловая скорость вращения спутника при этом стремится к  $\omega_3 \lambda_\omega$ . Если  $L_{\bar{Y}_0} > \omega_3 \lambda_\omega$ , то  $L_{\bar{Y}}$  экспоненциально затухает; если  $L_{\bar{Y}_0} < \omega_3 \lambda_\omega$ , то угловая скорость вращения спутника возрастает до того же предела.

Из структуры системы (4.78) видно, что для случая произвольной орбиты асимптотическое поведение  $\mathbf{L}$  определяется теми же пределами, что и в рассмотренном выше частном слу-

чае, однако переходный процесс значительно усложняется и описать его аналитически в общем случае невозможно.

Если в рассмотрение включить значительно более слабые компоненты атмосферного ветра — меридиональную и радиальную, то меридиональная составляющая дает постоянные добавки к уравнениям для  $L_{\bar{x}}$  и  $L_{\bar{z}}$ , а радиальная — для всех компонент. При этом все составляющие  $L$  будут иметь отличные от нуля асимптоты. Если вместо постоянного коэффициента суперротации  $\lambda_0$  ввести коэффициент, зависящий от высоты полета спутника (например, в виде (1.7)), то для общего случая эллиптических орбит необходимо ввести новые коэффициенты  $N_{V\lambda}$  и  $N_{ij\lambda}$ , отличающиеся от (4.77) функцией  $\lambda(v)$  в подынтегральных выражениях.

При учете суточного эффекта верхней атмосферы в аэродинамическом демпфировании спутника вместо интегралов (4.60) и (4.77) необходимо вводить интегралы

$$N_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\rho_\pi} V \frac{P}{V \mu P (1 - e \cos v)^2} dv;$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\rho_\pi} \frac{V_i V_j}{V} \frac{P}{V \mu P (1 - e \cos v)^2} dv$$

и использовать значение  $\rho$  из (1.6). На рис. 26 представлены интегралы  $N_0$ ,  $N_{\bar{x}\bar{x}}$ ,  $N_{\bar{z}\bar{z}}$  и их средние за сутки значения в зависимости от  $h_\alpha$  при следующих параметрах:  $h_\pi = 200$  км,  $\Omega = \omega_\pi = 0$ ,  $i = 45^\circ$ ,  $\alpha_\odot = 90^\circ$ ,  $\delta_\odot = 23,5^\circ$ . Значения остальных  $N_{ij}$  на 1—2 порядка меньше представленных на рисунке. С ростом  $h_\alpha$   $N_0$  и  $N_{ij}$  уменьшаются, причем средние за сутки значения  $\bar{N}_0$  и  $\bar{N}_{ij}$  имеют несколько локальных экстремумов.

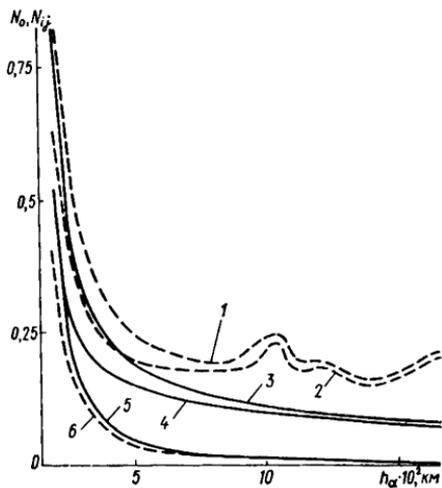


Рис. 26. Зависимость безразмерных интегралов  $N_0$ ,  $N_{ij}$ ,  $\bar{N}_0$  и  $\bar{N}_{ij}$  от высоты апогея спутника  $h_\alpha$ :

1 —  $\bar{N}_0$ ; 2 —  $\bar{N}_{XX}$ ; 3 —  $N_0$ ; 4 —  $N_{XX}$ ; 5 —  $N_{ZZ}$ ; 6 —  $\bar{N}_{ZZ}$ .

Новые качественные эффекты в эволюции вектора  $L$  при этом не появляются.

Таким образом, основными эффектами возмущенного вращения спутника являются прецессия вектора кинетического момента вокруг направления перигейной касательной; стремление спутника за счет атмосферного трения к движению в режиме наибольшего аэродинамического сопротивления. На эти эффекты накладываются менее существенные явления за счет деталей взаимодействия потока с поверхностью спутника, вращения и суточного изменения атмосферы, периодических колебаний эволюции вращения за счет орбитального движения. Отметим, что результаты исследования применимы в области допустимости использованных методов исследования — в области быстрых вращений. Переход в область медленных вращений может сопровождаться изменением предельного режима движения: спутник может в конечном счете стремиться к режиму наименьшего аэродинамического сопротивления, пройдя упомянутый выше режим наибольшего аэродинамического сопротивления при достаточно больших угловых скоростях.

## ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ СО СМЕЩЕННЫМ ЦЕНТРОМ МАСС

В предыдущей главе изучались сравнительно простые динамические эффекты, проявляющиеся во вращении симметричных спутников. Предполагалось, что оси геометрической и динамической симметрий совпадают. Несовпадение осей геометрической и динамической симметрий влечет, как оказалось, качественно новые эффекты в динамике спутников. Эти эффекты изучаются в настоящей главе.

### 5.1. Совместное влияние восстанавливающего момента и момента смещения на эволюцию вращения спутника

Исследуем динамику вращательного движения спутника под действием восстанавливающего момента  $\mathbf{M}'_1$  из (3.3) при наличии смещения  $\mathbf{R}_1$  между осями геометрической и динамической симметрий спутника. В первом приближении положим  $\Delta! = 0$  (см. рис. 17). Без ограничения общности положим также  $\mathbf{R}_1 = R_x \mathbf{i}'$ . Для  $F'$  (3.6) примем простейшую аппроксимацию, соответствующую (2.38) при  $a_2^{\delta} = 0$ . Тогда для  $\mathbf{M}'_1$  имеем

$$\mathbf{M}'_1 = \rho V_0^2 C(\delta) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}] + \rho V_0^2 \tau(\delta) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1].$$

Положим  $C(\delta) = C_0$ ,  $\tau(\delta) = \tau_0$ . В осях  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , связанных с главными центральными моментами инерции спутника, векторы  $\mathbf{e}_{V_0}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{R}_1$  примут вид

	$x'$	$y'$	$z'$
$\mathbf{e}_{V_0}$	$e_{x'}$	$e_{y'}$	$e_{z'}$
$\mathbf{k}$	$\dot{0}$	$0$	$1$
$\mathbf{R}_1$	$R_{x'}$	$0$	$0$

Введем силовую функцию, соответствующую  $\mathbf{M}'_1$ ,

$$U = -\rho V_0^2 (C_0 e_{z'} + \tau_0 R_{x'} e_{x'})$$

и полагая при  $\xi = 1/4$ , осредненные по  $\psi$  и  $\nu$  функции

$$\begin{aligned} U^{\psi, \nu} &= \rho_{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{P}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu} \rho [(e + \cos \nu) \cos \theta - \\ &\quad - \sin \nu \sin \theta \cos \lambda] (C_0 \cos \theta + \tau_0 R_{x'} \sin \theta); \\ \bar{U}^{\psi, \nu} &= -\rho_{\pi} \sqrt{\mu P} J_1 \cos \theta [C_0 \cos \theta + \tau_0 R_{x'} \sin \theta \sin \varphi]. \end{aligned}$$

Так как  $\bar{U}^{\psi, \lambda}$  не зависит от  $\psi$  и  $\lambda$ , то (см. (4.21))  $L = L_0$  и  $\theta = \theta_0$ . Однако  $\bar{U}^{\psi, \lambda}$  зависит от  $\varphi$ , что может вызвать новые эффекты. Если допустить, что  $\varphi$  — быстрая переменная, то  $\bar{U}^{\psi, \nu}$  можно осреднить по  $\varphi$  и свести задачу к рассмотренной в § 4.4.

Пусть  $\varphi$  — медленная переменная, т. е.  $\dot{\varphi}$  мало. Из невозмущенного движения [8] следует, что  $\dot{\varphi} = L_0 \cos \vartheta_0 \left( \frac{A-C}{AC} \right)$ . Это возможно в двух случаях: 1)  $\cos \vartheta_0 \sim \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — малая величина) — движение в окрестности режима кувыркания; 2)  $\frac{A-C}{AC} \sim \sim \varepsilon$  — эллипсоид инерции спутника близок к сфере. Так или иначе будем считать  $\dot{\varphi} \sim \varepsilon$ . Тогда к уравнению для  $\lambda$  (из (4.34)) следует добавить уравнения для  $\varphi$  и  $\vartheta$  (4.31) с силовой функцией  $U$ , осредненной по  $\psi$  и  $\nu$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\nu} &= \frac{1}{L_0 \sin \theta_0} \frac{\partial \bar{U}^{\psi, \nu}}{\partial \theta} = \rho_{\pi} \sqrt{\mu P} \frac{J_1}{L_0} [\cos \theta C_0 + \\ &\quad + \tau_0 R_{x'} \sin \theta \sin \varphi]; \\ \frac{d\varphi}{d\nu} &= L_0 \cos \vartheta \frac{A-C}{AC} + \frac{1}{L_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \bar{U}^{\psi, \nu}}{\partial \vartheta}; \\ \frac{d\vartheta}{d\nu} &= -\frac{1}{L_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \bar{U}^{\psi, \nu}}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если ввести функцию  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} L_0^2 \frac{A-C}{AC} \sin^2 \vartheta + \bar{U}^{\psi, \nu}$ , то (5.1) можно представить в виде

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{1}{L_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = -\frac{1}{L_0 \sin \vartheta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi}. \quad (5.2)$$

Так как  $\mathcal{H}$  не зависит явно от времени ( $\nu$ ), то существует первый интеграл

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} L_0^2 \frac{A-C}{AC} \sin^2 \vartheta - \rho_{\pi} \sqrt{\mu P} J_1 \cos \theta_0 [\cos \vartheta C_0 + \\ &\quad + \tau_0 R_{x'} \sin \vartheta \sin \varphi], \end{aligned} \quad (5.3)$$

описывающий зависимость  $\vartheta$  ( $\varphi$ ). Исследуем эту зависимость в виде траектории вектора  $\mathbf{L}$  на единичной сфере, связанной

со спутником. Представим (5.3) в виде

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta + \alpha_0 \cos \vartheta + \\ + \beta_0 \sin \vartheta \sin \varphi = h_0; \\ \alpha_0 = \frac{2\varrho_{\pi} \sqrt{1-P} J_1 \cos \theta_0 C_0}{L_0^2 (A-C)} AC; \\ \beta_0 = \frac{\alpha_0}{C_0} \tau_0 R_x'; \quad (5.4) \end{aligned}$$

$$h_0 = \frac{1}{2} L_0^2 \frac{A-C}{AC} = \mathcal{H}_0.$$

Заметим, что  $\sin \vartheta \sin \varphi = \alpha_{\pi} = = \cos(\mathbf{L}, \mathbf{x}') = \cos \kappa$ . Тогда

$$\begin{aligned} \cos \kappa = \\ = \bar{h}_0 - \frac{1}{\beta_0} \cos^2 \vartheta - \frac{\alpha_0}{\beta_0} \cos \vartheta; \\ \bar{h}_0 = \frac{h_0}{\beta_0}. \end{aligned}$$

График функции  $\cos \kappa = f(\vartheta)$  при  $\bar{h}_0 = 0$  изображен на рис. 27, а для случая  $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$ . Характерные точки функции  $f(\vartheta)$  при  $h_0 = 0$  следующие:

$\vartheta$	0	$\pi/2$	$\arccos(-\alpha_0/2)$	$\arccos(-\alpha_0)$	$\pi$
$f(\vartheta)$	$-\frac{1-\alpha_0}{\beta_0}$	0	$\alpha_0^2/4\beta_0$	0	$-\frac{1+\alpha_0}{\beta_0}$
	(минимум)		(максимум)		(минимум)

Зависимость  $\cos \kappa(\vartheta, \bar{h}_0)$  при произвольном  $\bar{h}_0 \neq 0$  получается параллельным сдвигом кривой  $\cos \kappa(\vartheta)$  на величину  $\bar{h}_0$  вдоль оси ординат (рис. 27, б).

Перейдем теперь от плоского представления функций  $\cos \kappa = f(\vartheta)$  к интерпретации на единичной сфере. С этой целью воспользуемся неравенством

$$-\sin \vartheta \leq \cos \kappa \leq \sin \vartheta. \quad (5.5)$$

Это неравенство дает область определения значений  $\cos \kappa$ . Таким образом, на плоскости  $\vartheta, \cos \kappa$  (см. рис. 27, б) имеют реальный смысл точки, лежащие внутри области (5.5), и только эти точки. При этом границам области  $\cos \kappa = \pm \sin \vartheta$  отвечает меридиан  $\varphi = \pm \pi/2$  единичной сферы. Каждая фикс-

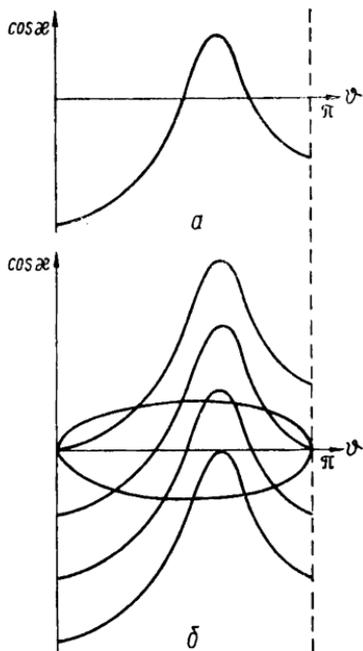


Рис. 27. Зависимость функции  $f$  от угла пугации  $\vartheta$ .

рованная кривая (при фиксированном  $h_0$ ) на рис. 27, б отвечает следу вектора  $\mathbf{L}$  на единичной сфере, связанной со спутником. При  $\vartheta = 0, \pi$  след вектора  $\mathbf{L}$  совпадает со следом оси  $z'$ . При  $\cos \kappa = 0$  ( $\vartheta = \pi/2, \varphi = 0$ ) след вектора  $\mathbf{L}$  совпадает с направлением оси  $y'$ , при  $\cos \kappa = 1$  ( $\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$ ) — с направлением оси  $x'$ . По предположению такое же направление вектора  $\mathbf{R}_x'$ .

Найдем координаты полюсов вектора  $\mathbf{L}$ , для чего приравняем к нулю правые части уравнения (5.2). Из  $\partial \mathcal{H} / \partial \varphi = 0$  получаем  $\cos \varphi = 0$  или  $\varphi = \pm \pi/2$ . Координаты  $\vartheta$  полюсов определяются из условия  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} \frac{1}{L_0 \sin \vartheta} = 0$ , которое, учитывая (5.3), может быть записано в явном виде

$$L_0 \cos \vartheta \frac{A - C}{AC} - \frac{\rho_\pi V \sqrt{\mu P}}{L_0 \sin \vartheta} J_1 \cos \theta_0 [-C_0 \sin \vartheta + \tau_0 R_1 \cos \vartheta (\pm 1)] = 0$$

или после очевидных преобразований

$$\sin \vartheta \left( \cos \vartheta + \frac{\alpha_0}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \beta_0 \cos \vartheta = 0. \quad (5.6)$$

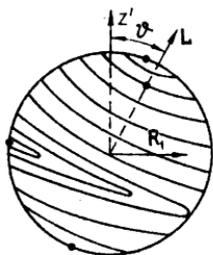


Рис. 28. Траектории векового движения вектора кинетического момента при наличии смещения  $\mathbf{R}_1$  между центром масс спутника и его осью симметрии.

Найдем приближенное решение уравнений (5.6) в окрестности точек  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$ . В первом случае можно считать  $\cos \vartheta \approx 1$  и тогда координаты  $\vartheta_0$  полюса определяются из соотношения

$$\sin \vartheta_{01,2} \approx \frac{\pm \frac{1}{2} \beta_0}{1 + \frac{1}{2} \alpha_0}.$$

Во втором случае ( $\vartheta = \pi/2$ ) имеем  $\sin \vartheta \approx 1$  и

$$\cos \vartheta_{03,4} \approx \frac{-\frac{1}{2} \alpha_0}{1 \pm \frac{1}{2} \beta_0}.$$

Рассмотренный случай при различных начальных условиях  $h_0$  ( $L_0, \mathcal{H}_0$ ) приведен на рис. 28.

После того как найдено решение для переменных  $\vartheta$  и  $\varphi$ , нетрудно найти выражение для  $\lambda$ , интегрируя первое уравнение системы (5.1).

Таким образом, искажение восстанавливающего момента  $\mathbf{M}_1$  за счет смещения  $\mathbf{R}_1$  не нарушает основной динамической

картины, если собственное вращение спутника быстрое. Однако при медленном собственном вращении появляется побочный эффект — регулярная прецессия спутника относительно вектора кинетического момента искажается и полностью нарушается в узкой зоне в окрестности «режима кувыркания». В окрестности этого режима движение спутника относительно вектора кинетического момента носит колебательный характер.

Отметим также, что интеграл (5.3) позволяет интегрировать систему (5.2) в эллиптических функциях.

## 5.2. Авторотационный момент

Рассмотрим авторотационный момент (3.9)  $\mathbf{M}_{12} = \rho V_0^2 F_k(\delta) \times \times [\mathbf{kR}_1]$ . Для  $F_k(\delta)$  примем аппроксимацию  $F_k(\delta) = a_0^\delta + a_1^\delta \cos \delta$ , в первом приближении учитывающую асимметрию тела относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии тела. Относительно расположения осей динамической и геометрической симметрий спутника примем следующие допущения (см. рис. 17). Пусть  $\Delta I = 0$ , а  $\mathbf{R}_1 \perp z'$ . В силу динамической симметрии спутника без ограничения общности всегда можно повернуть связанную систему координат  $x'y'z'$  относительно оси симметрии  $z'$  таким образом, чтобы  $\mathbf{R}_1$  совпало с направлением оси  $y'$ . Тогда оси расположатся так, как показано на рис. 29, а векторы  $\mathbf{e}_{V_0}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{R}_1$  в связанной системе координат будут определяться следующей матрицей направляющих косинусов:

	$i'$	$j'$	$k'$
$\mathbf{e}_{V_0}$	$\alpha$	$\alpha'$	$\alpha''$
$\mathbf{k}$	$-\sin \kappa$	0	$\cos \kappa$
$\mathbf{R}_1$	0	$R_y$	0

Для  $\cos \delta$  и  $[\mathbf{kR}_1]$  получим

$$\cos \delta = \alpha'' (\cos \kappa - \alpha \sin \kappa); \quad (5.7)$$

$$[\mathbf{kR}_1] = -R_y (\cos \kappa i' + \sin \kappa k').$$

Учитывая (5.7),  $\mathbf{M}_{12}$  в связанных осях можно представить в виде

$$M_{x'} = \rho V_0^2 [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 (\alpha'' \cos \kappa - \alpha \sin \kappa)] \cos \kappa;$$

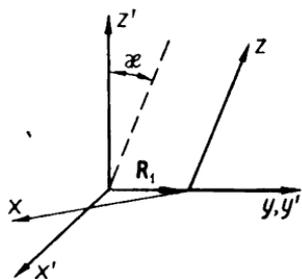


Рис. 29. Взаимное расположение осей, связанных с главными центральными моментами инерции спутника и с его осью симметрии.

$$M_{y'} = 0; \quad (5.8)$$

$$M_{z'} = \rho V_0^2 [\bar{a}_0 + \bar{a}_1 (\alpha'' \cos \kappa - \alpha \sin \kappa)] \sin \kappa,$$

где  $\bar{a}_0 = -R_y a_0^\delta$ ;  $\bar{a}_1 = -R_y a_1^\delta$ . Для моментов (5.8) построим систему уравнений (4.18), где моменты  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}$  будут линейными комбинациями моментов (5.8). Будем считать переменные  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\nu$  быстрыми и рассмотрим нерезонансный случай между ними. Тогда осреднение по  $\nu$  не зависит от осреднения по  $\varphi$  и  $\psi$  и может быть проведено сразу на моментах  $M_x$  и  $M_{z'}$ . Если пренебречь вращением атмосферы, то

$$\alpha = \cos(\widehat{e\nu_0, i'}); \quad \alpha'' = \cos(\widehat{e\nu_0, k}) = \cos \delta.$$

Учитывая (4.26) и (4.27), получаем

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{(e + \cos \nu) \alpha_3 - \sin \nu \gamma_3}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}}; \\ \alpha &= \frac{(e + \cos \nu) \alpha_1 - \sin \nu \gamma_1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подставляя (5.9) в (5.8) и осредняя по  $\nu$  от 0 до  $2\pi$ , получаем

$$\bar{M}_{x'}^\nu = [b_0 + b_1 (\alpha_3 \cos \kappa - \alpha_1 \sin \kappa)] \cos \kappa;$$

$$\bar{M}_{z'}^\nu = [b_0 + b_1 (\alpha_3 \cos \kappa - \alpha_1 \sin \kappa)] \sin \kappa;$$

$$b_0 = \omega_0 \rho_\pi \sqrt{\mu P} J_0 \bar{a}_0; \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}};$$

$$b_1 = \omega_0 \rho_\pi \sqrt{\mu P} J_1 \bar{a}_1; \quad a = \frac{P}{1 - e^2}; \quad (5.10)$$

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\nu) \frac{1 + e^2 + 2e \cos \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu;$$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\nu) \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}}{(1 + e \cos \nu)^2} (e + \cos \nu) d\nu.$$

Найдем выражения  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M$  в явном виде:

$$M_1 = M_{L_1} = M_x \alpha_{11} + M_{z'} \alpha_{13};$$

$$M_2 = M_{L_2} = M_x \alpha_{21} + M_{z'} \alpha_{23}; \quad (5.11)$$

$$M = M_L = M_x \alpha_{31} + M_{z'} \alpha_{33}.$$

Подставляя в (5.11) (5.10), получаем осредненные по  $\nu$  выражения

$$\begin{aligned} M_1 &= b_0 (\cos \kappa \alpha_{11} + \sin \kappa \alpha_{13}) + b_1 (\alpha_3 \cos \kappa - \alpha_1 \sin \kappa) \times \\ &\quad \times (\cos \kappa \alpha_{11} + \sin \kappa \alpha_{13}); \end{aligned}$$

$$M_2 = b_0 (\cos \kappa \alpha_{21} + \sin \kappa \alpha_{23}) + b_1 (\alpha_3 \cos \kappa - \alpha_1 \sin \kappa) (\cos \kappa \alpha_{21} + \sin \kappa \alpha_{23});$$

$$M = b_0 (\cos \kappa \alpha_{31} + \sin \kappa \alpha_{33}) + b_1 (\alpha_3 \cos \kappa - \alpha_1 \sin \kappa) \times \\ \times (\cos \kappa \alpha_{31} + \sin \kappa \alpha_{33}),$$

где

$$\alpha_3 = -\sin \theta \alpha_{13} + \cos \theta \alpha_{33}; \quad \alpha_1 = -\sin \theta \alpha_{11} + \cos \theta \alpha_{31},$$

а  $\alpha_{ij}$  — известные функции от  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  (см. (4.4)).

Изучим случай, когда  $b_1 = 0$ ,  $b_0 \neq 0$ . Из (5.10) следует, что этому случаю отвечает либо круговая орбита ( $e = 0$ ), либо двоякосимметричное тело ( $e \neq 0$ , но  $\bar{a}_1 = 0$ ), либо выполнение обоих условий  $e = 0$  и  $\bar{a}_1 = 0$ . При этом всегда считается  $a_0 \neq 0$ . В рассматриваемом случае задача эквивалентна задаче о вращении симметричного тела, к которому приложен постоянный по величине и направлению момент сил относительно центра масс. Это так называемая задача Грэммеля [39]. Уравнения Эйлера в задаче Грэммеля при  $A \neq B \neq C$  не интегрируемы. Для  $A = B \neq C$  они интегрируемы, но только в связанных осях, а изменение ориентации осей в пространстве в явном виде получить не удастся. Так как возмущающий момент в нашем случае мал, то для исследования задачи естественно применить асимптотические методы.

Поскольку здесь рассматривается нерезонансный случай, то проведем независимое по  $\varphi$  и  $\psi$  осреднение. Тогда уравнения для  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\psi}$  отщепляются от системы (4.18) и остается система уравнений для  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{L}$  и  $\dot{\psi}$ . Осредненные значения направляющих косинусов равны:  $\bar{\alpha}_{11}^{\psi, \varphi} = \bar{\alpha}_{13}^{\psi, \psi} = \bar{\alpha}_{21}^{\psi, \varphi} = \bar{\alpha}_{23}^{\psi, \varphi} = \bar{\alpha}_{31}^{\psi, \varphi} = 0$ ,  $\bar{\alpha}_{33}^{\psi, \varphi} = \cos \theta$  и, следовательно,

$$\bar{M}_1^{\psi, \varphi} = \bar{M}_2^{\psi, \varphi} = 0; \quad \bar{M}^{\psi, \varphi} = b_0 \sin \kappa \cos \theta. \quad (5.12)$$

Отсюда автоматически вытекают два первых интеграла системы (4.18)  $\dot{\theta} = \text{const}$ ;  $\dot{\lambda} = \text{const}$ .

Далее имеем

$$M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi = b_0 [\cos \kappa (\alpha_{21} \cos \psi - \alpha_{11} \sin \psi) + \\ + \sin \kappa (\alpha_{23} \cos \psi - \alpha_{13} \sin \psi)] = \\ = b_0 (\cos \kappa \sin \varphi \cos \theta - \sin \kappa \sin \theta).$$

После осреднения этого выражения по  $\varphi$  имеем

$$\overline{M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi}^{\varphi} = -b_0 \sin \kappa \sin \theta.$$

Тогда для  $L$  и  $\vartheta$  получаем систему

$$L = b_0 \sin \kappa \cos \vartheta; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{b_0}{L} \sin \kappa \sin \vartheta.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{\dot{L}}{L\dot{\vartheta}} = -\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Отсюда находим

$$\frac{dL}{L} = -\frac{d(\sin \vartheta)}{\sin \vartheta}; \quad L \sin \vartheta = L_0 \sin \vartheta_0. \quad (5.13)$$

Подставляя (5.13) в уравнение для  $\dot{\vartheta}$ , окончательно получаем

$$\dot{\vartheta} = -k_0 \sin^2 \vartheta; \quad k_0 = \frac{b_0 \sin \kappa}{L_0 \sin \vartheta_0};$$

$$\operatorname{ctg} \vartheta = k_0 t + \operatorname{ctg} \vartheta_0.$$

Асимптотическое поведение полученного решения следующее. Если  $k_0 > 0$ , то  $\vartheta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Если  $k_0 < 0$ , то  $\vartheta \rightarrow \pi$  при  $t \rightarrow \infty$ . При этом независимо от поведения  $\vartheta$   $L \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Напомним, что вследствие малости возмущающего момента  $k_0$  мало, т. е.  $k_0 \sim \varepsilon$ , и полученное осредненное решение справедливо лишь на отрезке времени  $t \sim 1/\varepsilon$ . Однако основная тенденция движения верно отражается полученным асимптотическим решением.

Таким образом, при наличии смещения  $\mathbf{R}_1$  авторотационный момент приводит к раскрутке спутника.

### 5.3. Авторотационный эффект при наличии резонанса

Из предыдущего параграфа следует, что в процессе движения переменные  $L(t)$  и  $\cos \vartheta(t)$  могут принимать любые значения. В частности, наблюдается резонанс между переменными  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  ( $\varphi \approx \psi$ ). Действительно, учитывая (5.12), а также то, что  $A = B$ , имеем

$$\dot{\varphi} = L \cos \vartheta \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right); \quad \dot{\psi} = \frac{L}{A}.$$

Отсюда, приравнивая  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$ , получим условие резонанса

$$\cos \vartheta = \frac{C}{A - C}.$$

Функция  $\cos \vartheta(t)$  в процессе движения может пройти через это резонансное значение, если только  $\left| \frac{C}{A - C} \right| < 1$ . Анализ этого условия приводит к неравенству  $A > 2C$ .

Итак, в рассматриваемой задаче при условии  $A > 2C$  возможно возникновение резонанса. Независимое осреднение по  $\varphi$  и  $\psi$  в этом случае проводить нельзя. Введем в рассмотрение новую переменную  $\chi = \varphi - \psi$ , описывающую движение в окрестности резонанса. Эта новая переменная является медленной, а переменная  $\varphi + \psi$  — быстрой. Запишем компоненты матрицы  $\alpha_{ij}$  и другие комбинации, входящие в уравнение (4.18), через переменные  $\chi$  и  $\varphi + \psi$  и осредним их по быстрой переменной  $\varphi + \psi$ . Отличные от нуля члены будут иметь вид

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{11}^{\psi+\varphi} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \cos \chi; \\ \bar{\alpha}_{21}^{\psi+\varphi} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \sin \chi;\end{aligned}\tag{5.14}$$

$$\overline{M_2 \cos \varphi - M_1 \sin \psi}^{\psi+\varphi} = -b_0 \sin \chi \sin \vartheta.$$

Следует отметить, что поскольку период изменения  $\varphi$  и  $\psi$  равен  $2\pi$ , то и осреднение по  $\varphi + \psi$  проведено за этот же период.

Используя (5.14), запишем теперь систему уравнений (4.18) в переменных  $\theta, \lambda, L, \vartheta, \chi$ :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{b_0 \cos \kappa}{L} \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \cos \chi; \\ \dot{\lambda} &= \frac{b_0 \cos \kappa}{L \sin \vartheta} \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \sin \chi; \\ \dot{L} &= b_0 \sin \kappa \cos \vartheta; \quad \dot{\vartheta} = -\frac{b_0}{L} \sin \kappa \sin \vartheta; \\ \dot{\chi} &= L \left\{ \frac{1}{A} - \cos \vartheta \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \right\} + \frac{1}{L} \operatorname{ctg} \vartheta \times \\ &\quad \times \frac{b_0 \cos \kappa}{2} (1 - \cos \vartheta) \sin \chi.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Резонансное значение  $\vartheta_*$  определяется из условия  $\cos \vartheta_* = \frac{C}{A-C}$ . Тогда

$$\frac{1}{A} - \cos \vartheta \frac{A-C}{AC} = \frac{1}{A} \left( 1 - \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_*} \right).$$

Проведем следующую замену переменных:

$$\frac{L}{L_0} = l; \quad \frac{L_0}{A} t = \tau.$$

В новых переменных систему (5.15) можно представить в виде

$$\frac{dl}{d\tau} = \varepsilon \sin \kappa \cos \vartheta; \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = -\varepsilon \sin \kappa \frac{\sin \vartheta}{l};$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon \cos \kappa \frac{1 - \cos \vartheta}{2l} \cos \chi; \quad (5.16)$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \varepsilon \cos \kappa \frac{1 - \cos \vartheta}{2l \sin \theta} \sin \chi;$$

$$\frac{d\chi}{d\tau} = l \left( 1 - \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_*} \right) - \varepsilon \cos \kappa \frac{1 - \cos \vartheta}{2l \operatorname{tg} \theta} \sin \chi.$$

Здесь  $\varepsilon = \frac{Ab_0}{L_0^2}$ . Будем интегрировать (5.16) при начальных условиях  $l_0 = 1$ ,  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\lambda_0 = 0$ ,  $\vartheta_0 = \vartheta_*$ . Система (5.16) имеет первый интеграл:  $l \sin \vartheta = \text{const}$ . Используя это соотношение, нетрудно проинтегрировать первые два уравнения системы (5.16):

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta_0 + \varepsilon \sin \kappa \tau}{l}; \quad (5.17)$$

$$l = [1 + 2\varepsilon \cos \vartheta_0 \sin \kappa \tau + (\varepsilon \sin \kappa)^2 \tau^2]^{1/2}.$$

Отсюда следует, что  $\cos \vartheta \rightarrow \pm 1$  при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ . В силу (5.17) главный член правой части последнего из уравнений (5.16) может быть представлен в виде

$$l \left( 1 - \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_*} \right) = l - 1 - \varepsilon \frac{\sin \kappa}{\cos \vartheta_0} \tau. \quad (5.18)$$

Учитывая, что, как следует из (5.17),  $l \approx 1 + \varepsilon \cos \vartheta_0 \sin \kappa \tau$ , получаем

$$l \left( 1 - \frac{\cos \vartheta}{\cos \vartheta_*} \right) \approx -\varepsilon \sin \kappa \frac{\sin^2 \vartheta_0}{\cos \vartheta_0} \tau.$$

Здесь учтено, что  $\vartheta_* = \vartheta_0$ . Член (5.18), возрастающий со временем, преобладает в правой части последнего из уравнений (5.16), поэтому

$$\frac{d\chi}{d\tau} \approx -\bar{\alpha} \tau; \quad \bar{\alpha} = \varepsilon \sin \kappa \frac{\sin^2 \vartheta_0}{\cos \vartheta_0}; \quad (5.19)$$

$$\chi \approx \chi_0 - \frac{\bar{\alpha}}{2} \tau^2.$$

Определим теперь траектории  $\theta(t)$  и  $\lambda(t)$  вектора кинетического момента. Полагая без потери точности в правых частях соответствующих уравнений (5.16)  $\theta = \theta_0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ , в (5.19) введем вместо  $\theta$ ,  $\lambda$  новые переменные  $\eta$  и  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \eta &= (\theta - \theta_0) \cos \chi_0 + (\lambda - \lambda_0) \sin \theta_0 \sin \chi_0; \\ \xi &= (\theta - \theta_0) \sin \chi_0 - (\lambda - \lambda_0) \sin \theta_0 \cos \chi_0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Тогда из третьего и четвертого уравнений (5.16) следует

$$\frac{d\eta}{d\varphi_1} = \sqrt{\pi} \frac{a}{|\bar{\alpha}|} \cos \frac{\pi\varphi_1^2}{2}; \quad \frac{d\xi}{d\varphi_1} = \sqrt{\pi} \frac{a}{|\bar{\alpha}|} \sin \frac{\pi\varphi_1^2}{2};$$

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{|\bar{\alpha}|}{\pi}} \tau; \quad a = \varepsilon \cos \kappa \frac{1 - \cos \vartheta_0}{2}. \quad (5.21)$$

Формулы (5.21) представляют собой стандартную форму записи спирали Корню (клотоиды). Известно, что эта спираль касается оси  $\eta$ , имеет в начале координат перегиб, а при  $\varphi_1 \rightarrow \pm\infty$  скручивается к точкам с координатами соответственно

$$\eta = \xi = \pm \frac{a}{2|\bar{\alpha}|} \sqrt{\pi} = \pm k_1.$$

В исходных обозначениях

$$k_1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi\varepsilon \cos \vartheta_0}{\sin \kappa}} \times$$

$$\times \frac{(1 - \cos \vartheta_0) \cos \kappa}{\sin \vartheta_0},$$

а предельные значения  $\theta_*$  и  $\lambda_*$  определяются формулами

$$\theta_* - \theta_0 = \pm k_1 (\cos \chi_0 + \sin \chi_0);$$

$$\sin \theta_0 (\lambda_* - \lambda_0) = \pm k_1 (\sin \chi_0 - \cos \chi_0).$$

В силу (5.20) и (5.21) траектория  $\theta(\lambda)$  вектора кинетического момента будет представлять собой сплюснутую (вытянутую) двойную спираль типа спирали Корню (рис. 30). Амплитуда движения вектора кинетического момента в пространстве имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ , что отвечает обычному эффекту размера резонансной зоны. Начало координат — перегиб спирали Корню — отвечает прохождению через резонанс.

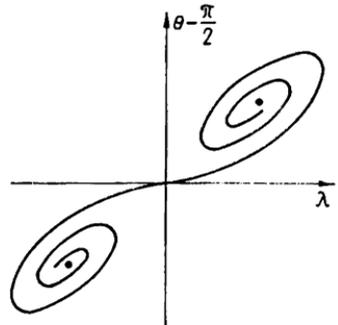


Рис. 30. Траектория векового движения вектора кинетического момента в случае резонанса между переменными  $\psi$  и  $\varphi$  в авторотационном эффекте.

#### 5.4. Учет эллиптичности орбиты и асимметрии спутника в динамике авторотационного эффекта.

В § 5.2 рассмотрен авторотационный эффект для случая  $\bar{a}_1 = 0$ , что отвечает круговой орбите либо двоякосимметричному спутнику. Учтем влияние эллиптичности орбиты и асимметрии поверхности спутника относительно плоскости, перпендику-

лярной оси симметрии. С этой целью в (5.10) положим  $b_0 = 0$  и  $b_1 \neq 0$  и сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \alpha_3 \cos \kappa - \alpha_1 \sin \kappa &= \cos \kappa (\alpha_{33} \cos \theta - \alpha_{13} \sin \theta) - \\ &- \sin \kappa (\alpha_{31} \cos \theta - \alpha_{11} \sin \theta) = \alpha_{33} \cos \kappa \sin \theta - \\ &- \alpha_{13} \cos \kappa \sin \theta - \alpha_{31} \sin \kappa \cos \theta + \alpha_{11} \sin \kappa \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Для вычисления  $M_1$  в (5.11) домножим (5.22) на  $(\cos \kappa \alpha_{11} + \sin \kappa \alpha_{13})$  и осредним это выражение по  $\psi$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_{33} \alpha_{11}^{\psi, \varphi}} &= 0; & \overline{\alpha_{33} \alpha_{13}^{\psi, \varphi}} &= 0; \\ \overline{\alpha_{13} \alpha_{11}^{\psi, \varphi}} &= 0; & \overline{\alpha_{13}^2}^{\psi, \varphi} &= \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta; \\ \overline{\alpha_{31} \alpha_{11}^{\psi, \varphi}} &= 0; & \overline{\alpha_{31} \alpha_{13}^{\psi, \varphi}} &= 0; \\ \overline{\alpha_{11}^2}^{\psi, \varphi} &= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \vartheta); & \overline{\alpha_{11} \alpha_{13}^{\psi, \varphi}} &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (5.11), для  $\overline{M}_1^{\psi, \varphi, \nu}$  получаем

$$\overline{M}_1^{\psi, \varphi, \nu} = \frac{b_1}{2} \sin \kappa \cos \kappa \sin \theta \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right).$$

Умножим (5.22) на  $(\cos \kappa \alpha_{21} + \sin \kappa \alpha_{23})$  и, проводя аналогичные осреднения, получим  $\overline{M}_2^{\psi, \varphi, \nu} = 0$ . Наконец, умножив (5.22) на  $(\cos \kappa \alpha_{31} + \sin \kappa \alpha_{33})$ , получим, что из осредненных комбинаций  $\alpha_{ij}$  в этом произведении отличны от нуля лишь  $\overline{\alpha_{33}^2}^{\psi, \varphi} = \cos^2 \vartheta$  и  $\overline{\alpha_{31}^2}^{\psi, \varphi} = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta$ . Тогда

$$\overline{M}^{\psi, \varphi, \nu} = b_1 \sin \kappa \cos \kappa \cos \vartheta \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right).$$

Далее,

$$M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi = (\cos \kappa \sin \varphi \cos \vartheta - \sin \kappa \sin \vartheta) b_1 = f b_1.$$

Умножая  $f$  на (5.22) и осредняя по  $\psi$  и  $\varphi$ , получаем

$$\begin{aligned} \overline{f \alpha_{33}^{\psi, \varphi}} &= -\sin \kappa \sin \vartheta \cos \vartheta; & \overline{f \alpha_{13}^{\psi, \varphi}} &= 0; \\ \overline{f \alpha_{31}^{\psi, \varphi}} &= \frac{1}{2} \cos \kappa \sin \vartheta \cos \vartheta; & \overline{f \alpha_{11}^{\psi, \varphi}} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\overline{M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi}^{\psi, \varphi, \nu} = -\frac{3b_1}{2} \sin \kappa \cos \kappa \cos \theta \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (5.23)$$

Подставляя  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M$ , а также (5.23) в уравнения (4.18), окончательно получаем

$$\dot{\lambda} = 0; \quad \lambda = \lambda_0;$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{b_1}{2L} \sin \kappa \cos \kappa \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \sin \theta; \\ \dot{L} &= b_1 \sin \kappa \cos \kappa \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos \theta; \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{3b_1}{2L} \sin \kappa \cos \kappa \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Уравнения (5.24) имеют первые интегралы

$$L (\cos \vartheta)^{1/3} \sin \vartheta^{2/3} = l_0, \quad (5.25)$$

$$\frac{L}{\sin^2 \theta} = C_0. \quad (5.26)$$

Из рис. 31, а видно, что на режимах вращения, близких к чистому вращению или кувырканию,  $L$  велико и имеет минимальное значение на углах нутации, близких к  $\pi/4$ . Направление движения вектора  $\mathbf{L}$  определяется уравнением для  $\dot{\vartheta}$  и зависит от знака  $b_1$ . Изменение  $L(0)$  в соответствии с (5.26) представлено на рис. 33, б.

Разделив  $l_0$  на  $C_0$ , получим новый интеграл — следствие интегралов (5.25) и (5.26)

$$\sin^2 \theta (\cos \vartheta)^{1/3} (\sin \vartheta)^{2/3} = K_0. \quad (5.27)$$

Зависимость  $\theta$  от  $\cos \vartheta$  в соответствии с (5.27) представлена на рис. 31, в. Начальные данные определяют пределы изменения углов  $\theta$ ,  $\vartheta$ , а эти пределы в свою очередь определяют пределы изменения величины  $L$ . Иначе говоря, интегральные кривые рис. 31 изображающая точка проходит не полностью, а колеблется на ограниченном куске кривой. На быстрых вращениях спутника ( $\varphi$ ,  $\psi$ ) накладываются долгопериодические колебания  $L$ ,  $\theta$  и  $\lambda$ . Движение вектора происходит в одной плоскости, определяемой осью  $X$  (направление касательной в перигее орбиты) и начальным углом  $\lambda_0$ , причем максимальная раскрутка спутника реализуется, когда  $\mathbf{L} \perp OX$ , и  $L = 0$ ,

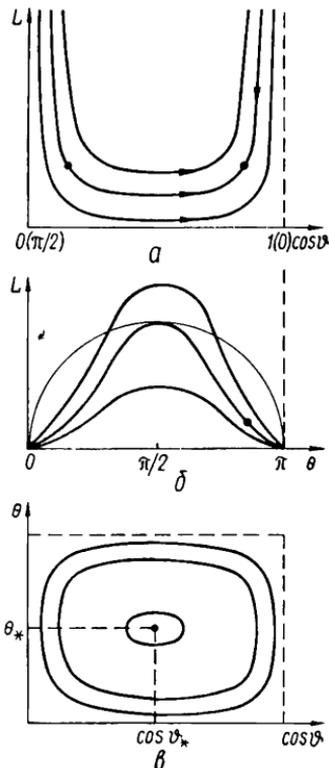


Рис. 31. Интегральные кривые  $L(\cos \vartheta)$  (а),  $L(\theta)$  (б),  $\theta(\cos \vartheta)$  (в) для двоякоосимметричного спутника в отсутствие резонанса.

когда  $\mathbf{L} \parallel OX$ . С другой стороны,  $\theta$  периодически изменяется с изменением режима вращения от чистого вращения к кувырканию. Максимальная раскрутка спутника осуществляется на углах нутации, близких к  $0, \pi/2$ , и спадает на средних углах нутации. Для уравнений, описывающих поведение переменных  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$ , имеется стационарное решение:  $\theta_* = \pi/2, \varphi_* = 1/\sqrt{3}$ . В дальнейшем аналогичное движение спутника будет рассмотрено на примере пропеллирующего эффекта спутников «Протон». Следует, однако, помнить, что в настоящем параграфе были приняты весьма жесткие допущения относительно схемы взаимодействия газа с поверхностью ( $a_0^\delta = 0$ ), поэтому рассмотренный эффект мал (в силу малости величины  $a_1^\delta$ ).

### 5.5. Момент аэродинамических сил при наличии смещения в общей постановке

Выше рассматривались частные случаи авторотационного момента  $\mathbf{M}_{12}$  с определенными ограничениями относительно функции  $F_k(\delta)$ . Общий итог этих исследований таков: авторотационный момент может ускорять и замедлять вращение спутника, причем замедление вращения не является следствием диссипации вращательной энергии на трение об атмосферу (при  $\omega = 0$  авторотационный момент будет раскручивать спутник). Авторотационный эффект по существу описывает тонкий (основанный на отраженных от спутника потоках) механизм перекачки поступательной энергии спутника во вращательную. Моменты  $\mathbf{M}_{11}$  и  $\mathbf{M}_{13}$  из (3.9), рассмотренные в § 5.1, в частной постановке таким свойством не обладают.

Найдем более общие условия, приводящие к ускорению вращения спутника (имеется в виду ускорение в общем смысле, т. е. как ускорение, так и замедление вращения).

Рассмотрим момент  $\mathbf{M}_1$  (3.9) в целом, используя для  $F_k(\delta)$  и  $F_{V_0}(\delta)$  аппроксимации вида (3.11). Считая  $R_1$  и  $\Delta l$  отличными от нуля, найдем проекции моментов  $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{12}$  и  $\mathbf{M}_{13}$  на направление  $\mathbf{L}$  и вычислим, при каких условиях эти проекции имеют тормозящую и ускоряющую составляющие. Переменные  $\psi, \varphi$  и  $\nu$  будем считать быстрыми и исключим из рассмотрения резонансные соотношения между ними. Проведем независимое осреднение моментов  $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{13}$  по переменным  $\psi, \varphi$  и  $\nu$ . Если пренебречь вращением атмосферы, то из (4.26) имеем

$$e_{V_0} = e_x \frac{e + \cos \nu}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}} + e_z \frac{-\sin \nu}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}}.$$

В проекциях на оси  $L_1, L_2, L$  векторы  $e_{V_0}$  и  $\mathbf{k}$  (3.2) имеют вид

$$e_{V_0} = e_{L_1} e_{V_1} + e_{L_2} e_{V_2} + e_L e_V; \quad \mathbf{k} = e_{L_1} l_1 + e_{L_2} l_2 + e_L l,$$

где

$$\begin{aligned} e_{V_1} &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} [m_1 (e + \cos v) + k_1 (-\sin v)]; \\ e_{V_2} &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} [m_2 (e + \cos v) + k_2 (-\sin v)]; \\ e_V &= \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} [m (e + \cos v) + k (-\sin v)]; \quad (5.28) \\ l_1 &= \sin \kappa \alpha_{11} + \cos \kappa \alpha_{13}; \quad l_2 = \sin \kappa \alpha_{21} + \cos \kappa \alpha_{23}; \\ l &= \sin \kappa \alpha_{31} + \cos \kappa \alpha_{33}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\cos \delta = (e_{V_0} \cdot \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^3 e_{V_i} l_i; \quad (5.29)$$

$$\cos^2 \delta = \sum_{i=1}^3 e_{V_i} e_{V_j} l_i l_j.$$

Вектор  $\mathbf{R}_1$  в проекциях на оси  $L_1, L_2, L$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= e_{L_1} (R_x \alpha_{11} + R_y \alpha_{12} + R_z \alpha_{13}) + e_{L_2} (R_x \alpha_{21} + R_y \alpha_{22} + \\ &+ R_z \alpha_{23}) + e_L (R_x \alpha_{31} + R_y \alpha_{32} + R_z \alpha_{33}) = \\ &= e_{L_1} R_{L_1} + e_{L_2} R_{L_2} + e_L R_L \end{aligned} \quad (5.30)$$

Подставим в  $\mathbf{M}_{11} F_{V_0}(\delta)$ . Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{11} &= \rho V_0^2 F_{V_0}(\delta) [e_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1] = \rho V_0^2 (F_{V_0} + F_{V_1} \cos \delta + \\ &+ F_{V_2} \cos^2 \delta) [e_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Проекция  $\mathbf{M}_{11}$  на ось  $L$  имеет вид

$$(\mathbf{M}_{11})_L \{\rho V_0^2 F_{V_0}(\delta) [e_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1]\}_L = \rho V_0^2 F_{V_0}(\delta) (e_V R_L - e_{V_1} R_{L_1}).$$

Подставляя в (5.31) (5.30), (5.29), (5.28), а также  $V_0^2$  из (4.27) и осредняя  $(\mathbf{M}_{11})_L$  по  $\psi, \varphi$  и  $v$ , получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_{11})_L^{\psi, \varphi, v} &= \rho_{\pi} \frac{\mu}{P} R_y \sin \kappa \left\{ F_{V_1} \left[ \frac{1}{2} \cos \vartheta \overline{V_0^2 e_{V_1}^v} + \overline{\rho V_0^2 e_{V_2}^v} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. F_{V_2} \cos \kappa \left( \cos \vartheta - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right) \left( \overline{\rho V_0^2 e_{V_1}^v} + \overline{\rho V_0^2 e_{V_2}^v} \right) \right] \right\}, \quad (5.32) \end{aligned}$$

где

$$R_y = \frac{R_1 \sin \xi}{\sqrt{1 - \sin^2 \kappa \cos^2 \xi}}; \quad V_0^2(v) = \frac{\mu}{P} \bar{V}^2(v);$$

$$\begin{aligned} \rho(v) &= \rho_0 \bar{\rho}(v); \quad \bar{V}^2(v) = 1 + e^2 + 2e \cos v; \\ \rho(v) &= \exp \left[ \frac{1}{H} \frac{\rho e}{1+e} \frac{1 - \cos v}{1+e \cos v} \right]; \quad \overline{\rho V_0^2 e_{V_1}^2 v} = m_1^2 J_1 + l_1^2 J_2; \\ &\quad \overline{\rho V_0^2 e_{V_2}^2 v} = m_2^2 J_1 + l_2^2 J_2; \\ \overline{\rho V_0^2 e_{V_1}^2 e_V v} &= m_1^2 m J_3 + (l_1^2 m + 2m_1 l_1 l) J_4; \quad \overline{\rho V_0^2 e_{V_2}^2 e_V v} = m_2^2 m J_3 + \\ &\quad + (l_2^2 m + 2m_2 l_2 l) J_4; \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{(1+e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho}(v) (e + \cos v)^2}{(1+e \cos v)^2} dv; \\ J_2 &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho}(v) \sin^2 v}{(1+e \cos v)^2} dv; \\ J_3 &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho}(v) (e + \cos v)^3 dv}{(1+e \cos v)^2 \sqrt{1+e^2+2e \cos v}}; \\ J_4 &= \frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{\rho}(v) (e + \cos v) \sin^2 v dv}{(1+e \cos v) \sqrt{1+e^2+2e \cos v}}. \end{aligned}$$

Подставляя (3.11) в  $\mathbf{M}_{13}$ , получаем

$$\mathbf{M}_{13} = \rho V_0^2 (F_{V_0} + F_{V_1} \cos \delta + F_{V_2} \cos^2 \delta) [\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}]. \quad (5.34)$$

Здесь  $C(\delta)$  и  $\Delta l$  внесены в коэффициенты  $F_{V_0}$ ,  $F_{V_1}$  и  $F_{V_2}$ , поскольку качественной картины они не меняют. Спроектировав (5.34) на  $L$ , получим

$$(\mathbf{M}_{13})_L = \rho V_0^2 (F_{V_0} + F_{V_1} \cos \delta + F_{V_2} \cos^2 \delta) (e_{V_1} l_2 - e_{V_2} l_1). \quad (5.35)$$

Осредняя (5.35) по  $\psi$ ,  $\varphi$  и  $v$ , получаем

$$\overline{(\mathbf{M}_{13})_L}^{\psi, \varphi, v} = 0.$$

Теперь осредним  $\mathbf{M}_{12}$ . Используя (3.2), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{12} = \rho V_0^2 F_k(\delta) [\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1] &= \frac{\rho V_0^2 F_k(\delta) R_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \kappa \cos^2 \xi}} [\mathbf{k} (i' \cos \xi + \\ &\quad + j' \sin \xi)]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Подставим в (5.36)  $\mathbf{k}$  из (3.2), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{12} &= \frac{\rho V_0^2 F_k(\delta) R_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \kappa \cos^2 \xi}} [i' (-\cos \kappa \sin \xi) + j' (\cos \kappa \cos \xi) + \\ &\quad + \mathbf{k}' (\sin \kappa \sin \xi)]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Спроектируем (5.37) на вектор кинетического момента  $\mathbf{L}$ , для чего найдем с помощью матрицы перехода  $\gamma$  (4.1) проекции ортов  $\mathbf{i}'$ ,  $\mathbf{j}'$  и  $\mathbf{k}'$  на направление  $\mathbf{e}_L$ . Получим

$$(\mathbf{M}_{12})_L = \frac{\rho V_0^2 F_k(\delta) R_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \kappa \cos^2 \xi}} [-\alpha_{31} \cos \kappa \sin \xi + \alpha_{32} \cos \kappa \cos \xi + \alpha_{33} \sin \kappa \sin \xi]. \quad (5.38)$$

Подставляя в (5.38)  $F_k(\delta)$  из (3.11), а также  $\cos \delta$  и  $\cos^2 \delta$  из (5.29) и осредняя по  $\psi$ ,  $\varphi$  и  $\nu$ , получаем

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{M}_{12}})_{L}^{\psi, \varphi, \nu} = & \rho_{\pi} \frac{\mu}{P} R_{y'} \sin \kappa \left\{ F_{k_0} \cos \vartheta G_1 + F_{k_1} \cos \kappa m G_2 \times \right. \\ & \times \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) + F_{k_2} \cos \vartheta \cos^2 \kappa \sin^2 \vartheta \frac{1}{2} [(m_1^2 + m_2^2 - \\ & - 2m^2) J_1 + (k_1^2 + k_2^2 - 2k^2) J_2] + \left( \frac{1}{4} \sin^2 \kappa (1 + \cos^2 \vartheta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \cos^2 \kappa \sin^2 \vartheta \right) [(m_1^2 + m_2^2) J_1 + (k_1^2 + k_2^2) J_2] + \\ & \left. + \left( \frac{1}{2} \sin^2 \kappa \sin^2 \vartheta + \cos^2 \kappa \cos^2 \vartheta \right) [(m^2 J_1 + k^2 J_2)] \right\}, \quad (5.39) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_1 = & \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\nu) \frac{1 - e^2 + 2e \cos \nu}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu; \\ G_2 = & \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\rho}(\nu) \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu} (e + \cos \nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu. \quad (5.40) \end{aligned}$$

Итак, при достаточно общих предположениях относительно функций  $F_{V_0}(\delta)$  и  $F_k(\delta)$ , определяемых геометрией тела и схемой взаимодействия газа с поверхностью, а также при произвольном расположении осей геометрической и динамической симметрий тела на величину кинетического момента оказывают влияние слагаемые вида  $[\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{R}_1]$  и  $[\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_1]$ . Именно эти слагаемые приводят к раскрутке спутника. Член с  $[\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{k}]$  является консервативным и в динамике вращательного движения тел приводит к эффектам восстанавливающего момента, описанным в гл. 4. Из (5.39) и (5.32) следует, что отличные от нуля моменты смещения и авторотации возможны только в том случае, если  $R_{y'} \neq 0$  и  $\kappa \neq 0, \pi$ , т. е. если оси геометрической и динамической симметрий не имеют общей точки (см. рис. 17).

На примере авторотационного момента найдем соотношения между точным и асимптотическим (осредненным) выражениями

... модуль вектора кинетического момента спутника. Из выражения (5.39) очевидно, что если  $\kappa = 0$ , то  $(\overline{M}_{12})^{\psi, \varphi, \nu} = 0$  и, следовательно,  $L = L_0$ . При этом  $\mathbf{M}_{12} \perp \mathbf{k}$ . С другой стороны, система уравнений Эйлера, соответствующая этому случаю, имеет вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - A)\omega_y\omega_z &= 0; \\ A\dot{\omega}_y + (C - A)\omega_x\omega_z &= M_{12}; \quad C\dot{\omega}_z = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\omega_z = \omega_{z_0}; \quad \ddot{\omega}_x + k_1^2\omega_x = \sigma_1, \quad (5.41)$$

где

$$k_1^2 = \frac{(C - A)^2 \omega_{z_0}^2}{A^2}; \quad \sigma_1 = \omega_{z_0} \frac{A - C}{A^2} M_{12}.$$

Считая  $M_{12}$  постоянной величиной, из (5.41) получаем

$$\omega_x = \omega_{x_0} \cos(k_1 t + k_0) + \frac{\sigma_1}{k_1^2},$$

где  $\omega_{x_0}$  и  $k_0$  — постоянные интегрирования. Кроме того,

$$\omega_y = \omega_{x_0} \sin(k_1 t + k_0)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} L^2 &= A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + C\omega_z^2 = A^2 \left[ \omega_{x_0}^2 + \frac{\sigma_1^2}{k_1^4} + \right. \\ &\quad \left. + 2\omega_{x_0} \frac{\sigma_1}{k_1^2} \cos(k_1 t + k_0) \right] + C^2 \omega_{z_0}^2. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что модуль вектора кинетического момента спутника меняется периодически с периодом  $T_L = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi A}{|A - C| \omega_{z_0}}$ . Разность квадратов максимального и минимального значений  $|L|$

$$\Delta(L^2) = L_{\max}^2 - L_{\min}^2 = 4 \frac{A^2}{|A - C|} \frac{\omega_{x_0}}{\omega_{z_0}} M_{12}.$$

Таким образом, происходит периодическая раскрутка и, наоборот, торможение спутника с тем большим периодом и с тем большей модуляцией величины угловой скорости (и величины  $L$ ), чем меньше начальная осевая угловая скорость спутника  $\omega_{z_0}$ . В пределе при  $\omega_{z_0}$ , стремящейся к нулю (начальная закрутка вокруг поперечной оси),

$\omega_{\theta}$  возрастает линейно по времени и получается раскрутка до бесконечно большой угловой скорости (бесконечно большого  $L$ ). Фактически это, конечно, не происходит из-за диссипативных эффектов, здесь не учтенных

## 5.6. Динамика эффекта пропеллирования. Модельные задачи

Для обычных спутников моменты авторотации малы вследствие малости скоростного напора  $\rho V_0^2/2$ , смещения центра масс спутника от оси симметрии его корпуса  $|\mathbf{R}_1|$ , угла  $\chi$  перекося осей геометрической и динамической симметрий, относительной малости вклада в величину момента от отраженных от спутника потоков по сравнению с падающим потоком частиц, что приводит к малости  $\epsilon$  и  $v/V_0$ . Вследствие этого авторотационный эффект очень мал для спутников и становится заметным лишь для спускаемых аппаратов. Однако во второй половине 60-х годов в СССР была запущена серия тяжелых неориентированных спутников «Протон» с кососимметричными панелями солнечных батарей. Такое расположение батарей обусловило вращение спутников, напоминающее движение ИСЗ под действием авторотационного момента. Такой момент получил название момента пропеллирования. Анализ ориентации этих спутников по информации магнитометрических датчиков [13—18], а также построение моделей их движения относительно центра масс [19, 20, 81] позволили установить тонкий механизм связи между параметрами взаимодействия газа с поверхностью батарей спутников и долгопериодическими изменениями их ориентации. Это в свою очередь позволило оценить параметры взаимодействия в натуральных условиях. Эти результаты тем более существенны, что получены для пластин, т. е. для поверхностей, наиболее чувствительных к схемам взаимодействия. Подобный анализ был проведен в работе [87] для американских спутников «Ариэль-11» и «Эксплорер-VI». В соответствии с работами [19, 20, 81] детально проанализируем динамику пропеллирующих эффектов (см. также [9]).

Чтобы понять основные качественные особенности движения спутников «Протон» под действием пропеллирующих моментов, нет необходимости использовать формулы (3.19), которые все же достаточно сложны для анализа. В первом приближении упростим формулу спутника и положим расстояние  $d$  от центра масс спутника до точки пересечения осей, соединяющих центры двух пар батарей, равным нулю. Тогда  $C_0 = C_2 = C' = 0$ . Ограничиваясь еще линейными членами по направляющим косинусам  $\alpha, \alpha', \alpha''$  и считая, что оси  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  совпадают,

представим себе простейшую модель момента пропеллера

$$M_x = \rho V_0^2 a_1 \alpha'; \quad M_{y'} = -\rho V_0^2 a_1 \alpha'; \quad (5.42)$$

$$M_{z'} = \rho V_0^2 a_0 \alpha'',$$

где

$$a_0 = 4aS_* n_0 n_1 \left[ 2\varepsilon n_0 + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \right];$$

$$a_1 = 2aS_* n_0 n_1 \left[ 2\varepsilon n_1 + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} \right].$$

Напомним, что  $a$  — расстояние от центра панелей солнечных батарей до продольной оси спутника (в рассматриваемом случае — до центра масс спутника);  $S_*$  — площадь одной панели. Построим эволюционную систему уравнений (4.18) для моментов (5.42). С этой целью перейдем от моментов  $M_{x'}$ ,  $M_{y'}$ ,  $M_{z'}$  к моментам  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M$  и осредним последние по  $\psi$  и  $\varphi$ . Пренебрегая вращением атмосферы, запишем

$$\alpha = f_0(v) \alpha_1 - f_1(v) \gamma_1; \quad \alpha' = f_0(v) \alpha_2 - f_2(v) \gamma_2;$$

$$\alpha'' = f_0(v) \alpha_3 - f_1(v) \gamma_3,$$

где

$$f_0(v) = \frac{e + \cos v}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}; \quad f_1(v) = \frac{\sin v}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}}.$$

Далее

$$M_1 = M_x \alpha_{11} + M_{y'} \alpha_{12} + M_{z'} \alpha_{13} = \rho V_0^2 a_1 (\alpha \alpha_{11} + \alpha' \alpha_{12}) +$$

$$+ \rho V_0^2 a_0 \alpha'' \alpha_{13} = -\rho V_0^2 a_1 [ \alpha_{11} (f_0 \alpha_1 - f_1 \gamma_1) +$$

$$+ \alpha_{12} (f_0 \alpha_2 - f_2 \gamma_2) ] + \rho V_0^2 a_0 \alpha_{13} (f_0 \alpha_3 - f_1 \gamma_3), \quad (5.43)$$

где

$$\alpha_1 = -\sin \theta \alpha_{11} + \cos \theta \alpha_{31}; \quad \alpha_2 = -\sin \theta \alpha_{12} + \cos \theta \alpha_{32};$$

$$\alpha_3 = -\sin \theta \alpha_{13} + \cos \theta \alpha_{33}; \quad (5.44)$$

$$\gamma_1 = \alpha_{11} \cos \theta \cos \lambda - \alpha_{21} \sin \lambda + \alpha_{31} \sin \theta \cos \lambda;$$

$$\gamma_2 = \alpha_{12} \cos \theta \cos \lambda - \alpha_{22} \sin \lambda + \alpha_{32} \sin \theta \cos \lambda;$$

$$\gamma_3 = \alpha_{13} \cos \theta \cos \lambda - \alpha_{23} \sin \lambda + \alpha_{33} \sin \theta \cos \lambda.$$

Подставляя (5.44) в (5.43) и осредняя всевозможные комбинации  $\alpha_{ij}$  по  $\psi$ , получаем

$$\overline{M_1^{\psi, \varphi}} = \rho V_0^2 [ f_0(v) \sin \theta + f_1(v) \cos \theta \cos \lambda ] \left[ a_1 - \frac{1}{2} (a_1 + \right.$$

$$\left. + a_0) \sin^2 \theta \right].$$

Аналогично находим  $M_2$  и  $M$  и получим, считая  $A \neq B \neq C$ , систему (4.18) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dv} &= \frac{\rho_\pi \sqrt{\mu P}}{L} \left[ a_1 - (a_0 + a_1) \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right] (V_1 \sin \theta + \\ &\quad + V_2 \cos \theta \cos \lambda); \\ \frac{dL}{dv} &= \rho_\pi \sqrt{\mu P} [-a_1 + (a_0 + a_1) \cos^2 \vartheta] (V_1 \cos \theta - \\ &\quad - V_2 \sin \theta \cos \lambda); \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dv} &= -\frac{\rho_\pi \sqrt{\mu P}}{L} (a_0 + a_1) \sin \vartheta \cos \vartheta (V_1 \cos \theta - V_2 \sin \theta \cos \lambda) + \\ &\quad + L \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \frac{B-A}{AB} \frac{P^2}{\sqrt{\mu P}} \frac{1}{(1+e \cos v)^2}; \\ \sin \theta \frac{d\lambda}{dv} &= -\frac{\rho_\pi \sqrt{\mu P}}{L} \left[ a_1 - (a_0 + a_1) \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right] V_2 \sin \lambda, \\ \frac{d\varphi}{dv} &= L \cos \vartheta \left( \frac{A-C}{AC} + \cos^2 \varphi \frac{B-A}{AB} \right) \frac{P^2}{\sqrt{\mu P} (1+e \cos v)^2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\bar{\rho} (e + \cos v) \sqrt{1+e^2+2e \cos v}}{(1+e \cos v)^2}; \\ V_2 &= \frac{\bar{\rho} \sin v \sqrt{1+e^2+2e \cos v}}{(1+e \cos v)^2}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Рассмотрим случай, когда  $A = B$ . Тогда уравнение для  $\rho$  отщепляется от системы — все остальные уравнения от  $\varphi$  не зависят. Система (5.45) неавтономная — явно содержит в правых частях независимую переменную  $v$ . Тем не менее при  $A = B$  она имеет два первых интеграла. Действительно, введем в рассмотрение величину  $\cos \rho_1 = -\sin \theta \sin \lambda$ . Тогда

$$\frac{d\vartheta}{d \cos \rho_1} = -\frac{(a_0 + a_1) \sin \vartheta \cos \vartheta}{\left[ a_1 - (a_0 + a_1) \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right] \cos \rho_1}. \quad (5.47)$$

Откуда

$$|\operatorname{tg} \vartheta|^{2\alpha^*} |\cos \vartheta| \cos^2 \rho_1 = C_{\rho_1}, \quad (5.48)$$

где

$$\alpha^* = \frac{a_1}{a_0 + a_1}. \quad (5.49)$$

Разделив второе уравнение (5.45) на третье и проинтегрировав, получим

$$L |\sin \vartheta| |\operatorname{ctg} \vartheta|^{\alpha^*} = C_L. \quad (5.50)$$

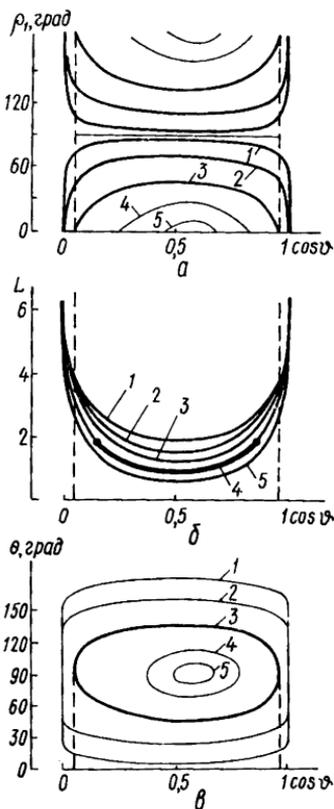


Рис. 32. Интегральные кривые пропеллирующего эффекта:

а: 1 —  $C_{\rho_1} = 0,01$ ; 2 — 0,09;  
 3 — 0,36; 4 — 0,64; 5 — 0,72;  
 б: 1 —  $C_L = 1,3$ ; 2 — 1,1;  
 3 — 0,9; 4 — 0,71; 5 — 0,5;  
 в: 1 —  $C_\theta = 0,01$ ; 2 — 0,09;  
 3 — 0,36; 4 — 0,64; 5 — 0,72.

На рис. 32, а, б приведены интегральные кривые (5.48), (5.50), которые изображающая точка в реальном движении может полностью и не проходить. Так как кривые части дифференциальных уравнений (5.45) периодичны (явно по  $\nu$ ) с периодом  $2\pi$ , то их решение должно содержать периодическую составляющую примерно с таким же периодом. В результате в плоскостях  $\rho_1 \cos \vartheta$  и  $L \cos \vartheta$  (рис. 32) изображающая точка колеблется вдоль интегральной кривой (5.50) и соответственно (5.48) с периодом, примерно равным периоду  $T_v$  обращения спутника по орбите. Эти колебания происходят с весьма небольшой амплитудой, проходя за период  $T_v$  очень маленький кусочек дуги интегральной кривой. При этом на круговой орбите продвижение изображающей точки «вперед» по интегральной кривой на первом полупериоде обращения спутника по орбите компенсируется таким же отступлением «назад» по интегральной кривой на втором полупериоде, в результате изображающая точка колеблется около среднего неподвижного положения. Иначе говоря, переменные  $L$ ,  $\rho_1$ ,  $\vartheta$  будут колебаться с малой амплитудой около своих начальных значений, не изменяясь в среднем. Физически это легко объяснить равно-

правием всех точек круговой орбиты — динамический напор набегающего потока одинаков в любой точке, поэтому возмущения движения компенсируются в диаметрально противоположных точках орбиты.

Однако на эллиптической орбите дело обстоит иначе. Динамический напор в перигее существенно больше, чем в апогее, поэтому возмущения движения в апогее не могут компенсировать возмущений в перигее. В результате возмущения понемногу накапливаются. На интегральных кривых (см. рис. 32)

изображающие точки за один период  $T_v$  обращения спутника продвигаются «вперед» больше, чем отступают «назад», в результате чего через несколько периодов  $T_v$  обнаруживается существенное изменение параметров  $L$ ,  $\rho_1$ ,  $\vartheta$ . Из-за этого набегаящий поток в перигее меняет свое направление относительно спутника, что обуславливает изменение параметров движения в обратном направлении и т. д. В конечном счете эволюция параметров вращения и ориентации спутника на эллиптической орбите будет носить долгопериодический характер (с периодом в несколько десятков периодов обращения спутника по орбите). На интегральных кривых рис. 32, *a*, *b* в результате этого изображающие точки проходят более или менее существенный отрезок кривой, колеблясь вдоль этого отрезка долгопериодическим образом, причем эти долгопериодические колебания складываются из многих нескомпенсированных полностью короткопериодических (с орбитальным периодом). На рис. 32, *a*, *b* выделены участки кривых, проходимых в реальном движении. Из рис. 32, *b* видно, что величина  $L$  может долгопериодическим образом изменяться в довольно широких пределах, что эквивалентно изменению угловой скорости собственной прецессии спутника. Она то увеличивается, когда составляющая пропеллирующего момента по вектору  $\mathbf{L}$  положительна в среднем, то уменьшается при изменении ориентации пропеллирующего момента относительно вектора  $\mathbf{L}$ . Одновременно меняется режим вращения спутника, характеризуемый величиной  $\vartheta$ , — спутник может переходить из режима кувыркания ( $\vartheta = \pi/2$ ) в режим закрутки ( $\vartheta \simeq 0$ ) и обратно тоже долгопериодическим образом. При этом, как ясно из рис. 32, *b*, режим закрутки ( $\cos \vartheta \simeq 1$ ) и режим кувыркания ( $\cos \vartheta \simeq 0$ ) сопровождаются максимальными значениями величины  $L$  кинетического момента, а переходный режим — минимальными значениями  $L$ .

Можно выделить эволюцию  $L$  в чистом виде, сгладив высокочастотные по  $v$  колебания спутника. Для этого осредним  $V_1$  и  $V_2$  по  $v$ . Имеем

$$J^1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_1 dv = \text{const} \neq 0, \quad (5.51)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_2 dv = 0.$$

Из (5.45) и (5.49) тогда следуют первые интегралы

$$\lambda = \lambda_0 = \text{const}, \quad (5.52)$$

$$|\text{tg } \vartheta|^{2\alpha^*} |\cos \vartheta| \sin^2 \vartheta = C_\vartheta. \quad (5.53)$$

Интегральные кривые (5.53) изображены на рис. 32, *в*.

Из (5.53) следует, что вектор  $L$  не вращается вокруг направленного вектора скорости  $V_d$  в перигее, а движется только в плоскости, содержащей  $V_d$ . Из (5.53) видно (см. рис. 32, в), что если спутник периодически выходит из режима кувыркивания  $\vartheta \approx \pi/2$  в режим осевого вращения  $\vartheta \approx 0$ , то это неизбежно должно сопровождаться колебаниями (с тем же периодом) ориентации вектора кинетического момента в диапазоне, почти равном  $180^\circ$ .

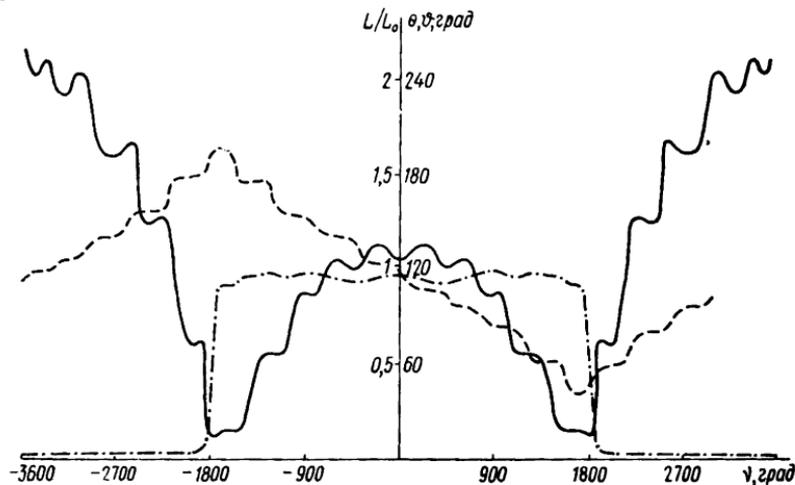


Рис.33. Графики функций  $L(v)/L_0$  (—),  $\theta(v)$  (---),  $\vartheta(v)$  (- · -).

Замегаим, что для  $\theta$  и  $\vartheta$  в среднем по  $\nu$  существует стационарное движение  $\theta_* = \pi/2$  и  $\sin \vartheta_* = \frac{2a_1}{a_1 + a_0}$ . Если начальные условия системы (5.45) совпадают с  $\theta_*$  и  $\vartheta_*$ , то в течение всего времени  $\theta = \theta_*$  и  $\vartheta = \vartheta_*$  (а заодно и  $L = L_0$ ). Чем дальше начальные условия будут отстоять от  $\theta_*$  и  $\vartheta_*$ , тем больше амплитуда их изменения.

На рис. 33 представлены зависимости  $\theta(v)$ ,  $\vartheta(v)$ ,  $L(v)/L_0$ , полученные численным интегрированием уравнений (5.45). Интегрирование проводилось со значениями параметров, обеспечивающими зависящие (по сравнению со значениями, полученными на спутнике «Протон») значения пропеллирующего момента: это сделано, чтобы подчеркнуть эффекты, особенно короткопериодические. Видно, что в неосредненном случае на долгопериодические колебания  $L$ ,  $\theta$  и  $\vartheta$  накладываются высокочастотные колебания  $\nu$ . Период долгопериодических колебаний, в частности  $L$ , в рассматриваемом случае невелик — он равен приблизительно 25 периодам обращения спутника по орбите.

Итак, основные эффекты пропеллирующего момента модель (5.42) качественно учитывает. Проведем количественную оценку момента (5.42) и сравним его с фактически наблюдаемым моментом пропеллирования, действующим на спутник «Протон». С этой целью остановимся подробнее на определении величин  $a_0$  и  $a_1$ . Для спутников «Протон» угол между нормалью к солнечным батареям и продольной осью спутника равен  $\pi/4$ , т. е.  $n_0 = 0,707$ . Из (5.42) видно, что

$$a_0 = \frac{M_{z'}}{\rho V_0^2} \Big|_{\alpha''=1}.$$

Таблица 3

Номер витка	$a_0$ , м <sup>3</sup>	$a_1$ , м <sup>3</sup>	$\frac{2a_0}{a_0 + a_1}$	$\sigma$ , γ
46	20,9	9,91	0,643	2570
47	19,0	8,40	0,606	2300
221	10,8	5,60	0,6829	1010
222	27,5	8,0	0,4507	2000
223	15,5	7,2	0,6343	3650
224	10,3	7,92	0,8658	1000
225	15,1	8,41	0,716	1700
226	13,1	7,09	0,702	2090
Среднее	$16,2 \pm 5,5$	$7,7 \pm 1,2$	$0,64 \pm 0,12$	

Если вектор  $V_0$  направлен по  $z'$ , то  $\cos \delta_1 = \cos \delta_2 = \cos \delta_3 = \cos \delta_4 = n_0$  и в выражении (3.17) все  $\Sigma_i$  равны нулю за исключением

$$\Sigma_{2z'} = 4an_1n_0^2S_*; \quad \Sigma_{3z'} = 4an_1n_0S_*.$$

Отсюда для  $a_0$  получаем выражение

$$a_0 = 4aS_*n_0n_1[2\epsilon n_0 + (1 - \epsilon)v/V_0].$$

Аналогично получаем

$$a_1 = 2aS_*n_0n_1[2\epsilon n_1 + (1 - \epsilon)v/V_0].$$

Следует отметить важный факт: в модели (5.42) пропеллирующий эффект обусловлен действием только отраженного потока (при  $\epsilon = v = 0$ ,  $M_{пр} = 0$ ). Это обстоятельство дает возможность определить параметры взаимодействия потока с поверхностью солнечных батарей спутников «Протон» из сравнения данных расчетной модели с натурными данными. Так как для ИСЗ «Протон»  $n_1 = n_0$ , то  $a_0 = 2a_1$ . Составим безразмерный параметр  $\alpha_1 = \frac{2a_1}{a_0 + a_1} = 0,666$  и сравним его расчетное значение с фактическим значением для некоторых витков полета

спутника «Протон». В табл. 3 приведены данные, полученные в результате обработки магнитометрической информации по ориентации спутника «Протон» относительно геомагнитного поля, здесь же указаны среднеквадратичные величины погрешности обработки магнитометрических данных ( $\gamma$  — единица измерения величины геомагнитного поля,  $1\gamma = 10^{-5}$  Э). Так как максимальное значение показаний магнитометра спутника «Протон» составляло  $6 \cdot 10^4 \gamma$ , предельная погрешность обработки натуральных данных равна 5 %. Из таблицы видно хорошее совпадение среднего и некоторых отдельных значений величины  $\alpha_1$  с расчетными значениями. Это указывает и на удовлетворительное количественное совпадение данных расчетной модели (5.42) с наблюдаемым значением пропеллирующего момента.

### 5.7. Влияние трехосности спутника на динамику пропеллирующего момента

Система уравнений (5.45) исследовалась в предположении, что  $A = B \neq C$ , т. е. для динамически симметричного спутника. В этом случае уравнение для  $\varphi$  не зависит от других переменных и может быть проинтегрировано отдельно. Однако главные центральные моменты инерции спутников «Протон» подчиняются соотношению  $C : B : A = 1,21 : 1 : 0,94$ . Отметим попутно, что так как эллипсоид инерции спутника «Протон» близок к шару, гравитационный момент, действующий на этот спутник, составляет лишь 5 % по сравнению с величиной аэродинамического момента.

Исследуем влияние трехосности спутника на динамику эффекта пропеллирования. Будем при этом исходить из выражения для кинетической энергии. С этой целью запишем выражение для кинетической энергии спутника (4.21) в виде

$$H = 2T = L^2 \left[ \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta - \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \cos^2 \vartheta + \frac{1}{B} \right]. \quad (5.54)$$

Введем величины  $h'$  и  $h$ :

$$h' = \left( \frac{H}{L^2} - \frac{1}{B} \right) : \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right), \quad h = 1 - h'.$$

Подставляя сюда  $H$  из (5.54), получаем

$$h' = \cos^2 \vartheta - \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi; \quad h = \sin^2 \vartheta (1 + \varepsilon_1 \sin^2 \varphi), \quad (5.55)$$

где  $\varepsilon_1 = \frac{C}{A} \frac{B-A}{C-B}$  при  $A \approx B$  малая величина. На рис. 34 представлены экспериментальные кривые изменения  $L$  и  $h$  для

спутника «Протон-2» в зависимости от числа оборотов спутника  $N$  вокруг орбиты. В невозмущенном движении  $L$  и  $h$  остаются постоянными. При этом если  $h = 0$ , то  $\vartheta = 0, \pi$ . Если же  $h = \pm 1 + \varepsilon_1$ , то это соответствует вращению в окрестности поперечной оси (при  $A = B$  строго  $\vartheta = \pi/2$ ).

Изобразим след вектора  $\mathbf{L}$  на единичной сфере в соответствии с (5.55). Как обычно, определим на единичной сфере направления связанных со спутником осей  $x', y', z'$ . Если  $\vartheta = 0, \pi$ ,

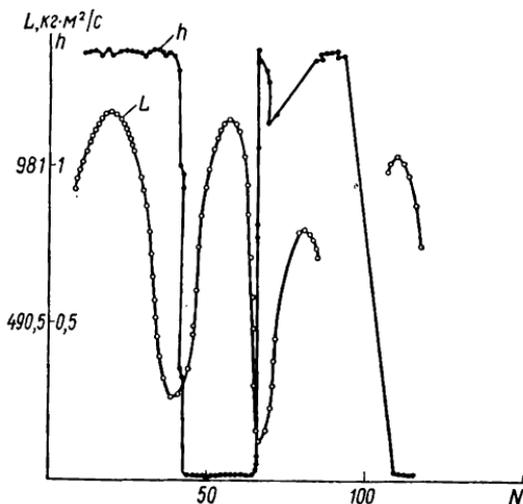
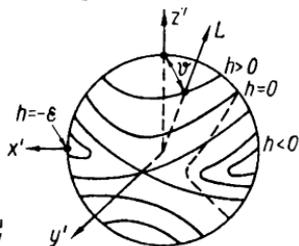


Рис. 34. Эволюция параметров вращения и ориентации спутника «Протон-2».

Рис. 35. Траектории векового движения вектора кинетического момента спутника «Протон» с учетом трехосности его эллипсоида инерции.



т. е.  $\mathbf{L}$  совпадает с осью  $z'$ , то  $h' = 1$ . Если  $\vartheta = \pi/2, \varphi = \pi/2$ , то  $\mathbf{L}$  совпадает с осью  $x'$  и  $h' = -\varepsilon_1$ . Это два предельных значения  $h'$ . Сепаратрисе движения соответствует  $h' = 0$ , при этом, как видно из (5.55), сепаратрисы пересекают ось  $y'$  ( $\vartheta = \pi/2, \varphi = 0$ ). Траектории  $\mathbf{L}$  на единичной сфере в зависимости от  $h'$  описывают различные полюды (рис. 35). В области  $h' > 0$  движение носит характер квазирегулярной прецессии:  $\vartheta$  почти постоянен,  $\varphi$  меняется монотонно. В области  $h' < 0$  движение носит либрационный характер:  $\vartheta$  колеблется с некоторой амплитудой около значения  $\vartheta \approx \pi/2$ ,  $\varphi$  изменяется колебательным образом. Результаты анализа, приведенные в предыдущем параграфе, можно распространить и на случай  $A \neq B \neq C$ , если только  $\cos^2 \vartheta > \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi$ . Последнее неравенство заведомо выполняется, если  $\cos^2 \vartheta > \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta$ , т. е.  $\cos^2 \vartheta > \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} = \cos^2 \vartheta_{кр}$ . Вне полосы  $|\cos \vartheta| < |\cos \vartheta_{кр}|$  движение в плоскостях  $(L, \cos \vartheta)$ ,  $(\vartheta, \cos \vartheta)$  близко к интегральным кривым рис. 32. Внутри этой полосы движение может

качественно исказиться — угол  $\vartheta$  может перейти через значение  $\vartheta = \pi/2$  из области  $\vartheta < \pi/2$  в область  $\vartheta > \pi/2$  или наоборот. В самом деле, составим производную  $dh'/dv$  в силу полных уравнений (5.45) при  $A \neq B$ :

$$\frac{dh'}{dv} = \frac{2\rho_{\pi} \sqrt{\mu P}}{L} (a_0 + a_1) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (1 + \varepsilon_1 \sin^2 \varphi) \times \\ \times (V_1 \cos \theta - V_2 \sin \theta \cos \lambda). \quad (5.56)$$

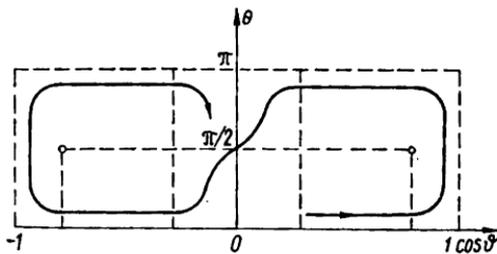


Рис. 36. Движение вектора кинетического момента спутника «Прогон» в плоскости  $(\theta, \cos \vartheta)$ .

Осредним (5.56) по  $v$ . Учитывая (5.51), имеем

$$\frac{\overline{dh'}^v}{dv} = \frac{2\rho_{\pi} \sqrt{\mu P}}{L} \times \\ \times (a_0 + a_1) \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \times \\ \times (1 + \varepsilon_1 \sin^2 \varphi) J^1 \cos \theta. \quad (5.57)$$

Уравнение (5.57) при  $\varepsilon_1 = 0$  переходит в уравнение для  $\vartheta$ . Из (5.57)

видно, что  $\text{sign} \frac{dh'}{dv} = \text{sign} \cos \theta$ . Так как угол  $\theta$  меняется медленно, то  $h'$  может существенно измениться, прежде чем  $\cos \theta$  сменит знак. В области  $h' > 0$  ( $\vartheta < \pi/2$ ),  $\pi/2 < \theta < \pi$  в среднем  $dh'/dv < 0$  и  $h'$ , монотонно уменьшаясь, может попасть в область  $h' < 0$ . В этой области либрационного движения  $\vartheta$  может достигнуть значений  $\vartheta < \pi/2$ . При переходе в область  $\theta < \pi/2$  величина  $h'$  начинает увеличиваться и может снова попасть в область  $h' > 0$ , при этом, возможно, спутник «перевернется» и будет двигаться уже в режиме  $\vartheta > \pi/2$ , так как одному и тому же значению  $h'$  отвечают, как это видно из рис. 35, два режима движения: один с  $\vartheta < \pi/2$ , другой с  $\vartheta > \pi/2$  (переход движения через режим  $\vartheta = \pi/2$  показан штриховой линией, рис. 35). Примерная картина движения в плоскости  $(\theta, \cos \vartheta)$  для такого случая изображена на рис. 36. Отметим, что для спутника «Прогон» значение  $\cos \vartheta_{\text{кр}}$  довольно велико: критическая область  $60^\circ < \vartheta < 120^\circ$ , так что вероятность описываемых эффектов достаточно велика. Разумеется, режимы входа в критическую зону могут быть различными и в зависимости от этого движение может либо систематически переходить из правой полуплоскости ( $\cos \vartheta > 0$ ) в левую ( $\cos \vartheta < 0$ ) и наоборот (см. рис. 36), либо подолгу оставаться в одной полуплоскости, дожидаясь благоприятных условий для перехода в другую полуплоскость.

Возможны случаи, когда изображающая точка, «заскочив» в соседнюю полуплоскость, тут же возвращается назад. Перечисленным ситуациям соответствуют и определенные картины

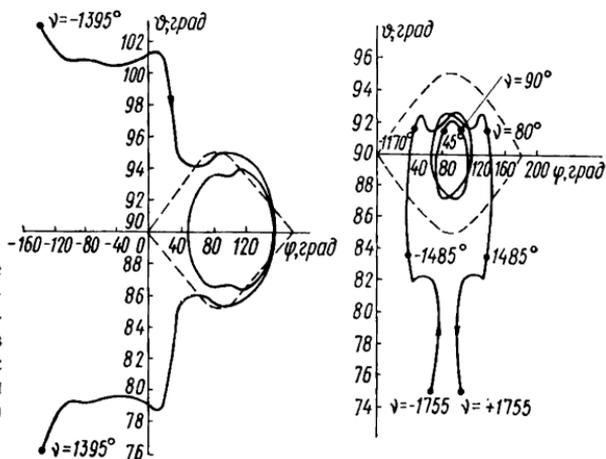


Рис. 37. Движение вектора кинетического момента спутника «Протон» в плоскости  $(\theta, \varphi)$  с учетом трехосности его эллипсоида инерции.

движения в плоскости  $(\theta, \varphi)$ . Эти картины изображены на рис. 37, построенном по данным численного интегрирования исходных уравнений (5.45) при  $A \neq B \neq C$ . Как видно из

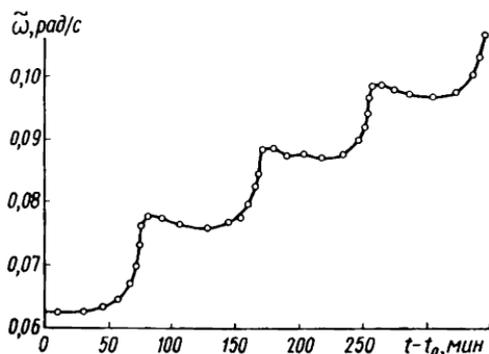


Рис. 38. Экспериментально определенная зависимость от времени отношения  $\tilde{\omega}$  модуля вектора кинетического момента к моменту инерции спутника «Протон-2».

рис. 37, б, смена режима движения определенным образом влияет и на характер колебания величины вектора кинетического момента  $L$ .

Обратимся к экспериментальным данным. На рис. 34 приведены экспериментально определенные кривые изменения величин  $h$  и  $L$  со временем. Видно полное качественное сходство с развитой теорией. На рис. 33, 34 видны основные особенности движения:

переходы из режимов осевой закрутки в режим кувыркания, максимумы модуля кинетического момента в режимах закрутки и кувыркания и минимум этого модуля в промежуточном режиме. Особо точные методы обработки экспериментальных данных [37, 38] позволили выявить и более тонкую

эволюцию движения. Соответствующие результаты были получены автором работы [37] и опубликованы в работе [25]. На рис. 38, взятом из работы [25], видны «горбы» в районах про-

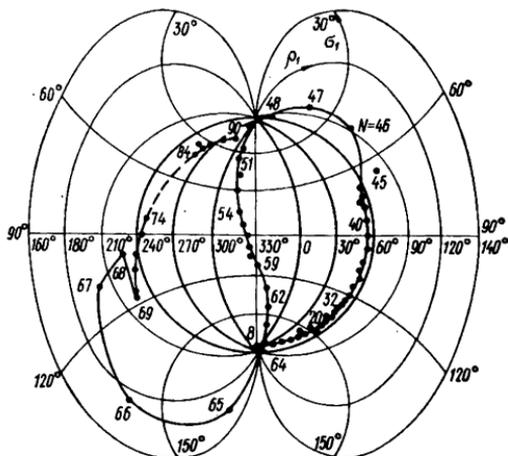


Рис. 39. След вектора кинетического момента спутника «Протон-2» на небесной сфере.

хождения перигея орбиты; они четко прослеживаются и на экспериментальной кривой (рис. 38), и на теоретической (рис. 33). Видны также участки, где модуль вектора кинетического момента почти постоянен в районах апогея орбиты.

Особо интересна экспериментально определенная траектория следа вектора кинетического момента в абсолютном пространстве (рис. 39). Большая амплитуда ( $180^\circ$ ) этого следа и его «восьмерочный» вид — прямое следствие описанных выше динамических эффектов (см. рис. 32, 36). Возможно также, что на картину эволюции (см. рис. 39) повлияла прецессия орбиты спутника «Протон-2». На рис. 40 приведены экспериментальные значения угла  $\vartheta$  в режиме осевой закрутки.

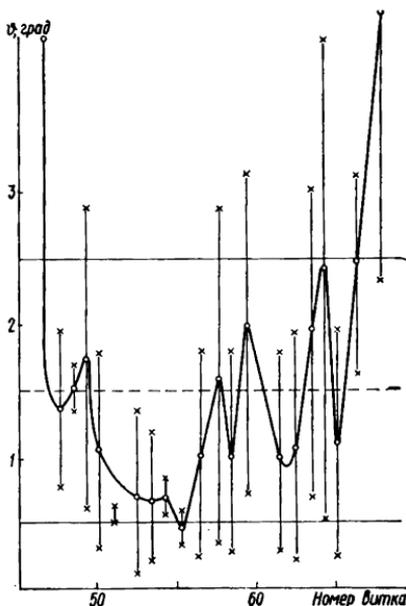


Рис. 40. Изменение угла нутации спутника «Протон-2» в окрестности его малых значений.

### 5.8. Динамика пропеллирующего эффекта при диффузном и диффузно-зеркальном отражениях

Рассмотрим пропеллирующий момент (3.19) в более общей постановке [19, 20]. Изучим схему диффузного отражения. Пренебрежем смещением  $d$ , поскольку оно вызывает уже изученные эффекты восстанавливающего момента. Тогда (3.19) запишется в виде ( $\epsilon = C_0 = C_2 = C_1 = 0$ )

$$\frac{M_x}{\rho V_0^2 S_*} = -\tilde{a}\alpha(\sigma + \alpha'^2); \quad \frac{M_y}{\rho V_0^2 S_*} = -\tilde{a}\alpha'(\sigma + \alpha'^2); \quad (5.58)$$

$$\frac{M_z}{\rho V_0^2 S_*} = \tilde{a}\alpha''(2\sigma + 1 - \alpha'^2),$$

где  $\tilde{a} = 4an_0n_1$ ;  $\sigma = \frac{v}{2V_0}$ .

По аналогии с § 5.6 для (5.58) построим осредненную по  $\psi$  и  $\chi$  систему уравнений, описывающую эволюцию  $L$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$  для

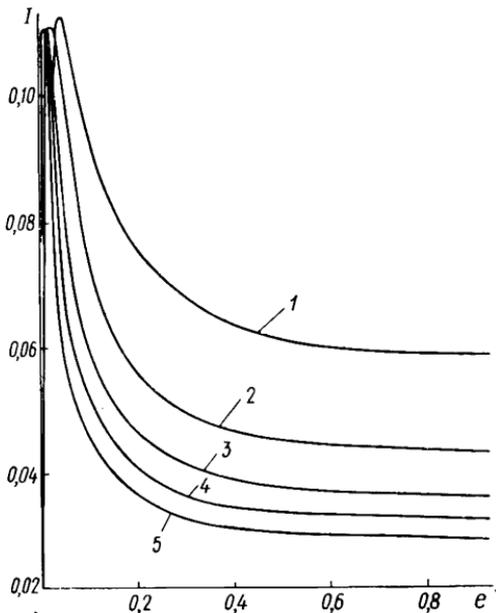


Рис. 41. Зависимость интегрального коэффициента  $I$  от параметров орбиты и атмосферы:  
 1 —  $P/11 = 50$ ; 2 — 100; 3 — 150;  
 4 — 200; 5 — 250.

случая динамической симметрии ( $A = B$ ). Для моментов сил (5.58) эта система имеет вид

$$\frac{dL}{dv} = D \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) \cos \theta [2\kappa I_0 + I \sin^2 \theta];$$

$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{D}{L} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \sin \theta [\kappa I_0 + I \cos^2 \theta];$$

$$\frac{d\vartheta}{dv} = -\frac{D}{L} \sin \theta \cos \theta \cos \theta [3\kappa I_0 + I \cos^2 \theta]; \quad (5.59)$$

$$\frac{d\lambda}{dv} = 0; \quad \kappa = \frac{v}{2\sqrt{\mu/P}}; \quad D = \tilde{a}\rho_{\pi}\sqrt{\mu P};$$

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\rho} \frac{e + \cos v}{(1 + e \cos v)^2} dv; \quad I = J^2.$$

Уравнение для  $\varphi$  не выписано, поскольку  $\varphi(v)$  после решения (5.58) дается квадратурой. На рис. 41, 42 приведены значения  $I$  и  $I_0/I$  в зависимости от  $e$  и  $P/H$ . В (5.59) не учтены члены, со-

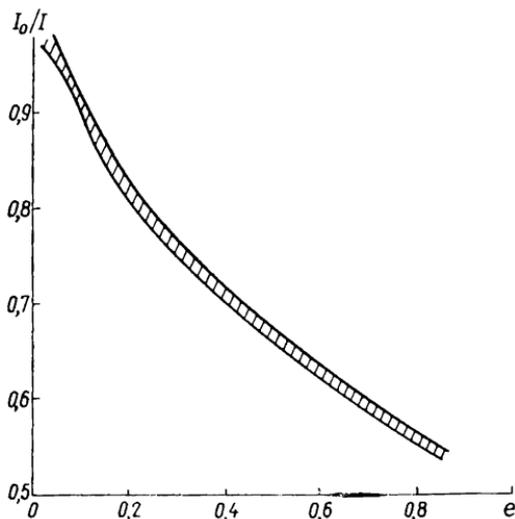


Рис. 42. Зависимость отношения  $I_0/I$  интегральных коэффициентов от параметров орбиты и атмосферы ( $P/H = 50 \div 250$ ).

держащие множителем интегралы  $J_i \ll I_0, I$ . Из системы (5.59) можно получить следующие первые интегралы движения:

$$\lambda = \lambda_0 = \text{const};$$

$$\frac{L(\beta + \cos^2 \theta) \frac{1+3\beta}{2(1+2\beta)}}{(\sin \theta)^{2\beta/1+\beta}} = l = \text{const}; \quad (5.60)$$

$$\frac{(\cos \vartheta)^{3/2} (\sin \theta)^{1+\beta} \text{tg } \vartheta}{(\beta + \cos^2 \theta)^{\beta/1+\beta}} = C = \text{const},$$

где  $\beta = \kappa (I_0/I)$ . На рис. 43 приведены интегральные кривые (5.60). Видно, что, как и для (5.42),  $L, \vartheta$  и  $\theta$  колеблются долго-

периодическим образом. Стационарной точке интегралов (5.60) соответствуют значения

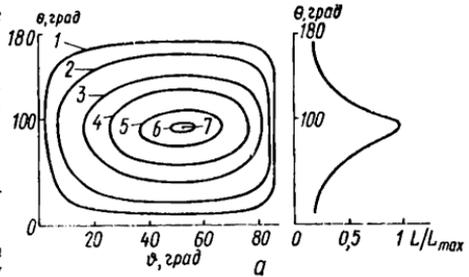
$$\cos \theta^* = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \theta^* = \frac{\pi}{2}; \quad L = L_0. \quad (5.61)$$

В малой окрестности точки (5.61)  $L$  остается постоянным ( $L = L_0 = L_{\max}$ ), а  $\theta$  и  $\vartheta$  колеблются с одинаковой частотой

$$\omega = \sqrt{2} \frac{D \chi I_0}{L_{\max}}, \quad (5.62)$$

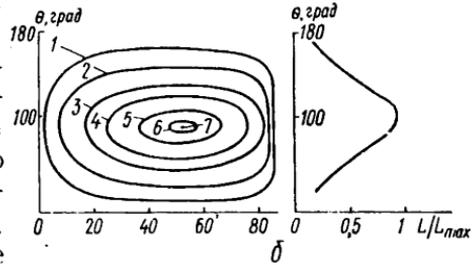
Рис. 43. Интегральные кривые эволюционных уравнений:

$a$  — для  $\beta = 0,1$ : 1 —  $C = 0,051$ ;  
 2 —  $0,162$ ; 3 —  $0,362$ ; 4 —  $0,505$ ;  
 5 —  $0,677$ ; 6 —  $0,754$ ; 7 —  $0,764$ ;  
 $b$  — для  $\beta = 0,9$ : 1 —  $C = 0,043$ ;  
 2 —  $0,138$ ; 3 —  $0,309$ ; 4 —  $0,431$ ;  
 5 —  $0,577$ ; 6 —  $0,643$ ; 7 —  $0,652$ .



что отвечает периоду  $T_n$  колебаний, выраженному через число оборотов по орбите  $T_n = 1/\omega$ .

Введем характерную частоту  $\omega^* = D I / L_{\max}$  и безразмерную частоту  $\bar{\omega} = \omega / \omega^*$ . Тогда согласно (5.62) в окрестности стационарной точки  $\bar{\omega} = \sqrt{2}\beta$ . В общем случае движение



характеризуется аналогичной безразмерной частотой, зависящей не только от  $\beta$ , но и от значения константы  $C$  интеграла (5.60). Такая зависимость, полученная с помощью численного интегрирования уравнений (5.59), приведена на рис. 44, где вместо значений  $C$  указаны эквивалентные им минимальные значения  $\vartheta = \vartheta_{\min}$ , достижимые на данной интегральной кривой, а по оси ординат вместо  $\bar{\omega}$  отложена величина  $\bar{\omega}/2\pi = 1/T$  ( $T$  — безразмерный период колебаний). Величины  $\vartheta_{\min}$  взяты в диапазоне от  $\vartheta_{\min} \approx 55^\circ$ , что соответствует стационарной точке ( $\vartheta = \text{const}$ ), до  $\vartheta_{\min} \approx 0,5^\circ$ , а величина  $\beta$  — на отрезке  $0 \leq \beta \leq 0,9$ . Область значений  $\bar{\omega}/2\pi$  заштрихована.

Перейдем теперь к рассмотрению более общего случая момента пропеллирования [20] — рассмотрим момент пропеллирования в случае диффузно-зеркальной схемы взаимодействия в виде (3.19), положив, как и прежде,  $d = 0$ . Не повторяя выкладок § 5.6, осредненную по  $\psi$  и  $\nu$  эволюционную систему

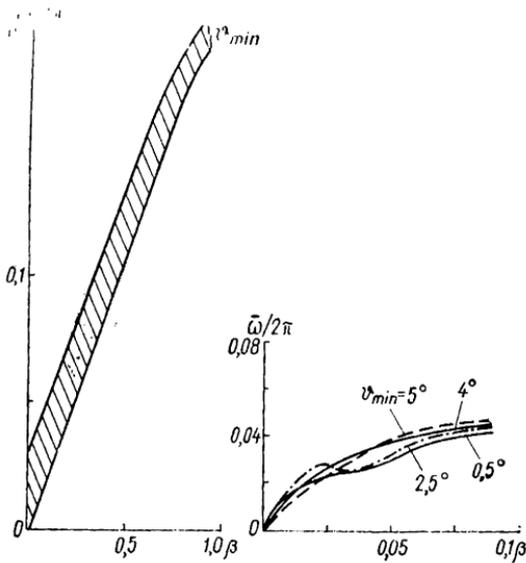


Рис. 44. Зависимость безразмерной частоты долгопериодических эффектов от коэффициента  $\beta$ , определяющего характер отражения молекул, и от начальных данных (справа — зависимость  $\bar{\omega}/2\pi$  от  $\beta$  в диапазоне малых значений параметров).

уравнений для  $L$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $\vartheta$  с учетом момента (3.19) ( $C_0 = C_2 = C' = 0$ ) представим в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dv} &= D \cos \theta \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) (2\kappa I_0 + I \sin^2 \vartheta) (1 - \epsilon) + \right. \\
 &+ \frac{I\epsilon}{32} [32 - 112 \sin^2 \vartheta + 80 \sin^4 \vartheta - 8 \sin^2 \theta (4 - 26 \sin^2 \vartheta + \\
 &+ 25 \sin^4 \vartheta) - n_1^2 (32 - 148 \sin^2 \vartheta + 128 \sin^4 \vartheta) - \\
 &\left. - n_1^2 \sin^2 \theta (80 - 400 \sin^2 \vartheta + 350 \sin^4 \vartheta) \right\}; \\
 \frac{d\theta}{dv} &= \frac{D}{L} \sin \theta \left\{ \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \right) (\kappa I_0 + I \cos^2 \vartheta) (1 - \epsilon) + \right. \\
 &+ \frac{I\epsilon}{64} [48 \sin^2 \vartheta - 60 \sin^4 \vartheta + 12 \cos^2 \theta (8 - 32 \sin^2 \vartheta + \\
 &+ 25 \sin^4 \vartheta) + n_1^2 (24 - 120 \sin^2 \vartheta + 105 \sin^4 \vartheta) - \\
 &\left. - n_1^2 \cos^2 \theta (120 - 600 \sin^2 \vartheta + 522 \sin^4 \vartheta) \right\}; \quad (5.63) \\
 \frac{d\vartheta}{dv} &= \frac{D}{L} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \theta \left\{ (3\kappa I_0 + I \cos^2 \vartheta) (1 - \epsilon) + \right. \\
 &+ \frac{I\epsilon}{32} [120 \sin^2 \vartheta - 48 - 8 \cos^2 \theta (25 \sin^2 \vartheta - 16) -
 \end{aligned}$$

$$-n_1^2(192 \sin^2 \vartheta - 96) - n_1^2 \cos^2 \vartheta (332 \sin^2 \vartheta - 176)] \Big\};$$

$$\frac{d\lambda}{dv} = 0,$$

где в отличие от (5.59)  $\tilde{a} = 4an_0n_1S_*$ .

При выводе (5.63) после осреднения отброшены члены, содержащиеся в качестве множителя интеграл  $I_1 \ll I_0, I$

$$\left( I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho \frac{(e + \cos v) \sin^2 v}{(1 + e \cos v)^2 \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}} dv \right).$$

Если в (5.63) положить  $\varepsilon = 0$ , то система автоматически перейдет в (5.59) для случая чисто диффузного отражения. Если в (5.63) перейти к переменным  $L_1 = L/L_*$ ;  $v_1 = vL_*/DI$  ( $L_* = \text{const}$ ), то увидим, что движение в новых переменных определяется следующими безразмерными параметрами:  $\varepsilon, \kappa, I_0/I, L_0/L_*, \theta_0, \vartheta_0$  ( $L_0, \theta_0, \vartheta_0$  — соответствующие начальные или граничные значения). Уравнения (5.63) имеют стационарную точку при  $\theta^* = \pi/2, L = L^*, \vartheta = \vartheta^*$ , где  $L^*$  — произвольное значение  $L$ , а  $\sin^2 \vartheta^*$  — корень биквадратного уравнения

$$A \sin^4 \vartheta^* + B \sin^2 \vartheta^* + C = 0, \quad (5.64)$$

$$A = I\varepsilon(120 - 210n_1^2);$$

$$B = I\varepsilon(240n_1^2 - 96) + 192\kappa I_0(1 - \varepsilon);$$

$$C = -[24n_1^2 I\varepsilon + 128\kappa I_0(1 - \varepsilon)].$$

Уравнение (5.64) имеет только один положительный корень, меньший единицы. При  $\varepsilon = 0$  получим известное по предыдущему значению  $\sin^2 \vartheta^* = 2/3$  (см. (5.61)).

Уравнения малых колебаний в окрестности стационарной точки имеют вид

$$\frac{d\theta_1}{dv} = -\frac{DI}{2L^*} \theta_1 \sin 2\vartheta^* \left\{ 3\kappa \frac{I_0}{I} (1 - \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{32} [24(5 \sin^2 \vartheta^* - 2) - n_1^2(210 \sin^2 \vartheta^* - 120)] \right\};$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dv} = -\frac{DI}{2L^*} \vartheta_1 \sin 2\vartheta^* \left\{ 3\kappa \frac{I_0}{I} (1 - \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{32} [24(5 \sin^2 \vartheta^* - 2) - n_1^2(192 \sin^2 \vartheta^* - 96)] \right\};$$

$$\theta_1 = 0 - \frac{\pi}{2}; \quad \vartheta_1 = \vartheta - \vartheta^*.$$

Частота  $\omega$  этих колебаний определяется формулой

$$\omega = \frac{DI}{2L^*} |\sin 2\theta^*| \left\{ 3\kappa \frac{I_0}{L} (1 - \epsilon) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{32} [24 (5 \sin^2 \theta^* - 2) - n_1^2 (210 \sin^2 \theta^* - 120)] \right\}^{1/2} \times \\ \times \left\{ 3\kappa \frac{I_0}{L} (1 - \epsilon) + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{32} [24 (5 \sin^2 \theta^* - 2) - n_1^2 (192 \sin^2 \theta^* - 96)] \right\}^{1/2}.$$

Пользуясь этой формулой, нетрудно получить зависимость между параметрами отражения  $\epsilon$  и  $\kappa$  при постоянном значении частоты  $\omega$  (линии уровня  $\omega = \text{const}$ ). При малых значениях параметра  $\kappa$  эти линии уровня можно с довольно большой точностью аппроксимировать прямыми  $\kappa + 0,2\epsilon - 4,55\omega_1 = 0$ , где  $\omega_1 = \omega L^*/2\pi DI$ .

Из-за сложности уравнений (5.63) их дальнейшее исследование было проведено с помощью численного интегрирования. Минимальное значение  $\theta_{\min}$  угла  $\theta$  бралось в диапазоне  $1,5 - 3,5^\circ$ . На рис. 45 показано изменение  $L$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$  во времени по результатам численного интегрирования при фиксированном зна-

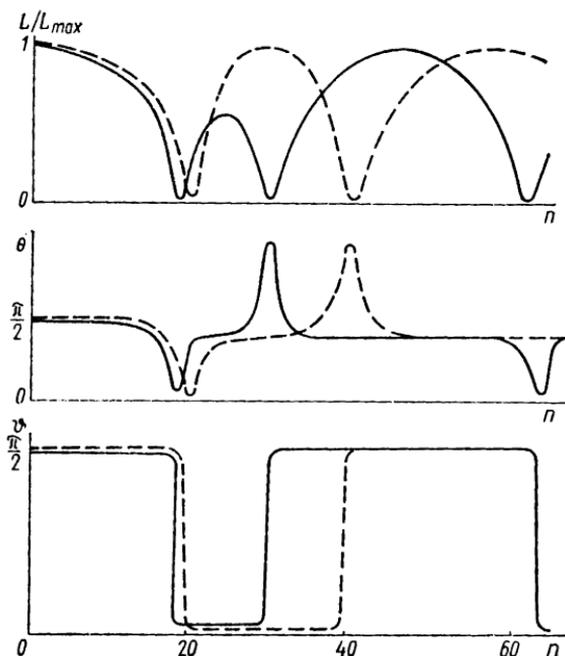


Рис. 45. Зависимость величин  $L$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$  от числа витков  $n$ :

—  $\epsilon = 0,02$ ;  
- - -  $\epsilon = 0$ .

чении  $\kappa = 0,24$  и различных значениях  $\varepsilon$ . Виден основной эффект движения в режиме пропеллирования — долгопериодические колебания переменных  $L$ ,  $\theta$ ,  $\vartheta$ . Период колебаний всех переменных одинаков. Спутник переходит из режима закрутки ( $\vartheta = 0$ ) в режим кувыркания ( $\vartheta = \pi/2$ ) и обратно. В момент перехода спутника из одного режима в другой пере-

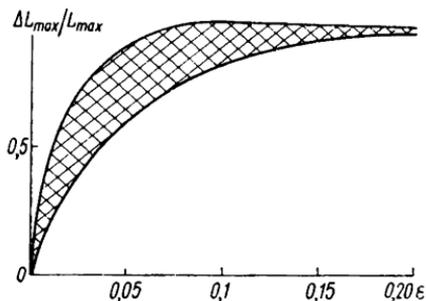


Рис. 46. Зависимость величины  $\Delta L_{\max}/L_{\max}$  от параметров отражения (область значений при  $\kappa$  от 0 до 0,35 заштрихована).

менная  $\theta$  имеет экстремум, близкий к 0 или  $\pi$ . В эти моменты вектор  $L$  почти параллелен скорости центра масс в перигее орбиты  $V_{\text{п}}$ . Переменная  $L$  имеет минимумы в моменты перехода спутника из одного режима в другой и максимумы в средние участки с постоянным режимом. Эти свойства сохраняются при всех значениях коэффициентов  $\varepsilon$  и  $\kappa$ .

На рис. 45 видно качественное отличие в поведении переменной  $L$  при  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon \neq 0$ . При  $\varepsilon = 0$  значения  $L$  во всех точках максимума равны, а при  $\varepsilon \neq 0$  значения  $L$  в двух соседних точках максимума отличаются на  $\Delta L_{\max}$ . Как показали результаты расчетов, отношение  $\Delta L_{\max}/L_{\max}$  сильно зависит от параметра  $\varepsilon$  и гораздо более слабо — от параметра  $\kappa$  ( $L_{\max}$  —

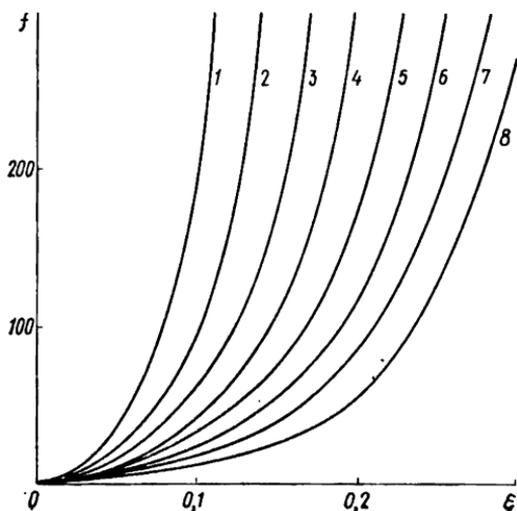


Рис. 47. Зависимость величины отношения времени движения в режиме кувыркания к времени движения в режиме закрутки от параметров отражения: 1 —  $\kappa = 0$ ; 2 — 0,05; 3 — 0,1; 4 — 0,15; 5 — 0,2; 6 — 0,25; 7 — 0,3; 8 — 0,35.

абсолютный максимум величины  $L$ ). Эта зависимость приведена на рис. 46. На рис. 47 показаны зависимости отношения времени движения спутника в режиме кувыркания к времени движения в режиме осевой закрутки от значений параметров отражения. При малых значениях коэффициента зеркальности  $\varepsilon$  это отношение близко к единице. При больших  $\varepsilon$  оно значительно превосходит значение этой величины, наблюдаемое в реальном движении спутников «Протон».

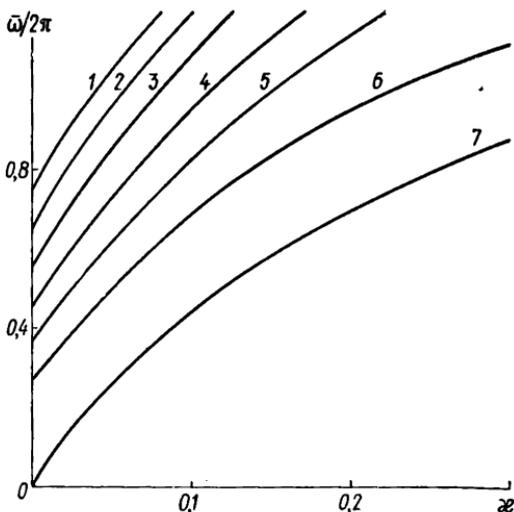


Рис. 48. Зависимость частоты долгопериодических колебаний от параметров отражения:

1 —  $\varepsilon = 0,18$ ; 2 — 0,15;  
3 — 0,12; 4 — 0,09; 5 — 0,06;  
6 — 0,03; 7 — 0.

Основной характеристикой долгопериодических колебаний переменных  $L$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  является период этих колебаний, зависящий от значений параметров отражения  $\varepsilon$  и  $\varkappa$  (здесь  $T_{\text{н}}$  — период долгопериодических колебаний, выраженный через число оборотов по орбите). Зная из эмпирических данных частоту долгопериодических эффектов в движении около центра масс спутников типа «Протон», можно при помощи кривых рис. 48 оценить диапазоны значений параметров отражения. Такая оценка будет проведена в гл. 6.

### 5.9. Средний коэффициент лобового сопротивления спутника

Зависимость аэродинамических сил от ориентации спутника устанавливает взаимосвязь его вращательного движения с движением центра масс. В некоторых случаях космические аппараты даже делают сферической (или близкой к ней) формы, чтобы эту зависимость исключить или уменьшить. Если спутник оснащен трехосной активной системой ориентации, то ин-

формация о его угловом движении априори известна, и его аэродинамические характеристики можно рассчитать заранее с учетом этой информации на весь срок активного существования. Несколько сложнее обстоит дело в случае спутников с одноосной ориентацией. Если ось ориентации спутника является осью его геометрической симметрии (многие спутники, стабилизированные вращением, например спутники «Космическая стрела», и некоторые другие, таковыми и являются), то аэродинамические коэффициенты от угла вращения  $\varphi$  не зависят, а пространственный угол атаки (с точностью до углов колебаний спутника относительно оси стабилизации) можно восстановить, зная ориентацию этой оси в абсолютном пространстве [51]. Если же поверхность спутника обладает существенной асимметрией относительно оси стабилизации, то в качестве его аэродинамических характеристик можно взять их средние по  $\varphi$  значения (в случае больших значений  $\varphi$ ).

Для неориентированных спутников необходимо знать некоторый средний коэффициент сопротивления. Если такой коэффициент осреднить по быстрым вращениям спутника, то он будет зависеть только от вековой эволюции движения вектора кинетического момента относительно центра масс [77].

Для коэффициента лобового сопротивления спутника примем следующую аппроксимацию:

$$c_V = d_0 + d_1 \cos \delta + d_2 \cos^2 \delta. \quad (5.65)$$

С другой стороны, подставляя (2.8) в (2.16), для силы лобового сопротивления, действующей на произвольное выпуклое тело вращения, получаем

$$F = -\rho V_0^2 \int_S \left[ 2\varepsilon (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^3 + (1 - \varepsilon) \frac{v}{V_0} (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n})^2 + (1 - \varepsilon) (\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) \right] ds, \quad (5.66)$$

$$(\mathbf{e}_{V_0} \cdot \mathbf{n}) = n_y \sin \delta + n_z \cos \delta.$$

Коэффициенты  $d_0$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  можно определить из равенства (5.65) и коэффициента силы (5.66) на предельных углах атаки 0,  $\pi/2$ ,  $\pi$ .

Орбиту примем эллиптической, тогда  $\cos \delta$  определяется из (4.26). Чтобы выявить среднее значение  $C_V$  на одном витке орбиты спутника, нужно осреднить (5.65) по периоду прецессии и по периоду обращения; последнее осреднение эквивалентно осреднению по  $v$  с весом  $\frac{dt}{dv} = \frac{P^2}{V \mu P (1 + e \cos v)^2}$ . Заметим еще, что средний коэффициент сопротивления должен отвечать

действительному торможению, т. е. учитывать не только положение тела относительно набегающего потока, но и величину динамического напора этого потока. Ясно, что на эллиптической орбите динамический напор в отличие от круговой орбиты будет различным в различных ее точках, поэтому осреднение по периоду обращения нужно проводить с весом по динамическому напору. Проиллюстрируем это следующим примером. Пусть вытянутый спутник вращается в режиме кувыркания ( $\theta = 90^\circ$ ), т. е. в некоторой «плоскости прецессии», перпендикулярной плоскости орбиты. Если положение плоскости прецессии таково, что при прохождении через перигей она перпендикулярна набегающему потоку, то торможение и, следовательно, средний коэффициент сопротивления будут больше, чем в случае прохождения плоскости через перигей «ребром» к набегающему потоку. В случае круговой орбиты такого отличия не будет, так как если в какой-либо точке орбиты плоскость прецессии перпендикулярна потоку, то всегда найдется точка, в которой плоскость прецессии расположена «ребром» к потоку. Тогда вследствие того, что динамический напор в любой точке круговой орбиты один и тот же, средний коэффициент сопротивления не зависит от положения плоскости прецессии в какой-либо фиксированной точке орбиты. Учитывая все сказанное, определим средний коэффициент аэродинамического сопротивления по формуле

$$\bar{c}_V^{\psi, v} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} c_{V0} V_0^2 \frac{dt}{dv} dv d\psi}{\left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \rho V_0^2 \frac{dt}{dv} dv}. \quad (5.67)$$

Подставляя в (5.67) (5.65), (4.26) и интегрируя с учетом суточного эффекта атмосферы (1.6), получаем

$$\begin{aligned} \bar{c}_V^{\psi, v} = & d_0 + d_1 \left( \frac{J_X}{J_0} \bar{\alpha}_3 - \frac{J_Y}{J_0} \bar{\beta}_3 + \frac{J_Z}{J_0} \bar{\gamma}_3 \right) + \\ & + d_2 \left( \frac{J_{XX}}{J_0} \bar{\alpha}_3^2 + \frac{J_{YY}}{J_0} \bar{\beta}_3^2 + \frac{J_{ZZ}}{J_0} \bar{\gamma}_3^2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{J_{XY}}{J_0} \bar{\alpha}_3 \bar{\beta}_3 + 2 \frac{J_{XZ}}{J_0} \bar{\alpha}_3 \bar{\gamma}_3 + 2 \frac{J_{YZ}}{J_0} \bar{\beta}_3 \bar{\gamma}_3 \right), \quad (5.68) \end{aligned}$$

где

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\rho_\pi} V^2 \frac{P}{\mu (1 + e \cos v)^2} dv;$$

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\rho_\pi} V V_i \frac{P}{\mu (1 + e \cos v)^2} dv; \quad (5.69)$$

$$J_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\rho_\pi} V_i V_j \frac{P}{\mu (1 + e \cos v)^2} dv,$$

а явный вид средних значений направляющих косинусов представлен в (4.6). Введем также интегралы  $\bar{J}_0, \bar{J}_i, \bar{J}_{ij}$ , отличающиеся

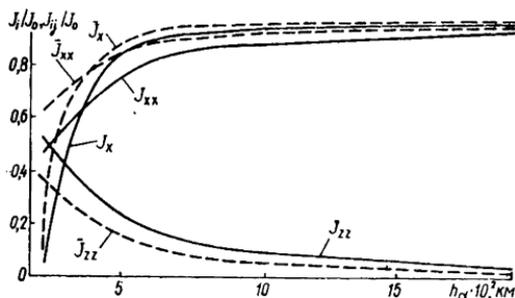


Рис. 49. Интегральные величины, входящие в выражение среднего коэффициента аэродинамического сопротивления спутника:

— осредненные значения по  $v$ ; - - - за сутки.

ся от (5.69) тем, что интегрирование в них ведется за сутки вращения спутника по заданной орбите.

Проведем численный расчет величин  $\frac{J_i}{J_0}, \frac{\bar{J}_i}{J_0}, \frac{J_{ij}}{J_0}$  и  $\frac{\bar{J}_{ij}}{J_0}$  для орбит с перигеем  $h_\pi = 200$  км,  $\Omega = \omega_\pi = 0$  в зависимости от  $h_\alpha, i, \alpha_\odot$  и  $\delta_\odot$ . Анализ этих величин показывает, что они очень слабо зависят от  $i, \alpha_\odot$  и  $\delta_\odot$ , причем величины  $\frac{J_Y}{J_0}, \frac{J_{YY}}{J_0}, \frac{J_{XY}}{J_0}, \frac{J_{XZ}}{J_0}, \frac{J_{YZ}}{J_0}$  и их значения, осредненные за сутки, как минимум на порядок меньше остальных величин. Из рис. 49, где представлены зависимости  $\frac{J_X}{J_0}, \frac{\bar{J}_X}{J_0}, \frac{J_{XX}}{J_0}, \frac{\bar{J}_{XX}}{J_0}, \frac{J_{ZZ}}{J_0}$  и  $\frac{\bar{J}_{ZZ}}{J_0}$  от  $h_\alpha$  для  $i = 45^\circ, \alpha_\odot = 90^\circ, \delta_\odot = 23,5^\circ, h_\pi = 200$  км, видно, что  $J_X/J_0$  и  $J_{XX}/J_0$  асимптотически стремятся к единице, а  $J_{ZZ}/J_0$  — к нулю. На круговой орбите значения  $J_{XY}/J_0$  и  $J_{ZZ}/J_0$  почти совпадают, а  $J_X/J_0$  приблизительно равно нулю. Если пренебречь суточным эффектом атмосферы и ее вращением, то эти величины на круговой орбите совпадали бы точно. Из (5.68) видно, что  $\bar{c}_v$  зависит только от квазипостоянных параметров. За время прохождения одного витка орбиты спутника  $\theta$  и  $\lambda$  можно считать постоянными. Однако  $\theta$  и  $\lambda$  медленно меняются от витка к витку и, следовательно, меняется режим сопротивления.

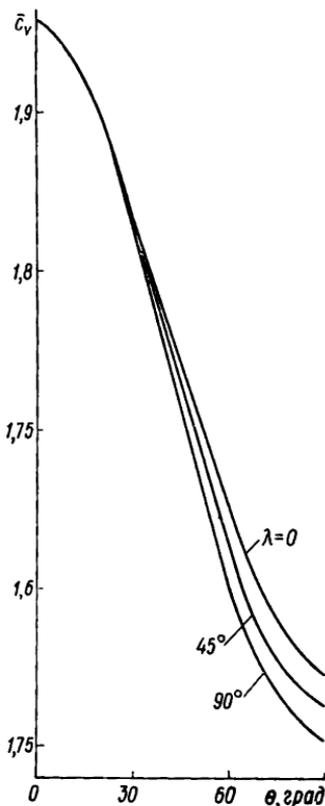


Рис. 50. Средний коэффициент аэродинамического сопротивления цилиндрического спутника.

зависимость  $\bar{c}_v$  от  $\lambda$  существенно слабее, чем от  $\theta$ . В работе [7] приведен пример (рис. 51), когда взаимодействие гравитационных и аэродинамических возмущений способствует изменению  $\theta$  на  $60^\circ$  (от  $90^\circ$  до  $30^\circ$ ) за 25 оборотов спутника по орбите (с последующим возрастанием  $\theta$  до значения, близкого к первоначальному, к 48-му обороту спутника). Как видно, такое изменение  $\theta$  вызывает изменение  $\bar{c}_v$  на 20%. Следовательно, возможны такие случаи, когда движение около центра масс существенно сказывается на движении самого центра масс спутника, вызывая периодические вариации в торможении.

На круговой орбите  $J_{xx}/J_0 \simeq J_{zz}/J_0 \simeq 0,5$  и

$$\bar{c}_v = \left[ 2 - \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \rho_1) \right],$$

Исследуем зависимость (5.68) на примере вытянутого цилиндрического спутника. При наличии диссипативных сил вращение такого спутника стремится к режиму кувыркания [7]. Положим  $\vartheta = \pi/2$  и  $\varepsilon = v/V_0 = 0$ . Из (2.13) следует, что для цилиндра в этом случае  $d_0 = 2RL$ ,  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = -RL$ . Отнесем, как это принято,  $\bar{c}_v$  к характерной площади цилиндра  $S = 2RL$ . Подставляя эти значения в (5.68) и пренебрегая всеми величинами, кроме  $J_{xx}/J_0$  и  $J_{zz}/J_0$ , получаем

$$\bar{c}_v = \left\{ 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{J_{xx}}{J_0} \sin^2 \theta + \frac{J_{zz}}{J_0} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \lambda) \right] \right\}. \quad (5.70)$$

Зависимость  $\bar{c}_v$  от  $\theta$  и  $\lambda$  в соответствии с (5.70) представлена на рис. 50. Значения  $J_{xx}/J_0$  и  $J_{zz}/J_0$  соответствуют  $h_\alpha = 1200$  км. Напомним, что, если  $\lambda = 0$ , вектор кинетического момента спутника лежит в плоскости орбиты, причем при  $\theta = 0$  он параллелен, а при  $\theta = \pi/2$  перпендикулярен вектору скорости спутника в перигее орбиты. Поскольку  $J_{zz}/J_0 \ll J_{xx}/J_0$ , то

где  $\cos^2 \rho_1 = \sin^2 \theta \cos^2 \lambda$ . Вековых возмущений на круговой орбите аэродинамические силы не вызывают, а вековые гравитационные возмущения не изменяют угла  $\rho_1$ , поэтому величина  $\dot{c}_V$  может остаться неизменной, если только угол  $\rho_1$  не изменится за счет влияния других возмущений, например магнитных.

Таким образом, на торможение спутника могут влиять долгопериодические вариации, обусловленные эволюцией вращательного движения спутника. Это следует учитывать при анализе орбит, при определении плотности атмосферы и в других подобных задачах.

В работе [45] с помощью строгого асимптотического анализа во втором по малому параметру приближении получено, что влияние быстрых вращений спутника на его лобовое сопротивление сводится, как и в первом приближении, к осреднению силы лобового сопротивления по быстрым угловым переменным. Второе же приближение приводит к появлению боковых сил и моментов, зависящих от угловой скорости вращения тела, аналогично тому, как это получено в гл. 2.

### **5.10. Влияние добавочных факторов на вращательное движение спутника**

В предыдущих параграфах исследовалась динамика вращательного движения спутника под действием только аэродинамических сил, при этом орбита спутника считалась невозмущенной. Однако на спутник в той или иной мере действуют возмущающие моменты сил другой природы (гравитационные, магнитные, солнечного давления) и орбита спутника постоянно эволюционирует. В работе [7, гл. 8] проведен анализ вековых возмущений во вращательном движении спутника при совместном влиянии гравитационных и аэродинамических моментов, а также эволюции орбиты. Изложим основные результаты этого анализа.

Фактические орбиты искусственных спутников эволюционируют под влиянием различных возмущающих факторов. Для орбит искусственных спутников Земли наиболее существенными возмущающими факторами являются влияние атмосферы и сжатия Земли. Как известно [64], влияние атмосферы в первом приближении вызывает изменения не положения орбиты в пространстве, а только ее формы. Такое изменение орбиты при исследовании вращательного движения спутников легко можно учесть параметрически (введением в соответствующие формулы вместо постоянных значений фокального параметра  $P$  и эксцентриситета их медленно меняющихся со временем значений). Сжатие Земли вызывает [64] изменение поло-

жения орбиты в пространстве. Тот факт, что два главных возмущающих фактора — сопротивление атмосферы и отклонение гравитационного поля от центрального — влияют на эволюцию разных оскулирующих элементов, играет важную роль в решениях обратных задач космической баллистики. Благодаря этому обстоятельству были построены эмпирические модели верхней атмосферы Земли и найдены коэффициенты разложения в ряд геопотенциала (и гравитационного потенциала других небесных тел).

Как известно, сжатие Земли вызывает вековые уходы долготы восходящего узла  $\Omega$  и долготы перигея  $\omega_\pi$  [64]:

$$k_\Omega = \frac{d\Omega}{dv} = -\frac{\bar{\epsilon}R_3^2}{P^2} \cos i; \quad (5.71)$$

$$k_{\omega_\pi} = \frac{d\omega_\pi}{dv} = \frac{\bar{\epsilon}R_3^2}{2P^2} (5 \cos^2 i - 1).$$

Здесь  $R_3$  — экваториальный радиус Земли;  $\bar{\epsilon} = 0,0016331$  — безразмерная величина, определяемая величиной сжатия Земли. Изменение положения орбиты в соответствии с (5.71) приведет к тому, что перигейная система координат, считавшаяся ранее абсолютной, начинает вращаться. Движение вектора кинетического момента спутника  $\mathbf{L}$  во вращающейся системе координат можно учесть, найдя соотношения, связывающие углы  $\theta$  и  $\lambda$  и скорости регрессии узла  $k_\Omega$  и перигея  $k_{\omega_\pi}$  орбиты. Взяв производные  $d\theta/dv$  и  $d\lambda/dv$  в этих соотношениях и добавив их к уравнениям (4.38), получим систему уравнений, описывающих ориентацию вектора  $\mathbf{L}$  во вращающейся согласно (5.71) системе координат. Численное интегрирование этой системы позволяет сделать следующее заключение. Угол  $\lambda$  прецессии вектора кинетического момента изменяется, монотонно возрастая со скоростью, колеблющейся около некоторого среднего значения, близкого к скорости аэродинамической прецессии, определяемой формулой (4.39). Угол  $\theta$  нутации вектора кинетического момента совершает почти периодические колебания, причем период колебаний  $\theta$  приблизительно совпадает со временем изменения угла  $\lambda$  на  $2\pi$ , т. е. с периодом вековой прецессии. Разность между наибольшим и наименьшим значениями угла  $\theta$  порядка  $10$ — $30^\circ$ , т. е. колебания угла нутации более значительны, чем при учете только аэродинамических сил. Фактически это означает, что за счет эволюции орбиты (ухода узла орбиты) полюс прецессионно-нутационного движения вектора кинетического момента несколько смещается. Картина движения спутника около центра масс выявляет своеобразную гироскопическую стабилизацию относительно направления

перигейной касательной, т. е. направления скорости центра масс в точке наибольшей интенсивности аэродинамических сил.

Если включить в рассмотрение и гравитационные моменты, то видно, что аэродинамическая и гравитационная прецессии происходят вокруг разных осей: аэродинамическая — вокруг перигейной касательной, гравитационная — вокруг нормали к плоскости орбиты. Поэтому при взаимодействии аэродинамических и гравитационных возмущений получается, вообще говоря, сложное прецессионно-нутационное движение около некоторого полюса, который является подвижным вследствие эволюции орбиты.

Уравнения, описывающие совместное влияние гравитационных и аэродинамических сил и эволюции орбиты, также поддаются аналитическому исследованию. Анализ траекторий следа вектора кинетического момента спутника на единичной сфере при совместном влиянии гравитационных и аэродинамических сил позволяет провести детальную классификацию движения, определить координаты полюсов и исследовать их устойчивость. Начальные параметры движения и соотношения между величинами гравитационных и аэродинамических моментов обуславливают различные классы траекторий вектора кинетического момента. При этом выявляются следующие закономерности.

1. Почти все классы траекторий обусловлены зависимостью коэффициента момента аэродинамических сил от угла атаки. Характер этой зависимости в некоторых случаях оказывает существенное влияние на движение вектора кинетического момента спутника.

2. Аэродинамические возмущения обладают определенной устойчивостью по отношению к гравитационным. Чтобы траектории аэродинамического типа полностью исчезли, гравитационные возмущения должны быть бесконечно велики по сравнению с аэродинамическими. Траектории же гравитационного типа исчезают уже при конечном значении отношения аэродинамических возмущений к гравитационным.

Совместное влияние гравитационных и аэродинамических сил и регрессии орбиты приводит к суперпозиции указанных выше явлений, влияние регрессии узла — к фиксированному смещению полюса гравитационно-аэродинамической траектории, влияние регрессии перигея — к эволюции траектории (пульсации, уходу полюса прецессии) без существенного искажения основной формы траектории. Во всех случаях наблюдается своеобразная устойчивость движения относительно орбиты — движение относительно эволюционирующей орбиты мало

отличается при прочих равных условиях от движения относительно неподвижной орбиты.

Уже отмечалось, что влияние зонального ветра в верхней атмосфере приводит к изменению наклона орбит спутников  $i$ . В этом случае орбита вращается вокруг линии узлов, т. е. вокруг вектора

$$\mathbf{k}_i = \cos \Omega \mathbf{e}_z + \sin \Omega \mathbf{e}_{\bar{x}}.$$

К аналогичной эволюции  $i$  приводит и сила Магнуса. Проведем сравнительную оценку этих сил на примере сферического спутника. Взяв отношение этих сил из работы [52] и соотношения (2.12), получим

$$\frac{F_y^-}{F(\omega)} = \frac{3R_0\omega_3 \sin i \cos u}{2\omega R \sin \delta}.$$

Для оценки по максимуму положим  $\sin \delta = \cos u = 1$ ,  $\omega = 4\pi$ ,  $R = 1$  м,  $h = 500$  км. В результате получим, что  $F_y^-/F(\omega) \approx 1$  для  $i < 1,5^\circ$ , т. е. эти силы сравнимы практически на экваториальных орбитах, где  $F_y^-$  стремится к нулю. Таким образом, возмущение наклона орбиты вследствие эффекта Магнуса на два порядка слабее, чем вследствие эффекта вращения атмосферы.

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ДИНАМИКЕ  
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКОВ**

Большинство современных моделей верхней атмосферы Земли построено по данным об эволюции орбит ИСЗ [52]. Эти модели носят название эмпирических. Они не отражают всего многообразия физико-химических и динамических процессов верхней атмосферы, сильно зависят от трудно прогнозируемых параметров, отражающих солнечно-земные связи, и заведомо ограничены. Однако они построены на основе информации об эволюции орбит спутников и во многих случаях (при удачном прогнозе индексов  $F_{10,7}$ ,  $A_p$ ,  $k_p$  и т. д.) дают хорошие результаты в баллистических расчетах.

Кинетическая энергия поступательного движения спутника достаточно велика и на ее фоне эффект аэродинамического торможения (за исключением последних витков спутника) носит эволюционный характер. Кинетическая энергия вращательного движения спутника особенно в установившихся режимах его вращения существенно меньше поступательной энергии и вектор его кинетического момента более чувствителен к внешним возмущениям, в том числе к аэродинамическим. В широком диапазоне высот на вращательное движение спутника оказывают влияние сравнимые по величине гравитационные, магнитные и аэродинамические моменты. В этом случае при решении обратных задач (определении параметров атмосферы, схем взаимодействия или других параметров) по данным о вращательном движении спутников возникают трудности разделения эффектов воздействия на спутник гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов.

Существуют, однако, эффекты, присущие одному из моментов. Таким, в частности, является эффект пропеллирования, рассмотренный в гл. 5. Выявление этого эффекта в чистом виде естественно приводит к возможности решить ряд обратных задач. В работах [19, 20, 81] такие задачи были рассмотрены для оценки параметров схем взаимодействия для моделей чисто диффузного и диффузно-зеркального отражений. В настоящей главе рассмотрены обратные задачи, отражающие динамику эффекта пропеллирования, восстанавливающего и диссипативного аэродинамических моментов.

## 6.1. Определение параметров диффузной схемы взаимодействия из эффекта пропеллирования спутников «Протон»

В § 5.6—5.8 была построена модель движения спутников «Протон» относительно центра масс. Основная тенденция вращательного движения этих спутников — долгопериодические колебания  $L$ ,  $\theta$  и  $\vartheta$  соответствует экспериментально наблюдаемой (см. рис. 34, 38—40). На рис. 39 изображен след вектора кинетического момента спутника «Протон-2» на небесной сфере на первых 90 витках полета. За это время он дважды прошел в окрестности каждого из полюсов Земли. Рассмотрим для начала модель диффузного отражения и попробуем найти динамический параметр, сильно зависящий от коэффициента диффузности  $\bar{\kappa}$ . Используем рис. 44. Из рисунка видно, что безразмерная частота  $\bar{\omega}$  долгопериодических колебаний спутника около центра масс в широком диапазоне начальных данных почти не зависит от них (от  $v_{\min}$ ) и сильно зависит от коэффициента диффузности (т. е. от  $\beta$ ). Это позволяет оценить значение  $\beta$  (и, значит,  $v$ ) по экспериментальным данным о периоде долгопериодических колебаний спутника, тем более что экспериментально известна и величина  $\vartheta_{\min}$ . Необходимые экспериментальные данные приведены на рис. 34 и 40. Эволюция  $L \left( \dot{\psi} = \frac{L}{A} \right)$  была получена из обработки магнитометрических измерений методом наименьших квадратов [14, 35]. Значения  $h = \sin^2 \vartheta (1 + \varepsilon_1 \sin^2 \varphi)$  при  $\varepsilon_1 = 0$  определяют эволюцию  $\vartheta$ . На рис. 40 видны неравномерные колебания  $\bar{\vartheta}$ , являющиеся отражением двух факторов.

1. Влияние трехосности эллипсоида инерции спутника. Так как на каждом витке определяется лишь одно значение  $\bar{\vartheta}$ , а эта величина за счет трехосности спутника меняется в некоторых пределах с частотой более высокой, чем частота обращения по орбите, то рис. 40 неизбежно дает лишь стробоскопическую картину изменения  $\bar{\vartheta}$  от витка к витку.

2. Неточность определения  $\bar{\vartheta}$  в рамках принятого метода статистической обработки информации [14, 35]. Как видно из рис. 40, неточности невелики и для сравнения данных наблюдений с теорией можно принять

$$\vartheta_{\min} = (1,5 \pm 1)^\circ. \quad (6.1)$$

Кроме того, по данным рис. 34 можно оценить период долгопериодических колебаний, а также величину  $L_{\max} = A\dot{\psi}_{\max}$ .

Пусть экспериментально определены период  $T_n^3$  долгопериодических колебаний, выраженный через число  $N$  оборотов спутника по орбите, минимальное  $\vartheta_{\min}^3$  и максимальное  $L_{\max}^3$  значения, достигаемые в процессе этих долгопериодических колебаний. Тогда можно вычислить

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{2\pi}\right)_3 = \frac{L_{\max}^3}{2\pi N a \rho_{\pi} V_{\pi} r_{\pi} I}. \quad (6.2)$$

С другой стороны, по зависимостям  $\bar{\omega}/2\pi$  от  $\beta$  и  $\vartheta_{\min}$ , приведенным на рис. 44 для известного  $\vartheta_{\min}$ , находим единственную кривую  $\bar{\omega}/2\pi = f(\beta)$  и, сравнивая с рассчитанной по (6.1), находим  $\beta$ , удовлетворяющее значению  $(\bar{\omega}/2\pi)_3$ . По экспериментальным данным ([15], рис. 33, 40) для первых 220 витков полета спутника «Протон-2» можно принять  $N = (57,5 \pm 2,5)$  витков,  $L_{\max} = (981 \pm 142)$  кг · м<sup>2</sup>/с,  $a = (25 \pm 2,5)$  м<sup>3</sup>,  $r_{\pi} = 6,56 \cdot 10^6$  м,  $P = 6,777 \cdot 10^6$  м,  $e = 0,033$ ,  $V_{\mu}/P = = 7,67 \cdot 10^3$  м/с,  $V_{\pi} = 7,92 \cdot 10^3$  м/с. Положим, что на рассматриваемом интервале движения  $\Delta P = \pm 5$  км, тогда

$$\frac{\Delta(V_{\pi} r_{\pi})}{V_{\pi} r_{\pi}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{P} \approx \pm 0,4 \cdot 10^{-3}.$$

Принимая  $H = 30 \div 100$  км, получаем (см. рис. 41) для  $e \approx 0,033 \pm 0,002$   $I = 0,090 \pm 0,015$ . Наконец,  $\rho_{\pi} = 5,4 \times \times 10^{-10}$  (10 ± 2) кг/м<sup>3</sup>.

Разброс величины  $L_{\max}$  вызван тем, что на рассматриваемом интервале времени величина  $L$  достигает нескольких максимумов (они лежат в указанных пределах). Точность экспериментального определения величины  $L$  на два порядка выше, чем указанный разброс. Подставляя численные значения в (6.2), получаем

$$\frac{\bar{\omega}}{2\pi} = 0,049 \pm 0,014. \quad (6.3)$$

На определяемую величину влияет неточность параметров  $\rho$ ,  $H$  (и, как следствие,  $I$ ). Разброс величины  $\bar{\omega}/2\pi$  достигает 32 % среднего значения. Величину  $\vartheta_{\min}$  примем в виде (6.1). Из рис. 44, где приведена область значений  $1/T$ , принимаемых в диапазоне  $0 \leq \beta \leq 0,1$ ,  $0,5^\circ \leq \vartheta_{\min} \leq 2,5^\circ$ , видим, что значениям  $\bar{\omega}/2\pi$  (6.3) в области значений  $\vartheta_{\min}$  (6.1) соответствует весьма узкий диапазон значений  $\beta = 0,065 \begin{cases} +0,07, \\ -0,035. \end{cases}$  На рис. 42 видно, что  $I_0/I \approx 0,97$  с высокой точностью в принятом диапазоне  $e$  и  $P/H$ . Поскольку  $\kappa = v/\sqrt{\mu P} = \beta (I_0/I)$  и

и  $C_m$ , то, подставляя численные значения, получаем

$$\kappa \approx 0,067 \begin{cases} + 0,072, \\ - 0,036. \end{cases}$$

В размерном виде

$$C_m \approx 580 \begin{cases} + 620 \text{ м/с}, \\ - 310 \text{ м/с}. \end{cases}$$

Если эту скорость отнести к скорости движения центра масс спутника ( $V_0 = 7,92 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ ), получим

$$\bar{\kappa} = \frac{C_m}{V_0} \approx 0,034. \quad (6.4)$$

Итак, коэффициент диффузности весьма мал. Из возможного интервала  $0 \leq \kappa \leq 1$ , как видно из (6.4), он принимает значения порядка 0,034. Следовательно, соударение молекулы с поверхностью спутника весьма близко к абсолютно неупругому удару. Наиболее вероятная скорость диффузно отраженных молекул  $C_m = \sqrt{2RT_r}$  связана с коэффициентом аккомодации энергии (1.17). Будем считать поток гипертепловым, что для высот полета спутников «Протон» вполне справедливо. Пренебрежем, считая температуру поверхности спутника низкой, энергией  $E_w$  отраженных от поверхности частиц с температурой поверхности  $T_w$  по сравнению с энергией  $E_r$  отраженных частиц, частично отдавших энергию поверхности спутника. Тогда, подставляя в (1.17) вместо  $E$  кинетическую энергию частиц  $mV^2/2$ , получаем

$$\sigma_E \approx 1 - \frac{C_m^2}{V_0^2} = 1 - \bar{\kappa}^2,$$

откуда  $\sigma_E \approx 0,98$ . Этот результат несколько выше оценки  $\sigma_E$  в натуральных условиях [87]. Оценку  $\sigma_E$ , приведенную выше, можно уточнить, используя более общую модель диффузно-зеркального отражения, а также рассмотрев несколько моделей атмосферы, например CIRA-65 [82] и модель Института космических исследований АН СССР [60].

## 6.2. Определение параметров диффузно-зеркальной схемы взаимодействия из эффекта пропеллирования спутников «Протон»

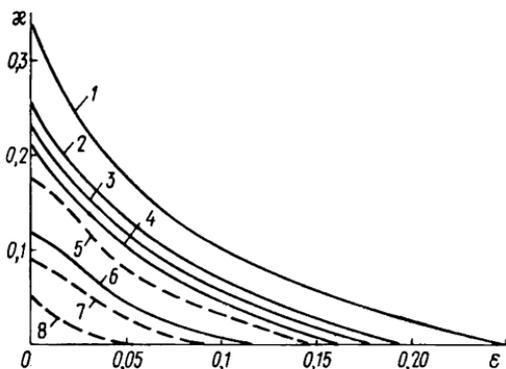
Рассмотрим модель диффузно-зеркального отражения. Представим по-иному зависимость между безразмерной частотой и параметрами отражения, приведенную на рис. 48. Для этого построим зависимость между параметрами  $\epsilon$  и  $\kappa$  при постоянном

значении безразмерной частоты (линии уровня  $\bar{\omega}/2\pi = \text{const}$ ). Напомним, что при расчете кривых принимались  $\vartheta_{\min} = (1,5 \div 3,5)^\circ$ .

Как видно из рис. 51, при заданном значении безразмерной частоты параметр  $\kappa$  принимает свое наибольшее значение при  $\varepsilon = 0$ , т. е. значение для параметра  $\kappa$  в чисто диффузной модели отражения является верхней границей для его величины в зеркально-диффузной модели. Рассмотрим модель атмосферы Института космических исследований АН СССР [60].

Рис. 51. Зависимость между параметрами отражения при постоянном значении безразмерной частоты долгопериодических колебаний:

1 —  $\bar{\omega}/2\pi = 0,097$ ; 2 — 0,078;  
3 — 0,075; 4 — 0,072; 5 —  
0,063; 6 — 0,053; 7 — 0,047;  
8 — 0,031.



Принимаем  $\rho_{\pi} = 3,14 \cdot 10^{-10} (10 \pm 1) \text{ кг/м}^3$ . Если учитывать только неточности в определении периода  $N$ , то  $(\bar{\omega}/2\pi)_z = 0,075 \pm 0,003$ . В этом случае (рис. 51, кривые 2—4)  $\kappa < 0,26$ ,  $\varepsilon < 0,19$ . Если учитывать также неточность других данных, то  $(\bar{\omega}/2\pi)_z = 0,075 \pm 0,022$  и (рис. 51, кривые 1—6)  $\kappa < 0,36$ ,  $\varepsilon < 0,25$ .

При использовании модели атмосферы CIRA-65 получим следующие значения безразмерной частоты: при учете только неточности определения периода  $(\bar{\omega}/2\pi)_z = 0,047 \pm 0,002$ , при учете неточности других данных  $(\bar{\omega}/2\pi)_z = 0,047 \pm 0,016$ . В последнем случае  $\varepsilon < 0,14$ ,  $\kappa < 0,18$  (рис. 51, штриховые линии). Отметим, что эти значения параметров меньше значений, полученных с помощью первой модели атмосферы.

При значениях  $\kappa < 0,35$  и  $\varepsilon > 0,1$  (см. рис. 47) значение отношения времени движения спутника в режиме кувыркания к времени движения в режиме осевой закрутки больше 10, что значительно превосходит наблюдаемое значение этой величины. Это позволит получить уточненную оценку для коэффициента зеркальности  $\varepsilon < 0,10$ , что в свою очередь позволяет сделать такой вывод: не более 10 % молекул отражаются зеркально, а наиболее вероятная скорость молекул, отражающихся

диффузно,  $C_m$  не превосходит 3100 м/с. (Модель атмосферы CIRA-65 дает более жесткую оценку для скорости:  $C_m < 1600$  м/с.) Если считать отражение чисто диффузным, то можно вычислить значения коэффициента аккомодации  $\sigma_E$ , соответствующие приведенным значениям наиболее вероятной скорости диффузного отражения ( $\epsilon = 0$ ). Для модели, предложенной в работе [60],  $C_m \approx 2100$  м/с,  $\sigma_E = 0,93$ , для модели CIRA-65  $C_m \approx 800$  м/с,  $\sigma_E = 0,99$ , что хорошо согласуется с результатами для чисто диффузной схемы.

В работе [68] приведены экспериментальные данные об эволюции ориентации спутника «Протон-4», а также спутника

Таблица 4

Спутник	$L_{\max}^0$ , кг·м <sup>2</sup> /с	Номер витка	$L_{\max}/N$	$(L/N)_*$	$\rho_*(L/N)_*$
«Протон-2» витки 1—220	981	57,5	1,74	1	1
570—585	245	17,5	1,43	0,82	0,65—0,7
«Протон-4» витки 230—245	324	27,5	1,20	0,69	0,69

«Протон-2» на более поздних витках его орбиты. Необходимые для расчетов данные об этих спутниках приведены в табл. 4 ( $(L/N)_*$  — отношение  $L_{\max}^0/N$  к соответствующему значению для спутника «Протон-2» на первых витках полета,  $\rho_*$  — отношение плотностей атмосферы для соответствующих высот перигея). Плотность атмосферы во всех случаях бралась по модели CIRA-65.

Для определения величины  $(\bar{\omega}/2\pi)$  по формуле (6.2) достаточно значение  $(\bar{\omega}/2\pi)^0 = 0,047 \pm 0,016$  для спутника «Протон-2» на 1—220 витках орбиты умножить на соответствующее значение, стоящее в последней столбце таблицы. Для спутников «Протон-2» на 570—585 витках орбиты и «Протон-4» на 230—245 витках получаем  $(\bar{\omega}/2\pi)^0 = 0,033 \pm 0,010$ . Для этого значения безразмерной частоты не более 9 % молекул отражаются зеркально, а наиболее вероятная скорость диффузного отражения не превосходит 800 м/с, что соответствует «более неупругому» характеру отражения по сравнению с первыми витками спутника «Протон-2».

Следует отметить, что приведенные выше оценки параметров схем взаимодействия можно уточнить. В модели пропеллирующего эффекта мы пренебрегли затенением лопастей спутника его корпусом, интерференцией частиц, т. е. многократным пе-

реотражением частиц от поверхности спутника, конечностью скоростного отношения  $s$ . В динамических уравнениях не были учтены гравитационные (составляющие для спутников «Протон» 5 % аэродинамических) моменты и диссипативные факторы.

### 6.3. Определение параметров атмосферы по данным о торможении спутника «Протон-2» с учетом его ориентации

Анализ фактической ориентации спутников «Протон» позволяет восстановить фактическое значение его аэродинамических характеристик, в том числе и коэффициента лобового сопротивления. Это в свою очередь даст возможность определить плотность атмосферы по данным о торможении спутника. Такие величины были определены [23, 24] для спутника «Протон-2». Следует отметить, что коэффициент лобового сопротивления спутника считается постоянным. При расчете  $c_V(\delta)$  учтем долгопериодические эффекты в эволюции вращения спутника, усреднив  $c_V$  по быстрому переменным  $\psi$  и  $\varphi$  в соответствии с методом, изложенным в § 5.9. Рассчитанные значения  $c_V(\delta)$  используем для определения вариаций плотности атмосферы на высотах 180—200 км для периода средней солнечной активности (ноябрь — декабрь 1965 г.) при заданных параметрах взаимодействия потока с поверхностью спутника. Определение последних при фиксированной модели плотности атмосферы проведено в работе [46].

Основные особенности эволюции движения спутника «Протон» около центра масс (см. гл. 5) следующие: долгопериодические переходы от режима осевого вращения к режиму кувыркания ( $T_\theta \approx 40 \div 60$  периодов обращения спутника); вектор кинетического момента совершает сложное прецессионно-нутацционное движение с тем же периодом; одновременно с изменениями в режиме вращения медленно меняется величина угловой скорости вращения спутника. На эти долгопериодические эффекты накладываются быстрые вращения самого спутника относительно вектора кинетического момента: период прецессии  $T_\psi$  порядка 2 мин, период собственного вращения  $T_\varphi$  порядка 15 мин. Учитывая эту картину вращательного движения спутника «Протон-2», коэффициент его лобового сопротивления можно рассчитать по формуле

$$\bar{c}_V = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} c_V d\varphi d\psi}{(2\pi)^2}.$$

Конфигурацию спутника аппроксимируем цилиндром (корпус) и четырьмя солнечными батареями. Расчет  $\bar{c}_V$  проведем для трех схем взаимодействия: а) чисто диффузной ( $\sigma_n = \sigma_\tau = 1$ ,  $T_r = T_w$ ); б) зеркальной ( $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$ ); в) промежуточной ( $\sigma_n = 1$ ,  $\sigma_\tau = 0,9$ ,  $T_r \neq T_w$ ). Изменение  $\bar{c}_V$  вполне согласуется с изменениями режима движения спутника. На рис. 52 приведены вариации  $\bar{c}_V$  для модели в).

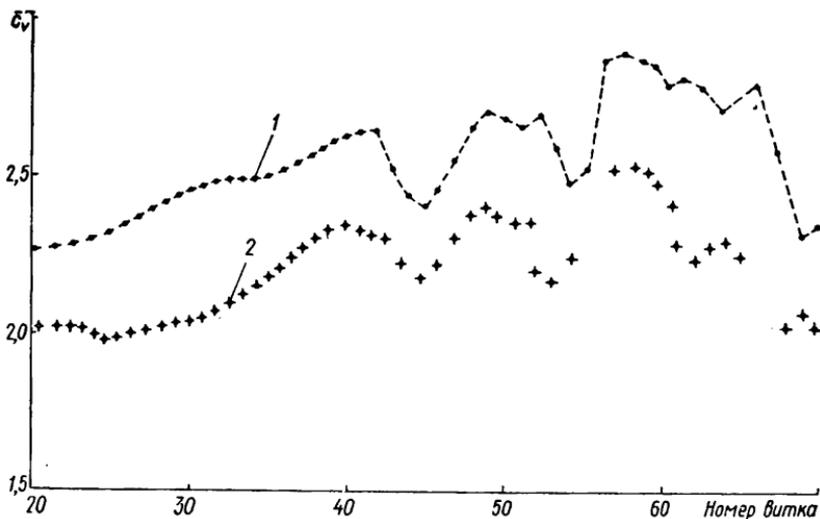


Рис. 52. Долгопериодические вариации усредненного коэффициента аэродинамического сопротивления для первых 60 витков полета спутника ( $C_m = 0,588$  км/с):

1 —  $\sigma_n = 0,9$ ,  $\sigma_\tau = 1$ ; 2 —  $\sigma_n = \sigma_\tau = 1$ .

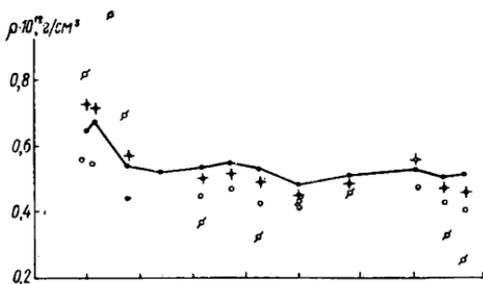
Результаты сопоставления расчетов плотности  $\rho_\pi$  для спутников «Протон-2» с  $c_V = 2$  для всех трех моделей приведены на рис. 53. Наиболее реальным представляется случай в) с  $C_m = 0,588$ , что соответствует температуре поверхности спутника  $T_w = 500^\circ$ , отвечающей дневным условиям прохождения перигея. Для сравнения на рисунке приведены вариации плотности солнечной ( $F_{10,7}$ ) и геомагнитной  $A_p$  активности.

Следует подчеркнуть, что учет ориентации спутника и различных моделей взаимодействия вносит достаточно большие изменения в вариации плотности атмосферы, что не противоречит выводам, сделанным в работе [87].

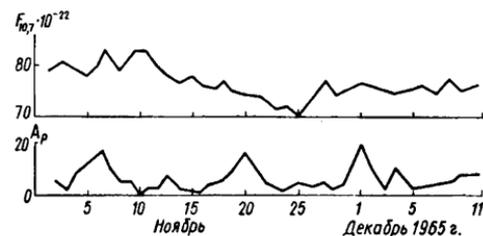
Из-за ограниченного количества обработанных данных по торможению с учетом ориентации трудно проследить особенности суточного хода  $\rho_\pi$  за полный суточный цикл (см. [78]).

Рис. 53. Сравнение вариаций плотности атмосферы в перигее, рассчитанных при  $c_V = 2,0$ , с вариациями плотности с учетом ориентации спутника:

кривая —  $c_V = \text{const} = 2,0$ ;  $\circ$  —  $\sigma_n = 1,0$ ,  $\sigma_\tau = 0,9$ ,  $C_m = 0,588$ ;  $+$  —  $\sigma_n = \sigma_\tau = 1,0$ ,  $C_m = 0,588$ ;  $\varnothing$  —  $\sigma_n = \sigma_\tau = 0$ .



Учет фактической ориентации спутника при его движении относительно центра масс позволяет повысить точность определения вариаций плотности атмосферы. Учет моделей взаимодействия потока с поверхностью при расчетах плотности атмосферы дает представление о вносимой погрешности.



#### 6.4. Оценка параметров взаимодействия по данным об управляющем моменте, действующем на спутник «Космос-230»

В работах [47, 53] сравнивались рассчитанное  $M_p$  и экспериментальное  $M_n$  значения аэродинамических моментов, действующих на ИСЗ «Космос-230». Этот спутник, как и другие аналогичные по конфигурации («Интеркосмос-1», «Интеркосмос-4», «Космос-166»), был ориентирован одной осью на Солнце. Для поддержания ориентации спутник был снабжен электромаховичной системой, которая постоянно компенсировала действие возмущающих аэродинамических моментов, каждый раз сообщая спутнику кинетический момент, равный по величине и обратный по знаку моменту внешних аэродинамических сил. При накоплении определенного кинетического момента маховик разгружается с помощью газореактивной системы. Величина момента импульса разгрузки служила мерой для оценки аэродинамического момента, действующего на спутник. Как показали расчеты, величины других возмущающих моментов по сравнению с  $M_a$  пренебрежимо малы.

Используя закон сохранения кинетического момента, для некоторого интервала времени ( $t_0, t_k$ ) можно записать

уравнение

$$\int_{t_n}^{t_k} M_a dt = \sum_{i=1}^n M_y \Delta t_i.$$

Здесь  $M_y = R_\tau l$  — управляющий момент;  $\Delta t_i$  — время работы двигателей газореактивной системы на  $i$ -м включении;  $R_\tau = P_0 S_{кр} k_p \varphi_1$  — тяга двигателя;  $P_0$  — давление перед соплом;  $S_{кр}$  — площадь критического сечения сопла;  $k_p$  — коэффициент тяги;  $\varphi_1$  — коэффициент потерь в сопле;  $l$  — плечо силы тяги двигателя относительно центра масс. Величина  $\Delta t_i$  определялась по спаду среднего давления  $\bar{P}$  в баллонах газореактивной системы в предположении работы одного сопла:

$$\Delta t_i = GRT/(\Delta P_i V_s),$$

где  $G$  — удельный секундный расход сопла;  $V_s$  — объем баллонов;  $R$  — газовая постоянная;  $\Delta P_i$  — изменение давления за время  $\Delta t_i$ ;  $T$  — температура газа в баллонах. Натурные значения момента  $M_n$  определялись как соответствующие максимальному  $R_\tau l$  и минимальному  $R_\tau l \cos(\pi/4)$  управляющим моментам. Расчетное значение аэродинамического момента  $M_p$  находилось для полностью диффузной схемы взаимодействия. Плотность атмосферы принималась согласно модели CIRA-65 и фактического уровня солнечной активности  $F_{10,7}$ , текущие значения углов атаки  $\delta$  — соответствующими  $\delta_\pi$  в перигее орбиты. Сравнение показало, что в период, когда  $\delta_\pi$  малы ( $10$ — $40^\circ$ ), области значений  $M_p$  и  $M_n$  накладывались, когда  $\delta_\pi$  возрастали до  $50$ — $70^\circ$ ,  $M_p$  превышало  $M_n$  на  $60$ — $75$  %. Из возможных причин этих расхождений в работах [47, 53] указаны следующие.

1. Не учитывался эффект интерференции частиц. Для спутника «Космос-230» при углах атаки  $\delta_\pi \leq 90^\circ$  интерференция проявляется в повторном столкновении молекул с обратной стороной солнечных батарей, что уменьшает расчетное значение аэродинамического момента.

2. При расчете аэродинамического момента во всем интервале  $[t_0, t_k]$  значение  $\delta_\pi$  считалось таким, каким оно было в перигее орбиты, что вполне допустимо для орбит с большим эксцентриситетом. Однако в конце существования ИСЗ «Космос-230» его орбита стала слабо эллиптической и в качестве  $M_p$  необходимо было брать его среднее по  $\delta$  значение, что также уменьшило расчетное значение аэродинамического момента.

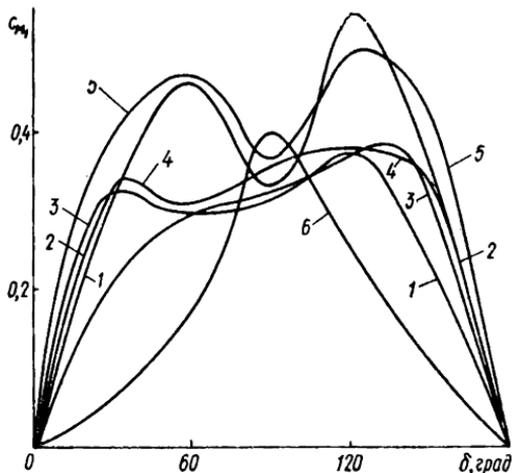
В работе [5] методом прямого статистического моделирования (методом Монте-Карло) был рассчитан аэродинамический момент спутника «Космос-230» с учетом интерференции для

различных схем взаимодействия. Следует отметить, что интерференцией частиц невозможно объяснить отличие значений  $M_p$  и  $M_n$  в работах [47, 53].

На рис. 54 представлена зависимость  $M_p$  от угла атаки для спутника «Космос-230», полученная в работе [5]. Учитывая, что в перигее орбиты спутника «Космос-230» углы атаки лежали в пределах 50—70°, различные значения  $M_p$  и  $M_n$  в работах [47, 53] можно объяснить различными значениями  $M_p$  для диффузной и ряда других схем (кривые 1, 3, 4) на этих углах

Рис. 54. Зависимость восстанавливающего момента, действующего на ИСЗ «Космос-230», от угла атаки  $\delta$  для различных схем взаимодействия:

1 — [65]; 2 — [46]; 3 — [30]; 4 — [5]; 5 — полностью диффузная схема; 6 — зеркальная.



атаки. Сходство этих схем взаимодействия — в учете квази-зеркального характера отражения частиц от поверхности при больших углах падения. На индикатрисе рассеяния этому соответствует выраженный максимум на околозеркальных углах отражения. Основной вклад в момент, действующий на спутник «Космос-230» на углах атаки 60—80°, вносит взаимодействие набегающего потока с поверхностью панелей солнечных батарей, для которых, как показывают результаты эксперимента [30] и численного расчета, применение диффузной схемы отражения неоправданно. Таким образом, сравнительный анализ расчетного и натурного значений аэродинамического момента, действующего на ИСЗ «Космос-230», говорит в пользу квазизеркального характера взаимодействия набегающего потока с поверхностью спутника на скользящих углах падения. Схемы 1, 3, 4 (см. рис. 54) также удовлетворительно описывают совпадение значений  $M_p$  и  $M_n$ , полученных в работах [47, 53] на углах атаки 10—40°, поскольку согласно рис. 54 индикатрисы этих схем взаимодействия в пределах углов падения  $\delta < 45^\circ$  близки к диффузным.

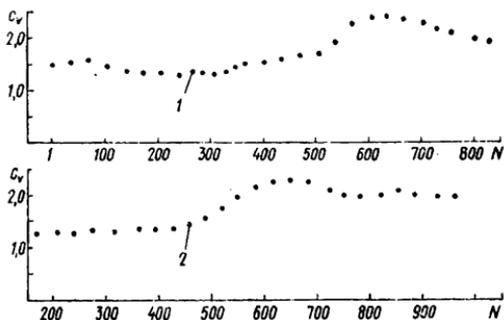


Рис. 55. Изменение коэффициента лобового сопротивления  $c_V$  спутников от числа оборотов вокруг Земли:

1 — «Космос-166»; 2 — «Космос-230».

В работе [46] для этих же спутников («Космос-230», «Космос-166») найдены параметры взаимодействия потока с поверхностью по данным об их орбитальном торможении. При этом учитывалась фактическая зависимость коэффициента лобового сопротивления от углов атаки. Для спутников, панели солнечных батарей которых ориентированы на Солнце, значения угла атаки и коэффициента лобового сопротивления изменяются медленно. Углы атаки определяются как  $\delta = \arccos(\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{S})$ , где  $\mathbf{S}$  — вектор направления на Солнце, совпадающий с вектором  $\mathbf{n}$  нормали к поверхности солнечных батарей. На рис. 55 показано изменение расчетного значения  $c_V$  за несколько месяцев полета. Расчеты проведены для схемы взаимодействия

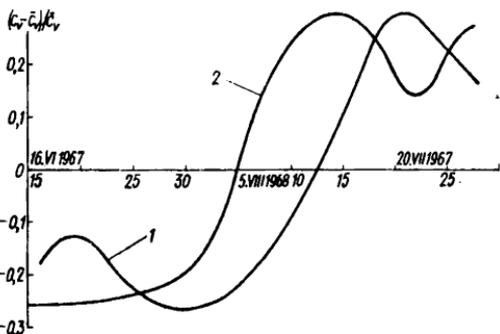


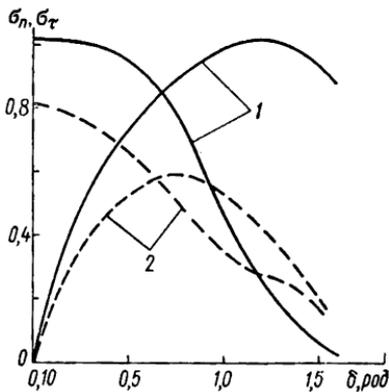
Рис. 56. Отклонение текущего значения  $c_V$  от среднего:

1 — «Космос-166» ( $\bar{c}_V = 1,77$ );  
2 — «Космос-230» ( $\bar{c}_V = 1,75$ ).

работы [65] в предположении следующих зависимостей коэффициентов аккомодации импульса от угла атаки:  $\sigma_n = a_1 \cos(a_2 \delta)$ ;  $\sigma_t = a_3 \sin(a_4 \delta)$ . Изменение положения Солнца и элементов орбиты, как видно из рисунка, приводит к существенному изменению положения спутника относительно падающего потока; за это время величина  $c_V$  претерпевает значительные изменения. При решении обратных задач учет фактической ориентации таких спутников необходим. На рис. 56

Рис. 57. Зависимость коэффициентов аккомодации импульса от локальных углов атаки:

1 — численное моделирование; 2 — по торможению «Космос-166» и «Космос-230» ( $a_1 = 1,08 \pm 0,04$ ;  $a_2 = 1,951 \pm 0,03$ ;  $a_3 = 1,73 \pm 0,04$ ;  $a_4 = 0,735 \pm 0,105$ ).



приведены величины погрешностей, вносимых в расчеты  $c_V$  этих спутников, без учета их фактической ориентации ( $\bar{c}_V$  — среднее по всем  $\delta$  и  $\varphi$  значение  $c_V$ ). Эта погрешность может достигать 30 %.

На рис. 57 приведены значения коэффициентов аккомодации  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$ , вычисленные методом численного моделирования взаимодействия потока с гладкой поверхностью [65] и методом наименьших квадратов по орбитальному торможению [46]. Отличие этих результатов может быть объяснено шероховатостью реальной поверхности спутника и присутствием на ней адсорбированных атомов.

### 6.5. Причины торможения вращения некоторых ИСЗ

После запуска уже первых искусственных спутников Земли была предпринята попытка определить плотность атмосферы по торможению их вращения [11, 48, 92, 95]. В дальнейшем такое определение проводилось и для ИСЗ «Космос-196», «Ариабата» и последних ступеней ракет-носителей [22, 43, 44, 75, 84]. Проанализируем полученные результаты на основе формул, полученных выше. Прежде всего заметим, что аэродинамический демпфирующий момент не единственный диссипативный фактор, замедляющий вращение спутников. К возмущающим моментам, рассеивающим вращательную энергию спутника, относятся моменты от вихревых токов, индуцируемых геомагнитным полем в проводящих материалах спутника, и моменты сил аэродинамической диссипации. Существует еще целый ряд неконсервативных моментов, обусловленных сухим (или вязким) трением, магнитным и структурным (конструкционным) гистерезисом. Последние, однако, сами по себе пренебрежимо малы по сравнению с первыми и становятся значительными или определяющими после усиления в специальных демпфирующих устройствах. Особенность сухого (вязкого) трения и структурного гистерезиса состоит в том, что эти

моменты проявляются только при взаимном перемещении отдельных масс спутника. При этом вращательное движение спутника в целом нельзя рассматривать в рамках динамики твердого тела. Аэродинамический момент и момент от вихревых токов в той или иной мере действуют на спутники всегда и во многом определяют динамику их движения относительно центра масс. Для оценки декремента затухания угловой скорости вращения спутников воспользуемся формулой (4.71)

$$(\mathbf{M}_2)_L = \rho V_0 L \left\{ -\frac{D_{11}}{A} \sin^2 \vartheta - \frac{D_{33}}{C} \cos^2 \vartheta + \frac{D_{11} - D_{22}}{A} \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \vartheta \cos^2 \kappa_1 + \left( \frac{D_{32}}{A} + \frac{D_{23}}{C} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \kappa_1 \right\}.$$

Следует отметить, что первые ИСЗ, а также ИСЗ «Космос-196» вращались в режиме, близком к кувырканию, т. е.  $\vartheta \approx \pi/2$ , а первый индийский спутник «Ариабата» был стабилизирован вращением ( $\vartheta = 0$ ). По углам  $\kappa_1$  и  $\delta$  будем проводить максимальные оценки. При этом, если  $\kappa_1 = \pi/2$ ,  $\delta = \psi$ , т. е. осреднение  $(\mathbf{M}_2)_L$  по  $\psi$  равносильно осреднению  $D_{ij}$  по  $\delta$ . При  $\kappa_1 = 0$   $\delta = \pi/2 = \text{const}$ . Осредним  $(\mathbf{M}_2)_L$  по истинной аномалии  $\nu$  и положим  $\vartheta = \pi/2$ :

$$(\mathbf{M}_2)_L = -N_0^{\delta} \frac{L}{A} (D_{11} \sin^2 \kappa_1 + D_{22} \cos^2 \kappa_1),$$

где  $N_0^{\delta}$  имеет вид (4.60). Считая  $\delta$  и  $\kappa_1$  постоянными величинами, проинтегрируем уравнение  $\frac{dL}{d\nu} = (\mathbf{M}_2)_L$ . Получим

$$L = L_0 \exp(-\gamma \nu),$$

где

$$\gamma = \frac{N_0^{\delta}}{A} (D_{11} \sin^2 \kappa_1 + D_{22} \cos^2 \kappa_1)$$

есть декремент затухания  $L$ .

В § 3.3 получены формулы, позволяющие определить величины  $D_{ij}$  для указанных спутников. Спроектируем две штыревые и четыре ленточные антенны этого спутника на его ось симметрии. Разобьем спутник на отдельные элементы, как показано на рис. 19. Аналогичную аппроксимацию проведем для первого советского ИСЗ, спроектировав его четыре антенны симметрично на одну ось, проходящую через геометрический центр корпуса спутника. Третий советский ИСЗ аппроксимируем полным прямым конусом, спутник «Ариабата» — сферой. Расчет коэффициентов  $D_{11}$  и  $D_{22}$  для ИСЗ «Космос-196», первого советского ИСЗ и ИСЗ «Ариабата» проведем относительно гео-

метрического центра основного корпуса спутников, а для третьего советского ИСЗ — относительно точки, являющейся центром масс при равномерном распределении плотности всего объема. Результаты расчетов приведены в табл. 5 ( $L$  — длина,  $R$  — радиус,  $a$  — расстояние от центра масс спутника до геометрического центра выносного тела). Вклад остальных элементов спутников в  $D_{ij}$  пренебрежимо мал.

В табл. 6 представлены декременты затухания угловой скорости вращения спутников под действием аэродинамических

Таблица 5

ИСЗ	$L$ , м	$R$ , м	$a$ , м	$D_{33}$ , м <sup>4</sup>	$D_{11}$ , м <sup>4</sup>
«Космос-196»					
элемент I	0,64	0,4	—	0,0447	0,0569
II	—	0,4	—	0,1463	0,1813
III	—	0,15	1,77	0,2218	0,6652
IV	0,9	0,0229	1,17	0,0592	0,1164
V (2 антенны)	0,8	0,005	0,714	0,00896	0,0173
VI (4 антенны)	1,2	0,0127	0,840	0,1006	0,1908
$\Sigma$	—	—	—	0,58158	1,2279
Первый корпус	—	0,29	—	0,0127	0,0191
2 антенны	2,4	0,015	0,96	0,1323	0,3991
2 антенны	2,9	0,015	1,16	0,2333	0,7042
$\Sigma$	—	—	—	0,3783	1,1224
Третий $\Sigma$	3,57	0,865	—	3,1165	2,8685
«Ариабата» $\Sigma$	—	0,704	—	0,992	0,5815

моментов  $\gamma_a$ , а также патурные суммарные декременты  $\gamma_n$ . Численный расчет коэффициентов  $D_{ij}$  проводился для чисто диффузной схемы взаимодействия набегающего потока с поверхностью спутника и полной аккомодации энергии ( $\epsilon = \frac{v_0}{V_0} = 0$ ). Максимально возможное отличие  $D_{ij}$  в зависимости от  $\epsilon$  и  $\frac{v}{V_0}$  не превышает 100 %. В работах [11, 22, 41, 43, 44, 48, 70, 75] для этих же спутников были оценены декременты затухания угловой скорости их вращения под действием диссипативных моментов от вихревых токов  $\gamma_m$ . Эти результаты указывают, однако, что значения декрементов  $\gamma_m$  существенно занижены. Не останавливаясь подробно на оценках моментов от вихревых токов, укажем, что эти моменты сильно зависят

от конфигурации проводящих материалов спутника и их удельного электрического сопротивления. Строгое выражение момента от вихревых токов можно получить лишь для самых простейших тел (сферы, цилиндра, конуса, эллипсоида вращения) [36, 41, 70, 71]. Однако аппроксимация проводящих материалов спутников набором простейших тел, даже при удачном их соответствии по геометрии, зачастую дает большую погрешность величины момента от вихревых токов из-за наличия практически не поддающихся учету переходных сопротивлений в местах стыковок отдельных элементов спутника.

Натурное значение  $\gamma_{II}$  для спутника «Космос-196» может быть объяснено диссипацией вращательной энергии на токи Фуко [75] при аппроксимации корпуса спутника эквивалентной по площади поверхности сферой и учетом выносного тела III (см. рис. 29). При этом для ориентации спутника, соответствующей 29 витку полета,  $\gamma_m = 0,0325$ , а максимальное по ориентации значение  $\gamma_m = 0,042$  (сут<sup>-1</sup>). Не располагая значением магнитного декремента  $\gamma_m$  для третьего советского спутника, можно, однако, с уверенностью сказать, что  $\gamma_a$  для него в зависимости от схемы взаимодействия может отличаться не более чем вдвое, поскольку погрешности  $A$ ,  $D_{ij}$  и  $N_0^{\partial}$  для него незначительны. Для спутника «Ариабата»  $\gamma_m$  было рассчитано с точностью 26 % [43]. Анализ натурной информации этого спутника позволил еще более повысить точность расчета  $\gamma_m$  для спутника «Брасхара» [44]. В работе [48] для первого советского ИСЗ  $\gamma_m = 1,52 \cdot 10^{-4}$  (1/в). По уточненным оценкам  $\gamma_m = 1,69 \times 10^{-4}$  (1/в). Это значение составляет 75 %  $\gamma_{II}$ . В работе [95] приведена оценка величины  $\rho_{\pi}$  по торможению вращения первого советского ИСЗ в предположении, что  $\gamma_a = \gamma_{II}$ . При этом полученное в работе [95] значение  $\rho_{\pi}$  оказалось приблизительно вдвое больше табличного значения [60]; по-видимому, значение  $\frac{\overline{N_0^{\partial} D_{II}}}{A}$  в работе [95] было вдвое завышено. Если

Таблица 6

$\bar{N}_0^{\theta}$	A, кг·м <sup>2</sup>	$\gamma_a, 1/v$		$\gamma_{II}, 1/v$
		$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = \pi/2$	
0,18	3,4	$0,276 \cdot 10^{-4}$	$0,82 \cdot 10^{-4}$	$2,14 \cdot 10^{-4}$
0,171	500	$1,385 \cdot 10^{-6}$	$1,2748 \cdot 10^{-6}$	$3,61 \cdot 10^{-4}$
0,15	40,0	$2,59 \cdot 10^{-6}$	$5,47 \cdot 10^{-6}$	$3,46 \cdot 10^{-4}$
0,9987	82,2	$2,19 \cdot 10^{-6}$	—	$4,225 \cdot 10^{-4}$

считать, что для первого советского ИСЗ  $\gamma_a = 0,25 \gamma_m$ , то  $\rho_a = 2,186 \cdot 10^{-10}$  кг/м<sup>3</sup>, что выше табличного на 9 % [60]. Следует отметить, что значения коэффициента  $\bar{N}_0^{\theta}$  для первых (табл. 6) трех спутников приблизительно одинаковы. При этом для первого советского ИСЗ  $\gamma_a/\gamma_{II} = 25,6$  %, для III ИСЗ  $\gamma_a/\gamma_{II} = 0,368$  %, для ИСЗ «Космос-196»  $\gamma_a/\gamma_{II} = 1,168$  %. Поскольку перигей этих спутников приблизительно равен 220 км, то уже на этих высотах доминирующим диссипативным фактором, влияющим на вращательное движение спутников, являются вихревые токи, причем, как правило,  $\gamma_a/\gamma_m = 1$  % (первый советский ИСЗ с его длинными антеннами скорее можно считать исключением).

Из работ [69, 74] следует, что с помощью экспериментального моделирования значение  $\gamma_m$  в лучшем случае можно получить с погрешностью до 7 %. Если при этом  $\gamma_a/\gamma_m \approx 1$  %, то ошибки в определении  $\gamma_a = \gamma_{II} = \gamma_m$  составляют 700 %, что приводит к полной неопределенности параметров атмосферы, рассчитываемых по торможению вращения спутников. Однако при малых вращениях спутника его угловая скорость становится настолько чувствительной к внешним воздействиям, что начинает четко прослеживаться корреляция между величиной солнечной активности, значениями параметров атмосферы и периодом собственного вращения спутников. Впервые, по-видимому, эта связь была замечена Григоровским [40]. Работы [22, 42] посвящены установлению таких связей при исследовании с помощью фотометрических методов вращательного движения последних ступеней ракет-носителей. Оценим моменты сил для одной из таких ступеней, а именно: рассмотрим ракету-носитель третьего советского спутника 1958δ<sub>1</sub>, вращение которой изучено достаточно подробно. Параметры ракеты выберем следующим образом: диаметр  $2R$  и длину  $L$  такими же, как у ракеты-носителя «Восток», т. е. 2,5 и 28 м соответственно [22], отношение массы к средней площади поперечного сече-

ния в соответствии с работой [22] примем равным  $125 \text{ кг/м}^2$ , а среднюю площадь поперечного сечения вычислим по формуле Кинг-Хили [52]

$$\bar{S} = \frac{2}{\pi} (2LR + \pi R^2).$$

Для  $\epsilon$  и  $v$  возьмем значения  $0,02$  и  $10^3 \text{ м/с}$  в соответствии с оценками для спутников «Протон». Вращение спутника будем считать чистым кувырканием ( $\phi \approx \pi/2$ ), при этом скорость прецессии примем равной  $0,35 \text{ рад/с}$ . Поскольку спутник 1958 $\delta_1$  представляет собой сильно вытянутый и достаточно однородный цилиндр, то расстояние между осями геометрической и динамической симметрий  $R_{y'}$  и угол между этими осями  $\kappa$  были, по-видимому, величинами малыми. Положим  $R_{y'} = 0,1 \text{ м}$ ,  $\sin \kappa = 0,1$ . Так как эксцентриситет орбиты спутника 1958 $\delta_1$  равен приблизительно  $e \approx 0,1$ , то для выражений (5.33) и (5.40) получим

$$J_1 \approx J_3 \approx G_1 \approx G_2 \approx 0,1, \quad J_2 \approx J_4 \approx 0, \quad F_{V_2} \approx 70 \text{ м}^2.$$

Подставляя эти значения в (5.32) для составляющей момента смещения  $M_{11}$ , получаем

$$(\bar{M}_{11})_{L}^{\psi, \epsilon, v} = 2,24 \cdot 10^{-1} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right).$$

При сделанных выше предположениях момент инерции спутника относительно поперечной оси  $A = 3,9 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , а кинетический момент  $L = 1,36 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ . В этом случае

$$\gamma_{11}^{-1} = - \frac{1}{\sin^2 \theta \cos \theta} \cdot 7,1 \cdot 10^3 \text{ (сут)}. \quad (6.5)$$

Аналогичным образом, оценивая вклад авторотационного момента  $M_{12}$ , получаем

$$\gamma_{12}^{-1} = - \frac{1}{\cos \theta} 7,5 \cdot 10^4 \text{ (сут)}. \quad (6.6)$$

Формулы (6.5) и (6.6) наглядно показывают, что в зависимости от знака  $\cos \theta$  авторотация и момент смещения могут как замедлять, так и ускорять вращение спутника. Если ориентация  $L$  изменяется периодически (угол  $\theta$ ), то это автоматически приведет к изменению периода вращения спутника. Такая картина экспериментально наблюдалась для ИСЗ 1958 $\delta_1$  [42]. В пользу механизма авторотационной закрутки этого спутника говорит тот факт, что ускорение вращения спутника наблюдалось на частотах  $\omega$ , существенно более высоких, чем частота обращения спутника по орбите. В случае близости этих частот конкурирующим с авторотацией мог бы стать механизм раскрутки спутника геомагнитным полем [72] или эффект суперротации [73], описанный в § 4.8. Для момента трения  $M_2$  спутника 1958 $\delta_1$

нетрудно получить  $\gamma_2^{-1} = 1,3 \cdot 10^{-4}$  сут, а для аэроградиентного момента  $M_3$   $\gamma_3^{-1} = 8,9 \cdot 10^{-4}$  сут. Численные оценки аэроградиентного эффекта в предположении, что спутник указанных выше параметров кувьркается в плоскости орбиты, показывают, что при периоде вращения спутника, равном 20 с,  $M_3$  :  $M_2 \approx 0,2$  и возрастает с увеличением периода вращения.

Таблица 7

Спутники	$1/\gamma \cdot 10, \text{ лет}$	$h_{\pi}, \text{ км}$	$h_{\alpha}, \text{ км}$	$P, \text{ км}$	$i, \text{ град}$
68-70B	1,2	575	631	6981	56,17
70-36J	2,7	1473	1590	7909	74,04
70-83B	1,1	743	755	7127	74,00
70-86B	0,95	776	806	7169	74,06
70-102B	1,35	967	1004	7363	74,03
70-108B	1,15	974	979	7354	74,02
71-13B	0,85	519	545	6910	74,03
71-20B	0,90	983	995	7367	65,82
71-86J	4,25	1501	1628	7942	74,08
72-9B	1,13	964	994	7357	74,08
72-19B	1,85	1171	1194	7560	82,97
72-35B	1,25	965	991	7356	74,02
72-43B	1,3	779	803	7169	74,06
72-57J	2,7	1500	1598	7927	74,03
72-62B	1,55	952	975	7341	82,97
72-74B	1,0	975	1002	7366	65,83
72-87J	1,15	1470	1594	7910	74,03
72-88B	0,78	508	543	6903	74,02
73-3B	0,9	501	545	6901	74,03
73-5B	1,32	566	614	6968	50,66
73-10B	0,87	504	542	6901	74,02
73-37J	2,0	1479	1606	7920	74,02

Однако следует еще раз подчеркнуть, что оценки  $M_3$  максимальны. Итак, количественный анализ моментов  $M_{11}$ ,  $M_2$ ,  $M_{12}$  и  $M_3$  дает следующее отношение соответствующих этим моментам декрементов:  $12,6 \sin^2 \theta \cos \theta : 7,2 : 1,2 \cos \theta : 1$ . В табл. 7 приведены экспериментальные данные об изменении периода вращения целой серии последних ступеней ракет-носителей спутников «Космос» [97]. Эти ступени представляют собой цилиндры длиной 7,4 м и диаметром 2,4 м. Оценка диссипативных аэродинамических и магнитных моментов для этих спутников [97] показывает, что на высотах 500 км моменты от вихревых токов на несколько порядков превосходят аэродинамические диссипативные моменты и становятся сравнимыми с последними на высоте 160 км. Эти выводы согласуются с результатами работы [75].

Таким образом, анализ торможения вращения ряда спутников показывает, что доминирующим диссипативным фактором, рассеивающим вращательную энергию спутника, является механизм джоулевых потерь на токи Фуко, индуцируемые геомагнитным полем в проводящих материалах спутников. Это позволяет заключить, что обратная задача аэродинамики — определение плотности атмосферы (и других ее параметров) по торможению вращательного движения спутника, как правило, не может быть решена корректно, ибо аэродинамические силы дают слишком малый вклад в суммарное торможение вращения и этот вклад трудно выделить с приемлемой точностью. Исключением могут являться спутники экзотической формы — типа первого советского спутника (относительно длинные антенны) или типа спутника «Протон» (пропеллирующий эффект панелей батарей). Чувствительность таких спутников к аэродинамическим эффектам позволяет даже рекомендовать специальное конструирование подобных спутников для экспериментального определения параметров взаимодействия и, возможно, плотности атмосферы. Аэродинамические силы и моменты для различных ИСЗ были оценены также в работах [6, 85, 88—91, 96].

1. Альперт Я. Л., Гуревич А. В., Пятаевский Л. П. Искусственные спутники в разреженной плазме.— М.: Наука, 1964.— 282 с.
2. Баранцев Р. Г. Взаимодействие разреженного газа с обтекаемыми поверхностями.— М.: Наука, 1975.— 344 с.
3. Баранцев Р. Г., Цзжень-юй У. Силы и моменты, действующие на тела вращения в свободномолекулярном потоке.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1961, вып. 13, с. 79—92.
4. Басс В. П., Козтуненко В. М., Чепурной В. Н. К определению аэродинамических характеристик тел сложной формы в свободномолекулярном потоке с учетом затенения.— Космич. исслед., 1974, 12, № 1, с. 40—44.
5. Басс В. П. Расчет обтекания тел потоком сильно разреженного газа с учетом взаимодействия с поверхностью.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1978, № 5, с. 117—122.
6. Басс В. П. Некоторые результаты взаимодействия потока разреженного газа с поверхностью ИСЗ и интерпретация данных о торможении.— Космич. исслед., 1980, 18, № 3, с. 455—458.
7. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.— М.: Наука, 1965.— 416 с.
8. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.— 308 с.
9. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел.— М.: Наука, 1972.— 360 с.
10. Белецкий В. В. Классификация движений искусственного спутника Земли около центра масс.— Искусств. спутники Земли, 1961, 6, с. 11—32.
11. Белецкий В. В., Зонев Ю. В. Вращение и ориентация третьего советского спутника.— Там же, 7, с. 32—35.
12. Белецкий В. В. Эволюция вращения динамически симметричного спутника.— Космич. исслед., 1963, 1, № 3, с. 339—385.
13. Белецкий В. В. Эволюция вращения и ориентации спутника типа «Протон».— В кн.: Современные проблемы небесной механики и астродинамики: Тр. конф. по общ. вопр. небес. механики и астродинамики. М.: Наука, 1973, с. 112.
14. Белецкий В. В., Голубков В. В., Лавровский Э. К. и др. Определение ориентации и вращения искусственных спутников по данным измерений.— Космич. исслед., 1967, 5, № 5, с. 686—702.
15. Белецкий В. В., Голубков В. В., Степанова Е. А., Хацкевич И. Г. Определение ориентации искусственных спутников по данным измерений.— М., 1967.— 194 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики).
16. Белецкий В. В., Голубков В. В., Степанова Е. А., Хацкевич И. Г. Определение ориентации искусственных спутников по данным измерений.— М., 1968.— 134 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики).

17. *Белецкий В. В., Голубков В. В., Хацкевич И. Г.* Анализ вращения и ориентации спутника «Протон-2». — В кн.: Тр. XVIII конгр. МАФ. Белград: Pergamon, 1968, т. 1, с. 151—161.
18. *Белецкий В. В., Голубков В. В., Степанова Е. А., Хацкевич И. Г.* Результаты определения ориентации спутника «Протон-2» и описание его движения относительно центра масс. — Космич. исслед., 1969, 7, № 4, с. 522—533.
19. *Белецкий В. В.* Оценка характера взаимодействия аэродинамического потока со спутником по анализу движения спутника «Протон-2» относительно центра масс. — Там же, 1970, 8, № 2, с. 206—217.
20. *Белецкий В. В., Бронштейн М. М., Проппирный Г. А.* Оценка параметров зеркально-диффузной модели отражения по движению относительно центра масс спутников серии «Протон». — Там же, 1973, 11, № 2, с. 171—179.
21. *Белецкий В. В., Сехно Б. В.* О влиянии нестабилизированности входящего в атмосферу осесимметричного тела на движение центра масс. — Там же, 1974, 12, № 6, с. 803—810.
22. *Белецкий В. В., Григорьевский В. М., Колесник С. Я.* Вращательное движение ИСЗ и определение плотности атмосферы. — М., 1975. — 50 с. — (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 7).
23. *Белецкий В. В., Маров М. Я., Змиевская Г. И.* Об определении параметров атмосферы по данным о торможении спутника «Протон-2» с учетом его ориентации. — М., 1968. — 16 с. — (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики).
24. *Белецкий В. В., Змиевская Г. И., Маров М. Я.* Об определении параметров атмосферы по данным о торможении спутника «Протон-2» с учетом его ориентации. — Космич. исслед., 1970, 8, № 6, с. 889—895.
25. *Белецкий В. В.* Некоторые проблемы механики космического полета. — В кн.: Современные проблемы теоретической и прикладной механики: Тр. IV Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике, Киев, 21—28 мая 1976 г. Киев: Наук. думка, 1976, с. 103—115.
26. *Белецкий В. В., Левин Е. М.* Механика орбитальной тросовой системы. — Космич. исслед., 1980, 18, № 5, с. 678—688.
27. *Белецкий В. В., Левин Е. М.* Стационарные движения орбитальной тросовой системы. — М., 1980, с. 115—126. (Тр. IV науч. чтений по космонавтике. Секция «Прикладная небесная механика и управление движением»).
28. *Бунимович А. И., Сазонова Н. И.* Автоматический метод определения аэродинамических сил и моментов при нестационарном движении тел в газе различной разреженности. — В кн.: Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. вып. 2, с. 32—43.
29. *Бунимович А. И., Садыкова Л. Г.* Нестационарное движение одного класса пространственных тел с большими скоростями. — Там же, с. 140—145.
30. *Варакин Г. К., Фарафонов В. Г.* Аэродинамические характеристики элемента поверхности, обтекаемой высокоскоростным свободномолекулярным потоком. — Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1975, 4, с. 181—184.
31. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. — Успехи мат. наук, 1962, 17, № 6, с. 3—126.
32. *Вуд Г. П.* Электростатическое и электромагнитное торможение спутника в верхней атмосфере Земли. — В кн.: Газовая динамика космических аппаратов. М.: Мир, 1965, с. 258—277.
33. *Галкин В. С.* Определение моментов и сил, действующих на вращающиеся тела в свободномолекулярном потоке и потоке света. — Инж. журн., 1965, 5, с. 954—958.

34. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М. Теория полета неуправляемых ракет.— М. : Физматгиз, 1959.— 560 с.
35. Голубков В. В., Хацкевич И. Г. Определение ориентации искусственных спутников Земли по заданной системе измерений.— Космич. исслед., 1969, 7, № 4, с. 510—521.
36. Голубков В. В. Вычисление момента сил, действующих на тело в магнитном поле.— М., 1971.— 20 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики).
37. Голубков В. В. Аналитическая методика определения ориентации нестабилизированных слабо возмущенных искусственных спутников Земли. Ч. I.— Космич. исслед., 1977, 15, № 3, с. 363—375.
38. Голубков В. В. Аналитическая методика определения ориентации нестабилизированных слабо возмущенных искусственных спутников Земли. Ч. II.— Там же, № 5, с. 690—707.
39. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение.— М. : Изд-во иностр. лит., 1952.— Т. 1. 350 с.
40. Григорьевский В. М. О быстрых изменениях периода вращения относительно поперечной оси второго советского искусственного спутника Земли.— Докл. АН СССР, 1961, 137, № 3, с. 572—575.
41. Григорьевский В. М., Шмелев Г. М. О торможении вращения ИСЗ магнитным полем Земли.— Геомагнетизм и аэронавтика, 1969, 9, № 2, с. 334—336.
42. Григорьевский В. М., Бельцкий В. В., Буза М. И. и др. Некоторые результаты обработки наблюдений 1958<sub>d</sub>.— В кн.: Наблюдения искусственных спутников Земли. Прага, 1973, с. 228—245. (Публ. науч. результатов сотрудничества «Интеркосмос»; Т. 12).
43. Драновский В. И., Янишин А. М. Влияние диссинхронных моментов от вихревых токов на ориентацию спутника, стабилизированного вращением.— Космич. исслед., 1975, 13, № 4, с. 487—493.
44. Драновский В. И., Янишин А. М. Уточнение оценки декремента затухания угловой скорости вращения ИСЗ SEO на основе анализа натурной информации спутника «Ариабата».— Там же, 1980, 18, № 6, с. 935—937.
45. Евтушенко Ю. Г. Асимптотический расчет влияния относительного движения спутника на движение его центра масс.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1965, 5, № 2, с. 262—273.
46. Змиевская Г. И. Аэродинамика спутников и определение параметров взаимодействия потока с поверхностью по торможению в верхней атмосфере Земли ИСЗ «Космос-166» и «Космос-230».— В кн.: Прикладные задачи космической баллистики. М. : Наука, 1973, с. 120—130.
47. Змиевская Г. И., Камеко В. Ф., Пярнпуу А. А., Яскевич Э. П. Вопросы аэродинамики спутников с одноосной ориентацией.— Космич. исслед., 1973, 11, № 4, с. 499—511.
48. Зонов Ю. В. К вопросу о взаимодействии спутника с магнитным полем Земли.— Искусств. спутники Земли, 1959, 3, с. 118—124.
49. Иванов С. Г., Янишин А. М. Силы и моменты, действующие на тела, вращающиеся относительно оси симметрии в свободномолекулярном потоке.— Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1980, 3, с. 151—155.
50. Иванов С. Г., Янишин А. М. Силы и моменты, действующие на осесимметричные тела, произвольно вращающиеся в свободномолекулярном потоке.— Космич. исслед. на Украине, 1982, вып. 16, с. 25—29.
51. Камеко В. Ф., Маров М. Я., Яскевич Э. П. Аэродинамические характеристики спутника с учетом положения и ориентации на орбите.— Космич. исслед., 1969, 7, № 4, с. 607—610.

52. *Кинг-Хили Д.* Теория орбит искусственных спутников в атмосфере.— М. : Наука, 1966.— 188 с.
53. *Ковтуненко В. М., Васильева Г. И., Камеко В. Ф. и др.* Некоторые вопросы аэродинамики спутников серий «Интеркосмос» и «Космос».— Космич. исслед. на Украине, 1973, вып. 2, с. 3—13.
54. *Ковтуненко В. М., Камеко В. Ф., Яскевич Э. П.* Аэродинамика орбитальных космических аппаратов.— Киев : Наук. думка, 1977.— 156 с.
55. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа.— М. : Наука, 1967.— 440 с.
56. *Космическая стрела / Под ред. А. Н. Обухова, В. М. Ковтуненко.*— М. : Наука, 1974.— 326 с.
57. *Краснов Н. Ф.* Аэродинамика тел вращения.— М. : Машиностроение, 1964.— 572 с.
58. *Кузьмак Г. Е.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу.— М. : Наука, 1970.— 347 с.
59. *Куляцев В. П.* Коэффициенты вращательных производных пласккой пластины и конуса, движущихся в условиях свободномолекулярного потока.— Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1964, вып. 1036.
60. *ГОСТ 22721-77.* Модель верхней атмосферы для баллистических расчетов.— Введ. 01.07. 1978.
61. *Нам Тум По.* Влияние тормозящих сил на движение спутника относительно центра масс.— Булл. Ин-та теорет. астрономии, 1965, 10, № 5, с. 77—83.
62. *Нам Тум По.* Влияние аэродинамического торможения на движение сферического спутника относительно центра масс.— Там же, с. 84—91.
63. *Николе М.* Аэрономия.— М. : Мир, 1964.— 298 с.
64. *Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П.* Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты.— Успехи физ. наук, 1957, 13, № 1а, с. 34—50.
65. *Пярнпуу А. А.* Расчет взаимодействия моноэнергетического пучка атомов газа с трехмерным кристаллом.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1970, № 2, с. 161—166.
66. *Седов Л. И.* Динамические эффекты в движении ИСЗ.— Искусств. спутники Земли, 1958, 2, с. 3—9.
67. *Хаджи П. И.* Функция вероятности.— Кишинев : Ин-т прикл. физики, 1971.— 400 с.
68. *Хацкевич И. Г.* Определение ориентации ИСЗ по магнитометрическим измерениям.— Космич. исслед., 1972, 10, № 1, с. 3—13.
69. *Яншин А. М.* Экспериментальное определение моментов от вихревых токов.— Там же, 1975, 13, № 2, с. 153—157.
70. *Яншин А. М.* Магнитное демпфирование осесимметричных ИСЗ.— Космич. исслед. на Украине, 1977, вып. 10, с. 17—19.
71. *Яншин А. М., Заблуда С. М.* Динамика магнитного демпфирования быстровращающихся ИСЗ.— Там же, с. 24—26.
72. *Яншин А. М., Заблуда С. М.* Установившиеся собственные вращения ИСЗ в магнитном поле.— Там же, вып. 11, с. 17—22.
73. *Яншин А. М.* Аэродинамическое демпфирование сферического ИСЗ с учетом зонального ветра.— Там же, 1979, вып. 13, с. 3—7.
74. *Яншин А. М.* О возможных погрешностях при экспериментальном определении коэффициентов магнитной диссипации.— Там же, с. 29—32.
75. *Яншин А. М., Заблуда С. М.* Сравнительная оценка моментов сил аэродинамической и магнитной диссипации, действующих на ИСЗ.— Наблюдения искусств. небес. тел, 1979, 78, с. 51—60.

76. Янишин А. М. Влияние вращения тел на их аэродинамические характеристики.— Там же, 1981, **79**, с. 67—74.
77. Янишин А. М. Осредненные аэродинамические характеристики ИСЗ.— Космич. исслед., 1983, **21**, № 5, с. 685—689.
78. Янишин А. М., Дьяченко Л. П. Влияние суточного эффекта верхней атмосферы на параметры круговых орбит ИСЗ.— Наблюдения искусств. небес. тел, 1983, **80**, с. 59—65.
79. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере.— М.: Машиностроение, 1978.— 167 с.
80. Яскевич Э. П., Филатов Е. И. Дополнительные аэродинамические силы и моменты, действующие на тело вращения, закрученное относительно оси симметрии в свободномолекулярном потоке.— Гидроаэромеханика и теория упругости, 1967, **6**, с. 17—23.
81. Beletskii V. V. Der Einfluß der aerodynamischen Momente auf die Drehbewegung der Proton-Satelliten.— Z. Flugwiss., 1972, **6**, S 55—63.
82. COSPAR International reference atmosphere 1965 (CIRA 1965).— Amsterdam: North-Holl. publ. col., 1965.— 313 p.
83. Hagihara Y. Rotation of an earth satellite in flight along its Orbit.— Smithsonian Contrb. Astrophys., 1961, **5**, N 9, p. 113—143.
84. Kent R., Johnson. Effect of dissipative aerodynamic torque on satellite rotation.— J. Spacecraft and Rockets, 1968, **5**, N 4, p. 408—413.
85. Lundquist C. Spacial Orientation of the Explorer Satellites.— Space J., 1958, **1**, N 3, p. 15—20.
86. Merson R. H., King-Hele D. G. Use of artificial satellites to explore the earth's gravitational field: Results from sputnik 2 (1958).— Nature, 1958, **182**, p. 640.
87. Moe K. Recent experimental evidence bearing on satellite drag coefficients.— AJAA Journal, 1968, **6**, N 7, p. 1375—1377.
88. Naumann R. I. Recent information gained from satellite orientation measurement.— Planet. and Space Sci., 1961, **7**, p. 445—453.
89. Naumann R. I. Observed torque-producing forces acting satellites.— In: Dynamics of matellites, symposium (Paris, May 28—30, 1962). Berlin etc.: Springer, 1963, p. 238—256.
90. Notni P., Oleak H. Der Lichtwechsel der Träger rakete von Sputnik III.— Berlin: Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss., 1959, Bd **1**, N 7/10, S. 394—396.
91. Pearson P. Precession of VK-3 satellite due to aerodynamic torques.— Spaceflight, 1966, **8**, N 3, p. 98—101.
92. Rosenstock H. B. The Effect of the Earth's magnetic field on the spin of the satellite.— Astron. acta, 1957, **3**, N 3, p. 215—226.
93. Schrello O. Mi. Approximate free-molecule aerodynamic characteristics.— ARS Journal, 1960, **30**, N 8, p. 765—767.
94. Wang Ch. T. Free molecular flow over a rotating sphere.— AJAA Journal, 1972, **10**, N 5, p. 713—714.
95. Warwick I. W. Decey of spin in sputnik 1.— Planet. and Space Sci., 1959, **1**, N 1, p. 43—49.
96. Weggins L. E. Relative magnitudes on space-environment torques on a satellite.— AIAA Journal, 1964, **2**, N 4, p. 232—233.
97. Williams V., Meadows A. J. Eddy current torques, air torques, and the spin decay of cylindrical rocket bodies in orbit.— Planet. and Space Sci., 1978, **26**, № 8, p. 721—726.

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Параметры взаимодействия верхней атмосферы Земли с поверхностью спутника . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1. Верхняя атмосфера Земли и ее модели . . . . .	10
1.2. Свободномолекулярный поток и его характеристики . . . . .	16
1.3. Аэродинамические силы, действующие на элементарную площадку . . . . .	18
1.4. Схемы взаимодействия потока разреженного газа с поверхностью спутника . . . . .	20
<b>Глава 2. Силы и моменты, действующие на выпуклые тела вращения . . . . .</b>	<b>26</b>
2.1. Произвольно вращающиеся осесимметричные тела . . . . .	27
2.2. Тела простой геометрической формы . . . . .	31
2.3. Эффект Магнуса . . . . .	39
2.4. Аэродинамические характеристики вращающихся тел с учетом конечности скоростного отношения . . . . .	41
2.5. Нестационарное обтекание осесимметричных тел с учетом конечности скоростного отношения . . . . .	48
2.6. Аэроградиентный момент . . . . .	53
2.7. Аппроксимация моментов аэродинамических сил . . . . .	55
<b>Глава 3. Аэродинамические характеристики тел вращения относительно смещенного центра масс . . . . .</b>	<b>62</b>
3.1. Авторотационный момент и момент смещения . . . . .	62
3.2. Момент пропеллирования . . . . .	65
3.3. Моменты аэродинамического демпфирования составных тел . . . . .	69
3.4. Сравнительная оценка различных моментов сил . . . . .	74
<b>Глава 4. Динамика вращательного движения космических аппаратов простой формы . . . . .</b>	<b>78</b>
4.1. Системы координат и матрицы перехода . . . . .	78
4.2. Уравнения движения в эволюционных элементах . . . . .	81
4.3. Возмущенное движение в общем случае при наличии силовой функции . . . . .	85
4.4. Влияние восстанавливающего момента на эволюционное движение спутника . . . . .	88
4.5. Влияние вращения атмосферы на вековые возмущения . . . . .	96
4.6. Периодические возмущения. Анализ движения на круговой орбите . . . . .	99
4.7. Влияние момента сил аэродинамической диссипации . . . . .	101
4.8. Аэродинамическое демпфирование сферического спутника с учетом зонального ветра . . . . .	108

<b>Глава 5. Динамика вращательного движения космических аппаратов со смещенным центром масс . . . . .</b>	<b>115</b>
5.1. Совместное влияние восстанавливающего момента и момента смещения на эволюцию вращения спутника . . . . .	115
5.2. Авторотационный момент . . . . .	119
5.3. Авторотационный эффект при наличии резонанса . . . . .	122
5.4. Учет эллиптичности орбиты и асимметрии спутника в динамике авторотационного эффекта . . . . .	125
5.5. Момент аэродинамических сил при наличии смещения в общей постановке . . . . .	128
5.6. Динамика эффекта пропеллирования. Модельные задачи	133
5.7. Влияние трехосности спутника на динамику пропеллирующего момента . . . . .	140
5.8. Динамика пропеллирующего эффекта при диффузном и диффузно-зеркальном отражении . . . . .	145
5.9. Средний коэффициент лобового сопротивления спутника	152
5.10. Влияние добавочных факторов на вращательное движение спутника . . . . .	157
<b>Глава 6. Обратные задачи в динамике вращательного движения спутников . . . . .</b>	<b>161</b>
6.1. Определение параметров диффузной схемы взаимодействия из эффекта пропеллирования спутников «Протон» . . . . .	162
6.2. Определение параметров диффузно-зеркальной схемы взаимодействия из эффекта пропеллирования спутников «Протон» . . . . .	164
6.3. Определение параметров атмосферы по данным о торможении спутника «Протон-2» с учетом его ориентации . . . . .	167
6.4. Оценка параметров взаимодействия по данным об управляющем моменте, действующем на спутник «Космос-230»	169
6.5. Причины торможения вращения некоторых ИСЗ . . . . .	173
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>181</b>

ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ БЕЛЕЦКИЙ  
АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ЯНШИИ

**ВЛИЯНИЕ  
АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ  
НА ВРАЩАТЕЛЬНОЕ  
ДВИЖЕНИЕ  
ИСКУССТВЕННЫХ  
СПУТНИКОВ**

---

*Утверждено к печати  
ученым советом Института технической механики  
АН УССР*

Редактор Д. И. Попович  
Художественный редактор И. П. Антонюк  
Технический редактор С. Г. Максимова  
Корректоры Т. А. Обора,  
Р. С. Коган, С. Е. Ноткина

---

Информ. бланк № 6195

Сдано в набор 22.11.83. Подп. в печ. 12.04.84. БФ 03387.  
Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бум тип. № 1. Лит. гарн. Выс.  
печ. Усл. печ л. 9,87. Усл. кр.-отт. 10,19. Уч.-изд. л.  
10,59. Тираж 700 экз. Заказ 3—3001. Цена 1 р. 60 к.

Издательство «Наукова думка». 252601 Киев 4, ул. Ре-  
пина, 3.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республи-  
канского производственного объединения «Полиграф-  
книга». 252057, Киев, ул. Долженко, 3 в Нестеровской  
городской типографии. Нестеров, Львовской обл., ул.  
Горького, 8, Зак. № 2939.