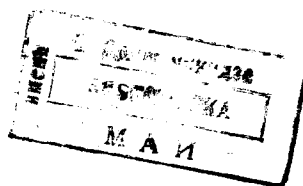


Р. Ф. Аппазов
О. Г. Сытин

МЕТОДЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ТРАЕКТОРИЙ
НОСИТЕЛЕЙ
И СПУТНИКОВ
ЗЕМЛИ

Р.Ф. АППАЗОВ, О.Г. СЫТИН

МЕТОДЫ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ТРАЕКТОРИЙ
НОСИТЕЛЕЙ
И СПУТНИКОВ
ЗЕМЛИ



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 39.6
А76
УДК 620.783:525

Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 440 с. — (Механика космического полета). — (Для использования в учебном процессе).

Излагаются теоретические основы механики полета и прикладные методы баллистических расчетов дальних ракет, ракет-носителей и околоземных космических аппаратов. Основное внимание уделено методам решения баллистических задач, применяемым как при проектировании самих летательных аппаратов, так и при проектировании их траекторий.

Для специалистов в области ракетно-космической техники и студентов вузов соответствующих специальностей.

Табл. 11. Ил. 132. Библиогр. 41 назв.

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования СССР для использования в учебном процессе студентами высших технических учебных заведений

Рецензенты:

доктор технических наук *И.К. Бажинов*,

доктор технических наук *А.А. Дмитриевский*

Рефат Фазылович Аппазов

Олег Георгиевич Сытин

МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ НОСИТЕЛЕЙ И СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Серия "Механика космического полета", № 20

Редактор *Ю.Г. Гуревич*

Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*

Технические редакторы *С.В. Геворкян, В.Н. Никитина*

Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 12966

Сдано в набор 05.12.86. Подписано к печати 08.04.87. Т-11121

Формат 60 x 90 1/16. Бумага офсетная № 1

Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная

Усл.печ.л. 27,5. Усл.кр.-от. 27,5. Уч.-издл. 30,20

Тираж 2250 экз. Тип зак. 602. Цена 4 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени

издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"

630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

© Издательство "Наука".

Главная редакция
физико-математической
литературы, 1987

А $\frac{1703030000-100}{053(02)-87}$ 86-87

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ	
ВВЕДЕНИЕ В БАЛЛИСТИКУ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА	11
Глава 1. Основные задачи баллистики летательного аппарата	11
§ 1.1. История развития баллистики	11
§ 1.2. Задачи баллистики	14
Глава 2. Баллистическая вычислительная модель	21
§ 2.1. Общие сведения о системах координат и измерения времени	21
§ 2.2. Системы координат	24
§ 2.3. Модели фигуры и гравитационного поля Земли	27
§ 2.4. Модели атмосферы Земли	32
§ 2.5. Преобразования при переходе между системами координат	35
2.5.1. Общее правило преобразования для систем координат, имеющих общее начало (35).	
2.5.2. Переход между СК № 1 и СК № 2 (36).	
2.5.3. Переход между СК № 4 и СК № 5 (39).	
2.5.4. Переход между СК № 6 и СК № 5 (43).	
2.5.5. Переход между СК № 6 и СК № 4 (46).	
2.5.6. Уточнение СК № 4 и СК № 5 (47)	
ЧАСТЬ ВТОРАЯ	
ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ И В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ	50
Глава 3. Уравнения движения летательного аппарата в векторной форме ..	50
§ 3.1. Математическая модель движения летательного аппарата с работающим двигателем	50
§ 3.2. Уравнение сил	52
§ 3.3. Уравнение моментов	55
§ 3.4. Реактивные силы и моменты	59
Глава 4. Внешние силы и моменты, действующие на летательный аппарат ..	69
§ 4.1. Сила притяжения	69
§ 4.2. Аэродинамические силы	73
§ 4.3. Управление и управляющие силы	77
4.3.1. Система управления (77).	
4.3.2. Управляющие силы (80).	
§ 4.4. Моменты сил	82
§ 4.5. Демпфирующие моменты	84

Глава 5. Рабочие уравнения движения летательного аппарата	86
§ 5.1. Разложение сил и моментов по осям системы координат	86
§ 5.2. Уравнения движения в координатной форме	93
§ 5.3. Упрощение уравнений движения	95
5.3.1. Упрощение уравнений движения на активном участке траектории (96). 5.3.2. Упрощение уравнений движения на участке свободного полета (108).	
Глава 6. Простейшие случаи интегрирования уравнений движения летательного аппарата с работающим двигателем	115
§ 6.1. Уравнение Мещерского	115
§ 6.2. Простейшие случаи интегрирования уравнений движения	118
6.2.1. Первая задача Циолковского (118). 6.2.2. Формула Циолковского для многоступенчатой ракеты (123). 6.2.3. Вторая задача Циолковского (125).	
Глава 7. Методы проектировочных расчетов траекторий	127
§ 7.1. Этапы проектирования	127
§ 7.2. Атмосферная часть активного участка траектории	131
7.2.1. Структурный состав скорости (131). 7.2.2. Основные проектно-баллистические параметры (134). 7.2.3. О методах вычисления интегралов I_1, I_2, I_3 (138).	
§ 7.3. Приближенный метод расчета траектории на внеатмосферной части	144
7.3.1. Метод расчета при разложении g по степеням координат (144). 7.3.2. Случай пространственного движения во вращающейся системе координат (149).	
Глава 8. Движение головной части в атмосфере	159
§ 8.1. Общий случай движения	160
8.1.1. Особенности движения головной части (160). 8.1.2. Уравнения движения и их интегрирование (162). 8.1.3. Приближенный метод интегрирования уравнений движения головной части с учетом колебаний (166).	
§ 8.2. Приближенное решение уравнений невозмущенного движения головной части в плотных слоях атмосферы	172

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА 178

Глава 9. Теория невозмущенного кеплерова движения	178
§ 9.1. Первые интегралы движения	179
9.1.1. Интеграл площадей (179). 9.1.2. Интеграл Лапласа (181). 9.1.3. Интеграл энергии (182).	
§ 9.2. Уравнение орбиты	184
§ 9.3. Скорость орбитального движения	186
§ 9.4. Характеристики ки орбитального движения в трехмерном пространстве	191
§ 9.5. Уравнение Кеплера. Третий закон Кеплера	195
§ 9.6. Задачи определения орбиты	198
9.6.1. Определение орбиты по трем векторам положения или скорости (199). 9.6.2. Условия совместимости в двух положениях (201). 9.6.3. Определение орбиты по двум векторам положения и величине большой полуоси (205). 9.6.4. Задача Ламберта (207). 9.6.5. Определение орбиты по двум векторам скорости и величине большой полуоси или времени полета (211)	

Глава 10. Основы баллистического проектирования орбитального полета . .	214
§ 10.1. Особенности движения летательного аппарата в нецентральной гравитационном поле	214
§ 10.2. Относительное движение двух летательных аппаратов в окрестности круговой орбиты,	220
§ 10.3. Условия освещенности и видимости в орбитальном полете	230
10.3.1. Определение геометрических характеристик условий (230).	
10.3.2. Изменение условий в реальном полете (234).	
§ 10.4. Определение момента старта	238
§ 10.5. Маневрирование на орбите	241
10.5.1. Межорбитальный переход Гомана (243).	
10.5.2. Биэллиптический переход (245).	
10.5.3. Котангенциальный переход (247).	
10.5.4. Поворот плоскости орбиты (248).	
10.5.5. Использование результатов Гоудела при решении задач межорбитального перелета (249).	
10.5.6. Уравнение коррекции (253).	
10.5.7. Задача сближения (257)	
§ 10.6. Вариации характеристик кеплерова движения	266
Глава 11. Приложения параболической и эллиптической теорий	270
§ 11.1. Параболическая теория и ее приложения	271
11.1.1. Свойства параболических траекторий (271).	
11.1.2. Семейство траекторий с нулевой начальной высотой и одинаковой начальной скоростью (274).	
11.1.3. Производные от конечных параметров движения по начальным (276)	
§ 11.2. Приложения эллиптической теории	278
§ 11.3. Переход от относительного движения к абсолютному	293
11.3.1. Определение начальных условий абсолютного движения (294).	
11.3.2. Возврат к относительному движению (296)	
ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ	
РАССЕИВАНИЕ	298
Глава 12. Постановка задачи о рассеивании	298
§ 12.1. Суть проблемы	298
§ 12.2. Возмущающие факторы	302
§ 12.3. Модель возмущенного движения летательного аппарата на активном участке траектории	305
Глава 13. Методы расчета возмущенного движения	309
§ 13.1. Дифференциальные уравнения в отклонениях	309
§ 13.2. Уравнения в вариациях	315
§ 13.3. Применение сопряженной системы дифференциальных уравнений	319
§ 13.4. Метод конечных разностей	322
Глава 14. Некоторые сведения из теории вероятностей и математической статистики	324
§ 14.1. Основные характеристики распределения случайных величин	324
§ 14.2. Характеристики распределения случайного вектора	327
§ 14.3. Числовые характеристики функций случайных величин	333
§ 14.4. Метод статистического моделирования	336
Глава 15. Отклонение параметров движения в конце активного участка . . .	342
§ 15.1. Влияние метода управления выключением двигателя на отклонение кинематических параметров	342
15.1.1. Понятие о функционале и методе управления выключением двигателя (342).	
15.1.2. Понятие о методических ошибках (345)	

§ 15.2. Гироскопический интегратор перегрузок	346
15.2.1. Принцип работы интегратора (346). 15.2.2. Уравнение интегратора (349). 15.2.3. Применение интегратора (351)	
§ 15.3. Отклонение кинематических параметров в момент выключения двигателя	352
15.3.1. Выключение двигателя по времени его работы (по функционалу $t_{\text{к}} = t_{\text{к}}^*$) (353). 15.3.2. Выключение двигателя по заданной скорости (по функционалу $v_{\text{к}} = v_{\text{к}}^*$) (354). 15.3.3. Выключение двигателя по кажущейся скорости (по функционалу $v_{\text{с}} = v_{\text{с}}^*$) (356)	
Глава 16. Расчет рассеивания	359
§ 16.1. Рассеивание целевой функции	359
§ 16.2. Рассеивание баллистической ракеты по дальности	362
16.2.1. Составляющие рассеивания (362). 16.2.2. Рассеивание за счет активного участка (363). 16.2.3. Рассеивание за счет переходного участка (368). 16.2.4. Рассеивание за счет участка свободного полета (370). 16.2.5. Суммарное рассеивание по дальности (372)	
§ 16.3. Способы уменьшения рассеивания	372
16.3.1. Участок свободного полета (372). 16.3.2. Переходный участок (373). 16.3.3. Активный участок (374).	
§ 16.4. Оптимальные направления измерений	382
§ 16.5. Повышение точности и надежности измерений на основе использования принципа группирования	385
Глава 17. Гарантийный запас топлива	388
§ 17.1. Постановка вопроса	389
§ 17.2. Метод расчета гарантийного запаса топлива	391
§ 17.3. Влияние возмущающих факторов на величину гарантийного запаса топлива	396
§ 17.4. Некоторые пути уменьшения гарантийного запаса топлива	400
17.4.1. Регулирование соотношения расхода компонент (400). 17.4.2. Синхронизация опорожнения баков в многоблочных ракетах (401). 17.4.3. Совмещение гарантийных запасов ступеней (403)	
Глава 18. Выбор формы траектории	405
§ 18.1. Постановка задачи	405
§ 18.2. Основные требования и ограничения	410
§ 18.3. Программа максимальной дальности	413
§ 18.4. Программа выведения на орбиту максимального полезного груза	418
§ 18.5. Программа минимального рассеивания	422
§ 18.6. Особые участки при выборе программы	427
Основные обозначения	431
Список литературы	434
Предметный указатель	436

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как показывает опыт последних 10—15 лет, закономерной тенденцией в развитии ракетно-космической техники стало то, что основная масса грузопотока проходит через орбиту искусственных спутников Земли (ИСЗ), каково бы ни было дальнейшее предназначение полезного груза: возвращение на Землю после совершения самостоятельного орбитального полета, сближение и стыковка с другим объектом на орбите, дальнейший полет к планетам, выведение на высокоэллиптическую или околостационарную орбиту и т.д. Это обстоятельство стимулировало появление предлагаемой читателю книги, посвященной проектированию траекторий носителей и спутников Земли, т.е. траекторий выведения и орбитального движения летательных аппаратов (ЛА)¹).

Решение задачи о движении ЛА является одной из важнейших проблем, на которых базируется проектирование в целом, так как движение — это тот процесс, в результате которого ЛА выполняет свое назначение. Движение должно быть организовано рационально, с учетом ряда ограничивающих факторов и условий, стесняющих наш выбор. В некоторых случаях имеется единственная траектория, решающая поставленную перед ЛА задачу, — ее и надо найти; в других случаях из множества возможных решений надо выбрать одно, являющееся в каком-то смысле наилучшим. От того, насколько удачно решена задача о движении, зависят важнейшие характеристики ЛА (начальная масса, тяга двигательной установки, масса полезного груза на орбите и т.д.) и задачи полета (надежность достижения заданной цели, эффективность функционирования ЛА или системы ЛА, дальность полета, точность выведения и т.д.):

Решение задачи о движении ЛА, конечно, не сводится к расчету какой-то одной траектории при заданных характеристиках ЛА и известных настройках его систем и агрегатов — она перерастает в комплексную задачу проектирования траекторий. В зависимости от конечной цели такого проектирования можно перечислить довольно большое количество задач, отличающихся применяемыми методами и структурой их решения. Все эти задачи, как правило, включают в себя задачу расчета траектории почти как стандартную процедуру, которая в свою очередь может использовать и очень

¹) Под ЛА будем понимать в общем случае баллистические ракеты, ракеты-носители и аппараты различного назначения, выводимые в космическое пространство. В случае необходимости смысл термина ЛА будет конкретизироваться.

сложные, и очень простые методы расчета, — все зависит от степени детализации, необходимой для описания процесса полета.

Изучением методов расчета траекторий и решением задач по выбору или проектированию траекторий в ракетно-космической технике занимается *баллистика*. К компетенции баллистики относится также разработка методов определения и прогнозирования движения по результатам траекторных измерений — этот раздел баллистики можно было бы назвать *экспериментальной баллистикой*. Мы почти не будем касаться этого раздела, а интересующемуся читателю порекомендуем ряд источников (например, [4, 5]), которые посвящены в основном этим методам.

Что касается того раздела баллистики, которым мы предполагаем заниматься в нашей книге, то здесь также можно сослаться на работы ряда авторов, содержащие в том или ином объеме отдельные части интересующих нас вопросов. На этих публикациях следовало бы остановиться подробнее.

Книга Ю.Г. Сихарулидзе "Баллистика летательных аппаратов" [25] издана в 1982 г. и рекомендована как учебное пособие для студентов вузов. Она охватывает довольно широкий круг вопросов, начиная от выведения ЛА и кончая межпланетными траекториями, включая участок спуска на поверхность планеты, и ориентирована на решение проектных задач. В книге А.А. Лебедева и Н.Ф. Герасюты "Баллистика ракет" [19], вышедшей в свет в 1970 г., основное внимание уделено некоторым специальным и достаточно тонким вопросам разработки методов управления движением центра масс баллистических ракет, определению рассеивания и предельных характеристик ракет по дальности полета, а также составлению так называемых таблиц стрельбы. Необходимо упомянуть и книгу "Движение ракет" [9], написанную А.А. Дмитриевским, В.П. Казаковцевым, В.Ф. Устиновым, Л.Н. Лысенко, В.Д. Жилейкиным, Ю.Ф. Кольцовым (1968). Она охватывает теорию движения ракет, имеющих в основном боевое назначение, — это ракеты класса "Земля — Земля" и ракеты, способные поражать движущиеся цели.

К 1966 г. относится издание книги [2], посвященной вопросам теории и практики баллистического проектирования определенного типа ракет.

Как на одну из основополагающих теоретических работ в области космической баллистики укажем на книгу П.Е. Эльясберга "Введение в теорию полета искусственных спутников Земли" [34], опубликованную в 1965 г. и ставшую настольной книгой баллистиков. Она посвящена основным закономерностям, определяющим движение спутника на пассивном участке траектории, причем объем и уровень изложения материала полностью отвечают требованиям решения практических задач.

В методологическом плане следует отметить работу Д.Е. Охочимского [23].

Большую роль в разработке методов оптимизации движения носителей на участке выведения на орбиту сыграла работа Д.Е. Охочимского и Т.М. Энеева "Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли" [22], опубликованная в 1957 г.

Существует также немало работ зарубежных авторов, в которых в той или иной мере затрагиваются вопросы проектирования траекторий. Среди них следует отметить монографии К. Эрике "Космический полет"

[36, 37], Р. Бэттина "Наведение в космосе" [5], Д.Ф. Лоудена "Оптимальные траектории для космической навигации" [20], П. Эскобала "Методы определения орбит" [38] и "Методы астродинамики" [39].

Другие источники, ссылки на которые имеются в тексте, читатель найдет в списке литературы.

Преследуя основную цель — в едином плане изложить вопросы проектирования траекторий носителей и спутников Земли — авторы предлагают к решению ряда задач свой подход, основанный на практическом опыте. В этой связи хотелось бы отметить следующее. Как нам представляется, по мере ввода в эксплуатацию более совершенных ЭВМ, обладающих все возрастающими возможностями в отношении быстродействия и объема памяти, в инженерной практике все сильнее проявляется тенденция к решению любых задач прямыми методами расчета траекторий, не считаясь ни с количеством таких траекторий, ни со сложностями, связанными с точным описанием модели ЛА и его движения. Это приводит к тому, что постепенно предаются забвению хорошо разработанные, весьма экономные методы исследования и расчета, без которых нельзя было обойтись раньше, когда не было ЭВМ, и которые могут значительно ускорить расчеты и сегодня, будучи "переложены на плечи" ЭВМ. Речь идет о приближенных методах расчета траекторий при решении краевых задач, о методах расчета возмущенного движения с помощью линеаризации уравнений движения, об использовании ряда свойств орбитального движения при планировании полета и решении некоторых других часто встречающихся задач. И дело не только и не столько в убыстрении счета и экономии машинного времени, сколько в сохранении понимания физической стороны задачи, в способности искать и находить альтернативные варианты решения, в привитии вкуса к аналитическому осмысливанию расчетных результатов, т.е. в необходимости избежать потери того, что является неперменным качеством баллистики. Ведь именно проектант должен уметь быстро оценить, прикинуть "на пальцах", учесть вопросы не баллистические, но примыкающие к задаче или даже определяющие ее, увидеть, завязать задачу в целом.

Материал книги разделен на четыре части. В первой части рассказывается об истории развития баллистики, о ее связи с другими дисциплинами общего проектирования, дается примерный перечень задач, решаемых в баллистике. Далее вводится понятие баллистической вычислительной модели и даются ее компоненты: системы координат и отсчета времени, формулы преобразования координат, скорости и ускорения, внешние условия движения ЛА, модели фигуры Земли, ее гравитационного поля и атмосферы.

Вторая часть посвящена изучению внеорбитального движения ЛА. В нее включены вопросы движения носителя на участке выведения и движения головных частей баллистических ракет на участке свободного полета. Сначала предлагается вывод наиболее общих уравнений управляемого движения ЛА с работающим двигателем в нецентральной гравитационном поле Земли и при воздействии атмосферы. Рассматриваются силы и моменты, действующие на ЛА, уравнения движения приводятся к виду, удобному для проведения расчетов при различной степени упрощений в зависимости от стадии проектирования. В процессе постепенных упрощений

уравнения движения доводятся до простейшего вида, допускающего получение решения в конечных аналитических выражениях. Далее даются методы расчета движения ЛА на участке свободного полета и движения головных частей в атмосфере. При этом рассматриваются как сложные случаи, в которых учитывается колебательный характер движения ЛА около центра масс, так и более простые случаи, а также приближенные методы, позволяющие проводить оценки по некоторым важным характеристикам движения.

В третью часть включены вопросы баллистики орбитального движения ЛА. Дается общая теория невозмущенного кеплерова движения, и на базе теоретического материала проводится решение ряда практически важных задач определения орбит. Значительное внимание уделено основам баллистического проектирования орбитального полета и особенностям движения в нецентральной гравитационном поле. Рассматриваются условия освещенности и видимости ЛА, закономерности их изменения в ходе длительного полета и использование этих закономерностей при проектировании. Значительное внимание уделено вопросам маневрирования на орбите, и в связи с задачами стыковки на орбите рассмотрено относительное движение двух ЛА. В заключение приводится решение наиболее часто встречающихся задач по баллистике дальних ракет с применением формул параболической и эллиптической теорий полета.

Последняя, четвертая, часть начинается с постановки задачи о рассеивании и описания возмущенного движения ЛА. Даются методы расчета возмущенного движения и рекомендации по тем или иным случаям их приложения. Рассматривается влияние способа выключения двигателя на формирование траектории и дается метод оценки рассеивания с учетом действующих возмущений. Особое внимание уделено способам уменьшения рассеивания. Для лучшего понимания содержания вопроса введена специальная глава, в которой приводятся основные необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики. В эту часть книги включено и рассмотрение задачи о расчете гарантийных запасов топлива. Четвертая часть заканчивается изложением особенностей выбора (с учетом рассеивания) формы траектории, или, другими словами, программы угла тангажа для носителей, выводящих ЛА на орбиты ИСЗ, и для дальних баллистических ракет.

Книга в основном адресована студентам старших курсов вузов, готовящих специалистов по ракетно-космической технике. Она может быть полезной также для специалистов, работающих в НИИ и КБ, а также при подготовке аспирантов. При написании книги предполагалось, что читатель имеет подготовку по высшей математике в объеме программы вуза и знаком с ракетно-космической техникой в объеме книги В.И. Феодосьева "Основы техники ракетного полета" [30], которую можно рассматривать как базовую.

Авторы благодарят А.А. Чернова, оказавшего помощь в написании § 13.1, 13.2, и М.С. Флорианского, любезно предоставившего часть материала § 7.3., который ранее не публиковался.

Глубокую признательность авторы выражают С.С. Лаврову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд замечаний, которые были учтены при окончательной подготовке книги.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ БАЛЛИСТИКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Приступая к описанию основных задач, решаемых в баллистике, мы кратко остановимся на истории развития баллистики в ракетно-космической технике, а затем перейдем к изложению содержания этих задач и пояснению их технического существа. Все они здесь рассматриваются под углом зрения потребностей проектирования в самом широком понимании. Действительно, баллистические расчеты сопровождают весь процесс разработки ЛА начиная от самой ранней стадии проектирования и кончая летно-конструкторскими испытаниями.

Цель, которая преследуется описанием наиболее типичных баллистических задач, — дать более или менее полное представление о месте баллистики в комплексе проблем проектирования в целом.

§ 1.1. История развития баллистики

Термин "баллистика" пришел в ракетно-космическую технику из артиллерии, где он означает науку о движении снарядов. В классической артиллерии различают внутреннюю и внешнюю баллистику в зависимости от того, изучается ли горение пороха и движение снаряда в канале ствола или движение в свободном полете после вылета снаряда из орудия. В баллистике наряду с теоретическими методами исследований широко применяются экспериментальные методы, а для ускорения весьма трудоемких расчетов разработан ряд эмпирических методов. Призванная решать в основном сугубо практические задачи, баллистика развивалась как дисциплина прикладная. За несколько последних десятилетий термин "баллистика" прочно укоренился и в ракетно-космической технике. Мы употребляем его, когда одним словом хотим выразить тот факт, что речь идет о полете ракеты, спутника Земли или межпланетного космического аппарата. Термины "космическая баллистика", "баллистическое обеспечение" и ряд других стали настолько привычными, что почти не требуют пояснений. Вместо слов "теория движения" или "теория полета" вполне уместным кажется применение слова "баллистика". Может быть, последнее даже в каком-то смысле точнее отражает существо вопроса, так как одной только теорией дело не ограничивается, хотя теоретические исследования являются основой, фундаментом, на котором зиждется изучение движения и снарядов и летательных аппаратов любого назначения.

Несмотря на то, что термин "баллистика" заимствован из артиллерии, очень немного удалось использовать из методов артиллерийской бал-

листики при разработке теории движения ракет и космических аппаратов. Это объясняется слишком большим различием в характере и условиях движения снарядов, ракет и космических аппаратов.

Так, набор скорости снарядом происходит с ускорениями, достигающими десятков и сотен тысяч метров в секунду за секунду, время достижения предельной скорости исчисляется сотыми долями секунды, а пройденный при этом путь составляет всего несколько метров. Движение ракеты происходит при ускорениях, не превышающих несколько десятков метров в секунду за секунду, время набора скорости исчисляется сотнями секунд, за это время ракета проходит расстояние, измеряемое сотнями, а в некоторых случаях тысячами километров. В процессе набора скорости масса ракеты интенсивно изменяется за счет выгорания топлива, причем в конце разгона от начальной массы остаются десятки или даже несколько процентов.

После окончания процесса набора скорости дальнейший полет артиллерийского снаряда происходит в весьма плотных слоях атмосферы, при этом для придания его движению устойчивого характера снаряд в канале орудия закручивается вокруг продольной оси со скоростями, достигающими десятков тысяч оборотов в минуту. Полет ракеты после набора скорости протекает в весьма разреженных слоях атмосферы, и лишь на самом конечном участке траектории полезный груз погружается в атмосферу. Движение ИСЗ происходит при довольно слабом влиянии атмосферы, а в некоторых случаях (например, на стационарных орбитах) практически в безвоздушном пространстве в полном смысле этого слова. Зато тут может оказаться необходимым учет влияния притяжений Солнца и Луны, а в отдельных задачах — и других факторов. Если при расчете движения артиллерийского снаряда особенности формы Земли и правильное описание поля ее притяжения не играют большой роли ввиду малости расстояний, покрываемых снарядом, то при расчете движения ракет и особенно спутников Земли эти факторы надо учитывать с наибольшей степенью точности.

Проводя сравнение ракет с артиллерией, нельзя не сказать о точности реализаций их траекторий. Относительная точность лучших артиллерийских систем (т.е. отношение максимального отклонения снаряда от цели к дальности) находится в пределах от 0,02 до 0,01; для ракет аналогичная величина составляет 10^{-4} . Для достижения подобной точности допустимая погрешность в скорости снаряда при его вылете из канала ствола не должна превышать 0,5—1%, для ракеты 0,001—0,002%. Это означает, что скорость ракет должна выдерживаться точнее, чем скорость снарядов, в 500—1000 раз.

То, что ракета является единственным средством выведения космического аппарата на орбиту спутника Земли или на траекторию перелета к другим планетам, известно всем. Известно и то, что, если ракету рассматривать как средство доставки полезного груза в пределах Земли, она решает эту задачу быстрее любых других транспортных средств. Это достигается благодаря высокому уровню энергии, которая сообщается доставляемому грузу.

Тело массой 3 т, доставляемое ракетой на расстояние 10—12 тыс. км, имеет скорость около 7000 м/с и обладает кинетической энергией $mv^2/2 = 3 \cdot 7000^2/2 \approx 0,74 \cdot 10^8$ т·м²/с². Такой же энергией будет обладать

железнодорожный состав массой 370 000 т, движущийся со скоростью 20 м/с (72 км/ч). Такой состав протянется на 120 км!

Исследование движения ЛА, как и любого другого движения, является в общем случае задачей механики. Поэтому главной теоретической основой баллистики является теоретическая механика. По существу, баллистику можно считать одной из ветвей теоретической механики. Изучение движения ракет при работающем двигателе, т.е. на так называемом *активном участке траектории*, оказало большое влияние на развитие раздела механики, посвященного движению тела переменной массы, хотя в механике и раньше рассматривались задачи, относящиеся к физическим процессам или явлениям природы, которые протекали в условиях переменности массы движущегося тела. Из отечественных ученых наиболее существенный вклад в развитие механики тела переменной массы внес И.В. Мещерский (1859—1935), автор всем известного задачника по теоретической механике.

Начало систематических исследований по проблемам движения ракет относится к концу XIX в. После того как К.Э. Циолковским (1857—1935), Ф.А. Цандером (1887—1933), Г. Гансвиндтом (1856—1934), Р.Эно-Пельтри (1881—1957), Р. Годдардом (1882—1945), Г. Обертом (1894), В. Гоманом (1880—1943) были разработаны принципиальные теоретические положения и указаны пути решения общетехнических проблем, наступило время практической реализации полетов ЛА самого различного назначения, использующих ракетный принцип движения. В работах упомянутых авторов не последнее место занимали баллистические проблемы. Это и понятно, потому что проектирование любой ракеты теснейшим образом связано с баллистикой — с баллистическими расчетами, собственно, начинается и ими заканчивается проектирование.

В процессе проектирования ЛА решение вопросов наиболее рационального использования приобретенной энергии опирается на знание законов движения свободно летящих тел. Теоретическим фундаментом исследований является теория движения в центральном поле гравитационных сил, берущая начало от законов движения планет вокруг Солнца, сформулированных Кеплером (1571—1630), и закона всемирного тяготения Ньютона (1643—1727). По мере уточнения формы и поля притяжения Земли появилась необходимость в построении теории, описывающей движение в нецентральной — поле сил. В дальнейшем выяснилось, что при решении многих задач нельзя обойтись без учета влияния Солнца, Луны, планет Солнечной системы, которые в каких-то случаях можно рассматривать как малые возмущения основного движения, а в других — как главный фактор. Разработанные задолго до начала космических полетов классические методы небесной механики нашли эффективное приложение при решении ряда задач космической баллистики.

Помимо принципов механики, баллистика в своих исследованиях использует ряд положений теории вероятностей и математической статистики. Они применяются, так же как и в теории артиллерийской стрельбы, при расчетах точности и рассеивания и при определении связанных с ними оценок или гарантий в отношении выполнения поставленных перед пуском задач.

В баллистике всегда большое внимание уделялось вычислительным методам и средствам, так как баллистические задачи относятся к разряду

наиболее трудоемких. Вплоть до 1940—1945 гг. основным вычислительным средством (и не только для баллистиков) были весьма несовершенные ручные арифмометры, способные выполнять четыре арифметических действия, да, кроме того, в арсенале вычислительных средств артиллерийских баллистиков постоянно находились таблицы логарифмов и антилогарифмов, с помощью которых производились операции деления и умножения, возведения в степень и извлечения корня.

С 1945 г. начали применяться электромеханические клавишные машинки, которые значительно ускорили процесс расчета траекторий. Но даже весьма опытная расчетчица могла рассчитать одну средней трудности траекторию активного участка не менее, чем за три рабочих дня. Появление быстродействующих электронно-вычислительных машин открыло перед баллистикой совершенно новые возможности. Оно оказало сильнейшее воздействие на развитие новых методов вычислительной математики. Тут смело можно говорить о переходе количества в качество. Решение многопараметрических экстремальных задач, систем дифференциальных уравнений с краевыми условиями, вариационных задач стало возможным с помощью численных методов. На современных ЭВМ с их миллионами операций в секунду и с практически неограниченной памятью расчет траектории — дело нескольких секунд или минут.

Основой для решения большинства сложных баллистических задач является расчет траекторий. Однако сам по себе расчет траектории почти никогда не является самоцелью, а подчинен более общим задачам. Решение таких задач складывается очень часто из расчета множества траекторий по исходным данным, выбираемым по определенным правилам, наиболее быстро приводящим к цели. Например, для решения довольно стандартной задачи по нахождению траектории, выводящей полезный груз на орбиту с заданными параметрами, приходится рассчитать по крайней мере несколько десятков траекторий. Однако такой поиск в ряде случаев можно вести и не прибегая к расчету множества траекторий, а используя какие-то известные общие свойства данного вида движений. И только после того как найдено решение, подкрепить его поверочным расчетом траектории. Тут очень важно конкретное содержание решаемой задачи.

§ 1.2. Задачи баллистики

В зависимости от степени детализации можно назвать очень много задач, решаемых в баллистике, и наоборот, множество задач баллистики можно свести лишь к нескольким. Мы попытаемся описать основные задачи, не прибегая ни к той, ни к другой крайности. Принятая нами ниже нумерация задач не характеризует ни степень их важности, ни технологическую последовательность проектирования, ни приоритетность по каким-либо другим признакам. Одна и та же задача может встречаться на разных стадиях проектной разработки, летно-конструкторских испытаний и послеполетного анализа. При этом для ее решения могут применяться разные методы, отличающиеся в основном точностью постановки и точностью конечного результата. Различным будет, конечно, и количество времени, затрачиваемое на решение.

По каждой из задач мы будем давать очень краткие пояснения, чтобы было понятно ее содержание, смысл решения или место в ряду других задач.

1. Расчеты по выбору основных проектно-баллистических параметров ЛА. Эти расчеты допускают применение более или менее грубых методов, так как их основная цель — выявление оптимальных соотношений между важнейшими проектными параметрами ЛА и определение в первом приближении таких значений основных массово-энергетических характеристик, которые обеспечивают выполнение заданных технических требований к проектируемому ЛА. Процесс этот итерационный, и проектные расчеты обычно проводятся в несколько этапов, параллельно с проектно-компоновочной разработкой и весовым анализом с постепенным взаимным уточнением исходных данных.

2. Расчет влияния малых изменений основных проектно-баллистических параметров ЛА на его летно-технические характеристики. Например, влияние изменение сухой массы ракеты на предельную дальность, влияние изменения заправки топливом на массу выводимого на орбиту полезного груза. На основании результатов этих расчетов быстро решаются проектные задачи о компенсации за счет одной группы параметров того ущерба, который может быть нанесен другой группой параметров. Иными словами, расчеты проводятся для определения пропорциональных соответствий между различными проектными параметрами ЛА.

3. Расчет предельных возможностей ЛА (предельной дальности полета, максимального выводимого на орбиту полезного груза, максимально достижимой скорости и т.д.) и расчет гарантийных запасов топлива, предусматриваемых для обеспечения этих предельных характеристик с требуемой надежностью. Эта задача возникает в связи с тем, что основные массовые, энергетические и некоторые другие характеристики ЛА подвержены случайному разбросу внутри заданных допусков, и поэтому каждый конкретный образец ЛА обладает "своей" случайной предельной дальностью, "своим" случайным предельным полезным грузом на орбите, но эти случайные величины нам заранее неизвестны. Предельную же дальность или предельную величину полезного груза надо назначить для всей серии с таким расчетом, чтобы никакие случайности и незнания не могли помешать выполнению поставленной задачи. Это достигается тем, что на борту ЛА предусматривается определенный дополнительный запас топлива, называемый *гарантийным*.

4. Расчет программных функций, относительно которых регулируются движение центра масс и угловые положения ЛА. В этой задаче речь идет, по существу, о задании траектории. В зависимости от состава измерительных и контролирующих систем траектория может быть задана по-разному. В одних случаях задается только закон изменения углового положения продольной оси ЛА, и управление заключается в обеспечении соблюдения этого закона с возможно малыми отклонениями. В других случаях могут быть заданы также и функции, характеризующие движение центра масс, и тогда в задачу управления входит и поддержание в каких-то пределах значений координат, скорости или ускорения ЛА относительно заданных.

5. Анализ возмущающих факторов при полете ЛА и расчет возмущенных траекторий. При разработке системы управления движением ЛА прежде

всего принимаются во внимание характер и величины возмущающих факторов, т.е. причины, отклоняющие траекторию от некоторой номинальной, расчетной. Система управления призвана бороться с вредными влияниями этих возмущений, компенсируя тем или иным способом вызываемые ими нежелательные последствия. Для успешного решения этой задачи и необходимо знать, какое же влияние оказывают на траекторию отдельно взятые возмущения или какая-то совокупность возмущений.

6. Исследование и расчет рассеивания, выбор функционалов, управляющих выключением двигателя. Рассеивание является одной из важнейших технических характеристик ЛА, определяющих эффективность их применения. Исследование и расчет рассеивания — это комплексная задача, включающая регулирование движения и обеспечение близости фактической траектории к расчетной, организацию измерений бортовыми приборами с возможно малыми погрешностями, выбор наиболее выгодной формы траектории, моделирование движения при воздействии возмущений, синтез методов формирования команды на прекращение работы двигателя и др. Видно, что это не только баллистическая задача. Однако общая увязка всех вопросов и получение конечного результата, как правило, возлагается на баллистику. Задачи по расчету программных функций и расчету возмущенных траекторий являются, вообще говоря, составными частями более общей задачи о рассеивании.

7. Расчет районов падения отделяемых частей ракет-носителей. Эта задача в основном имеет отношение к многоступенчатым носителям, для которых характерно отделение использованных блоков, баков, обтекателей и других конструктивных элементов, выполнивших свои функции задолго до окончания активного участка. Естественно, нельзя допустить, чтобы такие части падали на населенные пункты или территории, занятые какими-либо сооружениями, железнодорожные пути и магистральные дороги, судоходные реки или акватории с интенсивным движением. Поэтому весьма важно как можно точнее очертить границы районов, отводимых для приема отделяющихся частей, а также вести поиск в направлении максимального уменьшения размеров таких районов и сокращения их количества путем использования одних и тех же районов при пуске различных носителей.

8. Проведение точных траекторных расчетов и расчета полетного задания на пуск. Эта задача завершает цикл баллистической подготовки к полету и учитывает целый ряд вполне конкретных условий: координаты точки старта, координаты цели, начальный вектор состояния ЛА на орбите, азимут направления пуска, время пуска, состояние атмосферы и др. Расчеты проводятся по самым точным уравнениям и константам, характеризующим окружающие условия и сам ЛА. Выходные результаты таких расчетов составляют исходную информацию для настройки систем и приборов ЛА, участвующих в формировании траектории, в соответствии с поставленной целевой задачей.

9. Баллистический анализ нештатных ситуаций на участке выведения, разработка баллистических принципов выхода из них. Эта задача актуальна для сложных ракетно-космических систем с повышенной вероятностью появления частных неисправностей, но зато обладающих значительными резервными возможностями и (или) позволяющих изменять в ходе полета конечные цели в зависимости от конкретной ситуации. Например, вместо

решения задачи выведения на орбиту пилотируемого корабля с целью его стыковки с другим объектом можно обойтись кратковременным полетом по орбите с возвращением экипажа на Землю, а в некоторых случаях — и вовсе без выведения на орбиту.

10. Расчеты по баллистическому проектированию систем аварийного спасения, определению режимов движения спасаемой части. Если предыдущая задача решается в основном с помощью применения штатных средств, то эта задача требует создания специальных систем, рассчитанных на использование при особых ситуациях, когда выход из создавшегося положения невозможен штатными средствами. Как правило, здесь сложнее и многообразнее режимы движения не только в процессе увода спасаемой части от аварийного носителя, но и при последующем движении. Хотя вероятность возникновения таких ситуаций весьма мала, надежность преодоления их последствий должна быть очень высокой.

11. Расчеты по движению головных частей (ГЧ) баллистических ракет после отделения от носителя. Сюда включаются расчет номинального движения ГЧ как материальной точки, расчет ее движения как свободно летящего тела с учетом колебаний вокруг центра масс, определение влияния на режимы движения отклонений конструктивных параметров ГЧ, возмущений начальных условий движения, внешних факторов и др., а также расчет рассеивания точек падения.

12. Решение задач спуска с орбиты пилотируемых и беспилотных ЛА. Расчеты проводятся для различных типов аппаратов, совершающих управляемый или неуправляемый полет. Одной из важнейших целей этих исследований является разработка бортовых алгоритмов решения задач спуска, обеспечивающих приемлемые условия спуска (а для пилотируемых аппаратов — по возможности комфортные) при использовании аэродинамического качества и удовлетворительное рассеивание, позволяющее минимизировать затраты средств и времени на организацию поиска и эвакуации экипажа и материальной части.

13. Решение баллистических задач по приведению отдельных блоков и частей носителя в заданный район и их спасению. Подобные задачи могут ставиться в интересах научных и технических экспериментов или с целью повторного использования спасаемых частей. Имея общие черты с задачей расчета районов падения и с задачей спуска с орбиты, эти задачи обладают своими особенностями. В отличие от задачи расчета районов падения здесь речь идет не о расчете траектории п а д е н и я, а о расчете траектории с п а с е н и я. Различие же с задачей спуска с орбиты заключается в том, что здесь, как правило, рассматривается возвращение по крутым траекториям со скоростями значительно меньшими, чем орбитальная.

14. Выбор районов посадки в штатных и нештатных ситуациях возвращения спускаемых аппаратов с орбит. Для решения этой задачи прежде всего необходимо проанализировать виток за витком трассу полета спутника относительно поверхности Земли, наметить районы, над которыми естественным образом проходит трасса одного или нескольких витков спутника, оценить пригодность района с точки зрения рельефа местности, удобства сообщения, организации связи и т.д. Затем по сумме сведений обозначить некоторую область, в которую будет производиться посадка при каждом штатном возвращении — это и есть *полигон посадки*. Вдоль трассы каждого из

остальных витков, не проходящих над полигоном, также надо заранее наметить хотя бы по одному небольшому району, в который можно было бы совершить посадку в случае крайней необходимости срочного прекращения полета.

15. Расчет орбитального движения. Эта задача является основой для решения любых других задач, связанных с полетом по орбите. В зависимости от характера требований к расчету движение может рассматриваться в различных постановках: в центральном поле сил, в реальном гравитационном поле Земли (при различных его моделях, отличающихся точностью описания), с учетом или без учета влияния атмосферы, абсолютное движение отдельного ЛА или относительное движение нескольких ЛА. Результаты расчета могут представляться в различных системах координат, исходя из удобства их использования в дальнейших расчетах. Для расчетов могут применяться численные, полуаналитические и аналитические методы.

16. Решение задач по краткосрочному и долгосрочному прогнозированию орбит. Данная задача смыкается с предыдущей и использует ее результаты, но имеет и свои особенности. Здесь речь идет не просто о расчете траектории (например, на данном ее витке) или об определении каких-то характерных ее точек или элементов, а о расчете на более или менее длительном интервале времени (до месяцев или даже годов), в течение которого все элементы орбиты постепенно изменяются, сама орбита деформируется, или, как говорят, эволюционирует. Среди причин, вызывающих эволюцию, есть факторы стабильные и достаточно хорошо изученные (например, нецентральность гравитационного поля Земли), есть факторы изменчивые, носящие периодический или случайный характер (например, плотность верхней атмосферы). В таких случаях уже недостаточно ограничиться каким-то одним расчетом, а надо дать оценки точности его результата, назвать границы, в пределах которых может колебаться интересующая нас характеристика (например, время существования спутника).

17. Расчет баллистической обстановки при движении ЛА по орбите. Под баллистической обстановкой понимают расположение относительно орбиты освещенных и теневых участков самой орбиты и поверхности Земли, возможность наблюдения определенных планет, звезд, Солнца, Луны, их угловые координаты, возможность связи между спутником и отдельными участками Земли, в том числе с измерительными пунктами, условия взаимной связи между различными объектами, расположенными на своих орбитах, например с навигационными спутниками, и ряд других характеристик. Понятно, что решение подобных задач предполагает, кроме знания движения ЛА, наличие информации о координатах других объектов, которые могут быть либо заданы, либо их надо определять, решая задачу о движении этих объектов параллельно с определением движения ЛА.

18. Разработка баллистической схемы полета одного или нескольких спутников Земли. Под баллистической схемой понимают последовательность стартов спутников, назначение параметров их орбит, распределение между спутниками и во времени основных баллистических операций по изменению их орбит с целью эффективного решения поставленных задач с наименьшими затратами энергетических ресурсов. Одной из важных задач здесь является определение наиболее выгодного диапазона дат и времен старта (так называемых *окон старта*).

Она решается с таким расчетом, чтобы удовлетворить ряду условий и ограничений, налагаемых на траекторию. Ограничения могут быть определенными условиями работы некоторых бортовых приборов и систем, необходимой баллистической обстановкой для проведения экспериментов на орбите, условиями удобства работы экипажа, наземного комплекса и т.д. Чаще всего при разработке баллистической схемы приходится все условия и ограничения "расставлять" в порядке приоритетности, искать компромиссные решения, некоторыми ограничениями пренебрегать.

19. Решение задач маневрирования на орбите, т.е. задач целенаправленного изменения характеристик орбитального движения. Практически любой орбитальный полет включает маневры того или иного назначения: формирование рабочей или монтажной орбиты, переход на траекторию полета к Луне или планетам, коррекцию (или исправление) отдельных характеристик движения, сближение с другим ЛА, торможение для спуска ЛА на Землю или планету. Обычно решение таких задач проводится с учетом ограничений самой различной природы, например связанных с баллистической обстановкой, особенностями наземного и бортового комплексов управления, распорядком дня экипажа. Качество решения этих задач включает оценку надежности и экономичности реализации полученного результата.

20. Разработка методов определения орбит и требований к измерительному комплексу. Существует множество причин, по которым фактические характеристики движения ЛА отличаются от расчетных, полученных при подготовке полета и даже в ходе полета: здесь и погрешности выведения, погрешности нашего знания гравитационного поля и атмосферы Земли, погрешности работы бортовых систем и т.д. Для решения задачи определения фактической орбиты проводятся измерения линейного и углового положений ЛА, ориентиров на земной поверхности или небесной сфере или скорости изменения их положения. Получение такой информации — задача измерительного комплекса, в который входят наземные и плавучие пункты слежения. Но эта информация — еще не орбита, а лишь первичный материал для ее получения. Методы определения орбиты на основании этой информации составляют большой специальный раздел баллистики. Там же обычно рассматриваются вопросы точности и оперативности определения орбит. Поскольку эти характеристики зависят от состава, точности и количества измерений, одновременно анализируются и требования к измерительному комплексу.

Новые возможности получения измерительной информации предоставляют навигационные спутники, вернее, система навигационных спутников, положение которых в каждый момент времени известно с большой точностью и относительно которых проводятся измерения положения ЛА на орбите.

21. Решение задач орбитального построения спутниковых систем. Спутниковые системы предназначаются для оперативного решения ряда глобальных задач. С их помощью можно, например, создать единую навигационную систему, позволяющую любому спутнику независимо от параметров его орбиты и его положения на орбите определить собственную орбиту. Можно создать систему, которая будет постоянно обозревать любой район на поверхности Земли. Имеются системы, позволяющие поддерживать

непрерывную связь между любимыми пунктами на поверхности Земли. Построение системы, т.е. определение количества спутников в системе, параметров орбит, их относительного расположения и т.д., должно быть подчинено решаемым задачам и удовлетворять некоторым критериям оптимальности. Выбранное построение должно позволять с минимальными затратами поддерживать установленную структуру, т.е. позволять проводить необходимые коррекции и восполнять систему при выходе из строя отдельных спутников, имея в виду длительное время существования, на которое обычно проектируются подобные системы.

Заканчивая обзор баллистических задач, необходимо сделать следующие замечания.

Во-первых, приведенный перечень не претендует на полноту описания всех существующих задач, а разделение одной, казалось бы, задачи на две или три самостоятельных или, наоборот, объединение нескольких задач в одну проведено из соображений удобства изложения. В действительности решение каждой задачи состоит из решения ряда простых и не всегда баллистических подзадач, не включенных в наш перечень. В некоторых случаях решение описанной задачи предполагает использование результатов решения другой задачи из этого же перечня.

Во-вторых, каждая из баллистических задач может иметь как бы еще одно "измерение" — для какой цели и какими средствами она решается. Например, задача сближения решаться может неоднозначно. В одном случае мы должны получить единственный, но высокоточный и наиболее эффективный результат ее решения в ходе реального полета, поскольку этот результат определит реальные действия ЛА. В другом случае нам достаточно иметь не очень точный результат, но он должен быть получен очень быстро, если мы проводим статистическое моделирование сближения, которое заключается в расчете участка сближения десятки, сотни раз с целью выявления его вероятностных характеристик. В третьем случае задача сближения должна быть решена и достаточно точно и достаточно просто, если ее решение возлагается на бортовую систему ЛА. Во всех этих случаях решается одна и та же задача, но ее постановка, методы решения и используемый математический аппарат могут отличаться существенно.

Наконец, в-третьих, авторы не задавались целью рассмотреть конкретные пути решения всех перечисленных задач, но ключевые вопросы теории и методы, которые составляют основу книги, дают возможность решить почти все поставленные задачи. Исключения составляют, например, задача управляемого спуска с орбиты ИСЗ, методы определения орбит по избыточной информации и точность этих методов, вопросы прогнозирования движения ЛА, проектирования орбитального построения и поддержания спутниковых систем. В наш перечень эти задачи включены с той только целью, чтобы у читателя создать по возможности полное представление о баллистике рассматриваемого класса ЛА.

В списке литературы и по тексту даны указания на источники, в которых эти вопросы исследованы подробно и весьма квалифицированно.

БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Решение баллистических задач проводится путем математического моделирования тех реальных процессов, которые происходят при полете ЛА. Для такого моделирования необходимо иметь математическое описание ЛА, внешних условий, в которых протекает полет, и взаимодействия ЛА с внешним пространством. Необходимо также условиться о мерах отсчета основных физических величин, с которыми придется иметь дело, и определить системы координат и измерения времени, относительно которых будут проводиться расчеты. Совокупность подобных сведений часто называют *баллистической вычислительной моделью*. Компоненты такой модели, используемые при решении баллистической задачи или комплекса задач в рамках определенной космической программы, могут меняться не только при переходе от одной программы к другой, но существенно зависят от того, на каком этапе нужно решать задачу — на этапе предварительного анализа, проектирования или реализации полета. Мы рассмотрим компоненты баллистической вычислительной модели, используемые при проектировании ЛА и их эксплуатации в околоземном космическом пространстве. Описание модели ЛА на различных участках движения и в зависимости от решаемой задачи будет дано в соответствующих местах. Нашей ближайшей задачей будет описание систем координат, измерения времени и моделей внешних условий.

Под *внешними условиями* в широком смысле надо понимать такие характеристики внешнего пространства, которые оказывают более или менее существенное влияние на движение ЛА. Сюда относятся гравитационные поля Солнца и планет, их положение относительно движущегося ЛА; фигура, гравитационное поле и атмосфера Земли; в некоторых специальных случаях — солнечный ветер, световое давление, электромагнитные характеристики космического пространства.

Используемые модели внешних условий описывают реальные характеристики не вполне точно, а с некоторой погрешностью, причем степень погрешности может определяться в одних случаях пределом наших знаний, в других — сознательным закруглением достаточно достоверных сведений ради упрощения решения поставленной задачи. Знание погрешности принятых моделей необходимо для оценки точности получаемых результатов. Надо иметь в виду также и то, что на результаты расчета оказывает влияние и сам математический метод решения поставленной задачи.

§ 2.1. Общие сведения о системах координат и измерения времени

Наблюдение и прогнозирование движения искусственных и естественных космических объектов, изучение законов их движения и проектирование движения ЛА всегда связаны с определенными системами отсчета — системой координат и системой измерения времени. Часто необходимо путем соответствующего преобразования перейти к такой системе отсчета, в которой постановка и решение задачи представимы в наиболее удобном виде.

Множество задач и моделей баллистики предопределяет и множество систем координат, используемых на практике. Весьма стройная классификация систем координат, применяемых в механике полета, с разбиением на классы, типы, виды и подвиды предложена, например, в [8]. В этой главе мы рассмотрим только некоторые из систем координат, наиболее употребительные в задачах расчета движения баллистической ракеты, выведения ЛА на орбиту ИСЗ и движения по орбите ИСЗ. В дальнейшем по мере необходимости будут вводиться и некоторые другие системы.

Системы координат могут быть прямоугольные, косоугольные, криволинейные, а отсчет координат — в линейных или угловых единицах. Начало системы координат может быть расположено в центре масс Земли или планеты (геоцентрические, планетоцентрические системы), в центре масс ЛА или движущегося объекта (объектоцентрические системы), на поверхности Земли (геотопические системы).

Системы координат с началом в центре масс или на поверхности планеты могут участвовать вместе с планетой в ее вращении вокруг собственной оси или не участвовать в таком вращательном движении. В зависимости от этого их можно отнести к *инерциальным* системам или *неинерциальным*. Строго говоря, инерциальность таких систем настолько условна, насколько условна замена орбитального движения планеты вокруг Солнца равномерным прямолинейным движением.

Системы координат, жестко связанные с вращающейся Землей (независимо от того, где расположено начало системы и как направлены ее оси), принято называть *земными* системами. Полет ЛА во многих случаях удобно рассматривать именно в земных системах. Это объясняется желанием определять движение ЛА относительно различных объектов, расположенных на поверхности Земли, например относительно точки старта, точки прицеливания, измерительных пунктов, районов, отведенных для падения отделяемых частей или блоков ракеты, населенных пунктов и т.д.

Инерциальные системы координат удобны в тех случаях, когда движение описывается относительно центра масс планет, Солнца, звезд, относительно других ЛА, движение которых также задано в инерциальной системе. Целесообразность применения инерциальных систем вытекает также из принципов построения и работы автономных систем управления полетом ЛА, основным звеном которых являются гироскопические приборы. Как известно, ориентация осей гироскопов в инерциальном пространстве практически неизменна, и именно в этом пространстве удобно определять угловое положение осей ЛА и задавать им предписываемые программой направления.

Линии действия сил и моментов, приложенных к ЛА, как правило, связаны с осями ЛА, поэтому их удобнее всего определять в системе координат, жестко связанной с ЛА. Такие системы координат называются *связанными*. В них удобно представлять наблюдения и измерения с борта ЛА других объектов, движущихся или расположенных на поверхности Земли.

В ряде случаев может оказаться полезным оси системы координат, начало которой жестко связано с центром масс ЛА, направлять не вдоль осей ЛА, а вдоль направлений, характерных для его движения по орбите. Подобные системы координат называются *орбитальными*. Как мы увидим,

в такой системе координат хорошо описывать движение двух ЛА относительно друг друга.

Вводя в рассмотрение различные системы координат, мы должны также установить соотношения между ними, т.е. уметь осуществлять переход от одной системы к другой. В подобных переходах существенную роль может играть время. Само собой понятно и то, что всякое движение определяется во времени. Поэтому нам необходимо условиться и о системах отсчета времени.

Как и многие системы координат, системы измерения времени "пришли" в баллистику из астрономии, в которой сложились три шкалы времени: солнечное, звездное и эфемеридное время. Две из них — солнечное и звездное время — связаны с суточным вращением Земли, а третья — эфемеридное время — основана на движении планет Солнечной системы по их орбитам. Мы ограничимся кратким описанием первых двух систем.

Единицами измерения звездного и солнечного времени являются соответственно звездные и солнечные сутки. Звездное время определяется суточным движением звезд по небесной сфере, солнечное время — суточным движением центра солнечного диска.

Звездными сутками называется промежуток времени между двумя последовательными одинаковыми положениями одной и той же меридиональной плоскости Земли относительно звезд. *Солнечными сутками* называется промежуток времени между одинаковыми положениями меридиональной плоскости относительно Солнца.

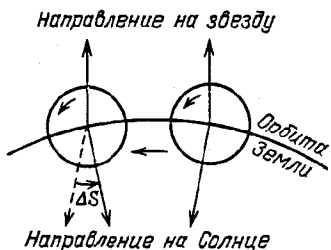


Рис. 2.1. К определению разницы между звездными и солнечными сутками; ΔS — дополнительный поворот Земли вокруг оси суточного вращения сверх полного оборота

Течение звездного и солнечного времени неравномерно. Эта неравномерность вызвана непостоянством положения оси суточного вращения Земли, наклоном плоскости эклиптики к плоскости экватора и т.д. Поэтому были введены понятия *среднего звездного* и *среднего солнечного* времени. В частности, при определении среднего солнечного времени используется понятие так называемого *среднего Солнца* или, вернее, *среднего экваториального Солнца* — фиктивной точки, расположенной в экваториальной плоскости Земли, относительно которой Земля, движущаяся по круговой орбите, совершает полный оборот ровно за год.

Направление вращения Земли вокруг своей оси совпадает с направлением движения Земли относительно Солнца, поэтому солнечные сутки длиннее звездных. Это иллюстрируется рис. 2.1. Земля, вращаясь вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega_3 = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, совершает полный оборот относительно звездного пространства за одни звездные сутки, равные $23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}}$. Солнечные же сутки имеют продолжительность 24^{h} (h — часы, m — минуты, s — секунды).

Поскольку солнечное время связано с суточным вращением Земли, его отсчет иногда ведется в *часовых углах*: полному обороту Земли соответствуют 24^h , отсюда часовому углу соответствует поворот Земли на 15° . Среднее солнечное время на меридиане наблюдателя измеряется часовым углом среднего Солнца, измененным на 12^h (в полдень на меридиане наблюдателя часовой угол среднего Солнца равен нулю).

Практическое использование местного среднего солнечного времени имеет очевидные неудобства, связанные с непрерывной коррекцией времени при перемещении наблюдателя на восток или на запад. Поэтому начиная с конца XIX в. во многих странах вводится *поясная система* отсчета времени. В этой системе местное среднее солнечное время определяется только для 24 основных меридианов, отстоящих друг от друга на 15° . Примерно на $\pm 7,5^\circ$ от каждого из этих меридианов в соответствии с государственными или географическими соображениями (но не строго по меридианам) проведены границы так называемых *часовых поясов*. Для каждого из поясов принимается единое поясное время, равное среднему солнечному времени основного меридиана пояса. Поясное время нулевого пояса, основным для которого является Гринвичский меридиан (нулевой меридиан), называется *всемирным временем* и обозначается UT (universal time). Нумерация поясов идет последовательно с запада на восток и в соответствии с возрастанием нумерации при переходе в следующий пояс на 1^h возрастает и поясное время.

В нашей стране поясное время введено в 1919 г., а в 1930 г. декретом Советского правительства поясное время на всей территории СССР было увеличено на 1^h . Такое время получило название *декретного времени*. Декретное время второго часового пояса называется *московским временем*.

Начиная с 1981 г. в СССР ежегодно с апреля по октябрь вводится так называемое летнее время, которое по отношению к декретному (зимнему) времени смещено на 1^h вперед. Баллистические расчеты по планированию полетов проводятся задолго до их реализации, да и сам полет бывает рассчитан на многие месяцы. Поэтому, во избежание недоразумений, во всех баллистических расчетах используется только московское декретное время без часовых скачков в апреле и октябре.

В некоторых баллистических задачах движение ЛА или ход событий может интересовать нас безотносительно к течению солнечного или звездного времени. В этом случае за начало отсчета принимается какой-либо характерный момент, удобный при решении конкретной задачи, например момент старта ракеты-носителя; время, отсчитываемое от этого момента, называют *полетным временем*.

§ 2.2. Системы координат

Прежде чем перейти к описанию систем координат, укажем общий принцип их построения: выбирается основная плоскость системы и в ней — направление основной оси и расположение начала отсчета системы. Поскольку положения основной плоскости и основной оси системы с течением времени могут меняться, обычно оговаривают, соответствует их положение некоторому фиксированному моменту времени или оно выбирается средним за некоторый промежуток времени.

В качестве основных плоскостей систем координат часто выбирают плоскость экватора, плоскость эклиптики, плоскость орбиты ЛА, плоскость, касательную к поверхности Земли в точке старта, и др.

Плоскость земного экватора есть плоскость, проходящая через центр масс Земли нормально к оси ее суточного вращения. Ось суточного вращения Земли называется *осью мира*, ее направление приблизительно совпадает с направлением от наблюдателя на Полярную звезду.

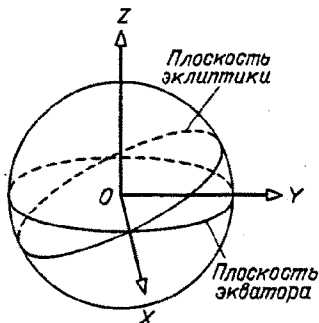


Рис. 2.2. Геоцентрическая экваториальная инерциальная система координат (СК № 1)

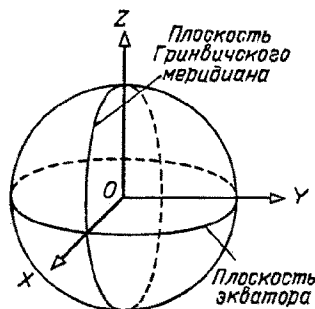


Рис. 2.3. Геоцентрическая экваториальная вращающаяся система координат (СК № 2)

Плоскость эклиптики есть плоскость годового движения центра солнечного диска относительно звездного неба, видимая земным наблюдателем (или, что то же, плоскость движения центра масс Земли относительно центра Солнца). Плоскость эклиптики наклонена к плоскости земного экватора примерно на $23^{\circ}27'$. Точка звездного неба, в которой центр солнечного диска в своем движении по эклиптике пересекает экватор в направлении от южного полушария к северному, называется *точкой весеннего равноденствия* или *точкой весны*. Эта точка, проходимая Солнцем 20–22 марта, обозначается знаком Υ – знаком зодиакального созвездия Овна. В наше время точка весны сместилась в созвездие Рыб, но ее традиционное обозначение сохранилось. Непостоянство положения точки весны объясняется изменением направления оси суточного вращения Земли, а значит, изменением положения плоскости экватора, что обусловлено сложным взаимодействием масс Земли, Луны, Солнца и планет. В результате этого взаимодействия точка весны смещается в плоскости эклиптики приблизительно на $50,5''$ в год. Поэтому, говоря о точке весны, обычно оговаривают и момент времени (эпоху), которому соответствует ее положение.

После сделанных пояснений перейдем к описанию систем координат (СК).

СК № 1 – геоцентрическая экваториальная инерциальная система координат (рис. 2.2). Начало системы O совмещено с центром Земли, основная плоскость OXY совпадает с истинным положением плоскости экватора в текущий момент. Основная ось OX направлена в точку весны текущей даты, ось OZ совпадает с текущим положением оси суточного вращения Земли (т.е. направлена к Северному полюсу), ось OY дополняет систему до правой.

Направления осей неизменны относительно звездного пространства, но система участвует вместе с Землей в ее годовом движении вокруг Солнца. Таким образом, система является инерциальной с точностью до орбитального движения Земли.

СК № 2 – *геоцентрическая экваториальная вращающаяся система координат* (рис. 2.3). Начало системы O совмещено с центром Земли, основная плоскость OXY есть плоскость экватора в текущую дату. Основная ось OX направлена по линии пересечения плоскости Гринвичского меридиана и плоскости экватора, ось OZ совпадает с текущим положением оси вращения Земли, ось OY дополняет систему до правой.

Система координат жестко связана с вращающейся Землей и поэтому является неинерциальной. Из-за привязки к нулевому меридиану ее часто называют *гринвичской системой*.

СК № 3 – *объектоцентрическая орбитальная вращающаяся система координат* (рис. 2.4). Начало системы O располагается в центре масс движущегося ЛА, основная плоскость системы OXY совпадает с текущим положением плоскости орбиты ЛА. Основная ось OX лежит в плоскости орбиты ЛА нормально к его геоцентрическому радиусу-вектору и направлена в сторону движения ЛА, направление оси OY совпадает с направлением геоцентрического радиуса-вектора ЛА, ось OZ дополняет систему до правой.

СК № 4 – *стартовая система координат* (рис. 2.5). Начало системы O совмещено с точкой старта, основная плоскость OXY касается поверхности Земли в точке старта. Основная ось OX может иметь любое направление в основной плоскости, ось OY направлена по нормали к основной плоскости вверх от поверхности Земли, ось OZ дополняет систему до правой.

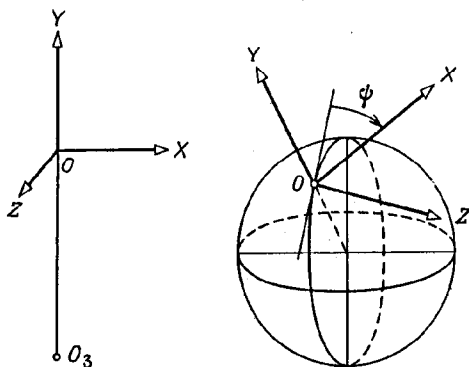
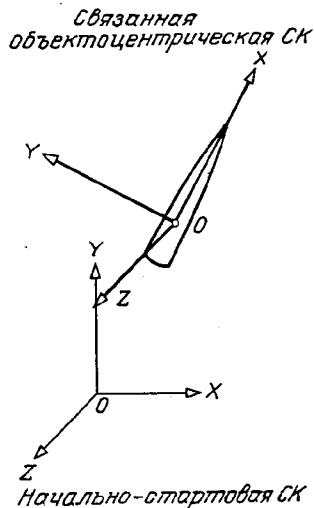


Рис. 2.4. Объектоцентрическая орбитальная вращающаяся система координат (СК № 3)

Рис. 2.5. Стартовая система координат (СК № 4)

Стартовая система координат является одной из разновидностей земных систем координат, т.е. систем, жестко связанных с Землей. Для придания определенности направлению оси OX его принято отсчитывать от направления на север и характеризовать углом, называемым *азимутом прицеливания*, так как обычно ось OX направлена в сторону полета ракеты на начальной части траектории. Азимут прицеливания ψ может изменяться в преде-

Рис. 2.6. Связанная объектоцентрическая система координат (СК № 6)



лах от 0 до 360° ; при пуске ЛА в северном направлении $\psi = 0$, в восточном $\psi = 90^\circ$, в южном $\psi = 180^\circ$, в западном $\psi = 270^\circ$.

СК № 5 — *начально-стартовая система координат*. Начально-стартовая система координат представляет собой стартовую систему (СК № 4), начало и оси которой фиксируются в момент старта и далее не связаны с Землей, т.е. не участвуют в ее суточном вращении. Система координат № 5 является инерциальной. Если оси гироскопических приборов разарретировать в момент старта, совместив их с направлениями осей СК № 5, то совпадение осей этой системы и осей гироскопических приборов должно сохраняться и в дальнейшем. В действительности сохранения точного совпадения осей не будет, так как под влиянием различных причин направления осей гироскопов отклоняются ("уходят") от первоначальных.

СК № 6 — *связанная объектоцентрическая система координат* (рис. 2.6). Начало связанной системы O помещено в центре масс ЛА. Ось OX этой системы направлена вдоль продольной оси ЛА, ось OZ параллельна оси OZ СК № 5, ось OY дополняет систему до правой.

При подобной ориентации ось OX связанной системы ЛА, установленно-го на стартовом устройстве, совпадает с осью OY начально-стартовой системы, а ось OY связанной системы имеет направление, противоположное направлению оси OX СК № 5. Другими словами, оси связанной системы координат в момент старта могут быть получены путем поворота осей начально-стартовой системы на 90° вокруг оси OZ против направления движения часовой стрелки, если смотреть с конца этой оси.

В дальнейшем мы будем использовать не только описанные выше системы, но и некоторые другие, при этом будут даваться соответствующие пояснения.

§ 2.3. Модели фигуры и гравитационного поля Земли

Точная фигура Земли представляет собой довольно сложную поверхность, форма которой определена к настоящему времени лишь приближенно.

Наиболее простой и наименее точной моделью фигуры Земли является шар радиуса 6371,1 км, приблизительно равный Земле по объему.

Следующим приближением к реальной фигуре Земли является тело, поверхность которого ограничена сплюснутым эллипсоидом вращения (или общим земным эллипсоидом). Малая (полярная) полуось такого эллипсоида равна $R_p = 6356,77$ км, ее направление совпадает с направлением оси суточного вращения Земли; большая (экваториальная) полуось равна

среднему экваториальному радиусу $R_e = 6378,16$ км. Отношение $\alpha = \frac{R_e - R_p}{R_e} = \frac{1}{298,25}$ называется *сжатием эллипсоида*.

Расстояние от центра эллипсоида до точки его поверхности, соответствующей геоцентрической широте $\varphi_{ГЦ}$ (рис. 2.7), с точностью не хуже 0,1 км может быть определено по формуле

$$R = R_e (1 - \alpha \sin^2 \varphi_{ГЦ}).$$

При проведении точных баллистических расчетов представление фигуры Земли в виде эллипсоида вращения (двухосного эллипсоида) может оказаться недостаточным, и тогда в качестве следующего приближения к реальной земной поверхности принимается *геоид* – гипотетическая поверхность

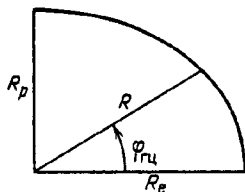


Рис. 2.7. К представлению фигуры Земли в виде эллипсоида вращения

уровня потенциала силы тяжести, приблизительно совпадающая с поверхностью спокойных океанов и мысленно продолжающаяся на части Земли, занятые материками.

Модель фигуры Земли, как мы увидим далее, тесно связана с моделью гравитационного поля, к рассмотрению которого мы переходим.

По закону всемирного тяготения частица массы M притягивает частицу массы m с силой, действующей по прямой, соединяющей частицы, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = -f \frac{Mm}{r^2} \frac{r}{r},$$

где f – постоянная тяготения; r/r – единичный вектор направления от частицы массы M к частице массы m .

Словое воздействие на частицу единичной массы $m = 1$ равно

$$F = -f \frac{M}{r^2} \frac{r}{r} = (F_x, F_y, F_z)^T = \left(-f \frac{M}{r^3} x, -f \frac{M}{r^3} y, -f \frac{M}{r^3} z \right)^T. \quad (2.1)$$

Если каждой точке пространства ставится в соответствие некоторая сила, определяемая функцией $F(x, y, z)$, то говорят, что задано силовое поле. Поле, соответствующее функции (2.1), называется *центральным полем ньютонова тяготения*.

Если для заданного силового поля существует скалярная функция $U(x, y, z)$ такая, что

$$F(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)^T = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)^T = \text{grad } U,$$

то поле называется *потенциальным*, а скалярная функция $U(x, y, z)$ — его *потенциалом*. Для центрального поля тяготения (или центрального гравитационного поля)

$$U = f \frac{M}{r}.$$

Для системы n частиц массами M_i , положение которых в некоторой системе координат задано радиусами-векторами $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$, потенциал в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ записывается в виде

$$U = f \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{r_{0i}},$$

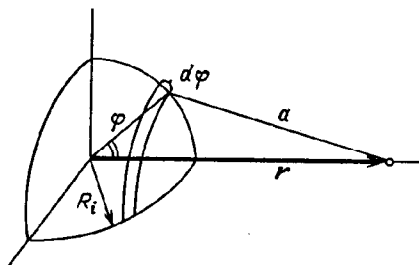
где $r_{0i} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}$.

С помощью перехода к интегралу понятие гравитационного потенциала распространяется на непрерывно распределенную массу

$$U = f \int_V \frac{dM}{r}.$$

Интегрирование ведется по всему объему V тела и очевидно, что величина интеграла существенно зависит от формы тела.

Рис. 2.8. К выводу формулы потенциала для тела со сферическим распределением плотности



Определим величину интеграла для важного частного случая, когда поверхность тела является сферической, а его плотность в точках, равноудаленных от центра тела, одна и та же (говорят, что тело имеет сферическое распределение плотности). Рассмотрим тонкий однородный сферический слой такого тела с поверхностной плотностью σ и определим потенциал слоя в точке, вынесенной от центра на расстояние r (рис. 2.8).

Тонкое круговое кольцо шириной $d\varphi$, изображенное на рисунке, имеет массу

$$dM_i = 2\pi R_i^2 \sigma \sin \varphi \cdot d\varphi,$$

а потенциал этой массы в рассматриваемой точке определяется формулой

$$dU_i = \frac{2\pi f R_i^2 \sigma \sin \varphi \cdot d\varphi}{a}.$$

Потенциал всего сферического слоя в этой же точке определится в резуль-

тате интегрирования:

$$U_i = \int_0^\pi dU_i = 2\pi f R_i^2 \sigma \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{a}$$

Поскольку

$$a^2 = R_i^2 + r^2 - 2R_i r \cos \varphi,$$

то после дифференцирования этого соотношения имеем $ada = R_i r \sin \varphi \cdot d\varphi$ и, заменяя переменные, приводим интеграл к виду

$$U_i = 2\pi f R_i \frac{\sigma}{r} \int_{a_1}^{a_2} da = 2\pi f \sigma \frac{R_i}{r} (a_2 - a_1),$$

где a_1 и a_2 — соответственно удаление точки от сферического кольца при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

Поскольку масса сферического слоя равна $M_i = 4\pi R_i^2 \sigma$, а $(a_2 - a_1) = 2R_i$, окончательно получаем

$$U_i = f \frac{M_i}{r}.$$

Этот результат означает, что потенциал однородного сферического слоя эквивалентен потенциалу частицы, расположенной в центре сферы и имеющей ту же массу, что и масса слоя. Суммируя потенциалы всех слоев сферического тела, получаем, что и в этом случае потенциал

$$U = \sum U_i = \frac{fM}{r}$$

эквивалентен потенциалу частицы массы M , помещенной в центре тела.

Таким образом, если за модель фигуры Земли принять сферу и предположить сферическое распределение плотности земного вещества, то потенциал гравитационного поля Земли будет определяться формулой

$$U = \frac{\mu}{r}, \quad (2.2)$$

где $\mu = fM \approx 398\,600 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2$; r — расстояние от точки пространства до центра сферической Земли.

Как и сферическая модель фигуры Земли, соответствующая ей модель гравитационного поля является лишь первым приближением к реальному гравитационному полю. Вторым, более точным приближением является модель гравитационного поля, соответствующая земному эллипсоиду:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi_{\text{ГЦ}}) \right], \quad (2.3)$$

где $\varphi_{\text{ГЦ}}$ — геоцентрическая широта точки пространства, отстоящей от центра Земли на расстояние r ; J_n — безразмерные постоянные коэффициенты. Функции $P_n(\sin \varphi_{\text{ГЦ}})$ представляют собой полиномы Лежандра, определяе-

мы следующим образом:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Говорят, что потенциал (2.3) земного эллипсоида соответствует нормальному полю сил или нормальному гравитационному полю. Из выражения для потенциала видно, что его величина зависит не только от удаления точки пространства от центра Земли, но и от геоцентрической широты этой точки.

Члены выражения (2.3), содержащие $P_n(\sin \varphi_{ГЦ})$, называются второй, третьей и т.д. *зональными гармониками*. Порядок величин этих членов определяется величиной безразмерных коэффициентов

$$J_2 = 1082,7 \cdot 10^{-6}, \quad J_3 = -2,56 \cdot 10^{-6}, \quad J_4 = -1,58 \cdot 10^{-6}, \dots$$

Как видно, добавочные члены, характеризующие отличие потенциала нормального поля (2.3) от потенциала центрального поля (2.2), дают относительно небольшой вклад: член с J_2 — около десятой доли процента, последующие члены — на несколько порядков меньше. Поэтому для многих баллистических расчетов, в первую очередь при решении задач проектного плана, в выражении для потенциала (2.3) достаточно учитывать лишь основной добавочный (возмущающий) член, содержащий J_2 (вторую зональную гармонику):

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \frac{3 \sin^2 \varphi_{ГЦ} - 1}{2} \right]. \quad (2.4)$$

Потенциал в таком "урезанном" виде обычно также называют *потенциалом нормального поля*.

При проведении более точных баллистических расчетов используется выражение для потенциала, учитывающее как отклонение реальной формы Земли от земного эллипсоида, так и наличие в отдельных районах Земли гравитационных аномалий:

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi_{ГЦ}) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \times P_{nk}(\sin \varphi_{ГЦ}) (c_{nk} \cos k\lambda + s_{nk} \sin k\lambda) \right],$$

где λ — географическая долгота точки пространства; c_{nk} и s_{nk} — безразмерные постоянные коэффициенты; P_{nk} — присоединенная функция Лежандра первого рода.

Определим дополнительное силовое воздействие, порождаемое возмущающим членом в модели (2.4):

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi_{ГЦ}}{2} = U_{ц} + \delta U,$$

где $U_{ц}$ — потенциал центрального поля; δU — поправка к основному сла-

ности наших знаний об этом распределении. Тем не менее основные физические факторы, определяющие реальную атмосферу, известны — это высота и влияние Солнца.

При определении плотности ρ атмосферного вещества исходят из так называемого условия статического равновесия

$$dp = -\rho g dh, \quad (2.6)$$

где dp — изменение давления p воздуха при приращении высоты над поверхностью Земли на величину dh ; g — ускорение силы тяжести.

Давление воздуха связано с его плотностью и температурой уравнением состояния идеального газа

$$p = \frac{\rho R^* T}{M}, \quad (2.7)$$

где $R^* = 8314,32 \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{кмоль}^{-1}$ — универсальная газовая постоянная; M — молярная масса воздуха на рассматриваемой высоте; T — абсолютная кинетическая температура воздуха, определяемая средней скоростью движения его молекул на рассматриваемой высоте.

Исключая ρ из (2.6) с помощью (2.7), находим

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gM}{R^* T} dh.$$

Интегрируем это уравнение от начальной высоты $h = 0$ до текущей высоты h , получаем

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\int_0^h \frac{gM}{R^* T} dh\right),$$

а с учетом (2.7) будем иметь

$$\rho(h) = \rho_0 \frac{MT_0}{M_0 T} \exp\left(-\int_0^h \frac{gM}{R^* T} dh\right), \quad (2.8)$$

где p_0 , ρ_0 , M_0 и T_0 — значения при $h = 0$.

Из (2.8) следует, что для определения зависимости $\rho(h)$ необходимо знать (или задать) законы изменения M и T с высотой h . Характер этих законов определяется большим числом факторов: географическими координатами места, временем года и суток, солнечной активностью, ветром и т.д. Влияние этих факторов в различной степени сказывается на различных высотах, поэтому созданы модели атмосферы, которые описывают ее характеристики или глобально, или локально, т.е. в некотором ограниченном диапазоне высот. Примером глобальной модели атмосферы является стандартная атмосфера СА-81 (ГОСТ 4401–81), принятая в СССР. Ее параметры получены путем осреднения многолетних измерений, проведенных на большой территории. Она охватывает диапазон высот от -2 км до 1200 км, но описывает лишь средние значения параметров атмосферы для географической широты около 45° в предположении среднего уровня солнечной активности.

Такая модель, учитывающая лишь высотный фактор, называется *стационарной* и *сферической*; стационарность подчеркивает независимость ее от времени, а сферичность — независимость от географических координат.

Реальная же атмосфера несферична и динамична, и эти ее качества определяются влиянием на ее состояние солнечного излучения. В этом влиянии можно выделить ряд эффектов, которые вызваны как состоянием Солнца, так и освещенностью земной поверхности, меняющейся в связи с суточным вращением Земли (а следовательно, и атмосферы) вокруг своей оси, и годовым движением Земли вокруг Солнца. В значительной степени все эти эффекты сказываются на больших высотах и должны учитываться в локальной ($120 \text{ км} < h < 600 \text{ км}$) модели верхней атмосферы, к краткому пояснению которой мы переходим.

В своем движении над земной поверхностью ЛА проходит над районами, местное солнечное время которых (или местное время суток) меняется в пределах от 0 до 24 часов. Как уже указывалось, для одной и той же высоты полета плотность атмосферы зависит от времени суток в подспутниковой точке (точке пересечения радиуса-вектора ЛА с земной поверхностью). Максимум плотности наблюдается примерно через 2 часа после полудня, а минимум — между полночью и рассветом. Этот так называемый *суточный эффект* приводит к тому, что на высоте, например, 200 км разница между максимумом и минимумом плотности достигает 40% от среднего значения плотности на этой же высоте, а на высоте 600 км максимальное значение плотности может в 10 раз превышать ее минимальное значение. Вследствие суточного эффекта поверхность, заданная как функция плотности от широты и долготы точки пространства при $h = \text{const}$, образует как бы "горб", вершина которого сдвинута от подсолнечной точки к востоку примерно на 30° .

Изменение высоты Земли над плоскостью солнечного экватора, связанное с годовым движением Земли вокруг Солнца, имеет периодичность 6 месяцев. Это изменение примерно с такой же периодичностью сказывается на состоянии атмосферы и характеризует так называемый *полугодовой эффект*. На высоте 350 км этот эффект приводит к тому, что отклонение плотности атмосферы от ее среднего для данной высоты уровня может достигать 40%.

Уровень интенсивности солнечного излучения в основном определяется 11-летним циклом солнечной активности. С такой же периодичностью происходят наиболее значительные колебания атмосферной плотности. В ходе этих колебаний среднее значение плотности на высоте 300 км меняется в три раза, а на высоте 600 км — в двадцать раз.

Для деятельности Солнца характерны кратковременные повышения уровня излучения (*солнечные вспышки*) длительностью от нескольких часов до нескольких суток. Следствием солнечных вспышек является значительное возмущение магнитного поля Земли и состояния атмосферы. Фиксируя возмущение магнитного поля, можно предсказать последующее возмущение состояния атмосферы (по величине и во времени).

Таковы основные факторы, определяющие динамику состояния земной атмосферы. Все они были учтены в *динамической* модели атмосферы ГОСТ 22721-78, разработанной в нашей стране. Числовые характеристики этой модели были получены в результате обработки данных слежения за полетом нескольких сотен советских ЛА. По мере накопления и обработки новых данных модель уточняется (ГОСТ 25645. 115-84) и, вероятно, будет уточняться и в будущем.

Несмотря на сложность такого объекта изучения, как атмосфера, модель математически компактна, физически наглядна, удобна для использования и достаточно точна. Плотность по такой модели представляется в виде произведения нескольких сомножителей, отражающих влияние соответствующего фактора:

$$\rho = \rho_n k_1 k_2 k_3 k_4.$$

Здесь $\rho_n = \rho_0 \exp[a_1 - a_2(h - a_3)^{1/2}]$ — ночной вертикальный профиль атмосферы или стационарная сферическая модель атмосферы, характеризующая зависимость плотности только от высоты над земной поверхностью;

$k_1 = 1 + \{(b_1 + b_2 h + b_2 h^2)(F - F_0)\}/F_0$ — сомножитель, отражающий изменение плотности с изменением интенсивности солнечного излучения F на волне 10,7 см относительно некоторого среднего уровня интенсивности F_0 ;

$k_2 = 1 + \{c_1 + c_2 h + c_3 \exp[-(h + c_4)^2/c_5^2]\} \cos^m \frac{\psi}{2}$ — сомножитель, учитывающий суточный эффект в распределении плотности, где ψ — геоцентрический угол между направлениями на "горб" атмосферы и точку пространства, в которой определяется плотность;

$k_3 = 1 + (d_1 + d_2 h + d_2 h^2)A(D)$ — сомножитель, отражающий полугодовые вариации плотности атмосферы, где $A(D)$ — заданная таблично функция даты D , отсчитываемой от начала текущего года;

$k_4 = 1 + (e_1 + e_2 h + e_3 h^2) \ln(a_p/e_5 + e_4)$ — сомножитель, учитывающий корреляцию между вариациями плотности и геомагнитной возмущенностью.

Все числовые коэффициенты, входящие в модель, заданы в табличном виде для нескольких значений среднего уровня интенсивности солнечного излучения F_0 (ГОСТ 22721-78).

§ 2.5. Преобразования при переходе между системами координат

2.5.1. Общее правило преобразования для систем координат, имеющих общее начало. Пусть две декартовы системы координат имеют общее начало и заданы ортами своих осей x^0, y^0, z^0 и X^0, Y^0, Z^0 . Положению одной и той же точки пространства в каждой из систем соответствует свой радиус-вектор:

$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T = r_x x^0 + r_y y^0 + r_z z^0,$$

$$\mathbf{R} = (R_X, R_Y, R_Z)^T = R_X X^0 + R_Y Y^0 + R_Z Z^0,$$

где \mathbf{r} и \mathbf{R} — векторы-столбцы, а индекс "Т" означает операцию транспонирования.

Допустим, что исходная система, в которой известны компоненты радиуса-вектора положения точки, есть система с ортами x^0, y^0, z^0 . Тогда проекции этого вектора на орты другой системы определяются как скалярные

произведения векторов:

$$\mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{r} = R_X = (\mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{x}^0)r_x + (\mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{y}^0)r_y + (\mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{z}^0)r_z,$$

$$\mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{r} = R_Y = (\mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{x}^0)r_x + (\mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{y}^0)r_y + (\mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{z}^0)r_z,$$

$$\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{r} = R_Z = (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{x}^0)r_x + (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{y}^0)r_y + (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{z}^0)r_z.$$

Полученный результат можно представить в виде

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_X \\ R_Y \\ R_Z \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = M\mathbf{r}, \quad (2.9)$$

где

$$M = \begin{bmatrix} (\mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{x}^0) & (\mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{y}^0) & (\mathbf{X}^0 \cdot \mathbf{z}^0) \\ (\mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{x}^0) & (\mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{y}^0) & (\mathbf{Y}^0 \cdot \mathbf{z}^0) \\ (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{x}^0) & (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{y}^0) & (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{z}^0) \end{bmatrix}$$

— матрица перехода от системы с осями $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0$ к системе ортов $\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0, \mathbf{Z}^0$.

Преобразование вектора при переходе от одной декартовой системы к другой относится к классу так называемых ортогональных преобразований, а матрица M этого преобразования — к ортогональным матрицам. Такая матрица обладает следующим свойством: матрица M^{-1} , задающая обратное преобразование $\mathbf{r} = M^{-1}\mathbf{R}$, получается транспонированием исходной матрицы, т.е. $M^{-1} = M^T$. В этом легко убедиться, проведя проектирование вектора \mathbf{R} на орты $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0$.

Преобразование вектора положения (2.9) позволяет с помощью дифференцирования по времени получить преобразования векторов скорости и ускорения при переходе из одной системы координат в другую:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d(M\mathbf{r})}{dt} = \frac{dM}{dt}\mathbf{r} + M\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dM}{dt}\mathbf{r} + M\mathbf{v}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2M}{dt^2}\mathbf{r} + \frac{dM}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{dM}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \\ &= \frac{d^2M}{dt^2}\mathbf{r} + 2\frac{dM}{dt}\mathbf{v} + M\mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В этих формулах дифференцирование матрицы и вектора по времени означает дифференцирование по времени всех их элементов. В случае, если элементы матрицы M постоянны во времени, т.е. системы координат взаимно неподвижны, имеем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d^2M}{dt^2} = 0, \quad \mathbf{V} = M\mathbf{v}, \quad \mathbf{W} = M\mathbf{w}.$$

2.5.2. Переход между СК № 1 и СК № 2. Рассмотрим преобразование характеристик движения (векторов положения, скорости и ускорения) при переходе от вращающейся (СК № 2) к инерциальной (СК № 1) системе координат.

По определению систем их основные плоскости и оси OZ совпадают, а взаимное положение осей OX и OY (рис. 2.10) характеризуется углом поворота φ , который меняется с угловой скоростью суточного вращения Земли ω_3 , направленной вдоль оси OZ :

$$\varphi = S_0 + \omega_3(t - t_0),$$

где S_0 – угловое расстояние Гринвичского меридиана от точки весны на момент времени t_0 ; t – текущий момент времени.

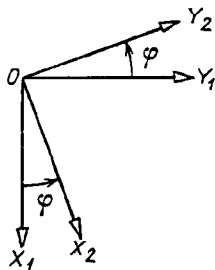


Рис. 2.10. К преобразованию координат при переходе от инерциальной системы к вращающейся

Проектируя орты СК № 2 на орты СК № 1, получаем матрицу перехода

$$M = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

осуществляющую перевод вектора положения $R_2 = (X_2, Y_2, Z_2)^T$ в вектор положения $R_1 = (X_1, Y_1, Z_1)^T$:

$$R_1 = MR_2.$$

Напомним, что оба вектора характеризуют положение одной и той же точки пространства, но в разных системах координат.

Используя производные

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_3, \quad \frac{d \cos \varphi}{dt} = -\omega_3 \sin \varphi, \quad \frac{d \sin \varphi}{dt} = \omega_3 \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2} = -\omega_3^2 \cos \varphi, \quad \frac{d^2 \sin \varphi}{dt^2} = -\omega_3^2 \sin \varphi,$$

получаем производные по времени от матрицы перехода:

$$\frac{dM}{dt} = \omega_3 \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \omega_3^2 \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если в СК № 2 заданы векторы скорости $V_2 = (\dot{X}_2, \dot{Y}_2, \dot{Z}_2)^T$ и ускорения $W_2 = (\ddot{X}_2, \ddot{Y}_2, \ddot{Z}_2)^T$, то в соответствии с (2.10) и (2.11) векторы скорости и ускорения в СК № 1 определяются формулами

$$V_1 = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_2 \\ \ddot{Y}_2 \\ \ddot{Z}_2 \end{bmatrix} + 2\omega_3 \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Z}_2 \end{bmatrix} + \omega_3^2 \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Поскольку обратное преобразование координат осуществляется матрицей M^T , формулы преобразования характеристик движения из СК № 1 в СК № 2 аналогичны формулам (2.12) и (2.13) — достаточно в этих формулах транспонировать матрицы и изменить индексы векторов.

Представляет интерес случай преобразования характеристик движения, когда оси подвижной и неподвижной систем координат в рассматриваемый момент времени совпадают, т.е. $\varphi = 0$. Это случай так называемого "замораживания" характеристик движения или, как говорят в механике, случай преобразования характеристик относительного движения в характеристики абсолютного движения.

При $\varphi = 0$ матрицы M , dM/dt и d^2M/dt^2 принимают вид

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{dM}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d^2M}{dt^2} = \begin{bmatrix} -\omega_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и в соответствии с этим видоизменяются и формулы преобразования (2.12) и (2.13).

Формулы "замораживания" можно получить несколько по-иному. Известно, что результат умножения вектора \mathbf{b} на матрицу A эквивалентен

результату векторного умножения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, если элементы матрицы A составлены из компонент вектора $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ по следующему правилу:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

На основании этого нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае "замораживания"

$$\frac{dM}{dt} \mathbf{R}_2 = \vec{\omega}_3 \times \mathbf{R}_2,$$

$$\frac{dM}{dt} \mathbf{V}_2 = \vec{\omega}_3 \times \mathbf{V}_2, \quad \frac{d^2 M}{dt^2} \mathbf{R}_2 = \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \mathbf{R}_2), \quad (2.14)$$

если в качестве вектора $\vec{\omega}_3$ взять вектор угловой скорости вращения СК^{№2} относительно СК^{№1} $\vec{\omega}_3 = (0, 0, \omega_3)^T$, заданный в проекциях на оси неподвижной системы.

С учетом (2.14) формулы преобразования (2.12) и (2.13) приводятся к известному виду "замораживания" кинематических характеристик:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 + \vec{\omega}_3 \times \mathbf{R}_2, \quad \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2 + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \mathbf{R}_2) + 2\vec{\omega}_3 \times \mathbf{V}_2.$$

2.5.3. Переход между СК^{№4} и СК^{№5}. Зависимости между скоростями и ускорениями в подвижной ($Oxuz$) и неподвижной ($OXYZ$) системах координат получены нами для случая, когда подвижная система вращается вокруг одной из осей неподвижной системы. Пусть теперь оси системы координат $Oxuz$ получены в результате поворота системы $OXYZ$ на угол φ вокруг единичного вектора направления \mathbf{n}^0 , заданного своими компонентами (направляющими косинусами) в системе $OXYZ$:

$$\mathbf{n}^0 = (n_x, n_y, n_z)^T.$$

Приведем без вывода матрицу преобразования M , осуществляющую перевод вектора положения некоторой точки пространства \mathbf{r} , заданного в системе $Oxuz$, в вектор \mathbf{R} , характеризующий положение той же точки в системе $OXYZ$:

$$\mathbf{R} = M\mathbf{r},$$

где

$$M = \begin{bmatrix} n_x^2 + (1 - n_x^2) \cos \varphi & n_x n_y (1 - \cos \varphi) - n_z \sin \varphi & n_x n_z (1 - \cos \varphi) + n_y \sin \varphi \\ n_x n_y (1 - \cos \varphi) + n_z \sin \varphi & n_y^2 + (1 - n_y^2) \cos \varphi & n_y n_z (1 - \cos \varphi) - n_x \sin \varphi \\ n_x n_z (1 - \cos \varphi) - n_y \sin \varphi & n_y n_z (1 - \cos \varphi) + n_x \sin \varphi & n_z^2 + (1 - n_z^2) \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Если вращение системы $Oxuz$ вокруг направления \mathbf{n}^0 происходит с постоянной угловой скоростью ω , то угол поворота является функцией времени

$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0),$$

где φ_0 — начальный угол поворота, соответствующий моменту t_0 ; t — текущий момент времени. При этом функцией времени является и матрица

поворота M и, значит, могут быть определены ее производные

$$\frac{dM}{dt} = \omega \begin{bmatrix} -(1 - n_X^2) \sin \varphi & n_X n_Y \sin \varphi - n_Z \cos \varphi & n_X n_Z \sin \varphi + n_Y \cos \varphi \\ n_X n_Y \sin \varphi + n_Z \cos \varphi & -(1 - n_Y^2) \sin \varphi & n_Y n_Z \sin \varphi - n_X \cos \varphi \\ n_X n_Z \sin \varphi - n_Y \cos \varphi & n_Y n_Z \sin \varphi + n_X \cos \varphi & -(1 - n_Z^2) \sin \varphi \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \omega^2 \begin{bmatrix} -(1 - n_X^2) \cos \varphi & n_X n_Y \cos \varphi + n_Z \sin \varphi & n_X n_Z \cos \varphi - n_Y \sin \varphi \\ n_X n_Y \cos \varphi - n_Z \sin \varphi & -(1 - n_Y^2) \cos \varphi & n_Y n_Z \cos \varphi + n_X \sin \varphi \\ n_X n_Z \cos \varphi + n_Y \sin \varphi & n_Y n_Z \cos \varphi - n_X \sin \varphi & -(1 - n_Z^2) \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Теперь на основании зависимостей (2.10) и (2.11) может быть построено преобразование скорости и ускорения при переходе от подвижной системы $Oxuz$ к неподвижной. В частном случае совпадения систем ($\varphi = 0$) такое преобразование осуществляет "замораживание" кинематических характеристик, т.е. преобразование характеристик в движущейся системе $Oxuz$ в аналогичные характеристики в неподвижной системе $OXYZ$. При этом матрица M и ее производные принимают вид

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{dM}{dt} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -n_Z & n_Y \\ n_Z & 0 & -n_X \\ -n_Y & n_X & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = \omega^2 \begin{bmatrix} -(1 - n_X^2) & n_X n_Y & n_X n_Z \\ n_X n_Y & -(1 - n_Y^2) & n_Y n_Z \\ n_X n_Z & n_Y n_Z & -(1 - n_Z^2) \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы dM/dt составлены из компонент вектора

$$\vec{\omega} = \omega \mathbf{n}^0 = \omega (n_X, n_Y, n_Z)^T = (\omega_X, \omega_Y, \omega_Z)^T$$

по правилу, позволяющему воспользоваться результатом (2.14) и преобразовать матричную форму "замораживания" скорости и ускорения к векторной форме:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \vec{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{w} + 2\vec{\omega} \times \mathbf{v} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Применим полученный результат к задаче перехода между стартовой системой координат (СК № 4) и начально-стартовой (СК № 5). Будем считать, что Земля имеет сферическую поверхность радиуса R_3 . Пусть известны радиус-вектор \mathbf{r} , скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{w} ЛА в стартовой системе

$$\mathbf{r} = x x^0 + y y^0 + z z^0, \quad \mathbf{v} = \dot{x} x^0 + \dot{y} y^0 + \dot{z} z^0, \quad \mathbf{w} = \ddot{x} x^0 + \ddot{y} y^0 + \ddot{z} z^0,$$

где x^0, y^0, z^0 — орты осей СК № 4, и пусть эти же характеристики в начально-стартовой системе будут

$$\mathbf{r}_0 = x_0 x_0^0 + y_0 y_0^0 + z_0 z_0^0, \quad \mathbf{v}_0 = \dot{x}_0 x_0^0 + \dot{y}_0 y_0^0 + \dot{z}_0 z_0^0, \quad \mathbf{w}_0 = \ddot{x}_0 x_0^0 + \ddot{y}_0 y_0^0 + \ddot{z}_0 z_0^0,$$

где x_0^0, y_0^0, z_0^0 — орты осей СК № 5.

Отметим следующую особенность рассматриваемой задачи. Движение СК № 4 относительно СК № 5 происходит за счет суточного вращения Земли, при этом меняется не только взаимная ориентация осей систем, но и взаимное положение начал координат, удаленных от центра Земли на одно

и то же расстояние R_3 . Чтобы обойти эту особенность и воспользоваться уже полученными результатами, введем вспомогательные системы координат — геоцентрические стартовую и начально-стартовую, орты осей которых совпадают соответственно с ортами x^0, y^0, z^0 и x_0^0, y_0^0, z_0^0 и которые имеют общее начало, расположенное в центре Земли. Векторы положения ЛА в этих системах будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x x_0^0 + (y + R_3) y_0^0 + z z_0^0 = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_0' &= x_0 x_0^0 + (y_0 + R_3) y_0^0 + z_0 z_0^0 = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}_0, \end{aligned}$$

где $\Delta \mathbf{r} = R_3 \mathbf{y}^0$ и $\Delta \mathbf{r}_0 = R_3 \mathbf{y}_0^0$ — некоторые постоянные добавки к \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 .

Если теперь единичный вектор направления \mathbf{n}^0 совпадает с осью суточного вращения Земли

$$\mathbf{n}^0 = (n_x, n_y, n_z)^T = \left(\frac{\omega_{3x}}{\omega_3}, \frac{\omega_{3y}}{\omega_3}, \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} \right)^T,$$

то матрица (2.15) осуществляет преобразование

$$\mathbf{r}_0' = M \mathbf{r}' \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_0 = M \mathbf{r}' - \Delta \mathbf{r}_0 = M \mathbf{r} + M \Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}_0. \quad (2.17)$$

Дифференцируя (2.17) по времени и имея в виду, что $\frac{d\Delta \mathbf{r}}{dt} = \frac{d\Delta \mathbf{r}_0}{dt} = 0$,

находим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \frac{dM}{dt} \mathbf{r} + M \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{dM}{dt} \Delta \mathbf{r} = \frac{dM}{dt} \mathbf{r}' + M \mathbf{v}, \\ \mathbf{w}_0 &= \frac{d^2 \mathbf{r}_0}{dt^2} = \frac{d^2 M}{dt^2} \mathbf{r} + 2 \frac{dM}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} + M \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d^2 M}{dt^2} \mathbf{r} = \\ &= \frac{d^2 M}{dt^2} \mathbf{r}' + 2 \frac{dM}{dt} \mathbf{v} + M \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В частном случае "замораживания" характеристик относительного движения получаем абсолютные скорость и ускорение в проекциях на оси стартовой системы координат

$$\mathbf{V} = \vec{\omega}_3 \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}, \quad \mathbf{W} = \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \mathbf{r}') + 2\vec{\omega}_3 \times \mathbf{v} + \mathbf{w}. \quad (2.19)$$

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (2.19), определим проекции угловой скорости вращения Земли на оси стартовой системы координат.

Сначала вектор $\vec{\omega}_3$ (рис. 2.11) спроектируем на вертикальное направление (ось Oy)

$$\omega_{3y} = \omega_3 \sin \varphi_{ГЦ},$$

где $\varphi_{ГЦ}$ — геоцентрическая широта точки старта, и на горизонтальное (в плоскости Oxz вдоль

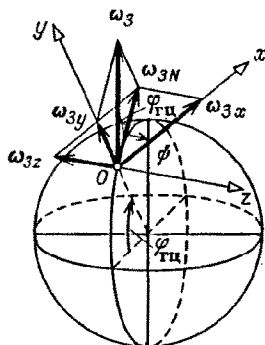


Рис. 2.11. Проекция вектора угловой скорости вращения Земли на оси стартовой системы координат

касательной к меридиану)

$$\omega_{3N} = \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma\Gamma}.$$

Горизонтальную проекцию в свою очередь спроектируем на оси Ox и Oz :

$$\omega_{3x} = \omega_{3N} \cos \psi = \omega_3 \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi,$$

$$\omega_{3z} = -\omega_{3N} \sin \psi = -\omega_3 \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi,$$

где ψ – азимут прицеливания. Таким образом,

$$\vec{\omega}_3 = \omega_3 (\cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi \cdot x^0 + \sin \varphi_{\Gamma\Gamma} \cdot y^0 - \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi \cdot z^0).$$

Запишем теперь итоговый результат преобразований (2.19):

$$\begin{aligned} V_e = \vec{\omega}_3 \times r' = & [z \sin \varphi_{\Gamma\Gamma} + (y + R_3) \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi] x^0 + \\ & + [-x \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi - z \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi] y^0 + \\ & + [(y + R_3) \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi - x \sin \varphi_{\Gamma\Gamma}] z^0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} W_e = \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times r') = & \omega_3^2 \{ [R_\omega \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi - x] x^0 + \\ & + [R_\omega \sin \varphi_{\Gamma\Gamma} - R_3 - y] y^0 + [-R_\omega \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi - z] z^0 \}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} W_c = 2\vec{\omega}_3 \times v = & 2\omega_3 \{ [\dot{y} \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi + \dot{z} \sin \varphi_{\Gamma\Gamma}] x^0 + \\ & + [-\dot{x} \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi - \dot{z} \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi] y^0 + \\ & + [-\dot{x} \sin \varphi_{\Gamma\Gamma} + \dot{y} \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi] z^0 \}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $R_\omega = x \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \cos \psi + (R_3 + y) \sin \varphi_{\Gamma\Gamma} - z \cos \varphi_{\Gamma\Gamma} \sin \psi$; V_e, W_e, W_c – соответственно векторы переносной скорости, переносного и кориолисова ускорений.

Заметим, что преобразование характеристик движения при переходе от стартовой к начально-стартовой системе координат может осуществляться двумя способами. Первый основан на использовании общего преобразования (2.18) с матрицами $M, dM/dt$ и d^2M/dt^2 , а при втором сначала проводится "замораживание" скорости и ускорения в стартовой системе, а затем "замороженные" векторы скорости и ускорения проектируются с помощью матрицы M на оси начально-стартовой системы.

Направления осей стартовой системы координат, вращающейся вместе с Землей, меняются со временем t . Их новые направления относительно исходных (или относительно осей начально-стартовой системы) описываются матрицей (2.15), если положить $n^0 = (n_x, n_y, n_z)^T =$

$$= \begin{pmatrix} \omega_{3x} & \omega_{3y} & \omega_{3z} \\ \omega_3 & \omega_3 & \omega_3 \end{pmatrix}^T \text{ и } \varphi = \omega_3 t. \text{ Но за минуту полета на активном}$$

участке $\omega_3 t$ достигает $15'$, за 10 минут – $2,5^\circ$, и поэтому можно принять $\cos \varphi \approx 1$ и $\sin \varphi \approx \omega_3 t$. Тогда (2.15) приводится к виду

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\omega_3 t & \omega_{3y} t \\ \omega_{3x} t & 1 & -\omega_{3x} t \\ -\omega_{3y} t & \omega_{3x} t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ можно рассматривать как малые углы:

$$\gamma_1 = \omega_{3x}t = \omega_3t \cos \varphi_{\Gamma\Omega} \cos \psi,$$

$$\gamma_2 = \omega_{3y}t = \omega_3t \sin \varphi_{\Gamma\Omega},$$

$$\gamma_3 = \omega_{3z}t = -\omega_3t \cos \varphi_{\Gamma\Omega} \sin \psi,$$

любой из которых не превышает малой величины ω_3t .

2.5.4. Переход между СК № 6 и СК № 5. Необходимость использования связанной системы координат (СК № 6) возникает в связи с несколькими обстоятельствами. Во-первых, первоначальная установка ЛА относительно земной системы координат производится с помощью соответствующего ориентирования осей ЛА под определенными углами. Во-вторых, между осями гироскопических приборов и осями ЛА должно быть определенное соответствие, без которого управление движением ЛА было бы неопределенным. В-третьих, ряд сил и моментов, действующих на ЛА в полете, удобно определять именно относительно осей ЛА, а затем проектировать на оси той системы координат, в которой проводится расчет.

Поскольку расчет движения ЛА на активном участке траектории, как правило, проводится в стартовой или начально-стартовой системе координат, мы рассмотрим переходы между СК № 6 и этими системами. При этом нас будет интересовать взаимная ориентация осей системы, а не взаимное положение их начал. Сначала рассмотрим связанную $O_1x_1y_1z_1$ и начально-стартовую $O_0x_0y_0z_0$ системы координат (в момент старта направления осей этих систем совпадут, если начально-стартовую систему повернуть на угол 90° вокруг оси O_0z_0 в направлении от оси O_0x_0 к оси O_0y_0).

При полете ЛА относительная ориентация осей связанной и начально-стартовой систем координат меняется. Будем определять ее тремя углами, которые обычно и фиксируются чувствительными элементами гироскопических приборов и относительно которых ведется процесс управления угловым положением ЛА. Это так называемые *углы тангажа φ , рыскания ξ и крена η* . При повороте осей начально-стартовой системы $O_0x_0y_0z_0$ последовательно на эти три угла ее оси совпадут с осями связанной системы координат.

Поскольку в данном случае нас интересуют только направления осей, совместим начало координат начально-стартовой системы O_0 с помощью параллельного переноса с началом связанной системы координат O_1 . После этого произведем последовательно следующие операции:

1) повернем (рис. 2.12) начально-стартовую систему на угол φ вокруг оси O_0z_0 так, чтобы ось O_1x_1 оказалась в плоскости $O_0x_0z_0$; полученную промежуточную систему обозначим $O_1x'y'z'$;

2) поворотом промежуточной системы вокруг оси O_1y' на угол ξ совместим ось O_1x' с осью O_1x_1 ; полученную систему обозначим $O_1x''y''z''$;

3) поворотом полученной системы вокруг оси O_1x'' на угол η совместим оси O_1y'' и O_1z'' соответственно с осями O_1y_1 и O_1z_1 .

В результате этих трех поворотов оси начально-стартовой системы координат $O_0x_0y_0z_0$ будут совмещены с осями связанной системы координат

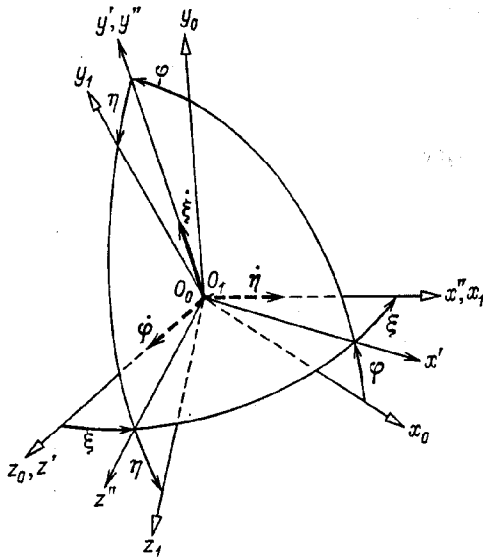


Рис. 2.12. Взаимосвязь между осями связанной и начально-стартовой систем координат через углы тангажа, рыскания и крена

$O_1 x_1 y_1 z_1$. Геометрический смысл углов φ , ξ и η заключается в следующем. Угол тангажа φ определяет положение наклонной плоскости, нормальной к плоскости $O_0 x_0 y_0$ и проходящей через продольную ось ЛА; угол рыскания ξ есть угол (в этой наклонной плоскости) между продольной осью ЛА и вертикальной плоскостью $O_0 x_0 y_0$; наконец, угол крена η представляет собой угол поворота ЛА вокруг продольной оси.

Итак, матрица поворота на угол тангажа φ , элементами которой являются направляющие косинусы осей системы $O_0 x_0 y_0 z_0$ относительно осей системы $O_1 x_1' y_1' z_1'$, имеет вид

$$L_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и осуществляет преобразование координат вектора \mathbf{R}_0 , заданного в начально-стартовой системе, в координаты вектора \mathbf{R}' в первой промежуточной системе:

$$\mathbf{R}' = L_\varphi \mathbf{R}_0.$$

При следующем повороте на угол рыскания ξ получаем соответственно

$$\mathbf{R}'' = L_\xi \mathbf{R}', \quad L_\xi = \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 & -\sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi & 0 & \cos \xi \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота на угол крена η завершает преобразование:

$$\mathbf{R}_1 = L_\eta \mathbf{R}'', \quad L_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & \sin \eta \\ 0 & -\sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix}.$$

Результирующая матрица преобразования вектора \mathbf{R}_0 , заданного в начально-стартовой системе, в вектор \mathbf{R}_1 в связанной системе получается при последовательном выполнении операций

$$\mathbf{R}_1 = L_\eta \mathbf{R}'' = L_\eta L_\xi \mathbf{R}' = L_\eta L_\xi L_\varphi \mathbf{R}_0 = L \mathbf{R}_0:$$

$$L = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \xi & \sin \varphi \cos \xi & -\sin \xi \\ -\sin \varphi \cos \eta + \cos \varphi \sin \xi \sin \eta & \cos \varphi \cos \eta + \sin \varphi \sin \xi \sin \eta & \cos \xi \sin \eta \\ \sin \varphi \sin \eta + \cos \varphi \sin \xi \cos \eta & -\cos \varphi \sin \eta + \sin \varphi \sin \xi \cos \eta & \cos \xi \cos \eta \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Элементами результирующей матрицы L , очевидно, являются направляющие косинусы осей начально-стартовой системы относительно осей связанной системы координат. Исходя из свойства ортогональности, обратное преобразование

$$\mathbf{R}_0 = L^{-1} \mathbf{R}_1$$

реализуется транспонированной матрицей

$$L^{-1} = L^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \xi & -\sin \varphi \cos \eta + \cos \varphi \sin \xi \sin \eta & \sin \varphi \sin \eta + \cos \varphi \sin \xi \cos \eta \\ \sin \varphi \cos \xi & \cos \varphi \cos \eta + \sin \varphi \sin \xi \sin \eta & -\cos \varphi \sin \eta + \sin \varphi \sin \xi \cos \eta \\ -\sin \xi & \cos \xi \sin \eta & \cos \xi \cos \eta \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

До сих пор нас не интересовали величины углов φ , ξ и η . Однако в подавляющем большинстве случаев реального полета приходится иметь дело с малыми углами ξ и η , так как полет ЛА и управление его полетом происходят при малых отклонениях этих углов относительно начального нулевого значения. Что касается угла φ , то он должен изменяться по определенному заранее заданному закону, называемому *программой угла тангажа*, отклоняясь от заданных значений на малые величины $\Delta\varphi$, так что в реальном полете

$$\varphi = \varphi_{\text{пр}} + \Delta\varphi, \quad (2.26)$$

где $\varphi_{\text{пр}}$ — заданное программное значение угла тангажа.

В силу малости углов ξ и η можно записать

$$\cos \xi = \cos \eta = 1, \quad \sin \xi = \xi, \quad \sin \eta = \eta.$$

Пренебрегая величинами, содержащими произведения малых углов, можно существенно упростить матрицы переходов (2.24) и (2.25):

$$L = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & -\xi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & \eta \\ \eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi & -\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$L^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & \eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & -\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi \\ -\xi & \eta & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Ориентация осей ЛА в пространстве полностью характеризуется углами φ , ξ и η , а скорость изменения ориентации во времени полностью задается производными $\dot{\varphi}$, $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$. В дальнейшем, однако, нас будут интегресовать угловые скорости ЛА относительно осей связанной системы координат. Определим эти скорости ω_{x_1} , ω_{y_1} и ω_{z_1} , пользуясь полученными выше результатами.

Вектор $\vec{\varphi}$ направлен по оси O_0z_0 начально-стартовой системы координат. Его направляющие косинусы являются элементами третьего столбца матрицы (2.24), а в упрощенном виде — матрицы (2.27). Вектор $\vec{\xi}$ направлен по промежуточной оси $O_1y'(O_1y'')$, лежащей в плоскости $O_1y_1z_1$ и образующей угол η с осью O_1y_1 и угол $90^\circ + \eta$ с осью O_1z_1 . Следовательно, его направляющие косинусы в связанной системе координат будут $(0, \cos \eta, -\sin \eta) \approx (0, 1, -\eta)$. Наконец, вектор $\vec{\eta}$ направлен по оси O_1x_1 и имеет направляющие косинусы $(1, 0, 0)$.

Таким образом, интересующая нас кинематическая связь имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= -\dot{\varphi} \sin \xi + \dot{\eta}, \\ \omega_{y_1} &= \dot{\varphi} \cos \xi \sin \eta + \dot{\xi} \cos \eta, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi} \cos \xi \cos \eta - \dot{\xi} \sin \eta \end{aligned} \quad (2.29)$$

или в упрощенном виде

$$\omega_{x_1} = -\dot{\varphi}\xi + \dot{\eta}, \quad \omega_{y_1} = \dot{\varphi}\eta + \dot{\xi}, \quad \omega_{z_1} = \dot{\varphi} - \dot{\xi}\eta. \quad (2.30)$$

2.5.5. Переход между СК №6 и СК №4. В связи с тем, что чаще всего уравнения движения на участке выведения записываются и интегрируются в стартовой системе координат, переход от осей связанной системы координат (СК №6) к осям стартовой системы (СК №4) представляет наибольший интерес. При определении матрицы такого перехода воспользуемся матрицами (2.23) и (2.27), с помощью которых можно записать

$$\mathbf{r}_0 = M \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_1 = L \mathbf{r}_0,$$

откуда

$$\mathbf{r}_1 = L(M \mathbf{r}) = LM \mathbf{r} = N \mathbf{r} \quad \text{или} \quad N = LM,$$

т.е. интересующая нас матрица перехода получается в результате перемножения матриц (2.27) и (2.23):

$$N = \begin{bmatrix} \cos \varphi + \gamma_3 \sin \varphi + \gamma_2 \xi & -\gamma_3 \cos \varphi + \sin \varphi - \gamma_1 \xi & \gamma_2 \cos \varphi - \gamma_1 \sin \varphi - \xi \\ -\sin \varphi + \gamma_3 \cos \varphi - \gamma_2 \eta & \gamma_3 \sin \varphi + \cos \varphi + \gamma_1 \eta & -\gamma_2 \sin \varphi - \gamma_1 \cos \varphi + \eta \\ \eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi + & -\gamma_3 (\eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi) - & \gamma_2 (\eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi) - \\ + \gamma_3 (-\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi) - \gamma_2 & -\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi + \gamma_1 & -\gamma_1 (-\eta \cos \varphi + \xi \sin \varphi) + 1 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Если в этой матрице пренебречь членами, содержащими произведения ма-

лых углов $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \eta, \xi)$, то она упростится:

$$N = \begin{bmatrix} \cos \varphi + \gamma_3 \sin \varphi & \sin \varphi - \gamma_3 \cos \varphi & \gamma_2 \cos \varphi - \gamma_1 \sin \varphi - \xi \\ \gamma_3 \cos \varphi - \sin \varphi & \gamma_3 \sin \varphi + \cos \varphi & -\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi + \eta \\ \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - \gamma_2 & \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi + \gamma_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что обратное преобразование

$$r = N^{-1} r_1$$

осуществляет матрица

$$N^{-1} = N^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi + \gamma_3 \sin \varphi & \gamma_3 \cos \varphi - \sin \varphi & \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - \gamma_2 \\ \sin \varphi - \gamma_3 \cos \varphi & \gamma_3 \sin \varphi + \cos \varphi & \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi + \gamma_1 \\ \gamma_2 \cos \varphi - \gamma_1 \sin \varphi - \xi & -\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi + \eta & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

В ряде случаев могут представлять интерес не характеристики конкретной траектории ЛА (для заданного расположения стартовой позиции и заданного азимута прицеливания), а характеристики, усредненные по множеству различных расположений стартовой позиции и азимутов прицеливания. При этом обычно используется модель невращающейся Земли, т.е. СК № 4 и СК № 5 совпадают, углы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ обращаются в нуль, матрица (2.23) становится единичной и матрица перехода (2.32) упрощается

$$N^{-1} = L^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi \\ -\xi & \eta & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

При подобных проектных расчетах вообще нет необходимости рассматривать отклонения угловых положений ЛА относительно заданных программных положений (т.е. рассогласования по углам тангажа, рыскания и крена). Другими словами, можно считать

$$\Delta \varphi = \xi = \eta = 0, \quad \varphi = \varphi_{\text{пр}}.$$

Тогда матрица перехода приводится к предельно простой форме:

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{\text{пр}} & -\sin \varphi_{\text{пр}} & 0 \\ \sin \varphi_{\text{пр}} & \cos \varphi_{\text{пр}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Поскольку при этих предположениях движение ЛА получается плоским (в плоскости Oxy), необходимость в рассмотрении третьей координаты отпадает и уравнения движения записываются только относительно осей Ox и Oy либо в проекциях на направление скорости и нормаль к ней.

2.5.6. Уточнение СК №4 и СК №5. Оси стартовой и начально-стартовой систем координат могут иметь ориентацию, несколько отличную от рассмотренной нами. Это связано с желанием расположить в начальный момент времени ось Oy по линии отвеса, т.е. по линии действия силы тяжести. Направление этой силы совпало бы с направлением на центр Земли, если бы

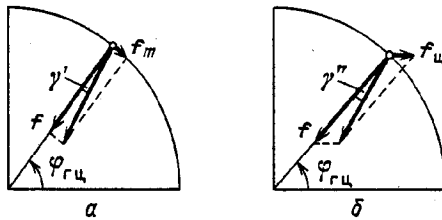


Рис. 2.13. Уточнение расположения осей нецентральных стартовой и начально-стартовой систем координат

гравитационное поле Земли было центральным и отсутствовало суточное вращение Земли.

Для оценки эффекта нецентральности гравитационного поля воспользуемся результатом (2.5), относящимся к нормальному полю. Очевидно, смещение направления гравитационного притяжения относительно центрального будет порождаться членом f_m , а величина смещения (рис. 2.13,а)

определится отношением возмущающего воздействия f_m к основному

$$f = \frac{\mu}{R_3^2} :$$

$$\sin \gamma' = \frac{f_m}{f} = -3J_2 \sin \varphi_{ГЦ} \cos \varphi_{ГЦ}.$$

Максимум $|\sin \gamma'|$ достигается при $\varphi_{ГЦ} = 45^\circ$ и составляет около 0,00162, что соответствует $\gamma' \approx 5,5'$.

Для наблюдателя, находящегося на поверхности вращающейся Земли, эффект вращения проявляется в виде центробежной силы инерции, направленной по нормали к оси вращения (рис. 2.13,б) и равной для единичной массы $f_c = \omega_3^2 R_3 \cos \varphi_{ГЦ}$. В результате ее действия направления гравитационного притяжения и силы тяжести отличаются на угол, определяемый соотношением

$$\sin \gamma'' = \frac{f_c \sin \varphi_{ГЦ}}{f} = \frac{R_3^3 \omega_3^2 \sin \varphi_{ГЦ} \cos \varphi_{ГЦ}}{\mu}.$$

Максимум $|\sin \gamma''|$ достигается при $\varphi_{ГЦ} = 45^\circ$ и составляет около 0,0017, что соответствует $\gamma'' \approx 6'$.

Таким образом, максимальное отклонение направления силы тяжести (или направления линии отвеса) от центрального направления не превышает $\gamma = \gamma' + \gamma'' = 11,5'$.

Величину γ можно также легко определить из условия, что линия отвеса нормальна к поверхности земного эллипсоида. Поскольку его сжатие $\alpha = 1/298,25 \approx 0,003353$, то с точностью до величин порядка α^2 для угла γ будет справедливым выражение

$$\gamma = \alpha \sin 2 \varphi_{ГЦ}. \quad (2.35)$$

Заметим, что приведенная ранее формула

$$R = R_e (1 - \alpha \sin^2 \varphi_{ГЦ}), \quad (2.36)$$

определяющая расстояние от центра земного эллипсоида до точки на его поверхности, имеет погрешность порядка $R_e \alpha^2$.

Если теперь оси Oy стартовой и начально-стартовой систем координат направить противоположно силе тяжести, а оси Ox и Oz расположить в плоскости, нормальной к направлению оси Oy , то получим уточненные варианты СК № 4 и СК № 5. Ось Oy этих систем не будет проходить через центр Земли, поэтому в качестве привязки начала координат к поверхности Земли удобнее использовать не геоцентрическую широту $\varphi_{ГЦ}$, а географическую $\varphi_{Г}$, которая равна углу между направлением силы тяжести (или отвеса) в данной точке поверхности Земли и плоскостью экватора. Чтобы различать варианты систем, можно прежние системы называть центральными, а их уточненные варианты — нецентральными стартовой и начально-стартовой системами.

При работе с нецентральными системами можно использовать результаты, полученные нами для центральных систем, но при этом необходимо ввести следующие изменения, относящиеся к проекциям вектора угловой скорости $\vec{\omega}_3$ и величине радиуса земной поверхности R_3 .

Проекции вектора угловой скорости $\vec{\omega}_3$ на оси нецентральных систем координат будут равны

$$\begin{aligned}\omega_{3x} &= \omega_3 \cos \varphi_{Г} \cos \psi, \\ \omega_{3y} &= \omega_3 \sin \varphi_{Г}, \\ \omega_{3z} &= \pm \omega_3 \cos \varphi_{Г} \sin \psi.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Нецентральность систем координат приводит к изменению расстояния вдоль оси Oy от поверхности Земли до пересечения с осью вращения Земли (для центральных систем это был радиус земной поверхности R_3). Величина этого расстояния будет определяться формулой

$$R'_3 = \frac{R_3 \cos \varphi_{ГЦ}}{\cos \varphi_{Г}}.$$

Полученные соотношения перехода между связанной системой и стартовой и начально-стартовой системами остаются справедливыми и для нецентральных систем; при этом, естественно, углы тангажа, рыскания и крена обеспечивают переход от осей нецентральной системы к осям связанной системы.

Завершая рассмотрение переходов между стартовыми и связанной системами координат, заметим еще раз, что полученные матрицы перехода фактически осуществляют чисто геометрическое проектирование векторов и учитывают лишь взаимную ориентацию осей координат. Эти матрицы не могут быть использованы для преобразования характеристик движения (положения, скорости и ускорения), при котором должны учитываться не только взаимная ориентация осей, но и взаимное перемещение систем (начал систем координат и их осей). Наглядными примерами этого являются полученные нами преобразования (2.17) и (2.18).

ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА
НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ И В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА
В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

Теоретическое изучение любого сложного процесса основывается на его математическом описании, которое в зависимости от степени наших знаний и представлений о качественных и количественных закономерностях, влияющих на течение процесса, может оказаться более или менее полным. Принятое описание, по существу, представляет собой некую приближенную модель истинного процесса. Чем точнее это приближение, тем сложнее, как правило, математическое описание, влекущее за собой и сложность проведения аналитического исследования, и трудности вычислительного характера. С другой стороны, чрезмерное упрощение модели может привести к искаженным представлениям о течении процесса и к количественным ошибкам в расчетах. Поэтому при выборе модели стараются избегать как той, так и другой крайности. Но это приводит к тому, что для описания одного и того же процесса могут использоваться разные математические модели. Таким образом, вопрос о выборе модели является достаточно принципиальным. Имея это в виду, составление уравнений движения ЛА с работающим двигателем мы начнем с описания его математической модели. Затем получим уравнения движения центра масс и вокруг центра масс и проанализируем полученные уравнения с точки зрения того эффекта, который привносится процессом истечения газов сравнительно со случаем движения тела или системы тел с постоянной массой.

§ 3.1. Математическая модель движения летательного аппарата
с работающим двигателем

Известен ряд фундаментальных работ, посвященных основам теории движения тела переменной массы, каковым является и ЛА, использующий реактивный принцип. В некоторых работах этот вопрос рассматривался в связи с проблемами движения небесных тел, изменяющих свою массу с течением времени, в других – в связи с решением "чисто земных" задач по динамике систем. Тут уместно отметить особую заслугу И.В. Мещерского, который, по существу, выделил класс движений с изменяющейся массой тела в самостоятельный раздел теоретической механики. Что касается исследований, проведенных применительно к изучению движения ракеты, то их результат зависел от степени приближения принятой математической модели к действительной картине этого достаточно сложного про-

цесса и поэтому в каких-то деталях конечные уравнения у разных авторов несколько отличались, хотя в главном все выводы совпадали.

Из работ наших ученых отметим, например, работы [7, 12, 16, 17]. Ниже мы будем следовать выводу, предложенному в 1951 г. С.С. Лавровым и М.С. Флорианским и затем с некоторыми изменениями опубликованному в [2].

Сложность правильного и достаточно полного математического описания движения летательного аппарата на активном участке траектории связана со следующими особенностями.

Ракета не является твердым телом или системой твердых тел, состоящей все время из одних и тех же элементов: непрерывно расходуются ее масса, а в некоторых случаях извне поступают новые массы.

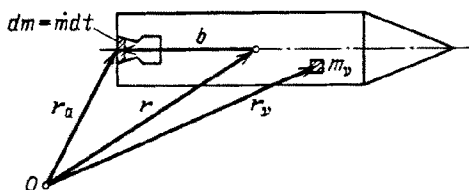


Рис. 3.1. Схематическое представление ракеты для составления математической модели

Внутри ракеты, в пределах ее внешних контуров, постоянно происходит перемещение частиц, находящихся в жидком и газообразном состоянии. Это приводит к тому, что законы динамики твердого тела или системы тел за конечный промежуток времени здесь непосредственно неприменимы. Однако, рассматривая движение за бесконечно малый промежуток времени, удастся решить задачу о движении ракеты с помощью известных теорем динамики системы.

Представим ракету в виде множества элементарных частиц, каждая из которых имеет массу m_p , и, кроме того, отдельно выделим элементарную частицу dm , которая через бесконечно малый промежуток времени dt покинет пределы ракеты (рис. 3.1). Таким образом, в момент времени t масса ракеты равна

$$m = \sum_p m_p + dm. \quad (3.1)$$

В число частиц m_p включаются все элементарные массы (твердые, жидкие или газообразные), заключенные в пределах внешних обводов ракеты, кроме частицы dm . Если абсолютную величину секундного расхода массы обозначить через \dot{m} , то

$$|dm| = \dot{m} dt. \quad (3.2)$$

Отметим, что принятое условие о расходе массы (а не о ее притоке) из одной точки не препятствует возможности распространить все последующие рассуждения на более общий случай.

Имея в виду, что основные законы динамики тела можно применять для системы тел, будем рассматривать как единую систему все массы, содержащиеся в ракете в момент времени t . В этом случае наша система в момент t будет совпадать с ракетой.

В следующий момент времени $t + dt$ частица массы dm покидает границы ракеты, и система теперь будет состоять из двух частей: ракеты (без частицы dm) и отброшенной частицы dm , которую ради краткости назовем отбросом.

Далее примем допущение, согласно которому будем пренебрегать внешними силами, действующими на частицу dm , истекающую за время dt через выходное сечение сопла двигателя. Силы взаимодействия между частицей dm и газами, остающимися пока в ракете, являются внутренними силами для системы и не оказывают влияния на движение системы. Из сделанного допущения следует, что силы, действующие на рассматриваемую систему, совпадают с силами, действующими на ракету.

Уравнения движения ракеты будем получать, исходя из основных уравнений движения системы, которые записываются в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \mathbf{F}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\mathbf{L}_c^{(C)}}{dt} = \mathbf{M}^{(C)}, \quad (3.4)$$

где \mathbf{K}_c — количество движения системы; \mathbf{F} — главный вектор внешних сил, действующих на систему; $\mathbf{L}_c^{(C)}$ — момент количества движения системы (кинетический момент) относительно ее центра масс C ; $\mathbf{M}^{(C)}$ — суммарный момент (главный момент) внешних сил относительно центра масс системы.

В (3.3) и (3.4) нижний индекс "с" означает, что векторы \mathbf{K} и \mathbf{L} относятся к системе, а не к ракете, для которой индекс не пишется; верхний индекс "(C)" означает, что векторы \mathbf{L} и \mathbf{M} характеризуют движение относительно центра масс системы.

§ 3.2. Уравнение сил

Сначала рассмотрим уравнение (3.3) и найдем выражение для количества движения ракеты. Количество движения будем определять, исходя из сопоставления выражений для вектора центра масс в моменты времени t и $t + dt$ (движение будем рассматривать относительно некоторого неподвижного центра O). Положение каждой элементарной частицы m_ν будет определяться вектором \mathbf{r}_ν , а положение частицы dm — вектором \mathbf{r}_a , определяющим центр площади выходного сечения сопла двигателя (см. рис. 3.1).

Вектор положения центра масс ракеты \mathbf{r} в момент времени t определяется из равенства

$$m \mathbf{r} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} + \dot{m} dt \mathbf{r}_a. \quad (3.5)$$

В принятой математической модели ракеты каждая частица перемещается вместе с ракетой относительно точки O и, кроме того, перемещается относительно самой ракеты и, следовательно, относительно ее центра масс. Положение центра масс также является переменным не только относительно точки O , но и относительно контуров ракеты.

За время dt масса ракеты изменится на величину

$$dm = -\dot{m} dt \quad (3.6)$$

и станет равной $m - \dot{m} dt$.

Если скорость центра масс ракеты относительно точки O обозначить через v , то изменение радиуса-вектора центра масс за время dt будет

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt. \quad (3.7)$$

Полагая скорость каждой частицы относительно точки O равной v_ν , получим изменение радиуса-вектора частицы m_ν за время dt :

$$d\mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu dt. \quad (3.8)$$

Теперь уже отброс не входит в состав ракеты и, следовательно, не участвует в формировании положения ее центра масс. Для определения положения центра масс ракеты в момент времени $t + dt$ справедливо равенство

$$(m - \dot{m} dt)(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \sum_{\nu} m_{\nu}(\mathbf{r}_{\nu} + d\mathbf{r}_{\nu}). \quad (3.9)$$

Вычитая из (3.9) выражение (3.5), найдем

$$m d\mathbf{r} - \dot{m} \mathbf{r} dt - \dot{m} d\mathbf{r} dt = \sum_{\nu} m_{\nu} d\mathbf{r}_{\nu} - \dot{m} \mathbf{r}_a dt.$$

Пренебрежем в полученном равенстве бесконечно малой высшего порядка $\dot{m} d\mathbf{r} dt$, заменим $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}_{\nu}$ их выражениями (3.7) и (3.8) и сократим на dt . В результате получим

$$m \mathbf{v} - \dot{m} \mathbf{r} = \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} - \dot{m} \mathbf{r}_a$$

или

$$\sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} = m \mathbf{v} + \dot{m}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}).$$

Учитывая, что сумма $\sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}$ с точностью до бесконечно малого количества движения отброса совпадает с количеством движения ракеты \mathbf{K} , а разность $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}$ представляет собой вектор \mathbf{b} , направленный от центра масс ракеты к центру выходного сечения сопла двигателя, можно написать

$$\mathbf{K} = m \mathbf{v} + \dot{m} \mathbf{b}, \quad (3.10)$$

где

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) видно, что количество движения принятой модели ракеты отличается от количества движения твердого тела вторым слагаемым — произведением секундного расхода массы на расстояние между центром масс ракеты и центром выходного сечения сопла. Теперь можно написать выражения для количества движения системы в моменты времени t и $t + dt$. Для момента t система будет иметь то же количество движения, что и ракета, так как в этот момент времени понятия "система" и "ракета" совпадают:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}. \quad (3.12)$$

Для момента $t + dt$ количества движения системы и ракеты приобретут

некоторые приращения dK_c и dK соответственно. Отброшенная частица dm , принадлежащая системе, также будет обладать своим количеством движения $dK_{отбр}$. Таким образом, для момента $t + dt$ можно написать

$$K_c + dK_c = K + dK + dK_{отбр}. \quad (3.13)$$

Вычитая (3.12) из (3.13), получаем

$$dK_c = dK + dK_{отбр}. \quad (3.14)$$

Теперь нам необходимо найти dK и $dK_{отбр}$ и полученную сумму подставить в уравнение (3.3).

Приращение количества движения ракеты dK найдем из (3.10):

$$\begin{aligned} dK &= m dv + v dm + \dot{m} db + b \dot{m} dt = \\ &= m dv - v \dot{m} dt + \dot{m} b dt + b \dot{m} dt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где использованы очевидные соотношения

$$dm = -\dot{m} dt, \quad d\dot{m} = \ddot{m} dt, \quad db = \dot{b} dt.$$

Для количества движения отброса $dK_{отбр}$ запишем

$$dK_{отбр} = \dot{m} dt v_{отбр}.$$

Но скорость отбрасываемой частицы складывается из скорости центра выходного сечения сопла v_a и скорости u , с которой отбрасывается частица из сопла:

$$v_{отбр} = v_a + u.$$

В свою очередь скорость v_a складывается из скорости центра масс ракеты v и скорости центра выходного сечения сопла относительно центра масс ракеты \dot{b} (как известно, центр масс ракеты смещается относительно ее внешнего контура). Это следует также из дифференцирования (3.11):

$$\dot{b} = \dot{r}_a - \dot{r} \quad \text{или} \quad v_a = v + \dot{b}. \quad (3.16)$$

С учетом (3.16)

$$v_{отбр} = v + \dot{b} + u$$

и

$$dK_{отбр} = \dot{m} dt (v + \dot{b} + u). \quad (3.17)$$

Теперь, подставляя (3.15) и (3.17) в (3.14), получаем

$$\begin{aligned} dK_c &= m dv - \dot{m} v dt + \dot{m} b dt + b \dot{m} dt + \\ &+ \dot{m} v dt + \dot{m} b dt + \dot{m} u dt. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов и подстановки в (3.3) имеем

$$m \frac{dv}{dt} + 2\dot{m} b + b\ddot{m} + \dot{m} u = F$$

или, записывая в виде, привычном для уравнений движения,

$$m \frac{dv}{dt} = F - \dot{m} u - 2\dot{m} b - \ddot{m} b. \quad (3.18)$$

Из сопоставления уравнения (3.18) с уравнением движения твердого тела

следует, что на ракету, кроме внешних сил, действует дополнительная сила, которая определяется суммой $-\dot{m}\mathbf{u} - 2\dot{m}\dot{\mathbf{b}} - \ddot{m}\mathbf{b}$.

Анализом выражения (3.18) мы займемся несколько позже, а сейчас приступим к рассмотрению уравнения (3.4), определяющего движение системы относительно центра масс.

§ 3.3. Уравнение моментов

Кинетический момент $L_c^{(C)}$ системы относительно ее центра масс в момент времени t совпадает с кинетическим моментом ракеты L относительно ее центра масс

$$L_c^{(C)} = L = \sum_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{r}) \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} + (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) \times \dot{m} dt \mathbf{v}_{\text{отб}p}. \quad (3.19)$$

Здесь, рассматривая отброс как элементарную частицу, мы пренебрегли его собственным кинетическим моментом.

Кинетический момент системы относительно ее центра масс в момент времени $t + dt$ складывается из кинетических моментов ракеты и отброса относительно центра масс системы

$$L_c^{(C)} + dL_c^{(C)} = L_{(t+dt)}^{(C)} + dL_{\text{отб}p}^{(C)}. \quad (3.20)$$

Кинетические моменты в (3.20) определяются по известным формулам:

$$L_{(t+dt)}^{(C)} = L + dL + [(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - (\mathbf{r}_c + d\mathbf{r}_c)] \times (\mathbf{K} + d\mathbf{K}), \quad (3.21)$$

$$dL_{\text{отб}p}^{(C)} = dL_{\text{отб}p} + [(\mathbf{r}_a + d\mathbf{r}_{\text{отб}p}) - (\mathbf{r}_c - d\mathbf{r}_c)] \times d\mathbf{K}_{\text{отб}p}, \quad (3.22)$$

где $L + dL$ — кинетический момент ракеты относительно ее центра масс; $dL_{\text{отб}p}$ — собственный кинетический момент отброса, которым мы опять пренебрежем.

Связь между радиусами-векторами центров масс системы, ракеты и отброса выражается соотношением

$$m(\mathbf{r}_c + d\mathbf{r}_c) = (m - \dot{m} dt)(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) + m dt (\mathbf{r}_a + d\mathbf{r}_{\text{отб}p})$$

или, если пренебречь бесконечно малыми величинами второго порядка,

$$\mathbf{r}_c + d\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + d\mathbf{r} - \frac{\dot{m}}{m} \mathbf{r} dt + \frac{\dot{m}}{m} \mathbf{r}_a dt = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \frac{\dot{m}}{m} \mathbf{b} dt. \quad (3.23)$$

Подставляя выражения (3.21)–(3.23) в соотношение (3.20), получаем

$$L_c^{(C)} + dL_c^{(C)} = L + dL - \frac{\dot{m}}{m} \mathbf{b} dt \times (\mathbf{K} + d\mathbf{K}) + \\ + \left[(\mathbf{r}_a + d\mathbf{r}_{\text{отб}p}) - (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \frac{\dot{m}}{m} \mathbf{b} dt \right] \times d\mathbf{K}_{\text{отб}p}.$$

Учитывая, что $L_c^{(C)} = L$ [см. (3.19)] и отбрасывая при преобразовании бесконечно малые величины второго порядка, будем иметь

$$dL_c^{(C)} = dL - \frac{\dot{m}}{m} \mathbf{b} \times \mathbf{K} dt + (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) \times d\mathbf{K}_{\text{отб}p}.$$

Теперь вместо \mathbf{K} и $d\mathbf{K}_{отб}$ подставим их выражения (3.10) и (3.17):

$$\begin{aligned} dL_c^{(C)} &= d\mathbf{L} - \frac{\dot{m}}{m} \mathbf{b} \times (m\mathbf{v} + \dot{m}\mathbf{b}) dt + \mathbf{b} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}) \dot{m} dt = \\ &= d\mathbf{L} + \dot{m} \mathbf{b} \times (\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}) dt. \end{aligned}$$

Полученное значение $dL_c^{(C)}$ подставим в уравнение (3.4):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \dot{m} \mathbf{b} \times (\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}) = \mathbf{M}^{(C)}.$$

Имея в виду, что в момент времени t понятия "ракета" и "система" совпадают и, следовательно, суммы моментов внешних сил, действующих на ракету \mathbf{M} и систему $\mathbf{M}^{(C)}$, также совпадают, получаем следующее уравнение движения ракеты относительно центра масс:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \dot{m} \mathbf{b} \times (\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}) = \mathbf{M}. \quad (3.24)$$

Полученному уравнению можно придать и несколько иной вид. Для этого воспользуемся выражением

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{b}}{dt} + \vec{\omega} \times \mathbf{b},$$

где $\tilde{d}\mathbf{b}/dt$ — локальная производная от вектора \mathbf{b} , т.е. производная от вектора \mathbf{b} относительно корпуса ракеты; $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения корпуса ракеты. Тогда вместо (3.24) получим

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \dot{m} \mathbf{b} \times \mathbf{u} + \dot{m} \mathbf{b} \times \frac{\tilde{d}\mathbf{b}}{dt} + \dot{m} \mathbf{b} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{b}) = \mathbf{M}. \quad (3.25)$$

Но мы предполагаем, что центр масс ракеты и центр выходного сечения сопла располагаются на продольной оси ракеты, и поэтому вектор \mathbf{b} , а следовательно, и его локальная производная будут также расположены на этой оси. Отсюда следует, что

$$\mathbf{b} \times \frac{\tilde{d}\mathbf{b}}{dt} = 0. \quad (3.26)$$

Кроме того, пренебрегая геометрической и газодинамической асимметрией истечения газов, будем считать, что вектор \mathbf{u} — скорость движения центра масс отброса относительно центра выходного сечения сопла — параллелен продольной оси ракеты и вектору \mathbf{b} . Следовательно,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{u} = 0. \quad (3.27)$$

С учетом (3.26) и (3.27) уравнение (3.25), а вместе с ним и (3.24) примет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \dot{m} \mathbf{b} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{b}) = \mathbf{M}. \quad (3.28)$$

Мы видим, что в отличие от теоремы механики твердого тела, согласно которой производная по времени от момента количества движения равна

главному моменту внешних сил, в нашем случае появляется в соответствующем уравнении дополнительный член $m\mathbf{b} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{b})$, смысл которого мы выясним в результате последующих обсуждений, в которых попытаемся выделить причины, связанные с процессом истечения частиц и их перемещением внутри ракеты.

С этой целью вернемся к выражению (3.19) и запишем его, пренебрегая вторым членом, представляющим бесконечно малую величину:

$$\mathbf{L} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{r}) \times \mathbf{v}_{\nu}. \quad (3.29)$$

Здесь \mathbf{v}_{ν} (скорость частицы m_{ν}) можно представить как сумму двух скоростей: скорости \mathbf{w}_{ν} , которую имела бы эта частица, если бы она была жестко связана с корпусом ракеты, и ее скорости \mathbf{u}_{ν} относительно корпуса, так что

$$\mathbf{v}_{\nu} = \mathbf{w}_{\nu} + \mathbf{u}_{\nu}.$$

С учетом этого запишем (3.29) следующим образом:

$$\mathbf{L} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{r}) \times \mathbf{w}_{\nu} + \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{r}) \times \mathbf{u}_{\nu}. \quad (3.30)$$

Первое слагаемое в (3.30) представляет собой кинетический момент ракеты \mathbf{L}_T в предположении, что она является твердым телом. Это предположение в ряде работ называют "принципом затвердевания". При этом условии кинетический момент ракеты может быть представлен в виде

$$\mathbf{L}_T = A\omega_{x_1} x_1^0 + B\omega_{y_1} y_1^0 + C\omega_{z_1} z_1^0,$$

где A, B, C — моменты инерции ракеты как твердого тела относительно главных осей O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 ; $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ — проекции угловой скорости корпуса ракеты на эти оси.

Второе слагаемое в (3.30) есть кинетический момент масс, движущихся относительно корпуса ракеты. В дальнейшем этой составляющей кинетического момента мы будем пренебрегать, исходя из следующих соображений. Значительную часть движущихся масс составляет жидкость в баках и топливных магистралях ракеты. Однако скорости этих частиц весьма невелики. Большую относительную скорость имеют газообразные частицы, движущиеся в камере сгорания и сопловой части двигателя, однако масса этих частиц сравнительно с массой остальных составляет незначительную долю.

Следует, однако, заметить, что при изучении динамики движения ракеты как упругой конструкции, полости которой частично заполнены жидкостью [1, 14], вопросы движения жидкости во взаимодействии с деформациями элементов конструкции играют первостепенную роль, определяя характеристики различного рода колебательных движений. Однако в баллистике при изучении в основном движения центра масс ракеты имеют значение лишь такие колебания, период которых сопоставим с продолжительностью активного участка. При подобных длиннопериодических колебаниях вполне допустимо рассматривать ракету как твердое тело и считать, что момент количества движения ракеты равен

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_T = A\omega_{x_1} x_1^0 + B\omega_{y_1} y_1^0 + C\omega_{z_1} z_1^0. \quad (3.31)$$

Однако, в отличие от твердого тела постоянной массы, главные моменты инерции ракеты по времени переменны. Поэтому производная по времени от момента количества движения записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & \frac{dA}{dt} \omega_{x_1} x_1^0 + A \frac{d\omega_{x_1}}{dt} x_1^0 + A \omega_{x_1} \frac{dx_1^0}{dt} + \\ & + \frac{dB}{dt} \omega_{y_1} y_1^0 + B \frac{d\omega_{y_1}}{dt} y_1^0 + B \omega_{y_1} \frac{dy_1^0}{dt} + \\ & + \frac{dC}{dt} \omega_{z_1} z_1^0 + C \frac{d\omega_{z_1}}{dt} z_1^0 + C \omega_{z_1} \frac{dz_1^0}{dt}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $d\omega_{x_1}/dt$, $d\omega_{y_1}/dt$, $d\omega_{z_1}/dt$ — угловые ускорения относительно главных осей инерции ракеты; dA/dt , dB/dt , dC/dt — производные по времени от главных моментов инерции (эти производные отрицательны, так как по мере выгорания топлива они постепенно уменьшаются).

Так же, как мы поступали в отношении знака производной от массы ракеты по времени [см. (3.6)], обозначим абсолютные значения производных от главных моментов инерции по времени через \dot{A} , \dot{B} , \dot{C} . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left| \frac{dA}{dt} \right| = - \frac{dA}{dt}, \\ \dot{B} &= \left| \frac{dB}{dt} \right| = - \frac{dB}{dt}, \\ \dot{C} &= \left| \frac{dC}{dt} \right| = - \frac{dC}{dt}. \end{aligned}$$

Производные от единичных векторов x_1^0 , y_1^0 , z_1^0 , как известно, выражаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^0}{dt} &= \vec{\omega} \times x_1^0 = (\omega_{x_1} x_1^0 + \omega_{y_1} y_1^0 + \omega_{z_1} z_1^0) \times x_1^0 = \omega_{z_1} y_1^0 - \omega_{y_1} z_1^0, \\ \frac{dy_1^0}{dt} &= \omega_{x_1} z_1^0 - \omega_{z_1} x_1^0, \\ \frac{dz_1^0}{dt} &= \omega_{y_1} x_1^0 - \omega_{x_1} y_1^0. \end{aligned}$$

Тогда (3.32) можно преобразовать к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & \left[A \frac{d\omega_{x_1}}{dt} - (B - C) \omega_{y_1} \omega_{z_1} - \dot{A} \omega_{x_1} \right] x_1^0 + \\ & + \left[B \frac{d\omega_{y_1}}{dt} - (C - A) \omega_{x_1} \omega_{z_1} - \dot{B} \omega_{y_1} \right] y_1^0 + \\ & + \left[C \frac{d\omega_{z_1}}{dt} - (A - B) \omega_{x_1} \omega_{y_1} - \dot{C} \omega_{z_1} \right] z_1^0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Проведенными преобразованиями мы пока раскрыли только содержание первого слагаемого левой части уравнения (3.28).

Второе слагаемое преобразуем следующим образом, учитывая, что направление вектора \mathbf{b} противоположно направлению единичного вектора \mathbf{x}_1^0 :

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{b}} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{b}) &= \dot{m}(-b \mathbf{x}_1^0) \times [\omega_{x_1} \mathbf{x}_1^0 + \omega_{y_1} \mathbf{y}_1^0 + \omega_{z_1} \mathbf{z}_1^0] \times (-b \mathbf{x}_1^0) = \\ &= \dot{m} b^2 \mathbf{x}_1^0 \times (\omega_{z_1} \mathbf{y}_1^0 - \omega_{y_1} \mathbf{z}_1^0) = \dot{m} b^2 (\omega_{y_1} \mathbf{y}_1^0 + \omega_{z_1} \mathbf{z}_1^0). \end{aligned} \quad (3.34)$$

С учетом (3.33) и (3.34) уравнению моментов (3.28) придадим следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} &\left[A \frac{d\omega_{x_1}}{dt} - (B - C) \omega_{y_1} \omega_{z_1} - \dot{A} \omega_{x_1} \right] \mathbf{x}_1^0 + \\ &+ \left[B \frac{d\omega_{y_1}}{dt} - (C - A) \omega_{x_1} \omega_{z_1} + (\dot{m} b^2 - \dot{B}) \omega_{y_1} \right] \mathbf{y}_1^0 + \\ &+ \left[C \frac{d\omega_{z_1}}{dt} - (A - B) \omega_{x_1} \omega_{y_1} + (\dot{m} b^2 - \dot{C}) \omega_{z_1} \right] \mathbf{z}_1^0 = \mathbf{M}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Это уравнение определяет движение ЛА вокруг центра масс.

§ 3.4. Реактивные силы и моменты

В результате рассмотрения движения ракеты, сопровождающегося процессом непрерывного отброса массы, мы получили два основных векторных уравнения (3.18) и (3.35), первое из которых является уравнением сил, а второе — уравнением моментов. Оба они имеют отличия от соответствующих уравнений твердого тела.

Попробуем, исходя из физических представлений, объяснить происхождение этих отличий.

Выше, сопоставляя уравнение (3.18)

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \dot{m} \mathbf{u} - 2\dot{m} \mathbf{b} - \ddot{m} \mathbf{b}$$

с уравнением движения твердого тела

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F},$$

мы пришли к выводу о том, что на ракету, кроме внешних сил, действует дополнительная сила $-(\dot{m} \mathbf{u} + 2\dot{m} \mathbf{b} + \ddot{m} \mathbf{b})$. Эту силу назовем *реактивной силой* (или *динамической тягой*) и обозначим через \mathbf{P}_D :

$$\mathbf{P}_D = -(\dot{m} \mathbf{u} + 2\dot{m} \mathbf{b} + \ddot{m} \mathbf{b}). \quad (3.36)$$

Таким образом, центр масс ракеты движется так же, как центр масс твердого тела с массой, равной массе ракеты, на которое действует, кроме сил, приложенных к ракете, реактивная сила.

Оценим величины слагаемых реактивной силы. Главной ее частью является произведение массового секундного расхода продуктов сгорания

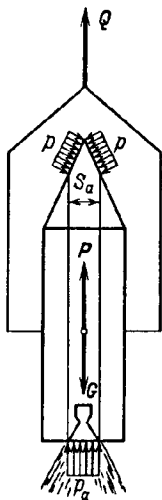


Рис. 3.2. Определение тяги двигателя на стенде

на скорость их истечения из сопла двигателя $-\dot{m}u$. Знак "минус" говорит о том, что направление этой силы противоположно направлению скорости истекающих газов.

Второй член составляет долю $2\dot{m}b/\dot{m}u = 2\dot{b}/u$ по отношению к главному и им, безусловно, можно пренебречь. В самом деле, если скорость истечения есть величина порядка километра в секунду, то b — скорость изменения центра масс ракеты относительно корпуса ракеты — величина порядка сантиметра в секунду.

Доля последнего члена, оцениваемая величиной $\dot{m}b/\dot{m}u$, может быть достаточно заметной на участках резких изменений секундного расхода массы, например на участке выхода двигателя на режим после его запуска или после выключения при спаде тяги. Если предположить, что процесс выхода на режим, т.е. изменение

секундного расхода массы от нуля до значения \dot{m} , происходит с постоянной интенсивностью \dot{m} и продолжается 0,1 с, то $\dot{m}/\dot{m} = 10 \text{ с}^{-1}$.

Отношение \dot{b}/u имеет обычно порядок 0,01 с для широкого класса ракет. В этом случае $\dot{m}b/\dot{m}u \approx 0,1$. Несмотря на это, мы все же пренебрежем членом $\dot{m}b$, так как действие его продолжается на очень малом интервале времени и в общем импульсе, сообщаемом ракете, роль его пренебрежимо мала.

Таким образом, с достаточно большой для практических целей точностью можно считать, что реактивная сила равна

$$P_d = -\dot{m}u. \quad (3.37)$$

Однако еще на некоторое время мы удержим эти малые составляющие, чтобы до конца выяснить понятие тяги двигателя, которым обычно и пользуются на практике. Тяга двигателя определяется при стендовых испытаниях на основании замера реакции опор. Представим себе ракету с двигательной установкой, закрепленную на стенде (рис. 3.2). Если определить реакцию опор при работающем и неработающем двигателе, то разность этих сил и даст так называемую *стендовую тягу*, развиваемую двигателем на земле, в условиях стенда.

Применим уравнение (3.18)

$$m \frac{dv}{dt} = F - \dot{m}u - 2\dot{m}b - \dot{m}b$$

к условиям работы на стенде. В этом случае скорость центра выходного сечения сопла двигателя v_a равна нулю, и на основании (3.16)

$$\dot{b} = -\dot{r},$$

т.е. скорость центра масс ракеты будет определяться скоростью его движения относительно выходного сечения сопла.

На этом же основании

$$\dot{v} = -\ddot{b}.$$

Теперь уравнение движения ракеты можно записать так:

$$-m\ddot{b} = F - \dot{m}u - 2\dot{m}\dot{b} - \ddot{m}b. \quad (3.38)$$

Вектор внешних сил F складывается из трех сил: силы тяжести G , реакции опор стенда Q и так называемой статической тяги $P_{ст}$. Последняя сила возникает как следствие разности давления, действующего на ракету со стороны истекающих газов p_a , и внешнего давления атмосферы p на площади, равной площади выходного сечения сопла S_a , так что

$$P_{ст} = S_a(p_a - p)x_1^0. \quad (3.39)$$

Таким образом,

$$F = G + P_{ст} + Q. \quad (3.40)$$

Подставляя (3.40) в (3.38), получаем

$$-m\ddot{b} = G + P_{ст} + Q - \dot{m}u - 2\dot{m}\dot{b} - \ddot{m}b$$

или

$$Q + G + P_{ст} - \dot{m}u + m\ddot{b} + 2\frac{dm}{dt}\dot{b} + \frac{d^2m}{dt^2}b = 0. \quad (3.41)$$

Нетрудно убедиться, что

$$m\ddot{b} + 2\frac{dm}{dt}\dot{b} + \frac{d^2m}{dt^2}b = \frac{d^2(mb)}{dt^2}.$$

Тогда (3.41) примет вид

$$Q + G + P_{ст} - \dot{m}u + \frac{d^2(mb)}{dt^2} = 0. \quad (3.42)$$

Уравнение (3.42) показывает, что на опоры стенда, кроме веса ракеты, действует сила

$$P = -\dot{m}u + P_{ст} + \frac{d^2(mb)}{dt^2}.$$

Эта сила и является тягой.

Проведя такие же оценки, какие были сделаны в обоснование малости величин $2\dot{m}\dot{b}$ и $\ddot{m}b$, можно показать малость $\frac{d^2(mb)}{dt^2}$. Тогда с достаточно высокой точностью можно определить тягу формулой

$$P = -\dot{m}u + P_{ст} = P_d + P_{ст} \quad (3.43)$$

или

$$P = -\dot{m}u + S_a(p_a - p)x_1^0. \quad (3.44)$$

Таким образом, тяга состоит из суммы реактивной силы и статической тяги или, как часто ее называют, *статического добавка*.

Можно задаться вопросом, что же больше: реактивная сила или тяга? Это зависит от знака разности $\dot{p}_a - p$.

Как правило, для ракет, движение которых происходит в условиях малого давления внешней среды, сопло двигателя стараются по возможности удлинить ради лучшего использования энергии истекающих газов путем повышения скорости истечения. В этом случае давление газов на выходе из сопла становится малым, а площадь выходного сечения сопла S_a , наоборот, большой.

Для двигателя, работающего в пустоте, было бы теоретически выгодно иметь сопло с расширением газов до нулевого давления. В этом случае скорость истечения газов была бы максимально возможной, а статического добавка не было бы вовсе. И тяга, и реактивная сила определялись бы единой формулой

$$P = -\dot{m}u, \quad (3.45)$$

где u соответствует истечению до давления $p_a = 0$. В дальнейшем мы увидим, что именно этот случай имеется в виду при выводе уравнения Циолковского, если нет каких-либо оговорок.

Однако даже для двигателя, работающего только в условиях полного вакуума, не выгодно чрезмерно удлинять сопло, так как в погоне за скоростью истечения начинает возрастать вес двигателя, что приводит к большим потерям, чем выигрыш за счет скорости истечения. Обычно ограничиваются значениями

$$p_a \geq 0,3 \div 0,4 \text{ атм.}$$

На двигателях, предназначенных для первых ступеней ракет-носителей, т.е. работающих в условиях изменения внешнего давления от одной атмосферы на уровне Земли до практически нулевого значения в конце работы ступени, $p_a = 0,6 \div 0,8$ атм. Большая степень расширения нежелательна по двум причинам: во-первых, отрицательное значение статического добавка приводит к падению тяги на малых высотах; во-вторых, на малых высотах возможен отрыв струи от стенок сопла и нарушение нормального процесса истечения.

Термин "скорость истечения" требует некоторых дополнительных пояснений. Дело в том, что в практических расчетах скоростью истечения, а тем более истинной скоростью истечения, почти не пользуются, а пользуются ее эквивалентом — удельной тягой или удельным импульсом.

Используемая до сих пор величина u в выражениях для тяги и реактивной силы является истинной скоростью истечения газов из сопла двигателя. Она в пределах не очень больших изменений режима работы двигателя является величиной постоянной и не зависит ни от секундного расхода топлива \dot{m} , ни от внешнего давления окружающей среды p .

Давление p_a в этих же условиях прямо пропорционально секундному расходу топлива \dot{m} и также не зависит от внешнего давления p , т.е.

$$p_a = k\dot{m} \quad \text{или} \quad \frac{p_a}{\dot{m}} = \text{const.}$$

Имея в виду сказанное, преобразуем выражение для тяги (3.44) к виду

$$P = \dot{m}u + S_a(p_a - p) = \dot{m}\left(u + S_a \frac{p_a}{\dot{m}}\right) - S_a p,$$

рассматривая вместо вектора тяги его модуль.

Постоянную величину $u + S_a \frac{p_a}{\dot{m}}$ принято называть *эффективной скоростью истечения* и обозначать через u' :

$$u' = u + S_a \frac{p_a}{\dot{m}}.$$

Тогда выражение для P переписется в следующем виде:

$$P = \dot{m}u' - S_a p. \quad (3.46)$$

Применяя (3.46) к условиям пустоты ($p=0$) или уровня Земли ($p=p_0$), получаем соответствующие выражения для тяги в пустоте

$$P_{\Pi} = \dot{m}u', \quad (3.47)$$

на Земле

$$P_0 = \dot{m}u' - S_a p_0. \quad (3.48)$$

Выражение (3.46) описывает зависимость тяги от секундного расхода топлива и от внешнего давления, поэтому его удобно положить в основу расчета как дроссельной, так и высотной характеристики двигателя.

Из (3.47) ясен физический смысл эффективной скорости истечения u' : это такая скорость, которая, будучи умножена на массовый секундный расход топлива, дает величину тяги двигателя в пустоте. Часто удобно бывает оперировать понятиями эффективной скорости истечения в пустоте

$$u'_{\Pi} = P_{\Pi} / \dot{m} \quad (3.49)$$

и эффективной скорости истечения на Земле

$$u'_0 = P_0 / \dot{m}. \quad (3.50)$$

Исходя из этого, тягу при текущем давлении p на высоте h можно представить в виде

$$P = \dot{m} \left[u'_{\Pi} - (u'_{\Pi} - u'_0) \frac{p}{p_0} \right]. \quad (3.51)$$

При стендовых испытаниях двигателя тягу P_0 и секундный расход \dot{m}_0 определяют непосредственно с помощью измерений. Тогда на основании (3.48) можно написать

$$u' = u'_{\Pi} = \frac{P_0 + S_a p_0}{\dot{m}_0}, \quad (3.52)$$

т.е. эффективная скорость истечения также может быть определена на стенде.

С учетом (3.52) общее выражение для тяги (3.46) переписывается следующим образом:

$$P = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} (P_0 + S_a p_0) - S_a p.$$

В частности, если расход в полете остается постоянным, то

$$P = P_0 + S_a (p_0 - p). \quad (3.53)$$

Для пустоты ($p = 0$)

$$P_{\text{п}} = P_0 + S_a p_0 \quad (3.54)$$

и

$$P = P_{\text{п}} - S_a p. \quad (3.55)$$

Теперь остановимся на понятиях *удельной тяги* и *удельного импульса* и поясним некоторые смысловые и терминологические особенности этих часто применяемых в практике понятий.

По определению удельная тяга — это тяга, приходящаяся на единицу весового секундного расхода. Удельный импульс — это импульс, приходящийся на единицу израсходованного весового количества топлива. Числовые выражения этих величин и их размерности совершенно одинаковы. Если использовать килограмм-силу, то для размерности получим:

удельная тяга

$$[P_{\text{уд}}] = \frac{[P]}{[\dot{G}]} = \frac{\text{кгс}}{\text{кгс/с}} = \text{с}, \quad (3.56)$$

удельный импульс

$$[I_{\text{уд}}] = \frac{[I]}{[G]} = \frac{\text{кгс} \cdot \text{с}}{\text{кгс}} = \text{с}.$$

Использование единиц в соответствии с СИ не приводит к изменению размерности удельной тяги или удельного импульса. Нельзя путать удельный импульс с удельным импульсом тяги, введенным в соответствии с ГОСТ 17655-72, но пока не нашедшим такого же широкого применения, как удельная тяга. Удельный импульс тяги определяется как отношение тяги к массовому секунднему расходу. Размерность удельного импульса тяги будет следующей:

$$[I_{\text{уд}}] = \frac{[P]}{[\dot{m}]} = \frac{\text{Н}}{\text{кг/с}} = \frac{(\text{кг} \cdot \text{м})/\text{с}^2}{\text{кг/с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (3.57)$$

т.е. она будет совпадать по размерности со скоростью. Из сопоставления (3.56) и (3.57) видно, что

$$I_{\text{уд}} = g_0 P_{\text{уд}}.$$

В дальнейшем изложении мы будем пользоваться понятием либо удельной тяги, либо эффективной скорости истечения.

Поскольку тяга является величиной переменной, зависящей от внешнего давления, то и удельная тяга есть величина переменная:

$$P_{уд} = \frac{P}{\dot{m}g_0} = \frac{P_0 + S_a p_0}{\dot{m}g_0} - \frac{S_a p}{\dot{m}g_0} = \frac{u'_n}{g_0} - \frac{S_a p}{\dot{m}g_0}$$

Максимальной величины она достигает в пустоте (при $p = 0$):

$$P_{уд.п.} = \frac{P_0 + S_a p_0}{\dot{m}g_0} = \frac{u'_n}{g_0} \quad (3.58)$$

Минимальное значение удельной тяги соответствует земным условиям:

$$P_{уд.0} = \frac{P_0}{\dot{m}g_0} = \frac{u'_n}{g_0} - \frac{S_a p_0}{\dot{m}g_0} \quad (3.59)$$

При согласовании характеристик двигателей главное внимание уделяется величинам тяги и удельной тяги в пустоте и на Земле.

Перейдем теперь к уравнению моментов. Перепишем уравнение (3.35) в виде

$$\begin{aligned} & \left[A \frac{d\omega_{x_1}}{dt} - (B-C)\omega_{y_1} \omega_{z_1} \right] x_1^0 + \left[B \frac{d\omega_{y_1}}{dt} - (C-A)\omega_{x_1} \omega_{z_1} \right] y_1^0 + \\ & + \left[C \frac{d\omega_{z_1}}{dt} - (A-B)\omega_{x_1} \omega_{y_1} \right] z_1^0 = \\ & = M + \dot{A}\omega_{x_1} x_1^0 - (\dot{m}b^2 - \dot{B})\omega_{y_1} y_1^0 - (\dot{m}b^2 - \dot{C})\omega_{z_1} z_1^0 \end{aligned}$$

и сравним его с уравнением Эйлера движения твердого тела вокруг центра масс

$$\begin{aligned} & \left[A \frac{d\omega_{x_1}}{dt} - (B-C)\omega_{y_1} \omega_{z_1} \right] x_1^0 + \left[B \frac{d\omega_{y_1}}{dt} - (C-A)\omega_{x_1} \omega_{z_1} \right] y_1^0 + \\ & + \left[C \frac{d\omega_{z_1}}{dt} - (A-B)\omega_{x_1} \omega_{y_1} \right] z_1^0 = M. \end{aligned}$$

Из сравнения видно, что движение ракеты вокруг центра масс происходит так же, как движение твердого тела, обладающего теми же главными моментами инерции, что и ракета в данный момент времени, на которое действуют, кроме моментов, приложенных к ракете, дополнительные моменты

$$\begin{aligned} M_{R_{x_1}} &= A \omega_{x_1} x_1^0, \\ M_{R_{y_1}} &= -(\dot{m}b^2 - \dot{B})\omega_{y_1} y_1^0, \\ M_{R_{z_1}} &= -(\dot{m}b^2 - \dot{C})\omega_{z_1} z_1^0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Эти моменты будем называть *реактивными моментами*, поскольку в основе их возникновения лежит принцип реактивного движения.

Первый из этих моментов — раскачивающий, так как его направление совпадает с направлением вращения ракеты вокруг оси O_1x_1 , но он очень мал и, кроме того, в значительной степени компенсируется неучтенным нами демпфирующим действием отброса. В дальнейшем момент $M_{R x_1}$ мы учитывать не будем. Два других реактивных момента, как легко убедиться, демпфирующие.

Чтобы определить знак этих моментов и получить формулы, более удобные для расчетов, преобразуем коэффициент, входящий в выражение для этих моментов, к более простому виду

$$\dot{m}b^2 - \dot{B} = \dot{m}b^2 - \dot{C} = \frac{dB}{dt} - b^2 \frac{dm}{dt}.$$

Момент инерции ракеты относительно поперечной оси, проходящей через центр масс, может быть выражен через момент инерции относительно параллельной оси, лежащей в плоскости выходного сечения сопла:

$$B = B_a - mb^2,$$

откуда

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dB_a}{dt} - 2mb \frac{db}{dt} - b^2 \frac{dm}{dt},$$

и тогда

$$\dot{m}b^2 - \dot{B} = \frac{dB_a}{dt} - 2b \left(m \frac{db}{dt} + b \frac{dm}{dt} \right) = \frac{dB_a}{dt} - 2b \frac{d(mb)}{dt}. \quad (3.61)$$

Производные, входящие в последнее равенство, легко могут быть подсчитаны. Будем рассматривать в отдельности жидкости, расходующиеся в полете из каждого бака ракеты. Обозначим абсолютную величину секундного расхода жидкости из i -го бака через \dot{m}_i и уровень жидкости над срезом сопла через h_i (зеркало жидкости считаем параллельным плоскости выходного сечения сопла). Тогда за время dt с поверхности жидкости израсходуется масса $\dot{m}_i dt$, а внутри объема, остающегося заполненным жидкостью, распределение масс можно считать неизменным.

Следовательно, если пренебречь собственными моментами инерции израсходованных масс жидкости, изменение момента инерции B_a относительно оси O_1y_1 будет равно

$$dB_a = - \sum_i h_i^2 \dot{m}_i dt,$$

а изменение статического момента относительно той же оси равно

$$d(mb) = - \sum_i h_i \dot{m}_i dt.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.61), находим

$$\dot{m}b^2 - \dot{B} = - \sum_i h_i^2 \dot{m}_i + 2b \sum_i h_i \dot{m}_i = \sum_i h_i (2b - h_i) \dot{m}_i.$$

Отсюда получаем удобные выражения для реактивных демпфирующих моментов относительно поперечных осей ракеты:

$$M_{R_{y_1}} = -\omega_{y_1} \sum_i h_i (2b - h_i) \dot{m}_i,$$

$$M_{R_{z_1}} = -\omega_{z_1} \sum_i h_i (2b - h_i) \dot{m}_i.$$

Для двухбаковой ракеты, как правило, $(2b - h_i) > 0$, поэтому моменты $M_{R_{y_1}}$ и $M_{R_{z_1}}$ создают демпфирующий эффект. По своему физическому смыслу сумма $\sum_i h_i (2b - h_i) \dot{m}_i$ представляет собой производную от демпфирующего момента по угловой скорости, поэтому удобно ввести обозначение

$$\sum_i h_i (2b - h_i) \dot{m}_i = \frac{\partial m_R}{\partial \omega} = m_R^\omega.$$

Тогда

$$M_{R_{y_1}} = -m_R^\omega \omega_{y_1}, \quad M_{R_{z_1}} = -m_R^\omega \omega_{z_1}. \quad (3.62)$$

На этом можно было бы завершить обсуждение вопроса об основных уравнениях и соотношениях, которые определяют движение тела переменной массы. Однако представляется полезным дать некоторые дополнительные пояснения, раскрывающие физическую сущность реактивной силы и реактивных моментов, исходя из известных положений теоретической механики.

Представим выражение для реактивной силы (3.36)

$$P_d = -(\dot{m} \mathbf{u} + 2 \dot{m} \dot{\mathbf{b}} + \ddot{m} \mathbf{b})$$

следующим образом:

$$P_d = -\dot{m} (\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}) - (\dot{m} \dot{\mathbf{b}} + \ddot{m} \mathbf{b}). \quad (3.63)$$

Газы, истекающие из сопла двигателя, имеют скорость \mathbf{u} относительно корпуса и скорость $\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}$ относительно центра масс ракеты. Величина $\dot{m}(\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}})$ представляет собой силу, которую надо приложить к газам, чтобы сообщить им скорость $\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}}$. В соответствии с третьим законом Ньютона к центру масс ракеты будет приложена со стороны газов равная по величине, но обратная по знаку сила $-\dot{m}(\mathbf{u} + \dot{\mathbf{b}})$, которая и является главной составляющей реактивной силы.

Чтобы понять происхождение двух других членов в формуле (3.63) для реактивной силы, надо уяснить происхождение величины $\dot{m} \dot{\mathbf{b}}$ в выражении (3.10) для количества движения ракеты. Эта величина есть не что иное, как количество движения расходуемой массы ракеты. Действительно, для замкнутой системы, масса которой не расходуется, количество движения системы совпадает с количеством движения материальной точки массой, равной массе системы. Другое дело в случае ракеты — системы с переменной, точнее, с расходуемой массой.

Если в момент времени t считать всю массу ракеты m сосредоточенной в одной точке, то спустя время dt эта масса переместится на расстояние $v dt$, но, кроме того, в результате движения частиц относительно корпуса часть общей массы, а именно масса $\dot{m} dt$, переместится на расстояние \mathbf{b} от нового положения центра масс. Первому перемещению соответствует количество движения

$$\frac{m v dt}{dt} = m v$$

— это и есть первая составляющая в выражении для количества движения (3.10).

Второму перемещению соответствует количество движения

$$\frac{\dot{m} dt \mathbf{b}}{dt} = \dot{m} \mathbf{b}.$$

Изменение этого количества движения происходит со скоростью $d(\dot{m} \mathbf{b})/dt$, чему соответствует сила, приложенная к частицам, равная

$$\frac{d(\dot{m} \mathbf{b})}{dt} = \dot{m} \dot{\mathbf{b}} + \ddot{m} \mathbf{b}.$$

Но в силу третьего закона Ньютона противоположная сила $-(\dot{m} \dot{\mathbf{b}} + \ddot{m} \mathbf{b})$ должна быть приложена со стороны движущихся масс к ракете. Таким образом объясняется вторая часть выражения (3.63) для реактивной силы.

Так же легко объяснить происхождение реактивных моментов. Рассмотрим, например, вращение ракеты вокруг поперечной оси $O_1 y_1$.

За счет истечения газов кинетический момент ракеты уменьшается на величину

$$|dB| \omega_{y_1} = \dot{B} \omega_{y_1} dt.$$

Но сами газы, истекающие из ракеты, обладают относительно ее центра масс кинетическим моментом $\dot{m} b^2 \omega_{y_1} dt$. Следовательно, за время dt газы приобретают за счет ракеты кинетический момент $\dot{m} b^2 \omega_{y_1} dt - \dot{B} \omega_{y_1} dt$, для чего к ним должен быть приложен со стороны ракеты момент сил

$$(\dot{m} b^2 - \dot{B}) \omega_{y_1} dt.$$

В силу закона противодействия на ракету со стороны истекающих газов должен воздействовать момент вокруг оси $O_1 y_1$, равный

$$-(\dot{m} b^2 - \dot{B}) \omega_{y_1} dt,$$

который и является демпфирующим реактивным моментом.

Резюмируя, можно сказать, что реактивная сила (момент) равна по величине и обратна по направлению силе (моменту), которую нужно приложить к истекающим из ракеты газам для изменения их количества движения (кинетического момента).

Итак, из полученных уравнений движения следует, что для исследования движения ракеты можно пользоваться такими же уравнениями, как и для твердого тела, если к силам, действующим на ракету извне, т.е. к так называемым *внешним силам*, присоединить реактивную силу, а к внешним моментам — реактивные моменты.

Глава 4

ВНЕШНИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ

Полученные в предыдущей главе уравнения движения содержат в своих правых частях записанные в общем виде главные векторы внешних сил и моментов, приложенных к ЛА в полете. Нашей ближайшей задачей будет конкретизация этих сил и моментов, принятие удобных выражений для их вычисления при расчетах траектории и обсуждение некоторых особенностей, связанных с отнесением действующих сил к той или другой категории.

При исследовании движения ЛА с работающим двигателем мы имеем дело, вообще говоря, с тремя группами сил, отличающимися друг от друга причинами, источниками своего возникновения.

К первой группе мы относим реактивные силы, обязанные своим появлением реакции истекающей струи. Эти силы не относятся к внешним силам, а являются силами внутреннего взаимодействия между различными частями одной механической системы.

Вторая группа сил — это силы массовые, подчиненные закону всемирного тяготения Ньютона. Эти силы применительно к ЛА складываются из элементарных сил, приложенных к каждой элементарной частице массы ЛА. Мы их относим к внешним силам.

К третьей группе мы относим силы поверхностные. Это силы аэростатические и аэродинамические, приложенные к каждой элементарной площадке поверхности корпуса ЛА. В эту же группу мы включаем силы, действующие на органы управления, расположенные в зоне действия истекающих газов (например, силы на газоструйных рулях). Третья группа сил нами включается также в число внешних сил.

Сначала рассмотрим силу притяжения, затем аэродинамические силы, силы от органов управления и далее моменты сил и демпфирующие моменты. При изучении управляющих сил нам придется уделить некоторое внимание основным принципам построения системы управления, поскольку это будет необходимо для понимания связи этих вопросов с составлением уравнений движения центра масс ЛА и расчетом траекторин.

§ 4.1. Сила притяжения

Основные понятия, связанные с определением гравитационной силы или силы притяжения, мы рассмотрели в § 2.3. Сейчас мы обратим внимание на то, с какими особенностями связано ее вычисление при расчете траекторин.

Сила притяжения определяется по известной формуле

$$G = mg, \quad (4.1)$$

где m — текущая масса ЛА, являющаяся функцией времени и зависящая от режима работы двигателя. Обозначая через \dot{m} абсолютное значение массы, расходуемой за единицу времени через выходное сечение сопла (или всех сопел) двигателя, т.е. абсолютную величину производной от массы ЛА по времени

$$\dot{m} = \left| \frac{dm}{dt} \right| = - \frac{dm}{dt},$$

массу ЛА в момент времени t запишем в виде

$$m = m_{\text{вкл}} - \int_{t_{\text{вкл}}}^t \dot{m}(t) dt,$$

где $m_{\text{вкл}}$ — масса ЛА в момент $t_{\text{вкл}}$ включения двигателя.

На большей части траектории функция $\dot{m}(t)$, как правило, имеет постоянное или почти постоянное значение, определяемое номинальным режимом работы двигателя. Наиболее резкие изменения имеют место на переходных режимах работы двигателя: при выходе на режим после его запуска, при выключении, при переключениях на промежуточные ступени работы (рис. 4.1).

Масса ЛА в момент старта m_0 отличается от массы $m_{\text{вкл}}$ на величину так называемого *достартового расхода*. Старт, т.е. отрыв ЛА от пускового устройства, происходит не ранее, чем тяга достигнет значения, равного весу ЛА. За это время расходуется некоторая масса, и к моменту старта, который обычно принимается за начало отсчета полетного времени, масса принимает значение m_0 , так что в полете текущая масса определяется по формуле

$$m = m_0 - \int_0^t \dot{m}(t) dt.$$

Как правило, не бывает большой необходимости в точном учете закона нарастания и падения \dot{m} на переходных режимах, за исключением случаев

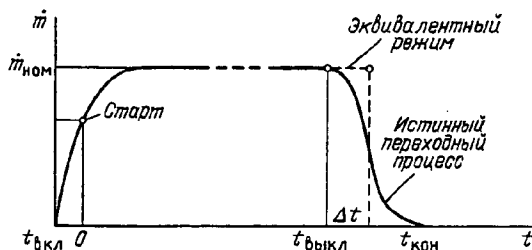


Рис. 4.1. Изменение секундного расхода массы на переходных режимах работы двигателя

исследования процессов выхода ЛА из стартового сооружения, процессов разделения ступеней или отделения от ЛА каких-либо отсеков, исследования динамических нагрузений упругоэластичной конструкции ЛА и т.д. Но эти задачи рассматриваются самостоятельно, с применением особых методов, и в баллистическую часть не включаются. Поэтому расход массы на таких участках допустимо задавать какими-либо интегральными характеристиками, заменяя истинный переходный процесс некоторым эквивалентным ему постоянным режимом работы в течение времени Δt (см. рис. 4.1), определяемого из условия

$$\int_{t_{\text{выкл}}}^{t_{\text{кон}}} \dot{m}(t) dt = \dot{m}_{\text{ном}} \Delta t.$$

$t_{\text{выкл}}$

Второй сомножитель в формуле (4.1) есть ускорение силы земного притяжения. По величине оно совпадает с силой, приложенной к единичной массе, и поэтому производная по соответствующей координате от потенциала гравитационного поля Земли дает искомую величину.

Для шарообразной Земли со сферическим распределением плотности дифференцирование выражения для потенциала (2.2) по r дает проекцию ускорения вдоль направления радиуса Земли r :

$$g = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (4.2)$$

(знак "минус" показывает, что ускорение направлено к центру Земли). Здесь, как и раньше, $\mu = fM \approx 398\,600 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — произведение постоянной тяготения на массу Земли; $r = R + h$ [км] — расстояние от центра сферической Земли до центра масс ЛА.

В таких расчетах радиус Земли принимают равным его среднему значению $R = 6371,1$ км, а h есть высота ЛА над поверхностью Земли. Для большинства проектных расчетов таким представлением вполне можно ограничиться. В некоторых случаях величину g удобно вычислять по формуле

$$g = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 = 9,8204 \left(\frac{6371,1}{6371,1 + h} \right)^2 \text{ м/с}^2, \quad (4.3)$$

где $g_0 = 9,8204 \text{ м/с}^2$ соответствует ускорению, вызываемому силой притяжения у поверхности Земли среднего радиуса 6371,1 км. Значение $g_0 = 9,8204 \text{ м/с}^2$, отличное от привычного всем значения $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$, может вызвать недоумение, а иногда даже послужить источником недоразумений или ошибок; поэтому дадим некоторые дополнительные пояснения.

Дело в том, что понятие силы тяжести на поверхности Земли или то, что обычно называют весом тела, не совпадает с понятием силы притяжения, и причиной этого несовпадения является вращение Земли, которое вызывает появление центробежной силы инерции. Таким образом, тело, находящееся на поверхности Земли, испытывает суммарное действие гравитационной силы (или силы притяжения) и центробежной силы. Эту суммарную силу и называют *силой тяжести*. Соответствующее ей ускорение

также является суммой двух ускорений: гравитационного и центробежного. Величина центробежного ускорения зависит от широты точки на поверхности Земли, поэтому и ускорение силы тяжести зависит от широты, имея для шарообразной Земли максимальное значение $g_0 = 9,8204 \text{ м/с}^2$ на полюсах и $g_0 = 9,7865 \text{ м/с}^2$ на экваторе, а среднее его значение для всей поверхности Земли принято равным $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Хотя физическое проявление обоих ускорений для тел, находящихся на поверхности Земли, совершенно одинаково, мы не будем в общем случае объединять эти ускорения в одно, так как причины, их вызывающие, различны, и для тела, не связанного с Землей, вращение Земли никакого ускорения не создает. И так, для определения гравитационного ускорения на сферической модели Земли будем пользоваться выражением (4.2) или (4.3).

Для точных баллистических расчетов гравитационное ускорение надо принимать в соответствии с потенциалом поля, описанным формулой (2.3). Однако, учитывая, что протяженность активного участка траектории ограничивается чаще всего сотнями и реже одной-двумя тысячами километров, вполне достаточно пользоваться потенциалом нормального поля в форме (2.4).

Составляющие ускорения g вдоль радиуса-вектора (g_r) и по нормали к нему (g_m), лежащей в меридиональной плоскости [см. (2.5)], будут равны

$$g_r = -\frac{\mu}{r^2} - \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{R_e^2}{r^4} (1 - 3 \sin^2 \varphi_{\Gamma\Pi}), \quad (4.4)$$

$$g_m = -3 \mu J_2 \frac{R_e^2}{r^4} \sin \varphi_{\Gamma\Pi} \cos \varphi_{\Gamma\Pi}.$$

Радиальная составляющая g_r , как видно из рис. 4.2, направлена от ЛА к центру Земли O , а меридиональная g_m — в сторону экватора. Составляющую g_m в свою очередь спроектируем на направление радиуса $OA(g')$ и на направление оси вращения Земли $ON(g_\omega)$. Из треугольника ABC получаем для этих составляющих выражения

$$g' = -g_m \operatorname{tg} \varphi_{\Gamma\Pi} = 3 \mu J_2 \frac{R_e^2}{r^4} \sin^2 \varphi_{\Gamma\Pi}, \quad (4.5)$$

$$g_\omega = g_m \frac{1}{\cos \varphi_{\Gamma\Pi}} = -3 \mu J_2 \frac{R_e^2}{r^4} \sin \varphi_{\Gamma\Pi}. \quad (4.6)$$

Поскольку составляющая g' действует в направлении, прямо противоположном направлению радиального ускорения g_r , эти две компоненты можно алгебраически сложить:

$$g'_r = g_r - g' = -\frac{\mu}{r^2} - \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{R_e^2}{r^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi_{\Gamma\Pi}). \quad (4.7)$$

Таким образом, полное ускорение земного притяжения на сплюснутой Земле будем определять как сумму ускорений g'_r и g_ω , направленных

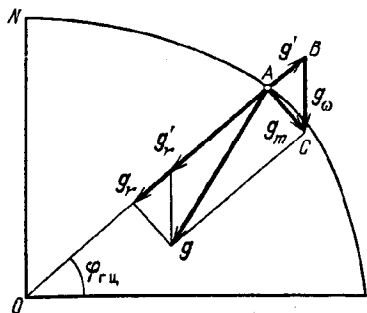


Рис. 4.2

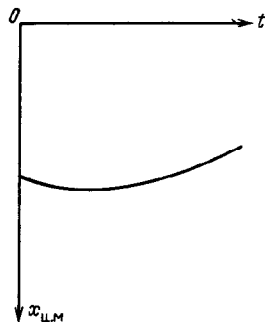
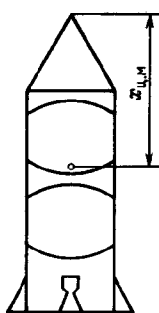


Рис. 4.3

Рис. 4.2. Разложение гравитационного ускорения g на направление радиуса-вектора и вдоль оси вращения Земли

Рис. 4.3. Характер изменения положения центра масс ракеты по времени полета

соответственно к центру Земли и параллельно оси вращения Земли в направлении экваториальной плоскости. Формулы (4.4) – (4.7) справедливы не только для поверхности Земли, но и над ее поверхностью.

Сила притяжения считается приложенной в центре масс ЛА. Положение центра масс относительно корпуса ЛА изменяется в полете по мере расходования топлива и при отбросе элементов конструкции. Само по себе изменение положения центра масс не оказывает непосредственного влияния на траекторию ЛА, но, как мы увидим далее, оно сказывается через степень статической устойчивости (или неустойчивости), от которой зависит угол атаки. Расчет положения центра масс обычно выполняется одновременно с расчетом массово-инерционных характеристик ЛА. Им и пользуются при расчете траектории.

Типичный характер изменения положения центра масс $x_{ц.м}$ на примере простой одноступенчатой схемы ЛА изображен на рис. 4.3. Подобное изменение легко объяснить. В начале полета расход массы верхней части верхнего бака интенсивно смещает центр масс к хвостовой части ЛА, в то время как расход массы верхней части нижнего бака на положение центра масс влияет в гораздо меньшей степени, так как масса изменяется в зоне, расположенной вблизи центра масс. На конечной части траектории большее влияние оказывает уменьшение массы из нижней части нижнего бака, смещающая центр масс в обратную сторону. Конечно, для более сложных компоновочных схем (двух-трехступенчатые носители, баки с промежуточным днищем, трехкомпонентные схемы и др.) может наблюдаться и более сложная картина эволюции положения центра масс.

§ 4.2. Аэродинамические силы

Аэродинамические силы представляют собой результат воздействия внешней среды на поверхность ЛА при его движении. Они определяются как сумма элементарных касательных и нормальных сил, действующих на корпус ЛА. В зависимости от того, является ли движущееся тело симметричным относительно оси или нет, направлена ли его ось симметрии

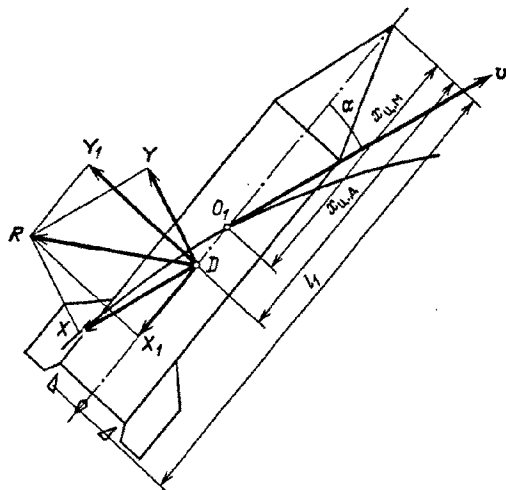


Рис. 4.4. Суммарная аэродинамическая сила R и ее составляющие: X_1, Y_1 – по осям связанной системы координат; X, Y – по осям скоростной системы координат

при движении вдоль вектора скорости или отклонена от него, возникает или одна осевая сила X_1 , или она и нормальная сила Y_1 . Эти силы определяются по формулам, хорошо известным из курса аэрогазодинамики или аэродинамики (см., например, [18]):

$$X_1 = c_{x_1} q S, \quad (4.8)$$

$$Y_1 = c_{y_1} q S = c'_{y_1} q S \alpha, \quad (4.9)$$

где $c_{x_1}, c_{y_1}, c'_{y_1}$ – безразмерные аэродинамические коэффициенты; $q = \rho v^2 / 2$ – скоростной напор; ρ – плотность воздуха в данной точке траектории; S – характерная площадь (например, площадь миделя); α – угол атаки, т.е. угол между осью ЛА и касательной к траектории.

Силы X_1 и Y_1 , как видно из рис. 4.4, являются составляющими суммарной аэродинамической силы R по осям ЛА. Силу R считают приложенной в центре давления D , расположенном на расстоянии $x_{ц.д.}$ от вершины. Положение центра давления для данного ЛА не постоянно по траектории и зависит от числа Маха $M = v/a$, т.е. от отношения скорости ЛА к скорости распространения звука на данной высоте. Обычно величину $x_{ц.д.}$ относят к характерному линейному размеру, например к длине ЛА, и обозначают c_d . Типичный характер изменения c_d в зависимости от числа M показан на рис. 4.5.

Более распространенным является представление аэродинамических сил в виде лобового сопротивления X и подъемной силы Y , направленных соответственно вдоль скорости набегающего потока и перпендикулярно

к нему:

$$X = c_x q S, \quad (4.10)$$

$$Y = c_y q S = c_y' q S \alpha, \quad (4.11)$$

где c_x , c_y и c_y' — коэффициенты, аналогичные c_{x_1} , c_{y_1} и c_{y_1}' , но отнесенные к системе координат, оси которой ориентированы по потоку и перпендикулярно к нему.

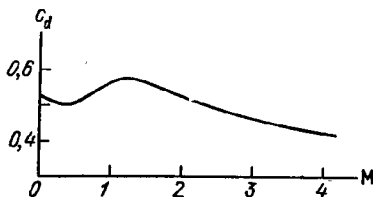


Рис. 4.5

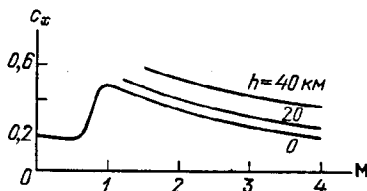


Рис. 4.6

Рис. 4.5. Типичный характер изменения коэффициента центра давления c_d в зависимости от числа M

Рис. 4.6. Типичный характер изменения коэффициента силы лобового сопротивления c_x в зависимости от числа M и высоты полета h

Рис. 4.7. Типичный характер изменения производной c_y' коэффициента подъемной силы c_y по углу атаки α в зависимости от числа M

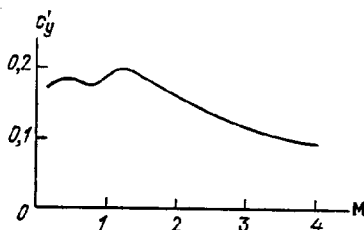


Рис. 4.7

Легко видеть, что между X_1 , Y_1 и X , Y имеются простые зависимости:

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha, \\ Y &= -X_1 \sin \alpha + Y_1 \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.12)$$

или

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ Y_1 &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Формулы (4.8) — (4.11) справедливы для небольших углов атаки, которыми сопровождается полет ЛА в плотных слоях атмосферы. Поэтому, если положить $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1$, то зависимости (4.12) и (4.13) можно упростить:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + Y_1 \alpha, & Y &= -X_1 \alpha + Y_1, \\ X_1 &= X - Y \alpha, & Y_1 &= X \alpha + Y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Для ЛА, близких по форме к телу вращения, обтекание будет симметричным относительно плоскости, проходящей через ось ЛА и касательную

к траектории. При этом нормальная аэродинамическая сила, а следовательно, и полная аэродинамическая сила будут располагаться в этой плоскости.

Коэффициенты c_{x_1} , c'_{y_1} , c_x , c'_y определяются при аэродинамическом расчете ЛА и на основании продувок моделей ЛА в аэродинамических трубах и задаются в виде зависимостей от чисел Маха. Поскольку большое влияние на коэффициенты c_{x_1} и c_x оказывает трение, связанное с вязкостью окружающей среды, они зависят также от числа Рейнольдса или высоты полета.

На рис. 4.6 и 4.7 показан характер зависимостей $c_x(M, h)$ и $c'_y(M)$ для типичного носителя.

Несмотря на, казалось бы, полную ясность вопроса об аэродинамических силах, имеется тем не менее необходимость некоторые принципиальные стороны его обсудить дополнительно. Речь идет в основном о правильном учете влияния газодинамических процессов в донной части ЛА. При движении ЛА, не имеющего двигательной установки, или с неработающим двигателем через коэффициенты c_x или c_{x_1} определяется вся лобовая или осевая аэродинамическая сила, включая и донный подсос (или разрежение), создающий дополнительное сопротивление движению. Однако при включенном двигателе на части площади донного среза ЛА, занятой выходным сечением сопла двигателя, давление соответствует давлению истекающих газов. На этой площади не может создаваться разрежение.

Как было показано в § 3.4, за счет разности между внешним давлением невозмущенной атмосферы p и давлением истекающих газов p_a на площади S_a выходного сечения сопла возникает сила $S_a(p_a - p)$, направленная от донного среза к вершине ЛА, если $p_a > p$, и от вершины к донному срезу, если $p_a < p$ (см. рис. 3.2). Эта сила не аэродинамического происхождения, а относится к тяге, и потому она была названа статической тягой.

Укажем еще на одну особенность, связанную с донными эффектами, возникающими при работающем двигателе, которая требует бдительности от баллистика и четкости во взаимопонимании между аэродинамиками, двигателистами и баллистиками.

В конструкциях с большими донными площадями, с многодвигательными установками могут появляться как эффекты дополнительного разрежения, так и донного поднапора. В основе появления дополнительного разрежения (помимо чисто аэродинамического донного подсоса) лежит эффект эжекции истекающими газами воздушной подушки в донной части ЛА. В основе появления дополнительного поднапора лежит эффект расширения струи газов, истекающей в среду с малой плотностью, и взаимодействия струй (интерференция), в результате чего на площади донного среза ЛА, не занятой двигателями, возникает избыточное давление. Интенсивность этих воздействий зависит от соотношений между внешним давлением, характеристиками струи и скоростью ЛА. Оба эффекта появляются только при работе двигателя, в основе их возникновения лежат чисто газодинамические явления, и потому соответствующие силы должны быть отнесены к разряду аэродинамических. Учет этих сил проводится в процессе бал-

листических расчетов на основании формул или графических зависимостей, подготовленных специально для этой цели. В дальнейшем изложении мы условно будем считать эти силы присоединенными к аэродинамической силе лобового сопротивления.

§ 4.3. Управление и управляющие силы

4.3.1. Система управления. Система управления выполняет две основные функции:

- формирует номинальное движение ЛА в условиях отсутствия всяких возмущающих факторов, искажающих это движение;
- контролирует движение и в условиях воздействия возмущений вырабатывает необходимые ответные реакции с целью сохранения заданных свойств движения.

Полагая, что основы систем управления читателю известны, мы не будем останавливаться на принципах работы отдельных их звеньев, а постараемся напомнить только те особенности, которые необходимы для правильного понимания роли системы управления в решении баллистических задач. В частности, нам понадобится установить связи между теми физическими величинами, которые измеряет и на которые реагирует система управления, и силами и моментами, возникающими в результате работы системы управления, в той мере, в какой это необходимо для правильного описания движения центра масс управляемого ЛА.

Комплекс параметров, которые измеряются системой управления и по отклонению которых производится регулирование движения ЛА, может быть довольно разнообразным. Точно так же могут быть различными и алгоритмы процесса регулирования. Поэтому в каждом конкретном случае нужно выделять и учитывать те фрагменты алгоритмов, которые оказывают влияние на решение баллистических задач.

В общем случае система управления состоит из:

— *чувствительных элементов*, измеряющих отклонения контролируемых параметров ЛА от заданных и реагирующих на эти отклонения соответствующими сигналами;

— *преобразующих средств*, воспринимающих сигналы от чувствительных элементов и вырабатывающих команды на исполнительные органы в соответствии с заданными законами управления;

— *исполнительных органов*, изменяющих действующие на ЛА силы и моменты для коррекции параметров движения.

Под термином *параметры движения* в общем случае понимают как угловые движения ЛА относительно центра масс, так и движение центра масс.

Движение органов управления с движением ЛА связывают *уравнения управления*, которые в самом общем виде можно записать так:

$$F_i[\delta_i(t), x(t), y(t), z(t), \varphi(t), \xi(t), \eta(t)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.15)$$

где F_i — функционалы от функций, заключенных в квадратные скобки, т.е. величины, зависящие не только от текущих значений функций, но и от их предшествующих значений; δ_i — отклонения исполнительных органов системы управления; x, y, z — координаты центра масс ЛА в рассматри-

ваемой системе координат; φ, ξ, η — угловые положения осей ЛА относительно осей некоторой выбранной системы координат. Под функциями в (4.15) понимаются не только сами значения δ, x, \dots, η , но также производные и интегралы от них. Таким образом, в общем случае δ, x, \dots, η являются некими базовыми функционалами, функционалы же F_i часто можно выразить с достаточной степенью точности через базовые функционалы (обычно в виде линейных выражений).

Количество уравнений управления l должно соответствовать количеству степеней свободы, по которым ведется управление, т.е. чтобы каждому каналу управления отвечало свое уравнение. Если количество степеней свободы органов управления меньше количества степеней свободы ЛА, то движение будет определяться только по тем каналам, которые определены уравнениями управления. Если же количество степеней свободы органов управления (или каналов управления) будет больше количества степеней свободы, по которым предполагается ограничивать движение ЛА, то задача управления станет неопределенной, так как заданному движению ЛА в этом случае будет соответствовать не один определенный закон движения органов управления, а бесчисленное множество таких законов. Но и при условии, что число степеней свободы органов управления равно числу степеней свободы, по которым контролируется и управляется движение ЛА, существует широкая возможность конкретной реализации как конструкции органов управления, так и вида и структуры уравнений управления.

Из большого разнообразия возможных систем управления, реализованных или могущих быть реализованными, мы в дальнейшем изложим в качестве примера остановимся на системе управления, чувствительными элементами которой являются два трехстепенных гироскопических прибора — гироскопизонт (ГГ) и гироскопвертикал (ГВ), исполнительными органами — газоструйные рули и преобразующими средствами — усилитель-преобразователь и рулевые машинки. Подобная система управляет только угловыми параметрами движения ЛА вокруг центра масс и не реагирует на отклонение движения центра масс относительно расчетного. Управляющие силы и моменты создаются четырьмя газоструйными рулями 1–3 и 2–4, расположенными во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 4.8). Рули 1 и 3 имеют возможность отклоняться независимо друг от

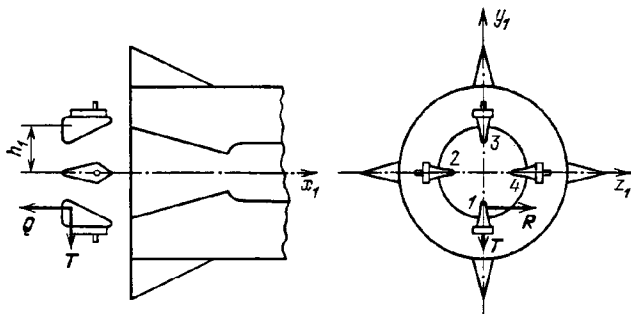


Рис. 4.8. Схема действия управляющих сил и моментов для ракеты с газоструйными рулями

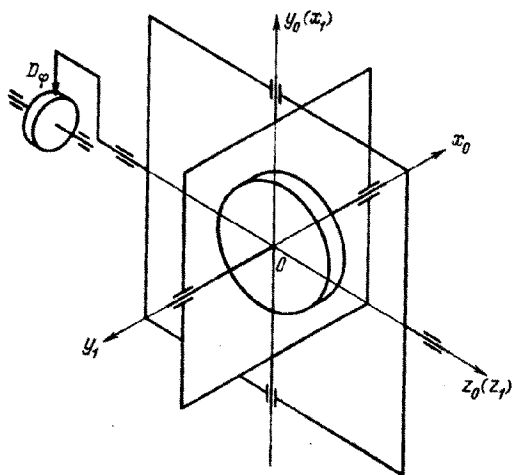


Рис. 4.9. Схематическое изображение гиروهоризонта

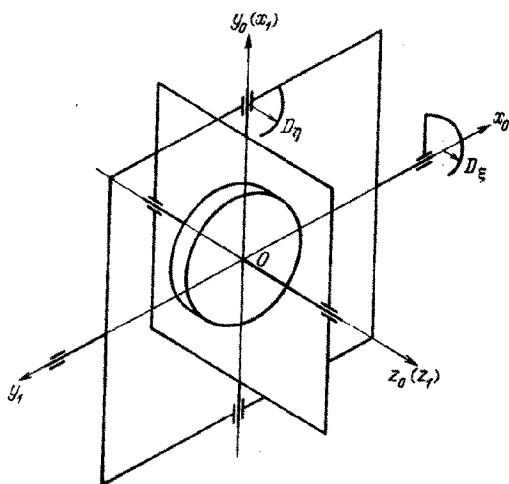


Рис. 4.10. Схематическое изображение гировертиканта

друга. Рули 2 и 4 всегда отклоняются синхронно. Таким образом, число степеней свободы органов управления равно трем. Тем самым предоставляется возможность управлять тремя углами, полностью определяющими положение осей ЛА в пространстве.

Устройство ГГ и ГВ схематически изображено на рис. 4.9 и 4.10.

Каждый прибор состоит из гироскопа и двух рамок — внутренней и внешней (или наружной). Оси гироскопов вращаются в подшипниках, закрепленных на внутренних рамках. Оси внутренних рамок поворачивают-

ся в подшипниках, закрепленных на внешних рамках. Подшипники осей внешних рамок связаны с корпусом ЛА и в полете следуют за его поворотами.

Расположение осей ГГ и ГВ относительно осей связанной ($Ox_1y_1z_1$) и начально-стартовой ($Ox_0y_0z_0$) систем координат в момент старта также показано на рис. 4.9 и 4.10.

На ГГ возлагается задача по управлению положением продольной оси ЛА в плоскости прицеливания Ox_0y_0 , т.е. движением относительно оси Oz_0 (Oz_1). Угловое рассогласование $\Delta\varphi$ между фактическим φ и программным $\varphi_{пр}$ положениями оси ЛА относительно оси Oz_0 определяется потенциометрическим датчиком D_φ , выполняющим в сочетании с внешней рамкой ГГ роль чувствительного элемента системы управления, и передается в виде электрического сигнала u_φ в последующие звенья системы управления для ликвидации возникшего рассогласования. Кроме этого, с помощью дополнительного механизма, называемого *программным* и связанного через некоторое передаточное звено с потенциометрическим датчиком D_φ , задается требуемый наклон оси ЛА относительно оси Oz_0 — так называемая *программа угла тангажа*. Это достигается за счет поворота корпуса датчика D_φ относительно корпуса ЛА по заданному закону в сторону, противоположную той, в какую должен разворачиваться ЛА в полете. Система управления будет воспринимать вызванное этим поворотом рассогласование как отклонение от заданного программного положения продольной оси ЛА и поворачивать ее в обратную сторону, стремясь устранить возникшее рассогласование.

В дальнейшем, говоря о соотношении между фактическим и программным положениями оси ЛА, мы будем иметь в виду равенство

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{пр}. \quad (4.16)$$

Устройства для задания программного разворота могут быть построены на различных принципах: от чисто механических (в виде профилированных кулачков) до электронно-импульсных, сопряженных с бортовыми цифровыми вычислительными машинами.

Гировертикант выполняет задачу по контролю углов рыскания ξ и крена η . Для этой цели он снабжен двумя потенциометрическими датчиками D_ξ и D_η , расположенными соответственно вдоль осей Oy_1 и Ox_1 .

Угол рыскания ξ определяется по отклонению движка датчика D_ξ , находящегося на оси вращения наружной рамки ГВ, а угол крена η — по отклонению движка датчика D_η , расположенного на оси вращения внутренней рамки ГВ.

Измеряемые углы преобразуются в электрические сигналы u_ξ и u_η , которые передаются в усилитель-преобразователь, где вырабатываются команды на отклонение органов управления. Эти команды поступают на рулевые машинки, которые и приводят в движение органы управления (в нашем случае — газоструйные рули) и тем самым создают необходимые для управления ЛА силы и моменты.

4.3.2. Управляющие силы. В соответствии с принятым распределением функций между органами управления рули 2 и 4 (см. рис. 4.8), отклоняясь, создают управляющий момент только относительно поперечной

оси z_1 , т.е. для управления рассогласованием по углу тангажа $\Delta\varphi$. Рули I и 3 имеют возможность создавать момент как относительно оси y_1 для управления рассогласованием по углу рыскания, так и относительно оси x_1 для управления рассогласованием по углу крена. В первом случае командный сигнал отклоняет рули в одну и ту же сторону на равные углы, во втором — тоже на одинаковые углы, но в противоположные стороны.

При обтекании руля газовым потоком, ось которого совпадает с осью ЛА, на руль действует аэродинамическая (точнее, газодинамическая) сила, имеющая составляющие Q , R и T . Первая из них Q направлена по продольной оси ЛА вдоль газового потока и является силой лобового сопротивления руля. Сила R перпендикулярна к этой оси и к оси руля и представляет собой подъемную силу. Сила T действует вдоль оси вращения руля. Если руль не отклонен, то действуют силы Q_0 и T_0 , а подъемная сила $R_0 = 0$. При отклонении руля на угол δ лобовое сопротивление изменяется пропорционально квадрату этого угла

$$Q = Q_0 + \lambda \delta^2, \quad (4.17)$$

а подъемная сила — пропорциональна углу

$$R = R' \delta. \quad (4.18)$$

Силой T и ее изменением в зависимости от угла δ мы интересоваться не будем, считая, что на противоположных рулях возникают силы, равные по величине, но направленные противоположно, и их влияние взаимно уравновешивается. Рули обтекаются газовым потоком, имеющим постоянные параметры. Поэтому величины $R' = \frac{\partial R}{\partial \delta}$, Q_0 , $\lambda = \frac{\partial^2 Q}{2 \partial \delta^2}$ имеют постоянные значения, которые определяются на основании газодинамических расчетов, окончательно уточняются экспериментально и могут использоваться только для данной конфигурации и размеров руля в потоке с данными параметрами.

В дальнейшем для наших целей имеет смысл рассматривать только суммарные силы от всех четырех рулей. При этом суммарная осевая сила, которую обозначим через X_{1p} , будет равна

$$X_{1p} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \sum_{i=1}^4 Q_i \quad (4.19)$$

или с учетом (4.17)

$$X_{1p} = 4Q_0 + \lambda(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2) = 4Q_0 + \lambda \sum_{i=1}^4 \delta_i^2. \quad (4.20)$$

Здесь мы предполагаем, что все четыре руля имеют одинаковые аэродинамическую форму и размеры. В противном случае выражение (4.20) требует уточнения.

Прежде чем написать выражения для сил от рулей, действующих в направлениях осей Oy_1 и Oz_1 , условимся за положительные отклонения

рулей принять такие, которым соответствуют положительные боковые силы. Это будет означать, что отклонения рулей 2 и 4 вниз, а рулей 1 и 3 влево (если смотреть по направлению полета) считаются положительными.

При оговоренном условии подъемные силы рулей 2 и 4 создают суммарную силу вдоль оси Oy_1

$$Y_{1p} = R'\delta_2 + R'\delta_4 = 2R'\delta_2, \quad (4.21)$$

так как при принятой схеме управления $\delta_2 = \delta_4$.

$$Z_{1p} = R'\delta_1 + R'\delta_3 = R'(\delta_1 + \delta_3). \quad (4.22)$$

Отметим, что в случаях использования для управления ЛА качающихся маршевых двигателей, специальных управляющих двигателей и некоторых других возможных способов не возникает принципиальных отличий в математическом описании особенностей их работы сравнительно с рассмотренным нами случаем. Например, если управление осуществляется двигателем с тягой P , качающимся относительно одной оси или расположенным на шаровой опоре, то при отклонении его на угол δ возникает сила

$$R = P \sin \delta,$$

а проекция тяги на ось ЛА становится равной

$$P_{x_1} = P \cos \delta,$$

что эквивалентно снижению тяги на некоторую величину $\Delta P = P(1 - \cos \delta)$.

Если для управления используются специально для этого предназначенные двигатели с небольшой тягой, может оказаться более удобным ввести понятие не "потери" тяги, а "добавки" тяги $P_{\text{д}}$, которая будет переменной величиной, зависящей от углов отклонения двигателей:

$$P_{\text{д}} = \sum_{i=1}^4 P_{y_i} \cos \delta_i,$$

где P_{y_i} и δ_i — тяга и угол отклонения i -го управляющего двигателя.

Боковая сила, создаваемая каждым двигателем, будет

$$R_i = P_{y_i} \sin \delta.$$

При этом не надо забывать, что в массовый расход ЛА в этом случае входят все расходы, обусловленные работой этих управляющих двигателей. В противном случае возникает ошибка не только в расчете текущей массы ЛА, но будет необоснованно завышена удельная тяга.

§ 4.4. Моменты сил

Найдем выражение для моментов рассмотренных нами сил относительно центра масс ЛА. Начнем с силы тяжести.

При компоновке ЛА стараются центр масс расположить на его геометрической оси с таким расчетом, чтобы тяга не создавала возмущающего момента относительно центра масс. Мы будем считать, что центр масс точно лежит на продольной оси ЛА на расстоянии $x_{\text{ц.м}}$ от вершины (см. рис. 4.4).

Так как сила тяжести всегда действует по прямой, проходящей через центр масс, она не создает момента.

Поскольку силу вдоль линии ее действия можно перемещать в любую точку, мы условимся считать аэродинамическую силу приложенной в центре давления ЛА. В таком случае составляющие этой силы по осям связанной системы координат X_1, Y_1 или по осям скоростной системы X, Y также можно считать приложенными в центре давления. Сила X_1 действует по продольной оси ЛА и момента относительно центра масс не создает. Сила Y_1 создает относительно центра масс момент

$$M_a = Y_1 (x_{ц.д} - x_{ц.м}) = c'_{y_1} q S (x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha. \quad (4.23)$$

Этот момент действует, как и полная аэродинамическая сила, в плоскости, проходящей через ось ЛА и касательную к траектории, другими словами, вектор этого момента перпендикулярен к оси ЛА и к касательной к траектории.

В зависимости от того, каково взаимное положение центра масс и центра давления, результат действия момента будет различным. Если центр давления находится позади центра масс, то момент нормальной аэродинамической силы стремится уменьшить угол атаки и называется в этом случае *стабилизирующим* аэродинамическим моментом, а ЛА с таким расположением центра масс и центра давления — *статически устойчивым*. Если же центр давления лежит впереди центра масс, то ЛА называется *статически неустойчивым*; момент нормальной аэродинамической силы у такого ЛА действует на увеличение угла атаки и называется *опрокидывающим* аэродинамическим моментом. Отношение расстояния между центром масс и центром давления к длине ЛА обычно называют *степенью статической устойчивости* или *неустойчивости*.

Как правило, современные носители выполняются статически неустойчивыми. Это объясняется тем, что для обеспечения статической устойчивости необходимо было бы снабжать ЛА большими несущими плоскостями в виде стабилизаторов в хвостовой части, что сопряжено с большими весовыми затратами. Между тем никакими преимуществами в отношении управляемости и динамической устойчивости статически устойчивая схема не обладает.

Теперь рассмотрим моменты управляющих сил органов управления. Сами по себе силы, создаваемые органами управления, невелики по сравнению с другими силами, действующими на ЛА при движении с работающим двигателем. Они не могут оказывать существенное влияние на движение центра масс ЛА непосредственно. Но действие этих сил проявляется через управляющие моменты, которые они создают относительно центра масс ЛА и с помощью которых задается и регулируется положение оси ЛА в пространстве, а следовательно, и направление основной действующей силы — силы тяги.

Определим выражения для этих моментов. Пренебрегая изменением центра давления руля в зависимости от его отклонения, обозначим расстояние от него до вершины ЛА через l_1 и до оси ЛА через h_1 (см. рис. 4.4 и 4.8).

Сила лобового сопротивления Q создает относительно центра масс ЛА момент

$$M_Q = Qh_1. \quad (4.24)$$

Рассматривая составляющие силы Q [см. (4.19)], можно установить, что моменты сил Q_2 и Q_4 равны по величине, но противоположны по знаку, поэтому эти моменты взаимно уравновешиваются. Силы Q_1 и Q_3 , вообще говоря, различны, но эта разница при малых отклонениях рулей имеет порядок δ^2 и незначительна, и потому вызываемые этими силами моменты примерно равны по величине, но также противоположны по направлению. Будем считать, что эти моменты взаимно уравновешиваются. Таким образом, моменты силы Q мы учитывать не будем.

Подъемная сила R создает относительно центра масс ЛА момент, который удобно рассматривать как сумму двух моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс: момента относительно продольной оси

$$M_{x_1} = Rh_1 \quad (4.25)$$

и момента относительно соответствующей поперечной оси, параллельной оси вращения руля,

$$M_{y_1(z_1)} = R(l_1 - x_{ц.м.}). \quad (4.26)$$

С учетом (4.18) суммарные управляющие моменты относительно связанных осей ЛА можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_{x_1} &= R'h_1(-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - \delta_4) = R'h_1(\delta_3 - \delta_1), \\ M_{y_1} &= R'(l_1 - x_{ц.м.})(\delta_1 + \delta_3), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$M_{z_1} = R'(l_1 - x_{ц.м.})(-\delta_2 - \delta_4) = -2R'(l_1 - x_{ц.м.})\delta_2.$$

В этих формулах учтено правило знаков, принятое для углов отклонения рулей.

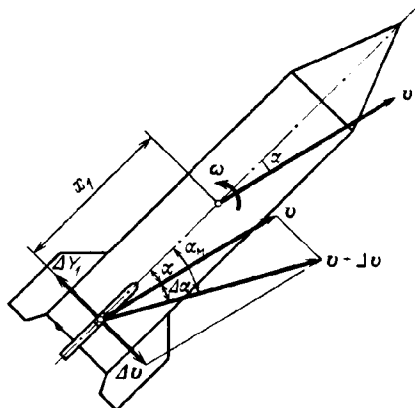
§ 4.5. Демпфирующие моменты

Сразу же оговоримся, что те моменты, к рассмотрению которых мы сейчас переходим, весьма малы по сравнению с другими моментами, действующими на ЛА на активном участке траектории. Но знать об их существовании и представлять себе механику их возникновения необходимо. Кроме того, забегая вперед, отметим, что на динамику неуправляемого движения головных частей ракет решающее влияние оказывает процесс демпфирования колебаний под воздействием демпфирующего аэродинамического момента.

Рассмотрим, как изменяются действующие на ЛА силы, если движение сопровождается вращением вокруг поперечной или продольной оси (рис. 4.11).

Элемент несущей поверхности ЛА имеет, помимо скорости поступательного движения v , скорость $\Delta v = \omega x_1$ в плоскости рисунка. Если ЛА располагается к потоку под углом атаки α , то элементарная площадка стабилизатора находится под местным углом атаки $\alpha_m = \alpha + \Delta\alpha$, т.е. как бы обдувается перекошенным потоком. Наличие угла $\Delta\alpha$ создает дополнительную элементарную подъемную силу ΔY_1 , которая пропорциональна угловой скорости ω вращения ЛА и расстоянию x_1 от рассматриваемой площадки до центра масс.

Рис. 4.11. Схема возникновения аэродинамического демпфирующего момента



Чтобы получить момент ΔM , вызываемый этой дополнительной силой, нужно умножить ее еще раз на x_1 — плечо силы ΔY_1 . Если проинтегрировать подобные элементарные моменты по всей длине ЛА, получим суммарный момент, вызванный вращением ЛА относительно центра масс. Легко видеть, что момент имеет направление, противоположное направлению угловой скорости вращения ЛА, и стремится уменьшить эту угловую скорость, являясь, следовательно, демпфирующим моментом. Общепринятое выражение для этого момента имеет вид

$$M_{\text{д}} = -m^{\omega} \frac{\rho v^2}{2} \frac{\omega}{v} S l^2, \quad (4.28)$$

где m^{ω} — безразмерный коэффициент аэродинамического момента демпфирования; S — характерная площадь; l — характерный продольный размер летательного аппарата.

Поскольку нас всегда интересуют моменты относительно связанных осей ЛА, запишем выражения относительно этих осей:

$$\begin{aligned} M_{x_1} &= -m_{x_1}^{\omega} \frac{\rho v^2}{2} \frac{\omega_{x_1}}{v} S l^2, \\ M_{y_1} &= -m_{y_1}^{\omega} \frac{\rho v^2}{2} \frac{\omega_{y_1}}{v} S l^2, \\ M_{z_1} &= -m_{z_1}^{\omega} \frac{\rho v^2}{2} \frac{\omega_{z_1}}{v} S l^2, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $m_{x_1}^{\omega}$, $m_{y_1}^{\omega}$, $m_{z_1}^{\omega}$ — безразмерные коэффициенты аэродинамического момента демпфирования относительно соответствующих осей:

$$m_{x_1}^{\omega} = \frac{\partial m_{x_1}}{\partial \omega_{x_1}}, \quad m_{y_1}^{\omega} = \frac{\partial m_{y_1}}{\partial \omega_{y_1}}, \quad m_{z_1}^{\omega} = \frac{\partial m_{z_1}}{\partial \omega_{z_1}}.$$

Все коэффициенты определяются на основании либо достаточно аккуратных аэродинамических расчетов (для тел не очень сложных форм), либо с помощью экспериментов в аэродинамических трубах. В дальнейшем мы будем учитывать влияние демпфирования только при расчете движения ЛА при возвращении на Землю, которое сопровождается интенсивными колебаниями ЛА со значительной частотой и, следовательно, со значительными угловыми скоростями, имеющими синусоидальный характер изменения.

Уравнения движения могут быть записаны в любой системе координат, которая по тем или иным причинам может оказаться предпочтительной. Для получения уравнений силы и моменты, действующие на ЛА в полете, проектируются на оси соответствующей системы координат. Не имея возможности рассмотреть все интересные случаи написания уравнений движения, мы остановимся подробно только на примере записи уравнений движения центра масс ЛА в нецентральной стартовой системе координат. Ось Oy этой системы направлена на поверхности Земли вверх вдоль линии отвеса, ось Ox лежит в горизонтальной плоскости и направлена по азимуту прицеливания, ось Oz дополняет систему до правой. Начало координат совпадает с точкой старта и жестко связано с Землей.

§ 5.1. Разложение сил и моментов по осям системы координат

Нашей ближайшей задачей будет спроектировать все силы и моменты на оси выбранной системы координат. Заметим, что сила тяги, силы и моменты от органов управления, аэродинамические демпфирующие моменты и демпфирующие реактивные моменты действуют вдоль осей связанной системы координат.

Сила притяжения в общем случае представляется в виде двух составляющих: по направлению к центру Земли и вдоль оси вращения Земли (см. рис. 4.2).

Аэродинамические силы и моменты зависят по величине и направлению от вектора скорости ЛА, и их удобно определять вдоль направлений, связанных с касательной к траектории. Поэтому необходимо будет составить таблицы направляющих косинусов между осями стартовой системы координат и теми осями, вдоль которых направлены интересующие нас силы и моменты.

Начнем обсуждение с силы притяжения. Направляющие косинусы для преобразований составляющих ускорения силы земного притяжения g'_r и g_ω , величины которых определены формулами (4.7) и (4.6), представлены в табл. 5.1. В ней x_c, y_c, z_c — координаты центра Земли в нецентральной стартовой системе координат $Oxyz$, которые определяются по формулам

$$x_c = r_0 \sin \gamma \cos \psi, \quad y_c = -r_0 \cos \gamma, \quad z_c = -r_0 \sin \gamma \sin \psi. \quad (5.1)$$

Т а б л и ц а 5.1

	Ox	Oy	Oz
mg'_r	$-\frac{x - x_c}{r}$	$-\frac{y - y_c}{r}$	$-\frac{z - z_c}{r}$
mg_ω	$-\frac{\omega z_x}{\omega}$	$-\frac{\omega z_y}{\omega}$	$-\frac{\omega z_z}{\omega}$

Расстояние r_0 от точки старта до центра Земли и координаты x_c, y_c, z_c с учетом зависимости γ от широты точки старта φ [см. формулу (2.35)] могут быть записаны с точностью до α^2 (квадрата сжатия) в следующем виде:

$$r_0 = R_e (1 - \alpha \sin^2 \varphi_r); \quad (5.2)$$

$$x_c = R_e \alpha \sin 2\varphi_r \cos \psi,$$

$$y_c = -R_e (1 - \alpha \sin^2 \varphi_r), \quad (5.3)$$

$$z_c = -R_e \alpha \sin 2\varphi_r \sin \psi,$$

где R_e — экваториальный радиус Земли, равный 6378,16 км. Расстояние r от

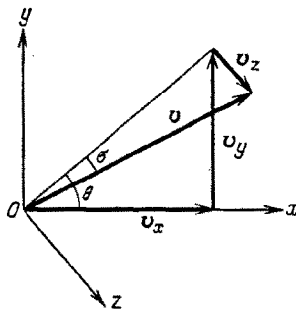


Рис. 5.1. Схема отсчета углов θ и σ

центра Земли до ЛА, имеющего координаты x, y и z , определяется формулой

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2}. \quad (5.4)$$

Составляющие угловой скорости вращения Земли по осям координат определяются по формулам, аналогичным полученным в п. 2.5.3, с заменой геоцентрической широты $\varphi_{ГЦ}$ на географическую φ_r :

$$\omega_{3x} = \omega_3 \cos \varphi_r \cos \psi, \quad \omega_{3y} = \omega_3 \sin \varphi_r, \quad (5.5)$$

$$\omega_{3z} = -\omega_3 \cos \varphi_r \sin \psi.$$

Направляющие косинусы силы тяги и сил от органов управления (напомним, что эти силы действуют вдоль осей связанной системы координат) определены матрицей (2.31) или упрощенным ее видом (2.32).

Теперь нужно найти направляющие косинусы аэродинамических сил и их моментов. Условимся направление вектора скорости ЛА (направление касательной к траектории) определять углами θ и σ , которые построим следующим образом (рис. 5.1). Через вектор скорости v проведем плоскость, перпендикулярную к плоскости Oxy . Угол между этой плоскостью и плоскостью Oxz обозначим через θ , а угол между вектором скорости и плоскостью Oxy — через σ . Эти углы аналогичны углам φ и ξ , определяющим направление продольной оси ЛА. Угол θ будем считать положительным, если вектор скорости направлен вверх относительно плоскости Oxz . Угол σ будем считать положительным, если вектор скорости расположен влево от плоскости Oxy . Тогда составляющая вектора скорости вдоль оси Oz

будет равна

$$v_z = -v \sin \sigma, \quad (5.6)$$

а проекция на плоскость Oxy равна $v \cos \sigma$. Последнюю можно в свою очередь спроектировать на оси Ox и Oy :

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \sigma \cos \theta, \\ v_y &= v \cos \sigma \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку при полете углы σ малы, будем полагать

$$\sin \sigma = \sigma, \quad \cos \sigma = 1,$$

и тогда

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad v_z = -v\sigma. \quad (5.8)$$

Направляющие косинусы для преобразований вектора v и противоположного ему вектора лобового сопротивления X представлены в табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5.2

	Ox	Oy	Oz
v	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$-\sigma$
X	$-\cos \theta$	$-\sin \theta$	σ

Как уже упоминалось, вектор аэродинамического момента M_a перпендикулярен как к продольной оси ЛА, так и к касательной к траектории, т.е. имеет направление, определяемое векторным произведением единичных векторов x_1^0 и v^0 , причем если этот момент восстанавливающий ($M_a > 0$), то он направлен по вектору $x_1^0 \times v^0$, а если опрокидывающий ($M_a < 0$), то в обратную сторону. Замечая, что модуль векторного произведения $x_1^0 \times v^0$ по определению равен $\sin \alpha \approx \alpha$, а величина аэродинамического момента [см. формулу (4.23)] равна

$$M_a = c'_{y_1} q S (x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha,$$

получаем, что вектор аэродинамического момента может быть выражен в виде

$$\begin{aligned} M_a &= c'_{y_1} q S (x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha \frac{x_1^0 \times v^0}{\alpha} = \\ &= c'_{y_1} q S (x_{ц.д} - x_{ц.м}) (x_1^0 \times v^0). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Подъемная сила Y перпендикулярна к векторам v^0 и $x_1^0 \times v^0$, т.е. имеет направление, определяемое вектором $v^0 \times (x_1^0 \times v^0)$. Модуль этого вектора также равен $\sin \alpha \approx \alpha$, так как векторы v^0 и $x_1^0 \times v^0$ взаимно перпендикулярны. Поэтому подъемную силу можно представить следующим образом:

$$Y = c'_{y_1} q S \alpha \frac{v^0 \times (x_1^0 \times v^0)}{\alpha} = c'_{y_1} q S v^0 \times (x_1^0 \times v^0). \quad (5.10)$$

Воспользуемся равенством $x_1^0 = y_1^0 \times z_1^0$ и преобразуем векторное произведение $x_1^0 \times v^0$:

$$x_1^0 \times v^0 = (y_1^0 \times z_1^0) \times v^0 = (v^0 \cdot y_1^0) z_1^0 - (v^0 \cdot z_1^0) y_1^0.$$

Теперь выражения (5.9) и (5.10) принимают вид

$$M_a = c'_{y_1} q S(x_{ц.д} - x_{ц.м}) [(v^0 \cdot y_1^0) z_1^0 - (v^0 \cdot z_1^0) y_1^0] = M_{az_1} + M_{ay_1},$$

$$Y = c'_{y_1} q S v^0 \times [(v^0 \cdot y_1^0) z_1^0 - (v^0 \cdot z_1^0) y_1^0] = Y_y + Y_z.$$

Здесь

$$M_{az_1} = c'_{y_1} q S(x_{ц.д} - x_{ц.м})(v^0 \cdot y_1^0) z_1^0, \quad (5.11)$$

$$M_{ay_1} = -c'_{y_1} q S(x_{ц.д} - x_{ц.м})(v^0 \cdot z_1^0) y_1^0;$$

$$Y_y = c'_{y_1} q S(v^0 \cdot y_1^0)(v^0 \times z_1^0),$$

$$Y_z = -c'_{y_1} q S(v^0 \cdot z_1^0)(v^0 \times y_1^0). \quad (5.12)$$

Проведенные преобразования позволили подъемную силу Y разложить на две составляющие, одна из которых (Y_y) лежит в плоскости $O_1 x_1 y_1$, другая (Y_z) — в плоскости $O_1 x_1 z_1$, а аэродинамический момент M_a заменить суммой моментов от сил Y_y и Y_z . Такое разложение удобно тем, что для векторов Y_y , Y_z , M_{ay_1} и M_{az_1} легко найти их величины и направляющие косинусы.

Действительно, векторы M_{ay_1} и M_{az_1} уже представлены в виде произведений скалярных величин на единичные векторы y_1^0 и z_1^0 [см. (5.11)]. Можно показать, что векторы $v^0 \times z_1^0$ и $v^0 \times y_1^0$, входящие в выражения (5.12) для Y_y и Y_z , с точностью до квадратов малых величин можно считать единичными. Для этого раскроем векторы $v^0 \times z_1^0$ и $v^0 \times y_1^0$, считая углы ξ , η , σ , γ_1 , γ_2 , γ_3 малыми, а для направляющих косинусов единичных векторов v^0 , z_1^0 и y_1^0 воспользуемся матрицей (2.32) и табл. 5.2:

$$v^0 \times z_1^0 = \begin{vmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\sigma \\ \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi - \gamma_2 & \xi \sin\varphi - \eta \cos\varphi + \gamma_1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin\theta + \xi\sigma \sin\varphi - \eta\sigma \cos\varphi + \gamma_1\sigma) x^0 +$$

$$+ (-\cos\theta - \xi\sigma \cos\varphi - \eta\sigma \sin\varphi + \gamma_2\sigma) y^0 +$$

$$+ [(\xi \sin\varphi - \eta \cos\varphi + \gamma_1) \cos\theta - (\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi - \gamma_2) \sin\theta] z^0 \approx$$

$$\approx x^0 \sin\theta - y^0 \cos\theta + z^0 (\gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \sin\theta - \eta),$$

$$v^0 \times y_1^0 = \begin{vmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ \cos\theta & \sin\theta & -\sigma \\ \gamma_3 \cos\varphi - \sin\varphi & \gamma_3 \sin\varphi + \cos\varphi & -\gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi + \eta \end{vmatrix} =$$

$$= [(-\gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi + \eta) \sin\theta + (\gamma_3 \sin\varphi + \cos\varphi) \sigma] x^0 -$$

$$- [(-\gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi + \eta) \cos\theta + (\gamma_3 \cos\varphi - \sin\varphi) \sigma] y^0 +$$

$$+ [(\gamma_3 \sin\varphi + \cos\varphi) \cos\theta - (\gamma_3 \cos\varphi - \sin\varphi) \sin\theta] z^0 \approx$$

$$\approx [(-\gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi + \eta) \sin\theta + \sigma \cos\varphi] x^0 -$$

$$- [(-\gamma_1 \cos\varphi - \gamma_2 \sin\varphi + \eta) \cos\theta - \sigma \sin\varphi] y^0 + z^0$$

Теперь легко проверить, что модули векторов $v^0 \times z_1^0$ и $v^0 \times y_1^0$ примерно равны единице:

$$|v^0 \times z_1^0| = [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + (\gamma_1 \cos \theta - \gamma_2 \sin \theta - \eta)^2]^{1/2} \approx 1, -$$

$$|v^0 \times y_1^0| = \{ [(-\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi + \eta) \sin \theta + \sigma \cos \varphi]^2 + [(-\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi + \eta) \cos \varphi - \sigma \sin \varphi]^2 + 1 \}^{1/2} \approx 1.$$

Вернемся к выражениям (5.12) и перепишем их, поменяв местами множители в векторных произведениях:

$$Y_y = -c'_{y_1} q S(v^0 \cdot y_1^0)(z_1^0 \times v^0),$$

$$Y_z = c'_{y_1} q S(v^0 \cdot z_1^0)(y_1^0 \times v^0).$$

Направления сил Y_y и Y_z определяются векторами $z_1^0 \times v^0$ и $y_1^0 \times v^0$; а для выяснения величин этих сил нужно раскрыть скалярные произведения единичных векторов $(v^0 \cdot y_1^0)$ и $(v^0 \cdot z_1^0)$. Воспользовавшись матрицей (2.32) и табл. 5.2, запишем, пренебрегая произведениями малых углов и принимая, что в силу малости угла $\varphi - \theta$ можно положить $\sin(\varphi - \theta) = \varphi - \theta$, $\cos(\varphi - \theta) = 1$:

$$(v^0 \cdot y_1^0) = \cos \theta (\gamma_3 \cos \varphi - \sin \varphi) + \sin \theta (\gamma_3 \sin \varphi + \cos \varphi) - \sigma (-\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi + \eta) =$$

$$= \gamma_3 \cos(\varphi - \theta) - \sin(\varphi - \theta) \approx -(\varphi - \gamma_3 - \theta),$$

$$(v^0 \cdot z_1^0) = \cos \theta (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - \gamma_2) +$$

$$+ \sin \theta (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi + \gamma_1) - \sigma \cdot 1 =$$

$$= \xi \cos(\varphi - \theta) - \eta \sin(\varphi - \theta) - \gamma_2 \cos \theta + \gamma_1 \sin \theta - \sigma \approx$$

$$\approx \xi + \gamma_1 \sin \theta - \gamma_2 \cos \theta - \sigma.$$

Рассмотренные нами скалярные произведения представляют собой не что иное, как численные значения углов атаки в плоскостях $O_1 x_1 y_1$ и $O_1 x_1 z_1$ соответственно. Обозначив углы атаки в этих плоскостях через α_y и α_z и учтя, что произведению $(v^0 \cdot y_1^0)$ соответствует отрицательный угол атаки, запишем

$$\alpha_y = -(v^0 \cdot y_1^0) = \varphi - \gamma_3 - \theta, \quad (5.13)$$

$$\alpha_z = (v^0 \cdot z_1^0) = \xi - \sigma + \gamma_1 \sin \theta - \gamma_2 \cos \theta. \quad (5.14)$$

При этих обозначениях формулы (5.11) и (5.12) для аэродинамических моментов и сил в скалярной форме примут следующий вид:

$$M_{ay_1} = -c'_{y_1} q S(x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha_z,$$

$$M_{az_1} = -c'_{y_1} q S(x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha_y,$$

$$Y_y = c'_{y_1} q S \alpha_y,$$

$$Y_z = c'_{y_1} q S \alpha_z.$$

Направляющие косинусы моментов M_{ay_1} и M_{az_1} совпадают с направляющими косинусами единичных векторов y_1^0 и z_1^0 , а направляющие косинусы сил Y_y и Y_z — с направляющими косинусами единичных векторов $z_1^0 \times v^0$ и $y_1^0 \times v^0$ соответственно. Направления этих единичных векторов нетрудно определить, если воспользоваться матрицей (2.32) и табл. 5.2

Таблица 5.3

Название силы	Выражение для величины силы	Ox	Oy	Oz
Притяжение	mg	$-\frac{x-x_c}{r}$	$-\frac{y-y_c}{r}$	$-\frac{z-z_c}{r}$
	$mg\omega$	$\frac{\omega_3 x}{\omega_3}$	$\frac{\omega_3 y}{\omega_3}$	$\frac{\omega_3 z}{\omega_3}$
Лобовое сопротивление	$X = c_x q S$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	σ
Подъемная сила	$Y_y = c'_y q S \alpha_y$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\eta - \gamma_1 \cos\theta - \gamma_2 \sin\theta$
Подъемная сила	$Y_z = c'_y q S \alpha_z$	$-(\eta - \gamma_1 \cos\theta - \gamma_2 \sin\theta) \times$ $\times \sin\theta + \sigma \cos(\theta - \gamma_2)$	$(\eta - \gamma_1 \cos\theta - \gamma_2 \sin\theta) \times$ $\times \cos\theta - \sigma \sin(\theta - \gamma_2)$	-1
Осевая сила от четырех газоструйных рулей	$X_{1p} = 4Q_0 + \lambda \sum_{i=1}^4 \delta_i$	$-\cos\theta - \gamma_3 \sin\theta$	$-\sin\theta + \gamma_3 \cos\theta$	$\xi + \gamma_1 \sin\theta - \gamma_2 \cos\theta$
Боковая сила от газоструйных рулей 2 и 4	$Y_{1p} = 2R \delta_2$	$\gamma_3 \cos\theta - \sin\theta$	$\gamma_3 \sin\theta + \cos\theta$	$\eta - \gamma_1 \cos\theta - \gamma_2 \sin\theta$
Боковая сила от газоструйных рулей 1 и 3	$Z_{1p} = R(\delta_1 + \delta_3)$	$\xi \cos\theta + \eta \sin\theta - \gamma_2$	$\xi \sin\theta - \eta \cos\theta + \gamma_1$	1
Сила тяги	$P = \frac{m}{m_0} (P_0 + S_a P_0) - S_a P$	$\cos\theta + \gamma_3 \sin\theta$	$\sin\theta - \gamma_3 \cos\theta$	$-\xi - \gamma_1 \sin\theta + \gamma_2 \cos\theta$

и в преобразованиях учесть малость ряда углов, как это делалось ранее:

$$z_1^0 \times v^0 = \begin{vmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - \gamma_2 & \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi + \gamma_1 & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & -\sigma \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx -\sin \theta x^0 + \cos \theta y^0 + (\eta - \gamma_1 \cos \theta - \gamma_2 \sin \theta) z^0,$$

$$y_1^0 \times v^0 = \begin{vmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ \gamma_3 \cos \varphi - \sin \varphi & \gamma_3 \sin \varphi + \cos \varphi & -\gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi + \eta \\ \cos \theta & \sin \theta & -\sigma \end{vmatrix} \approx$$

$$\approx [(\eta - \gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi) \sin \theta + \sigma \cos(\varphi - \gamma_3)] x^0 +$$

$$+ [(\eta - \gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi) \cos \theta - \sigma \sin(\varphi - \gamma_3)] y^0 - z^0.$$

Таким образом, получены рабочие формулы для определения величин и направлений аэродинамических моментов и сил, действующих на ЛА в полете.

Формулы для сил и их направляющих косинусов относительно осей стартовой системы координат $Oxyz$ сведем в табл. 5.3. Для моментов

Таблица 5.4

Момент	Выражение для величины момента	Ox	Oy	Oz
Аэродинамический	$M_{ay_1} = -c'_{y_1} q S(x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha_z$	0	1	0
Аэродинамический	$M_{az_1} = -c'_{z_1} q S(x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha_y$	0	0	1
От газоструйных рулей 1 и 3 относительно оси $O_1 x_1$	$M_{x_1} = R' h_1 (\delta_3 - \delta_1)$	1	0	0
От газоструйных рулей 1 и 3 относительно оси $O_1 y_1$	$M_{y_1} = R' (l_1 - x_{ц.м}) (\delta_1 + \delta_3)$	0	1	0
От газоструйных рулей 2 и 4 относительно оси $O_1 z_1$	$M_{z_1} = -2R' (l_1 - x_{ц.м}) \delta_2$	0	0	1
Демпфирующий аэродинамический	$\Delta M_{x_1} = -m \frac{\omega_{x_1}}{v} q S l^2$	1	0	0
Демпфирующий аэродинамический	$\Delta M_{y_1} = -m \frac{\omega_{y_1}}{v} q S l^2$	0	1	0
Демпфирующий аэродинамический	$\Delta M_{z_1} = -m \frac{\omega_{z_1}}{v} q S l^2$	0	0	1
Демпфирующий реактивный	$M_{Ry_1} = -m \frac{\omega}{R} \omega_{y_1}$	0	1	0
Демпфирующий реактивный	$M_{Rz_1} = -m \frac{\omega}{R} \omega_{z_1}$	0	0	1

сил составим табл. 5.4, причем направляющие косинусы дадим относительно осей связанной системы, так как при написании уравнений движения моменты бывают нужны именно относительно осей ЛА.

§ 5.2. Уравнения движения в координатной форме

Прежде чем записать уравнения движения в проекциях на оси координат, остановимся на одной особенности. Ранее было показано, что уравнение сил в векторной форме для ЛА с работающим двигателем имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F + P_d, \quad (5.15)$$

где F — сумма внешних сил; P_d — динамическая или реактивная сила.

Затем мы ввели понятие тяги, в которое включили, кроме собственно реактивной силы, так называемую статическую тягу $P_{ст}$, которая включается в сумму внешних сил. Если теперь реактивную силу P_d объединить со статической тягой $P_{ст}$ в одну силу — силу тяги P , то из суммы внешних сил F статическая тяга должна быть исключена. В этом случае (5.15) запишем в той же форме

$$m \frac{dv}{dt} = F + P, \quad (5.16)$$

но под F будем понимать сумму всех внешних сил, за исключением статической тяги $P_{ст}$.

В уравнении (5.16) под dv/dt понимается полное ускорение центра масс ЛА в абсолютном движении, определяемое формулой (2.19) и состоящее из суммы относительного w_r , переносного w_e и кориолисова w_c ускорений. Проектируя уравнение (5.16) на оси Ox , Oy , Oz и используя для проекций сил табл. 5.3, получаем

$$m(\ddot{x} + w_{ex} + w_{cx}) = -m \left(g'_r \frac{x - x_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} \right) - \\ - c_x q S \cos \theta - c'_{y_1} q S \{ \alpha_y \sin \theta + \alpha_z [(\eta - \gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi) \sin \theta - \\ - \sigma \cos(\varphi - \gamma_3)] \} - X_{1p} (\cos \varphi + \gamma_3 \sin \varphi) - 2R' \delta_2 (\sin \varphi - \gamma_3 \cos \varphi) + \\ + R' (\delta_1 + \delta_3) (\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi - \gamma_2) + P (\cos \varphi + \gamma_3 \sin \varphi),$$

$$m(\ddot{y} + w_{ey} + w_{cy}) = -m \left(g'_r \frac{y - y_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} \right) - \\ - c_x q S \sin \theta + c'_{y_1} q S \{ \alpha_y \cos \theta + \alpha_z [(\eta - \gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi) \cos \theta - \\ - \sigma \sin(\varphi - \gamma_3)] \} - X_{1p} (\sin \varphi - \gamma_3 \cos \varphi) + 2R' \delta_2 (\cos \varphi + \gamma_3 \sin \varphi) + \\ + R' (\delta_1 + \delta_3) (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi + \gamma_1) + P (\sin \varphi - \gamma_3 \cos \varphi),$$

$$m(\ddot{z} + w_{ez} + w_{cz}) = -m \left(g'_r \frac{z - z_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} \right) + \\ + c_x q S \sigma + c'_{y_1} q S \{ \alpha_y (\eta - \gamma_1 \cos \theta - \gamma_2 \sin \theta) - \alpha_z \} + \\ + X_{1p} (\xi + \gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi) + 2R' \delta_2 (\eta - \gamma_1 \cos \varphi - \gamma_2 \sin \varphi) + \\ + R' (\delta_1 + \delta_3) - P (\xi + \gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi).$$

Упростим записанные уравнения, для чего пренебрежем членами, содержащими произведения малых углов $\alpha_y, \alpha_z, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \eta, \xi, \sigma$, а также произведения этих углов на углы отклонения газоструйных рулей. Кроме того, ради удобства примем $\cos\varphi + \gamma_3 \sin\varphi = \cos(\varphi - \gamma_3)$ и $\sin\varphi - \gamma_3 \cos\varphi = \sin(\varphi - \gamma_3)$. После несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned}
 m(\ddot{x} + w_{ex} + w_{cx}) &= (P - X_{1p}) \cos(\varphi - \gamma_3) - c_x q S \cos\theta - \\
 &- c'_{y_1} q S \alpha_y \sin\theta - 2R' \delta_2 \sin(\varphi - \gamma_3) - m \left(g'_r \frac{x - x_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} \right), \\
 m(\ddot{y} + w_{ey} + w_{cy}) &= (P - X_{1p}) \sin(\varphi - \gamma_3) - c_x q S \sin\theta + \\
 &+ c'_{y_1} q S \alpha_y \cos\theta + 2R' \delta_2 \cos(\varphi - \gamma_3) - m \left(g'_r \frac{y - y_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} \right), \\
 m(\ddot{z} + w_{ez} + w_{cz}) &= (P - X_{1p})(\xi - \gamma_1 \sin\varphi - \gamma_2 \cos\varphi) + \\
 &+ c_x q S \sigma - c'_{y_1} q S \alpha_z + R'(\delta_1 + \delta_3) - m \left(g'_r \frac{z - z_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} \right).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

К этой системе нужно добавить уравнения кинематических связей (5.8)

$$\dot{x} = v \cos\theta, \quad \dot{y} = v \sin\theta, \quad \dot{z} = -v\sigma, \tag{5.18}$$

а также уравнения управления, которые в самом общем виде запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F_1(\delta_1, x, y, z, \varphi, \xi, \eta) &= 0, \\
 F_2(\delta_2, x, y, z, \varphi, \xi, \eta) &= 0, \\
 F_3(\delta_3, x, y, z, \varphi, \xi, \eta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Движение ЛА вокруг центра масс определяется векторным уравнением (3.35). Его удобно интегрировать, если спроектировать на оси связанной системы координат. Учитывая, что в силу осевой симметрии ЛА моменты инерции относительно поперечных осей y_1 и z_1 равны ($B = C$), и используя табл. 5.4, находим

$$\begin{aligned}
 A \frac{d\omega_{x_1}}{dt} &= R' h_1 (\delta_3 - \delta_1) - m \omega_{x_1}^2 q S l^2 \frac{\omega_{x_1}}{v}, \\
 B \frac{d\omega_{y_1}}{dt} - (B - A) \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= -c'_{y_1} q S (x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha_z + \\
 &+ R'(l_1 - x_{ц.м})(\delta_1 + \delta_3) - m \omega_{y_1}^2 q S l^2 \frac{\omega_{y_1}}{v} - m \omega_R^2 \omega_{y_1}, \\
 B \frac{d\omega_{z_1}}{dt} + (B - A) \omega_{x_1} \omega_{y_1} &= c'_{y_1} q S (x_{ц.д} - x_{ц.м}) \alpha_y - \\
 &- 2R'(l_1 - x_{ц.м}) \delta_2 - m \omega_{z_1}^2 q S l^2 \frac{\omega_{z_1}}{v} - m \omega_R^2 \omega_{z_1}.
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

К этой системе надо добавить уравнения кинематических связей (2.30)

$$\omega_{x_1} = -\dot{\varphi}\xi + \dot{\eta}, \quad \omega_{y_1} = \dot{\varphi}\eta + \dot{\xi}, \quad \omega_{z_1} = \dot{\varphi} - \dot{\xi}\eta. \tag{5.21}$$

Пятнадцать уравнений (5.17) – (5.21), составляющих замкнутую систему, позволяют определить 15 функций $x, y, z, \varphi, \xi, \eta, v, \theta, \sigma, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$, полностью характеризующих траекторию ЛА на активном участке. Однако, как правило, эту систему в таком виде не интегрируют, а в соответствии с поставленной задачей, требуемой точностью расчета и наличием исходных данных проводят ряд упрощений. О том, как это осуществляется на практике, мы увидим ниже, а сейчас покажем, как видоизменяется система уравнений применительно к расчету участка свободного полета ЛА. Будем рассматривать движение ЛА без учета его колебаний вокруг центра масс, полагая угол атаки тождественно равным нулю (такое движение достигается без принудительного управления, а является естественным для ЛА, обладающего достаточной степенью статической устойчивости). Последнее условие исключает необходимость решения уравнений (5.20) и (5.21). Кроме того, в правых частях уравнений (5.17) мы должны оставить только силы притяжения и лобового сопротивления. Теряют также смысл уравнения управления (5.19). Таким образом, получаем следующую систему:

$$m(\ddot{x} + w_{ex} + w_{cx}) = -c_x q S \cos \theta - m \left(g_r' \frac{x - x_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} \right),$$

$$m(\ddot{y} + w_{ey} + w_{cy}) = -c_x q S \sin \theta - m \left(g_r' \frac{y - y_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} \right),$$

$$m(\ddot{z} + w_{ez} + w_{cz}) = -c_x q S \sigma - m \left(g_r' \frac{z - z_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} \right),$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Для определения углов θ и σ используются уравнения кинематических связей (5.18)

$$\cos \theta = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \theta = \frac{v_y}{v}, \quad \sigma = -\frac{v_z}{v}, \quad (5.23)$$

где

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

§ 5.3. Упрощение уравнений движения

Приступая к упрощению уравнений движения, следует прежде всего определить, для решения каких задач предполагается использовать эти уравнения. Такой вопрос вполне закономерен, потому что полученные нами общие уравнения движения пригодны для решения многих задач динамики полета ЛА. В баллистике же наши интересы главным образом обращены в сторону определения движения центра масс ЛА, и поэтому все обстоятельства, влияющие в какой-то степени на это движение, должны учитываться.

Из этого следует, что движение ЛА вокруг центра масс может рассматриваться в баллистике лишь постольку, поскольку оно влияет на движение

Отклонение оси ЛА вверх от программного положения на угол $\Delta\varphi$ (кабрирование) вызывает отклонение рулей 2 и 4 вниз, которое считается положительным.

Таким образом, объединяя (5.25) и (5.26), запишем

$$\delta_1 = -a_0\xi + b_0\eta, \quad \delta_2 = \delta_4 = a_0\Delta\varphi, \quad \delta_3 = -a_0\xi - b_0\eta. \quad (5.27)$$

Воспользовавшись (5.27), исключим из (5.24) углы отклонения рулей:

$$\begin{aligned} 2R'h_1b_0\dot{\eta} &= 0, \\ c'_{y_1}qS(x_{ц.д} - x_{ц.м})\alpha_z + 2R'(l_1 - x_{ц.м})a_0\dot{\xi} &= 0, \\ c'_{y_1}qS(x_{ц.д} - x_{ц.м})\alpha_y + 2R'(l_1 - x_{ц.м})a_0\Delta\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Первое из этих уравнений дает

$$\eta = 0$$

(это означает, что движение происходит без отклонения оси ЛА по крену). Теперь зависимости (5.27) принимают более простой вид

$$\delta_1 = \delta_3 = -a_0\xi, \quad \delta_2 = \delta_4 = a_0\Delta\varphi. \quad (5.29)$$

Далее можно учесть имеющиеся между углами $\alpha_y, \delta_{2,4}, \varphi, \Delta\varphi, \alpha_z, \delta_{1,3}, \xi$ и σ связи (4.16), (5.13), (5.14), (5.28), (5.29) и с помощью несложных преобразований получить

$$\alpha_z = -A(\sigma - \gamma_1 \sin\theta + \gamma_2 \cos\theta), \quad (5.30)$$

$$\xi = (1 - A)(\sigma - \gamma_1 \sin\theta + \gamma_2 \cos\theta),$$

$$\alpha_y = A(\varphi_{пр} - \gamma_3 - \theta), \quad (5.31)$$

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{пр} = -(1 - A)(\varphi_{пр} - \gamma_3 - \theta),$$

где

$$A = \frac{2a_0R'(l_1 - x_{ц.м})}{2a_0R'(l_1 - x_{ц.м}) + c'_{y_1}qS(x_{ц.д} - x_{ц.м})}. \quad (5.32)$$

Теперь уравнения (5.17) можно записать в следующем виде, удобном для проведения расчетов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p})\cos(\varphi - \gamma_3) - c_x qS \cos\theta - \\ &- c'_{y_1}qS(\varphi - \gamma_3 - \theta)\sin\theta - 2a_0R'\Delta\varphi \sin(\varphi - \gamma_3)] - \\ &- g'_r \frac{x - x_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} - w_{ex} - w_{cx}, \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p})\sin(\varphi - \gamma_3) - c_x qS \sin\theta + \\ &+ c'_{y_1}qS(\varphi - \gamma_3 - \theta)\cos\theta + 2a_0R'\Delta\varphi \cos(\varphi - \gamma_3)] - \\ &- g'_r \frac{y - y_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} - w_{ey} - w_{cy}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{m} [(P - X_{1p} + c'_{y_1} qS)(\xi + \gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi) - \\ - (c'_{y_1} + c_x) qS\sigma + 2a_0 R' \xi] - g'_r \frac{z - z_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} - w_{ez} - w_{cz}.$$

Часто отдают предпочтение интегрированию уравнений движения не в виде (5.33), а в переменных v, σ, θ , т.е. в скоростной системе координат. Для такого перехода воспользуемся соотношениями (5.18)

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{z} = -v\sigma,$$

дифференцируя которые, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{v} \cos \theta - v\dot{\theta} \sin \theta, \\ \ddot{y} &= \dot{v} \sin \theta + v\dot{\theta} \cos \theta, \\ \ddot{z} &= -\dot{v}\sigma - v\dot{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Решая первые два уравнения относительно \dot{v} и $v\dot{\theta}$, находим

$$\dot{v} = \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta, \quad v\dot{\theta} = -\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta.$$

Подставляя сюда значения \ddot{x} и \ddot{y} из (5.33), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p}) \cos(\varphi - \gamma_3 - \theta) - c_x qS - 2a_0 R' \Delta \varphi \sin(\varphi - \gamma_3 - \theta)] - \\ &- \left(g'_r \frac{x - x_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} + w_{ex} + w_{cx} \right) \cos \theta - \\ &- \left(g'_r \frac{y - y_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} + w_{ey} + w_{cy} \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} v \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p}) \sin(\varphi - \gamma_3 - \theta) + c'_{y_1} qS \alpha_y + \\ &+ 2a_0 R' \Delta \varphi \cos(\varphi - \gamma_3 - \theta)] + \left(g'_r \frac{x - x_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} + \right. \\ &\left. + w_{ex} + w_{cx} \right) \sin \theta - \left(g'_r \frac{y - y_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} + w_{ey} + w_{cy} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Переписав последнее уравнение (5.34) в виде

$$v\dot{\sigma} = -\ddot{z} - \dot{v}\sigma$$

и подставив сюда значения \ddot{z} из (5.33) и \dot{v} в форме (5.35), получим

$$\begin{aligned} v \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p})(\xi + \gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi) + c'_{y_1} qS(\xi - \sigma) + \\ &+ 2a_0 R' \xi] + g'_r \frac{z - z_c}{r} + g_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} + w_{ez} + w_{cz} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sigma}{m} [(P - X_{1p}) \cos(\varphi - \gamma_3 - \theta) - 2a_0 R' \Delta\varphi \sin(\varphi - \gamma_3 - \theta)] + \\
& + \sigma \left(g_r' \frac{x - x_c}{r} + g_{\omega} \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} + w_{ex} + w_{cx} \right) \cos \theta + \\
& + \sigma \left(g_r' \frac{y - y_c}{r} + g_{\omega} \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} + w_{ey} + w_{cy} \right) \sin \theta. \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Система уравнений (5.35) – (5.37) с привлечением уравнений кинематических связей (5.18) и соотношений (5.30) – (5.32), по существу, полностью решает вопрос о точном расчете параметров ЛА. Этой же задаче соответствует и система (5.33). Но не всегда следует применять эти системы для расчетов траекторий, так как в подавляющем большинстве случаев возможны дальнейшие упрощения.

Рассмотрим эти возможности, исходя из следующего принципа. Сначала оценим погрешность, которая допускается в главных членах уравнений, и в соответствии с этим будем упрощать остальные члены в правых частях уравнений. В частности, теми членами, величины которых меньше абсолютной погрешности в главных членах, будем пренебрегать.

При расчете активного участка траектории доминирующую роль играет сила тяги. Ее мы знаем с точностью порядка 1%. Поскольку ускорение, создаваемое тягой, обычно находится в пределах от 10 до 100 м/с², то погрешность, вносимая неточностью знания тяги, оценивается в лучшем случае величиной порядка 0,1 м/с². Следовательно, мы имеем право вычислять остальные члены с такой же погрешностью, а членами, создающими ускорение меньше 0,05 м/с², можно пренебрегать.

Центробежное ускорение, учитываемое в уравнениях через составляющие переносного ускорения, имеет величину 0,01 – 0,03 м/с². Такую же величину имеет разность между ускорением земного притяжения в виде (4.4) и ньютоновым центральным ускорением. В этом случае меридиональная составляющая ускорения g_m отсутствует, а радиальная составляющая g_r определяется формулой

$$g_r = - \frac{\mu}{r^2}.$$

При этом в табл. 5.1 и выражении (5.4) для r координаты центра масс Земли $x_c = 0, z_c = 0, y_c = -R$.

Поскольку эффект сжатия Земли влияет тем сильнее, чем больше значения соответствующих текущих координат ЛА относительно начала выбранной системы координат, обсуждаемым упрощением можно воспользоваться лишь в тех случаях, когда координаты ЛА на активном участке траектории находятся в пределах нескольких сотен километров.

Далее, в уравнениях (5.33) или (5.35) – (5.37) имеются члены, содержащие углы γ_1, γ_2 и γ_3 , которые характеризуют "поведение" гироскопов относительно системы координат, вращающейся вместе с Землей. Оценки показывают, что эффект от учета этих углов примерно такой же, как от учета кориолисова ускорения. Поэтому в случаях, когда этим ускорением можно пренебречь, влияние углов γ_1, γ_2 и γ_3 также можно не учитывать.

Кориолисово ускорение

$$w_c \approx 2\omega_3 v \approx 2 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} v \approx 1,5 \cdot 10^{-4} v.$$

При

$$v < \frac{0,05}{1,5 \cdot 10^{-4}} \approx 300 \text{ м/с}$$

$w_c < 0,05 \text{ м/с}^2$. В полете скорость ЛА достигает значительно больших величин, однако составляющая скорости $v_z = \dot{z}$ обычно не достигает 300 м/с. На этом основании в формуле (2.22) членами, содержащими \dot{z} , можно пренебречь, и при расчете активного участка траектории пользоваться следующими приближенными выражениями для составляющих кориолисова ускорения:

$$\begin{aligned} w_{cx} &\approx 2\omega_3 \dot{y} \cos \varphi_T \sin \psi = 2v\omega_3 \cos \varphi_T \sin \psi \sin \theta, \\ w_{cy} &\approx -2\omega_3 \dot{x} \cos \varphi_T \sin \psi = -2v\omega_3 \cos \varphi_T \sin \psi \cos \theta, \\ w_{cz} &\approx -2\omega_3 \dot{x} \sin \varphi_T + 2\omega_3 \dot{y} \cos \varphi_T \cos \psi = \\ &= 2v\omega_3 (-\sin \varphi_T \cos \theta + \cos \varphi_T \cos \psi \sin \theta). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Возвращаясь к уравнению (5.35), заметим, что членом $2a_0 R' \Delta \varphi \sin(\varphi - \gamma_3 - \theta)$, содержащим произведение малого угла $\Delta \varphi$ на синус малого угла $(\varphi - \gamma_3 - \theta)$, ввиду его малости можно пренебречь. Кроме того, в этом уравнении

$$w_{cx} \cos \theta + w_{cy} \sin \theta = 0,$$

что следует из (5.38).

С учетом этих упрощений уравнение (5.35) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} [(P - X_{1p}) \cos(\varphi - \theta) - c_x q S] - g \frac{R+y}{r} \sin \theta - \frac{x}{r} g \cos \theta. \quad (5.39)$$

При таких же упрощениях и с учетом того, что на основании (5.38)

$$w_{cx} \sin \theta - w_{cy} \cos \theta = 2v\omega_3 \cos \varphi_T \sin \psi,$$

уравнение (5.36) примет вид

$$\begin{aligned} v \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p}) \sin(\varphi - \theta) + c'_{y_1} q S \alpha_y + \\ &+ 2a_0 R' \Delta \varphi \cos(\varphi - \theta)] - g \left(\frac{R+y}{r} \cos \theta - \frac{x}{r} \sin \theta \right) + 2\omega_3 v \cos \varphi_T \sin \psi. \end{aligned}$$

В этом уравнении, учитывая малый вес члена $2a_0 R' \Delta \varphi \cos(\varphi - \theta)$, можно принять $\cos(\varphi - \theta) = 1$, и тогда получим

$$\begin{aligned} v \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p}) \sin(\varphi - \theta) + c'_{y_1} q S \alpha_y + 2a_0 R' \Delta \varphi] - \\ &- g \left(\frac{R+y}{r} \cos \theta - \frac{x}{r} \sin \theta \right) + 2\omega_3 v \cos \varphi_T \sin \psi. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Уравнения (5.39) и (5.40) с уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta$$

образуют систему четырех уравнений первого порядка. Эти уравнения могут быть проинтегрированы совместно для определения четырех неизвестных функций x, y, v, θ . При этом полезно воспользоваться связями (5.13) и (5.31), которые в случае $\gamma_3 \approx 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_y &= \varphi - \theta = A(\varphi_{\text{пр}} - \theta), \\ \varphi &= \varphi_{\text{пр}} + \Delta\varphi, \\ \Delta\varphi &= -(1 - A)(\varphi_{\text{пр}} - \theta). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Аналогичным образом упростим уравнение (5.37) и, опуская промежуточные преобразования, запишем:

$$\begin{aligned} v \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{m} \{ (P - X_{1p}) [\xi - \sigma \cos(\varphi - \theta)] + c'_{y_1} q S \alpha_z + \\ &+ 2a_0 R' \xi \} + \frac{g}{r} \{ z + [x \cos \theta + (R + y) \sin \theta] \sigma \} - \\ &- 2\omega_3 v (\sin \varphi_r \cos \theta - \cos \varphi_r \cos \psi \sin \theta). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Уравнение (5.42) интегрируется вместе с уравнением

$$dz/dt = -v\sigma. \quad (5.43)$$

Интегрирование этих уравнений можно проводить как параллельно с интегрированием уравнений (5.39), (5.40), так и последовательно, так как решение уравнений (5.39), (5.40) не зависит от результатов интегрирования уравнений (5.42) и (5.43). Однако если уравнения (5.42) и (5.43) интегрируются отдельно от уравнений (5.39) и (5.40), то приходится запоминать все промежуточные значения v, x, y, θ, q . По этой причине параллельное интегрирование предпочтительнее.

Дальнейшее упрощение уравнений проведем, исходя из следующих двух соображений. Во-первых, частый угол атаки $\alpha = \varphi - \theta$ не превосходит нескольких градусов, особенно при полете первой ступени ЛА; углы α, ξ, α_z , как правило, также малы. Это дает возможность провести упрощение не только во второстепенных, но и в главных членах уравнений, учитывающих действие тяги. Во-вторых, предоставляется возможность провести дополнительные упрощения, основываясь на малости координат ЛА на активном участке траектории по сравнению с радиусом Земли.

Проведем некоторые оценки. Если в первом члене уравнения (5.39) принять $\cos(\varphi - \theta) = 1$, то это приведет к ошибке, не превосходящей:

$$\begin{aligned} 0,1\% &\text{ при } \varphi - \theta \leq 2,5^\circ \\ 0,5\% &\text{ при } \varphi - \theta \leq 5^\circ, \\ 2\% &\text{ при } \varphi - \theta \leq 11^\circ, \\ 5\% &\text{ при } \varphi - \theta \leq 18^\circ. \end{aligned}$$

Таким образом, если есть уверенность в том, что угол атаки не превзойдет

5° , то вполне можно принять $\cos(\varphi - \theta) = 1$. Заметим, что еще меньшую погрешность дает замена синуса малого угла на сам угол. На этом основании упростим в уравнениях (5.39), (5.40) и (5.42) члены, содержащие $\cos(\varphi - \theta)$ и $\sin(\varphi - \theta)$. Однако к этому упрощению следует подходить осторожно, так как полет вторых и третьих ступеней часто сопровождается большими углами атаки, которые иногда достигают $20 - 25^\circ$.

Ранее мы обосновали возможность проведения таких упрощений, которые не приводили бы к ошибкам в расчете ускорения более $0,05 \text{ м/с}^2$ или $0,005g$. Исходя из этого, последним членом в уравнении (5.39) можно пренебрегать при $x \leq 0,005r$ (и тем более при $x \leq 0,005 R \approx 30 \text{ км}$). Множитель $(R + y)/r$ во втором слагаемом можно считать равным единице при $R + y > 0,995r$. В этом случае

$$x^2 = r^2 - (R + y)^2 < 0,01 r^2$$

и

$$x < 0,1 r \approx 600 \text{ км.}$$

Этот небольшой анализ показывает, что при расчете траектории полета первой ступени почти всегда можно пренебрегать множителем $g \frac{x}{r}$, чего нельзя делать при расчете траектории второй ступени. Что касается множителя $g \frac{R + y}{r}$, то вместо него почти всегда можно использовать просто g , если рассчитывается траектория двухступенчатого ЛА.

В уравнении (5.42), если принять $\cos(\varphi - \theta) = 1$, множитель при $(P - X_{1p})$ можно представить проще:

$$[\xi - \sigma \cos(\varphi - \theta)] \approx \xi - \sigma = \alpha_z.$$

Кроме того, можно упростить и группу членов, определяющих влияние g на боковое движение:

$$\frac{g}{r} \{ r + [x \cos \theta + (R + y) \sin \theta] \sigma \} \approx g \sigma \sin \theta.$$

После этих упрощений (если условия полета допускают их проведение) уравнения (5.39), (5.40), (5.42) можно записать в виде следующей системы:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} (P - X_{1p} - c_x q S) - g \sin \theta - \frac{x}{r} g \cos \theta, \\ v \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p} + c'_{y_1} q S) \alpha_y + 2a_0 R' \Delta \varphi] - \\ &- g \left(\cos \theta + \frac{x}{r} \sin \theta \right) + 2\omega_3 v \cos \varphi_r \sin \psi, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} v \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{m} [(P - X_{1p} + c'_{y_1} q S) \alpha_z + 2a_0 R' \xi] + \\ &+ g \sigma \sin \theta - 2\omega_3 v (\sin \varphi_r \cos \theta - \cos \varphi_r \cos \psi \sin \theta). \end{aligned}$$

Второе и третье уравнения системы (5.44) можно записать в ином виде, исключив углы $\Delta\varphi$ и ξ , для чего следует воспользоваться соотношениями (5.41), а также связями (5.30), которые при принятых выше допущениях записываются таким образом:

$$\alpha_z = -A\sigma, \quad \xi = (1 - A)\sigma. \quad (5.45)$$

Тогда эти уравнения будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} v \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\alpha_y}{m} \left(P - X_{1P} + c'_{y_1} qS - 2a_0 R' \frac{1 - A}{A} \right) - \\ &- g \left(\cos \theta + \frac{x}{r} \sin \theta \right) + 2\omega_3 v \cos \varphi_T \sin \psi, \\ v \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\alpha_z}{m} \left(P - X_{1P} + c'_{y_1} qS - 2a_0 R' \frac{1 - A}{A} \right) + \\ &+ g\sigma \sin \theta - 2\omega_3 v (\sin \varphi_T \cos \theta - \cos \varphi_T \cos \psi \sin \theta). \end{aligned}$$

Если теперь учесть выражение (5.32), то система (5.44) будет иметь следующий окончательный рабочий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} (P - X_{1P} - c_x qS) - g \sin \theta - \frac{x}{r} g \cos \theta, \\ v \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\alpha_y}{m} \left(P - X_{1P} + c'_{y_1} qS \frac{l_1 - x_{ц.д}}{l_1 - x_{ц.м}} \right) - \\ &- g \left(\cos \theta + \frac{x}{r} \sin \theta \right) + 2\omega_3 v \cos \varphi_T \sin \psi, \\ v \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\alpha_z}{m} \left(P - X_{1P} - c'_{y_1} qS \frac{l_1 - x_{ц.д}}{l_1 - x_{ц.м}} \right) + g\sigma \sin \theta - \\ &- 2\omega_3 v (\sin \varphi_T \cos \theta - \cos \varphi_T \cos \psi \sin \theta), \\ \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dz}{dt} = -v\sigma. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Подведем некоторый итог. Мы получили наиболее общие уравнения в виде системы, состоящей из пятнадцати уравнений (5.17) – (5.21). Отвлекаясь от вопросов динамики движения вокруг центра масс, мы упростили эти уравнения до системы (5.33), которая является наиболее общей формой уравнений для решения задачи баллистики. Такой же общей формой является система уравнений (5.35) – (5.37), написанная для решения задачи в скоростной системе координат. Далее, руководствуясь точностью знания основных действующих сил, мы провели ряд упрощений, в результате которых получили систему (5.39) – (5.42), которая пригодна для проведения расчетов активного участка траектории с высокой точностью. Затем мы провели дальнейшие упрощения, основываясь на малости угла $\alpha = \varphi - \theta$ и ограниченной протяженности активного участка.

Полученные системы уравнений (5.44) и (5.46) применимы в тех случаях, когда дальность активного участка не превышает 600 км и угол атаки не превосходит 5° . Нашей ближайшей задачей будет проведение дальнейших упрощений с доведением уравнений до самого простейшего вида.

Напрашивается вопрос: ради чего все это делается? Так ли важно, чтобы тригонометрические функции представлялись в более простом виде, для силы притяжения принимались упрощенные выражения, чтобы некоторыми малыми членами пренебрегали и т.д.? Казалось бы, для быстродействующей ЭВМ не составляет никакого "труда" выполнить некоторое количество дополнительных операций без ущерба для точности расчетов, зато в качестве компенсации мы имели бы более универсальную программу расчетов. Но дело в том, что количество расчетов, которые приходится вести по точным уравнениям, на несколько порядков (в несколько десятков тысяч раз!) меньше количества расчетов, которые допустимо вести по весьма приближенным уравнениям. Понятно поэтому стремление к максимально возможным упрощениям: каждый сэкономленный процент времени при расчете одной траектории обращается в многочасовую экономию машинного времени при массовых расчетах.

Прежде чем перейти к дальнейшим упрощениям, отметим, что использование системы (5.44) или (5.46) предполагает достаточно точное знание ряда конструктивных и других характеристик ракеты, а именно:

- законов изменения тяги P , секундного расхода \dot{m} и положения центра масс $x_{ц.м}$ в полете;

- аэродинамических характеристик $c_x, c_{y_1}, x_{ц.д}$ для различных условий полета (M, h, α);

- характеристик органов управления R', Q_0, λ ;

- параметров системы управления, в первую очередь закона изменения угла наклона оси ракеты $\varphi_{пр}$ и коэффициента пропорциональности a_0 между рассогласованием углового положения оси ракеты относительно программного и соответствующим ему средним отклонением управляющего органа;

- географической широты точки старта φ_T и азимута прицеливания ψ .

Все перечисленные характеристики обычно хорошо известны лишь к моменту летных испытаний, но на начальных этапах проектирования точность их знания невелика, а некоторые характеристики, например a_0, φ_T, ψ , просто еще неизвестны.

Определение ряда характеристик ЛА возможно только после предварительного расчета траекторий. Таким образом, процесс уточнения траектории и нужных для ее расчета характеристик ракеты является процессом итерационным, основанным на постепенном взаимном уточнении. Исходя из этого, необходимо стремиться на этих этапах к расчету неких средних, опорных траекторий, которые могли бы быть положены в основу всех других проектных работ. В этих условиях естественно отказаться от учета влияния вращения Земли, т.е. принять $\omega_3 = 0$. Рассматривая третье уравнение системы (5.46) без последнего члена при начальных условиях ($t = 0$) $\xi = \sigma = 0$, приходим к заключению о тождественном равенстве нулю угла отклонения вектора скорости относительно начальной вертикальной плоскости, т.е. $\sigma \equiv 0$. Следовательно, для данного частного случая нет необхо-

димости рассматривать уравнения для определения σ и z , так как движение происходит в постоянной вертикальной плоскости Oxy , угол α_z обращается в нуль, а полный угол атаки α совпадает с углом α_y в вертикальной плоскости.

Во втором уравнении системы (5.46) член $2\omega_3 v \cos \varphi_T \sin \psi$ также не учитывается.

В условиях неопределенности относительно параметров будущей системы управления (в частности, при неизвестном значении коэффициента a_0) есть смысл считать управление по углу тангажа идеальным. Это означает, что рассогласование $\Delta\varphi$ отсутствует, т.е. $\Delta\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_{\text{пр}}$, $\alpha = \varphi - \theta = \varphi_{\text{пр}} - \theta$.

Теперь система (5.46) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} (P - X_{1p} - c_x q S) - g \sin \theta - \frac{x}{r} g \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{v} \left[\frac{\varphi_{\text{пр}} - \theta}{m} \left(P - X_{1p} + \frac{l_1 - x_{\text{ц.д}}}{l_1 - x_{\text{ц.м}}} c'_{y_1} q S \right) - g \left(\cos \theta + \frac{x}{r} \sin \theta \right) \right], \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta.$$

Этой системой и надо пользоваться при проведении проектных расчетов. Следует только иметь в виду, что зависимость $\varphi_{\text{пр}}(t)$ должна быть задана, в противном случае интегрирование невозможно. Как задается эта зависимость — мы узнаем из главы 18, а сейчас обратим внимание на одно обстоятельство.

Мы положили $\Delta\varphi = 0$. В этом случае на основании уравнения управления (5.25) или (5.27) можно прийти к неверному заключению, что равны нулю также и углы отклонения рулей 2 и 4, так как

$$\delta_2 = \delta_4 = a_0 \Delta\varphi.$$

Но рули должны отклоняться, ибо в противном случае не будет создаваться момент относительно центра масс, парирующий момент от аэродинамических сил при наличии угла атаки, т.е. будет нарушаться уравнение равновесия моментов (5.24). Для преодоления возникшего противоречия достаточно принять $a_0 = \infty$. Тогда в соотношениях (5.41) коэффициент

$$A = \frac{2a_0 R'(l_1 - x_{\text{ц.м}})}{2a_0 R'(l_1 - x_{\text{ц.м}}) + c'_{y_1} q S (x_{\text{ц.д}} - x_{\text{ц.м}})} \xrightarrow{a_0 \rightarrow \infty} 1$$

и из (5.41) следует

$$\alpha_y = \varphi - \theta = \varphi_{\text{пр}} - \theta, \quad \varphi = \varphi_{\text{пр}} + \Delta\varphi = \varphi_{\text{пр}}, \quad \Delta\varphi = -(1-A)(\varphi_{\text{пр}} - \theta) = 0.$$

Для определения углов отклонения рулей используется уравнение равновесия моментов (5.24), откуда следует, что

$$\delta_2 = \delta_4 = - \frac{c'_{y_1} q S \alpha_y (x_{\text{ц.д}} - x_{\text{ц.м}})}{2R'(l_1 - x_{\text{ц.м}})}$$

или, учитывая равенства $\alpha_y = \alpha = \varphi_{\text{пр}} - \theta$,

$$\delta_2 = \delta_4 = - \frac{c'_{y_1} q S(x_{\text{ц.д}} - x_{\text{ц.м}})}{2R'(l_1 - x_{\text{ц.м}})} (\varphi_{\text{пр}} - \theta).$$

Система (5.47) удовлетворяет всем основным требованиям, предъявляемым к баллистическим расчетам на стадии эскизного или технического проектирования, и поэтому является одной из наиболее употребительных.

На пути упрощения уравнений движения возможны еще некоторые шаги. Дело в том, что на самой ранней стадии проектирования такие характеристики носителя, как c'_{y_1} , $x_{\text{ц.м}}$ и $x_{\text{ц.д}}$ либо совсем неизвестны, либо

известны весьма приблизительно. В этих условиях обычно принимают $\frac{l_1 - x_{\text{ц.д}}}{l_1 - x_{\text{ц.м}}} = 1$, что равносильно пренебрежению подъемной силой, созда-

ваемой органами управления. Далее, поскольку системой (5.47) пользуются при более или менее значительном влиянии атмосферы, т.е. на начальной части траектории выведения, и координата x еще не достигает больших значений, то членами, содержащими множитель $(x/r)g$, допустимо пренебречь. Кроме того, целесообразно силу тяги P и среднюю потерю тяги на управление X_{1p} объединить и под P понимать суммарную величину. Тогда вместо (5.47) можно написать следующую систему:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{v} \left[\frac{\alpha}{m} (P + c'_{y_1} q S) - g \cos \theta \right], \quad (5.48)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta.$$

На практике встречаются случаи расчета, когда форма траектории, т.е. зависимость угла θ наклона касательной к траектории от времени полета, задана. Например, на каком-то участке траектории требуется осуществить движение по прямой, наклоненной к начальному горизонту под постоянным углом θ . При решении подобной задачи надобность в интегрировании второго уравнения системы (5.47) или (5.48) отпадает. Остальные три уравнения интегрируются совместно для определения v , x и y . Вторые уравнения в этих системах используются для определения угла атаки, потребного для реализации заданного угла θ . В зависимости от того, какую из систем [(5.47) или (5.48)] мы используем, можно написать

$$\varphi - \theta = \alpha = \frac{m \left(v \frac{d\theta}{dt} + g \cos \theta - \frac{x}{r} g \sin \theta \right)}{P - X_{1p} + \frac{l_1 - x_{\text{ц.д}}}{l_1 - x_{\text{ц.м}}} c'_{y_1} q S}$$

или

$$\alpha = \frac{m \left(v \frac{d\theta}{dt} + g \cos \theta \right)}{P + c_{y1}' q S} \quad (5.49)$$

В этих выражениях производная $d\theta/dt$ считается известной функцией времени, так как зависимость $\theta = f(t)$ задана. Требуемый закон изменения угла тангажа, позволяющий получить траекторию заданной формы, определяется из известного равенства

$$\varphi = \theta + \alpha.$$

Если задача решается при условии $\theta = \text{const}$, то в (5.49) $d\theta/dt = 0$.

После исключения из (5.47) и (5.48) уравнений, описывающих изменение угла наклона касательной, получаем соответственно

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} (P - X_{1p} - c_x q S) - g \sin \theta - \frac{x}{r} g \cos \theta, \\ \frac{dx}{dt} &= v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta \end{aligned} \quad (5.50)$$

или

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta, \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \theta.$$

Последние системы, как наиболее простые, можно применять на первом этапе проектирования, когда нужно получить лишь начальные представления о траектории, а также для проведения предварительных расчетов по оптимизации основных проектно-баллистических параметров и в некоторых других случаях, не требующих большой точности.

5.3.2. Упрощение уравнений движения на участке свободного полета.

Для расчета свободного участка траектории были в общем виде получены уравнения (5.22). Чтобы их записать в виде, удобном для проведения расчетов, необходимо прежде всего расшифровать составляющие переносного и кориолисова ускорений и перенести их в правые части уравнений.

Переносное ускорение в центральной стартовой системе координат было определено формулой (2.21). При использовании нецентральной стартовой системы формула (2.21) остается справедливой, если в ней геоцентрическую широту $\varphi_{ГЦ}$ заменить на географическую φ_r , а расстояние от ЛА до центра Земли вычислять с учетом координат центра Земли x_c, y_c, z_c относительно стартовой системы, т.е. в формуле (2.21) заменить с использованием формул (5.1)–(5.3) x на $(x - x_c)$, $(R_3 + y)$ на $(y - y_c)$, z на $(z - z_c)$. Тогда формула (2.21) после некоторых преобразований приведет к виду

$$\begin{aligned} w_e &= \omega_3^2 \left\{ \left[r_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} - (x - x_c) \right] x^0 + \right. \\ &\left. + \left[r_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} - (y - y_c) \right] y^0 + \left[r_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} - (z - z_c) \right] z^0 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь через r_ω обозначена проекция вектора \mathbf{r} на направление оси вращения Земли:

$$r_\omega = \frac{(x - x_c) \omega_{3x} + (y - y_c) \omega_{3y} + (z - z_c) \omega_{3z}}{\omega_3}.$$

Кориолисово ускорение задавалось формулой (2.22), которая после замены $\varphi_{\text{гц}}$ на φ_r запишется так:

$$\mathbf{w}_c = 2\omega_3 \{ (\dot{y} \cos \varphi_r \sin \psi + \dot{z} \sin \varphi_r) \mathbf{x}^0 + (-\dot{x} \cos \varphi_r \sin \psi - \dot{z} \cos \varphi_r \cos \psi) \mathbf{y}^0 + (-\dot{x} \sin \varphi_r + \dot{y} \cos \varphi_r \cos \psi) \mathbf{z}^0 \}.$$

Теперь первые три уравнения системы (5.22) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\frac{c_x q S \cos \theta}{m} - g'_r \frac{x - x_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} - \omega_3^2 \left[r_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} - (x - x_c) \right] - \\ & - 2\omega_3 (\dot{y} \cos \varphi_r \sin \psi + \dot{z} \sin \varphi_r), \\ \ddot{y} = & -\frac{c_x q S \sin \theta}{m} - g'_r \frac{y - y_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} - \\ & - \omega_3^2 \left[r_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} - (y - y_c) \right] - 2\omega_3 (-\dot{x} \cos \varphi_r \sin \psi - \dot{z} \cos \varphi_r \cos \psi), \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z} = & -\frac{c_x q S \sigma}{m} - g'_r \frac{z - z_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} - \\ & - \omega_3^2 \left[r_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} - (z - z_c) \right] - 2\omega_3 (-\dot{x} \sin \varphi_r + \dot{y} \cos \varphi_r \cos \psi). \end{aligned}$$

Если в (5.51) подставить выражение для r_ω и учесть формулы (5.5) для проекций угловой скорости вращения Земли, можно уравнения (5.51) записать в таком компактном и удобном для расчетов виде:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} = & -\frac{1}{m} c_x q S \cos \theta - g'_r \frac{x - x_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3x}}{\omega_3} + a_{11}(x - x_c) + \\ & + a_{12}(y - y_c) + a_{13}(z - z_c) + b_{12}v_y + b_{13}v_z, \\ \frac{dv_y}{dt} = & -\frac{1}{m} c_x q S \sin \theta - g'_r \frac{y - y_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3y}}{\omega_3} + a_{21}(x - x_c) + \\ & + a_{22}(y - y_c) + a_{23}(z - z_c) + b_{21}v_x + b_{23}v_z, \\ \frac{dv_z}{dt} = & -\frac{1}{m} c_x q S \sigma - g'_r \frac{z - z_c}{r} - g_\omega \frac{\omega_{3z}}{\omega_3} + a_{31}(x - x_c) + \\ & + a_{32}(y - y_c) + a_{33}(z - z_c) + b_{31}v_x + b_{32}v_y, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где для постоянных коэффициентов приняты обозначения

$$\begin{aligned} a_{11} &= \omega_3^2 - \omega_{3x}^2, & a_{23} &= a_{32} = -\omega_{3y}\omega_{3z}, & b_{23} &= -b_{32} = 2\omega_{3x}, \\ a_{22} &= \omega_3^2 - \omega_{3y}^2, & a_{31} &= a_{13} = -\omega_{3z}\omega_{3x}, & b_{31} &= -b_{13} = 2\omega_{3y}, \\ a_{33} &= \omega_3^2 - \omega_{3z}^2, & a_{12} &= a_{21} = -\omega_{3x}\omega_{3y}, & b_{12} &= -b_{21} = 2\omega_{3z}. \end{aligned}$$

Дополняя систему (5.52) уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z, \quad (5.53)$$

получаем полную систему рабочих уравнений для расчета свободного участка траектории. Для определения углов θ и σ имеем соотношения (5.23), а для определения ω_{3x} , ω_{3y} , ω_{3z} , g_r' , g_ω — формулы (4.6), (4.7) и (5.5).

Расчет высоты над поверхностью Земли можно вести по формуле $h = r - r_0$.

После того как траектория рассчитана до поверхности Земли ($h = 0$), по координатам точек старта и падения определяются полная дальность полета и азимут линии, соединяющей эти две точки. Такой расчет проводится с помощью специальных геодезических таблиц. Для не очень точных расчетов можно рекомендовать следующие формулы:

— для центрального угла, соединяющего начальную и конечную точки,

$$\cos \beta = \frac{(x_0 - x_c)(x_{\text{п}} - x_c) + (y_0 - y_c)(y_{\text{п}} - y_c) + (z_0 - z_c)(z_{\text{п}} - z_c)}{r_0 r_{\text{п}}},$$

— для полной дальности полета

$$L = \frac{r_0 + r_{\text{п}}}{2} \beta,$$

— для углового отклонения точки падения от плоскости прицеливания

$$\text{tg } \Delta\psi_{\text{п}} = \frac{z_{\text{п}}}{x_{\text{п}}},$$

где индексы "0" и "п" относятся к точкам старта и падения соответственно.

Приступим теперь к последовательным упрощениям уравнений движения на свободном участке траектории, пользуясь тем же общим принципом, который применяли ранее при упрощении уравнений движения на активном участке.

Прежде всего отметим, что точность расчета участка свободного полета имеет гораздо большее значение, чем точность расчета активного участка. Дело в том, что любые отклонения параметров движения на активном участке траектории, которые вызываются отклонениями действующих сил и моментов от их расчетных значений или неточностью знания и задания этих сил и моментов при расчете траектории, измеряются системой управления и компенсируются ею для организации движения в соответствии с программой. Система управления, если она не корректирует движение на активном участке, как минимум решает задачу о сопоставлении текущего состояния движения с заданным конечным состоянием и на этой основе вырабатывает команду на выключение двигателя. Но для этого необходи-

мо, чтобы имелось точное расчетное соответствие между параметрами движения в момент выключения двигателя и координатами точки падения. Это соответствие достигается только с помощью точного расчета траектории на участке свободного полета, так как погрешности подобного расчета никак не могут быть компенсированы работой системы управления. Следовательно, точность расчета участка свободного полета должна быть гораздо выше, чем точность расчета активного участка. К счастью, мы располагаем для точного расчета свободного участка большими возможностями, так как на большей части траектории единственной силой, под действием которой протекает полет, является сила тяжести, известная с высокой точностью.

Так, принимая для радиальной и меридиональной составляющих ускорения формулы (4.4), мы будем иметь ошибку, не превосходящую $0,00004 \text{ м/с}^2$ или $0,0004\%$ от g . Это очень высокая точность. Рассчитывать на такую же точность при определении аэродинамических сил не приходится, так как последние в лучшем случае имеют погрешность несколько процентов и при движении ЛА в плотных слоях атмосферы значительно превосходят силу тяжести. Как же быть?

Возникшее затруднение почти полностью устраняется благодаря двум обстоятельствам.

Во-первых, большая часть траектории проходит, как правило, в столь разреженных слоях атмосферы, что будь коэффициент аэродинамического сопротивления ЛА даже на порядок выше, чем обычно, это не оказало бы практически никакого влияния на движение.

Во-вторых, на конечном участке траектории даже значительные ошибки в коэффициенте аэродинамического сопротивления уже не в состоянии повлиять на форму траектории так, чтобы это могло изменить координаты точки падения, хотя влияние этих ошибок на ход изменения ускорения, а следовательно, и скорости может оказаться весьма заметным. Поэтому при расчете так называемой *падающей* траектории основное внимание обращается на точный расчет именно ускорения силы тяжести. Всем условиям такого точного расчета участка свободного полета соответствует система (5.52).

Первое упрощение, которое напрашивается в этой системе уравнений, связано с представлением силы притяжения в виде центральной силы. Для этого меридиональной составляющей ускорения силы земного притяжения g_m нужно пренебречь, а в радиальной составляющей g_r сохранить только первый член. Получим

$$g_m = g_\omega = 0, \quad g_r = g'_r = g = - \frac{\mu}{r^2}. \quad (5.54)$$

Простые оценки показывают, что если принять $r = R + h$, где $R \approx 6371 \text{ км}$ — средний радиус Земли, а h — фактическая высота над поверхностью Земли, то погрешность в определении величины g не будет превосходить $0,01 \text{ м/с}^2$.

Если же в этой формуле под r понимать истинное расстояние точки от центра Земли, то погрешность будет доходить до $0,03 \text{ м/с}^2$.

Таким образом, будем считать, что расчет свободного участка полета под действием только центральной силы, описываемой законом всемирного тяготения Ньютона, можно проводить с допустимой погрешностью в

определении правых частей уравнений до $0,01 \text{ м/с}^2$, и тогда мы имеем право пренебрегать в них членами, меньшими этой величины.

Перепишем уравнения (5.52) при условиях (5.54), положив $x_c = 0$, $y_c = -R$, $z_c = 0$:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{m} c_x q S \cos \theta - g \frac{x}{r} + a_{11}x + a_{12}(R+y) + a_{13}z + b_{12}v_y + b_{13}v_z,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{m} c_x q S \sin \theta - g \frac{R+y}{r} + a_{12}x + a_{22}(R+y) + a_{23}z + b_{21}v_x + b_{23}v_z, \quad (5.55)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{m} c_x q S \sigma - g \frac{z}{r} + a_{31}x + a_{32}(R+y) + a_{33}z + b_{31}v_x + b_{32}v_y.$$

Какими же членами и при каких условиях можно пренебречь? Поскольку значения коэффициентов a_{ik} не превосходят ω_3^2 , членами вида $a_{11}x$ и $a_{13}z$ можно пренебрегать при $|x|$ или $|z| < \frac{0,01}{\omega_3^2} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ м} = 2000 \text{ км}$.

Членами с коэффициентами b_{ik} можно пренебрегать, если абсолютная величина соответствующей составляющей скорости при этих коэффициентах не превосходит

$$\frac{0,01}{\max |b_{ik}|} = \frac{0,01}{2\omega_3} \approx 70 \text{ м/с}.$$

Этому условию для баллистических ракет может удовлетворять только составляющая скорости v_z .

В члене $g(x/r)$ можно заменить r на R , если

$$g \left| \frac{x}{r} - \frac{x}{R} \right| = \frac{g |xh|}{rR} \leq 0,01 \text{ м/с}^2,$$

т.е. при $|xh| < 0,01 Rr/g$ и тем более при

$$|xh| < \frac{0,01 R^2}{g} \approx 40\,000 \text{ км}^2,$$

что имеет место на всей траектории для дальности полета примерно до 500 км.

Аналогично можно считать, что

$$g \frac{z}{r} = g \frac{z}{R}$$

при $|zh| < 40\,000 \text{ км}^2$.

Во всех членах можно заменять r на $R+y$, если $\frac{R+y}{r} > 0,999$ (исходя из точности 0,1%), а это выполняется, если $(R+y)^2 > 0,998r^2$, $x^2 < 0,002r^2$, $x < 0,045r$ и тем более если $x < 0,045R \approx 280 \text{ км}$.

Возможно, а в некоторых случаях даже неизбежно еще одно упрощение, а именно пренебрежение вращением Земли, чем мы пользуемся в слу-

чаях неопределенности координат старта и цели, т.е. при проведении расчетов проектного характера для определения некоторых средних характеристик ЛА.

Уравнения (5.55) в этом случае выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{m} c_x q S \cos \theta - g \frac{x}{r}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{m} c_x q S \sin \theta - g \frac{R+y}{r}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Третье уравнение исключено, так как оно при начальных условиях $z = 0$, $\sigma = 0$ при $t = 0$ имеет тривиальное нулевое решение вдоль всей траектории. В самом деле, при $\omega_3 = 0$ отсутствуют причины, заставляющие ЛА отклоняться от начальной плоскости Oxy .

В уравнениях (5.56) удобно преобразовать члены, учитывающие сопротивление атмосферы, следующим образом [используя уравнения (5.23)]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} c_x q S \cos \theta &= c_x \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho_0 S}{2m} v^2 \cos \theta = k c_x \frac{\rho}{\rho_0} v v_x, \\ \frac{1}{m} c_x q S \sin \theta &= c_x \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\rho_0 S}{2m} v^2 \sin \theta = k c_x \frac{\rho}{\rho_0} v v_y, \end{aligned}$$

где $k = \rho_0 S / 2m$. Теперь будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -k c_x \frac{\rho}{\rho_0} v v_x - g \frac{x}{r}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -k c_x \frac{\rho}{\rho_0} v v_y - g \frac{R+y}{r}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Заканчивая изложение вопроса об уравнениях движения, покажем, как можно осуществить переход к полярной системе координат, которая в некоторых случаях оказывается более предпочтительной. Обратим внимание, что мы придем к тем же уравнениям, которые в классическом изложении теории кеплеровых движений или теории полета в поле одной центральной силы получаются с помощью иных приемов. Полагаем, что сопоставление вывода, который будет дан в главе 9, с излагаемым ниже, будет полезным.

Обозначим центральный угол, образованный лучами, проведенными из центра Земли в точку старта O и в точку M текущего положения ЛА, через χ (рис. 5.2). Тогда можно написать

$$x = r \sin \chi, \quad R + y = r \cos \chi. \quad (5.58)$$

Дифференцируя эти соотношения, найдем

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \chi + r \dot{\chi} \cos \chi, \quad \dot{y} = \dot{r} \cos \chi - r \dot{\chi} \sin \chi; \quad (5.59)$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \sin \chi + 2\dot{r}\dot{\chi} \cos \chi - r\dot{\chi}^2 \sin \chi + r\ddot{\chi} \cos \chi,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \cos \chi - 2\dot{r}\dot{\chi} \sin \chi - r\dot{\chi}^2 \cos \chi - r\ddot{\chi} \sin \chi. \quad (5.60)$$

Из уравнений (5.58) – (5.60) вытекают следующие соотношения:

$$x \sin \chi + (R + y) \cos \chi = r, \quad x \cos \chi - (R + y) \sin \chi = 0; \quad (5.61)$$

$$\dot{x} \sin \chi + \dot{y} \cos \chi = \dot{r}, \quad \dot{x} \cos \chi - \dot{y} \sin \chi = r\dot{\chi}; \quad (5.62)$$

$$\ddot{x} \sin \chi + \ddot{y} \cos \chi = \ddot{r} - r\dot{\chi}^2, \quad \ddot{x} \cos \chi - \ddot{y} \sin \chi = 2\dot{r}\dot{\chi} + r\ddot{\chi}. \quad (5.63)$$

Подставим в эти соотношения \dot{x} и \dot{y} из уравнений (5.57) и, пользуясь

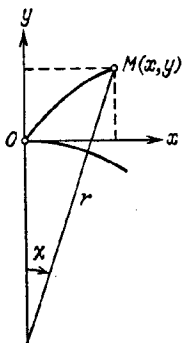


Рис. 5.2. Переход к полярной системе координат

соотношениями (5.58), (5.61) и (5.62), получим уравнения движения в полярных координатах

$$\ddot{r} - r\dot{\chi}^2 = -kc_x \frac{\rho}{\rho_0} v\dot{r} - g, \quad (5.64)$$

$$r\ddot{\chi} + 2\dot{r}\dot{\chi} = -kc_x \frac{\rho}{\rho_0} v r \dot{\chi}.$$

Скорость v на основании (5.62) выражается через r и χ так:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\chi})^2.$$

Высота h и дальность полета по дуге земной поверхности даются выражениями $h = r - R$, $l = R\chi$. Наконец, если высота полета настолько велика, что сопротивлением атмосферы можно пренебречь, система (5.64) приобретает вид

$$\ddot{r} - r\dot{\chi}^2 = -g, \quad r\ddot{\chi} + 2\dot{r}\dot{\chi} = 0$$

или с учетом (5.54)

$$\ddot{r} - r\dot{\chi}^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\chi}) = 0. \quad (5.65)$$

Второе уравнение (5.65) написано на основании равенства

$$r(r\ddot{\chi} + 2\dot{r}\dot{\chi}) = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\chi}).$$

Система (5.65) описывает движение ЛА под действием только силы тяготения и легко интегрируется. Подробному анализу подобного типа движения посвящена глава 9.

ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С РАБОТАЮЩИМ ДВИГАТЕЛЕМ

Решение многих практических задач может опираться на результаты, полученные с помощью простейших представлений об изучаемом процессе. Это отнесится в немалой степени к проектным расчетам, когда неучет ряда тонких моментов не оказывает влияния на принятие принципиальных решений. Кроме того, изучение любого процесса чаще всего начинается с простых моделей, в которых стремятся отобразить наиболее существенное для данного процесса, и только по мере углубления в особенности изучаемого явления модель все более и более усложняется. Проследившая развитие теории ракетного движения, можно констатировать такой же переход от простых представлений к сложным. Несмотря на то, что мы начали изучение движения на активном участке с довольно полных моделей, описывая ракету как тело, состоящее из совокупности материальных точек, полезно вернуться к истокам этого вопроса. Это даст возможность провести некоторые интересные сопоставления и на примере утвердиться в мнении о безусловной целесообразности исследований на упрощенных моделях, если в них отражена главная сущность процесса.

Рассмотрим сначала подход к составлению уравнений движения, предложенный И.В. Мещерским. Затем проинтегрируем эти уравнения для двух частных случаев движения: отсутствия внешних сил и вертикального движения при постоянной внешней силе.

§ 6.1. Уравнение Мещерского

Первая работа И.В. Мещерского на обсуждаемую тему появилась в 1893 г., а обобщенные результаты получены им в 1904 г. Общая модель точки переменной массы допускала присоединение и отбрасывание частиц, так что масса точки в текущий момент времени могла быть или больше, или меньше начальной. Процесс присоединения или отбрасывания частиц предполагался происходящим в виде мгновенного контакта частицы с материальной точкой, при котором происходило изменение количества движения точки.

Массу точки в момент времени t примем равной m . Пусть за время dt она изменится на величину

$$dm = dm_1 - dm_2,$$

где dm_1 — элементарная масса присоединившихся частиц; dm_2 — элементарная масса отделившихся частиц.

Скорости материальной точки в моменты времени t и $t + dt$ обозначим соответственно через v и $v + dv$. Абсолютную скорость частицы dm_1 в момент времени t непосредственно перед ее присоединением обозначим через w_1 , а абсолютную скорость частицы dm_2 сразу же после ее отделения от точки — через w_2 . При этих условиях количество движения точки будет для момента t

$$K = mv, \tag{6.1}$$

для момента $t + dt$

$$\mathbf{K} + d\mathbf{K} = (m + dm_1 - dm_2)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}). \quad (6.2)$$

Изменение количества движения за время dt найдем, вычитая (6.1) из (6.2) и пренебрегая бесконечно малыми второго порядка:

$$d\mathbf{K} = m d\mathbf{v} + (dm_1 - dm_2)\mathbf{v}. \quad (6.3)$$

Количество движения точки изменилось, во-первых, из-за сообщения ей дополнительного количества движения $w_1 dm_1$ присоединившейся элементарной массой dm_1 , а во-вторых, из-за уноса количества движения $w_2 dm_2$ частицей dm_2 . Кроме того, в общем случае на материальную точку может действовать в течение времени dt внешняя сила \mathbf{F} , в результате чего произойдет дополнительное изменение количества движения на величину $\mathbf{F} dt$.

Суммируя эти эффекты, можно написать

$$d\mathbf{K} = w_1 dm_1 - w_2 dm_2 + \mathbf{F} dt. \quad (6.4)$$

Приравняв (6.3) и (6.4), получаем

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + (w_1 - \mathbf{v}) \frac{dm_1}{dt} - (w_2 - \mathbf{v}) \frac{dm_2}{dt}. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) и называется *основным уравнением Мещерского*. Сравнивая его, как мы делали в главе 3, с уравнением Ньютона, обнаруживаем, что, кроме внешней силы, на материальную точку действуют дополнительные силы $(w_1 - \mathbf{v}) \frac{dm_1}{dt}$ и $-(w_2 - \mathbf{v}) \frac{dm_2}{dt}$, которые являются следствием процесса изменения ее массы в результате присоединения или отброса частиц.

Векторы $w_1 - \mathbf{v}$ и $w_2 - \mathbf{v}$ представляют собой относительные скорости присоединяющихся или отделяющихся частиц, поэтому их удобно обозначить

$$\mathbf{u}_1 = w_1 - \mathbf{v}, \quad \mathbf{u}_2 = w_2 - \mathbf{v} \quad (6.6)$$

и уравнение (6.5) записать в следующем виде:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u}_1 \frac{dm_1}{dt} - \mathbf{u}_2 \frac{dm_2}{dt}. \quad (6.7)$$

Заметим, что здесь dm_1/dt и dm_2/dt являются величинами положительными, так как относятся к присоединяющимся или отбрасываемым частицам и характеризуют интенсивность процесса.

Скорость изменения массы точки будет

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_1}{dt} - \frac{dm_2}{dt}. \quad (6.8)$$

Сила $\mathbf{u}_1 \frac{dm_1}{dt}$, как видно из (6.7), создает ускорение, совпадающее по направлению с направлением относительной скорости \mathbf{u}_1 присоединяющих-

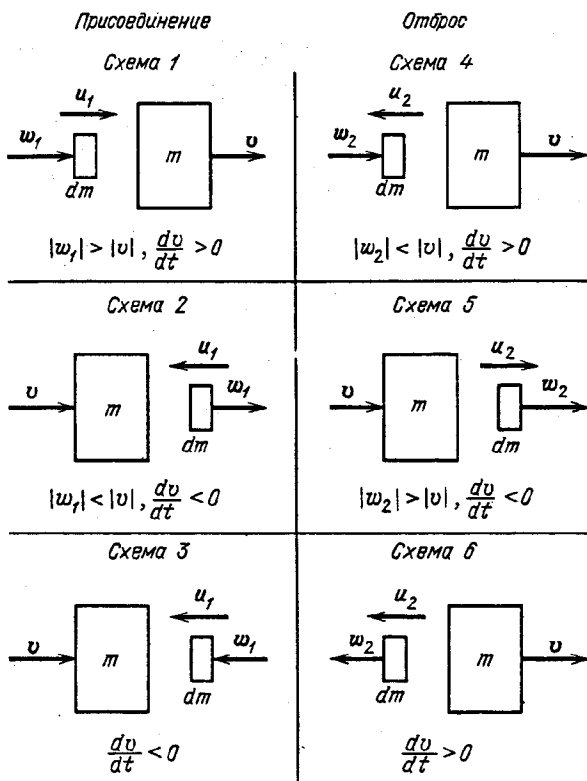


Рис. 6.1. Схемы присоединения и отбрасывания частиц

ся частиц. Сила $-u_2 \frac{dm_2}{dt}$ сообщает ускорение, по направлению противоположное относительной скорости u_2 отбрасываемых частиц.

В зависимости от соотношений между величинами w_1 и v и w_2 и v можно представить себе различные случаи воздействия процесса изменения массы на движение точки. Рассмотрим эти случаи на примерах, в которых для наглядности векторы v , w_1 и w_2 будем считать коллинеарными.

На рис. 6.1 показаны схемы присоединения и отбрасывания масс с изображением направления относительной скорости u_1 и знака, сообщаемого точке ускорения.

Случай, иллюстрируемый схемой 1, в практике реактивного движения не встречается и поэтому интереса не представляет. Схемы 2 и 3 встречаются при использовании летательным аппаратом воздуха, поступающего извне, причем чаще всего абсолютная скорость w_1 поступающей массы равна нулю.

Наибольший интерес представляют случаи, изображенные на схемах 4 и 6, как классические случаи использования эффекта отброса массы для разгона летательного аппарата. Между этими двумя схемами принципиаль-

ного различия нет: схема 6 реализуется, когда скорость ЛА v остается меньше скорости истечения продуктов сгорания u_2 , т.е. на начальной стадии полета, а схема 4 — когда скорость ЛА v превосходит скорость истечения u_2 . Со схемой 5 мы встречаемся при торможении полета ЛА с помощью ракетных двигателей в различного рода задачах, связанных с маневрированием на орбите, обеспечением процессов отделения частей ЛА друг от друга и т.п.

Напишем уравнение Мещерского для наиболее типичного случая реактивного движения, когда присоединения частиц не происходит:

$$m \frac{dv}{dt} = F - u_2 \frac{dm_2}{dt}.$$

Поскольку в этом случае на основании (6.8)

$$\frac{dm_2}{dt} = - \frac{dm}{dt},$$

то будем иметь

$$m \frac{dv}{dt} = F + u_2 \frac{dm}{dt}$$

или

$$m \frac{dv}{dt} = F - \dot{m}u, \quad (6.9)$$

если через \dot{m} обозначить, как и прежде, абсолютную величину секундного расхода массы ЛА, а u_2 заменить на u .

Уравнение движения (6.9) отличается от уравнения движения (3.18)

$$m \frac{dv}{dt} = F - \dot{m}u - 2\dot{m}\dot{b} - \ddot{m}b,$$

полученного для тела переменной массы, отсутствием в нем малых членов $-2\dot{m}\dot{b} - \ddot{m}b$. При условии пренебрежения этими членами уравнение движения ЛА совпадает с уравнением Мещерского. Отсутствие же в уравнении Мещерского членов, зависящих от \dot{b} и \ddot{b} , вполне естественно, так как оно описывает движение не центра масс тела, а движение точки переменной массы.

Таким образом, можно сделать вывод, что при исследовании движения центра масс ЛА в большинстве случаев можно пользоваться уравнением Мещерского.

§ 6.2. Простейшие случаи интегрирования уравнений движения

В общем виде уравнение (6.9) интегрируется с помощью численных методов, однако имеется ряд частных случаев, в которых решение можно получить в квадратурах или даже в виде простых аналитических функций. Из таких простых случаев, имеющих, однако, и практическое приложение, мы рассмотрим так называемые задачи Циолковского.

6.2.1. Первая задача Циолковского. В уравнении (6.9) пренебрежем внешней силой F . Это будет означать, что движение происходит в условиях

отсутствия гравитационных сил и вне атмосферы. Для этого случая уравнение (6.9) запишется так:

$$m \frac{dv}{dt} = - \dot{m} u. \quad (6.10)$$

Если далее предположить, что точка движется по прямой, а скорость истечения постоянна по величине и направлена по той же прямой, то получим

$$m \frac{dv}{dt} = \dot{m} u$$

или

$$m \frac{dv}{dt} = - u \frac{dm}{dt}.$$

После разделения переменных получим

$$dv = - u \frac{dm}{m}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать, назначив пределы интегрирования от v_0 до v и от m_0 до m :

$$v - v_0 = - u \ln \frac{m}{m_0}. \quad (6.11)$$

Скорость в конце работы двигателя v_k получим, если в (6.11) вместо текущей массы m подставить конечную массу m_k :

$$v_k = v_0 - u \ln \frac{m_k}{m_0} \quad (6.12)$$

или

$$v_k = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m_k}. \quad (6.13)$$

Заметим, что в (6.12) под знаком логарифма находится правильная дробь и логарифм имеет отрицательное значение, в (6.13) этот логарифм положительный.

Полученные формулы и носят имя К.Э. Циолковского, который опубликовал их в 1903 г.

Иногда эти формулы записывают, вводя в них количество израсходованного топлива m_T . В этом случае, поскольку

$$m_k = m_0 - m_T,$$

получаем

$$v_k = v_0 - u \ln \left(1 - \frac{m_T}{m_0} \right). \quad (6.14)$$

Часто встречается и другая запись:

$$v_k = v_0 + u \ln \left(1 + \frac{m_T}{m_k} \right). \quad (6.15)$$

Полученные формулы не содержат времени, в течение которого расходуется топливо, не содержат они также меры интенсивности расхода топлива — так называемого секундного расхода. Следовательно, скорость не зависит и от тяги. Из формул (6.12) и (6.13) следует, что скорость в условиях задачи Циолковского зависит только от скорости истечения и отношения конечной и начальной масс. Последнее принято называть *относительной конечной массой* и обозначить

$$\mu_K = m_K/m_0. \quad (6.16)$$

Текущее значение относительной массы обозначается

$$\mu = m/m_0. \quad (6.17)$$

При этом формулы (6.11) и (6.12) запишутся следующим образом:

$$v = v_0 - u \ln \mu, \quad (6.18)$$

$$v_K = v_0 - u \ln \mu_K, \quad (6.19)$$

а при отсутствии начальной скорости

$$v = -u \ln \mu, \quad (6.20)$$

$$v_K = -u \ln \mu_K. \quad (6.21)$$

Еще раз обратим внимание на то обстоятельство, что закон расхода топлива, так же как и абсолютные значения начальной и конечной масс, не оказывает влияния на приобретенную скорость, а играет роль только отношение этих масс.

Отношение текущей скорости v к скорости истечения u определяется только значением μ и не зависит от других характеристик ЛА:

$$v/u = -\ln \mu. \quad (6.22)$$

В частности, при значении $\mu = \frac{1}{e} \approx 0,368$ скорость ЛА всегда равна скорости истечения.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению основных свойств движения в условиях задачи Циолковского, необходимо сделать одно существенное замечание. При выводе формулы (6.11) было принято допущение об отсутствии внешней силы. С другой стороны, ранее было показано, что в безвоздушном пространстве на ЛА действует, кроме реактивной силы $P = \dot{m}u$, статическая тяга, равная $S_a p_a$, отнесенная нами к внешним силам. В связи с этим было введено понятие эффективной скорости истечения $u' = P_n/\dot{m}$ [см. (3.47)], использование которой вместо истинной скорости истечения позволяет учесть действие статической тяги.

Применяя формулу Циолковского для расчета скорости ЛА в пустоте, всегда надо помнить, что ее формальное использование в случае, если истечение происходит не до нулевого давления газов, приведет к ошибке. Чтобы результат оказался правильным, необходимо в формуле (6.11) использовать не истинную, а эффективную скорость истечения и написать формулу так:

$$v = v_0 - u' \ln \frac{m}{m_0}. \quad (6.23)$$

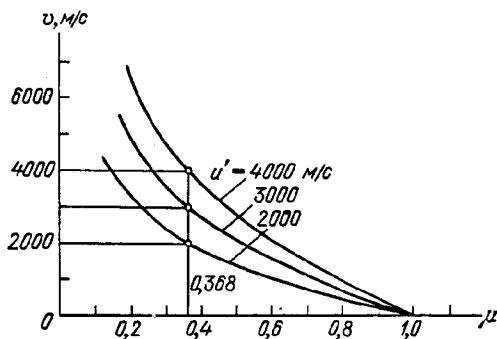


Рис. 6.2. Изменение скорости v в зависимости от μ для различных значений u'

В дальнейшем мы везде будем предполагать, если это не будет оговорено специально, что в формулах Циолковского (6.11)–(6.13) используется именно эффективная скорость истечения. Это же относится и к формулам (6.11)–(6.21). На рис. 6.2 приведены зависимости $v = f(\mu)$ при параметре u' .

Для того чтобы построить зависимость скорости от времени, необходимо установить связь между μ и t . Эта связь может быть определена, если задан закон изменения массы ЛА. Наиболее распространенным и естественным является линейный закон изменения массы ЛА, который получается при постоянной величине ее секундного расхода. Имеем

$$m = m_0 - \dot{m}t, \quad (6.24)$$

$$\mu = \frac{m}{m_0} = 1 - \frac{\dot{m}}{m_0} t,$$

откуда

$$t = \frac{m_0}{\dot{m}} (1 - \mu).$$

Но

$$\dot{m} = P_{\Pi}/u',$$

поэтому

$$t = \frac{m_0 u'}{P_{\Pi}} (1 - \mu). \quad (6.25)$$

Отношение тяги к начальному весу есть *начальная перегрузка* или *начальная тяговооруженность*:

$$n_0 = \frac{P_{\Pi}}{g_0 m_0}.$$

С учетом этого (6.25) можно переписать таким образом:

$$t = \frac{u'}{g_0 n_0} (1 - \mu) \quad (6.26)$$

или

$$\mu = 1 - \frac{g_0 n_0}{u'} t. \quad (6.27)$$

Из (6.26) или (6.27) следует, что для ракет с одинаковыми скоростями истечения равным значениям μ могут соответствовать разные времена работы двигателя: чем больше начальная тяговооруженность, тем меньше время.

На рис. 6.3 дана зависимость $v = f(t)$ для $u' = 3000$ м/с и различных значений начальной тяговооруженности. Равные значения скорости, очевидно, имеют место при равных значениях μ .

Определим длину пути l , пройденного ЛА на активном участке траектории. Для этого, учитывая, что $v = dl/dt$, запишем (6.23) в виде

$$dl = (v_0 - u' \ln \mu) dt \quad (6.28)$$

и проинтегрируем в пределах от l_0 до l и от t_0 до t (или от μ_0 до μ). Из (6.26) имеем

$$dt = - \frac{u'}{g_0 n_0} d\mu. \quad (6.29)$$

Подставляя (6.29) в (6.28) и интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \int_{l_0}^l dl &= - \int_{\mu_0}^{\mu} (v_0 - u' \ln \mu) \frac{u'}{g_0 n_0} d\mu, \\ l - l_0 &= - \frac{u'}{g_0 n_0} [v_0 \mu - u' (\mu \ln \mu - \mu)]_{\mu_0}^{\mu} = \\ &= \frac{u'}{g_0 n_0} [v_0 (\mu_0 - \mu) + u' (\mu \ln \mu - \mu - \mu_0 \ln \mu_0 + \mu_0)]. \end{aligned}$$

Если положить $l_0 = 0$ при $\mu_0 = 1$, то

$$l = \frac{u'}{g_0 n_0} [v_0 (1 - \mu) + u' (1 - \mu + \mu \ln \mu)]. \quad (6.30)$$

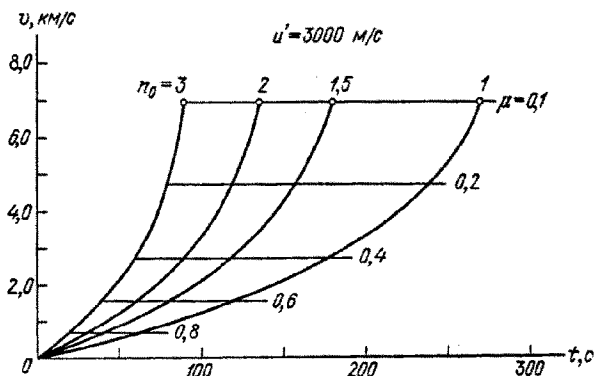
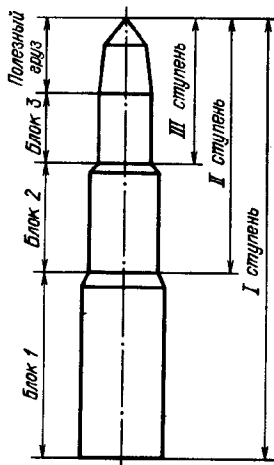


Рис. 6.3. Зависимость скорости v от времени полета t для различных значений начальной тяговооруженности n_0 .

Рис. 6.4. Баллистическая схема трехступенчатой ракеты с поперечным делением (тандем)



Как видим, путь обратно пропорционален тяговооруженности n_0 . В предельном случае мгновенного расхода всего запаса топлива ($t = 0$, $n_0 = \infty$) путь равен нулю, а скорость определяется формулой (6.20).

6.2.2. Формула Циолковского для многоступенчатой ракеты. Одна из плодотворных идей К.Э. Циолковского относится к созданию многоступенчатых ракет, способных за счет избавления от ненужной (балластной) массы освободившихся от топлива баков и других элементов конструкции значительно повысить скорость сравнительно с простой одноступенчатой ракетой. Если полет протекает в условиях задачи Циолковского, то получение расчетной формулы для этого случая трудностей не вызывает, так как оно сводится к суммированию скоростей, приобретенных при полете отдельных ступеней.

На рис. 6.4 приведена схема трехступенчатой ракеты с так называемым поперечным делением (схема "тандем").

Введем следующие обозначения:

μ_i, μ_{ik} — соответственно текущее и конечное значения относительной массы ступени;

u'_i — скорость истечения при полете данной ступени;

v_i, v_{ik} — соответственно текущее значение скорости и конечное значение, приобретенное данной ступенью;

v, v_k — соответственно текущее и конечное значения скорости полета ракеты.

Тогда

$$v_i = -u'_i \ln \mu_i, \quad v_{ik} = -u'_i \ln \mu_{ik}. \quad (6.31)$$

Скорость полета второй ступени складывается из конечной скорости первой ступени и текущей скорости, приобретенной второй ступенью:

$$v = -u'_I \ln \mu_{Ik} - u'_{II} \ln \mu_{II}.$$

Скорость полета третьей ступени складывается из суммы скоростей первой и второй ступеней и текущей скорости, приобретенной третьей ступенью:

$$v = -u'_I \ln \mu_{Ik} - u'_{II} \ln \mu_{IIk} - u'_{III} \ln \mu_{III}$$

и т.д. Конечная скорость ракеты определяется как сумма скоростей, приобретенных всеми N ступенями:

$$v_k = \sum_{i=1}^N -u'_i \ln \mu_{ik}.$$

Если $u'_1 = u'_{II} = \dots = u'$, то

$$v_{\kappa\Sigma} = \sum_{i=1}^N -u' \ln \mu_{i\kappa} = -u' \sum_{i=1}^N \ln \mu_{i\kappa} = -u' \ln \prod_{i=1}^N \mu_{i\kappa}.$$

В подобном случае часто произведение $\prod_{i=1}^N \mu_{i\kappa}$ приравнивают некоторому эквивалентному значению μ_{κ} , которое обозначают через $\mu_{\kappa\Sigma}$ и называют суммарной относительной массой. Тогда можем написать

$$v_{\kappa\Sigma} = -u' \ln \prod_{i=1}^N \mu_{i\kappa} = -u' \ln \mu_{\kappa\Sigma}. \quad (6.32)$$

Суммарная относительная масса $\mu_{\kappa\Sigma}$ — это относительная конечная масса такой гипотетической одноступенчатой ракеты, которая приобретает ту же скорость, что и соответствующая многоступенчатая ракета, при равных скоростях истечения.

Скорость, вычисленная по формуле Циолковского (6.31) или (6.32) для ступеней ракеты или ракеты в целом, является достаточно точной и лаконичной характеристикой конструктивного совершенства ступени ракеты или ракеты в целом. Скорость по Циолковскому можно считать хорошей количественной характеристикой, определяющей возможность решения поставленной задачи на основе сравнения потребных и располагаемых скоростей.

Типичный график набора скорости для многоступенчатой ракеты приведен на рис. 6.5. В осях μ_I, v_I и μ_{II}, v_{II} построены зависимости для каждой ступени в соответствии с первой формулой (6.31), кроме того, в осях μ_{Σ}, v_{Σ} показана зависимость (6.32). Формулы для вычисления пути, пройденного многоступенчатой ракетой, мы здесь приводить не будем, предоставляя это читателю.

В заключение отметим, что формулой Циолковского (6.12) вполне успешно можно пользоваться во многих задачах, связанных с предварительным расчетом орбитальных маневров. При этом скорость ЛА после маневра определяется как геометрическая сумма орбитальной скорости и скорости

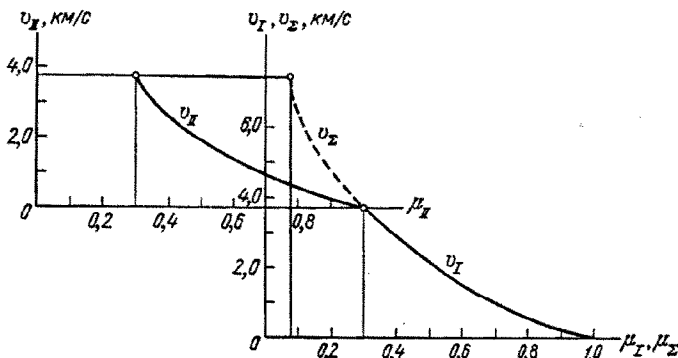


Рис. 6.5. Графики набора скорости для двухступенчатой ракеты в зависимости от μ_I , μ_{II} и μ_{Σ}

маневра, рассчитанной по формуле Циолковского. Разумеется, это можно делать только в тех случаях, когда влияние изменения координат возмущенной орбиты мало сказывается на законе изменения скорости, что обычно справедливо при не слишком большой продолжительности работы двигателя в процессе проведения маневра.

6.2.3. Вторая задача Циолковского. Так принято называть задачу о движении ракеты вертикально вверх вне атмосферы под действием реактивной силы и гравитационной силы, создающей постоянное ускорение.

Уравнение движения в проекции на направление скорости запишем следующим образом:

$$m \frac{dv}{dt} = mu' - mg. \quad (6.33)$$

Преобразовав его к виду

$$dv = -u' \frac{dm}{m} - g dt$$

и проинтегрировав в пределах от v_0 до v , от m_0 до m и от 0 до t , получаем

$$v - v_0 = -u' \ln \frac{m}{m_0} - gt$$

или, используя обозначение $\mu = m/m_0$,

$$v = v_0 - u' \ln \mu - gt. \quad (6.34)$$

Это и есть основная формула второй задачи Циолковского.

Для конечного момента времени $t = t_k$ имеем

$$v_k = v_0 - u' \ln \mu_k - gt_k. \quad (6.35)$$

В отличие от первой задачи Циолковского здесь скорость зависит не только от μ_k , но и от времени полета t_k : чем меньше t_k , тем больше конечная скорость. Это является следствием потери части скорости на преодоление притяжения планеты. Отметим, что закон расхода топлива в формулу (6.35) для конечной скорости в явном виде не входит. Одну и ту же конечную скорость можно получить при различных законах расхода топлива, лишь бы время полета на активном участке было одинаковым (разумеется, при равных μ_k). Однако совпадения хода изменения скорости в процессе всего полета мы при этом не добьемся. Полное совпадение будет иметь место только в том случае, когда каждому заданному текущему значению μ будут соответствовать одинаковые значения текущего времени t .

В формулах (6.34) и (6.35) скорость зависит от двух аргументов: μ и t . Если задать связь между ними, окажется возможным описать изменение скорости в зависимости от одного аргумента. Как и раньше при исследовании первой задачи Циолковского, мы будем рассматривать случай с постоянным секундным расходом массы, т.е. с линейным законом ее изменения.

В соответствии с (6.26) имеем

$$t = \frac{u'}{g_0 n_0} (1 - \mu)$$

и формулу (6.34) запишем в виде

$$v = v_0 - u' \ln \mu - \frac{gu'}{g_0 n_0} (1 - \mu).$$

Если положить $g = g_0$, т.е. считать, что полет протекает в условиях малого отличия ускорения силы тяжести от ее значения на поверхности Земли, то

$$v = v_0 - u' \ln \mu - \frac{u'}{n_0} (1 - \mu), \quad (6.36)$$

а для конечной точки активного участка траектории

$$v_k = v_0 - u' \ln \mu_k - \frac{u'}{n_0} (1 - \mu_k). \quad (6.37)$$

Видно, что скорость во второй задаче Циолковского зависит от начальной тяговооруженности: чем больше тяговооруженность, тем больше скорость в конце активного участка.

Для определения пути, пройденного ракетой на активном участке траектории, запишем уравнение (6.36) в виде

$$dl = \left[v_0 - u' \ln \mu - \frac{u'}{n_0} (1 - \mu) \right] dt,$$

где на основании (6.29)

$$dt = - \frac{u'}{g_0 n_0} d\mu.$$

В результате интегрирования в пределах от l_0 до l и от μ_0 до μ получим

$$l - l_0 = \frac{u'}{g_0 n_0} \left\{ v_0 (\mu_0 - \mu) + u' (\mu \ln \mu - \mu - \mu_0 \ln \mu_0 + \mu_0) + \frac{u'}{n_0} \left[\frac{(1 - \mu_0)^2}{2} - \frac{(1 - \mu)^2}{2} \right] \right\}.$$

Если положить, что $l_0 = 0$ при $\mu_0 = 1$, то

$$l = \frac{u'}{g_0 n_0} \left[v_0 (1 - \mu) + u' (1 - \mu + \mu \ln \mu) - \frac{u'}{n_0} \frac{(1 - \mu)^2}{2} \right]. \quad (6.38)$$

Для конечной точки активного участка траектории можно записать

$$l_k = \frac{u'}{g_0 n_0} \left[v_0 (1 - \mu_k) + u' (1 - \mu_k + \mu_k \ln \mu_k) - \frac{u'}{n_0} \frac{(1 - \mu_k)^2}{2} \right]. \quad (6.39)$$

При желании можно основные формулы второй задачи Циолковского (6.36)–(6.39) написать не через переменную μ , а через переменную t , воспользовавшись соотношением (6.27).

Расчетные формулы для случая многоступенчатой ракеты во второй задаче Циолковского получают аналогично тому, как это было сделано для первой задачи. Это мы оставляем читателю для самостоятельного решения.

Наиболее реальной областью применения второй задачи Циолковского являются исследования или расчеты, связанные с вертикальным взлетом или вертикальной посадкой ЛА на планеты, не имеющие атмосферы. Эти задачи мы здесь рассматривать не будем.

Глава 7

МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАСЧЕТОВ ТРАЕКТОРИЙ

Проектировочными расчетами траекторий мы будем называть расчеты, проводимые на начальных этапах проектирования ракеты. В основном они проводятся с целью выбора и обоснования наиболее важных проектно-баллистических характеристик ракеты, таких, как начальная и относительная конечные массы ступеней, соотношение начальных масс и тяговооруженность ступеней, потребные величины удельных тяг или скоростей истечения продуктов сгорания, удовлетворяющих решению поставленной целевой задачи. Результаты этих расчетов используются как исходные данные для проведения расчетов действующих на ракету нагрузок, проектирования систем управления, включая вопросы анализа устойчивости движения и выбора характеристик органов управления, для оценки характеристик рассеивания и решения ряда других проектных задач.

Сначала мы рассмотрим этапы процесса проектирования ракеты, чтобы пояснить требования, предъявляемые на этих этапах к баллистическим расчетам, а затем перейдем к изложению самих методов.

§ 7.1. Этапы проектирования

Процесс создания ракеты — это сложный многоступенчатый итерационный процесс. Все его этапы сопровождаются баллистическими расчетами. Если на начальных этапах проектирования основной упор делается на проведение массовых расчетов с целью определения границ основных проектно-баллистических параметров ракеты, то в последующем центр проектировочных расчетов перемещается в сторону учета все более тонких эффектов.

Отсюда следует довольно большое разнообразие методов баллистических расчетов. Методы баллистических расчетов можно было бы разделить на несколько групп, в которых, по существу, отслеживаются основные этапы создания ракеты.

Одну из групп составляют методы оценок. Такие оценки необходимы на самом раннем этапе проектирования, когда идея только начинает созревать. Еще нет ни задания на проектирование, ни облика будущей ракеты, ни тем более представления об основных ее данных. На этом этапе конструктор решает две баллистические задачи.

Первая задача заключается в определении в первом приближении потребной скорости, которую ракета должна развить для достижения поставленной цели полета. Здесь в основном должно быть составлено количественное представление о геометрических характеристиках траектории или орбиты. Поясним это. Пусть требуется спроектировать баллистическую

ракеты на заданную дальность. Тогда необходимо, используя некоторые общие геометрические свойства траекторий баллистических ракет, определить, какова должна быть скорость ракеты в конце активного участка траектории, чтобы можно было достичь заданной дальности. Другой пример. Пусть требуется совершить переход с некоторой опорной орбиты ИСЗ, имеющей небольшую высоту, на орбиту стационарного спутника Земли. Здесь также в первую очередь необходимо установить, исходя из известных общих свойств геометрии межорбитальных переходов, в каких точках орбиты и какие скорости должны быть сообщены разгонными блоками, чтобы были достигнуты нужные параметры конечной орбиты.

Вторая задача, присущая этому этапу, является как бы продолжением первой, но смысловое значение ее несколько иное. Она заключается в оценке значений двух или трех главных, наиболее важных конструктивных параметров ракеты, позволяющих получить нужное значение скорости.

Так, в первом примере оцениваются такие пары значений удельной тяги и относительного конечного веса ракеты (иногда оценивается и тяговооруженность), каждая из которых обеспечивает достижение заданной скорости. Во втором примере решается такая же задача, но для каждого участка работы двигателей.

Затем проводится весовой анализ для конкретных компоновочных схем с учетом не только результатов баллистических расчетов, но и расчета нагрузок на конструкцию, ее прочности, аэрогазодинамики и тепловых процессов, динамики и управляемости, взаимосвязи между работой двигателя и обеспечивающих систем ракеты и многих других инженерных вопросов.

Таким образом, мы приходим к следующему этапу проектирования, который имеет общепринятое установленное ГОСТом название: "техническое предложение". Каковы же задачи баллистики на этапе подготовки технического предложения? Они вытекают из общих задач проектирования и подчинены им. На этом этапе необходимо выявить возможные варианты решений, провести сравнительную оценку вариантов, выбрать оптимальный вариант и обосновать этот выбор. Кроме того, необходимо установить требования к ЛА, его техническим характеристикам и последующим стадиям разработки. Применительно к баллистике сказанное означает, что здесь требуются не результаты баллистических оценок по предполагаемой схеме полета, энергетике, границам области основных конструктивных параметров ракеты, а техническое обоснование выбранных принципиальных решений и конкретно разработанные материалы по вариантам траекторий и оптимизации параметров ракеты (конструктивных и траекторных), формулирование требований к системам и агрегатам ракеты, трассам полета, системам управления, средствам измерений и связи и решение многих других вопросов, влияющих на облик ракеты и на ее основные характеристики. Подлежат обоснованию также баллистические возможности применения ракеты.

К баллистическим расчетам этого этапа не предъявляется жестких требований в отношении их точности. Это связано с тем, что исходные данные, которыми приходится пользоваться баллистикам, страдают отсутствием полноты и точности. Однако количество расчетов здесь весьма велико, и применение приближенных методов не только оправдано, но и неизбежно.

Главное внимание здесь уделяется не абсолютной точности получаемого расчета, а сравнительной оценке рассматриваемых вариантов компоновок, силовых схем и других исследуемых характеристик.

За техническим предложением следует эскизный проект, который содержит проекты всех существенных систем и агрегатов, входящих в состав ракетного комплекса как самостоятельные части проекта.

На этапе эскизного проекта проводятся уточненные расчеты траекторий с учетом уточнений основных характеристик всех систем. Во внимание принимаются особенности работы системы управления, уточняются трассы полета и определяются районы для падения отделяющихся частей (если ракета многоступенчатая), исследуются нештатные случаи полета и способы выхода из них, большое место отводится расчету возмущенных движений и рассеивания, детально рассматриваются ограничения, накладываемые на условия полета со стороны различных систем ракеты, и ряд других специальных вопросов. И тем не менее это, как мы увидим дальше, еще не самые точные расчеты.

По существу, эскизный проект является последним, решающим этапом проектирования. Имеется еще один этап — технический проект, но он не во всех случаях является обязательным. Все зависит от полноты и проработанности вопросов при эскизном проектировании. При проектировании сложных ракетных комплексов, как правило, выполнение технического проекта является обязательным этапом, а в некоторых случаях этот этап даже повторяется. Принципиального различия в методах проведения баллистических расчетов на этапах эскизного и технического проектирования нет, различие между ними только в последовательных уточнениях ряда важнейших позиций.

Так называемое рабочее проектирование начинается по результатам эскизного или технического проектирования и сопровождает весь дальнейший процесс создания ракеты. В период рабочего проектирования разрабатываются и выпускаются рабочие чертежи и подготавливается вся эксплуатационная документация (в том числе и баллистическая) к летным испытаниям.

Баллистические расчеты, проводимые на этапе подготовки ракеты к летно-конструкторским испытаниям, относятся к группе самых точных и полных расчетов. Такой же точностью и полнотой обладают только расчеты, связанные с разработкой таблиц стрельбы для боевых ракет и баллистической документации для штатной эксплуатации ракетно-космических систем самого различного назначения. В этих расчетах с необходимой полнотой используются уравнения управления и регулирования движением ракеты, данные о форме и потенциале Земли принимаются по самым последним исследованиям, характеристики верхней атмосферы рассчитываются по динамической модели, для головных частей боевых ракет учитывается колебательный характер их движения в плотных слоях атмосферы, с большой тщательностью рассчитываются данные для настройки приборов, управляющих включением и выключением двигателей и прицеливанием и определяющих функционирование ракеты по установленной циклограмме, а также учитывается ряд других тонких особенностей.

Уравнения, которые были получены в главе 5, дают возможность с различной точностью рассчитывать траектории ракет, сообразуясь с точностью

исходных данных, которой располагает конструктор на различных этапах создания ракеты.

Необходимо всегда помнить, что нецелесообразно привлекать для расчетов полные и точные уравнения, если это не может быть подкреплено данными соответствующей точности и полноты. Пренебрежение этим правилом приведет только к бесполезной затрате сил, времени и средств. Даже при наличии современной ЭВМ с хорошим быстродействием не следует использовать для решения проектных задач, не требующих высокой точности, систему точных уравнений движения. Поясним это на простом примере.

Допустим, что надо исследовать зависимость полезного груза на орбите от шести проектно-баллистических параметров двухступенчатого носителя, например от значений удельных тяг на первой и второй ступенях, тяговооруженности на этих же ступенях, соотношения масс ступеней и высоты круговой орбиты. Если каждому параметру будут даваться хотя бы пять значений, то количество вариантов расчета составит $5^6 = 15\,625$. Кроме того, нужно принять во внимание, что в каждом случае необходимо решать экстремальную задачу (по массе полезного груза) с заданными краевыми условиями (высота круговой орбиты). Это требует расчета в среднем 20–30 траекторий. Таким образом, решение поставленной задачи требует расчета 300–400 тыс. траекторий. Если предположить, что для расчета одной траектории затрачивается 10 с машинного времени, то всего потребуется около 1000 часов машинного счета.

Из этого примера следуют два важных вывода: 1) в проектно-баллистических исследованиях необходимо вводить строгие ограничения на число варьируемых параметров и вести исследования только в окрестности возможных разумных решений, тщательно отфильтровывая те варианты расчетов, которые лежат вне пределов практически допустимых решений; 2) на стадии предварительных проектных исследований следует использовать наиболее простые методы баллистических расчетов, избегая численных методов интегрирования уравнений движения и добиваясь сокращения времени счета на два-три порядка.

Именно последнее обстоятельство стимулирует использование давно уже созданных методов приближенных расчетов и дальнейшее совершенствование этих методов или разработку новых. При отсутствии тех возможностей вычислительной техники, без которых мы не представляем себе в наши дни проведения сколько-нибудь серьезных расчетных работ, нелегко было пытаться вручную, т.е. с применением клавишных вычислительных машин, проводить массовые расчеты траекторий путем численного интегрирования уравнений движения. Ведь самая быстрая расчетчица затрачивала на расчет одной траектории не менее двух-трех дней при не очень сложной системе уравнений. Поэтому создание приближенной методики расчета траекторий дало в свое время сравнительно широкие возможности в решении проектных задач по оптимизации параметров ракет. За один день можно было рассчитать до 50–60 вариантов. Конечно, точность этих расчетов была невелика: от 2 до 4% в сторону занижения результата. В дальнейшем, по мере развития вычислительной техники, многие приближенные методы постепенно предавались забвению. Однако бесспорным является то, что расчеты по любому методу, выполненные на современной

ЭВМ, дают колоссальный выигрыш во времени. Разумеется, использовать такие методы можно только в расчетах первого приближения.

Говоря о приближенных методах расчетов, применяемых на предварительной стадии проектирования, надо заметить, что задача несколько облегчается тем, что в результате этих расчетов должны быть получены, как правило, данные не о всей траектории с ее характеристиками для любого момента времени, а только данные для конца активного участка или ступени полета и прежде всего данные о скорости. Известен ряд таких методов, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками. Наибольшая трудность связана с созданием методов для расчета траекторий, проходящих в плотных слоях атмосферы. Мы остановимся только на принципиальных положениях, составляющих основу подобных методов, для чего исследуем структурный состав скорости и попытаемся оценить влияние различных проектно-баллистических параметров на конечную скорость. Затем рассмотрим один из простых, но эффективных методов расчета траектории, проходящей за пределами атмосферы.

§ 7.2. Атмосферная часть активного участка траектории

7.2.1. Структурный состав скорости. Рассмотрим структурный состав скорости, исходя из уравнения движения в проекции на направление касательной к траектории, взятого в наиболее простом виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P-X}{m} - g \sin \theta$$

или

$$dv = \left(\frac{P}{m} - \frac{X}{m} - g \sin \theta \right) dt. \quad (7.1)$$

Представим первый член в скобках в виде [см. (3.51)]

$$\frac{P}{m} = \frac{P_{\Pi} - (P_{\Pi} - P_0) \frac{P}{P_0}}{m_0 \mu} = \frac{\left[u'_{\Pi} - (u'_{\Pi} - u'_0) \frac{P}{P_0} \right] \dot{m}}{m_0 \mu},$$

второй член — в виде

$$\frac{X}{m} = \frac{c_x q S}{m_0 \mu} = \frac{g_0 c_x q S}{G_0 \mu}$$

Кроме того, введем обозначения

$$p_M = \frac{G_0}{S}, \quad T = \frac{m_0}{\dot{m}}, \quad (7.2)$$

где p_M — начальная (или стартовая) нагрузка на мишень, т.е. стартовый вес, приходящийся на единицу площади поперечного сечения ракеты; T — так называемое *идеальное время*, т.е. время работы двигателя такой "идеальной" ракеты, у которой конечное значение $\mu_K = 0$ (другими словами, T — время, в течение которого при данном постоянном секундном

расходе сгорело бы количество топлива, равное по массе начальной массе ракеты).

Из второго равенства (7.2) с учетом того, что $\mu = m/m_0$, вытекают следующие соотношения:

$$\mu = \frac{m}{m_0} = \frac{\dot{m}_0 - \dot{m}t}{m_0} = 1 - \frac{t}{T},$$

$$t = T(1 - \mu), \quad (7.3)$$

откуда

$$dt = -T d\mu.$$

После подстановки (7.2) и значений P/m и X/m в (7.1) получаем

$$dv = - \left[u'_n - (u'_n - u'_0) \frac{p}{p_0} \right] \frac{d\mu}{\mu} + gT \sin \theta d\mu + \frac{g_0 T}{p_m} \frac{c_x q}{\mu} d\mu.$$

Проинтегрируем полученное уравнение в пределах от v_0 до v и от μ_0 до μ :

$$v - v_0 = -u'_n \ln \frac{\mu}{\mu_0} + (u'_n - u'_0) \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{p}{p_0} \frac{1}{\mu} d\mu +$$

$$+ T \int_{\mu_0}^{\mu} g \sin \theta d\mu + \frac{g_0 T}{p_m} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{c_x q}{\mu} d\mu.$$

Примем в качестве нижнего предела интегрирования параметры движения в момент старта, т.е. $\mu_0 = 1$ и $v_0 = 0$, и, кроме того, поменяем местами нижний и верхний пределы интегрирования с соответствующим изменением знаков. Имеем

$$v = -u'_n \ln \mu - (u'_n - u'_0) \int_{\mu}^1 \frac{p}{p_0} \frac{1}{\mu} d\mu - T \int_{\mu}^1 g \sin \theta d\mu - \frac{g_0 T}{p_m} \int_{\mu}^1 \frac{c_x q}{\mu} d\mu.$$

Полученное выражение справедливо для любого момента времени. Если его отнести к концу активного участка траектории первой ступени, то вместо текущего значения μ мы должны будем использовать конечное его значение μ_k , а интегралы должны быть взяты в пределах от μ_k до 1:

$$v_k = -u'_n \ln \mu_k - (u'_n - u'_0) \int_{\mu_k}^1 \frac{p}{p_0} \frac{1}{\mu} d\mu -$$

$$- T \int_{\mu_k}^1 g \sin \theta d\mu - \frac{g_0 T}{p_m} \int_{\mu_k}^1 \frac{c_x q}{\mu} d\mu. \quad (7.4)$$

Введем для интегралов обозначения

$$I_1 = \int_{\mu_k}^1 g \sin \theta d\mu, \quad (7.5)$$

$$I_2 = \int_{\mu_k}^1 \frac{c_x q}{\mu} d\mu, \quad (7.6)$$

$$I_3 = \int_{\mu_k}^1 \frac{p}{p_0} \frac{1}{\mu} d\mu \quad (7.7)$$

и перепишем выражение (7.4):

$$v_{\kappa} = -u'_{\Pi} \ln \mu_{\kappa} - T I_1 - \frac{g_0 T}{P_M} I_2 - (u'_{\Pi} - u'_0) I_3. \quad (7.8)$$

Для практической работы, однако, более удобно несколько видоизмененное выражение, которое получается из (7.8), если учесть, что

$$u'_{\Pi} = g_0 P_{\text{уд.п}}, \quad u'_0 = g_0 P_{\text{уд0}}$$

и

$$T = \frac{m_0}{\dot{m}} = \frac{G_0}{\dot{G}} \frac{P_{\text{уд0}}}{P_{\text{уд0}}} = \frac{G_0 P_{\text{уд0}}}{P_0} = \nu_0 P_{\text{уд0}}, \quad (7.9)$$

где $P_{\text{уд.п}}$ — удельная тяга в пустоте; $P_{\text{уд0}}$ — удельная тяга на поверхности Земли;

$$\nu_0 = G_0 / P_0 \quad (7.10)$$

— стартовая нагрузка на тягу, т.е. отношение начального веса ракеты к тяге на поверхности Земли, Тогда можно написать

$$v_{\kappa} = -g_0 P_{\text{уд.п}} \ln \mu_{\kappa} - \nu_0 P_{\text{уд0}} I_1 - \frac{g_0 \nu_0 P_{\text{уд0}}}{P_M} I_2 - g_0 (P_{\text{уд.п}} - P_{\text{уд0}}) I_3 \quad (7.11)$$

или

$$v_{\kappa} = -g_0 P_{\text{уд.п}} \ln \mu_{\kappa} - \Delta v_1 - \Delta v_2 - \Delta v_3, \quad (7.12)$$

где

$$\Delta v_1 = \nu_0 P_{\text{уд0}} I_1; \quad (7.13)$$

$$\Delta v_2 = \frac{g_0 \nu_0 P_{\text{уд0}}}{P_M} I_2; \quad (7.14)$$

$$\Delta v_3 = g_0 (P_{\text{уд.п}} - P_{\text{уд0}}) I_3. \quad (7.15)$$

Выражение (7.11) является основным для приближенного вычисления скорости ракеты при разгоне на атмосферной части активного участка. Каким способом проводится такой расчет, мы объясним ниже, а сейчас обратим внимание на структуру скорости.

Первый член в (7.11) представляет собой скорость, приобретенную ракетой, движущейся в безвоздушном пространстве при отсутствии каких-либо внешних воздействий. Эта скорость совпадает со скоростью в первой задаче Циолковского. Ее часто называют *идеальной скоростью*, вкладывая в этот термин тот смысл, что ракета движется в идеальных условиях и достигает предельно возможной для нее скорости. Здесь уместно остановиться и на *характеристической скорости* — термине, широко вошедшем в практический лексикон конструкторов ракет. Под характеристической скоростью понимают потребную для решения той или другой задачи идеальную скорость. Характеристическая скорость оценивается, исходя из потребной истинной скорости с добавлением ожидаемых потерь скорости на различные факторы.

Идеальная скорость является единственным положительным членом в сумме (7.11), определяющей конечную скорость (напомним, что $\ln \mu_k$ — величина отрицательная, так как $\mu_k < 1$). Все остальные члены вычитаются из идеальной скорости и, следовательно, представляют собой потери скорости.

Член $\Delta v_1 = v_0 P_{уд0} I_1$ определяет потери скорости на преодоление притяжения Земли. Эти потери часто называют *гравитационными потерями*. Они наиболее существенны среди всех потерь. Величины их определяются продолжительностью активного участка траектории, его формой и ходом изменения направления скорости. Наибольшие потери бывают при вертикальных траекториях; чем выше траектория, тем меньше гравитационные потери. Например, если вертикальный разгон длится 150 с, потеря скорости составляет около 1500 м/с. Если на траектории такой же продолжительности среднее значение синуса угла наклона скорости к горизонту окажется равным 0,7, то эта потеря уменьшится до 1050 м/с. Траектории выведения вторых и третьих ступеней на орбиты ИСЗ наклонены под небольшими углами к горизонту, поэтому гравитационные потери на этих участках не столь велики, как на начальном участке траектории.

Если говорить об относительных величинах гравитационных потерь (относя их к истинной скорости), то для одноступенчатых ракет они достигают 35 — 40%, для двух-трехступенчатых ракет — составляют 10 — 20%.

Потери скорости на преодоление сопротивления атмосферы определяются членом

$$\Delta v_2 = \frac{g_0 v_0 P_{уд0}}{P_m} I_2.$$

Эти потери формируются в основном до высот полета 25 — 30 км и поэтому сравнительно мало зависят от размеров ракеты, количества ступеней, конечной скорости или дальности. Абсолютная величина потерь обычно находится в пределах 100 — 200 м/с, а относительная — в пределах 10 — 15% для ракет с малой дальностью полета и 1 — 3% для ракет межконтинентального класса и носителей космических аппаратов.

Член $\Delta v_3 = g_0 (P_{уд.п} - P_{уд0}) I_3$ обусловлен разностью между тягой в пустоте и текущей тягой, т.е. недостатком тяги, а следовательно, и удельной тяги (при фиксированном секундном расходе топлива) по сравнению с полетом в пустоте. Другими словами, действие противодавления со стороны атмосферы снижает полную величину возможного статического добавка тяги $S_a p_a$ и тем самым снижает скорость, которая могла бы быть достигнута при отсутствии этого противодавления. Величина потери скорости на описанный эффект в основном зависит от разности между удельной тягой в пустоте и удельной тягой на поверхности Земли и почти полностью формируется до высот полета 25 — 30 км. Абсолютная величина потери обычно находится в пределах 100 — 200 м/с, что в относительных величинах составляет 7 — 15% для ракет с малой дальностью полета и 1 — 3% для ракет межконтинентального класса и носителей космических аппаратов.

7.2.2. Основные проектно-баллистические параметры. Вернемся к выражению (7.11). Конечная скорость зависит в явном виде от пяти характерис-

тик ракеты, которые принято называть *основными проектно-баллистическими параметрами*. Ими являются:

- удельная тяга в пустоте $P_{уд.п.}$,
- удельная тяга на поверхности Земли $P_{уд.0}$,
- относительная конечная масса μ_K ,
- стартовая нагрузка на тягу ν_0 (7.10),
- стартовая нагрузка на мидель p_M (7.2), т.е. отношение начального веса ракеты к площади миделева сечения.

Кроме того, на скорость влияет еще один параметр, характеризующий форму ракеты, – коэффициент лобового сопротивления c_x , входящий в интеграл I_2 в (7.11). Если его представить в виде

$$c_x = i c_x^{эТ},$$

где $c_x^{эТ}$ – коэффициент лобового сопротивления некоторой эталонной ракеты, то *коэффициентом формы* можно назвать величину

$$i = \frac{c_x}{c_x^{эТ}},$$

и тогда потеря скорости на преодоление сопротивления атмосферы будет определяться формулой

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= \frac{g_0 \nu_0 P_{уд.0}}{p_M} \int \frac{1}{\mu} \frac{c_x q}{\mu} d\mu = \\ &= \frac{g_0 \nu_0 P_{уд.0} i}{p_M} \int \frac{1}{\mu} \frac{c_x^{эТ} q}{\mu} d\mu = \frac{g_0 \nu_0 P_{уд.0}}{p_M} i I_2, \end{aligned}$$

где интеграл I_2 вычисляется для эталонной ракеты.

Обратите внимание на то, что пять (а с учетом коэффициента формы i шесть) проектно-баллистических параметров являются баллистически независимыми и их достаточно, чтобы решить задачу расчета траектории. В основные проектно-баллистические параметры не включены параметры, определяющие форму траектории, так как они не определяют облика ракеты, но им отводится важная роль при решении экстремальной задачи по оптимизации траектории по какому-либо критерию, а также при решении краевых задач. Отметим также, что заданной совокупности шести независимых параметров соответствует бесчисленное множество ракет, так как все шесть параметров являются лишь относительными величинами. Для того чтобы определить из этого множества одну конкретную ракету, достаточно к указанным шести параметрам добавить абсолютное значение какой-либо одной характеристики: начальный или конечный вес ракеты, тягу в пустоте или на поверхности Земли, секундный расход топлива или, наконец, площадь миделева сечения. Например, если задаться начальным весом G_0 , то остальные данные легко определяются по цепочке формул:

$$G_K = G_0 \mu_K, \quad P_0 = \frac{G_0}{\nu_0}, \quad \dot{G} = \frac{P_0}{P_{уд.0}}, \quad P_{п.} = \dot{G} P_{уд.п.}, \quad S_M = \frac{G_0}{p_M}.$$

В этом, собственно и состоит смысл введения проектно-баллистических

параметров: они дают возможность проводить баллистический анализ, не привязываясь к конкретному весовому анализу, силовой и компоновочной схемам ракеты, к ее конструктивным и другим особенностям.

Из формулы (7.11) видно также влияние проектно-баллистических параметров на конечную скорость ракеты. Остановимся на этом подробнее.

Полезность всемерного уменьшения входящих в первый член формулы (7.11) относительного конечного веса μ_k и увеличения удельной тяги в пустоте $P_{уд.п}$ вполне очевидна, так как при этом возрастает единственный положительный член в формуле (7.11).

Следующий по значимости член $\nu_0 P_{уд.0} I_1 = \Delta v_1$ возрастает при увеличении ν_0 и $P_{уд.0}$ и, следовательно, при этом возрастают гравитационные потери. Влияние ν_0 легко понять: чем больше стартовая нагрузка на тягу, тем более растянут во времени активный участок.

Объяснить отрицательную роль возрастания удельной тяги на поверхности Земли $P_{уд.0}$ несколько сложнее. Чтобы это понять, вспомним, что выбранные параметры являются независимыми. Это означает, что, рассматривая один из них как величину переменную, остальные необходимо оставить неизменными. В этом случае параметры ν_0 , μ_k и $P_{уд.п}$ неизменны. Следовательно, с возрастанием $P_{уд.0}$ время работы двигателя увеличится, что и приведет к возрастанию гравитационных потерь. Это видно и из полученных ранее формул. Например, из формулы (7.3), отнесенной к концу активного участка, с учетом (7.2) следует, что

$$t_k = \nu_0 P_{уд.0} (1 - \mu_k),$$

т.е. продолжительность активного участка находится в прямой зависимости от $P_{уд.0}$.

В выражении для потери скорости на преодоление сопротивления атмосферы

$$\Delta v_2 = \frac{g_0 \nu_0 P_{уд.0}}{P_M} I_2$$

влияние параметров ν_0 и $P_{уд.0}$ имеет такое же объяснение, как и в выражении для гравитационной потери. Обратная пропорциональность между Δv_2 и стартовой нагрузкой на мидель объясняется тем, что сила сопротивления вызывает тем меньшее торможение, чем больше вес (или масса). Однако такой анализ был бы слишком поверхностным, так как нами оставлен без всякого внимания интеграл $I_2 = \int \frac{1}{\mu} \frac{c_x^{3T} q}{\mu} d\mu$. Дело в том, что поведение

подынтегральной функции существенно зависит от стартовой нагрузки на тягу ν_0 , а именно, чем меньше эта нагрузка, тем быстрее возрастает скоростной напор q , а вместе с ним и величина интеграла I_2 . Таким образом, с одной стороны, уменьшение ν_0 благотворно сказывается на величине потери Δv_2 , с другой стороны, оно же усугубляет эти потери.

Говоря о потере Δv_1 , мы отмечали положительное влияние уменьшения ν_0 . Рассуждая логически, можно предположить, что уменьшение ν_0 должно всегда приводить к увеличению конечной скорости. Но как далеко можно распространить такой вывод? Другими словами, будет ли функция $\Delta v_1 +$

$+ \Delta v_2$ монотонно убывать при уменьшении v_0 или имеется некоторое экстремальное значение, после чего эта функция начнет возрастать? Детальные исследования показывают, что максимум конечной скорости достигается при $v_0 = 0,25 \div 0,35$. Дальнейшее уменьшение приводит уже к потере скорости. Но на практике никогда такие малые значения стартовой нагрузки на тягу не используют, так как зависимость $v = f(v_0)$ в довольно широком диапазоне значений v_0 весьма пологая. Увеличение v_0 до $0,5 - 0,6$ (что равносильно уменьшению тяги двигателя при этом же начальном весе ракеты почти вдвое) приводит, как правило, к не очень большим потерям скорости или дальности полета, что может быть компенсировано некоторым увеличением стартового веса ракеты. Такое решение для конструктора всегда более предпочтительно. Заметим, что мы рассматриваем здесь только чисто баллистические соотношения между независимыми проектно-баллистическими параметрами. Как только будут введены в рассмотрение их взаимосвязи через весовой анализ (например, то обстоятельство, что с увеличением тяги растет вес двигательной установки и поэтому ухудшается μ_k), то оптимальные значения v_0 еще больше увеличатся.

Возвращаясь к исходному выражению (7.11), рассмотрим последний его член $\Delta v_3 = g_0 (P_{уд.п} - P_{уд.0}) I_3$. Поскольку эта составляющая обусловлена противодействием атмосферы, которое препятствует развитию максимальной тяги, естественно, что чем ближе удельная тяга на поверхности Земли к удельной тяге в пустоте, тем меньше потеря скорости Δv_3 . Значение интеграла I_3 не подвержено очень большим изменениям, поэтому потери Δv_3 в основном формируются разностью $P_{уд.п} - P_{уд.0}$.

На рис. 7.1 геометрически интерпретирована формула (7.12). На этом же графике вниз отложены величины потерь Δv_1 , Δv_2 и Δv_3 , отнесенные к истинной скорости. Здесь пояснение может потребоваться только в отношении начальной величины относительной потери на преодоление противодействия $\Delta v_3/v$: еще скорость равна нулю, а потеря уже такая большая!

Все объясняется довольно просто. Если бы на начальном участке движения не было потери тяги на преодоление противодействия, то скорость действительно могла бы быть значительно выше. В этом нетрудно убедиться. Для небольших значений t можно написать

$$v = \left(\frac{P_0}{m_0} - g_0 \right) t. \quad (7.16)$$

При этом потерянная на преодоление противодействия скорость составит

$$\Delta v_3 = \frac{P_{п} - P_0}{m_0} t. \quad (7.17)$$

Из (7.17) и (7.16) после несложных преобразований получаем

$$\frac{\Delta v_3}{v} = \frac{\frac{P_{п}}{P_0} - 1}{1 - v_0}. \quad (7.18)$$

Отсюда следует, что если, например, высотность сопла составляет 20%

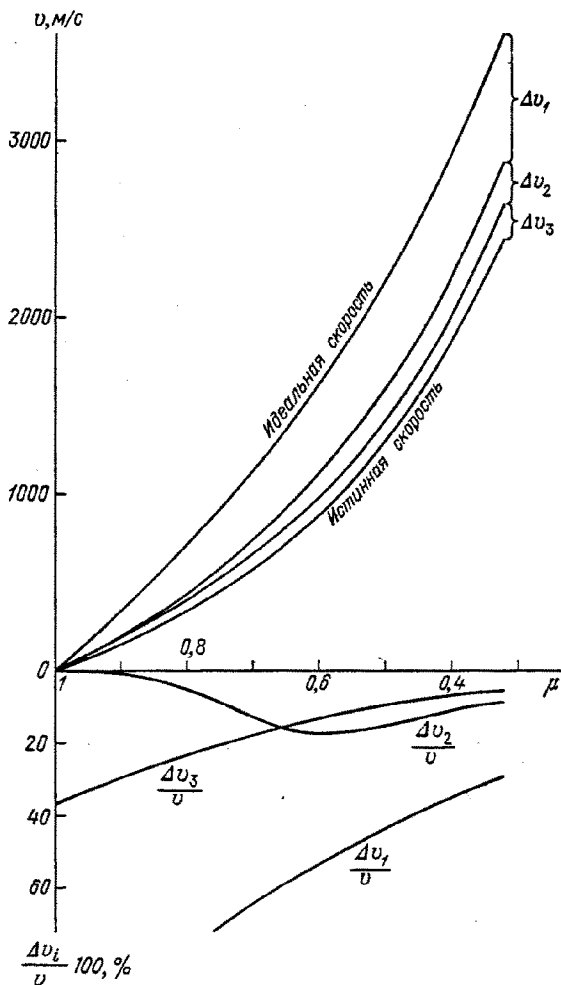


Рис. 7.1. Характер изменения скорости и ее составляющих в зависимости от μ : Δv_1 — потери скорости на преодоление силы притяжения Земли; Δv_2 — потери скорости на преодоление сопротивления атмосферы; Δv_3 — потери скорости на преодоление противодействия атмосферы

(т.е. отношение $\frac{P_{\text{п}}}{P_0} = 1,2$), а $v_0 = 0,6$ то относительная потеря скорости $\Delta v_3/v = 0,5$ или 50%.

7.2.3. О методах вычисления интегралов I_1, I_2, I_3 . Формула (7.11) явилась наиболее подходящей основой для создания приближенных методов, которых было разработано в 1946–1960 гг. несколько. Различие этих методов состоит только в способах вычисления потерь скорости, или интегра-

лов I_1, I_2, I_3 . Можно говорить о двух принципиально разных подходах к решению этой задачи.

Самый ранний из известных нам методов, описанный в [2, 29, 30], базируется на обработке большого объема статистического материала по расчетам траекторий в широком диапазоне основных проектно-баллистических параметров и составлении на этой основе подходящих аппроксимирующих графических, аналитических или графо-аналитических зависимостей.

Другой подход предполагает применение итерационных методов. Для вычисления I_2 сначала определяется в первом приближении ход изменения скорости для небольшого количества точек на траектории (обычно от трех до шести) по двум первым членам формулы (7.11). Каким-либо простым методом интегрирования скорости определяется для этих же точек высота полета. По этим данным вычисляется подынтегральная функция, интеграл от которой, вычисленный также приближенным способом, даст величину I_2 первого приближения. То же относится и к интегралу I_3 , для вычисления которого требуется знание только хода изменения высоты полета. Теперь для заданных точек имеется возможность вычислить уже с учетом потерь Δv_2 и Δv_3 скорость и высоту полета во втором приближении. Понятно, что если скорость и высота полета в первом приближении должны быть выше действительных (из-за неучета потерь Δv_2 и Δv_3), то во втором приближении они оказываются ниже, так как потери на преодоление сопротивления атмосферы были вычислены при завышенных скоростях полета. Правда, потери на противодействие атмосферы получаются несколько заниженными из-за завышенных высот, но этот фактор сказывается слабее. Обычно ограничиваются результатом третьего приближения. Однако можно не проводить вычисления в третьем приближении, а составить функцию, содержащую результаты первого и второго приближения со специально подобранными весовыми коэффициентами.

Несколько подробнее опишем способ вычисления первого интеграла I_1 , имея в виду определяющее значение гравитационных потерь. Примем, что ускорение силы тяжести постоянно и равно его значению на поверхности Земли. Это вполне допустимо, так как высоты полета на атмосферной части активного участка малы по сравнению с радиусом Земли и, следовательно, значение g не может претерпеть заметных изменений. Так, на высоте 25 км ускорение силы тяжести отличается от земного примерно на 0,8%, на высоте 50 км — на 1,6%.

Изменение угла наклона касательной к траектории θ в функции μ задан в следующем виде:

$$\theta = 90^\circ \text{ при } 1 \geq \mu \geq \mu_1,$$

$$\theta = A(\mu - \mu_2)^2 + B(\mu - \mu_2) + C \text{ при } \mu_1 \geq \mu \geq \mu_2, \quad (7.19)$$

$$\theta = \theta_k \text{ при } \mu_2 \geq \mu.$$

Здесь μ_1 соответствует моменту окончания участка вертикального движения ракеты. В среднем этот участок продолжается до значений μ , близких к 0,95, поэтому примем $\mu_1 = 0,95$. Значение μ_2 соответствует моменту, начиная с которого движение предполагается происходящим по прямой, наклоненной к горизонту под постоянным углом θ_k . В среднем этот момент соответствует значению $\mu = 0,45$, поэтому примем $\mu_2 = 0,45$.

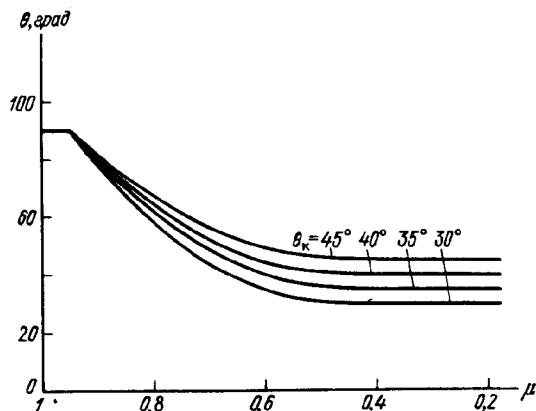


Рис. 7.2. Зависимость угла θ от μ для некоторых значений конечного угла θ_k

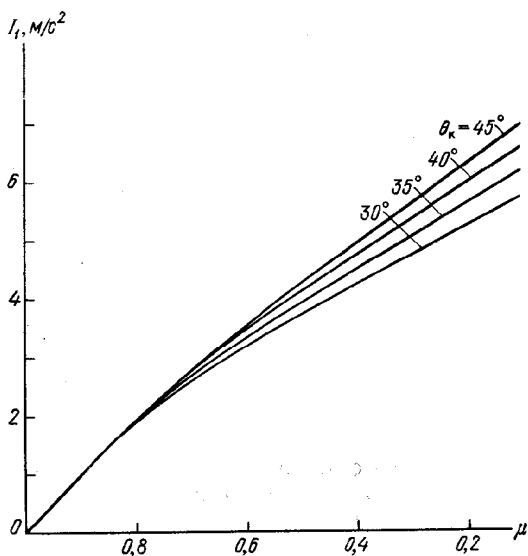


Рис. 7.3. Зависимость интеграла I_1 от μ для некоторых значений конечного угла θ_k

Для определения коэффициентов A, B, C в (7.19) в интервале $0,95 \geq \mu \geq 0,45$ примем такие условия:

$$\theta = \pi/2 \text{ при } \mu = \mu_1 = 0,95,$$

$$\theta = \theta_k \text{ при } \mu = \mu_2 = 0,45,$$

$$d\theta/d\mu = 0 \text{ при } \mu = \mu_2 = 0,45,$$

т.е. стыковка с участком $\theta = \theta_k = \text{const}$ на правом конце должна быть плавной. Нетрудно установить, что зависимость $\theta = \theta(\mu)$, удовлетворяю-

щая перечисленным условиям, имеет вид

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } 1 \geq \mu \geq 0,95,$$

$$\theta = 4 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_k \right) (\mu - 0,45)^2 + \theta_k \quad \text{при } 0,95 \geq \mu \geq 0,45, \quad (7.20)$$

$$\theta = \theta_k \quad \text{при } 0,45 \geq \mu.$$

Таким образом, для выбора конкретной функции $\theta = \theta(\mu)$ нужно задать всего один параметр — значение θ_k . Для некоторых значений θ_k на рис. 7.2 показана зависимость $\theta = \theta(\mu)$, а на рис. 7.3 — зависимость I_1 от μ . Значения интеграла I_1 в зависимости от μ и θ_k приведены в табл. 7.1, которая составлена с учетом допустимости линейной интерполяции. Зависимостями (7.20) рекомендуется также пользоваться при интегрировании уравнений движения в форме (5.50), когда возникает необходимость программу угла тангажа задать в приближенном виде, пренебрегая углом атаки.

Таблица 7.1

μ	$I, \text{ м/с}^2$			
	$\theta_k = 30^\circ$	$\theta_k = 35^\circ$	$\theta_k = 40^\circ$	$\theta_k = 45^\circ$
1,00	0,000	0,000	0,000	0,000
0,90	0,978	0,978	0,979	0,979
0,80	1,887	1,899	1,910	1,919
0,70	2,656	2,700	2,741	2,779
0,60	3,283	3,381	3,472	3,555
0,50	3,811	3,976	4,130	4,272
0,45	4,058	4,259	4,447	4,620
0,40	4,303	4,540	4,762	4,967
0,35	4,548	4,822	5,077	5,313
0,30	4,794	5,103	5,392	5,660
0,28	4,892	5,215	5,519	5,799
0,26	4,990	5,328	5,645	5,938
0,24	5,088	5,441	5,771	6,076
0,22	5,186	5,553	5,897	6,215
0,20	5,284	5,666	6,023	6,354
0,19	5,333	5,722	6,086	6,423
0,18	5,382	5,778	6,149	6,493
0,17	5,431	5,834	6,212	6,562
0,16	5,480	5,891	6,275	6,631
0,15	5,529	5,947	6,338	6,701
0,14	5,579	6,003	6,401	6,770
0,13	5,628	6,060	6,464	6,839
0,12	5,677	6,116	6,527	6,909
0,11	5,726	6,172	6,591	6,978
0,10	5,775	6,228	6,654	7,048

Таблица 7.2

μк	Рудн. с											
	250	260	270	280	290	300	310	320	330	340	350	
0,40	2247	2337	2427	2517	2607	2697	2787	2876	2966	3056	3146	
0,39	2309	2402	2494	2586	2679	2771	2863	2956	3048	3141	3233	
0,38	2373	2468	2563	2658	2753	2848	2943	3037	3132	3227	3322	
0,37	2438	2536	2633	2731	2829	2926	3024	3121	3219	3316	3414	
0,36	2506	2606	2706	2806	2906	3007	3107	3207	3307	3408	3508	
0,35	2575	2678	2781	2884	2987	3090	3193	3296	3399	3502	3605	
0,34	2646	2752	2857	2963	3069	3175	3281	3387	3492	3598	3704	
0,33	2719	2828	2937	3045	3154	3263	3372	3480	3589	3698	3807	
0,32	2794	2906	3018	3130	3242	3353	3465	3577	3689	3800	3912	
0,31	2872	2987	3102	3217	3332	3447	3562	3677	3791	3906	4021	
0,30	2953	3071	3189	3307	3425	3543	3661	3780	3898	4016	4134	
0,29	3036	3157	3279	3400	3522	3643	3764	3886	4007	4129	4250	
0,28	3122	3247	3372	3497	3621	3746	3871	3996	4121	4246	4371	
0,27	3211	3340	3468	3596	3725	3853	3982	4110	4239	4367	4496	
0,26	3304	3436	3568	3700	3832	3964	4097	4229	4361	4493	4625	
0,25	3400	3536	3672	3808	3944	4080	4216	4352	4488	4624	4760	
0,24	3500	3640	3780	3920	4060	4200	4340	4480	4620	4760	4900	
0,23	3604	3748	3893	4037	4181	4325	4469	4614	4758	4902	5046	
0,22	3713	3862	4010	4159	4307	4456	4605	4753	4902	5050	5199	
0,21	3827	3980	4134	4287	4440	4593	4746	4899	5052	5205	5358	
0,20	3947	4105	4263	4421	4579	4736	4894	5052	5210	5368	5526	
0,19	4073	4236	4399	4561	4725	4887	5050	5213	5376	5539	5702	
0,18	4208	4373	4542	4710	4878	5047	5215	5383	5551	5719	5888	
0,17	4346	4520	4693	4867	5041	5215	5389	5562	5736	5910	6084	
0,16	4494	4674	4854	5034	5213	5393	5573	5753	5933	6112	6292	
0,15	4653	4839	5025	5211	5397	5583	5769	5955	6141	6328	6514	
0,14	4822	5015	5208	5400	5593	5786	5979	6172	6365	6556	6751	
0,13	5004	5204	5404	5604	5804	6004	6204	6405	6605	6805	7005	
0,12	5200	5408	5616	5824	6032	6240	6448	6656	6864	7072	7280	
0,11	5413	5630	5846	6063	6279	6496	6712	6929	7145	7362	7578	
0,10	5647	5873	6099	6325	6550	6776	7002	7228	7454	7680	7906	

μ_k	$P_{y, \text{длн. в}}$									
	360	370	380	390	400	410	420	430	440	450
0,40	3236	3326	3416	3506	3596	3685	3775	3865	3955	4045
0,39	3325	3418	3510	3602	3695	3787	3880	3972	4064	4157
0,38	3417	3512	3607	3702	3797	3892	3987	4082	4176	4271
0,37	3511	3609	3706	3804	3901	3999	4097	4194	4292	4389
0,36	3608	3708	3809	3909	4009	4109	4209	4310	4410	4510
0,35	3708	3811	3914	4017	4120	4222	4325	4428	4531	4634
0,34	3810	3916	4022	4127	4233	4339	4445	4551	4657	4762
0,33	3915	4024	4133	4242	4350	4459	4568	4677	4785	4894
0,32	4024	4135	4248	4359	4471	4583	4695	4806	4918	5030
0,31	4136	4251	4366	4481	4596	4711	4826	4940	5055	5170
0,30	4252	4370	4488	4606	4724	4842	4961	5079	5197	5315
0,29	4372	4493	4615	4736	4857	4979	5100	5222	5343	5465
0,28	4496	4620	4745	4870	4995	5120	5245	5370	5495	5620
0,27	4624	4752	4881	5009	5138	5266	5395	5523	5652	5780
0,26	4757	4889	5022	5154	5286	5418	5550	5682	5815	5947
0,25	4896	5032	5168	5304	5440	5576	5712	5848	5984	6120
0,24	5040	5180	5320	5460	5600	5740	5880	6020	6160	6300
0,23	5190	5334	5479	5623	5767	5911	6055	6199	6344	6488
0,22	5347	5496	5644	5793	5941	6090	6238	6387	6535	6681
0,21	5512	5665	5818	5971	6124	6277	6430	6583	6736	6889
0,20	5684	5841	6000	6157	6315	6473	6631	6789	6947	7105
0,19	5865	6027	6191	6354	6517	6680	6843	7005	7168	7331
0,18	6056	6224	6392	6560	6729	6897	7065	7233	7402	7570
0,17	6258	6432	6605	6779	6953	7127	7301	7475	7648	7822
0,16	6472	6652	6831	7011	7191	7371	7550	7730	7910	8090
0,15	6700	6886	7072	7258	7444	7630	7816	8003	8189	8375
0,14	6943	7136	7329	7522	7715	7908	8101	8294	8486	8679
0,13	7205	7405	7605	7806	8006	8206	8400	8606	8806	9006
0,12	7488	7696	7904	8112	8320	8528	8736	8944	9152	9360
0,11	7795	8012	8228	8445	8661	8878	9094	9311	9527	9744
0,10	8132	8358	8583	8809	9035	9261	9487	9713	9938	10165

Для удобства проведения оценок первого приближения в табл. 7.2 приведены значения идеальной скорости в зависимости от μ_k и $P_{уд.п.}$. Для промежуточных значений μ_k и $P_{уд.п.}$ допустима линейная интерполяция, при этом ошибка не превышает 5 м/с.

§ 7.3. Приближенный метод расчета траектории на внеатмосферной части

7.3.1. Метод расчета при разложении g по степеням координат. Траектория второй ступени ракеты дальнего действия или носителя космического объекта практически пролегает на таких высотах, что можно говорить о полете в безвоздушном пространстве. Это обстоятельство является в какой-то степени спасительным фактором, так как вселяет надежду на возможность решения задачи по расчету траектории, если не совсем по конечным аналитическим формулам, то по крайней мере без численного интегрирования системы дифференциальных уравнений и сведением ее хотя бы к вычислению квадратур. И дело не только (а может быть, не столько) в том, что процесс интегрирования уравнений движения является трудоемким, сколько в том, что анализ различных свойств решения проектной задачи приходится проводить только на основе численных решений множества вариантов. К сожалению, наши надежды на возможные облегчения рушатся, как только мы приступаем к решению задачи, записывая уравнения без серьезных допущений. Главным источником наших затруднений является нелинейная зависимость ускорения земного притяжения от координат ракеты. Иногда в подобных случаях допускается линеаризация, т.е. замена нелинейных зависимостей линейными.

Идея линеаризации уравнений движения была предложена Д.Е. Охочимским и Т.М. Энеевым в связи с решением некоторых вариационных задач, связанных с запуском искусственного спутника Земли [22]. Мы здесь воспользуемся результатами этой работы в той ее части, которая относится к методу расчета активного участка траектории в центральном поле сил без воздействия атмосферы, не касаясь решения вариационной задачи.

В оговоренных условиях уравнения движения ракеты в проекциях на оси прямоугольной системы координат (рис. 7.4) запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= P \cos \varphi - mg_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= P \sin \varphi - mg_y, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где

$$\begin{aligned} g_x &= g \sin \beta = g \frac{x}{r}, \\ g_y &= g \cos \beta = g \frac{R+y}{r}. \end{aligned}$$

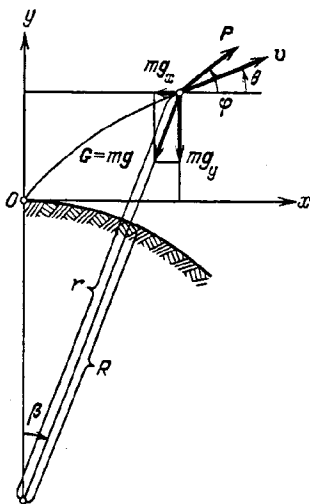


Рис. 7.4. Модель сил, принятая при составлении уравнений движения

Но

$$g = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad r^2 = x^2 + (R+y)^2,$$

поэтому

$$g_x = g_0 R^2 \frac{x}{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2}},$$
$$g_y = g_0 R^2 \frac{R+y}{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2}}.$$
(7.22)

Система четвертого порядка (7.21) не интегрируется в элементарных функциях. Обратим внимание на то, что эту систему нельзя расщепить на две самостоятельные системы второго порядка, так как g_x и g_y являются функциями как координаты x , так и координаты y .

Разложим g_x и g_y в ряды Тейлора по степеням текущих координат ракеты в окрестности точки старта и удержим в разложении члены, содержащие координаты не выше первой степени:

$$g_x = g_x(0, 0) + \frac{\partial g_x}{\partial x} x + \frac{\partial g_x}{\partial y} y + \dots,$$
(7.23)

$$g_y = g_y(0, 0) + \frac{\partial g_y}{\partial x} x + \frac{\partial g_y}{\partial y} y + \dots$$

Из (7.22) следует, что

$$g_x(0, 0) = 0, \quad g_y(0, 0) = g_0.$$

Дифференцируя g_x и g_y по координатам x и y , получаем

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = g_0 R^2 \frac{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2} - 3[x^2 + (R+y)^2]^{1/2} x^2}{[x^2 + (R+y)^2]^3},$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial y} = -g_0 R^2 \frac{3[x^2 + (R+y)^2]^{1/2} x (R+y)}{[x^2 + (R+y)^2]^3},$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial x} = -g_0 R^2 \frac{3[x^2 + (R+y)^2]^{1/2} x (R+y)}{[x^2 + (R+y)^2]^3},$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial y} = g_0 R^2 \frac{[x^2 + (R+y)^2]^{3/2} - 3[x^2 + (R+y)^2]^{1/2} (R+y)^2}{[x^2 + (R+y)^2]^3}.$$

Подставляя сюда координаты $x = 0$, $y = 0$ начальной точки, в окрестности которой проводится разложение, будем иметь

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{g_0}{R}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g_y}{\partial y} = -\frac{2g_0}{R}.$$

Теперь (7.23) можно записать с точностью до линейной аппроксимации в

таким виде:

$$g_x \approx \frac{g_0}{R} x, \quad g_y \approx g_0 - \frac{2g_0}{R} y.$$

Подставляя эти значения g_x и g_y в уравнения (7.21), находим

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P \cos \varphi - \frac{mg_0}{R} x,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = P \sin \varphi - mg_0 + \frac{2mg_0}{R} y$$

или

$$\ddot{x} + q^2 x = p \cos \varphi, \quad \ddot{y} - 2q^2 y = p \sin \varphi - g_0, \quad (7.24)$$

где

$$q^2 = \frac{g_0}{R}, \quad p = \frac{P}{m}.$$

В уравнениях подобного типа постоянный коэффициент q называется *круговой частотой*. Переменная величина p представляет собой ускорение, сообщаемое ЛА действием тяги двигателя P .

В общем случае правые части уравнений (7.24) являются произвольными функциями времени, так как p и φ могут изменяться по произвольным законам.

Итак, мы получили, что первое уравнение (7.24) не зависит от y , а второе не зависит от x , т.е. система четвертого порядка (7.21) распалась на два уравнения второго порядка.

Рассмотрим случай линейного изменения угла тангажа φ по времени

$$\varphi_t = \varphi_0 + \dot{\varphi}(t - t_0), \quad (7.25)$$

так как более сложные законы его изменения никакого выигрыша при оптимизации траектории не дают. В (7.25) φ_0 есть начальный угол наклона вектора тяги к горизонту точки старта в момент времени t_0 , принятый за начало расчета в рассматриваемом методе; $\dot{\varphi}$ — постоянная угловая скорость, с которой изменяется угол тангажа. Начальные условия движения в момент t_0 имеют вид

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \theta_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \theta_0, \quad x = x_0, \quad y = y_0.$$

Уравнения (7.24) подлежат интегрированию в интервале от t_0 до любого конечного момента t , при этом будет

$$t_0 \leq \xi \leq t,$$

где ξ — текущее время. Для любого ξ в этом интервале угол тангажа

$$\varphi_\xi = \varphi_0 + \dot{\varphi}(\xi - t_0).$$

Подставляя сюда φ_0 из (7.25), получаем

$$\varphi_\xi = \varphi_t - \dot{\varphi}(t - \xi).$$

Поскольку p также является функцией текущего времени ξ , уравнения

(7.24) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} + q^2 x &= p(\xi) \cos [\varphi_t - \dot{\varphi}(t - \xi)], \\ \dot{y} - 2q^2 y &= p(\xi) \sin [\varphi_t - \dot{\varphi}(t - \xi)] - g_0,\end{aligned}$$

где каждое уравнение представляет собой самостоятельное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменной правой частью.

На приемах интегрирования этих уравнений мы останавливаться не будем. Укажем лишь, что после нахождения общих решений соответствующих однородных уравнений, содержащих по две произвольные постоянные, надо отыскать частное решение каждого уравнения, варьируя произвольные постоянные с учетом начальных условий. В результате интегрирования получим следующее решение в квадратурах:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x}_0 \cos q(t - t_0) - q x_0 \sin q(t - t_0) + \\ &+ \left(A - \frac{\dot{\varphi}^2 + q^2}{2} D \right) \cos \varphi_t + \dot{\varphi} B \sin \varphi_t, \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 \operatorname{ch} \sqrt{2} q(t - t_0) + \sqrt{2} q y_0 \operatorname{sh} \sqrt{2} q(t - t_0) + \\ &+ \left(A - \frac{\dot{\varphi}^2 - 2q^2}{2} D \right) \sin \varphi_t - \dot{\varphi} B \cos \varphi_t - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{g_0}{q} \operatorname{sh} \sqrt{2} q(t - t_0), \\ x &= \frac{1}{q} \dot{x}_0 \sin q(t - t_0) + x_0 \cos q(t - t_0) + B \cos \varphi_t + \dot{\varphi} D \sin \varphi_t, \quad (7.26) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2} q} \dot{y}_0 \operatorname{sh} \sqrt{2} q(t - t_0) + y_0 \operatorname{ch} \sqrt{2} q(t - t_0) + \\ &+ B \sin \varphi_t - \dot{\varphi} D \cos \varphi_t - \frac{g_0}{2q^2} [\operatorname{ch} \sqrt{2} q(t - t_0) - 1],\end{aligned}$$

где

$$A = \int_{t_0}^t p(\xi) d\xi; \quad B = \int_{t_0}^t p(\xi)(t - \xi) d\xi; \quad D = \int_{t_0}^t p(\xi)(t - \xi)^2 d\xi. \quad (7.27)$$

Формулы (7.26) в принципе можно применять как для случая одноступенчатого разгона, так и для многоступенчатого. Для вычисления интегралов (7.27) удобно воспользоваться введенными ранее понятиями эффективной скорости истечения в пустоте $u'_{п}$, удельной тяги в пустоте $P_{уд.п.}$ стартовой нагрузки на тягу ν_0 и идеального времени T_0 .

Рассмотрим сначала случай одноступенчатого выведения. Примем следующие обозначения, справедливые при условии $\dot{m} = \text{const}$:

$$p(t) = \frac{\dot{m} u'_{п}}{m} = \frac{\dot{m} u'_{п}}{m_0 - \dot{m}(t - t_0)} = \frac{u'_{п}}{T_0 - (t - t_0)}, \quad (7.28)$$

$$T_0 = \frac{m_0}{\dot{m}} = \nu_0 P_{уд.п.}, \quad \nu_0 = \frac{G_0}{P_{п.}}$$

На основании (7.28) для момента времени ξ в интервале от t_0 до t имеем

$$p(\xi) = \frac{u'_n}{T_0 - (\xi - t_0)} = \frac{u'_n}{[T_0 - (t - t_0)] + (t - \xi)}.$$

Введя обозначение $T_t = T_0 - (t - t_0)$, получаем

$$p(\xi) = \frac{u'_n}{T_t + (t - \xi)}.$$

Подставляя (7.28) в (7.27) и интегрируя, находим

$$\begin{aligned} A &= u'_n \ln \frac{T_0}{T_t}, \\ B &= u'_n \left[(t - t_0) - T_t \ln \frac{T_0}{T_t} \right], \\ D &= u'_n \left\{ (t - t_0) \left[\frac{3}{2} (t - t_0) - T_0 \right] + T_t^2 \ln \frac{T_0}{T_t} \right\}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Хотя формулы (7.26) и (7.29) пригодны для любого текущего момента времени t , ими пользуются главным образом для конечного момента разгона, и тогда в них вместо t всюду надо подставлять t_K .

Приведем основные формулы для случая двухступенчатого выведения, предварительно договорившись о некоторых дополнительных условиях.

Будем считать, что на первом участке эффективная скорость истечения u'_1 , на втором участке u'_2 . Для этих же участков ¹⁾

$$T_{01} = v_{01} P_{уд1}, \quad v_{01} = \frac{G_{01}}{P_1},$$

$$T_{02} = v_{02} P_{уд2}, \quad v_{02} = \frac{G_{02}}{P_2}.$$

Первый участок продолжается от момента t_0 до момента t_{K1} , второй участок — от t_{02} до t . Естественно, что конечные формулы рассматриваются только для моментов $t > t_{02} > t_{K1}$. По аналогии с предыдущим случаем примем обозначения

$$T_{t_1} = T_{01} - (t - t_0), \quad T_{t_2} = T_{02} - (t - t_{02}), \quad T_{K1} = T_{01} - (t_{K1} - t_0).$$

Каждый из интегралов A , B и D , имеющих пределы интегрирования от t_0 до t , записывается в виде суммы двух интегралов, имеющих пределы от t_0 до t_{K1} и от t_{02} до t . Функции $p(\xi)$ для этих двух участков имеют вид

$$p_1(\xi) = \frac{u'_1}{T_{t_1} + (t - \xi)}, \quad p_2(\xi) = \frac{u'_2}{T_{t_2} + (t - \xi)}.$$

При указанных условиях для вычисления A , B и D получаем следующие

¹⁾ Индексы "п" при u' и $P_{уд}$ в целях упрощения записи будем опускать.

формулы:

$$\begin{aligned}
 A &= u'_1 \ln \frac{T_{01}}{T_{\kappa 1}} + u'_2 \ln \frac{T_{02}}{T_{t_2}}, \\
 B &= u'_1 \left[(t_{\kappa 1} - t_0) - T_{t_1} \ln \frac{T_{01}}{T_{\kappa 1}} \right] + u'_2 \left[(t - t_{02}) - T_{t_2} \ln \frac{T_{02}}{T_{t_2}} \right], \\
 D &= u'_1 \left\{ (t_{\kappa 1} - t_0) \left[2(t - t_0) - \frac{1}{2}(t_{\kappa 1} - t_0) - T_{01} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + T_{t_1}^2 \ln \frac{T_{01}}{T_{\kappa 1}} \right\} + u'_2 \left\{ (t - t_{02}) \left[\frac{3}{2}(t - t_{02}) - T_{02} \right] + T_{t_2}^2 \ln \frac{T_{02}}{T_{t_2}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

Выражения (7.26) для вычисления координат и составляющих скорости остаются в силе.

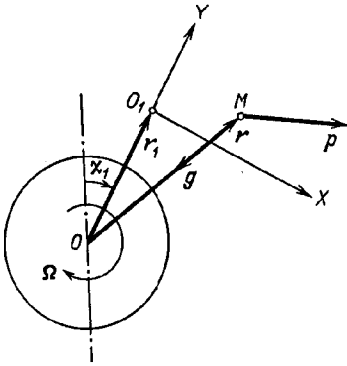
Рассмотренный нами случай является наиболее простым, допускающим получение решения в квадратурах, а при некоторых дополнительных условиях — в виде конечных формул. К сожалению, область применимости метода в таком виде довольно ограничена. Основная причина этого заключается в том, что при большой протяженности активного участка траектории (что имеет место при многоступенчатом разгоне) значения координат становятся столь большими, что линеаризация вносит недопустимые погрешности в расчет. Это же обстоятельство мешает применению метода для расчета траекторий разгона с орбит ИСЗ в сторону Луны, планет Солнечной системы или с целью получения высоких околоземных орбит, требующих сообщения ЛА значительных дополнительных скоростей на весьма протяженных участках траектории. В связи с этим представлялось целесообразным использовать известную идею о проведении расчета в такой движущейся системе координат, которая позволила бы иметь дело со значительно меньшими значениями координат ЛА (в этой системе) и тем самым распространить метод на более широкий класс траекторий. Применительно к рассматриваемой задаче разгона М.С. Флорианским был разработан метод расчета в системе координат, вращающейся относительно центра Земли с некоторой постоянной угловой скоростью. Ниже мы будем следовать разработанному им методу.

7.3.2. Случай пространственного движения во вращающейся системе координат. Рассмотрим расчет участка выведения при старте с начальной орбиты ИСЗ. Начало O_1 правой прямоугольной системы координат O_1XYZ , в которой будем проводить расчет траектории, поместим в точке, где находится ЛА в момент начала выведения (рис. 7.5; M — текущее положение ЛА). Эта точка характеризуется радиусом-вектором \vec{r}_1 и некоторым центральным углом χ_1 . Ось системы координат O_1XYZ расположим так, чтобы вектор начальной абсолютной скорости ЛА располагался в плоскости O_1XY . Придадим системе координат O_1XYZ вращение относительно центра Земли O с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$:

$$\vec{\Omega} = -\Omega z^0.$$

Если скорость ЛА в системе координат, не имеющей вращения (будем эту скорость называть *абсолютной*), обозначить через v_a , то скорость v во

Рис. 7.5. Схема движения во вращающейся системе координат O_1XYZ



вращающейся системе O_1XYZ (т.е. относительная скорость) запишется так:

$$v(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = v_a - v_e.$$

Здесь $v_e = \vec{\Omega} \times \mathbf{r}$ – скорость переносного движения, где $\mathbf{r}(x, r_1 + y, z)$ – радиус-вектор текущего положения ЛА. Проекции переносной скорости на оси относительной системы координат O_1XYZ будут

$$v_{ex} = \Omega(r_1 + y), \quad v_{ey} = -\Omega x, \quad v_{ez} = 0.$$

Проекции абсолютной скорости на оси этой же системы координат запишутся так:

$$v_{ax} = \dot{x} + \Omega(r_1 + y), \quad v_{ay} = \dot{y} - \Omega x, \quad v_{az} = \dot{z}.$$

Абсолютное ускорение складывается из относительного w , переносного w_e и кориолисова w_c ускорений:

$$w_a = w + w_e + w_c,$$

откуда

$$w(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = w_a - w_e - w_c.$$

С другой стороны, абсолютное ускорение равно сумме ускорений, сообщаемых ЛА тягой двигателя и силой земного притяжения, т.е.

$$w_a = \mathbf{p} + \mathbf{g},$$

где $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ – ускорение силы тяги; $\mathbf{g}(-g_x, -g_y, -g_z)$ – ускорение силы притяжения.

Переносное ускорение определяется двойным векторным произведением

$$w_e = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}),$$

составляющими которого по осям координат будут

$$w_{ex} = \Omega(\vec{\Omega} \times \mathbf{r})_y = \Omega v_{ey} = -\Omega^2 x,$$

$$w_{ey} = -\Omega(\vec{\Omega} \times \mathbf{r})_x = -\Omega v_{ex} = -\Omega^2(r_1 + y), \quad w_{ez} = 0.$$

Для кориолисова ускорения запишем

$$w_c = 2\vec{\Omega} \times \mathbf{v},$$

или

$$w_{cx} = 2\Omega \dot{y}, \quad w_{cy} = -2\Omega \dot{x}, \quad w_{cz} = 0.$$

Теперь можно написать дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси относительной системы координат

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= p_x(t) - g_x + \Omega^2 x - 2\Omega \dot{y}, \\ \ddot{y} &= p_y(t) - g_y + \Omega^2 (r_1 + y) + 2\Omega \dot{x}, \\ \ddot{z} &= p_z(t) - g_z.\end{aligned}\quad (7.31)$$

В этих уравнениях p_x, p_y, p_z в общем случае суть произвольные функции времени, определяемые законом расхода топлива и законом изменения направления тяги двигателя. Составляющие ускорения силы притяжения определяются следующими выражениями:

$$g_x = g \frac{x}{r} = \mu \frac{x}{r^3}, \quad g_y = g \frac{r_1 + y}{r} = \mu \frac{r_1 + y}{r^3}, \quad g_z = g \frac{z}{r} = \mu \frac{z}{r^3}, \quad (7.32)$$

где $r = \sqrt{x^2 + (r_1 + y)^2 + z^2}$; $\mu = fM$.

Таким образом, компоненты g_x, g_y, g_z являются нелинейными функциями всех трех текущих координат ЛА, т.е.

$$g_x = g_x(x, y, z), \quad g_y = g_y(x, y, z), \quad g_z = g_z(x, y, z).$$

В этих условиях система (7.31) может быть решена только при помощи численного интегрирования. Для получения решения в квадратурах необходимо избавиться от нелинейных зависимостей правых частей от координат. Линеаризацию проведем аналогично тому, как это было сделано ранее, только разложение будем проводить в окрестности начальной точки, определенной радиусом-вектором r_1 и имеющей в системе O_1XYZ координаты $x = y = z = 0$:

$$g_x(x, y, z) = g_x(0, 0, 0) + \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 z + \dots,$$

$$g_y(x, y, z) = g_y(0, 0, 0) + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)_0 z + \dots,$$

$$g_z(x, y, z) = g_z(0, 0, 0) + \left(\frac{\partial g_z}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)_0 z + \dots$$

Как следует из (7.32), при $x = y = z = 0$ и $r = r_1$

$$g_x(0, 0, 0) = 0, \quad g_y(0, 0, 0) = \frac{\mu}{r_1^2} = g_1, \quad g_z(0, 0, 0) = 0.$$

Беря соответствующие производные и подставляя в них нулевые координаты начальной точки, получаем

$$\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 = \frac{g_1}{r_1}, \quad \left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_0 = -2g_1 \frac{y}{r_1}, \quad \left(\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)_0 = \frac{g_1}{r_1},$$

$$\left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial g_z}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Теперь можно записать:

$$g_x \approx g_1 \frac{x}{r_1}, \quad g_y \approx g_1 - 2g_1 \frac{y}{r_1}, \quad g_z \approx g_1 \frac{z}{r_1}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (7.31), имеем

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} + \left(\frac{g_1}{r_1} - \Omega^2\right)x = p_x(t),$$

$$\ddot{y} - 2\Omega\dot{x} - \left(2\frac{g_1}{r_1} + \Omega^2\right)y = p_y(t) - (g_1 - \Omega^2 r_1),$$

$$\ddot{z} + \frac{g_1}{r_1} z = p_z(t).$$

Введя обозначение $q^2 = g_1/r_1$, окончательно получим

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} + (q^2 - \Omega^2)x = p_x(t),$$

$$\ddot{y} - 2\Omega\dot{x} - (2q^2 + \Omega^2)y = p_y(t) - (q^2 - \Omega^2)r_1,$$

$$\ddot{z} + q^2 z = p_z(t).$$

Если начальная координата $z = 0$ и тяга действует в плоскости O_1XY , то эта система аналогична системе (7.24), решение которой уже рассмотрено.

Удобно выбрать угловую скорость, с которой вращается система координат O_1XYZ , из условия

$$\Omega = q = \sqrt{\frac{g_1}{r_1}}. \quad (7.33)$$

Как будет показано дальше, это означает, что начало системы координат O_1 будет перемещаться по окружности со скоростью v_1 , равной круговой скорости на расстоянии r_1 от притягивающего центра. Действительно, можно написать

$$v_1 = r_1 \Omega = r_1 \sqrt{\frac{g_1}{r_1}} = \sqrt{g_1 r_1} = \sqrt{\frac{\mu r_1}{r_1^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = v_{кр1}.$$

В выбранной подобным образом системе координат начальная скорость ЛА при старте с круговой орбиты ИСЗ будет равна нулю. Система уравнений при этом примет более простой вид

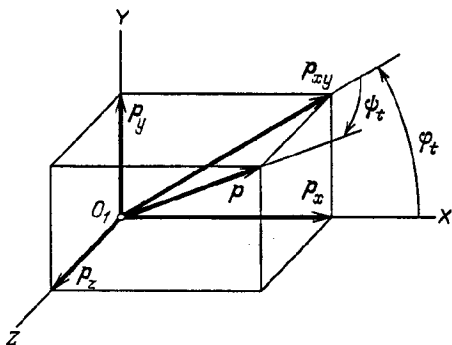
$$\ddot{x} + 2q\dot{y} = p_x(t),$$

$$\ddot{y} - 2q\dot{x} - 3q^2 y = p_y(t), \quad (7.34)$$

$$\ddot{z} + q^2 z = p_z(t).$$

Система (7.34) представляет собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений, которая имеет решение в квадратурах при

Рис. 7.6. Проекция ускорения силы тяги на оси вращающейся системы координат и определение углов тангажа и рыскания



произвольном законе изменения вектора ускорения силы тяги. Первые два уравнения должны интегрироваться совместно, третье уравнение — независимо от первых двух.

Рассмотрим подробно часто встречающийся на практике случай, когда угол наклона оси ЛА задается в виде линейной зависимости от времени. Это, как мы увидим, соответствует оптимизации траектории из условий выведения на орбиту максимального полезного груза.

Направление ускорения силы тяги во вращающейся системе координат O_1XYZ определим двумя углами: тангажа φ_t и рыскания ψ_t . Под углом тангажа φ_t будем понимать угол между проекцией p_{xy} ускорения p от тяги на плоскость O_1XY и осью O_1X . Под углом рыскания ψ_t будем понимать угол между вектором p и плоскостью O_1XY , отсчитывая его в сторону оси O_1Z (рис. 7.6). Запишем формулы, определяющие проекции вектора p на оси координат:

$$\begin{aligned} p_x(t) &= p(t) \cos \psi_t \cos \varphi_t, \\ p_y(t) &= p(t) \cos \psi_t \sin \varphi_t, \\ p_z(t) &= p(t) \sin \psi_t. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Текущее значение угла тангажа в системе O_1XYZ будет определяться формулой

$$\varphi_t = \varphi + \Omega(t - t_0),$$

где φ — угол тангажа относительно стартового горизонта, т.е. относительно оси X_0 ; $\Omega(t - t_0)$ — угол поворота системы O_1XY относительно стартовой системы $O_{10}X_0Y_0$ (рис. 7.7).

При условии, что, начиная с момента $t = t_0$, поворот оси ЛА происходит с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$, можно написать

$$\varphi_t = \varphi_0 + \dot{\varphi}(t - t_0) + \Omega(t - t_0), \quad (7.36)$$

где φ_0 — начальное значение угла тангажа.

Если φ_0^r угол наклона составляющей p_{xy0} к трансверсали в начальный момент времени, а κ_0 — угол между начальным радиусом-вектором r_0 и

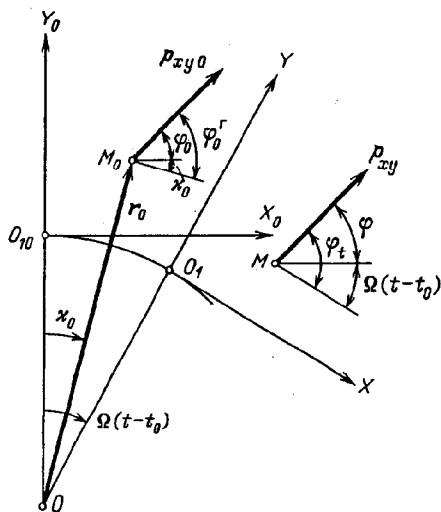


Рис. 7.7. К определению текущего положения осей вращающейся системы относительно стартовой и начального и текущего положений движущейся точки M

ось OY_0 стартовой системы координат, то имеет место соотношение

$$\varphi_0 = \varphi_0^r - \kappa_0.$$

Дифференцируя (7.36), получаем

$$\dot{\varphi}_t = \dot{\varphi} + \Omega = \text{const},$$

так как $\dot{\varphi}$ и Ω — постоянные величины по условиям задачи. Тогда с учетом (7.33) можно написать

$$\varphi_t = \varphi_0 + (\dot{\varphi} + \Omega)(t - t_0). \quad (7.37)$$

Аналогично для угла рыскания имеем

$$\psi_t = \psi_0 + \dot{\psi}(t - t_0),$$

где $\dot{\psi} = \text{const}$.

Для любого момента времени ξ в интервале от t_0 до t на основании (7.37) находим

$$\varphi_\xi = \varphi_0 + (\dot{\varphi} + \Omega)(\xi - t_0),$$

но из той же формулы (7.37) следует, что

$$\varphi_0 = \varphi_t - (\dot{\varphi} + \Omega)(t - t_0),$$

поэтому получаем

$$\varphi_\xi = \varphi_t - (\dot{\varphi} + \Omega)(t - \xi).$$

Аналогично для угла рыскания

$$\psi_{\xi} = \psi_t - \dot{\psi}(t - \xi).$$

Соотношения (7.35), отнесенные к моменту времени ξ , примут вид

$$\begin{aligned} p_x(\xi) &= p(\xi) \cos[\psi_t - \dot{\psi}(t - \xi)] \cos[\varphi_t - (\dot{\varphi} + q)(t - \xi)], \\ p_y(\xi) &= p(\xi) \cos[\psi_t - \dot{\psi}(t - \xi)] \sin[\varphi_t - (\dot{\varphi} + q)(t - \xi)], \\ p_z(\xi) &= p(\xi) \sin[\psi_t - \dot{\psi}(t - \xi)]. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Теперь с учетом (7.38) система уравнений (7.34) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2q\dot{y} &= p(\xi) \cos[\psi_t - \dot{\psi}(t - \xi)] \cos[\varphi_t - (\dot{\varphi} + q)(t - \xi)], \\ \ddot{y} - 2q\dot{x} - 3q^2y &= p(\xi) \cos[\psi_t - \dot{\psi}(t - \xi)] \sin[\varphi_t - (\dot{\varphi} + q)(t - \xi)], \\ \ddot{z} + q^2z &= p(\xi) \sin[\psi_t - \dot{\psi}(t - \xi)]. \end{aligned}$$

Не останавливаясь на приемах интегрирования полученной системы, запишем ее решение:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -[3 - 4 \cos q(t - t_0)] \dot{x}_0 - 2 \dot{y}_0 \sin q(t - t_0) - \\ &- 6q[1 - \cos q(t - t_0)] y_0 + [(A - a_x D) \cos \varphi_t + \\ &+ \omega B \sin \varphi_t] \cos \psi_t + \dot{\psi}(B \cos \varphi_t + \omega D \sin \varphi_t) \sin \psi_t, \\ \dot{y} &= 2 \dot{x}_0 \sin q(t - t_0) + \dot{y}_0 \cos q(t - t_0) + 3q y_0 \sin q(t - t_0) + \\ &+ [(A - a_y D) \sin \varphi_t - \omega B \cos \varphi_t] \cos \psi_t + \\ &+ \dot{\psi}(B \sin \varphi_t - \omega D \cos \varphi_t) \sin \psi_t, \\ \dot{z} &= \dot{z}_0 \cos q(t - t_0) - q z_0 \sin q(t - t_0) + (A + a_z D) \sin \psi_t - \dot{\psi} B \cos \psi_t, \\ x &= x_0 - \left[3(t - t_0) - \frac{4}{q} \sin q(t - t_0) \right] \dot{x}_0 - \\ &- \frac{2}{q} [1 - \cos q(t - t_0)] \dot{y}_0 - 6 [q(t - t_0) - \sin q(t - t_0)] y_0 + \\ &+ (B \cos \varphi_t + \dot{\varphi} D \sin \varphi_t) \cos \psi_t + \dot{\psi} D \cos \varphi_t \sin \psi_t, \\ y &= [4 - 3 \cos q(t - t_0)] y_0 + \frac{2}{q} [1 - \cos q(t - t_0)] \dot{x}_0 + \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$+ \frac{1}{q} \dot{y}_0 \sin q(t-t_0) + (B \sin \varphi_t - \dot{\varphi} D \cos \varphi_t) \cos \psi_t + \dot{\psi} D \sin \varphi_t \sin \psi_t,$$

$$z = z_0 \cos q(t-t_0) + \frac{1}{q} \dot{z}_0 \sin q(t-t_0) + B \sin \psi_t - \dot{\psi} D \cos \psi_t,$$

где $\omega = \dot{\varphi} - q$; $a_x = \frac{\omega^2 + \dot{\psi}^2}{2}$; $a_y = a_x - \frac{3q^2}{2}$; $a_z = \frac{\dot{\psi}^2 + q^2}{2}$.

В выражениях (7.39) A , B и D суть интегралы (7.27). При расчете одноступенчатого выведения следует пользоваться формулами (7.29), двухступенчатого — формулами (7.30). Результаты этого расчета будут характеризовать параметры движения относительно выбранной вращающейся системы координат. Для перехода к невращающейся системе координат с целью получения параметров абсолютного движения (т.е. движения относительно начального положения системы) надо воспользоваться формулами

$$v_{ax} = \dot{x} + q(r_1 + y),$$

$$v_{ay} = \dot{y} - qx,$$

$$v_{az} = \dot{z}.$$

Углы наклона вектора скорости (рис. 7.8) определяются с помощью формул

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_{ay}}{v_{ax}}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{v_{az}}{v_{axy}},$$

$$v_{axy} = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \frac{v_{ax}}{\cos \theta} = \frac{v_{ay}}{\sin \theta},$$

$$v_a = \sqrt{v_{axy}^2 + v_{az}^2} = \frac{v_{axy}}{\cos \sigma}.$$

Модуль радиуса-вектора, проведенного из центра Земли в центр

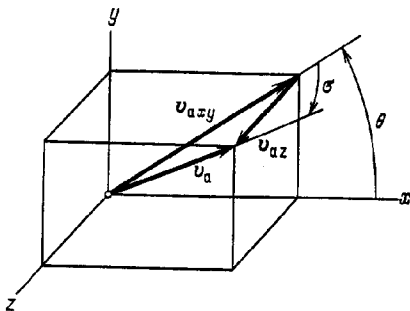


Рис. 7.8. Определение направления скорости во вращающейся системе координат

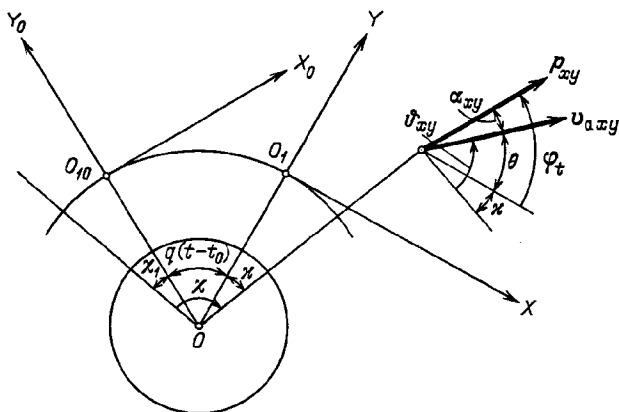


Рис. 7.9. Определение положения летательного аппарата

масс ЛА, равен

$$r = \sqrt{x^2 + (r_1 + y)^2 + z^2} \approx (r_1 + y) + \frac{x^2 + z^2}{2(r_1 + y)}.$$

Кроме того, можно записать следующие очевидные соотношения, определяющие положение ЛА (рис. 7.9):

$$\chi = \chi_1 + q(t - t_0) + \kappa, \quad \operatorname{tg} \kappa = \frac{x}{r_1 + y},$$

$$\vartheta_{xy} = \theta + \kappa, \quad \alpha_{xy} = \varphi_t - \theta.$$

Угол между вектором силы тяги и вектором скорости определяется соотношением

$$\cos \alpha = (\mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{v}^0) = \frac{v_{ax}}{v_a} \cos \psi_t \cos \varphi_t + \frac{v_{ay}}{v_a} \cos \psi_t \sin \varphi_t + \frac{v_{az}}{v_a} \sin \psi_t.$$

Поскольку рассматриваемый метод применяется главным образом для расчета параметров движения для конечного момента разгона, во всех формулах чаще всего текущее время t заменяют на конечное t_k .

Для проведения расчета необходимо знать:

– начальные параметры движения $v_0, \theta_0, \sigma_0, x_0, y_0, z_0$, соответствующие началу времени t_0 ;

– проектно-баллистические параметры $u'_1, u'_2, T_{01}, T_{02}, t_{k1}, t_k$;

– параметры программ угла тангажа и угла рыскания $\varphi_0, \dot{\varphi}, \psi_0, \dot{\psi}$.

Расчет начальных условий проводится по формулам

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos \sigma_0 \cos \theta_0 - q(r_1 + y_0),$$

$$\dot{y}_0 = v_0 \cos \sigma_0 \sin \theta_0 + q x_0,$$

$$\dot{z}_0 = v_0 \sin \sigma_0.$$

Полученные выше формулы – наиболее общие для рассматриваемого метода, так как они позволяют проводить расчет для двухступенчатого выведения при наличии не только программы угла тангажа, но и программы угла рыскания, заданных в виде линейных зависимостей от времени.

Если систему координат, в которой ведется расчет, поворачивать с угловой скоростью, равной угловой скорости спутника Земли, то этот метод даст хорошие результаты при расчете траекторий ЛА, стартующих с орбит ИСЗ. То же самое можно сказать и относительно траекторий торможения под действием силы тяги в поле Земли при скоростях, сравнимых с круговыми. Особенностью подобных траекторий часто является то, что разгон или торможение приходится осуществлять не в плоскости первоначальной траектории, а с выходом из нее, т.е. при наличии угла рыскания. Таковы траектории выведения для полетов в сторону Луны, планет Солнечной системы, на высокие орбиты около Земли с изменением первоначального наклона, например на орбиты стационарных или околостационарных спутников, а также обратные траектории, т.е. траектории движения от планет к Земле, от Луны к Земле и т.д. Хотя рассматриваемый метод при точных расчетах применять нельзя, он весьма рационален для проведения приближенных проектных расчетов, в которых решаются основные энергетические вопросы, определяются схемы полета, возможные даты стартов. Решение этих вопросов сводится к решению экстремальных задач с краевыми условиями. Количество краевых условий обычно бывает не менее трех, и нахождение значений свободных параметров, удовлетворяющих этим краевым условиям, сопряжено с проведением значительного количества вычислений. В таких условиях применение приближенного метода не только оправдано, но подчас является настоятельной необходимостью. Конечно, имеется в виду, что алгоритм метода должен быть запрограммирован и введен в ЭВМ.

Представляет интерес в практике проектных расчетов и ряд частных случаев, например расчет траекторий, расположенных в одной плоскости. Такие траектории получаются при условии, что вектор тяги располагается в плоскости, проходящей через начальный радиус-вектор и вектор скорости ЛА. Если в формулах (7.39) положить $\psi_0 = \dot{\psi} = \psi_t = 0$, мы получим следующие формулы для этого случая:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -[3-4 \cos q(t-t_0)]\dot{x}_0 - 2\dot{y}_0 \sin q(t-t_0) - \\ &- 6q[1 - \cos q(t-t_0)]y_0 + \left(A - \frac{\omega^2}{2}D\right) \cos \varphi_t + \omega B \sin \varphi_t, \\ \dot{y} &= 2\dot{x}_0 \sin q(t-t_0) + \dot{y}_0 \cos q(t-t_0) + 2qy_0 \sin q(t-t_0) + \\ &+ \left(A - \frac{\omega^2 - 3q^2}{2}D\right) \sin \varphi_t - \omega B \cos \varphi_t, \\ x &= x_0 - 6[q(t-t_0) - \sin q(t-t_0)]y_0 - \left[3(t-t_0) - \frac{4}{q} \sin q(t-t_0)\right] \dot{x}_0 - \\ &- \frac{2}{q}[1 - \cos q(t-t_0)]\dot{y}_0 + B \cos \varphi_t + \dot{\varphi} D \sin \varphi_t, \end{aligned}$$

$$y = [4 - 3 \cos q(t - t_0)] y_0 + \frac{2}{q} [1 - \cos q(t - t_0)] \dot{x}_0 + \\ + \frac{1}{q} \dot{y}_0 \sin q(t - t_0) + B \sin \varphi_t - \dot{\varphi} D \cos \varphi_t.$$

Здесь, как и раньше,

$$\omega = \dot{\varphi} - q; \quad \varphi_t = \varphi_0 + (\dot{\varphi} + q)(t - t_0).$$

Составляющие абсолютной скорости определяются соотношениями

$$v_{ax} = \dot{x} + q(r_1 + y), \quad v_{ay} = \dot{y} - qx.$$

Начальные условия для расчетов имеют вид

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos \theta_0 - q(r_1 + y_0), \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \theta_0 + qx_0.$$

В заключение укажем область, в которой можно применять этот метод. Если исходить из допустимой погрешности в проектных расчетах, равной 1 % при определении скорости и координат, то метод можно использовать до значений $x \approx 1700$ км, $z \approx 1700$ км, -60 км $\leq y \leq 1150$ км. Этих предельных значений координаты могут достигать в той системе (не вращающейся или вращающейся), в которой ведется расчет.

Глава 8

ДВИЖЕНИЕ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ В АТМОСФЕРЕ

Задачи, связанные с движением головных частей (ГЧ), возникли вместе с появлением баллистических ракет и сразу же привлекли к себе внимание рядом специфических особенностей. Оказалось, что движение в плотных слоях атмосферы на нисходящей ветви траектории сопровождается значительно более высокими (резко возрастающими с увеличением дальности полета) скоростными напорами, тепловыми потоками, перегрузками, чем при разгоне ракеты на активном участке траектории. Как известно, это обстоятельство привело к необходимости отделения ГЧ от ракеты после окончания активного участка, так как в противном случае пришлось бы рассчитывать всю ракету на более высокие уровни нагружения. При очень больших скоростях входа в атмосферу головная часть теряет долю своей массы, а форма ГЧ претерпевает значительные изменения.

В условиях отсутствия активных средств стабилизации особое значение приобретает изучение свободных колебаний, которые сопровождаются резким торможением движения центра масс ГЧ под воздействием атмосферы. Амплитудой и частотой этих колебаний определяется нагружение конструкции ГЧ. Расчеты, построенные с использованием описанной модели движения, сложны и требуют значительных затрат времени. Вместе с тем в ряде случаев оказываются приемлемыми и более простые модели движения. Рассмотрению некоторых из применяемых методов при решении задач о движении ГЧ и посвящена настоящая глава.

§ 8.1. Общий случай движения

8.1.1. Особенности движения головной части. Выделение движения ГЧ в атмосфере в специальную главу сделано не случайно — это связано с некоторыми его особенностями. В зависимости от того, для какой цели проводится расчет движения ГЧ, применяются те или другие методы. Например, если расчет проводится как один из этапов подготовки полетного задания, то здесь наиболее важным является достаточно точный учет влияния гравитационного поля Земли и ее формы, так как этим в конечном счете определяется точность достижения цели. Само собой разумеется, что вращение Земли при этом учитывается непременно. Если расчет проводится с целью определения основных проектных параметров ГЧ и нас интересуют в первую очередь такие характеристики, как изменение во времени скорости, высоты, перегрузок, тепловых потоков и т.д., то нет необходимости прибегать к точным уравнениям, используемым при подготовке полетного задания, но зато наиболее тщательно надо подойти к определению условий движения в плотных слоях атмосферы. Для определения, например, перегрузок, действующих на головные части при движении их в плотных слоях атмосферы, нельзя обойтись без рассмотрения присущего им колебательно-го характера движения относительно центра масс, так как именно эти колебания и определяют величину поперечных перегрузок. Очевидно, привлекать для этих исследований систему уравнений, полученную с учетом нецентральности гравитационного поля Земли, не следует. Вместе с тем необходимо, чтобы уравнения описывали движение ГЧ относительно центра масс. Почти очевидно и то, что исследование может быть проведено для плоских траекторий, т.е. без учета вращения Земли. Помимо определения режимов движения ГЧ в плотных слоях атмосферы, при этих исследованиях могут быть получены также результаты, позволяющие оценить влияние колебательного характера движения ГЧ на отклонения точек падения по дальности. К изложению этих методов мы и перейдем. Для решения поставленной задачи примем схему действующих сил, показанную на рис. 8.1 (ц.д. — центр давления, ц.м. — центр масс).

Выражения для действующих в полете сил запишем в следующем виде:

$$G = mg, \quad X = c_x qS, \quad Y = c_y qS$$

или

$$X_1 = c_{x_1} qS, \quad Y_1 = c_{y_1} qS.$$

Значения c_x , c_y , c_{x_1} , c_{y_1} являются функциями угла атаки α , числа Маха M и числа Рейнольдса Re или высоты полета h . В отличие от случая расчета активного участка полета, когда углы атаки малы и можно считать, что коэффициент c_x в этих пределах не зависит от угла атаки, а c_y пропорционален первой степени угла атаки, здесь таких предположений делать нельзя. Это объясняется тем, что неуправляемая головная часть после отделения ее от носителя находится в некотором вращательном движении, определяемом только начальными условиями при отделении. Если принять, что отделение ГЧ произошло в достаточно разреженных слоях атмосферы, то вектор кинетического момента остается практически неизменным на протяжении всей траектории вплоть до входа в более или менее плотные

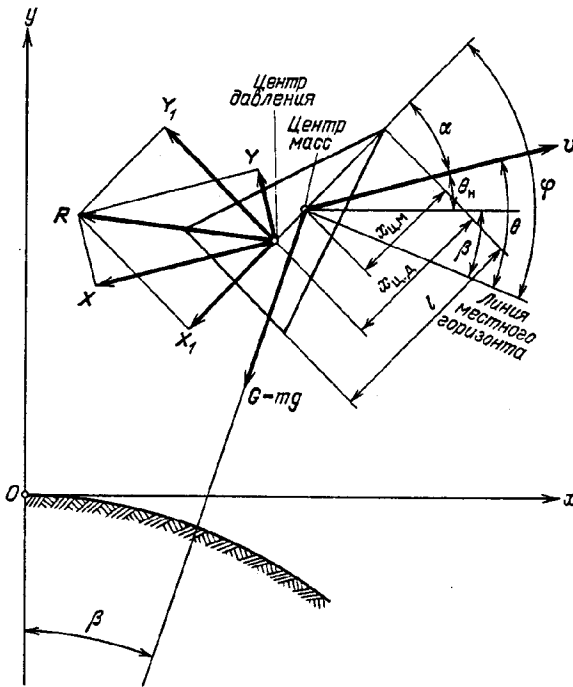


Рис. 8.1. Схема действующих сил при движении головных частей в атмосфере

слои атмосферы. В зависимости от случайной величины угловой скорости, которая была сообщена головной части при отделении, положение ее осей относительно вектора скорости в какой-то фиксированный момент времени или на какой-то фиксированной высоте будет также случайным. При рассматриваемой ситуации угол атаки в плоскости движения может иметь любую величину от 0 до 360° . По этой причине коэффициенты c_x и c_y или c_{x_1} и c_{y_1} должны определяться по специально построенным графикам в функции угла атаки α . Такие графики обычно строятся для ряда дискретных значений величин M и h , принимаемых за параметры и позволяющих проводить для промежуточных значений линейное интерполирование.

Кроме сил, в полете действуют моменты, под влиянием которых и совершается колебательное движение ГЧ. Это аэродинамические моменты — стабилизирующий и демпфирующий. Однако принципиально возможны и моменты обратного знака — опрокидывающий и противодемпфирующий (или антидемпфирующий). Дело в том, что ГЧ всегда имеют форму, обеспечивающую их статическую устойчивость. Из курса аэродинамики известно, что таким свойством обладают тела, центр давления которых расположен позади центра масс. Действующий при этом момент от нормальной аэродинамической силы стремится уменьшить угол атаки.

Заметим, что традиционная форма артиллерийских снарядов и распределение масс в них таковы, что центр давления расположен впереди центра

масс, что является признаком статической неустойчивости. Устойчивость снаряда в полете достигается приданием ему значительного вращения (десятки тысяч оборотов в минуту) вокруг продольной оси для обеспечения чисто гироскопической стабилизации. Такой метод стабилизации ГЧ по ряду причин не применяется, и мы его рассматривать не будем.

Степень статической устойчивости или неустойчивости оценивается, как правило, отношением расстояния между центром масс и центром давления к длине ГЧ. Обычно это отношение находится в пределах от 0,03 до 0,12, т.е. от 3 до 12% [9]:

$$\frac{x_{ц.д} - x_{ц.м}}{l} = 0,03 \div 0,12.$$

Для вычисления аэродинамического стабилизирующего момента используется любая из следующих формул:

$$M_z = Y_1(x_{ц.д} - x_{ц.м}) = c_{y_1} q S (x_{ц.д} - x_{ц.м}) = m_{z_1} q S l.$$

Здесь, как принято в аэродинамике,

$$\frac{c_{y_1} (x_{ц.д} - x_{ц.м})}{l} = m_{z_1},$$

или

$$c_{y_1} (c_{ц.д} - c_{ц.м}) = m_{z_1},$$

где

$$c_{ц.д} = \frac{x_{ц.д}}{l}; \quad c_{ц.м} = \frac{x_{ц.м}}{l};$$

m_{z_1} — коэффициент аэродинамического момента; $c_{ц.д}$ и $c_{ц.м}$ — коэффициенты центра давления и центра масс.

Демпфирующий момент связан с наличием угловой скорости ГЧ, и его величина определяется выражением

$$M_{z_1} = -m_{z_1}^{\omega} S l^2 \frac{\rho v}{2} \omega_{z_1} = -\frac{m_{z_1}^{\omega} q S l^2 \omega_{z_1}}{v},$$

где $m_{z_1}^{\omega}$ безразмерный коэффициент аэродинамического демпфирования. Знак "минус" означает, что положительной величине ω_{z_1} соответствует отрицательный момент, т.е. направление действующего момента обратно направлению угловой скорости. Момент сообщает ускорение, гасящее угловую скорость, почему и называется демпфирующим.

Коэффициенты m_{z_1} и $m_{z_1}^{\omega}$ являются функциями числа М и угла атаки α и должны быть заданы соответствующими графиками.

8.1.2. Уравнения движения и их интегрирование. Итак, мы исходим из того, что траектория является плоской кривой, а вращением Земли и нецентральностью ее поля пренебрегаем.

При этих условиях уравнения движения удобно записать в проекциях на оси либо неподвижной, либо скоростной системы координат.

В первом случае уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{qSc_x}{m} \cos \theta_H - \frac{qSc_y}{m} \sin \theta_H - \frac{g}{R+h} x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{qSc_x}{m} \sin \theta_H + \frac{qSc_y}{m} \cos \theta_H - \frac{g}{R+h} (R+y), \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \\ \frac{d\omega_{z_1}}{dt} &= -\frac{qSm_z l}{I_{z_1}} - \frac{qSm_{z_1} l^2 \omega_{z_1}}{I_{z_1} v}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{z_1}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где θ_H — угол наклона вектора скорости к начальному горизонту (к направлению оси x).

К этим уравнениям необходимо добавить кинематические соотношения

$$\alpha = \varphi - \theta_H, \quad h = \sqrt{(R+y)^2 + x^2} - R, \quad \theta_H = \text{arctg} \frac{v_y}{v_x}, \quad (8.2)$$

которые замыкают систему.

Особенностью этой системы по сравнению с любимыми другими системами, которые использовались для решения различных задач баллистики, является наличие уравнений, описывающих движение головной части вокруг центра масс [последние два уравнения системы (8.1)].

Движение вокруг центра масс рассматривается только в плоскости движения под действием двух моментов: стабилизирующего и демпфирующего. Как моменты, так и угловое ускорение $d\omega_{z_1}/dt$ рассматриваются относительно связанной с ГЧ оси z_1 ; относительно этой же оси определен и момент инерции I_{z_1} .

Для проведения непосредственных расчетов удобнее систему (8.1) записать в несколько измененном виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{qS}{mv} (c_x v_x + c_y v_y) - \frac{g}{R+h} x, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{qS}{mv} (c_x v_y - c_y v_x) - \frac{g}{R+h} (R+y), \\ \frac{dx}{dt} &= v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \\ \frac{d\omega_{z_1}}{dt} &= -\frac{qSl}{I_{z_1}} \left(m_{z_1} + m_{z_1} \frac{l\omega_{z_1}}{v} \right), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_{z_1}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

с добавлением кинематических соотношений (8.2).

В тех случаях, когда дальность полета ГЧ в атмосфере велика (более нескольких сотен километров), предпочтительной является система урав-

нений, написанная в скоростных осях, при этом начало системы координат располагают так, чтобы центр масс ГЧ в начальной точке расчета A находился на оси Oy , т.е. чтобы координата x этой точки равнялась нулю (рис. 8.2). Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{c_x q S}{m} - g \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{c_y q S}{mv} - \frac{g}{v} \cos \theta + \frac{v}{R+h} \cos \theta, \\ \frac{d\omega_{z_1}}{dt} &= -\frac{m_{z_1} q S l}{I_{z_1}} - \frac{m_{z_1} \omega_{z_1} q S l^2}{I_{z_1} v} \omega_{z_1}, \\ \frac{dh}{dt} &= v \sin \theta, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{v}{R+h} \cos \theta, \quad \varphi = \alpha + \theta - \beta, \end{aligned} \quad (8.4)$$

где θ — угол наклона вектора скорости к местному горизонту; β — угловая дальность, отсчитываемая от начального положения радиуса-вектора; φ — угол тангажа относительно начального горизонта.

Координаты находятся из простых соотношений

$$x = (R+h) \sin \beta, \quad y = (R+h) \cos \beta - R. \quad (8.5)$$

Строго говоря, системы уравнений (8.3) и (8.4) не являются замкнутыми. Дело в том, что входящие в правые части уравнений величины m , I_{z_1} и аэродинамические коэффициенты являются некоторыми функциями, зависящими от обгара и разрушения теплозащитного слоя, которым покрыта поверхность ГЧ. Но процесс обгара ГЧ в свою очередь зависит от режима движения, т.е. от решения уравнений. Поэтому, если быть точными, надо решать систему (8.3) или (8.4) совместно с уравнениями, описывающими процессы нагрева, обгара и разрушения некоторой части теплозащитного покрытия, и изменения в связи с этим массы, момента инерции и аэродинамических коэффициентов ГЧ.

Решение вопроса в такой постановке было бы чрезвычайно сложным, хотя и вполне разрешимым. Однако для практических целей нет необходи-

мости поступать именно таким образом. Можно вначале одним из наиболее простых способов, например без учета колебаний ГЧ и без учета обгара, определить ее движение с помощью интегрирования соответствующих уравнений. По этим данным рассчитать изменение массы, формы и т.д. Затем повторно проинтегрировать простые уравнения движения, но с

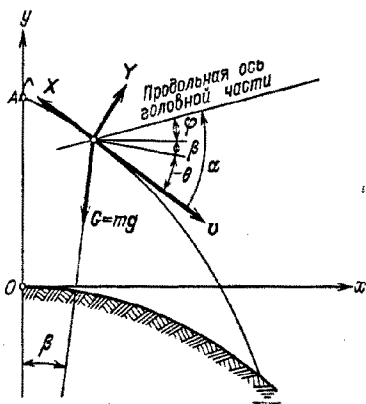


Рис. 8.2. Расположение системы координат, ось y которой проходит через начальную точку расчета движения головной части

учетом переменности геометрии головной части и ее массово-инерционных характеристик.

Многочисленные контрольные расчеты подтвердили правомерность предложенной схемы расчета. Исходя из этого, мы будем полагать, что необходимые значения m , I_{z_1} и всех аэродинамических коэффициентов заранее рассчитаны и известны.

При интегрировании системы уравнений (8.3) или (8.4) важным является выбор шага интегрирования. При этом как на определяющий фактор надо ориентироваться на частоту колебаний угла атаки. Для обеспечения приемлемой точности определения текущего значения угла атаки необходимо на один период иметь не менее 20 шагов интегрирования. За время спуска ГЧ в среднем совершает несколько сотен или даже тысяч колебаний. Таким образом, количество шагов интегрирования исчисляется обычно тысячами. Учитывая, кроме того, некоторые сложности, возникающие при вычислении правых частей уравнений, главным образом из-за определения аэродинамических коэффициентов, являющихся функциями ряда переменных, интегрирование уравнений обычно проводится на ЭВМ методом Рунге—Кутты с автоматическим выбором шага. На участках с наибольшей частотой колебаний (обычно до 10 Гц) шаг интегрирования приходится уменьшать до 0,005 с, на остальных участках он может быть значительно увеличен в соответствии с минимально необходимым количеством точек на каждом периоде. На проведение одного такого расчета на машине типа БЭСМ-6 затрачивается от 3 до 15 мин в зависимости от конкретных условий расчета, а также от квалификации программиста. Надо всегда помнить, что грамотно и удачно составленная программа позволяет сэкономить значительное количество времени счета. Это очень важно, так как часто приходится решать задачи, требующие проведения массовых расчетов траекторий (до нескольких десятков или даже нескольких сотен). Например, по исследованию влияния начальных условий входа в атмосферу на характеристики движения, по исследованию влияния естественных разбросов характеристик ГЧ (центра тяжести, момента инерции, аэродинамических коэффициентов и др.) на ее движение и т.д.

Во всех подобных случаях действующие возмущения известны, как правило, в виде случайных величин, подчиненных определенным законам распределения.

После соответствующей обработки результатов расчетов методами математической статистики получают основные характеристики распределения исследуемой величины.

Описанный способ является "штатным", т.е. основным способом решения задачи возмущенного движения ГЧ. Но он требует тщательной и длительной подготовки по программированию и отладке задачи. Методам расчета движения головных частей значительное место уделено в [19].

Ниже мы остановимся на одном методе решения этой же задачи, основанном на приближенном интегрировании уравнений движения ГЧ относительно центра масс с получением оценок границ амплитуды колебаний и частоты. При применении этого метода удается понизить порядок системы уравнений и решать задачу с помощью нескольких итераций либо существенно увеличить шаг интегрирования, что позволяет в 10—50 раз сократить время, потребное для проведения расчета.

8.1.3. Приближенный метод интегрирования уравнений движения головной части с учетом колебаний. Рассмотрим движение ГЧ, описываемое системой уравнений (8.4)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c_x(\alpha) q S}{m} - g \sin \theta, \quad (8.6a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c_y(\alpha) q S}{mv} - \frac{g}{v} \cos \theta + \frac{u}{R+h} \cos \theta, \quad (8.6б)$$

$$\frac{d\omega_{z_1}}{dt} = -\frac{m_{z_1} q S l}{I_{z_1}} - \frac{m_{z_1}^{\omega} q S l^2}{I_{z_1} v} \omega_{z_1}, \quad (8.6в)$$

$$\frac{dh}{dt} = v \sin \theta, \quad (8.6г)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{v}{R+h} \cos \theta, \quad (8.6д)$$

$$\varphi = \alpha + \theta - \beta, \quad (8.6е)$$

$$x = (R+h) \sin \beta, \quad (8.6ж)$$

$$y = (R+h) \cos \beta - R. \quad (8.6з)$$

Эта система обладает некоторыми особенностями. Уравнение (8.6в) при интегрировании дает угловую скорость вращения ГЧ относительно оси z_1 , а при повторном интегрировании — угловое положение. Именно это уравнение требует достаточно малого шага интегрирования. Уравнения (8.6а) и (8.6б), правые части которых зависят от коэффициентов c_x и c_y , являющихся функциями угла атаки α , можно было бы интегрировать с гораздо большим шагом, принимая, например, для каждого полупериода колебаний среднее значение угла атаки и определяя соответствующие средние значения c_x и c_y для этих углов атаки.

Покажем, как преобразовать уравнение (8.6в), чтобы вычислять непосредственно углы атаки (или их амплитудные значения).

Прежде всего заметим, что

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{z_1}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d\omega_{z_1}}{dt}.$$

Из равенства (8.6е) следует, что

$$\dot{\varphi} = \dot{\alpha} + \dot{\theta} - \dot{\beta}.$$

Подставим сюда $\dot{\theta}$ из уравнения (8.6б) и $\dot{\beta}$ из уравнения (8.6д):

$$\dot{\varphi} = \dot{\alpha} + \frac{c_y(\alpha) q S}{mv} - \frac{g}{v} \cos \theta + \frac{v}{R+h} \cos \theta - \frac{v}{R+h} \cos \theta$$

или

$$\dot{\varphi} = \dot{\alpha} + \frac{c_y(\alpha) q S}{mv} - \frac{g}{v} \cos \theta. \quad (8.7)$$

Дифференцируя по времени, находим

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\alpha} + \frac{(\partial c_y / \partial \alpha) q S}{m v} \dot{\alpha} + c_y(\alpha) \frac{d}{dt} \left(\frac{q S}{m v} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{g}{v} \cos \theta \right).$$

Подставим это выражение в уравнение (8.6в) вместо $d\omega_{z_1}/dt$. С учетом (8.7) получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{(\partial c_y / \partial \alpha) q S}{m v} \dot{\alpha} + c_y(\alpha) \frac{d}{dt} \left(\frac{q S}{m v} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{g}{v} \cos \theta \right) = \\ = - \frac{m_{z_1}(\alpha) q S l}{I_{z_1}} - \frac{m_{z_1}^\omega q S l^2}{I_{z_1} v} \left[\dot{\alpha} + \frac{c_y(\alpha) q S}{m v} - \frac{g}{v} \cos \theta \right]. \end{aligned}$$

Далее можно написать

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = - \frac{m_{z_1}(\alpha) q S l}{I_{z_1}} - c_y(\alpha) \frac{\rho S}{2m} \frac{dv}{dt} - \\ - \frac{\dot{\alpha}}{I_{z_1} v} q S l^2 \left[m_{z_1}^\omega + \frac{(\partial c_y / \partial \alpha) I_{z_1}}{m l^2} \right] + \frac{d}{dt} \left(\frac{g}{v} \cos \theta \right) - \\ - \frac{m_{z_1}^\omega q S l^2}{I_{z_1} v} \left[\frac{c_y(\alpha) q S}{m v} - \frac{g}{v} \cos \theta \right]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Член $\frac{d}{dt} \left(\frac{g}{v} \cos \theta \right)$ обусловлен сравнительно медленным изменением скорости полета и угла θ , поэтому его роль в определении колебаний угла атаки незначительна и его можно отбросить.

Последний член в квадратных скобках определяет влияние изменения направления скорости полета из-за действия силы тяжести, его также можно отбросить. Вторым членом по сравнению с первым можно пренебречь, что видно из следующего:

$$\begin{aligned} - \frac{m_{z_1}(\alpha) q S l}{I_{z_1}} - c_y(\alpha) \frac{\rho S}{2m} \frac{dv}{dt} = \\ = - \frac{m_{z_1}(\alpha) \rho S l}{2 I_{z_1}} \left[v^2 + \frac{c_y(\alpha)}{m_{z_1}(\alpha)} \frac{I_{z_1}}{m} \frac{dv}{dt} \right], \end{aligned}$$

где $\frac{c_y(\alpha)}{m_{z_1}(\alpha)} \approx 10 \div 20$, а $\frac{I_{z_1}}{m} \approx 1$, поэтому

$$\left[v^2 + \frac{c_y(\alpha)}{m_{z_1}(\alpha)} \frac{I_{z_1}}{m} \frac{dv}{dt} \right] \approx v^2 + (10 \div 20) \frac{dv}{dt}.$$

В интересующей нас области $v = 1000 \div 7000$ м/с, $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{\max} \approx 100 \div 500$. Следовательно, $v^2 \gg (10 \div 20) \frac{dv}{dt}$, и вторым членом уравнения (8.8) по сравнению с первым можно пренебречь.

Кроме того, можно отбросить и первый член в квадратных скобках, так как величины, пропорциональные углу атаки α , мало сказываются на изменении амплитуды колебаний.

Таким образом, уравнение (8.8) приводится к виду

$$\ddot{\alpha} = -\frac{m_{z_1}(\alpha) q S l}{I_{z_1}} - \frac{\dot{\alpha} q S l^2}{I_{z_1} v} \left[m_{z_1}^{\omega} + \frac{I_{z_1} (\partial c_y / \partial \alpha)}{m l^2} \right].$$

Вводя обозначения

$$\frac{q S l^2}{I_{z_1} v} = A(t), \quad \frac{q S l}{I_{z_1}} = B(t), \quad m_{z_1}^{\omega} + \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \frac{I_{z_1}}{m l^2} = m_z^{\omega*},$$

получаем

$$\ddot{\alpha} = -A(t) m_z^{\omega*} \dot{\alpha} - B(t) m_{z_1}(\alpha). \quad (8.9)$$

Возвращаясь к системе (8.6), отметим, что в уравнении (8.6б) можно отбросить член $\frac{c_y(\alpha) q S}{m v}$, который определяет весьма малые быстрые колебания угла θ относительно медленно меняющегося среднего значения. В результате проведенных упрощений получим следующую систему:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c_x(\alpha) q S}{m} - g \sin \theta, \quad (8.10a)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{v} \cos \theta + \frac{v}{R+h} \cos \theta, \quad (8.10б)$$

$$\ddot{\alpha} = -A(t) m_z^{\omega*} \dot{\alpha} - B(t) m_{z_1}(\alpha), \quad (8.10в)$$

$$\frac{dh}{dt} = v \sin \theta, \quad (8.10г)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{v}{R+h} \cos \theta, \quad (8.10д)$$

$$x = (R+h) \sin \beta, \quad (8.10е)$$

$$y = (R+h) \cos \beta - R. \quad (8.10ж)$$

Приближенный метод интегрирования этой системы имеет смысл применять лишь на участке движения при больших скоростных напорах, где частота колебания становится большой, а амплитуда колебаний угла атаки меньше $40-60^\circ$ даже при начальном значении, близком к 180° . При этих условиях для большинства головных частей можно с достаточной степенью точности применять линейную зависимость коэффициента восстанавливающего момента от угла атаки

$$m_{z_1}(\alpha) = m_{z_1} \alpha.$$

Тогда уравнение (8.9) или, что то же самое, уравнение (8.10в) запишется в виде

$$\ddot{\alpha} = -A(t) m_{z_1}^{\omega*} \dot{\alpha} - B(t) m_{z_1} \alpha. \quad (8.11)$$

Для проведения дальнейших упрощений найдем производную от функции

$$a^2 = \alpha^2 + \frac{\dot{\alpha}^2}{B(t) m_{z_1}^{\alpha}}.$$

Дифференцируя a^2 по времени, имеем

$$2a\dot{a} = 2\alpha\dot{\alpha} + \frac{2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}}{B(t) m_{z_1}^{\alpha}} - \frac{\dot{\alpha}^2 \dot{B}(t)}{B^2(t) m_{z_1}^{\alpha}}. \quad (8.12)$$

Из уравнения (8.11) определяем

$$\alpha = - \frac{\ddot{\alpha}}{B(t) m_z^{\alpha}} - \frac{A(t) m_{z_1}^{\omega_*} \dot{\alpha}}{B(t) m_{z_1}^{\alpha}}$$

и подставляем в уравнение (8.12). В результате получаем

$$2a\dot{a} = - \frac{2\dot{\alpha}^2}{B(t) m_{z_1}^{\alpha}} \left[A(t) m_{z_1}^{\omega_*} + \frac{\dot{B}(t)}{2B(t)} \right]. \quad (8.13)$$

Введем новую переменную γ , определяемую из соотношения

$$a \sin \gamma = \alpha.$$

Тогда из (8.13) находим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \sqrt{B(t) m_{z_1}^{\alpha} (a^2 - \alpha^2)} = \sqrt{B(t) m_{z_1}^{\alpha} a^2 (1 - \sin^2 \gamma)} = \\ &= a \cos \gamma \sqrt{B(t) m_{z_1}^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Из уравнения (8.13) с учетом (8.14) получаем

$$\begin{aligned} 2\dot{a} &= - \frac{2B(t) m_{z_1}^{\alpha} a^2 \cos^2 \gamma}{aB(t) m_z^{\alpha}} \left[A(t) m_{z_1}^{\omega_*} + \frac{\dot{B}(t)}{2B(t)} \right] = \\ &= -a(1 - \cos 2\gamma) \left[A(t) m_{z_1}^{\omega_*} + \frac{\dot{B}(t)}{2B(t)} \right]. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Головная часть обычно является телом вращения, причем осью симметрии является ось, от которой отсчитывается угол α , поэтому функции $m_{z_1}^{\omega_*}(\alpha)$ и $c_x(\alpha)$ — четные функции угла атаки и на интервале $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$ могут быть достаточно точно выражены многочленами четвертой степени:

$$m_{z_1}^{\omega_*}(\alpha) = b_0 + b_1 \alpha^2 + b_2 \alpha^4,$$

$$c_x(\alpha) = c_0 + c_1 \alpha^2 + c_2 \alpha^4.$$

Для $M > 6$ эти функции можно считать не зависящими от M .

Подставим в полученные соотношения выражение $\alpha = a \sin \gamma$ и выделим колеблющуюся и неколеблющуюся части. Используя известные тригонометрические соотношения

$$\sin^2 \gamma = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2},$$

$$\sin^4 \gamma = \left(\frac{1 - \cos 2\gamma}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2\gamma + \frac{1}{8} (1 + \cos 4\gamma),$$

получаем

$$\begin{aligned}
 m_{z_1}^{\omega^*}(\alpha) &= b_0 + b_1 a^2 \sin^2 \gamma + b_2 a^4 \sin^4 \gamma = \\
 &= b_0 + \frac{1}{2} b_1 a^2 + \frac{3}{8} b_2 a^4 - \frac{1}{2} (b_1 a^2 + b_2 a^4) \cos 2\gamma + \frac{1}{8} b_2 a^4 \cos 4\gamma, \\
 c_x(\alpha) &= c_0 + \frac{1}{2} c_1 a^2 + \frac{3}{8} c_2 a^4 - \\
 &- \frac{1}{2} (c_1 a^2 + c_2 a^4) \cos^2 \gamma + \frac{1}{8} c_2 a^4 \cos 4\gamma.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Умножим выражение для $m_{z_1}^{\omega^*}(\alpha)$ на $1 + \cos 2\gamma$ и результат разложим по косинусам четных γ . Имеем

$$\begin{aligned}
 m_{z_1}^{\omega^*}(\alpha)(1 + \cos 2\gamma) &= b_0 + \frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4 + \left(b_0 - \frac{1}{16} b_2 a^4\right) \cos 2\gamma - \\
 &- \left(\frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4\right) \cos 4\gamma + \frac{1}{16} b_2 a^4 \cos 6\gamma.
 \end{aligned}$$

Теперь с учетом полученного результата уравнение (8.15) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 2\dot{a} &= -A \left(b_0 + \frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4 \right) a - \\
 &- \frac{\dot{B}}{2B} a - \frac{\dot{B}}{2B} a \cos 2\gamma - A a \left[\left(b_0 - \frac{1}{16} b_2 a^4 \right) \cos 2\gamma - \right. \\
 &- \left. \left(\frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4 \right) \cos 4\gamma + \frac{1}{16} b_2 a^4 \cos 6\gamma \right].
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

При интегрировании этого уравнения можно пренебречь интегралом от колеблющейся части, т.е. от последних двух слагаемых, так как из-за большой частоты колебаний угла атаки на данном участке движения эта знакопеременная функция имеет среднее значение, близкое к нулю. Таким образом, (8.17) принимает вид

$$2\dot{a} = -A \left(b_0 + \frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4 \right) a - \frac{\dot{B}}{2B} a. \tag{8.18}$$

Легко видеть, что уравнению (8.18) удовлетворяет решение

$$a = a_0 \sqrt[4]{\frac{q(t_0)}{q(t)}} \sqrt{w},$$

где w определяется из решения дифференциального уравнения

$$\dot{w} = -A \left(b_0 + \frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4 \right) w.$$

Это решение имеет вид

$$\dot{w} = w_0 e^{-\int_{t_0}^t A \left(b_0 + \frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4 \right) dt}$$

Полученная функция $a(t)$ есть огибающая углов атаки, величина, сравнительно медленно меняющаяся. Ее можно вычислять со значительно большим шагом, чем это допустимо при интегрировании уравнения (8.9). При самых неблагоприятных условиях шаг, равный 0,5 с или 1,0 с, вполне допустим. Учитывая принятую аппроксимацию аэродинамического коэффициента $c_x(\alpha)$ во втором соотношении (8.16) и отбрасывая в нем два последних слагаемых (колеблющуюся часть), уравнение (8.10а) следует интегрировать в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{qS}{m} \left(c_0 + \frac{1}{2} c_1 a^2 + \frac{3}{8} c_2 a^4 \right) - g \sin \theta.$$

Итак, мы получили следующую схему приближенного расчета движения ГЧ в атмосфере.

Начальный участок траектории, на котором движение относительно центра масс еще не перешло в колебательное, и участок с большим периодом и малой частотой колебаний рассчитываются интегрированием системы уравнений (8.6).

Начиная с некоторого момента, когда период колебаний уменьшится до нескольких секунд (3–10 с), для интегрирования системы (8.6) требуется применять малый шаг. В этих случаях расчет проводится по следующей системе уравнений:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{qS}{m} \left(c_0 + \frac{1}{2} c_1 a^2 + \frac{3}{8} c_2 a^4 \right) - g \sin \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{v} \cos \theta - \frac{v}{R+h} \cos \theta,$$

$$a(t) = a(t^*) \sqrt[4]{\frac{q(t^*)}{q(t)}} \sqrt{w} =$$

$$= a(t^*) \sqrt[4]{\frac{q(t^*)}{q(t)}} \sqrt{w_0} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t^*}^t A \left(b_0 + \frac{1}{4} b_1 a^2 + \frac{1}{8} b_2 a^4 \right) dt \right\},$$

$$\frac{dh}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{v}{R+h} \cos \theta,$$

где $w_0 = 1$ при $t = t^*$, а t^* — начальная точка перехода к новой системе уравнений.

Частота колебаний

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{qS l}{I_{z_1}} m_{z_1}^\alpha}.$$

Амплитудное значение угловой скорости определяется выражением

$$\begin{aligned}\bar{\dot{\alpha}} &= \bar{\alpha} 2\pi\Omega = \bar{\alpha}(t^*)^4 \sqrt{\frac{q(t^*)}{q(t)}} \sqrt{w} \sqrt{\frac{qSI}{I_{z_1}}} m_{z_1}^\alpha = \\ &= \bar{\alpha}(t^*)^4 \sqrt{q(t^*)q(t)} \sqrt{w} \sqrt{\frac{SI m_{z_1}^\alpha}{I_{z_1}}}\end{aligned}$$

Таким образом, если движение относительно центра масс приняло колебательный характер и в диапазоне колебаний коэффициент $m_{z_1}(\alpha)$ линейно зависит от α , то изменение амплитудного значения угла атаки по времени $\alpha(t)$ обратно пропорционально корню четвертой степени из отношения скоростного напора к начальному его значению. Такой эффект обусловлен действием изменяющегося во времени восстанавливающего момента $M_{z_1} = m_{z_1}(\alpha) qSI$ или, точнее, изменением производной

$$M_{z_1}^\alpha = \frac{\partial M_{z_1}}{\partial \alpha}.$$

Затухание колебаний обуславливается действием демпфирующего момента.

В процессе полета амплитудное значение угла атаки $\bar{\alpha}$ уменьшается при увеличении q до q_{\max} , а затем начинает вновь увеличиваться. При этом благодаря интегральному эффекту демпфирования энергия уменьшается и амплитудные значения углов атаки при равных значениях q , взятых на участках до q_{\max} и после q_{\max} , не одинаковы. Они больше на участке возрастания q и меньше на участке падения q .

Мы здесь не коснулись некоторых дополнительных моментов, связанных с движением головных частей. Прежде всего заметим, что рассмотренный нами случай распространяется только на плоские колебания, происходящие в плоскости движения ГЧ. Между тем ГЧ при отделении от носителя получает некоторую угловую скорость, ориентированную в общем случае произвольным образом. Это приводит при входе в атмосферу, во-первых, к случайной ориентации осей ГЧ относительно скорости и, во-вторых, к наличию угловой скорости, направление которой не обязательно совпадает с нормалью к плоскости, в которой происходит движение. Таким образом, уже в начальных условиях движения заложена причина того, что колебания могут и даже должны иметь пространственный характер. Однако этот вопрос выходит за рамки нашей книги.

При движении неуправляемой ГЧ интересными являются также вопросы учета влияния ветра и поперечного смещения центра масс относительно продольной оси на отклонения траектории от расчетной. Эти и некоторые другие вопросы, связанные с особенностями движения ГЧ, освещены в [19].

§ 8.2. Приближенное решение уравнений невозмущенного движения головной части в плотных слоях атмосферы

Во многих случаях возникает необходимость в быстром определении некоторых важных характеристик движения ГЧ, например максимальной осевой перегрузки $n_{x_1 \max}$ или скорости полета в момент достижения $n_{x_1 \max}$. Подобные задачи можно решать более простыми способами, нежели непо-

средственное интегрирование системы уравнения движения, если принять некоторые упрощающие предположения.

Рассмотрим уравнения невозмущенного движения в скоростных осях:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c_x \rho v^2}{2m} S - g \sin \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{v} \cos \theta + \frac{v}{R+h} \cos \theta, \quad (8.19)$$

$$\frac{dh}{dt} = v \sin \theta.$$

Характерным для движения ГЧ является то обстоятельство, что наиболее интенсивное падение скорости и воздействие больших аэродинамических нагрузок происходят на сравнительно небольшом отрезке времени, при этом высота полета, как правило, составляет менее 35–40 км.

Примем следующие допущения: в первом уравнении (8.19) член $g \sin \theta$ по сравнению с первым членом мал и им можно пренебречь на интересующем нас участке полета $\theta = \text{const}$; плотность воздуха в зависимости от высоты изменяется по экспоненциальному закону $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$.

Последнее допущение серьезных возражений вызвать не может, так как достаточно хорошо описывает среднее состояние плотности атмосферы. Поэтому оценим только справедливость первых двух допущений.

Как известно, работа сил сопротивления на рассматриваемом участке полета столь велика, что именно она способствует практически полному поглощению начальной кинетической энергии, которой обладала ГЧ при входе в атмосферу¹⁾. Так, головная часть, имеющая на высоте, примерно равной 60 км, скорость 6000 м/с, обладает кинетической энергией (отнесенной к единице массы), равной $v^2/2 = 6000^2/2 = 18 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Через несколько десятков секунд на высоте 2–5 км она уже движется с почти установившейся скоростью, как правило, не выше 250 м/с. Энергия на единицу массы теперь составляет $250^2/2 \approx 3 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{с}^2$, что менее 0,2% от значения начальной энергии.

Таким образом, работа сил сопротивления поглотила почти всю энергию. На этом же участке работу сил притяжения, отнесенную также к единице массы и действующую в сторону увеличения скорости полета, оценим величиной $g \Delta h \approx 10 \cdot 50000 = 50 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{с}^2$ (Δh — путь в направлении действия ускорения g , принятый равным 50 км). Эта работа составляет не более 3% от работы сил сопротивления. Таким образом, убеждаемся, что в первом уравнении (8.19) членом $g \sin \theta$ сравнительно с членом

$$\frac{c_x \rho v^2}{2m} S \text{ действительно можно пренебречь.}$$

¹⁾ Условно за высоту начала входа в атмосферу можно принять высоту, на которой заметно начинают сказываться аэродинамические силы (например, достигается перегрузка около 0,1).

Теперь оценим изменение угла θ на участке интенсивного торможения. Если принять $v = 6000$ м/с, $h = 60\,000$ м, $\theta = 30^\circ$, то

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g}{v} \cos \theta + \frac{v}{r} \cos \theta = -\left(\frac{g}{v} - \frac{v}{r}\right) \cos \theta = \\ &= -\left(\frac{10}{6000} - \frac{6000}{6430 \cdot 10^3}\right) \cos 30^\circ \approx -0,0005 \text{ 1/с.} \end{aligned}$$

За 30 с полета угол θ изменится на

$$\Delta\theta \approx -0,0005 \cdot 30 = -0,015 \text{ рад} \approx -1^\circ.$$

Если учесть, что угловая скорость $\dot{\theta}$ по мере падения скорости может возрастать, то в реальных условиях полета изменение угла θ может быть несколько больше. Однако это не мешает для приближенных оценок принять допущение $\theta = \text{const} = \theta_0$.

Далее мы примем, что на рассматриваемом участке неизменными остаются также c_x , m и S , т.е. баллистический коэффициент $c_x S / (2m)$. Это допустимо, потому что изменение m и S обычно бывает очень незначительное, а c_x на гиперзвуковых скоростях практически не зависит от скорости. Теперь первое уравнение (8.19) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c_x \rho v^2}{2m} S = -\frac{c_x \rho_0 S}{2m} v^2 e^{-\beta h}. \quad (8.20)$$

Учитывая, что

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{dv}{dh} v \sin \theta,$$

получаем

$$\frac{dv}{dh} v \sin \theta = -\frac{c_x \rho_0 S}{2m} v^2 e^{-\beta h}$$

или

$$\frac{dv}{v} = -\frac{c_x \rho_0 S}{2m \sin \theta} e^{-\beta h} dh.$$

Обозначая постоянный коэффициент

$$\lambda = \frac{c_x \rho_0 S}{2m \sin \theta},$$

находим

$$\frac{dv}{v} = -\lambda e^{-\beta h} dh. \quad (8.21)$$

Интегрируя (8.21) в пределах от v_0 до v и от h_0 до h , имеем

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{\lambda}{\beta} (e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0})$$

или

$$v = v_0 e^{\frac{\lambda}{\beta} (e^{-\beta h} - e^{-\beta h_0})} \quad (8.22)$$

Выражение (8.22) позволяет вычислить скорость на любой высоте, не прибегая к интегрированию уравнений движения. Для дальнейшего анализа удобно (8.22) представить в виде

$$v = v_0 e^{-\frac{\lambda}{\beta} e^{-\beta h_0}} e^{\frac{\lambda}{\beta} e^{-\beta h}} \quad (8.23)$$

Подставим (8.23) в уравнение (8.20):

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v_0^2 \sin \theta e^{-\frac{2\lambda}{\beta} e^{-\beta h_0}} e^{\frac{2\lambda}{\beta} e^{-\beta h}}$$

Ускорение dv/dt , а вместе с ним и осевая перегрузка достигнут максимального значения тогда, когда достигнет максимума переменная

$$\text{часть } e^{\frac{2\lambda}{\beta} e^{-\beta h}}$$

Дифференцируя по h и приравнявая производную нулю, после несложных преобразований получаем

$$\frac{2\lambda}{\beta} e^{-\beta h} + 1 = 0$$

или

$$e^{-\beta h} = -\frac{\beta}{2\lambda} \quad (8.24)$$

Отсюда находим высоту полета, на которой перегрузка достигает максимального значения:

$$h_{n_x \max} = -\frac{1}{\beta} \ln \left(-\frac{\beta}{2\lambda} \right) \quad (8.25)$$

Величина $\left(-\frac{\beta}{2\lambda} \right)$ под знаком логарифма положительна, так как в выражении

$$\lambda = \frac{c_x \rho_0 S}{2m \sin \theta}$$

угол θ и $\sin \theta$ отрицательны.

Интересно отметить, что высота, на которой достигается максимальная перегрузка, не зависит от начальной скорости, а зависит только от угла входа и массово-геометрических характеристик ГЧ.

Для определения максимума $|dv/dt|$ подставим (8.25) в (8.20) и, проведя необходимые сокращения, получим

$$\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = v_0^2 \frac{\beta \sin \theta}{2e} e^{-\frac{2\lambda}{\beta} e^{-\beta h_0}}$$

Если начальная высота h_0 выбрана достаточно большой, то величина $e^{-\frac{2\lambda}{\beta}e^{-\beta h_0}}$ близка к единице. Тогда можно записать

$$\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = v_0^2 \frac{\beta \sin \theta}{2e}.$$

Для определения перегрузки достаточно в данном случае разделить dv/dt на g :

$$n_{x \max} = v_0^2 \frac{\beta \sin \theta}{2ge}. \quad (8.26)$$

Полученный результат весьма любопытен: оказывается, максимальная перегрузка не зависит ни от массы, ни от формы ГЧ, а зависит только от начальной скорости и угла входа в атмосферу. Этот важный вывод позволяет получить нужные данные для определения нагрузок на ГЧ при одном из основных случаев нагружения (а именно при $n_{x \max}$) без проведения расчета траектории.

Можно легко определить и скорость в момент достижения $n_{x \max}$. Для этого достаточно подставить (8.24) в (8.23). Получим

$$\dot{v}_{n_{x \max}} = v_0 e^{-\frac{\lambda}{\beta}e^{-\beta h_0}} - \frac{1}{2}.$$

Если учесть, что

$$e^{-\frac{2\lambda}{\beta}e^{-\beta h_0}} \approx 1,$$

то

$$v_{n_{x \max}} = \frac{1}{\sqrt{e}} v_0 = 0,61 v_0. \quad (8.27)$$

Формула (8.27) показывает, что независимо от массово-геометрических характеристик ГЧ и угла входа скорость ее при достижении максимальной перегрузки всегда равна 0,61 начальной скорости.

Возвращаясь к формуле (8.26), подставим в нее известные значения постоянных величин, причем примем во внимание, что коэффициент β является, вообще говоря, величиной переменной, зависящей от высоты, а именно: $\beta = g/RT(h)$. Примем $T = 216$ К, так как это значение соответствует интервалу высот от 10 до 30 км, на котором и достигается, как правило, максимальная перегрузка, которую можно определить по формуле

$$|n_x|_{\max} = v_0^2 \frac{\beta \sin \theta}{2ge} = v_0^2 \frac{\sin \theta}{2eRT}. \quad (8.28)$$

В числовом выражении, если измерять скорость в м/с,

$$|n_x|_{\max} = 2,96 \cdot 10^{-6} v_0^2 \sin \theta \approx 3 \cdot 10^{-6} v_0^2 \sin \theta.$$

Если измерять скорость в км/с, то

$$|n_x|_{\max} \approx 3v_0^2 \sin \theta. \quad (8.29)$$

Формулы (8.28) и (8.29) справедливы, если начальные условия (т.е. v_0 и θ_0) соответствуют высоте, на которой начинается заметное влияние сопротивления атмосферы. Но, как правило, за начальные условия принимаются параметры движения на несколько больших высотах, например на высоте 100 км. Поскольку после прохождения этой высоты скорость еще некоторое время продолжает нарастать, то при использовании в качестве начальных условий параметров движения на высоте 100 км необходимо в формулы (8.28) и (8.29) внести некоторую поправку. Эмпирически установлено, что для этого достаточно увеличить коэффициент в правых частях этих формул на 7 – 10%, т.е. записать их соответственно таким образом:

$$|n_x|_{\max} = (3,1 \div 3,3) \cdot 10^{-6} v_0^2 \sin \theta_0 \quad (v_0 \text{ в м/с})$$

и

$$|n_x|_{\max} = (3,1 \div 3,3) v_0^2 \sin \theta_0 \quad (v_0 \text{ в км/с}).$$

Глава 9

ТЕОРИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВА ДВИЖЕНИЯ

Движение ЛА на участке свободного полета происходит под действием сил, различных как по своей природе, так и по степени воздействия на движение ЛА. Источники силового воздействия могут быть самыми разнообразными: гравитационное притяжение со стороны Земли, Солнца и планет, сопротивление земной атмосферы, световое давление и т.д. Разнообразен и порядок величин силового воздействия, причем в различных полетах или на различных фазах одного и того же полета относительный вклад источников воздействия на движение ЛА может существенно меняться. Так, например, при осуществлении полета Земля – Марс источники определяющего воздействия будут меняться в следующей последовательности: гравитационное поле и атмосфера Земли, гравитационное поле Земли, гравитационное поле Солнца, гравитационное поле Марса, гравитационное поле и атмосфера Марса.

Ограничимся рассмотрением движения ЛА в предположении, что не только определяющим, но и единственным источником силового воздействия на ЛА является гравитационное поле Земли. Будем полагать, что гравитационное поле является центральным, т.е. его силовое воздействие подчиняется ньютонову закону притяжения массы ЛА массой Земли, сосредоточенной в ее центре, и при этом масса ЛА пренебрежимо мала по сравнению с массой Земли. В принятых предположениях мы приходим к классической ограниченной задаче двух тел, исследование и решение которой составляет предмет теории невозмущенного кеплерова движения.

В результате обработки многолетних наблюдений движения Марса и других планет Кеплер сформулировал следующие законы:

1. Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

2. Движение каждой планеты происходит в неподвижной плоскости, проходящей через центр Солнца, притом так, что площадь сектора, описываемого радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени.

3. Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Ниже излагаются наиболее существенные вопросы теории невозмущенного кеплерова движения.

Будем рассматривать движение тела массы m в некоторой инерциальной системе координат, начало которой совпадает с центром притяжения гра-

вitiрующего тела. В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения тела имеет вид

$$F = mW,$$

где F и W — вектор силы, действующей на тело, и вектор ускорения, сообщаемого телу этой силой.

Единственным источником силового воздействия на тело, движущееся в центральном поле, является гравитационная сила, и поэтому (см. гл. 2)

$$F = -m \operatorname{grad} U = -m \frac{\mu}{r^3} r.$$

Таким образом, уравнение движения тела в центральном гравитационном поле принимает вид

$$\ddot{r} + \frac{\mu}{r^3} r = 0, \quad (9.1)$$

поскольку $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = W$.

Как мы увидим далее, уравнение (9.1), являющееся прямым следствием законов Ньютона, позволяет математически достаточно просто вывести закономерности, установленные Кеплером экспериментальным путем.

§ 9.1. Первые интегралы движения

9.1.1. Интеграл площадей. Умножим (9.1) векторно на r :

$$r \times \ddot{r} + \frac{\mu}{r^3} r \times r = r \times \ddot{r} = 0.$$

Но векторное произведение $r \times \ddot{r}$ есть производная по времени от произведения $r \times \dot{r}$; действительно,

$$\frac{d}{dt} (r \times \dot{r}) = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} = r \times \ddot{r}.$$

Таким образом, при движении в центральном поле

$$\frac{d}{dt} (r \times \dot{r}) = \frac{d}{dt} (r \times V) = 0.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$r \times \dot{r} = r \times V = c. \quad (9.2)$$

Формула (9.2) отражает зависимость между радиусом-вектором и вектором скорости тела при его движении в центральном поле. Эту зависимость называют *векторным интегралом площадей*, а вектор c , неизменный во времени, — *векторной константой площадей*.

Полученный результат значительно облегчает анализ движения тела в центральном поле. Действительно, из определения векторного произведения следует, что если вектор c не нулевой, то он ортогонален векторам

\mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$. Постоянство вектора \mathbf{c} во времени означает, что в любой момент времени векторы \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ принадлежат плоскости, ортогональной вектору \mathbf{c} . А поскольку начало вектора \mathbf{r} совпадает с центром притяжения, то движение тела происходит в постоянной (фиксированной) плоскости, проходящей через центр притяжения.

Найдем покомпонентную форму записи интеграла площадей. Если оси геоцентрической инерциальной системы координат заданы ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$,

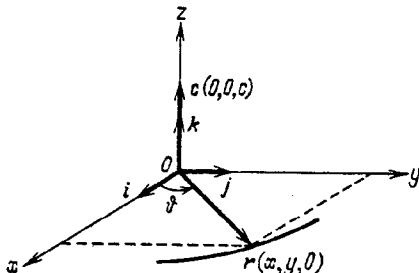


Рис. 9.1. Орбитальная геоцентрическая инерциальная система координат

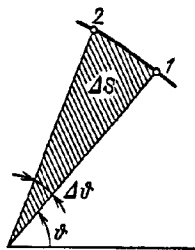


Рис. 9.2. К определению секториальной скорости – производной dS/dt

а радиус-вектор тела, вектор его скорости и вектор \mathbf{c} имеют вид

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k},$$

то по определению векторного произведения

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (y\dot{z} - z\dot{y})\mathbf{i} + (z\dot{x} - x\dot{z})\mathbf{j} + (x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{k}.$$

Систему координат можно выбрать так (рис. 9.1), чтобы орт \mathbf{k} системы был направлен по вектору \mathbf{c} . В такой системе

$$\mathbf{r} = (x, y, 0)^T, \quad \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)^T, \quad \mathbf{c} = (0, 0, c)^T,$$

причем $c = x\dot{y} - y\dot{x}$.

В выбранной нами координатной системе перейдем к полярным координатам $x = r \cos \vartheta$ и $y = r \sin \vartheta$. В новых переменных

$$c = x\dot{y} - y\dot{x} = r \cos \vartheta (\dot{r} \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta) - r \sin \vartheta (\dot{r} \cos \vartheta - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta) = r^2 \dot{\vartheta},$$

т.е. интеграл площадей принимает форму

$$c = r^2 \dot{\vartheta} = \text{const}, \quad (9.3)$$

позволяющую сделать некоторые важные выводы:

1. Если (9.3) записать в виде $\dot{\vartheta} = c/r^2$, то становится очевидным, что угловая скорость $\dot{\vartheta}$ движения тела по орбите с заданным $c = \text{const}$ тем меньше, чем более удалено тело от центра притяжения.

2. Пусть за малый промежуток времени Δt тело в орбитальном движении переместится из точки 1 в точку 2 (рис. 9.2). Радиус-вектор тела при этом сместится на некоторый малый угол $\Delta \vartheta$, описав площадь сектора ΔS . С точностью до величины, порядок малости которой выше, чем порядок $\Delta \vartheta$, площадь сектора определится выражением $\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta \vartheta$.

Рассматривая предел отношения $\Delta S/\Delta t$ при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} = \frac{1}{2} c.$$

Производная dS/dt называется *секториальной скоростью*, а полученное нами выражение говорит о постоянстве такой скорости при движении тела в центральном поле.

Площадь, которая будет описана радиусом-вектором тела за время полета от момента t_1 до момента t_2 , определяется интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dS = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} c dt = \frac{1}{2} c(t_2 - t_1).$$

Этим результатом мы завершили доказательство утверждения Кеплера, сформулированного в его втором законе.

9.1.2. Интеграл Лапласа. Запишем уравнение движения и интеграл площадей в форме

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

и умножим векторно друг на друга соответственно левые и правые части этих выражений:

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}).$$

Преобразовзв правую часть результата по формуле двойного векторного произведения $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, получим

$$-\frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] = -\frac{\mu}{r^2} \left[\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r} - \frac{\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r} \right].$$

Очевидно, что $\frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r} = \dot{r}$, а $\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r}$ есть проекция $\dot{\mathbf{r}}$ вектора скорости $\dot{\mathbf{r}}$ на

направление радиуса-вектора \mathbf{r} . Тогда $\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = -\mu \frac{\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r} - r\dot{\mathbf{r}}}{r^2}$.

Легко убедиться, что $-\frac{\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r} - r\dot{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$, а $\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c})$, поскольку \mathbf{c} есть вектор-константа. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}) - \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{f}, \tag{9.4}$$

где \mathbf{f} — векторная константа интегрирования.

Соотношение (9.4) называется *векторным интегралом Лапласа*, а вектор \mathbf{f} — *вектором Лапласа*.

Рассмотрим скалярное произведение векторов \mathbf{c} и \mathbf{f} :

$$(\mathbf{c} \cdot \mathbf{f}) = \mathbf{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}) - \frac{\mu}{r} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}).$$

Поскольку векторы $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}$ и \mathbf{r} ортогональны вектору \mathbf{c} по определению, то $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{f}) = 0$. Это означает, что вектор Лапласа \mathbf{f} лежит в плоскости орбиты.

Физический смысл вектора Лапласа мы выясним позднее, сейчас же отметим, что в точках орбиты, в которых вектор скорости $\dot{\mathbf{r}}$ ортогонален радиусу-вектору \mathbf{r} , вектор Лапласа и радиус-вектор коллинеарны. Этот вывод следует непосредственно из рассмотрения векторного умножения (9.4) на \mathbf{r} .

9.1.3. Интеграл энергии. Умножим уравнение движения (9.1) скалярно на $2\dot{\mathbf{r}}$:

$$2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) + \frac{2\mu}{r^3} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = 0.$$

Очевидно, что $\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}})$, $\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})$.

Поскольку $(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) = V^2$, $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r^2$, результат скалярного умножения уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} (V^2) + \frac{\mu}{r^3} \cdot \frac{d}{dt} (r^2) = \frac{d}{dt} (V^2) - \frac{d}{dt} \left(\frac{2\mu}{r} \right) = 0.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h, \quad (9.5)$$

где h — скалярная константа интегрирования.

Формула (9.5) называется *интегралом энергии* (или *интегралом живых сил*), а h — *константой энергии*.

В случае ньютонова поля величина $-\frac{\mu}{r}$ есть потенциальная энергия тела единичной массы, расположенного на расстоянии r от центра притяжения. Физический смысл величины: это — работа, которую нужно выполнить против силового воздействия поля для удаления тела единичной массы с расстояния r от центра притяжения до расстояния $r = \infty$, т.е. в бесконечно удаленную точку. Отсчет величины потенциальной энергии ведется от ее максимального значения, равного нулю и достигаемого при $r = \infty$.

Перепишем (9.5) в виде

$$\frac{mV^2}{2} + \left(-m \frac{\mu}{r} \right) = \frac{mh}{2}.$$

В такой форме записи слагаемое $mV^2/2$ есть кинетическая энергия тела массы m , $\left(-m \frac{\mu}{r} \right)$ — его потенциальная энергия, а их сумма $mh/2$ — полная энергия тела, движущегося в центральном поле. Таким образом,

интеграл (9.5) показывает, что полная энергия тела в течение всего времени его невозмущенного движения остается постоянной.

Из интеграла энергии следуют очевидные выводы:

1) скорость движения тела убывает с удалением его от притягивающего центра и наоборот;

2) в соответствии с (9.5) величина h в зависимости от соотношения V и r может быть отрицательной, положительной и нулевой величиной. При этом поскольку $V^2 \geq 0$, то и $h + \frac{2\mu}{r} \geq 0$.

Пусть $h < 0$. Тогда неравенство $h + \frac{2\mu}{r} \geq 0$ будет выполняться только при $r \leq \frac{2\mu}{|h|}$, т.е. при ограниченном удалении тела от центра притяжения.

Пусть $h = 0$. Тогда допустимо как угодно большое удаление тела и $V \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Пусть $h > 0$. В этом случае также отсутствует ограничение на удаление тела от центра притяжения, но при $r \rightarrow \infty$ скорость движения тела $V \rightarrow \sqrt{h} = V_\infty$. Предельное значение скорости на бесконечно большом удалении называется *скоростью на бесконечности*.

Сделаем два замечания к полученным интегралам.

1. Интегралы площадей и энергии отражают действие общих законов механики применительно к движению тела в центральном гравитационном поле – соответственно закона сохранения момента количества движения и закона сохранения энергии.

2. В координатной записи уравнение движения (9.1) представляет собой систему трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3}x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3}y = 0, \quad \ddot{z} + \frac{\mu}{r^3}z = 0,$$

где $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, которую можно записать и в виде системы шести уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}y,$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}z.$$

Поскольку уравнение движения эквивалентно системе шести дифференциальных уравнений первого порядка, его общий интеграл должен состоять из шести независимых первых интегралов.

Мы нашли семь первых интегралов: три компоненты интеграла площадей, три компоненты интеграла Лапласа и интеграл энергии. Однако совокупность этих интегралов не может составить общий интеграл системы, так как, во-первых, ни один из них не содержит явно независимую переменную системы – время, а во-вторых, сами интегралы не являются независимыми. Действительно, мы уже получили зависимость между компонентами векторов c и f : $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$. Существует еще одна зависимость между найденными интегралами

$$f^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = (\dot{r} \times c)^2 - \frac{2\mu}{r} (r \cdot (\dot{r} \times c)) + \frac{\mu^2}{r^2} r^2 = \left(V^2 - \frac{2\mu}{r} \right) c^2 + \mu^2 = h(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \mu^2, \quad (9.6)$$

где f^2 вычисляется как скалярное произведение левой части (9.4) самой на себя; квадрат векторного произведения ортогональных векторов \mathbf{r} и \mathbf{c} равен произведению их скалярных квадратов; $|\dot{\mathbf{r}}| = V$; $\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})) = c^2$.

Итак, из семи констант интегрирования $c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3$ и h любые две можно выразить через пять остальных, т.е. не более пяти констант являются независимыми, а поэтому вопрос об общем интеграле пока остается открытым.

§ 9.2. Уравнение орбиты

Умножим левую и правую части векторного интеграла Лапласа (9.4) скалярно на \mathbf{r} :

$$(\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c})) - \mu \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}). \quad (9.7)$$

Как известно, множители смешанного произведения векторов можно переставлять циклически, откуда

$$(\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c})) = (\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = c^2.$$

Пусть, далее, ϑ есть угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{f} . Тогда (9.7) приводится к виду $c^2 - \mu r = r f \cos \vartheta$ или

$$r = \frac{c^2}{\mu + f \cos \vartheta} = \frac{c^2/\mu}{1 + \frac{f}{\mu} \cos \vartheta}.$$

Введем обозначения

$$p = c^2/\mu, \quad (9.8)$$

$$e = f/\mu. \quad (9.9)$$

С учетом этих обозначений приходим к окончательному виду уравнения орбиты тела, движущегося в центральном поле:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (9.10)$$

Из аналитической геометрии известно, что (9.10) есть уравнение кривой второго порядка (конического сечения) в полярных координатах; полярная ось кривой (рис. 9.3) направлена от фокуса кривой (совпадающего с центром притяжения) к ее ближайшей вершине; p — *фокальный параметр*; e — *эксцентриситет* кривой; угол ϑ , характеризующий положение точки на кривой, называется *истинной аномалией*.

Уравнение (9.10) является математическим выражением первого закона Кеплера.

Если $p \neq 0$, то при $e = 0$ коническое сечение есть окружность, при $e < 1$ — эллипс, при $e = 1$ — парабола, при $e > 1$ — гипербола. В соответствии с этими кривыми и орбиты называются *круговой*, *эллиптической*, *параболической* и *гиперболической*.

Случай $p = 0$ является вырожденным случаем движения по прямолинейной (иногда говорят вертикальной) орбите; прямолинейное движение может относиться к эллиптическому, параболическому или гиперболическому типу в зависимости от того, какова величина константы энергии. В дальнейшем, если не оговорено особо, будем всегда полагать $p \neq 0$.

Из (9.10) следует, что при $e > 0$ ближайшей к фокусу вершине кривой соответствует угол $\vartheta = 0$, т.е. полярная ось совпадает с вектором Лапласа \mathbf{f} (см. рис. 9.3). Прямая, совпадающая с вектором \mathbf{f} , называется *линией апсид* или *апсидальной осью* орбиты. Точка орбиты, минимально удаленная от фокуса (или центра притяжения), называется *перигентром* орбиты. Расстояние до перигентра орбиты r_π определится, если в (9.10) положить $\vartheta = 0$:

$$r_\pi = \frac{p}{1 + e}.$$

При движении по эллиптической орбите ($0 < e < 1$) тело проходит точку максимального удаления от центра притяжения — *апоцентр*. Расстояние

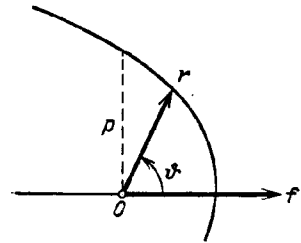


Рис. 9.3. К описанию орбиты в полярной системе координат

до апоцентра r_α также находится из (9.10), если положить $\vartheta = \pi$:

$$r_\alpha = \frac{p}{1 - e}.$$

И перигентр и апоцентр орбиты находятся на пересечении орбиты с апсидальной осью, поэтому иногда их называют *апсидальными точками* орбиты. В случае движения в поле Земли апсидальные точки называются *апогеем* и *перигеем*, при движении в поле Солнца — *афелием* и *перигелием*.

Величина фокального параметра (или просто параметра) p , соответствующая удалению от центра притяжения при $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$, характеризует размер орбиты. Действительно, при заданном значении эксцентриситета e , характеризующего форму орбиты, множитель p в (9.10) является как бы масштабным коэффициентом.

Поскольку в соответствии с (9.8) и (9.9) $c = \sqrt{\mu p}$ и $f = e\mu$, то размер и форму орбиты определяют и модули векторов \mathbf{c} и \mathbf{f} . Кроме того, векторы \mathbf{c} и \mathbf{f} задают соответственно положение плоскости орбиты и ориентацию линии апсид в этой плоскости. Поэтому можно сказать, что векторы \mathbf{c} и \mathbf{f} полностью характеризуют геометрические свойства орбиты в кеплеровом движении.

Определение типа орбиты можно проводить и по величине постоянной энергии h . В этом легко убедиться, если воспользоваться соотношением (9.6) между произвольными постоянными первых интегралов и записать его с учетом (9.9) в форме

$$\mu^2(e^2 - 1) = hc^2. \quad (9.11)$$

Из (9.11) следует, что:

если $h < 0$, то $e < 1$ и орбита есть эллипс или окружность,

если $h = 0$, то $e = 1$ и орбита есть парабола,

если $h > 0$, то $e > 1$ и орбита есть гипербола.

§ 9.3. Скорость орбитального движения

Как следует из интеграла энергии (9.5), величина постоянной h зависит от соотношения радиального расстояния и скорости тела в произвольной рассматриваемой точке орбиты (будем называть эту точку начальной и отмечать индексом "нуль"):

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}.$$

В соответствии с анализом типа орбиты по величине h имеем: если $V_0^2 < 2\mu/r_0$ ($h < 0$), то движение эллиптическое; если $V_0^2 = 2\mu/r_0$ ($h = 0$), то движение параболическое; если $V_0^2 > 2\mu/r_0$ ($h > 0$), то движение гиперболическое.

Начальная скорость, удовлетворяющая одному из этих условий, называется соответственно *эллиптической, параболической или гиперболической*.

В случае кругового движения модуль векторной константы площадей $c = \sqrt{\mu p} = rV$ и, поскольку для такого движения $r \equiv p$, скорость кругового

$$\text{движения } V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$$

Рассмотрим вырожденный случай движения — движение по вертикальной орбите. Для такой орбиты $c = 0$ и, как следует из (9.11), $e = 1$. Для вертикального движения наиболее ясно видно (хотя это справедливо для движения по любой орбите), что изменение скорости при движении тела (или его кинетической энергии) происходит за счет совершения работы против силы тяготения, т.е. за счет изменения потенциальной энергии тела. Величина h показывает, каков запас кинетической энергии по отношению к той работе, которую нужно совершить против силы тяготения, чтобы удалиться от центра притяжения на $r = \infty$. При отрицательном запасе $h < 0$ (эллиптический тип движения) удаление тела от центра притяжения ограничено, при $h = 0$ (параболический тип) вся кинетическая энергия тела расходуется на преодоление тяготения, при $h > 0$ (гиперболический тип) тело может выйти на $r = \infty$ с ненулевой кинетической энергией, характеризующейся скоростью на "бесконечности" V_∞ .

Круговая скорость $V_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$, вычисленная у поверхности планеты, если за модель планеты принят шар со сферическим распределением плотности, называется *первой космической скоростью* относительно данной планеты. Под *второй космической скоростью* понимают параболическую скорость $V_{\text{пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, определенную на уровне поверхности планеты.

Для случая движения в гравитационном поле Земли $V_{\text{кр}} \approx 7,91$ км/с, $V_{\text{пар}} \approx 11,19$ км/с.

Проекции вектора скорости на направление радиуса-вектора V_r и нормаль к радиусу-вектору в плоскости орбиты V_n называют в механике соответственно *радиальной* и *трансверсальной* компонентами скорости или просто радиальной и трансверсальной скоростями (рис. 9.4). Для определения величин этих компонент воспользуемся интегралом площадей в

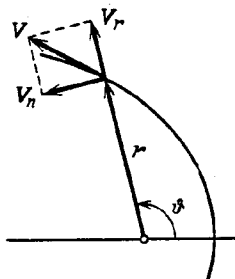


Рис. 9.4. Трансверсальная V_n и радиальная V_r компоненты орбитальной скорости

форме (9.3). С учетом (9.8) получим

$$\dot{\vartheta} = \frac{c}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}.$$

Дифференцируя (9.10) по времени и используя выражение для $\dot{\vartheta}$, находим значение радиальной компоненты скорости

$$V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta. \quad (9.12)$$

Поскольку $V_n = r \dot{\vartheta}$, то

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \quad (9.13)$$

По компонентам находится и величина скорости:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_n^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p} (1 + 2e \cos \vartheta + e^2)}. \quad (9.14)$$

Из формулы (9.14) видно, что максимальное значение скорости достигается в перигентре орбиты ($\vartheta = 0$):

$$V_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e).$$

С удалением от перигентра величина орбитальной скорости падает, и в случае эллиптического движения минимальное значение скорости достигается в апоцентре орбиты ($\vartheta = \pi$):

$$V_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - e).$$

В соответствии с (9.12) скорость в апсидальных точках не имеет радиальной компоненты, т.е. направлена по трансверсали (для эллиптического движения таких точек две, а для параболического и гиперболического — по одной). Из этой же формулы следует, что при круговом движении ($e = 0$) скорость в любой точке орбиты имеет только трансверсальную составляющую:

$$V = V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}}.$$

Определим значение скорости на "бесконечности" при гиперболическом движении. Для этого прежде всего определим предельное значение истинной



Рис. 9.5. Угол θ наклона вектора орбитальной скорости к местному горизонту (штриховой линией показана линия местного горизонта)

аномалии при удалении тела на "бесконечность". Это значение находится из уравнения орбиты (9.10) при $r \rightarrow \infty$: $\cos \vartheta_\infty = \frac{1}{e}$. Но тогда при $r \rightarrow \infty$ имеем $V_n \rightarrow 0$, а $V_r \rightarrow \pm \sqrt{\frac{\mu}{p} (e^2 - 1)}$, т.е. с удалением тела на "бесконечность" исчезает трансверсальная компонента скорости, а модуль скорости стремится к $V_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{p} (e^2 - 1)}$.

Как было отмечено в начале настоящего параграфа, при фиксированном значении начального расстояния r_0 тип движения полностью определяется величиной начальной скорости V_0 . Рассмотрим теперь, как меняются характеристики движения, если при фиксированных r_0 и V_0 меняется взаимная ориентация векторов r_0 и V_0 .

Пусть θ есть угол между направлением вектора скорости и направлением его трансверсальной компоненты (рис. 9.5); обычно этот угол называют *углом наклона вектора скорости к местному горизонту*. Тогда постоянная интеграла площадей определяется формулой

$$c = r_0 V_0 \cos \theta. \quad (9.15)$$

Поскольку $c^2 = p\mu$, то параметр p , характеризующий размер орбиты, находится по формуле

$$p = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta. \quad (9.16)$$

На основании соотношений (9.5), (9.11) и (9.16) можно получить формулу для определения эксцентриситета e , характеризующего форму орбиты:

$$e^2 = 1 + \frac{1}{\mu^2} \left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \right) r_0^2 V_0^2 \cos^2 \theta. \quad (9.17)$$

Зависимость (9.16) показывает, что при заданных r_0 и V_0 (а значит, и при заданном типе движения) величина параметра p убывает с изменением угла наклона скорости от $\theta = 0$ до $|\theta| = \pi/2$, причем при $\theta = 0$ достигается максимальное значение $p_{\max} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2$, а при $|\theta| = \pi/2$ имеем $p = 0$, что соответствует вертикальному движению.

Согласно (9.17) характер изменения эксцентриситета определяется знаком разности $V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$, т.е. типом орбитального движения. Очевидно,

что при изменении угла наклона скорости от $\theta = 0$ до $|\theta| = \pi/2$:

- величина e возрастает, если $V_0^2 < 2\mu/r_0$ (эллиптический тип движения);
- величина e неизменна, если $V_0^2 = 2\mu/r_0$ (параболический тип);
- величина e убывает, если $V_0^2 > 2\mu/r_0$ (гиперболический тип).

Таким образом, при увеличении модуля угла наклона скорости в случае эллиптического движения эксцентриситет орбиты изменяется от $e_{\min} =$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} \left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \right) r_0^2 V_0^2}$ до $e_{\max} = 1$, а в случае гиперболического дви-

жения – от $e_{\max} = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} \left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \right) r_0^2 V_0^2}$ до $e_{\min} = 1$. Значение

$e = 1$ при $|\theta| = \pi/2$ соответствует движению по вертикальным орбитам эллиптического или гиперболического типа. При $V_0^2 = 2\mu/r_0$ углу $|\theta| = \pi/2$ соответствует вертикальное движение параболического типа.

В заключение параграфа отметим одно интересное свойство скорости в кеплеровом движении. Изобразим векторы скорости в разные моменты времени "приложенными" в одной точке O и рассмотрим "траекторию" конца вектора скорости в координатах его компонент V_r и V_n при изменении истинной аномалии ϑ . Эта "траектория" называется *годографом скорости*. Запишем (9.12) и (9.13) в виде

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta, \quad V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta.$$

Сумма квадратов левых и правых частей этих соотношений дает зависимость

$$V_r^2 + \left(V_n - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \right)^2,$$

которая в переменных V_r и V_n представляет собой уравнение окружности радиуса $R = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e$ с центром, смещенным вдоль оси V_n на величину $d = \sqrt{\frac{\mu}{p}}$ (рис. 9.6). Точка O (начало координат) называется *центром годо-*

Рис. 9.6. Годограф орбитальной скорости в компонентах V_n и V_r

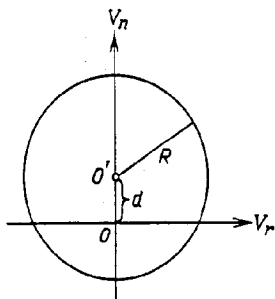
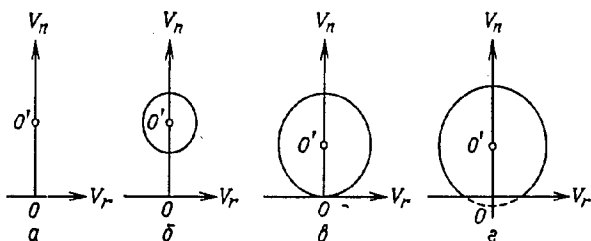


Рис. 9.7. Годограф орбитальной скорости для различных типов движения: а – круговое; б – эллиптическое; в – параболическое; г – гиперболическое



графа, а точка O' – центром окружности годографа. Размер окружности годографа и ее расположение в координатной плоскости определяются эксцентриситетом e :

- при $e = 0$ (круговое движение, рис. 9.7, а) $R = 0$ и окружность стягивается в точку O' ;
- при $0 < e < 1$ (эллиптическое движение, рис. 9.7, б) $R < d$, окружность лежит в полуплоскости $V_n > 0$;
- при $e = 1$ (параболическое движение, рис. 9.7, в) $R = d$, окружность касается оси V_r в точке O ;
- при $e > 1$ (гиперболическое движение, рис. 9.7, г) $R > d$, окружность частично заходит в полуплоскость $V_n < 0$.

Построение вектора скорости по заданной истинной аномалии ϑ проводится следующим образом: центр окружности годографа соединяется с

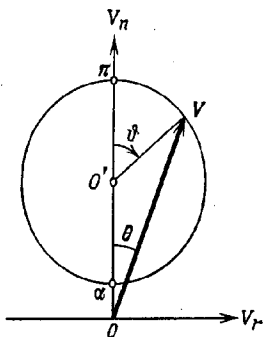


Рис. 9.8. Построение вектора скорости по годографу и заданной истинной аномалии

точкой окружности, отстоящей от точки π (рис. 9.8) на угол ϑ . Очевидно, что угол θ между осью V_n и вектором скорости V есть угол наклона скорости к местному горизонту.

Для эллиптического годографа (см. рис. 9.7, б) верхняя и нижняя точки окружности соответствуют скорости в перигентре и апоцентре.

Для параболического годографа (см. рис. 9.7, в) верхняя точка соответствует скорости в перигентре, а нижняя точка (точка касания окружности с осью V_r) соответствует пределу $V=0$, к которому стремится скорость при $r \rightarrow \infty$.

Для гиперболического годографа (см. рис. 9.7, г) верхняя точка также соответствует скорости в перигентре. Две точки пересечения окружности с осью V_r являются предельными точками гиперболического годографа и соответствуют предельному значению V_∞ , к которому стремится скорость при $r \rightarrow \infty$.

§ 9.4. Характеристики орбитального движения в трехмерном пространстве

В § 9.2 и 9.3 мы воспользовались тем, что кеплерово невозмущенное движение происходит в неизменной орбитальной плоскости, и получили характеристики орбиты и орбитальной скорости в этой плоскости. Распространяем полученные результаты на общий случай движения в трехмерном

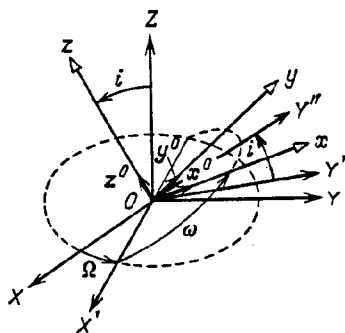


Рис. 9.9. Переход от экваториальной к орбитальной геоцентрической системе координат

пространстве. Для этого поставим в соответствие кеплеровой орбите тройку ортов

$$x^0 = \frac{f}{|f|}, \quad y^0 = \frac{c \times f}{|c \times f|}, \quad z^0 = \frac{c}{|c|},$$

задающих правую ортогональную систему координат $Oxuz$ с началом в центре притяжения и осями: Ox — в направлении на перигентр орбиты, Oy — в ближайшую по ходу движения от перигентра точку орбиты с радиальным расстоянием, равным параметру орбиты, Oz — в направлении вектора момента количества движения (на полюс орбиты).

Пространственное положение орбиты относительно экваториальной системы координат $OXYZ$, в которой заданы орты x^0 , y^0 и z^0 , может быть описано тремя углами Эйлера, характеризующими переход от системы $OXYZ$ к орбитальной системе $Oxuz$ тремя последовательными поворотами против направления движения часовой стрелки (рис. 9.9): вокруг оси OZ на угол Ω , вокруг оси OX' на угол i , вокруг оси Oz на угол ω .

Угол Ω называется *долготой восходящего узла* орбиты, угол i — *наклоном* орбиты, угол ω — *аргументом широты перицентра* орбиты.

Каждому из трех последовательно выполняемых поворотов соответствует матрица преобразования координат или матрица поворота:

$$M_{\Omega} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}, \quad M_{\omega} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Результирующая матрица преобразования получается перемножением трех матриц:

$$M = M_{\omega} M_i M_{\Omega} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega, \\ m_{12} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega, \\ m_{13} &= \sin \omega \sin i, \\ m_{21} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega, \\ m_{22} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega, \\ m_{23} &= \cos \omega \sin i, \quad m_{31} = \sin \Omega \sin i, \\ m_{32} &= -\sin i \cos \Omega, \quad m_{33} = \cos i. \end{aligned}$$

Матрица M переводит вектор \mathbf{R} , заданный компонентами R_x , R_y и R_z в системе координат $OXYZ$, в вектор $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$ системы $Oxuz$ по формуле $\mathbf{r} = M\mathbf{R}$. Поскольку матрица M осуществляет ортогональное преобразование, обратная ей матрица $M^{-1} = M^T$, и обратный переход производится по формуле $\mathbf{R} = M^T\mathbf{r}$. Если обе системы $OXYZ$ и $Oxuz$ инерциальны, т.е. взаимно неподвижны, то формулы преобразования применимы и для векторов скорости ЛА.

Пусть теперь в некоторой инерциальной системе координат задан вектор начального состояния ЛА — вектор начального положения \mathbf{r}_0 и вектор начальной скорости \mathbf{V}_0 . Покажем, как, используя эти векторы в качестве

исходной характеристики орбиты, можно получить выражения для r и V в любой точке орбиты, заданной лишь истинной аномалией ϑ .

Прежде всего заметим, что знания r_0 и V_0 достаточно для получения векторов f и s , а значит, и ортов x^0 , y^0 , z^0 . Представим вектор положения ЛА в орбитальной системе координат через его проекции на орты x^0 и y^0 (рис. 9.10):

$$r = r \cos \vartheta \cdot x^0 + r \sin \vartheta \cdot y^0. \quad (9.18)$$

Дифференцируя (9.18) по времени, находим

$$\frac{dr}{dt} = V = \left(\frac{dr}{dt} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right) x^0 + \left(\frac{dr}{dt} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right) y^0.$$

Используя для преобразования этого выражения полученные ранее соотношения

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \quad \text{и} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{\mu p}{r^2}},$$

приходим к зависимости

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [-\sin \vartheta \cdot x^0 + (e + \cos \vartheta) y^0]. \quad (9.19)$$

Зависимости (9.18) и (9.19) справедливы для любой точки орбиты, в том числе и для начальной точки с истинной аномалией ϑ_0 , которая полностью определяется векторами положения и скорости r_0 и V_0 . Записав

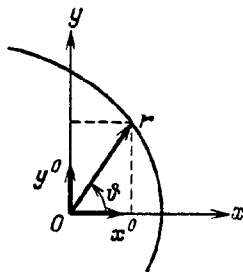


Рис. 9.10. Вектор положения в орбитальной геоцентрической системе координат

(9.18) и (9.19) для начальной точки и рассматривая их как систему двух уравнений с неизвестными x^0 и y^0 , получим из решения системы

$$x^0 = \frac{e + \cos \vartheta_0}{p} r_0 - \frac{r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin \vartheta_0 \cdot V_0,$$

$$y^0 = \frac{\sin \vartheta_0}{p} r_0 + \frac{r_0}{\sqrt{\mu p}} \cos \vartheta_0 \cdot V_0.$$

Подставляя полученные выражения для ортов x^0 и y^0 в (9.18) и (9.19), мы приходим к выражениям для векторов текущего положения и текущей

скорости в зависимости от r_0 , V_0 и разности $\vartheta - \vartheta_0$ истинных аномалий текущей и начальной точек:

$$r = \left\{ 1 - \frac{r}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \right\} r_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) V_0, \quad (9.20)$$

$$V = \left\{ \frac{(r_0 \cdot V_0)}{p r_0} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] - \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) \right\} r_0 + \left\{ 1 - \frac{r_0}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \right\} V_0. \quad (9.21)$$

Радиальное расстояние в (9.20) определяется из уравнения орбиты

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} = \frac{p}{1 + e \cos [\vartheta_0 + (\vartheta - \vartheta_0)]} = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) - e \sin \vartheta_0 \sin(\vartheta - \vartheta_0)},$$

причем $e \cos \vartheta_0$ и $e \sin \vartheta_0$ находятся из уравнения орбиты и выражения для радиальной скорости в начальной точке:

$$e \cos \vartheta_0 = \frac{p}{r_0} - 1, \quad e \sin \vartheta_0 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{(r_0 \cdot V_0)}{r_0}.$$

Итак, в результате вывода (9.20) и (9.21) мы получили возможность определять координаты ЛА и компоненты вектора его скорости в произвольной точке орбиты, заданной истинной аномалией, причем сама орбита задана начальным вектором состояния (векторами r_0 и V_0).

Полную характеристику орбиты дает также набор кеплеровых элементов p , e , Ω , i , ω . При этом способе задания орбиты вектор состояния движущегося ЛА в точке с истинной аномалией ϑ может быть получен путем применения матрицы M^{-1} к векторам положения (9.18) и скорости (9.19). Приведем результаты этой операции:

$$X = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i),$$

$$Y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

$$Z = r \sin u \sin i,$$

$$\dot{X} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [e \sin \vartheta (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) +$$

$$+ (1 + e \cos \vartheta)(-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i)],$$

$$\dot{Y} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [e \sin \vartheta (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) +$$

$$+ (1 + e \cos \vartheta)(-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i)],$$

$$\dot{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} [e \sin \vartheta \sin u \sin i + (1 + e \cos \vartheta) \cos u \sin i],$$

где, как и раньше,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta};$$

$u = \omega + \vartheta$ — аргумент широты текущей точки, характеризующий ее угловое расстояние от линии узлов (от оси OX' на рис. 9.9).

§ 9.5. Уравнение Кеплера. Третий закон Кеплера

По результатам предыдущих параграфов мы можем получить полную геометрическую характеристику орбиты ЛА, его вектор положения и вектор скорости в любой заданной точке орбиты. До сих пор, однако, мы не имели возможности "привязать" пространственные характеристики движения ЛА к времени. Такая возможность появляется благодаря одному из основополагающих результатов классической небесной механики — уравнению Кеплера. Ниже мы ограничимся выводом этого уравнения для случая движения ЛА по эллиптической орбите.

Формулы (9.20) и (9.21) определяют вектор положения и вектор скорости ЛА как явные функции истинной аномалии ϑ . Чтобы получить эти характеристики как функции времени t , достаточно получить зависимость ϑ от t . Эта зависимость может быть определена на основе интеграла площадей в форме (9.3), которому придадим следующий вид:

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{p^2} (1 + e \cos \vartheta)^2 = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (1 + e \cos \vartheta)^2$$

или

$$\frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} dt.$$

Интегрируя это выражение от начального значения $\vartheta = 0$ до некоторого текущего значения ϑ , получаем

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau), \quad (9.22)$$

где τ — момент времени, соответствующий прохождению ЛА через перигентр орбиты ($\vartheta = 0$).

Непосредственное интегрирование левой части (9.22) приводит к трансцендентному уравнению, которое не позволяет получить зависимость ϑ от t в конечном виде. Поэтому обычно вводится новая вспомогательная переменная, что позволяет получить также трансцендентную, но более простую и наглядную зависимость этой переменной от времени полета t . Геометрический смысл новой переменной поясняется на рис. 9.11, где O_1 и O — соответственно центр и фокус эллиптической орбиты (центр притяжения); a и b — соответственно большая и малая полуоси эллипса; P — положение ЛА на орбите, заданное истинной аномалией ϑ ; Q — точка пересечения нормали к линии апсид эллипса и окружности радиуса $O_1Q = a$ (нормаль проходит через точку P).

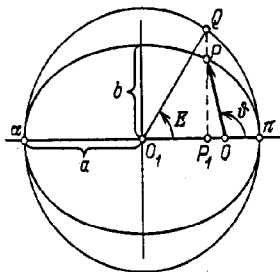


Рис. 9.11. Геометрическая интерпретация взаимосвязи между эксцентрической E и истинной ϑ аномалиями

Новой переменной является угол OO_1Q , называемый *эксцентрической аномалией* и обозначаемый через E . Угол E отсчитывается в ту же сторону, что и угол ϑ . Очевидно, что с изменением ϑ от 0 до 2π в этих же пределах изменится и E .

Из аналитической геометрии известно, что $O_1O = ae$ (e — эксцентриситет эллипса). Но $O_1O = O_1P_1 + P_1O$, или

$$ae = a \cos E + r \cos(\pi - \vartheta) = a \cos E - r \cos \vartheta. \quad (9.23)$$

Величина большой полуоси эллиптической орбиты равна полусумме расстояний до перигея $r_\pi = O\pi$ и апогея $r_\alpha = O\alpha$ (это следует непосредственно из рис. 9.11):

$$a = \frac{1}{2}(r_\pi + r_\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2}.$$

Учитывая эту зависимость и уравнение орбиты (9.10), преобразуем выражение (9.23) к виду

$$\cos \vartheta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}. \quad (9.24)$$

Из рис. 9.11 также следует, что $QP_1 = a \sin E$ и $PP_1 = r \sin \vartheta$. Но на основании свойств эллипса

$$\frac{PP_1}{QP_1} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2},$$

поэтому $PP_1 = \sqrt{1 - e^2} QP_1$ или $r \sin \vartheta = \sqrt{1 - e^2} a \sin E$.

Заменяя в последней зависимости r его выражением (9.10) и используя соотношение между p и a , а также зависимость (9.24), получаем

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (9.25)$$

Дифференцирование этого выражения дает

$$\cos \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2} [\cos E(1 - e \cos E) - \sin E \cdot e \sin E]}{(1 - e \cos E)^2} dE =$$

$$= \frac{\sqrt{1-e^2} (\cos E - e)}{(1 - e \cos E)^2} dE.$$

Используя результат дифференцирования вместе с (9.24), получаем зависимости

$$d\vartheta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E} dE \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2},$$

которые позволяют провести замену переменной в интеграле (9.22)

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2} = \int_0^E \frac{1 - e \cos E}{\sqrt{(1 - e^2)^3}} dE = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau)$$

и прийти к окончательному виду

$$\int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau).$$

В результате интегрирования получаем

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau). \quad (9.26)$$

Если ввести обозначения $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ и $M = n(t - \tau)$, то результат интегрирования принимает вид, известный под названием *уравнения Кеплера*:

$$E - e \sin E = M. \quad (9.27)$$

Это уравнение устанавливает зависимость между временем полета ЛА от момента прохождения перигея орбиты до текущего момента и эксцентрической аномалией, характеризующей текущее положение ЛА на орбите. Поскольку формулы (9.24) и (9.25) устанавливают взаимно однозначное соответствие между эксцентрической и истинной аномалиями, то уравнение (9.27) "привязывает" истинную аномалию к времени, а следовательно, к времени "привязываются" векторы положения и орбитальной скорости ЛА.

Имея довольно простой вид, уравнение Кеплера тем не менее является трансцендентным. Аналитическое решение его может быть получено только в виде бесконечного ряда, а численное решение — методом последовательных приближений.

Из (9.27) следует, что при изменении E от 0 до 2π и M меняется от 0 до 2π . Пусть движение ЛА начинается в перигее орбиты ($\vartheta = E = M = 0$) и завершается после полного оборота также в перигее орбиты ($\vartheta = E = M = 2\pi$). Время совершения полного оборота называется *периодом орбиты* и обозначается через T . Из уравнения Кеплера следует, что

$$2\pi = nT \quad \text{и} \quad n = 2\pi/T. \quad (9.28)$$

Таким образом, видно, что n является средней угловой скоростью орбитального движения и поэтому называется *средним движением*. Аналогично и M , изменяющееся пропорционально времени со средней угловой скоростью, называется *средней аномалией*.

Из (9.28) с учетом равенства $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$, получаем формулу для периода эллиптической орбиты

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}, \quad (9.29)$$

из которой следует *третий закон Кеплера*

$$T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3,$$

утверждающий, что квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

С использованием полученных в настоящем параграфе результатов уравнение орбиты (9.10) и уравнение для скорости (9.14) в случае эллиптического движения можно записать в функции эксцентрисической аномалии E :

$$r = a(1 - e \cos E), \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}}.$$

Использованная в ходе выводов связь между параметром p и большой полуосью эллиптической орбиты a дает возможность установить зависимость константы энергии h от большой полуоси орбиты. Эта зависимость следует из соотношения для произвольных постоянных первых интегралов

$$\mu^2(e^2 - 1) = hc^2 = h\mu p = h\mu a(1 - e^2),$$

откуда

$$h = -\frac{\mu}{a}.$$

Теперь интеграл энергии можно записать в наиболее распространенной форме

$$v^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}. \quad (9.30)$$

Таким образом, мы выяснили, что в случае эллиптической орбиты период и константа энергии орбитального движения зависят только от большой полуоси орбиты, и в этом смысле все три величины являются эквивалентными характеристиками орбиты.

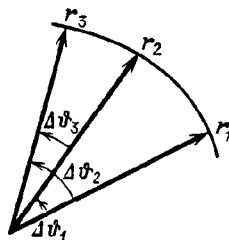
§ 9.6. Задачи определения орбиты

В предыдущих параграфах было показано, что задание вектора состояния (вектора положения и вектора скорости) полностью определяет орбиту ЛА. Представляет интерес вопрос — при каком наборе данных о положении и скорости движения ЛА можно определить (или восстановить) все орбитальные характеристики?

Оказывается, что таких наборов множество. Некоторые из них дают возможность решить задачу довольно просто и наглядно, другие — не допускают очевидного и простого решения, но тем не менее решение задачи и в этом случае представляет большой практический интерес. Рассмотрение ряда задач определения орбиты мы и проведем в этом параграфе.

9.6.1. Определение орбиты по трем векторам положения или скорости. Пусть нам известны три вектора положения ЛА на орбите r_1 , r_2 и r_3 , последовательно "проходимые" при орбитальном полете. Прежде всего задание трех векторов положения определяет не только плоскость орбитального движения, но и направление движения в этой плоскости, т.е. направление

Рис. 9.12. К определению орбиты по трем векторам положения



векторной константы площадей s . Поэтому ограничимся определением характеристик орбиты в плоскости орбитального движения (рис. 9.12). Для решения этой задачи воспользуемся уравнением орбиты

$$r_i = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

и очевидными соотношениями между истинными аномалиями

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \Delta\vartheta_1, \quad \vartheta_3 - \vartheta_1 = \Delta\vartheta_2, \quad \vartheta_3 - \vartheta_2 = \Delta\vartheta_3,$$

где $\Delta\vartheta_1, \Delta\vartheta_2, \Delta\vartheta_3$ — угловые расстояния между векторами r_1, r_2, r_3 .

С помощью уравнения орбиты для $i = 1$ и $i = 3$, а также равенства $\vartheta_3 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta_2$ могут быть получены зависимости

$$e \cos \vartheta_1 = \frac{p - r_1}{r_1},$$

$$e \sin \vartheta_1 = \frac{r_3(p - r_1) \cos \Delta\vartheta_2 - r_1(p - r_3)}{r_1 r_3 \sin \Delta\vartheta_2},$$
(9.31)

которые позволяют определить эксцентриситет e как функцию параметра p . Точно таким же образом можно определить e из уравнения орбиты для $i = 1$ и $i = 2$ и из равенства $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta_1$. Но тогда, приравняв выражения для двух вариантов зависимости e от p и разрешая полученное соотношение относительно p , найдем

$$p = \frac{r_1 r_2 r_3 (\sin \Delta\vartheta_3 + \sin \Delta\vartheta_2 + \sin \Delta\vartheta_1)}{r_2 r_3 \sin \Delta\vartheta_3 + r_1 r_3 \sin \Delta\vartheta_2 + r_1 r_2 \sin \Delta\vartheta_1}$$

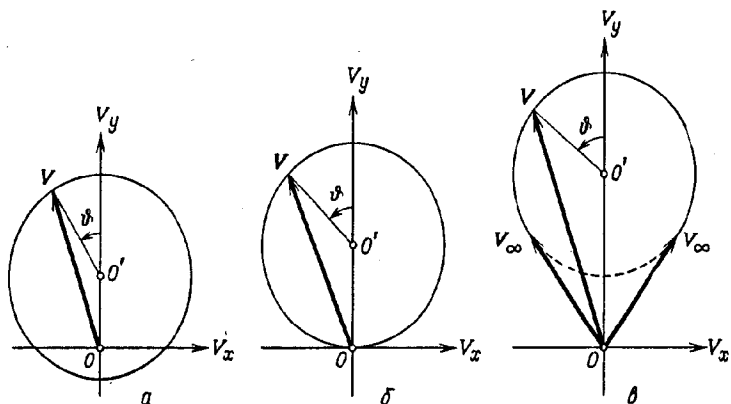


Рис. 9.13. Годограф орбитальной скорости в компонентах V_x и V_y для различных типов орбитального движения: а – эллиптическое; б – параболическое; в – гиперболическое

Знание e и p позволяет определить положение перигея орбиты: например, из (9.31) находится истинная аномалия ϑ_1 , "привязывающая" вектор \mathbf{r}_1 к направлению вектора Лапласа \mathbf{f} .

Таким образом, определив плоскость орбиты, ориентацию линии апсид в этой плоскости, размер и форму орбиты, мы полностью решили задачу определения орбиты.

Пусть теперь нам известны три вектора скорости ЛА \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 и \mathbf{V}_3 , последовательно достигаемые в ходе орбитального полета. Задание трех векторов скорости также однозначно определяет плоскость орбитального движения и направление векторной константы площадей \mathbf{s} , если по крайней мере два из этих векторов не коллинеарны. Поэтому мы снова ограничимся определением характеристик орбиты в плоскости движения и для решения этой задачи воспользуемся годографом орбитальной скорости в форме, несколько отличающейся от изложенной в § 9.3.

Зависимость (9.19) определяет проекции орбитальной скорости на орты \mathbf{x}^0 и \mathbf{y}^0 , неподвижные в инерциальном пространстве:

$$V_x = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \vartheta, \quad V_y = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos \vartheta).$$

Оказывается, что годограф скорости и в этой системе координат представляет собой окружность. Действительно,

$$V_x^2 + \left(V_y - \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\mu}{p}} \right)^2. \quad (9.32)$$

Радиус окружности годографа равен $\sqrt{\frac{\mu}{p}}$, центр окружности годографа O' (рис. 9.13) смещен относительно центра годографа O на величину

$\sqrt{\frac{\mu}{p}} e$ вдоль положительного направления оси V_y . Верхняя точка годографа соответствует скорости V_π , достигаемой в момент прохождения перицентра ($\vartheta = 0$). Нижняя точка годографа в случае эллиптического движения (рис. 9.13, а) соответствует скорости V_α , достигаемой в момент прохождения апоцентра ($\vartheta = \pi$). При движении по параболе ($e = 1$) нижняя точка годографа соответствует предельному нулевому значению, к которому стремится величина скорости при $r \rightarrow \infty$ (рис. 9.13, б). В случае гиперболического типа движения предельная скорость V_∞ (рис. 9.13, в), достигаемая при $r \rightarrow \infty$, соответствует положению, в котором она совпадает с касательной к окружности годографа, проходящей через центр годографа O .

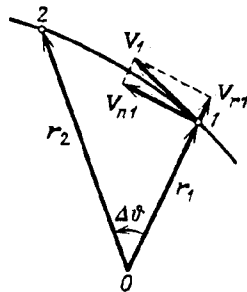
Из сказанного следует, что заданные векторы скорости ЛА таковы, что их концы лежат на окружности годографа. Но по трем точкам, соответствующим концам векторов V_1 , V_2 и V_3 , однозначно восстанавливается

окружность годографа, а значит, становятся известными ее радиус $\sqrt{\frac{\mu}{p}}$,

смещение центра окружности $\sqrt{\frac{\mu}{p}} e$ от начала координат, направление осей V_x , V_y и углы ϑ_1 , ϑ_2 и ϑ_3 , соответствующие заданным векторам скорости. Следовательно, мы определили размер орбиты (p), форму орбиты (e), направление апсидальной оси орбиты (ось V_x) и истинные аномалии точек, в которых заданы векторы скорости.

9.6.2. Условия совместимости в двух положениях. Пусть нам известны векторы положения r_1 и r_2 , задающие точки инерциального пространства 1 и 2 (рис. 9.14). Выясним, каков должен быть вектор скорости ЛА в точке 1, чтобы в своем орбитальном движении он прошел через точку 2.

Рис. 9.14. К постановке задачи об условиях совместимости в двух положениях



Для получения необходимой зависимости воспользуемся уравнением орбиты (9.10) и формулами для радиальной (9.12) и трансверсальной (9.13) компонент вектора скорости:

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_2}, \quad V_{r1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta_1, \quad V_{n1} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta_1).$$

Преобразуем эти формулы к виду

$$e \cos \vartheta_2 = \frac{p}{r_2} - 1, \quad e \sin \vartheta_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_{r1}, \quad e \cos \vartheta_1 = \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_{n1} - 1.$$

Поскольку $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta$, первую из полученных формул можно раскрыть, используя две оставшиеся:

$$\begin{aligned} \frac{p}{r_2} - 1 = e \cos \vartheta_2 = e \cos(\vartheta_1 + \Delta\vartheta) = e \cos \vartheta_1 \cos \Delta\vartheta - \\ - e \sin \vartheta_1 \sin \Delta\vartheta = \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} V_{n1} - 1 \right) \cos \Delta\vartheta - \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_{r1} \sin \Delta\vartheta. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Вспользуемся далее тем, что константа интеграла площадей определяет через трансверсальную компоненту скорости

$$\sqrt{\mu p} = r_1 V_{n1} \quad \text{или} \quad \sqrt{p} = \frac{r_1 V_{n1}}{\sqrt{\mu}}.$$

Тогда (9.33) приводится к окончательному виду

$$V_{n1}^2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \cos \Delta\vartheta \right) + V_{n1} V_{r1} \sin \Delta\vartheta = \frac{\mu}{r_1} (1 - \cos \Delta\vartheta). \quad (9.34)$$

Уравнение (9.34) устанавливает соотношение между компонентами V_{n1} и V_{r1} вектора скорости в точке 1, выполнение которого обеспечивает прохождение орбиты через точку 2. В этом уравнении все величины, кроме V_{n1} и V_{r1} , заданы, и его можно рассматривать как уравнение гиперболы в системе координат с центром в точке 1 и осями, совпадающими с трансверсальным и радиальным направлениями в этой точке (рис. 9.15). Приведем уравнение гиперболы (9.34) к каноническому виду. Можно показать, что для этого достаточно оси V_{r1} и V_{n1} повернуть против направления движения часовой стрелки на угол $\Phi_1/2$, где угол Φ_1 — внешний угол треугольника, образованного точками 0, 1 и 2 (рис. 9.15,а), величина

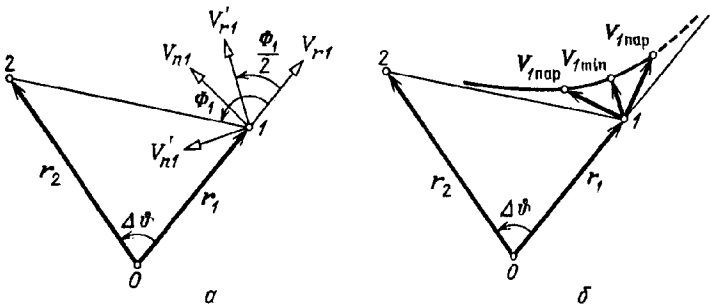


Рис. 9.15. Голограф скорости перелета: а — преобразование координат; б — голограф

которого определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{r_2 \sin \Delta\vartheta}{r_2 \cos \Delta\vartheta - r_1}.$$

После приведения уравнение гиперболы в новых осях принимает вид

$$\frac{(V'_{r1})^2}{\operatorname{ctg} \frac{\Phi_1}{2}} - \frac{(V'_{n1})^2}{\operatorname{tg} \frac{\Phi_1}{2}} = \frac{2\mu}{r_1} \operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{2}.$$

Из этого уравнения следует, что:

- угловой коэффициент асимптот гиперболы равен $\pm \operatorname{tg} \frac{\Phi_1}{2}$, т.е. асимптотами являются прямые линии вдоль хорды, соединяющей точки 1 и 2, и радиуса-вектора положения точки отлета 1;
- величина большой полуоси гиперболы, равная ее минимальному удалению от точки 1, равна

$$\begin{aligned} V_{1 \min} &= \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} \operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\Phi_1}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} \operatorname{tg} \frac{\Delta\vartheta}{2} \frac{r_2 \cos \Delta\vartheta - r_1}{r_2 \sin \Delta\vartheta}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1 r_2} \frac{r_2 \cos \Delta\vartheta - r_1}{\cos^2 \frac{\Delta\vartheta}{2}}}, \end{aligned}$$

где $V_{1 \min}$ – минимальная скорость, обеспечивающая перелет из точки 1 в точку 2 и направленная по биссектрисе угла Φ_1 между хордой и радиусом-вектором точки отлета.

Точки гиперболы, расположенные слева и справа от $V_{1 \min}$ и соответствующие параболической (для данного r_1) скорости $V_{1 \text{ пар}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1}}$, выделяют область скоростей, обеспечивающих перелет по эллиптическим орбитам. Слева от нее расположена область скоростей, обеспечивающих перелет по гиперболическим орбитам, справа (на рис. 9.15, б эта часть гиперболы показана штриховой линией, она включает в себя и правую точку $V_{1 \text{ пар}}$) – область скоростей, при которых перелет из точки 1 в точку 2 практически неосуществим, а теоретически возможен с прохождением, как говорят, через "бесконечность".

Мы рассмотрели верхнюю ветвь гиперболы скоростей перелета из точки 1 в точку 2, которая соответствует направлению движения против часовой стрелки; можно показать, что её нижняя ветвь соответствует обратному направлению перелета с угловой дальностью $2\pi - \Delta\vartheta$.

Для выяснения некоторых дополнительных свойств скорости перелета из точки 1 в точку 2 введем в рассмотрение косоугольную систему координат с началом в точке 1 и осями, совпадающими с асимптотами гиперболы, т.е. с направлениями хорды 1 – 2 и радиуса-вектора r_1 точки отлета.

В соответствии с рис. 9.16 компоненты вектора скорости в такой системе координат (V_{c1} – вдоль хорды, $V_{\rho1}$ – вдоль радиуса-вектора) могут быть получены по формулам

$$V_{c1} = \frac{V_{n1}}{\cos \alpha_1}, \quad V_{\rho1} = V_{r1} + V_{n1} \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}, \quad (9.35)$$

где α_1 – угол между радиусом-вектором r_1 и нормалью к хорде, опущенной из точки O .

Проведя по формулам (9.35) переход к новым переменным V_{c1} и $V_{\rho1}$ в уравнении гиперболы (9.34), приходим к соотношению

$$V_{c1} V_{\rho1} = \frac{\mu}{d} \operatorname{tg} \frac{\Delta \vartheta}{2}, \quad (9.36)$$

где d – длина нормали, опущенной из точки O на хорду.

Совершенно аналогично изложенному можно провести исследование зависимости между компонентами вектора скорости прилета в точку 2. При этом будут получены следующие результаты:

– радиальная и трансверсальная компоненты скорости в точке прилета 2 связаны уравнением гиперболы, асимптоты которой совпадают с радиусом-вектором r_2 и продолжением хорды, соединяющей точки 1 и 2;

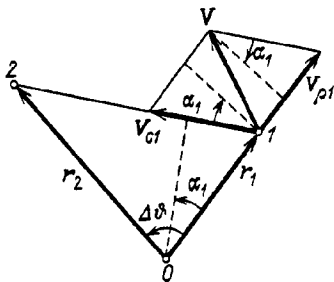


Рис. 9.16. Переход к косоугольной системе координат с началом в точке отлета

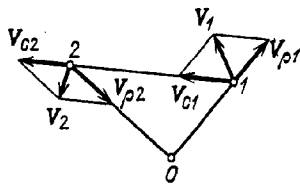


Рис. 9.17. Проекция скоростей отлета и прилета на оси косоугольных систем координат

– уравнение гиперболы после перехода к косоугольной системе координат, осями которой являются асимптоты гиперболы, приводится к виду, полностью совпадающему с (9.36).

На рис. 9.17 показаны проекции скоростей в точках отлета и прилета на оси соответствующих косоугольных систем координат.

Запишем для точки 1 векторный интеграл площадей

$$c = r_1 \times V_1 = r_1 \times (V_{c1} + V_{\rho1}) = r_1 \times V_{c1}.$$

Очевидно (см. рис. 9.16), что $|c| = |r_1 \times V_{c1}| = r_1 V_{c1} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = d V_{c1}$.

Для точки 2 точно так же можно получить $|c| = d V_{c2}$ и, следовательно, $V_{c1} = V_{c2}$, а в соответствии с (9.36) и $V_{\rho1} = V_{\rho2}$.

Таким образом, мы пришли к выводам, известным как *условия совместности Гоудела*:

— условием перелета из точки 1 в точку 2 является выполнение соотношения (9.36), в соответствии с которым произведение $V_c V_\rho$ зависит от взаимного расположения точек 1 и 2 и не зависит от выбора траектории перелета между ними;

— для каждой конкретной траектории перелета соответствующие компоненты векторов скоростей отлета и прилета в косугольных системах координат равны между собой, т.е. $V_{c1} = V_{c2}$ и $V_{\rho 1} = V_{\rho 2}$.

При анализе условий совместности, начиная с приведения уравнения гиперболы к каноническому виду, предполагалось, что $\Delta\vartheta \neq \pi$; рассмотрим случай $\Delta\vartheta = \pi$ особо.

При $\Delta\vartheta \rightarrow \pi$ ветви гиперболы скоростей стремятся к паре прямых, параллельных радиусу-вектору положения, а уравнение (9.34) при $\Delta\vartheta = \pi$ преобразуется к виду

$$V_{n1}^2 \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) = \frac{2\mu}{r_1},$$

из которого определяется удаление параллельных прямых от радиуса-вектора

$$V_{n1} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} \frac{r_2}{r_1 + r_2}},$$

причем в соответствии с интегралом площадей в точке прилета

$$V_{n2} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_2} \frac{r_1}{r_1 + r_2}}.$$

Из выражения для радиальной скорости (9.12) в случае $\Delta\vartheta = \pi$ имеем

$$V_{r2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin (\vartheta_1 + \Delta\vartheta) = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta_1 = -V_{r1},$$

т.е. радиальные скорости в точках отлета и прилета равны по величине и противоположны по знаку.

Минимальная скорость отлета в точке 1 соответствует случаю $V_{r1} = 0$, при этом и $V_{r2} = 0$, т.е. начальная и конечная точки перелета являются апсидальными.

9.6.3. Определение орбиты по двум векторам положения и величине большой полуоси. В п. 9.6.2 мы выяснили, что перелет из точки 1 в точку 2 возможен по самым различным орбитам. Сузить бесчисленное множество решений задачи можно, доопределив ее дополнительным условием. Потребуем, чтобы перелет был осуществлен по орбите с заданным значением большой полуоси a . Ограничимся в дальнейшем рассмотрении случаем движения по эллиптической орбите и для определенности положим, что $r_2 > r_1$.

Задание векторов положения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 определяет плоскость орбитального движения, а знание угловой дальности перелета $\Delta\vartheta$ однозначно определяет направление движения и, значит, направление векторной константы площадей \mathbf{s} . Поэтому будем рассматривать задачу в следующей постановке: по заданным r_1 , r_2 , $\Delta\vartheta$ и a определить орбиту перелета из точки 1 в точку 2.

Поскольку, по определению, сумма расстояний от произвольной точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная и равная удвоенному значению большой полуоси эллипса $2a$, удаление второго фокуса эллипса перелета от точек 1 и 2 определяется формулами

$$r_1' = 2a - r_1, \quad r_2' = 2a - r_2. \quad (9.37)$$

Теперь очевиден простой геометрический путь нахождения второго фокуса эллипса перелета — он расположен в точке пересечения окружностей радиусов r_1' и r_2' с центрами соответственно в точках 1 и 2 (рис. 9.18). Из рисунка видно, что пересечение окружностей возможно только при

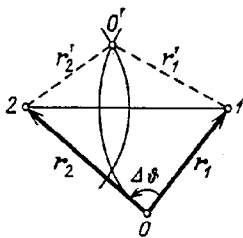


Рис. 9.18. Построение второго фокуса эллипса перелета

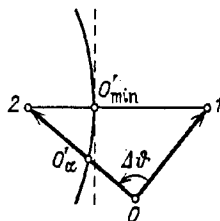


Рис. 9.19. Геометрическое место положений вторых фокусов эллипсов перелета

выполнении условия $r_1' + r_2' \geq s$, где s — длина хорды, соединяющей точки 1 и 2 . Из этого условия с учетом (9.37) можно сделать вывод, что переход из точки 1 в точку 2 по эллиптической орбите возможен только при величине большой полуоси, удовлетворяющей неравенству

$$a \geq \frac{r_1 + r_2 + s}{4}. \quad (9.38)$$

При строгом неравенстве двум точкам пересечения окружностей соответствуют два положения второго фокуса и, следовательно, две эллиптические орбиты перелета с заданным значением большой полуоси.

В случае равенства $a = \frac{r_1 + r_2 + s}{4}$ две точки пересечения стягиваются

в одну точку касания, расположенную на хорде, и, значит, существует единственная эллиптическая орбита перелета.

Таким образом, при заданном значении большой полуоси, удовлетворяющем условию (9.38), положение второго фокуса (или вторых фокусов) орбиты перелета определено и без труда находятся любые ее характеристики. В частности, апсидальная ось орбиты проходит через фокусы O и O' (см. рис. 9.18), вектор \vec{OO}' направлен в апоцентр орбиты, величина эксцентриситета орбиты определяется отношением $e = \vec{OO}'/2a$.

С увеличением большой полуоси орбиты от ее минимально допустимого значения $a_{\min} = (r_1 + r_2 + s)/4$ расположение вторых фокусов меняется, но при этом, как следует из (9.37), не меняется величина разности

$$r_1' - r_2' = 2a - r_1 - 2a + r_2 = r_2 - r_1 = \text{const.}$$

Этот факт означает, что геометрическим местом точек положения второго фокуса орбиты перелета является гипербола, фокусы которой суть точки 1 и 2 (рис. 9.19).

При смещении второго фокуса выше или ниже точки O'_{\min} величина большой полуоси a перелетной орбиты монотонно возрастает, меняются эксцентриситет орбиты и расположение точек 1 и 2 относительно апсидальной оси орбиты. При расположении второго фокуса в точке O'_α точка 2 становится апоцентром орбиты перелета. Из рис. 9.19 видно, что при расположении второго фокуса выше O'_α перелет из точки 1 в точку 2 всегда осуществляется с прохождением апоцентра орбиты, а при расположении его ниже O'_α апоцентр будет находиться за точкой 2.

Рис. 9.18 и 9.19 соответствуют случаю, когда угловая дальность перелета $\Delta\vartheta < \pi$, но очевидно, что аналогичные построения и соответствующий анализ могут быть проведены и для случаев $\Delta\vartheta > \pi$ и $\Delta\vartheta = \pi$. В последнем случае, однако, положение плоскости орбиты становится неопределенным и для ее построения необходима дополнительная информация.

9.6.4. Задача Ламберта. Рассмотренные до сих пор задачи допускали довольно простое решение и наглядный геометрический анализ. Во многом это объясняется тем, что исходные данные задачи относились только к пространственным характеристикам орбитального движения. Задача определения орбиты становится существенно более сложной, если в качестве исходной информации, кроме пространственных характеристик, задана их привязка к времени.

Наглядным примером этого является задача Ламберта, широко используемая в практике. Формулируется она следующим образом: по заданным характеристикам начального и конечного положений ($r_1, r_2, \Delta\vartheta$) и заданному времени перелета Δt определить орбиту перелета. Практическая ценность такой задачи очевидна: ее решение позволяет осуществить перелет из произвольного начального положения r_1 , соответствующего моменту времени t_1 , в любое конечное положение r_2 , соответствующее заданному моменту t_2 .

Решение подобной задачи для частного случая перелета по параболической орбите было предложено Эйлером. В более общей постановке задача впервые была рассмотрена Ламбертом, который показал, что время перелета Δt зависит только от большой полуоси орбиты перелета a , суммы расстояний $r_1 + r_2$ от начальной и конечной точек перелета до притягивающего центра и длины хорды s , соединяющей эти точки.

Результат Ламберта, вообще говоря, неожиданный: время перелета никоим образом не зависит от эксцентриситета перелетной орбиты. Мы воспользуемся этим результатом, опустив его подробное аналитическое доказательство, и для получения интересующей нас зависимости снова ограничимся рассмотрением эллиптического типа движения. Исчерпывающий анализ задачи можно найти в [34].

Заданной сумме радиальных расстояний $r_1 + r_2$ и заданной длине хорды s можно поставить в соответствие множество эллиптических орбит перелета (рис. 9.20). Действительно, если мы будем рассматривать точки 1 и 2 как фокусы эллипса с удвоенной большой полуосью $2a = r_1 + r_2$, то для любой точки эллипса сумма расстояний до фокусов 1 и 2 будет равна $r_1 + r_2$. Построенный таким образом эллипс есть геометрическое место

положений фокусов O , при которых обеспечивается неизменность длины хорды s и суммы $r_1 + r_2$ (именно суммы, а не слагаемых r_1 и r_2 !). Граничное положение точки O на линии, проходящей через точки 1 и 2 , соответствует предельному случаю перелета по вертикальной эллиптической орбите (мы говорим только о точке O_B , полагая, как и прежде, для определенности, что точка 2 расположена дальше от центра притяжения, чем точка 1).

Если дополнительно к $r_1 + r_2$ и s задать величину большой полуоси a орбиты перелета, то (см. п. 9.6.3) каждому положению фокуса O можно поставить в соответствие два фокуса O' , расположенные симметрично относительно хорды s (рис. 9.21). При смещении фокуса O меняются положения вторых фокусов, причем геометрическим местом положений вторых

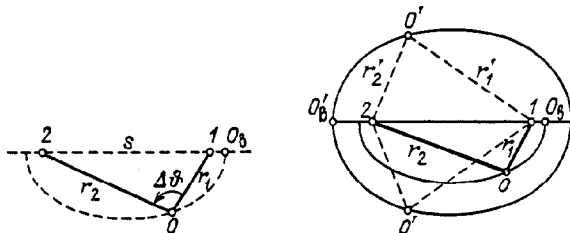


Рис. 9.20. Геометрическое место положений фокусов орбит перелета при неизменных значениях s и $r_1 + r_2$

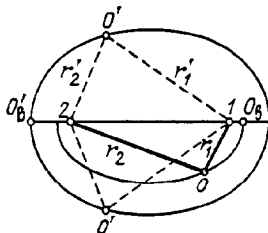


Рис. 9.21. Геометрическое место положений вторых фокусов орбит перелета при заданных значениях $s, r_1 + r_2$ и a

фокусов O' также является эллипс с фокусами в точках 1 и 2 и удвоенной большой полуосью, равной

$$2a_2 = r'_1 + r'_2 = 2a - r_1 + 2a - r_2 = 4a - (r_1 + r_2).$$

При смещении фокуса O к положению O_B вторые фокусы O' смещаются к положению O'_B , которое соответствует предельному случаю перелета по вертикальной орбите.

Таким образом, заданным $r_1 + r_2, s$ и a можно поставить в соответствие два семейства эллиптических орбит перелета, отличающихся расположением второго фокуса. При $a = a_{\min} = (r_1 + r_2 + s)/4$ оба семейства совпадают, поскольку второй фокус лежит на хорде s .

По Ламберту всем орбитам семейства соответствует одно и то же время перелета, поэтому для определения этого времени достаточно рассмотреть перелет по любой из орбит семейства, например по предельной орбите семейства — вертикальной орбите с фокусами O_B и O'_B . Отметим, что двум семействам перелетных орбит соответствуют два варианта перелета по вертикальной орбите: первому семейству (фокус O' ниже хорды) отвечает перелет из точки 1 в точку 2 без прохождения точки O'_B , второму (фокус O' выше хорды) — перелет в точку 2 с предварительным прохождением точки O'_B , являющейся апоцентром орбиты.

Для вертикального движения эллиптического типа, являющегося предельным случаем ($e \rightarrow 1$) эллиптического движения, можно воспользоваться

ся многими полученными ранее соотношениями. В частности, для вертикальных орбит сохраняется правомерность понятия эксцентрисической аномалии.

На рис. 9.22 точка O_1 — центр окружности радиуса, равного величине большой полуоси a вертикальной орбиты (и всего семейства перелетных орбит), O'_B — апоцентр вертикальной орбиты, совпадающий с предельным положением второго фокуса перелетной орбиты.

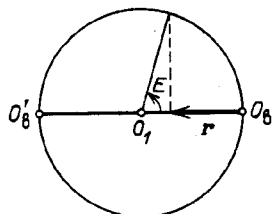


Рис. 9.22. Эксцентрисическая аномалия для вертикального движения эллиптического типа

Радиальное удаление ЛА от центра притяжения O_B при движении по вертикальной эллиптической орбите, согласно § 9.5, определяется соотношением

$$r = a(1 - \cos E) = 2a \sin^2 \frac{E}{2}, \quad (9.39)$$

а время полета от точки O_B до текущего положения — уравнением Кеплера

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - \sin E). \quad (9.40)$$

Радиальное удаление $r' = r$ может быть достигнуто и после прохождения апоцентра орбиты — точки O'_B . В этом случае $E' = 2\pi - E$ и формулы (9.39) и (9.40) принимают вид

$$\begin{aligned} r' &= 2a \sin^2 \frac{E'}{2} = 2a \sin^2 \frac{E}{2}, \\ t' - \tau &= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E' - \sin E') = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (2\pi - E + \sin E). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Для случая движения по вертикальной эллиптической орбите $s = r_{B2} - r_{B1}$, и поэтому по известным $q = r_1 + r_2$, s и a определяются

$$r_{B1} = \frac{q - s}{2}, \quad r_{B2} = \frac{q + s}{2}$$

и затем по (9.39)

$$\begin{aligned} \sin \frac{E_1}{2} &= \sqrt{\frac{r_{B1}}{2a}} = \sqrt{\frac{q - s}{4a}} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{4a}}, \\ \sin \frac{E_2}{2} &= \sqrt{\frac{r_{B2}}{2a}} = \sqrt{\frac{q + s}{4a}} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{4a}}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Если известно, к какому из интервалов $[(0, \pi)$ или $(\pi, 2\pi)]$ принадлежат E_1 и E_2 , то время перелета определяется легко. Например, если $E_1, E_2 \in (0, \pi)$, то из (9.40) получаем

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [(E_2 - \sin E_2) - (E_1 - \sin E_1)]. \quad (9.43)$$

Формула вида (9.43) называется *уравнением Эйлера – Ламберта для эллиптического движения*. Это уравнение совместно с (9.42) устанавливает зависимость между исходными данными задачи Ламберта $\Delta t, r_1, r_2, s$ (или, что то же, $\Delta \vartheta$) и искомым значением большой полуоси a .

Остается неясным вопрос, как по исходным данным задачи установить принадлежность E_1 и E_2 к тому или иному интервалу, т.е. как установить вид уравнения Эйлера – Ламберта. Оказывается, этот вопрос может быть решен на основании анализа угловой дальности перелета $\Delta \vartheta$ и соотношения между заданным временем перелета $\Delta t_{\text{зад}}$ и временем Δt_{min} , соответствующим перелету при минимально допустимом значении большой полуоси $a = a_{\text{min}} = (r_1 + r_2 + s)/4$:

$$\Delta t_{\text{min}} = \frac{(r_1 + r_2 + s)^{3/2}}{8\sqrt{\mu}} [\pi - (E_1 - \sin E_1)],$$

$$\sin \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{r_1 + r_2 + s}}, \quad E_1 \in (0, \pi).$$

Ниже представлены различные варианты уравнения (9.43), при этом предполагается, что значения эксцентрических аномалий определяются формулами (9.42), исходя из условия $E_1, E_2 \in (0, \pi)$.

При $\Delta \vartheta < \pi$:

если $\Delta t_{\text{зад}} < \Delta t_{\text{min}}$, то

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [(E_2 - \sin E_2) - (E_1 - \sin E_1)],$$

если $\Delta t_{\text{зад}} > \Delta t_{\text{min}}$, то

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [2\pi - (E_2 - \sin E_2) - (E_1 - \sin E_1)].$$

При $\Delta \vartheta > \pi$:

если $\Delta t_{\text{зад}} < \Delta t_{\text{min}}$, то

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [(E_2 - \sin E_2) + (E_1 - \sin E_1)],$$

если $\Delta t_{\text{зад}} > \Delta t_{\text{min}}$, то

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [2\pi - (E_2 - \sin E_2) + (E_1 - \sin E_1)].$$

Трансцендентный характер представленных зависимостей делает возможным решение задачи Ламберта только численно. Процесс решения заключается в нахождении такого значения a , при котором $\Delta t = \Delta t_{\text{зад}}$.

Мы рассмотрели решение задачи Ламберта в предположении движения по эллиптическим орбитам. Аналогичное рассмотрение и подобные результаты могут быть получены и для случая перелета по гиперболическим орбитам.

В частном случае перелета по параболической орбите ($a = \infty$) время перелета однозначно связано с исходными пространственными данными задачи

$$\Delta t_{\text{пар}} = \frac{1}{6\sqrt{\mu}} [(r_1 + r_2 + s)^{3/2} \pm (r_1 + r_2 - s)^{3/2}],$$

где знак плюс берется в случае $\Delta \vartheta > \pi$, а минус — в случае $\Delta \vartheta < \pi$.

9.6.5. Определение орбиты по двум векторам скорости и величине большой полуоси или времени полета. Задание векторов скорости V_1 и V_2 определяет плоскость орбиты, а знание угла, на который поворачивается вектор скорости в ходе перелета, позволяет однозначно определить и направление векторной константы площадей c . Поэтому сформулируем задачу следующим образом: по заданным V_1 , V_2 , δ и a определить орбиту перелета (δ — угол поворота вектора скорости в ходе перелета).

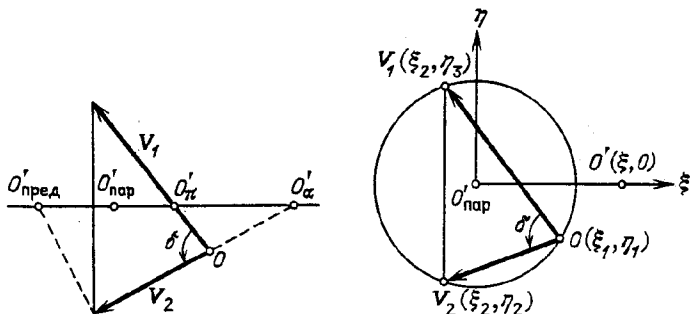


Рис. 9.23. Геометрическая интерпретация задачи определения орбиты по двум заданным векторам скорости

Рис. 9.24. Система координат, связанная с годографом скорости параболического движения

Определение орбиты по исходным данным задачи можно провести с помощью годографа скорости (см. п. 9.6.1), между которым и орбитой существует взаимно однозначное соответствие.

Соединим концы векторов V_1 и V_2 (рис.9.23) отрезком прямой и через середину отрезка нормально к нему проведем прямую. Эта прямая является геометрическим местом центров всех окружностей, проходящих через концы векторов V_1 и V_2 . Выделим на этой линии (линии центров) две точки: $O'_{\text{пар}}$ — центр окружности годографа скорости параболического движения (окружность описывает концы векторов V_1 , V_2 и центр годогра-

фа O) и $O'_{\text{пред}}$ — центр окружности такого годографа гиперболического движения, когда скорость V_2 (для определенности будем полагать, что $V_1 \geq V_2$) является скоростью на "бесконечности". Из рисунка следует, что на участке линии между $O'_{\text{пред}}$ и $O'_{\text{пар}}$ расположены центры окружностей годографов скорости гиперболического движения, а справа от $O'_{\text{пар}}$ — эллиптического движения.

Кроме этих двух точек, на линии центров можно выделить следующие точки: O'_π — для случая, когда V_1 является скоростью в перигентре; O'_α — для случая, когда V_2 является скоростью в апоцентре. Участок $O'_{\text{пар}}O'_\pi$ соответствует перелетам с прохождением перигентра, участок справа от O'_α — перелетам с прохождением апоцентра, участок $O'_\pi O'_\alpha$ — перелетам без прохождения апсидальных точек.

$$\text{Радиус окружности годографа } R = \sqrt{\frac{\mu}{p}}, \text{ а расстояние } OO' = r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e.$$

Большая полуось орбиты, центр окружности годографа скорости которой находится в точке O' , определяется формулой $a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\mu}{R^2 - r^2}$.

С помощью этой формулы для точек $O'_{\text{пред}}$, O'_α , O'_π можно получить значение большой полуоси, соответствующее расположению центра окружности годографа O' в этих точках:

$$a_{\text{пред}} = -\frac{\mu}{V_2^2}, \quad a_\alpha = \frac{\mu}{V_1 V_2} \frac{V_2 - V_1 \cos \delta}{V_1 - V_2 \cos \delta},$$

$$a_\pi = \frac{\mu}{V_1 V_2} \frac{V_1 - V_2 \cos \delta}{V_2 - V_1 \cos \delta}. \quad (9.44)$$

Из анализа (9.44) следует:

— при $V_2/V_1 = \cos \delta$ точка O'_π совпадает с $O'_{\text{пар}}$, а точка O'_α лежит в "бесконечности"; при $V_2/V_1 < \cos \delta$ точка O'_α на участке возможных положений центра окружности годографа отсутствует, а O'_π смещается в гиперболическую область линии центров;

— при $V_1 = V_2$ участок $O'_\pi O'_\alpha$ стягивается в точку, совпадающую с центром окружности годографа, и для этой точки $a = \mu/V_1 V_2$;

— при $\delta = \pi$ участок $O'_\pi O'_\alpha$ также стягивается в точку, при этом для любой точки линии центров $a = \mu/V_1 V_2$.

Рис. 9.23 и проведенный анализ относятся к случаю, когда $\delta \leq \pi$. Анализ при $\delta > \pi$ проводится аналогично, при этом, очевидно, возможно лишь эллиптическое движение.

Выясним характер изменения величины большой полуоси a при смещении центра окружности годографа от $O'_{\text{пар}}$. Для этого рассмотрим годограф в системе координат с началом в точке $O'_{\text{пар}}$ и осью ξ , совпадающей с линией центров (рис. 9.24). Большая полуось в такой системе координат определяется соотношением

$$a = \frac{\mu}{2\xi(\xi_1 - \xi_2)}, \quad (9.45)$$

из которого следует, что величина $|a|$ монотонно убывает с удалением O' от $O'_{\text{пар}}$ — этот вывод правомерен для любых значений δ .

На основании сказанного можно заключить, что заданным V_1 и V_2 можно поставить в соответствие:

— при $\delta < \pi$ — эллиптические орбиты с любым $a \in (0, \infty)$, гиперболические орбиты с любым $a \in \left(-\infty, -\frac{\mu}{V_2^2}\right)$ и одну параболическую орбиту;

— при $\delta = \pi$ — эллиптические орбиты с $a = \mu/V_1 V_2$;

— при $\delta > \pi$ — эллиптические орбиты с любым $a \in (0, \infty)$.

При взаимно однозначном соответствии между годографом скорости и орбитой знание V_1 , V_2 , δ и a позволяет с помощью (9.45) полностью определить орбиту перелета.

Если в исходные данные задачи вместо заданной величины большой полуоси ввести заданное время перелета, то придем к аналогу задачи Ламберта: по заданным характеристикам вектора скорости в начале и конце перелета (V_1 , V_2 , δ) и заданному времени перелета Δt определить орбиту перелета.

Особенности решения этой задачи во многом аналогичны особенностям решения задачи Ламберта. В частности, время перелета Δt и величина большой полуоси a связаны трансцендентными соотношениями, которые приведем без вывода:

— для эллиптических орбит перелета

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[\alpha - \left(\frac{V_1^2 a - \mu}{V_1^2 a + \mu} + \frac{V_2^2 a - \mu}{V_2^2 a + \mu} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right],$$

где

$$\cos \alpha = \frac{4\mu V_1 V_2 \cos \delta + (V_1^2 a - \mu)(V_2^2 a - \mu)}{(V_1^2 a + \mu)(V_2^2 a + \mu)};$$

— для гиперболических орбит перелета

$$\Delta t = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[\left(\frac{V_1^2 a + \mu}{V_1^2 a - \mu} + \frac{V_2^2 a + \mu}{V_2^2 a - \mu} \right) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} - \alpha \right],$$

где

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{(V_1^2 a + \mu)(V_2^2 a + \mu) - 4\mu V_1 V_2 \cos \delta}{(V_1^2 a - \mu)(V_2^2 a - \mu)};$$

— для параболических орбит перелета

$$\Delta t_{\text{пар}} = \frac{4\mu}{3V_1^3 V_2^3} (V_1^2 + V_2^2 + V_1 V_2 \cos \delta) \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos \delta}.$$

Теории невозмущенного кеплерова движения как составной части классической небесной механики посвящено множество работ. В них читатель найдет более фундаментальное или более популярное, а иногда просто методологически иное изложение вопросов, обсуждавшихся в главе 9. Можно, например, рекомендовать работы [3, 5, 10, 23, 26, 34].

ОСНОВЫ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ
ОРБИТАЛЬНОГО ПОЛЕТА

Задачи, которые ставятся перед ЛА, могут быть самыми разнообразными: обеспечение радио- и телевизионной связи (например, с помощью спутников "Молния", "Горизонт", "Экран"), обзор и фотографирование земной поверхности и облачного покрова ("Метеор", "Союз"), доставка экипажа и груза на орбитальные станции ("Союз", "Прогресс"), комплексное исследование космического и околоземного пространства ("Салют", "Космос") и др. Очевидно, что эффективное выполнение поставленных задач возможно при движении ЛА по орбите (или орбитам) с определенными характеристиками (форма, ее размеры и расположение относительно космического пространства и земной поверхности). Эти характеристики определяют не только условия работы научной аппаратуры, установленной на борту ЛА, но и условия работы систем управления его полетом.

Таким образом, задачу баллистического проектирования полета можно разделить на два последовательно выполняемых этапа:

- проектирование параметров рабочей орбиты, позволяющей наилучшим образом выполнить поставленную задачу (в настоящее время можно говорить о проектировании параметров систем рабочих орбит);
- проектирование доставки ЛА на рабочую орбиту и управления его полетом в ходе доставки и функционирования на рабочей орбите.

В настоящей главе, посвященной вопросам проектирования орбит и методам их создания, мы должны будем расширить наше представление о характеристиках орбитального движения, которое было получено при рассмотрении задачи двух тел. Это, с одной стороны, объясняется приближенностью описания реального движения ЛА кеплеровой теорией, а с другой — специфичностью задач, которые порождены практикой космических полетов. Будут рассмотрены основные особенности движения ЛА в нецентральной гравитационном поле Земли, относительное движение двух ЛА, а также вопросы целенаправленного изменения характеристик движения в ходе орбитального маневрирования.

§ 10.1. Особенности движения летательного аппарата в нецентральной гравитационном поле

Постоянство кеплеровых элементов орбиты a , e , i , Ω , ω во времени есть свойство движения ЛА в центральном гравитационном поле. При решении многих практических задач и, прежде всего, при проведении качественного анализа решаемых задач использование кеплерова приближения для описания реального движения вполне допустимо. В других задачах даже на этапе качественного анализа необходимо переходить к более точному приближению к реальности.

Реальное движение происходит при сложном силовом воздействии внешней среды на ЛА. Это, воздействие можно представить в виде суммы основного слагаемого — гравитационного воздействия со стороны центрального тела — и дополнительного — различных возмущающих сил. При наличии возмущающих сил орбита, вообще говоря, уже не будет кеплеровой, но

поскольку порядок возмущающих сил обычно намного меньше порядка основного слагаемого, то и реальная орбита не должна значительно отличаться от кеплеровой.

Определим в некоторый момент времени t_0 по вектору состояния $(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0)$ реального движения тела кеплеровы элементы, которые описывают некоторую кеплерову орбиту. Поскольку и реальная и кеплерова орбиты в момент t_0 проходят через одну и ту же точку \mathbf{r}_0 с одной и той же скоростью \mathbf{V}_0 , они в этой точке касаются. Аналогичным образом любой другой точке реальной орбиты можно поставить в соответствие касательную к ней кеплерову орбиту, т.е. реальную орбиту можно рассматривать как огибающую семейства кеплеровых орбит. Соприкасающиеся кривые называются *оскулирующими*, поэтому кеплеровы орбиты семейства называют *оскулирующими орбитами*, а их элементы – *оскулирующими элементами*.

В произвольно выбранный начальный момент t_0 векторы состояния реальной и оскулирующей орбит совпадают по определению. По мере удаления от этого момента времени орбиты расходятся за счет того, что реальное силовое воздействие гравитационного поля, определяющее движение по реальной орбите, отличается от воздействия центрального гравитационного поля, которое порождает кеплерово движение. Это расхождение будет тем меньше, чем меньше промежуток времени Δt действия возмущающей силы, т.е. чем меньше сдвиг от момента t_0 (этот момент называют *моментом оскуляции*, а соответствующую ему точку реальной орбиты – *точкой оскуляции*). В пределе, когда $\Delta t \rightarrow 0$, реальное движение можно рассматривать как непрерывно меняющееся кеплерово движение, а оскулирующие элементы – как непрерывные функции времени.

Природа возмущающих воздействий, искажающих кеплерову орбиту, разнообразна: нецентральность гравитационного поля, атмосферное сопротивление и т.д. Остановимся лишь на одном из них – возмущающем воздействии, порожденном отличием реального гравитационного поля Земли от центрального. Это отличие (см. гл. 2) будем характеризовать вторым членом разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям, поэтому в качестве модели реального гравитационного поля примем модель с потенциалом

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi}{2} = U_{\text{ц}} + \delta U, \quad (10.1)$$

где $U_{\text{ц}}$ – потенциал центрального поля; δU – поправка, учитывающая сжатие Земли.

В главе 2 было определено возмущающее силовое воздействие, порождаемое поправкой δU ; было отмечено, что его величина определяется коэффициентом $J_2 = 1,0827 \cdot 10^{-3}$, т.е. возмущение на три порядка меньше основного воздействия. Тем не менее возмущение вызывает довольно заметное изменение оскулирующих элементов во времени, которое мы вкратце рассмотрим.

Аналитические исследования показывают, что в изменениях, вызванных возмущающим воздействием $\text{grad } \delta U$, можно выделить составляющие так называемого векового и периодического характера. *Вековая* составляющая соответствует постоянному возрастанию или убыванию величины элемен-

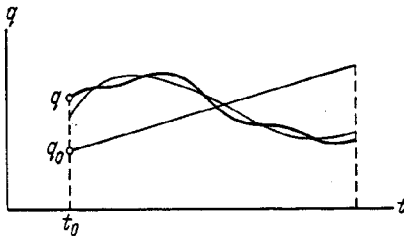


Рис. 10.1. Слагаемые возмущений оскулирующих элементов

та пропорционально времени. В *периодической* составляющей можно в свою очередь выделить коротко- и долгопериодические части. Период короткопериодической части кратен времени, в течение которого истинная аномалия ϑ изменится на угол 2π , т.е. кратен периоду орбиты. Период долгопериодической части кратен времени векового изменения аргумента широты перигея ω на угол 2π .

В общем виде характер изменения оскулирующего элемента орбиты q может быть представлен в виде

$$q = q_0 + \dot{q}_0(t - t_0) + k_1 \cos(\omega_0 + n\omega) + k_2 \sin(\vartheta_0 + m\vartheta),$$

где первый член — некоторое среднее значение элемента q в начальный момент времени t_0 , второй — его вековое возмущение, третий и четвертый — соответственно долго- и короткопериодические возмущения. Изменение элемента q в соответствии с формулой иллюстрирует рис. 10.1.

В результате исследований было определено, что вековым и периодическим возмущениям при движении ЛА в гравитационном поле с потенциалом (10.1) подвержены оскулирующие долгота восходящего узла Ω , аргумент широты перигея ω и угловое положение ЛА на орбите, задаваемое средней аномалией M . Оскулирующие большая полуось a , эксцентриситет e и наклонение i испытывают лишь периодические возмущения. В отношении векового возмущения Ω , ω и M отметим следующее: если Ω и ω в кеплеровой теории были константами и за счет векового возмущения стали линейными функциями времени, то средняя аномалия M и в кеплеровой теории была линейной функцией времени, а вековое возмущение привнесло поправку к этой функции, также линейную по времени. Наличие линейной поправки, очевидно, означает изменение средней угловой скорости движения ЛА (среднего движения n) или периода орбиты.

Ниже без вывода приведены зависимости, характеризующие возмущения некоторых орбитальных параметров. Для упрощения зависимостей предполагалась малость эксцентриситета орбиты.

За интервал времени Δt происходит вековое изменение долготы восходящего узла орбиты

$$\Delta\Omega = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos i \Delta t, \quad (10.2)$$

за этот же промежуток времени вековое смещение аргумента широты перигея составит

$$\Delta\omega = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (-1 + 5 \cos^2 i) \Delta t. \quad (10.3)$$

Вековое смещение плоскости орбиты и ее апсидальной оси, характеризующее соответственно формулами (10.2) и (10.3), обычно называют *прецессией* плоскости и апсидальной оси орбиты. Скорость прецессии зависит от размера (a) и наклона (i) орбиты; для большинства околоземных ЛА размер орбиты ограничен, поэтому основным фактором, определяющим скорость прецессии, является наклонение орбиты.

Из (10.2) следует, что скорость прецессии $\Delta\Omega/\Delta t$ убывает с увеличением наклона i от 0 до 90° и затем возрастает с увеличением i от 90° до 180° . При $i \in (0, 90^\circ)$ долгота восходящего узла орбиты убывает, т.е. смещается с востока на запад; при $i \in (90^\circ, 180^\circ)$ наблюдается обратная картина.

При $i \approx 63,5^\circ$ обращается в нуль величина $(-1 + 5 \cos^2 i)$ в выражении (10.3) и соответственно скорость прецессии апсидальной оси $\Delta\omega/\Delta t$ также становится нулевой. Такое значение наклона называют *критическим*. При $0 \leq i < i_{\text{крит}}$ аргумент широты перигея увеличивается со временем, т.е. смещается в том же направлении, в котором происходит движение ЛА по орбите; при $i_{\text{крит}} < i \leq 90^\circ$ прецессия апсидальной оси имеет обратное направление.

В соответствии с § 9.5 $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ есть средняя угловая скорость орбитального движения ЛА. Поскольку за интервал времени Δt , равный периоду орбиты, ЛА совершает полный оборот, по формулам (10.2) и (10.3) можно получить смещение узла и перигея орбиты за один виток, принимая

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \Delta t = 2\pi:$$

$$\Delta\Omega_T = -3\pi J_2 \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 \cos i, \quad (10.4)$$

$$\Delta\omega_T = \frac{3}{2} \pi J_2 \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 (-1 + 5 \cos^2 i). \quad (10.5)$$

При движении ЛА в нецентральной гравитационной среде вместе с периодическим возмущением оскулирующей большой полуоси a периодическое возмущение испытывает и оскулирующий период орбиты T , определяемый

соотношением $T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$. Значение периода зависит от момента оскуляции, т.е. от момента, в который было определено значение оскулирующей большой полуоси. Ясно, что использование в практике столь "изменчивой" характеристики орбиты создает определенные неудобства, и поэтому введено понятие драконического периода реальной орбиты $T_{\text{др}}$: *драконический период* есть интервал времени между двумя последовательными прохождениями ЛА восходящего узла орбиты.

Если в качестве момента оскуляции взять момент прохождения ЛА восходящего узла орбиты, то разность между оскулирующим и драконическим периодами определится формулой

$$T - T_{\text{др}} = \frac{3\pi R_e^2}{\sqrt{\mu a}} J_2 \left(3 - \frac{5}{2} \sin^2 i\right). \quad (10.6)$$

Из формулы видно, что оскулирующий период, определенный по вектору состояния в восходящем узле, всегда превышает реальное время совершения полного оборота. Для орбиты с наклоном $i \approx 50^\circ$ и высотой $H = 350$ км это превышение составляет около 12 секунд.

Исходной информацией для вычисления оскулирующих элементов орбиты является вектор состояния реального движения ЛА. Поэтому можно утверждать, что возмущения оскулирующих элементов являются следствием возмущений вектора состояния. Более того, можно предположить, что возмущение характеристик вектора состояния имеет составляющие векового и периодического типа. Остановимся на такой важной характеристике вектора состояния, как радиальное расстояние ЛА от центра гравитирующего тела.

Оказалось, что с большой степенью точности это радиальное расстояние ЛА при полете по реальной орбите можно представить как расстояние в орбитальном движении по некоторой "средней" орбите (основное слагаемое) плюс его короткопериодическое возмущение. Для орбит малого эксцентриситета ($e < 0,025$, что соответствует орбитам, расположенным в высотном слое $H < 600$ км) возмущение определяется зависимостью

$$\Delta r = \frac{1}{4} J_2 \frac{R_e^2}{a} \sin^2 i \cos 2u. \quad (10.7)$$

Периодическое возмущение радиального расстояния приводит к "неработоспособности" классического понятия круговой орбиты как орбиты, все точки которой равноудалены от центра гравитирующего тела. Поэтому для реального движения принято следующее определение: *круговой* считается орбита, диаметрально противоположные точки которой равноудалены от притягивающего центра. Рассмотрим более подробно такую "реальную" круговую орбиту; отметим сразу же, что действительно круговой, в классическом понимании этого слова, является лишь "средняя" кеплерова орбита, соответствующая реальной орбите.

На основании (10.7) разница между максимальным ($u = 0, \pi$) и минимальным ($u = \pi/2, 3\pi/2$) удалениями орбиты от притягивающего центра

составляет $\frac{1}{2} J_2 \frac{R_e^2}{a} \sin^2 i$; для орбиты с $i \approx 50^\circ$ и $H = 350$ км разница

около 2 км. Если радиальное расстояние до такой орбиты в восходящем узле равно r_e , то расстояние до соответствующей ей "средней" орбиты в этой же точке равно

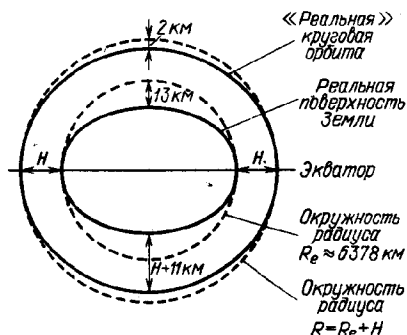
$$r^{cp} = r_e - \frac{1}{4} J_2 \frac{R_e^2}{a} \sin^2 i.$$

Поскольку расстоянию до реальной орбиты соответствует сумма основного слагаемого и его возмущения, то для произвольной точки с аргументом широты u

$$r = r^{cp} + \frac{1}{4} J_2 \frac{R_e^2}{a} \sin^2 i \cos 2u = r_e - \frac{1}{4} J_2 \frac{R_e^2}{a} \sin^2 i (1 - \cos 2u). \quad (10.8)$$

Реальную орбиту часто характеризуют ее высотой над поверхностью Земли, в частности минимальным и максимальным значениями высоты. Если в

Рис. 10.2. Геометрическая интерпретация понятия "реальная" круговая орбита



качестве модели земной поверхности используется поверхность эллипсоида вращения, то расстояние до такой поверхности от центра Земли (см. п. 2) определяется формулой

$$R_3 = R_e (1 - \alpha \sin^2 \varphi). \quad (10.9)$$

Геоцентрическая широта радиуса-вектора ЛА определяется известным соотношением сферической тригонометрии

$$\sin \varphi = \sin i \sin u,$$

с помощью которого находится формула для радиуса поверхности Земли в подспутниковой точке

$$R_3 = R_e (1 - \alpha \sin^2 i \sin^2 u). \quad (10.10)$$

Диапазон изменения R_3 для $i \approx 50^\circ$ составляет около 13 км; на экваторе ($u = 0$ или π) $R_3 = R_e \approx 6378$ км; в точках, соответствующих четверти витка полета от экватора ($u = \pi/2$ или $3\pi/2$), $R_3 \approx 6365$ км.

Таким образом, если радиальное расстояние ЛА на реальной орбите представить в виде (10.8), а радиус поверхности Земли в подспутниковой точке в виде (10.10), то легко получить значение реальной высоты полета ЛА:

$$H = r - R_3 = r^{cp} - R_e \left[\left(1 - \frac{1}{4} J_2 \frac{R_e}{a} \sin^2 i \right) - \left(\alpha - \frac{1}{2} J_2 \frac{R_e}{a} \right) \sin^2 i \sin^2 u \right]. \quad (10.11)$$

Формула (10.11) дает возможность трактовать реальную высоту полета как высоту полета по "средней" орбите над фиктивной поверхностью, заданной вторым членом этой формулы.

В заключение отметим некоторую нестрогость в традиционной форме сообщений о запуске и полете ИСЗ (хотя здесь это вполне допустимо): "Минимальное удаление от поверхности Земли (в перигее)...". Прежде всего, для реальных орбит, соответствующих движению в нецентральной гравитационном поле, не существует четко определенных понятий "перигей" и "апогей", а использование классических определений этих понятий будет давать различное положение перигея и апогея для различных точек

оскуляции. Кроме того, даже оговорив заранее выбор точки оскуляции, нельзя рассчитывать на то, что перигею и апогею будут соответствовать минимум и максимум высот в реальном движении. К сожалению, "суровая действительность" нарушила стройность и определенность классической теории. Наглядным примером этого может служить изложенное выше понятие "реальной" круговой орбиты (рис. 10.2): при полете по ней ЛА дважды за виток достигает минимального и дважды максимального значения высоты, разность этих экстремальных значений высоты для орбиты с $i \approx 50^\circ$ и $H \approx 350$ км составляет около 11 км, причем точке орбиты, максимально удаленной от центра Земли, соответствует минимальная высота полета и наоборот.

§ 10.2. Относительное движение двух летательных аппаратов в окрестности круговой орбиты

Уравнение движения ЛА в геоцентрической инерциальной системе координат (в предположении центральности гравитационного поля) имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} = \mathbf{u},$$

где \mathbf{u} — вектор ускорения, сообщаемого ЛА, например, двигателем.

Рассмотрим движение двух ЛА, причем будем считать, что один из них (назовем его пассивным) движется по невозмущенной кеплеровой орбите, а другой (активный, или маневрирующий) — по орбите, которая может отклоняться от первой как за счет начального рассогласования между орбитами, так и за счет действия возмущающего ускорения. Уравнения движения этих ЛА соответственно

$$\ddot{\mathbf{r}}_п + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_п|^3} \mathbf{r}_п = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{\mathbf{r}}_а + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_а|^3} \mathbf{r}_а = \mathbf{u}. \quad (10.12)$$

Введем понятие *вектора относительной дальности* между летательными аппаратами

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_а - \mathbf{r}_п$$

и получим уравнения относительного движения.

В исходной инерциальной системе координат $\ddot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{r}}_а - \ddot{\mathbf{r}}_п$ или в соответствии с (10.12)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_а + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_а|^3} \mathbf{r}_а - \ddot{\mathbf{r}}_п - \frac{\mu}{|\mathbf{r}_п|^3} \mathbf{r}_п &= \\ = \ddot{\mathbf{d}} + \frac{\mu}{|\mathbf{r}_п + \mathbf{d}|^3} (\mathbf{r}_п + \mathbf{d}) - \frac{\mu}{|\mathbf{r}_п|^3} \mathbf{r}_п &= \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Предположим, что пассивный ЛА движется по круговой орбите радиуса $R = |\mathbf{r}_п|$, и осуществим перевод уравнения (10.13) из исходной инерциальной системы координат в орбитальную систему, начало которой совпадает с центром масс пассивного ЛА и которая вместе с ним вращается в инерциальном пространстве с угловой скоростью орбитального движе-

$$\text{ния } \omega = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}.$$

Орбитальная система координат (ОСК) является декартовой (рис. 10.3), ее ось Ox направлена вдоль орбитальной скорости пассивного ЛА, ось Oy — вдоль геоцентрического радиуса-вектора пассивного ЛА, а ось Oz дополняет систему до правой.

Вектор относительной дальности между летательными аппаратами, вектор скорости изменения этой дальности, геоцентрический радиус-вектор

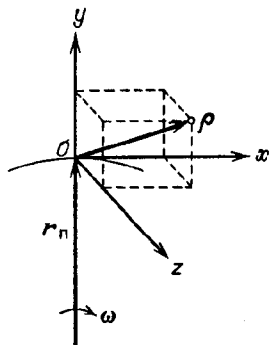


Рис. 10.3. Орбитальная декартова объектоцентрическая система координат

пассивного ЛА и вектор его угловой скорости имеют в ОСК соответственно следующие компоненты:

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{\rho}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix}.$$

Зависимость между относительными ускорениями в инерциальной системе и ОСК дается выражением

$$\ddot{\mathbf{d}} = \ddot{\vec{\rho}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}),$$

которое после проведения операций векторного умножения принимает вид

$$\ddot{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \omega \dot{y} \\ -\omega \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая зависимости $\mu = \omega^2 R^3$ и $|\mathbf{r}_{\Pi} + \mathbf{d}| = |\mathbf{R} + \vec{\rho}| = \sqrt{x^2 + (R+y)^2 + z^2}$, получаем из (10.13) дифференциальные уравнения относительного движения в покомпонентной форме:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega \dot{y} - \omega^2 x + \frac{\omega^2 R^3}{(\sqrt{(R+y)^2 + x^2 + z^2})^3} x &= u_x, \\ \ddot{y} - 2\omega \dot{x} - \omega^2 (R+y) + \frac{\omega^2 R^3}{(\sqrt{(R+y)^2 + x^2 + z^2})^3} (y+R) &= u_y, \\ \ddot{z} + \frac{\omega^2 R^3}{(\sqrt{(R+y)^2 + x^2 + z^2})^3} z &= u_z. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Система (10.14) является системой точных дифференциальных уравнений движения активного ЛА относительно пассивного в ОСК, которая движется вместе с пассивным ЛА по круговой орбите. Орбита, с которой связана ОСК, обычно называется *опорной* орбитой.

Предполагая, что компоненты вектора относительной дальности $\vec{\rho}$ малы по сравнению с величиной R , разложим выражение

$$[(R+y)^2 + x^2 + z^2]^{-3/2}$$

в ряд и ограничимся несколькими членами этого разложения:

$$[(R+y)^2 + x^2 + z^2]^{-3/2} = \frac{1}{R^3} \left[1 - 3 \frac{y}{R} - \frac{3}{2R^2} (x^2 + z^2 - 4y^2) + \dots \right].$$

В соответствии с полученным разложением система (10.14) приводится к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} - 3\omega^2 \frac{xy}{R} + \dots &= u_x, \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y - \frac{3}{2} \omega^2 \frac{x^2 + z^2 + 2y^2}{R} + \dots &= u_y, \\ \ddot{z} + \omega^2 z - 3\omega^2 \frac{zy}{R} + \dots &= u_z. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Если в системе (10.15) оставить только записанные члены разложения, мы получим систему второго приближения к точной системе (10.14), поскольку в ней учтены члены до второго порядка относительно компонент вектора $\vec{\rho}$.

Первое или линейное приближение к (10.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\omega\dot{y} &= u_x, \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y &= u_y, \\ \ddot{z} + \omega^2 z &= u_z. \end{aligned} \quad (10.16)$$

О решении системы (10.16) уже говорилось в п. 7.3.2. Наиболее простой вид оно имеет только при отсутствии возмущающего ускорения ($u = 0$) или при постоянстве величины ускорения и задании специального закона его ориентации:

— ориентация вектора ускорения в ОСК постоянна, т.е. изменяется относительно инерциального пространства с угловой скоростью вращения ОСК;

— ориентация вектора ускорения в инерциальном пространстве постоянна, т.е. изменяется в ОСК с угловой скоростью, обратной угловой скорости вращения ОСК.

Решение системы (10.16) при $u = 0$, соответствующее случаю невозмущенного относительного движения, имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 6(\sin \omega t - \omega t) y_0 + \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega t - 3t \right) \dot{x}_0 - \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega t) \dot{y}_0, \\ y &= (4 - 3 \cos \omega t) y_0 + \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega t) \dot{x}_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot \dot{y}_0, \end{aligned}$$

$$z = \cos \omega t \cdot z_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot \dot{z}_0, \quad (10.17)$$

$$\dot{x} = -6\omega(1 - \cos \omega t)y_0 + (4 \cos \omega t - 3)\dot{x}_0 - 2 \sin \omega t \cdot \dot{y}_0,$$

$$\dot{y} = 3\omega \sin \omega t \cdot y_0 + 2 \sin \omega t \cdot \dot{x}_0 + \cos \omega t \cdot \dot{y}_0,$$

$$\dot{z} = -\omega \sin \omega t \cdot z_0 + \cos \omega t \cdot \dot{z}_0,$$

где $\mathbf{R}_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$ — вектор состояния относительного движения в начальный момент $t = 0$; $\mathbf{R} = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ — вектор состояния, характеризующий относительное движение в произвольный текущий момент t .

Более удобно и компактно решение (10.17) может быть записано в матрично-векторном виде

$$\mathbf{R} = M_t \mathbf{R}_0, \quad (10.18)$$

где M_t — матрица размера 6×6 коэффициентов при компонентах начального вектора состояния \mathbf{R}_0 в (10.17).

Матрицу M_t называют *матрицей прогноза*, поскольку она осуществляет операцию преобразования начального вектора состояния \mathbf{R}_0 в вектор состояния \mathbf{R} , соответствующий интересующему нас моменту (в будущем или в прошлом). Элементы матрицы для заданной опорной орбиты являются функциями лишь времени прогноза t .

Особенностью решения системы линейного приближения (10.17) является независимость уравнений, характеризующих движение в плоскости опорной орбиты (компоненты x, y), и уравнений, характеризующих боковое движение (компонента z).

В случае возмущенного относительного движения при специальном законе ориентации возмущающего ускорения решение системы дифференциальных уравнений (10.16) также может быть записано в матрично-векторном виде

$$\mathbf{R} = M_t \mathbf{R}_0 + A_t \mathbf{u}, \quad (10.19)$$

где M_t — матрица прогноза при невозмущенном относительном движении; A_t — матрица размера 6×3 , элементы которой являются функциями времени прогнозирования и имеют различный вид для каждого из двух указанных выше законов ориентации вектора возмущающего ускорения (см., например, [21]).

Относительное движение двух летательных аппаратов можно рассматривать и в других системах координат. При этом попытка получить аналитическое решение также приводит к необходимости принятия допущения об относительной малости компонент вектора относительной дальности.

В частности, можно рассматривать относительное движение в орбитальной цилиндрической системе координат (ЦСК). Начало O этой системы координат (рис. 10.4) связано с центром масс пассивного ЛА, а положение активного ЛА относительно пассивного характеризуется смещением вдоль дуги опорной орбиты $x = \varphi R$, где $R = |r_{\text{п}}|$, высотным отклонением от опорного движения $y = |r_{\text{а}}| - R$ и боковым отклонением z (очевидно, что при доста-

точно малых значениях угла φ компоненты вектора относительного положения в ОСК и ЦСК практически совпадают).

Интересным является тот факт, что решения систем линейного приближения в ОСК и ЦСК идентичны, отличаясь лишь трактовкой компонент вектора состояния. Однако при получении системы линейного приближения в ЦСК проводится разложение в ряд выражения $[(R+y)^2 + z^2]^{-3/2}$ и делается допущение о малости компонент y и z относительно R , но не принимается никаких ограничивающих допущений о величине компоненты x . Этот факт очень существен, поскольку во многих практических задачах рассогласование в положениях летательных аппаратов вдоль дуги опорной орбиты может составлять сотни и тысячи километров, т.е. может быть вполне соизмеримым с величиной R . Отсюда следует естественный и полез-

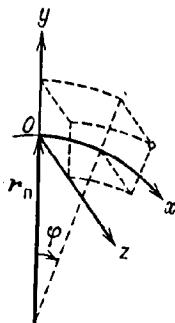


Рис. 10.4. Орбитальная цилиндрическая объектоцентрическая система координат

ный вывод: допустимая область применения решения системы линейного приближения при трактовке вектора состояния в декартовой системе существенно более ограничена, и в случаях, когда рассогласование в положениях летательных аппаратов вдоль дуги опорной орбиты достаточно велико, трактовка вектора состояния в цилиндрической системе позволяет получать результаты прогнозирования с меньшими погрешностями.

В дальнейшем мы не будем оговаривать особо, какую из систем координат мы используем, полагая, что выбор системы осуществлен в соответствии с конкретными условиями решаемой задачи.

Пользуясь свойством независимости плоского и бокового движений в решении (10.17), рассмотрим геометрию движения ЛА в плоскости опорной орбиты. Для этого сгруппируем члены первых двух уравнений (10.17) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x &= \left(x_0 - \frac{2}{\omega} \dot{y}_0 \right) - \\
 &- 3\omega t \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) + 2 \sin \omega t \cdot \left(3y_0 + \frac{2}{\omega} \dot{x}_0 \right) + 2 \cos \omega t \cdot \frac{\dot{y}_0}{\omega}, \\
 y &= 2 \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) - \cos \omega t \cdot \left(3y_0 + \frac{2}{\omega} \dot{x}_0 \right) + \sin \omega t \cdot \frac{\dot{y}_0}{\omega}.
 \end{aligned}
 \tag{10.20}$$

Введем величину $e = \sqrt{\left(3y_0 + \frac{2}{\omega} \dot{x}_0\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2}$ и заметим, что всегда можно найти такое значение некоторого угла α_0 , что

$$e \cos \alpha_0 = 3y_0 + \frac{2}{\omega} \dot{x}_0, \quad e \sin \alpha_0 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}.$$

Теперь уравнения (10.20), описывающие траекторию относительного движения, приводятся к виду

$$\begin{aligned} x &= \left(x_0 - \frac{2}{\omega} \dot{y}_0\right) - 3\omega t \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) + 2e \sin(\alpha_0 + \omega t), \\ y &= 2 \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) - e \cos(\alpha_0 + \omega t). \end{aligned} \quad (10.21)$$

В системе уравнений (10.21) можно выделить слагаемые

$$\begin{aligned} x_3 &= 2e \sin(\alpha_0 + \omega t) = 2e \sin \alpha, \\ y_3 &= -e \cos(\alpha_0 + \omega t) = -e \cos \alpha, \end{aligned} \quad (10.22)$$

характеризующие движение по эллипсу, и слагаемое, характеризующее движение центра эллипса параллельно оси x со скоростью

$$v_{xц} = -3\omega \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right), \quad (10.23)$$

причем в начальный момент времени $t = 0$ центр эллипса имеет координаты

$$x_{ц} = x_0 - \frac{2}{\omega} \dot{y}_0, \quad y_{ц} = 2 \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right). \quad (10.24)$$

Из (10.22) следует, что величина полуоси эллипса вдоль оси Ox вдвое больше величины полуоси вдоль оси Oy и движение по эллипсу происходит против направления движения часовой стрелки, причем началом отсчета угла α является луч, исходящий из центра эллипса в направлении, обратном направлению оси Oy .

Центр эллипса может лежать выше и ниже опорной орбиты — его положение определяется знаком скобки $\left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)$, который определяет и направление скорости смещения центра эллипса вдоль оси Ox : при $\left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) > 0$ центр лежит выше опорной орбиты, а скорость его смещения отрицательна; в противном случае — наоборот. При $\left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) = 0$ центр эллипса лежит на оси Ox и не смещается с течением времени.

Из второго уравнения (10.21) определяются минимальное и максимальные значения смещения по высоте от опорного движения:

$$y_{\min} = 2 \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) - e, \quad y_{\max} = 2 \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right) + e.$$

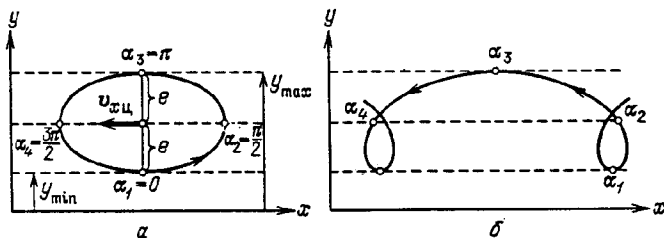


Рис. 10.5. Слагаемые (10.21) относительного движения (а) и итоговая траектория (б)

На рис. 10.5, а изображено движение по эллипсу согласно (10.22), на рис. 10.5, б — суммарное движение в соответствии с (10.21).

Говоря об относительном движении, не будем забывать, что каждый из двух летательных аппаратов движется по кеплеровой орбите, причем опорная орбита является круговой, а другая орбита, — вообще говоря, эллиптической. Будем называть вторую орбиту *возмущенной* и установим связь между параметрами относительного движения и кеплеровыми элементами возмущенной орбиты.

Поскольку опорное движение происходит по круговой орбите радиуса R , можно определить перигейное и апогейное расстояния возмущенной орбиты, соответствующие экстремальным высотам относительного движения:

$$R_{\pi} = R + y_{\min}, \quad R_{\alpha} = R + y_{\max}.$$

Зная R_{π} и R_{α} возмущенной орбиты, нетрудно определить ее большую полуось

$$a = \frac{1}{2}(R_{\pi} + R_{\alpha}) = R + \frac{1}{2}(y_{\min} + y_{\max}) = R + 2\left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right),$$

т.е. от большой полуоси опорной орбиты $a = R$ большая полуось возмущенной орбиты отличается на $\Delta a = 2\left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)$. Заметим, что $y_{\text{ц}} = \Delta a$

$$\text{и } v_{x\text{ц}} = -\frac{3}{2}\omega \Delta a.$$

Поскольку при изменении большой полуоси орбиты на Δa ее период в линейном приближении меняется на величину

$$\Delta T = \frac{3}{2}T \frac{\Delta a}{a} = \frac{3}{2} \frac{2\pi}{\omega} \frac{\Delta a}{a} = \frac{3\pi}{\omega} \frac{\Delta a}{a},$$

то период возмущенной орбиты отличается от периода опорного движения $T = 2\pi/\omega$ на величину

$$\Delta T = \frac{6\pi}{\omega R} \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right).$$

Рассмотрим более подробно величину e , которая по компонентам вектора состояния $(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ в момент t_0 определяется формулой

$$e = \sqrt{\left(3y_0 + \frac{2}{\omega} \dot{x}_0\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(e \cos \alpha_0)^2 + (e \sin \alpha_0)^2} = \sqrt{e_{10}^2 + e_{20}^2}.$$

Если мы спрогнозируем вектор состояния на момент $t_1 = t_0 + \Delta t_1$ и по компонентам нового вектора состояния вновь определим e , то получим

$$e = \sqrt{e_{1i}^2 + e_{2i}^2}, \quad \alpha_i = \alpha_0 + \omega \Delta t_1.$$

Существенным является то, что величина e для относительного движения, заданного начальным вектором состояния, постоянна, хотя ее компоненты e_{1i} и e_{2i} меняются во времени:

$$e_{1i} = 3y_i + \frac{2}{\omega} \dot{x}_i = -y_{3i} = e \cos \alpha_i, \quad e_{2i} = \frac{\dot{y}_i}{\omega} = \frac{1}{2} x_{3i} = e \sin \alpha_i,$$

т.е. e_{1i} и e_{2i} можно трактовать как компоненты вектора e , модуль которого постоянен, а направление относительно осей Ox и Oy характеризуется переменным углом α_i , отсчитываемым в соответствии с рис. 10.6.

Вектор e вращается в ОСК с угловой скоростью изменения угла α_i , т.е. со скоростью ω . Заметим, что относительно инерциального пространства орбитальная СК (или цилиндрическая СК) вращается также с угловой скоростью ω , но в направлении, обратном направлению вращения вектора e . Следовательно, можно утверждать, что направление вектора e неизменно в инерциальном пространстве и изменение его проекций в ОСК происходит только за счет вращения самой ОСК.

Для того чтобы понять, как расположен вектор e относительно кеплеровой возмущенной орбиты в инерциальном пространстве, заметим, что при $\alpha_i = 0$ достигается перигей (y_{\min}), а при $\alpha_i = \pi$ — апогей (y_{\max}) возмущенной орбиты. Но при $\alpha_i = 0$ имеем $e_{1i} = -e$ и $e_{2i} = 0$, т.е. вектор e в момент прохождения перигея направлен противоположно оси Oy (рис. 10.7). Как следует из рисунка, угол α_i фактически равен фазовому углу, который

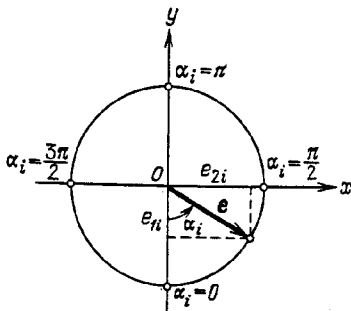


Рис. 10.6. Вектор эксцентриситета в декартовой объектоцентрической системе координат

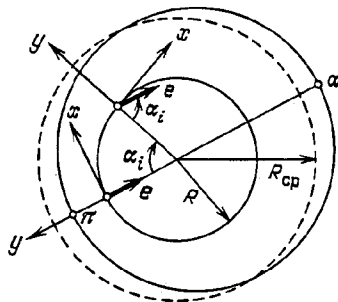


Рис. 10.7. Положение вектора эксцентриситета относительно кеплеровой возмущенной орбиты

пройден ЛА по возмущенной орбите от момента последнего прохождения перигея, т.е. он равен истинной аномалии ЛА ϑ_i .

Вектор e имеет размерность длины и в соответствии с ранее полученными результатами его компонента e_y характеризует высотный сдвиг возмущенного движения относительно круговой орбиты, радиус которой равен большой полуоси возмущенной орбиты

$$a = R_{\text{ср}} = R + 2 \left(2y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right).$$

Выражения для перигейного и апогейного расстояний возмущенной орбиты могут быть теперь записаны в виде

$$R_{\pi} = R_{\text{ср}} \left(1 - \frac{e}{R_{\text{ср}}} \right), \quad R_{\alpha} = R_{\text{ср}} \left(1 + \frac{e}{R_{\text{ср}}} \right).$$

Из кеплеровой теории известны соотношения

$$R_{\pi} = a(1 - e_{\text{оск}}), \quad R_{\alpha} = a(1 + e_{\text{оск}}).$$

Сравнение выражений для R_{π} и R_{α} , полученных при рассмотрении относительного движения и в кеплеровой теории, сразу определяет зависимость между эксцентриситетом относительного движения e и кеплеровым эксцентриситетом $e_{\text{оск}}$:

$$e_{\text{оск}} = \frac{e}{R_{\text{ср}}} \quad \text{или} \quad e = ae_{\text{оск}}.$$

До сих пор, говоря об относительном движении двух ЛА, мы полагали, что орбита одного из них является круговой. Можно ли использовать полученные результаты для описания относительного движения двух ЛА, каждый из которых движется по эллиптической орбите? Оказывается можно, и эта возможность предоставляется нам благодаря тому, что мы рассмотрели относительное движение в линейном приближении. Действительно, пусть два ЛА движутся по эллиптическим орбитам и пусть для обоих ЛА можно указать такое фиктивное опорное круговое движение и такую связанную с ним орбитальную систему координат, что будут выполняться все необходимые условия для решения задачи в линейном приближении, т.е. соответствующие отклонения координат обоих ЛА от начала системы отсчета будут достаточно малы (это одновременно означает и малость рассогласований координат самих ЛА). Для каждого ЛА мы вправе записать уравнение прогноза:

$$\mathbf{R}_1 = M_t \mathbf{R}_{01}, \quad \mathbf{R}_2 = M_t \mathbf{R}_{02},$$

где M_t — матрица прогноза, элементы которой являются функциями времени прогноза и угловой скорости опорного движения; \mathbf{R}_{01} и \mathbf{R}_{02} — векторы состояния относительных движений летательных аппаратов в начальный момент времени; \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 — векторы состояния относительных движений летательных аппаратов в конечный момент времени. Из разности этих уравнений нетрудно получить

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = M_t \mathbf{R}_{01} - M_t \mathbf{R}_{02} = M_t (\mathbf{R}_{01} - \mathbf{R}_{02}) = M_t \mathbf{r}_0,$$

где \mathbf{r}_0 и \mathbf{r} — векторы состояния движения первого ЛА относительно второго соответственно в начальный и конечный моменты времени.

Естественно, что при указанном относительном движении невозможно установить простую связь между параметрами относительного движения и кеплеровыми элементами, поскольку y_{\min}, y_{\max} и ϵ в этом случае характеризуют возмущение не круговой, а эллиптической орбиты.

Завершая описание линейной теории относительного движения, остановимся на свойствах матрицы прогноза M_t уравнения (10.18). Запишем это уравнение в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = M_{k0} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}, \quad (10.25)$$

где $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$ — векторы состояния относительного движения соответственно в начальный момент t_0 и конечный момент t_k ; M_{k0} — матрица, осуществляющая прогноз вектора состояния на временной интервал $(t_k - t_0)$.

Получим вектор состояния в момент t_k иным образом, осуществив сначала прогноз на промежуточный момент $t_1 \in [t_0, t_k]$ и продолжив его затем до момента t_k :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = M_{10} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = M_{k1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = M_{k1} M_{10} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, результирующая матрица прогноза M_{k0} на временной интервал $(t_k - t_0)$ есть результат произведения матриц прогноза M_{k1} и M_{10} при осуществлении прогноза последовательно на интервал $(t_1 - t_0)$ и затем на интервал $(t_k - t_1)$. Этот вывод можно обобщить следующим образом: $M_{k0} = M_{k, k-1} M_{k-1, k-2} \dots M_{21} M_{10}$.

До сих пор рассматривался прогноз вектора состояния относительного движения на некоторый момент в будущем, но, очевидно, прогноз может быть осуществлен и на заданный момент в прошлом — для этого достаточно определить элементы матрицы прогноза $M(t)$ для отрицательного временного интервала. При этом

$$M(-t) = M^{-1}(t).$$

При решении ряда задач может оказаться более удобным рассматривать относительное движение в какой-либо системе координат, отличающейся от использованных нами орбитальных вращающихся систем (ОСК или ЦСК). Если преобразование вектора состояния \mathbf{R} при переходе к новой системе координат является линейным и задается постоянной матрицей A ($\mathbf{r} = A\mathbf{R}$), то легко получить матрицу прогноза относительного движения в новой системе координат:

$$\mathbf{r}_t = A\mathbf{R}_t = A M_t \mathbf{R}_0 = A M_t A^{-1} \mathbf{r}_0 = N_t \mathbf{r}_0,$$

т.е.

$$N_t = A M_t A^{-1}.$$

В качестве примера подобного преобразования укажем на преобразования "замораживания" вектора состояния, заданного в ОСК. В результате такого преобразования мы приходим к ОСКЗ (ОСК "замороженная"), оси которой в любой момент времени совпадают с осями ОСК и вместе с

тем в каждый текущий момент неподвижны относительно инерциального пространства. Матрицу A этого преобразования можно представить в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} E & 0 \\ A_V & E \end{bmatrix}, \text{ где } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_V = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а результат преобразования вектора состояния \mathbf{R} , заданного в ОСК, — в виде

$$\mathbf{r} = (x, y, z, V_x, V_y, V_z)^T = A(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T = A\mathbf{R}.$$

Исходя из характера преобразования, можно сказать, что вектор состояния \mathbf{r} есть результат проектирования разности абсолютных векторов состояния возмущенного и опорного движений на оси ОСК.

Матрица прогноза N_t , полученная по формуле $N_t = AM_t A^{-1}$, дает следующий аналог решения (10.17) для ОСКЗ:

$$x = (2 \cos \omega t - 1)x_0 + (2 \sin \omega t - 3\omega t)y_0 + \\ + \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega t - 3t \right) V_{x0} + \frac{2}{\omega} (\cos \omega t - 1) V_{y0},$$

$$y = \sin \omega t \cdot x_0 + (2 - \cos \omega t)y_0 + \\ + \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega t) V_{x0} + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot V_{y0},$$

$$z = \cos \omega t \cdot z_0 + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot V_{z0},$$

$$V_x = -\omega \sin \omega t \cdot x_0 + \omega (\cos \omega t - 1)y_0 + (2 \cos \omega t - 1)V_{x0} - \sin \omega t \cdot V_{y0},$$

$$V_y = \omega (1 - \cos \omega t)x_0 + \omega (3\omega t - \sin \omega t)y_0 + \\ + (3\omega t - 2 \sin \omega t) V_{x0} + (2 - \cos \omega t) V_{y0},$$

$$V_z = -\omega \sin \omega t \cdot z_0 + \cos \omega t \cdot V_{z0}.$$

§ 10.3. Условия освещенности и видимости в орбитальном полете

10.3.1. Определение геометрических характеристик условий. Условия освещенности и видимости ЛА, движущегося по орбите искусственного спутника Земли, определяются взаимным положением Солнца, Земли, пункта наблюдения и ЛА. Для описания этих условий используются угловые характеристики взаимного положения.

Освещенность при полете ЛА характеризуется углом между направлениями с ЛА на центр Земли и центр солнечного диска. Этот угол *Солнце — объект — Земля* (СОЗ) определяется формулой

$$\varphi = \pi - \arccos(\vec{\rho}^0 \cdot \vec{s}^0), \quad (10.26)$$

где $\vec{\rho}^0$ и \vec{s}^0 — орты направлений из центра Земли соответственно на ЛА и центр солнечного диска.

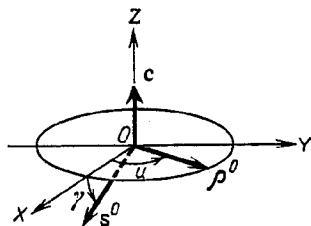
При движении ЛА в пределах одного витка орбиты направление \vec{s}^0 (вектор Солнца) остается практически неизменным, а направление $\vec{\rho}^0$ меняется

в соответствии с изменением геоцентрического радиуса-вектора положения ЛА. В дальнейшем для простоты будем полагать, что ЛА движется по круговой орбите.

Введем в рассмотрение инерциальную систему координат (рис. 10.8), ось OZ которой совпадает с направлением векторной константы площадей с орбиты ЛА, ось OY направлена вдоль вектора $c \times s^0$, а ось OX дополняет систему до правой.

Очевидно, ось OX совпадает с проекцией вектора s^0 на плоскость орбиты OXY . Если угол между вектором s^0 и плоскостью орбиты равен γ , а

Рис. 10.8. Система координат, связанная с плоскостью орбиты и направлением на Солнце



положение ЛА на орбите задается углом u , отсчитываемым от оси OX , то интересующие нас орты имеют компоненты

$$\vec{\rho}^0 = (\cos u, \sin u, 0)^T, \quad s^0 = (\cos \gamma, 0, -\sin \gamma)^T,$$

а их скалярное произведение равно $(\vec{\rho}^0 \cdot s^0) = \cos u \cos \gamma$. Максимум и минимум скалярного произведения достигаются в точках $u = 0$ и $u = \pi$. В соответствии с (10.26) в этих же точках достигаются $\varphi_{\max} = \pi - \gamma$ и $\varphi_{\min} = \gamma$ (угол γ не превышает $\pi/2$). Между этими точками величина φ изменяется в соответствии с зависимостью

$$\varphi = \pi - \arccos(\cos u \cos \gamma),$$

причем при $\gamma < \pi/2$ на интервале $u \in (0, \pi)$ величина угла φ убывает, а на интервале $u \in (\pi, 2\pi)$ возрастает. При $\gamma = \pi/2$ в любой точке орбиты $\varphi \equiv \pi/2$.

Определим, при каких условиях на орбите летательного аппарата появляется теневая область. Будем полагать, что поверхность Земли сферическая, а земная тень ограничена цилиндрической поверхностью. Рассмотрим геометрию взаимного расположения орбиты и Солнца в плоскости, проходящей через вектор s^0 и векторную константу площадей с (эта плоскость совпадает с плоскостью рис. 10.9).

Если R_e — радиус сферической поверхности Земли, а H — высота круговой орбиты ЛА, то, согласно рисунку, орбита касается земной тени при выполнении условия $\gamma = \arcsin \frac{R_e}{R_e + H}$. При $\gamma < \arcsin \frac{R_e}{R_e + H}$ часть орбиты будет расположена в тени, при $\gamma > \arcsin \frac{R_e}{R_e + H}$ в любой точке орбиты летательный аппарат будет освещен.

Вопрос о наличии теневой области на орбите и ее размере можно решить, рассмотрев сечение теневого цилиндра орбитальной плоскостью. Вид этого

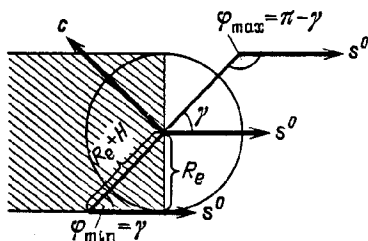


Рис. 10.9. Геометрия взаимного расположения плоскости орбиты и направления на Солнце

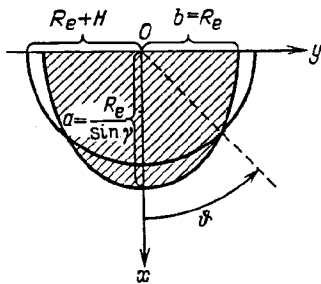


Рис. 10.10. Сечение теневого цилиндра орбитальной плоскостью

сечения с конца вектора c приведен на рис. 10.10. Орбите на этом рисунке соответствует окружность радиуса $R_e + H$, а границе тени — эллипс с полуосями $b = R_e$ и $a = \frac{R_e}{\sin \gamma}$. Расположим в плоскости рисунка (а значит, и в плоскости орбиты) оси Ox и Oy так, чтобы уравнения орбиты и границы тени имели соответственно вид

$$x^2 + y^2 = (R_e + H)^2, \quad \frac{x^2 \sin^2 \gamma}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_e^2} = 1.$$

Угловой размер затененного участка орбиты (2ϑ) равен угловому расстоянию между точками входа в тень и выхода из нее. Для определения точек пересечения орбиты с тенью достаточно решить систему уравнений окружности и эллипса, что дает

$$\vartheta = \arccos \frac{\sqrt{2R_e H + H^2}}{(R_e + H) \cos \gamma}.$$

Очевидно, о пересечении окружности с эллипсом можно говорить только при условии $a > R_e + H$ или $\frac{R_e}{R_e + H} > \sin \gamma$.

Угол φ для ЛА и соответствующей его положению на орбите подспутниковой точки земной поверхности один и тот же; следовательно, по значению φ можно судить и об освещенности поверхности Земли под ЛА. В частности, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ЛА пролетает над границей дня и ночи на Земле, т.е.

над *терминатором*, при $\varphi > \frac{\pi}{2}$ — над освещенной поверхностью Земли,

при $\varphi < \frac{\pi}{2}$ — над ее ночной стороной.

Теперь перейдем к вопросу об условиях взаимной видимости ЛА и пункта, расположенного на поверхности Земли, т.е. к описанию условий наблюдаемости. При этом, очевидно, безразлично, ведется ли наблюдение с наземного пункта за полетом ЛА или наоборот.

Видимость ЛА с пункта наблюдения характеризуется углом места β , т.е. углом между направлением с пункта на ЛА и плоскостью местного горизонта пункта (рис. 10.11). Величина угла β для случая сферической поверхности Земли определяется формулой

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{((\mathbf{r} - \mathbf{R}_{п.н}) \cdot \mathbf{R}_{п.н})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_{п.н}| \cdot |\mathbf{R}_{п.н}|},$$

где \mathbf{r} и $\mathbf{R}_{п.н}$ — геоцентрические радиусы-векторы соответственно ЛА и пункта наблюдения. При $\beta > 0$ ЛА находится в зоне прямой видимости с

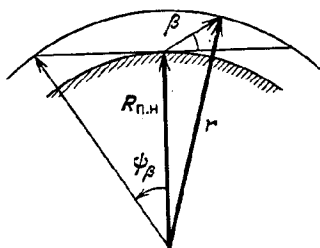


Рис. 10.11. Угловые характеристики видимости с пункта наблюдения

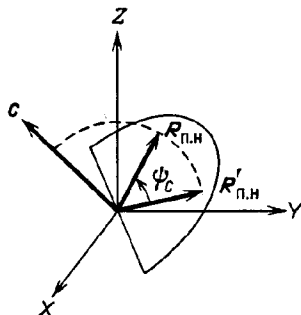


Рис. 10.12. Угловое удаление ψ_c пункта наблюдения от плоскости орбиты

пункта наблюдения. При $\beta = 0$ ЛА расположен на границе зоны видимости и его угловое удаление от пункта наблюдения составляет ψ_β .

Возможность наблюдения ЛА и время его пребывания в зоне видимости пункта определяются взаимным расположением плоскости орбиты ЛА и пункта наблюдения и положением ЛА на орбите. Эти характеристики меняются во времени не только из-за орбитального движения ЛА, но и из-за прецессии плоскости орбиты и суточного вращения Земли.

Вопрос о видимости ЛА с заданного пункта обычно решается путем вычисления угла β при совместном рассмотрении движения ЛА по орбите и перемещения пункта наблюдения, вращающегося вместе с Землей. Решая задачу методом численного интегрирования, мы получаем и анализируем зависимость $\beta = \beta(t)$.

Иногда необходимо без точных расчетов знать, есть ли видимость ЛА с пункта на данном витке, и если есть, то приближенно оценить длительность пребывания ЛА в зоне видимости.

Угловое удаление пункта наблюдения от плоскости орбиты определяется через векторную константу площадей c и геоцентрический радиус-вектор пункта наблюдения $\mathbf{R}_{п.н}$ (на рис. 10.12 $\mathbf{R}'_{п.н}$ — проекция вектора $\mathbf{R}_{п.н}$ на плоскость орбиты):

$$\psi_c = \left| \arccos \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{R}_{п.н})}{|\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{R}_{п.н}|} - \frac{\pi}{2} \right|.$$

Максимальное угловое расстояние между пунктом наблюдения и ЛА в зоне

Таблица 10.1

Кратность орбиты	Число полных витков ЛА за интервал кратности	Средняя высота орбиты, км	
		$i \approx 50^\circ$	$i \approx 70^\circ$
$n = 1$	16	202	233
	15	500	528
$n = 2$	31	347	376
	29	663	688
$n = 3$	47	298	328
	46	398	428
	44	608	634

(траектория движения подспутниковой точки по поверхности вращающейся Земли) начинает полностью повторяться; для этого достаточно, чтобы за N полных витков ЛА Земля относительно плоскости орбиты совершила n полных оборотов. Временная протяженность такого цикла приблизительно n кратна суткам, а орбиты, обладающие таким свойством, называются *орбитами n -суточной кратности* ($n = 1, 2, \dots$). Если реальный период орбиты определяется формулой (10.6), то для кратных орбит выполняется соотношение

$$\frac{2\pi}{\omega_B} n = T_{др} N,$$

на основании которого можно определить параметры таких орбит. Из этого соотношения с учетом (10.6) и (10.28) следует, что кратность орбиты зависит от ее размера (или средней высоты $H = a - R_e$) и наклона орбиты i . В табл. 10.1 приведены характеристики некоторых кратных орбит для наклонов $i \approx 50^\circ$ и $i \approx 70^\circ$.

В реальном полете строгое выполнение условий кратности, как правило, не обеспечивается, в частности из-за изменения параметров орбиты под влиянием естественных возмущающих факторов или в результате маневрирования. Тем не менее свойства орбит, для которых условия кратности выполнены с той или иной степенью точности, широко используются как при выборе параметров рабочих орбит, так и при планировании работы с ЛА.

Примером рабочей орбиты, параметры которой выбраны с учетом условий кратности, является орбита спутников связи типа "Молния". Основная задача спутников этого типа — обеспечение радиотелефонной и телевизионной связи в выбранном районе земной поверхности. Задача должна выполняться каждые сутки в течение длительного полета, а это возможно только в том случае, если орбита спутника суточной кратности. Если параметры орбиты из-за возмущающих воздействий перестают удовлетворять условиям кратности с заданной довольно высокой точностью, предусматривается проведение коррекции параметров орбиты.

Для обозначения границ цикла по условиям видимости ЛА в нашей стране введены понятия *географической долготы восходящего узла орбиты* $\lambda_{в.у}$ и *суточных витков орбиты*. Под $\lambda_{в.у}$ принято понимать географи-

ческую долготу подспутниковой точки на поверхности Земли в момент, когда ЛА проходит восходящий узел орбиты, принимаемый за начало витка. В ходе полета за счет вращения Земли относительно плоскости орбиты (с угловой скоростью ω_B) долгота $\lambda_{B,y}$ каждого последующего витка изменяется в западном направлении на величину $\Delta\lambda$, называемую *межвитковым расстоянием*. Витки полета, для которых выполняется условие $\lambda_{B,y} \in (\lambda_{B,y}^* - \Delta\lambda, \lambda_{B,y}^*)$, называются *первыми суточными витками* ($\lambda_{B,y}^*$ — некоторое выбранное значение долготы; для орбит с $i \approx 50^\circ$ принято $\lambda_{B,y}^* = 20^\circ$ в.д.). Последующие витки называются вторым, третьим и т.д. суточными витками вплоть до очередного первого суточного витка.

Временной интервал между прохождениями восходящих узлов двух соседних первых суточных витков составляет *полетные сутки*, которые по своей длительности отличаются от календарных суток.

Привязка начала первого суточного витка пусть не точно к заданной географической долготе, но к некоторому ограниченному диапазону $(\lambda_{B,y}^* - \Delta\lambda, \lambda_{B,y}^*)$ географических долгот дает основание выделить такие витки полета, для которых трассы полета, а значит, и условия видимости с наземных пунктов в значительной степени аналогичны, т.е. аналогичны условия "общения" наземного комплекса управления с ЛА. В случае длительного (особенно многолетнего) полета это свойство дает возможность разработать и использовать на практике стандартные участки программы работы наземного комплекса с ЛА.

Цикличность условий освещенности ЛА определяется угловой скоростью

$$\omega_{\text{осв}} = \omega_s + \delta\omega_s = \omega_s + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{a} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos i.$$

Для орбиты высотой $H \approx 350$ км и наклонением $i \approx 50^\circ$ временная протяженность цикла составляет $\Delta t_{\text{осв}} = 2\pi/\omega_{\text{осв}} \approx 60$ суток. Это свойство также оказывается полезным при планировании и осуществлении длительного полета. Действительно, если мы для осуществления некоторой операции на орбите выбрали период полета, в который выполняются оптимальные для данной операции условия освещенности (на орбите или в районах земной поверхности, над которыми пролетает ЛА), то можно быть уверенным, что такие же условия автоматически сформируются спустя целое число циклов после выбранного периода. В качестве примера операции можно назвать операцию схода с орбиты и посадки пилотируемого ЛА — при ее осуществлении желательно, чтобы включение двигателя ЛА произошло при полете над освещенной поверхностью Земли, а приземление спускаемого аппарата — в светлое время суток полигона посадки.

Представляет интерес случай, когда поправка на прецессию в выражении для $\omega_{\text{осв}}$ становится равной угловой скорости ω_s и обратной ей по знаку, — этому случаю соответствует постоянство взаимного положения плоскости орбиты и вектора Солнца (вернее, среднего Солнца). Орбиты, для которых выполнено такое условие, называются *солнечно-синхронными*. С точки зрения практики они интересны тем, что позволяют наблюдать или фотографировать районы земной поверхности в одно и то же местное время суток, т.е. при одних и тех же условиях освещенности участков земной поверхности, над которыми пролетает ЛА. Ясно, что выбор оптимальных условий освещенности будет осуществлен соответствующим выбором ра-

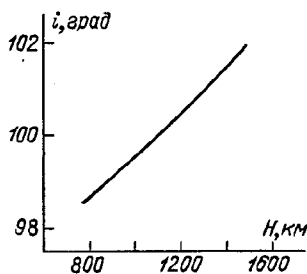


Рис. 10.14. Зависимость наклонения от средней высоты солнечно-синхронной орбиты

бочей орбиты, а дальнейшее поддержание этих условий будет обеспечиваться "бесплатно".

При необходимости может быть выбрана солнечно-синхронная орбита, все точки которой постоянно освещены Солнцем, — эффективность такого выбора очевидна для ЛА, осуществляющих постоянное наблюдение за Солнцем, или для ЛА, источником энергии для которых являются солнечные батареи.

Зависимость наклонения солнечно-синхронной орбиты от средней высоты $H = a - R_e$ приведена на рис. 10.14. Из рисунка видно, что свойство неизменности условий освещенности может быть достигнуто только для орбит, наклонение которых больше полярного.

§ 10.4. Определение момента старта

Одним из вопросов, решаемых на начальной стадии баллистического проектирования полета, является выбор момента старта носителя, выводящего ЛА на орбиту. Этот выбор осуществляется исходя из следующих задач:

- обеспечение требуемых условий освещенности орбиты ЛА в дату выведения или дату, отстоящую от даты выведения на заданное число суток;
- выведение ЛА в плоскость орбиты другого ЛА, уже совершающего орбитальный полет.

В первой задаче нас интересует взаимное положение орбитальной плоскости выведенного ЛА и вектора Солнца, во второй — взаимное положение орбитальных плоскостей двух ЛА. Таким образом, в обеих задачах определяющим фактором является положение плоскости орбиты выведения в инерциальном пространстве. Полную характеристику положения плоскости в этом пространстве дает векторная константа площадей s .

Процесс выведения ЛА на орбиту завершается в момент его отделения от последней ступени носителя. Поскольку траектория движения ЛА на участке выведения относительно вращающейся Земли не зависит от выбранного момента старта, логично вектор состояния ЛА на момент отделения задавать в геоцентрической системе координат, жестко связанной с вращающейся Землей. При определении вектора s требуется знание вектора состояния в инерциальном пространстве, а для этого достаточно знать положение вращающейся системы относительно инерциальной и перевести вектор состояния на момент отделения из подвижной системы в инерциальную.

Протяженность активного участка во времени от момента старта до момента отделения — величина постоянная и известная. Поэтому, варьируя момент старта и, значит, момент отделения, можно варьировать положение плоскости орбиты выведения в инерциальном пространстве, т.е. вектор s . Если положение вектора s при старте в некоторый момент московского времени t_1 известно, то его положение при старте в момент t_2 может быть получено поворотом из известного положения вокруг оси суточного вращения Земли на угол $\omega_3(t_2 - t_1)$. Следовательно, каждому моменту суток, выбранному в качестве момента старта носителя, ставится в соответствие

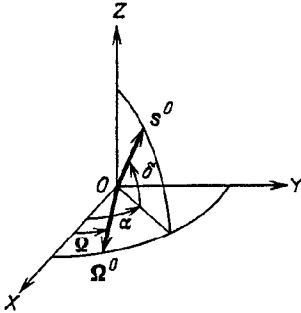


Рис. 10.15. Взаимное расположение восходящего узла орбиты и вектора Солнца

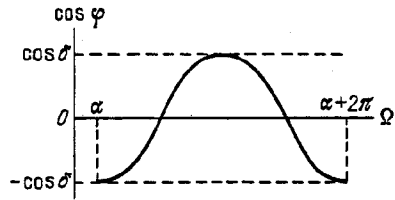


Рис. 10.16. Изменение условий освещенности в восходящем узле орбиты

вполне определенное положение вектора s , или положение плоскости орбиты выведения.

Для любой конкретной даты старта положение вектора Солнца в инерциальном пространстве известно (например, по "Астрономическому ежегоднику СССР"), так что соответствующим выбором времени старта в эту дату можно обеспечить заданные условия освещенности на орбите выведения. Более того, поскольку известен и характер изменения условий освещенности по времени полета (см. предыдущий параграф), выбором момента старта можно обеспечить выполнение необходимых условий освещенности и в любую наперед заданную дату, а с учетом цикличности изменения этих условий — в целый набор дат полета.

Рассмотрим характер изменения условий освещенности орбиты выведения с изменением момента старта носителя. Для простоты проследим изменение угла СОЗ (угла φ) в восходящем узле орбиты.

Пусть в геоцентрической инерциальной системе координат вектор Солнца s^0 имеет компоненты (рис. 10.15)

$$s^0 = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta)^T,$$

а единичный вектор положения ЛА, находящегося в восходящем узле Ω орбиты выведения,

$$\vec{\Omega}^0 = (\cos \Omega, \sin \Omega, 0)^T,$$

где α и δ — прямое восхождение и склонение Солнца.

Интересующий нас угол определяется из скалярного произведения этих векторов

$$\cos \varphi = (-\vec{\Omega}^0 \cdot \mathbf{s}^0) = -\cos \delta \cos \alpha \cos \Omega - \cos \delta \sin \alpha \sin \Omega = -\cos \delta \cos(\alpha - \Omega).$$

Варьируя время старта в пределах суточного интервала, можно обеспечить значение долготы восходящего узла орбиты выведения в пределах полного оборота и, следовательно, обеспечить полный цикл изменений условий освещенности на орбите, в частности в ее восходящем узле (рис. 10.16). Из рисунка следует, что:

– при $\Omega = \alpha + \frac{\pi}{2}$ и $\Omega = \alpha + \frac{3\pi}{2}$ в момент прохождения восходящего

узла ЛА проходит над терминатором ($\varphi = \frac{\pi}{2}$);

– при $\Omega = \alpha$ в восходящем узле будет достигаться "наибольшая" освещенность с $\varphi = \pi - \delta$;

– при $\Omega = \alpha + \pi$ в восходящем узле будет достигаться "наименьшая" освещенность с $\varphi = \delta$.

Из сказанного следует, что варьированием момента старта можно смещать вдоль орбиты выведения расположение освещенных и теневых участков и при необходимости обеспечивать в заданном смысле наилучшее расположение.

Обратимся теперь ко второй задаче, решаемой при выборе момента старта. Пусть известно положение вектора \mathbf{c}_1 уже летающего ЛА и нужно вывести второй ЛА в плоскость орбиты первого. Задача будет решена, если

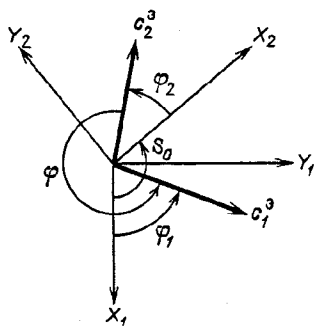


Рис. 10.17. Иллюстрация к задаче выбора момента старта

мы определим, при каком времени старта в заданные сутки векторы \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 (выводимого ЛА) совпадут. Конечно, такое совпадение возможно, если орбита первого ЛА и орбита выведения второго имеют одно и то же наклонение. Если же наклонения отличаются, то нужно подобрать такой момент старта, при котором угол между векторами \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 минимален, т.е. минимальным будет угловое рассогласование плоскостей двух орбит.

Пусть в заданную дату в 0^h московского времени векторная константа площадей летающего ЛА в СК № 1 есть $\mathbf{c}_1 = (c_{1x}, c_{1y}, c_{1z})^T$. Пусть векторная константа площадей выводимого ЛА в СК № 2, "замороженной" на момент старта носителя (см. гл. 2), есть $\mathbf{c}_2 = (c_{2x}, c_{2y}, c_{2z})^T$. Пусть, наконец,

известно, что угол между осями OX_1 и OX_2 при старте носителя в 0^h московского времени равен S_0 . Определяя момент старта, зададимся целью совместить не сами векторы c_1 и c_2 , а их проекции на плоскость экватора (плоскость рис. 10.17) c_1^3 и c_2^3 . При таком подходе задача определения момента старта решается и в случае, когда наклонения орбит не обязательно точно совпадают.

Из рис. 10.17 видно, что время старта определяется временем поворота Земли на угол $\varphi = 2\pi - (S_0 - \varphi_1 + \varphi_2)$, т.е. $t_c = \varphi/\omega_3$. Полученное время старта следует уточнить, если учесть, что угол φ_1 меняется в течение суток из-за прецессии восходящего узла орбиты летающего ЛА. Для этого достаточно учесть поправку к угловой скорости вращения Земли $\delta\omega_3$:

$$t_c = \frac{2\pi - (S_0 - \varphi_1 + \varphi_2)}{\omega_3 + \delta\omega_3}. \quad (10.29)$$

При расчете может оказаться, что t_c выходит за суточный диапазон ($0^h, 24^h$); в этом случае числитель выражения (10.29) надо изменить на величину 2π так, чтобы полученный результат $t_c \in (0^h, 24^h)$.

Из (10.29) следует, что если старт переносится с заданных суток на следующие (перенос соответствует увеличению числителя на 2π), то момент старта смещается в сторону более раннего времени суток. Это объясняется учетом поправки $\delta\omega_3$, который приводит к тому, что угловая скорость изменения взаимного положения вращающейся Земли и плоскости орбиты летающего ЛА превышает угловую скорость суточного вращения Земли. Для орбиты с $H \approx 350$ км и $i \approx 50^\circ$ задержка старта на сутки приводит к смещению московского времени старта примерно на 25^m в сторону более раннего времени.

Если в первой задаче требуемые условия освещенности можно обеспечить при старте ЛА в некотором временном интервале суток, то говорят, что существует *окно старта*. О стартовом окне говорят и в том случае, если при определении времени старта во второй задаче допускается некоторое отклонение от расчетного момента старта за счет допуска на рассогласование между орбитальными плоскостями летающего и выводимого ЛА.

§ 10.5. Маневрирование на орбите

В предыдущих параграфах были определены условия видимости и освещенности, характер изменения этих условий при движении ЛА и возможность формирования требуемых условий соответствующим выбором параметров рабочей орбиты. Но, как правило, ЛА выводится носителем на орбиту, параметры которой отличаются от параметров рабочей орбиты, т.е. сразу же возникает задача изменения существующих параметров до требуемых. Необходимость изменения орбитальных параметров может возникнуть и в ходе полета по рабочей орбите из-за того, что она существенно изменилась под влиянием возмущающих факторов, или вследствие изменения целей дальнейшего полета.

Изменение параметров орбиты осуществляется с помощью двигательной установки ЛА, а задача соответствующего изменения параметров орбиты называется *задачей маневрирования*.

Обычно задача маневрирования допускает множество решений, но практика ставит определенные требования к характеристикам решений, выделяя практически допустимые и наиболее эффективные решения; в частности, на множестве теоретических решений приемлемого для практики решения может вообще не оказаться.

Одним из наиболее важных требований к решению задачи маневрирования является требование минимальных затрат топлива двигательной установки. В дальнейшем будем полагать, что:

- маневрирование с минимальными топливными затратами эквивалентно маневрированию с минимальным суммарным изменением орбитальной скорости в процессе решения задачи;
- изменение орбитальной скорости при маневрировании происходит импульсным образом.

Разумность и допустимость принятых предположений легко обосновать. Действительно, если в ходе полета изменение массы ЛА происходит только за счет расхода топлива, то изменение орбитальной скорости от действия тяги двигателя есть монотонная функция расходуемой массы топлива, и, добиваясь минимизации изменения орбитальной скорости, мы тем самым обеспечиваем минимизацию топливных затрат. При орбитальном маневрировании обычно используются двигатели с достаточно большой тягой, а разовые изменения орбитальной скорости чаще всего относительно невелики. Поэтому и предположение об импульсном изменении скорости является вполне приемлемым.

Примем за критерий эффективности решения задачи маневрирования величину суммарного изменения орбитальной скорости ЛА при маневрировании и будем называть эту величину *потребной энергетикой маневрирования*. Кроме того, наряду с термином "изменение скорости" будем использовать термин "импульс скорости" или просто "импульс".

Задачи маневрирования, решаемые в практике космических полетов, довольно многообразны, и столь же многообразна терминологическая классификация задач. В дальнейшем мы будем, хотя и достаточно условно, классифицировать задачи маневрирования следующим образом:

- задача межорбитального перехода, т.е. задача перевода ЛА с заданной начальной на заданную конечную орбиту;
- задача коррекции, т.е. задача исправления (обычно незначительного) части орбитальных параметров;
- задача сближения, т.е. задача приведения ЛА, движущегося по исходной орбите, к другому ЛА, движущемуся по своей орбите.

Заметим, что ни для одной из трех упомянутых задач нет строгого аналитического решения в общем виде, т.е. при произвольных орбитах и произвольном количестве импульсов. Аналитические решения известны лишь для отдельных, частных постановок задач, примером которых являются задачи межорбитального перехода с одной круговой орбиты на другую, рассмотренные в п. 10.5.1, 10.5.2 и 10.5.4. Обобщение постановки сразу же приводит к тому, что теряется возможность решить задачу аналитически и остается лишь возможность получить некоторые предварительные результаты, которые способствуют организации численного решения задачи (см. п. 10.5.3 и 10.5.5).

Другой подход к задачам маневрирования заключается в получении приближенного решения, которое затем может быть уточнено численным. Обычно при этом отказываются от использования кеплеровых орбит и ограничиваются упрощенными, линеаризованными моделями движения в окрестности этих орбит. Пример такого подхода, основанный на теории относительного движения объектов в окрестности круговой орбиты, дан в п. 10.5.6 и 10.5.7, а о возможности его обобщения на случай движения в окрестности эллиптической орбиты кратко сказано в § 10.6.

10.5.1. Межорбитальный переход Гомана. Рассмотрим наиболее простую задачу, когда межорбитальный переход производится с начальной круговой орбиты радиуса r_n на конечную круговую орбиту радиуса r_k , лежащую

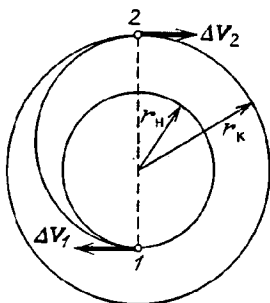


Рис. 10.18. Переход Гомана

в той же плоскости. Траектория перехода в такой задаче, впервые предложенная Гоманом, выглядит следующим образом (рис. 10.18). В точке 1 летательному аппарату, движущемуся по начальной орбите, сообщается импульс, направленный вдоль его орбитальной скорости. Величина импульса такова, что в дальнейшем ЛА будет двигаться по переходной эллиптической орбите, которая в перигентре и апоцентре касается соответственно начальной и конечной орбит. Перигентром переходной орбиты, очевидно, является точка приложения первого импульса. В момент достижения апоцентра переходной орбиты летательному аппарату сообщается второй импульс, также направленный вдоль орбитальной скорости. Этим импульсом ЛА переводится на конечную орбиту.

Заметим, что если начальная круговая орбита является внешней по отношению к конечной ($r_n > r_k$), то движение по переходному эллипсу происходит из апоцентра в перигентр, а импульсы являются не разгонными (вдоль орбитальной скорости), а тормозными (против орбитальной скорости).

Для анализа потребной энергетики гомановского перехода достаточно воспользоваться интегралом энергии в форме $V = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}}$ и параметрами начальной, конечной и переходной орбит

$$a_n = r_n, \quad a_k = r_k, \quad a_{\text{п}} = \frac{1}{2} (r_n + r_k).$$

Орбитальные скорости на начальной и конечной круговых орбитах соот-

ответственно равны $V_H = \sqrt{\frac{\mu}{r_H}}$ и $V_K = \sqrt{\frac{\mu}{r_K}}$; орбитальные скорости в перигея и апогея переходной орбиты

$$V_\pi = \sqrt{\frac{2\mu}{r_H} \frac{r_K}{r_H + r_K}} \quad \text{и} \quad V_\alpha = \sqrt{\frac{2\mu}{r_K} \frac{r_H}{r_H + r_K}}$$

получаются из интеграла энергии для расстояний соответственно $r = r_\pi = r_H$ и $r = r_\alpha = r_K$. Суммарная энергетика перехода есть сумма разностей орбитальных скоростей ЛА до и после приложения импульсов:

$$\begin{aligned} \Delta V_\Sigma = \Delta V_1 + \Delta V_2 = & \left(\sqrt{\frac{2\mu}{r_H} \frac{r_K}{r_H + r_K}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_H}} \right) + \\ & + \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_K}} - \sqrt{\frac{2\mu}{r_K} \frac{r_H}{r_H + r_K}} \right). \end{aligned}$$

Приведем к безразмерному виду выражение для суммарного импульса, разделив обе его части на выражение для скорости начальной круговой орбиты:

$$\frac{\Delta V_\Sigma}{V_H} = \left(1 - \frac{1}{D} \right) \sqrt{\frac{2D}{1+D}} + \sqrt{\frac{1}{D}} - 1, \quad (10.30)$$

где $D = r_K/r_H$. Исследование на экстремум по D выражения (10.30) приводит к кубическому уравнению

$$D^3 - 15D^2 - 9D - 1 = 0,$$

среди решений которого для нас представляет интерес корень $D_{\max} \approx 15,58$. Из (10.30), кроме того, следует:

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\Delta V_\Sigma}{V_H} = \sqrt{2} - 1.$$

Результат анализа (10.30) отражен на рис. 10.19. Видно, что энергетика гомановского перехода возрастает с увеличением радиуса конечной орбиты до $r_K \approx 15,58 r_H$, а затем монотонно падает до предела, соответствующего переходу с начальной круговой орбиты на параболическую орбиту. Такой предельный случай гомановского перехода, когда $r_K = \infty$, будем называть *параболическим*; его энергетика определяется разностью параболической и круговой скоростей в точке приложения первого импульса:

$$\Delta V_\infty = \Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_H}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_H}} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\frac{\mu}{r_H}}.$$

В соответствии с (10.30) второй импульс перехода равен нулю.

Полученные результаты полностью справедливы и для перехода с внешней начальной круговой орбиты на внутреннюю конечную ($r_H > r_K$).

Рассмотрим энергетика перехода между круговыми орбитами по схеме последовательного осуществления двух предельных гомановских переходов, или, другими словами, по схеме *бипараболического* перехода. Такая

схема становится теоретически возможной благодаря тому, что переход между круговой орбитой радиуса $r = \infty$ и параболической орбитой с произвольным перигентром достигается приложением "импульса нулевой величины". Последовательность событий при бипараболическом переходе следующая: первый импульс переводит ЛА с начальной круговой орбиты радиуса r_H на параболу отлета, затем два "нулевых импульса" переводят ЛА сначала на круговую орбиту радиуса $r = \infty$, а с нее — на параболическую орбиту с расстоянием до перигентра r_K , и, наконец, последний импульс переводит ЛА с параболы прилета на конечную круговую орбиту радиуса r_K .

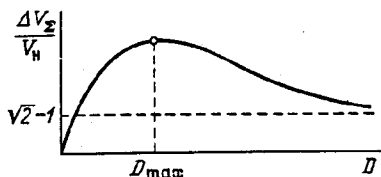


Рис. 10.19. Суммарная энергетика перехода Гомана

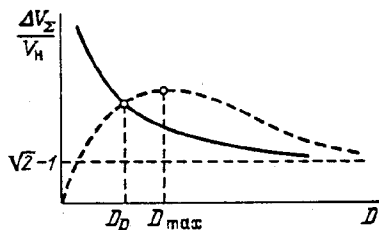


Рис. 10.20. Суммарная энергетика бипараболического перехода

Энергетика бипараболического перехода дается следующим безразмерным соотношением:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_{\infty}}{V_H} &= \frac{\Delta V_{\infty H}}{V_H} + \frac{\Delta V_{\infty K}}{V_H} = \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)V_H}{V_H} + \frac{(\sqrt{2}-1)V_K}{V_H} = (\sqrt{2}-1) \left(1 + \sqrt{\frac{1}{D}} \right). \end{aligned} \quad (10.31)$$

Графически зависимость (10.31) показана на рис. 10.20 сплошной линией. Точка пересечения линий, соответствующих зависимостям (10.30) и (10.31), определяется после приравнивания зависимостей и решения получающегося при этом кубического уравнения. Действительным корнем уравнения является $D_p \approx 11,94$. При $D \rightarrow \infty$, как видно из (10.31), $\frac{\Delta V_{\infty}}{V_H} \rightarrow \sqrt{2}-1$, и поскольку точка $D = D_p$ является единственной точкой пересечения двух кривых, можно утверждать, что при $D < D_p$ гомановский переход энергетически эффективнее бипараболического, а при $D > D_p$ картина меняется на обратную.

10.5.2. Биэллиптический переход. Рассмотрим еще один тип перехода между начальной и конечной круговыми орбитами. Пусть в некоторой точке начальной орбиты летательному аппарату сообщается импульс ΔV_1 , направленный вдоль орбитальной скорости и переводящий его на эллиптическую орбиту с апоцентром, удаленным на расстояние $r_{\alpha} > r_K$. В апоцентре первого переходного эллипса сообщается второй импульс ΔV_2 , направленный вдоль орбитальной скорости и переводящий ЛА на второй переход-

ной эллипс, расстояние до перигея которого $r_{\pi} = r_{\kappa}$. Наконец, в перигее второго переходного эллипса летательному аппарату сообщается третий импульс ΔV_3 , по направлению обратный орбитальной скорости и завершающий переход на конечную круговую орбиту. Такой переход называется *биэллиптическим*, его графическое изображение дано на рис. 10.21.

Гомановский и бипараболический переходы являются частными случаями биэллиптического перехода — первый из них соответствует $r_{\alpha} = r_{\kappa}$, а второй — $r_{\alpha} = \infty$.

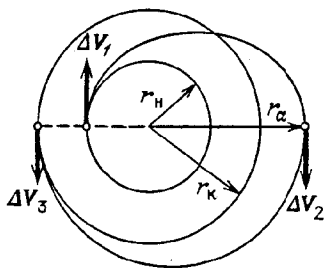


Рис. 10.21. Биэллиптический переход

Выражение для суммарной энергетике биэллиптического перехода получается с помощью интеграла энергии, но оно довольно громоздко и поэтому укажем лишь его функциональное содержание:

$$\Delta V_6/V_H = f(D, D^*),$$

где $D = r_{\kappa}/r_n$; $D^* = r_{\alpha}/r_n$.

При исследовании $f(D, D^*)$ на экстремум обычно фиксируют D и рассматривают f как функцию только D^* . Очевидны следующие свойства исследуемой функции:

— при $D^* = D$ $f(D, D^*) = \Delta V_{\Sigma}/V_H$,

$$\lim_{D^* \rightarrow \infty} f(D, D^*) = \Delta V_{\infty}/V_H.$$

Исследование производной $\partial f/\partial D^*$ также довольно громоздко, и мы приведем лишь его результаты:

— при $D^* < D$ гомановский переход энергетически эффективнее любого биэллиптического перехода;

— если $D \geq D_{\max} \approx 15,58$, то при $D^* > D$ имеет место $df/dD^* < 0$. Этот факт означает, что для $D \geq 15,58$ биэллиптический переход эффективнее гомановского при любых $D^* > D$; при $D^* = D$ энергетика гомановского и биэллиптического перехода одинакова. Графическая интерпретация этого

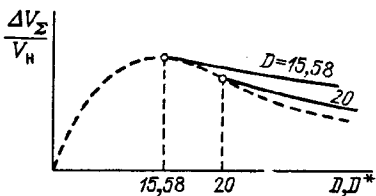


Рис. 10.22. Суммарная энергетика биэллиптического перехода

результата дается на рис. 10.22. Пусть на кривой энергетики гомановского перехода выбрана точка, соответствующая $D = r_{\kappa}/r_{\text{н}} = 20$. При $D = D^*$ энергетика гомановского и биэллиптического переходов одна и та же, но при сколь угодно малом увеличении r_{α} сверх r_{κ} , т.е. при достижении условия $D^* > D$, благодаря тому, что $df/dD^* < 0$, биэллиптический переход осуществится с меньшей энергетикой, чем гомановский переход;

– поскольку предельное минимальное значение энергетики биэллиптического перехода (при $D^* \rightarrow \infty$) совпадает с энергетикой бипараболического перехода, можно утверждать, что для любого $D \in (D_p, D_{\text{max}})$ всегда найдется такое D^* , что биэллиптический переход будет энергетически выгоднее гомановского;

– при $D < D_p \approx 11,94$ биэллиптический переход не может быть эффективнее гомановского.

Обсуждая достоинства того или иного варианта межорбитального перехода, следует иметь в виду, что, кроме чисто баллистического понимания энергетической эффективности (величина суммарного импульса), в понятие эффективности, используемое на практике, включают и многие другие, возможно, не менее важные соображения. В частности, увеличение r_{α} в биэллиптическом переходе приводит к увеличению времени полета ЛА, а значит, и к возрастанию затрат, направленных на обеспечение функционирования ЛА в ходе полета. И если за выигрыш нескольких килограммов топлива двигательной установки приходится расплачиваться несколькими дополнительными сутками полета ЛА, то такая "экономия" может быть признана неприемлемой.

10.5.3. Котангенциальный переход. Обобщением гомановского перехода на случай непересекающихся начальной и конечной эллиптических орбит является котангенциальный переход – переход по эллиптической орбите, которая касается начальной и конечной эллиптических орбит. Импульсы изменяют скорость орбитального движения ЛА в точках касания. Поскольку касание означает совпадение орбитальных скоростей в точке касания по направлению, импульсы при котангенциальном переходе меняют

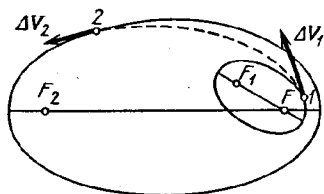


Рис. 10.23. Котангенциальный переход

величину орбитальной скорости, но не ее направление, т.е. и сами импульсы направлены вдоль орбитальной скорости. При гомановском переходе импульсы и орбитальные скорости ЛА в точках приложения импульсов не имеют радиальных составляющих, а при котангенциальном переходе такие составляющие вполне допустимы.

Для котангенциального перехода может быть доказано следующее утверждение: геометрическим местом вторых фокусов (т.е. фокусов, не совпадающих с центром притяжения) переходных орбит является эллипс, фокусы которого совпадают со вторыми фокусами начальной (F_1) и конечной (F_2) орбит и большая полуось которого равна разности больших полуосей этих орбит (рис. 10.23).

Каждому положению второго фокуса орбиты перехода может быть поставлена в соответствие суммарная энергетика перехода. При некотором положении этого фокуса имеет место переход с минимальной энергетикой. Можно предположить, что котангенциальный переход, не требующий изменения направления орбитальной скорости в

начальной и конечной точках перехода, близок к оптимальному. Численный анализ показывает правомерность такого предположения, а аналитическое решение задачи до сих пор неизвестно.

10.5.4. Поворот плоскости орбиты. До сих пор мы рассматривали случаи переходов между компланарными орбитами, т.е. орбитами с совпадающими орбитальными плоскостями. В самом общем случае произвольны не только размер, форма и ориентация апсидальных осей начальной и конечной орбит, но произвольно ориентированы и плоскости этих орбит. Естественно, что в более общем случае и решение задачи межорбитального перехода становится более сложным.

Мы не будем рассматривать самый общий случай, а остановимся коротко на задаче перехода, допускающей аналитическое решение, — на задаче поворота плоскости круговой орбиты (о более общих случаях некомпланарных переходов см., например, [25]). При этом будем сравнивать два способа поворота:

I) маневр поворота осуществляется непосредственно на круговой орбите;

II) проводится предварительный переход на эллиптическую орбиту с апоцентрическим расстоянием r_α , в апоцентре орбиты осуществляется маневр поворота плоскости орбиты, а затем в перигенте повернутой орбиты проводится переход на круговую орбиту (рис. 10.24).

Выражения, определяющие энергетику перехода в этих вариантах, имеют соответственно вид

$$\Delta V_I = 2\sqrt{\frac{\mu}{r}} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \quad \text{и} \quad \Delta V_{II} = 2\sqrt{2\mu \frac{r_\alpha}{r(r+r_\alpha)}} - \\ - 2\sqrt{\frac{\mu}{r}} + 2\frac{r}{r_\alpha} \sqrt{2\mu \frac{r_\alpha}{r(r+r_\alpha)}} \sin \frac{\Delta\varphi}{2},$$

где $\Delta\varphi$ — угол поворота плоскости орбиты.

Исследуя условие выполнения неравенства $\Delta V_I \geq \Delta V_{II}$, приходим к выражению

$$\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \geq \frac{\sqrt{\frac{2D}{1+D}} - 1}{1 - \sqrt{\frac{2}{D(1+D)}}},$$

где $D = r_\alpha/r$.

Этому выражению соответствует сплошная кривая на рис. 10.25, разделяющая пространство возможных вариантов на области $\Delta V_I < \Delta V_{II}$ и $\Delta V_I > \Delta V_{II}$. В области $\Delta V_I > \Delta V_{II}$, в которой трехимпульсный поворот плоскости орбиты энергетически эффективнее одноимпульсного, можно для заданного угла поворота $\Delta\varphi$ найти такое значение $D_{\text{опт}}$, которое обеспечит оптимальную энергетику трехимпульсного поворота; это значение определяется соотношением

$$\frac{1}{D_{\text{опт}}} = \frac{1}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} - 2.$$

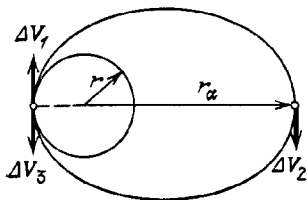


Рис. 10.24. Иллюстрация к задаче поворота плоскости орбиты

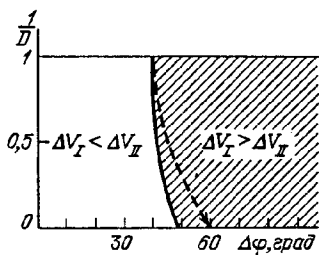


Рис. 10.25. Сравнение энергетик двух способов поворота плоскости орбиты

Штриховая кривая соответствует оптимальным решениям трехимпульсной задачи. При $\Delta\varphi \geq 60^\circ$ оптимальный поворот осуществляется при $r_\alpha = \infty$

$$\left(\frac{1}{D_{\text{опт}}} = 0 \right).$$

10.5.5. Использование результатов Гюдела при решении задач межорбитального перелета. Возможность аналитического решения или даже исследования задачи межорбитального перехода предоставляется довольно редко. Примеры такой возможности показаны в предыдущих пунктах параграфа. На практике задачи межорбитального перехода решаются, как правило, численными методами. Это вызвано как многообразием начальных и конечных орбит, так и многообразием ограничений практического плана, которые необходимо учитывать при поиске решения.

Рассмотрим один из типичных подходов к решению задачи межорбитального перелета. Пусть задача сформулирована в следующем достаточно общем виде: заданы начальная и конечная орбиты произвольных параметров, но компланарные (т.е. плоскости орбит совпадают); на этих орбитах выделены участки начала и конца перелета (будем называть их *интервалами маневрирования*); предполагается, что перелет реализуется двумя импульсами.

Заменим непрерывные интервалы маневрирования на граничных орбитах перелета набором точек, покрывающих эти интервалы с некоторым шагом (рис. 10.26). Определив возможные траектории перелета из множества точек начальной орбиты в множество точек конечной орбиты и проведя сравнение вариантов перелета по суммарным энергетическим затратам, мы можем выбрать среди них энергетически оптимальный вариант.

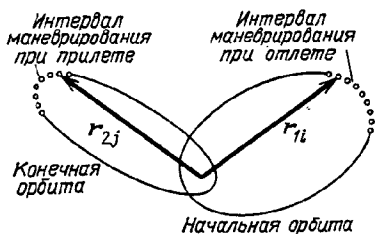


Рис. 10.26. Иллюстрация к двухимпульсному межорбитальному переходу в общем случае

Заметим, что достоверность найденного таким образом оптимального решения зависит от обоснованности степени приближения, принятой при аппроксимации непрерывных интервалов маневрирования дискретным множеством точек, т.е. обоснованности выбранного шага покрытия.

Следовательно, общая задача перелета между заданными участками начальной и конечной орбит фактически сводится к более узкой задаче перелета между заданными точками этих орбит. При решении задачи в

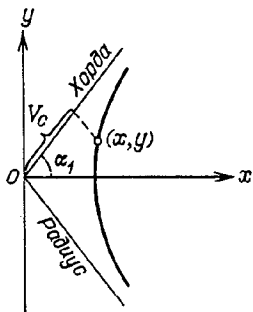


Рис. 10.27. Годограф скорости отлета

такой постановке полезно воспользоваться полученными ранее условиями совместимости Гоудела (см. § 9.6)

$$V_c V_\rho = k, \quad V_{c1} = V_{c2}, \quad V_{\rho 1} = V_{\rho 2},$$

где

$$k = \frac{\mu \Delta r}{r_1 r_2 (1 + \cos \Delta \vartheta)}; \quad \Delta r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \Delta \vartheta}.$$

Рассмотрим годограф скорости отлета в начальной точке перехода (точке 1 на рис. 9.15). Введем ортогональную систему координат с центром в точке 1 и осью Ox , направленной по биссектрисе угла, образованного хордой и радиусом (рис. 10.27). В этой системе координат уравнение годографа скорости отлета (гиперболы отлетных скоростей) имеет вид

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha_1} = 4k,$$

где α_1 — угол полураствора асимптот гиперболы скоростей в точке отлета.

Пусть в введенной системе координат вектор начальной скорости $V_0 = (x_0, y_0)^T$. Тогда для импульса скорости ΔV_1 , обеспечивающего попадание в точку годографа с координатами x и y , будем иметь

$$\Delta V_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Если точка годографа определена компонентой V_c (в косоугольной системе координат), то

$$x = \left(V_c + \frac{k}{V_c} \right) \cos \alpha_1, \quad y = \left(V_c - \frac{k}{V_c} \right) \sin \alpha_1.$$

С помощью этих зависимостей выражение для первого импульса можно

записать в виде функции аргумента V_c :

$$\Delta V_1 = \sqrt{\left[\left(V_c + \frac{k}{V_c} \right) \cos \alpha_1 - x_0 \right]^2 + \left[\left(V_c - \frac{k}{V_c} \right) \sin \alpha_1 - y_0 \right]^2}.$$

Аналогичным построением системы координат в точке прилета (точке 2) можно получить выражение для второго импульса

$$\Delta V_2 = \sqrt{\left[\left(V_c + \frac{k}{V_c} \right) \cos \alpha_2 - x_k \right]^2 + \left[\left(V_c - \frac{k}{V_c} \right) \sin \alpha_2 - y_k \right]^2},$$

где x_k и y_k — компоненты требуемой скорости в точке прилета; α_2 — угол полураствора асимптот гиперболы скоростей в точке прилета.

Поскольку в соответствии с результатами Гоудела величина V_c в точках отлета и прилета одна и та же, можно записать выражение для суммарной энергии перелета в виде функции одного аргумента V_c :

$$\Delta V_{\Sigma}(V_c) = \Delta V_1(V_c) + \Delta V_2(V_c).$$

К сожалению, вид этой функции не позволяет получить аналитическое решение задачи. Прямое исследование функции на минимум приравниванием нулю производной $d\Delta V_{\Sigma}/dV_c$ приводит к алгебраическому уравнению

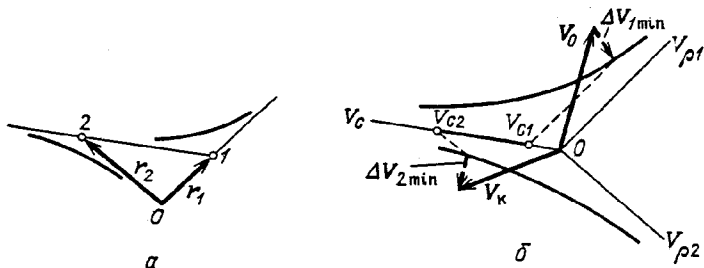


Рис. 10.28. Иллюстрация к задаче поиска абсолютного минимума суммарной энергии перехода

восьмой степени относительно V_c . Определенную сложность представляет и численное решение задачи, поскольку функция $\Delta V_{\Sigma}(V_c)$, вообще говоря, не обязательно имеет один минимум, а число локальных минимумов неизвестно. При численном решении задачи можно установить границы области поиска абсолютного минимума, предварительно решив уравнения $d\Delta V_1/dV_c = 0$ и $d\Delta V_2/dV_c = 0$. Эти уравнения сводятся к алгебраическим уравнениям четвертой степени относительно V_c ; можно показать, что каждое из этих уравнений имеет от одного до трех интересующих нас корней.

Проиллюстрируем получение области поиска абсолютного минимума ΔV_{Σ} геометрически (рис. 10.28). Сдвинем систему координат точки прилета 2 вдоль хорды так (рис. 10.28,а), чтобы начало косоугольных систем стало общим (рис. 10.28,б). Пусть V_0 и V_k — соответственно исходная скорость в начальной точке и требуемая скорость в конечной точке, $\Delta V_{1\min}$ и $\Delta V_{2\min}$ — минимальные импульсы, соответствующие мини-

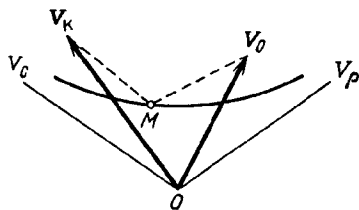
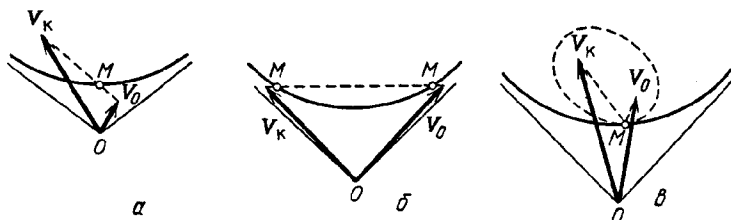


Рис. 10.29. Годограф скоростей отлета и прилета в случае равенства радиальных расстояний точек отлета и прилета

Рис. 10.30. Варианты взаимного расположения годографа скорости и начальной и конечной скоростей



мальным расстояниям до годографов скорости перелета, а V_{c1} и V_{c2} – проекции точек годографов, минимально удаленных от концов векторов V_0 и V_K , на общую ось V_c косоугольных систем. Можно утверждать, что абсолютный минимум функции $\Delta V_{\Sigma}(V_c)$ обеспечивается при $V_c \in (V_{c1}, V_{c2})$. Действительно, как видно из рисунка, при смещении V_c вправо от V_{c1} и влево от V_{c2} величины ΔV_1 и ΔV_2 возрастают и, следовательно, возрастает и величина $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

Проведенный геометрический анализ позволяет обнаружить случай, когда задача минимизации энергетики перехода может быть решена чисто геометрически; таким является случай $r_1 = r_2$. При этом косоугольные системы координат в точках 1 и 2 подобны – лишь радиальные оси лежат по разные стороны от оси, совпадающей с хордой.

Совместим начала систем координат точек отлета и прилета и дополнительно к этому развернем систему координат точки прилета относительно хорды до совпадения осей V_p обеих систем (рис. 10.29). Теперь задача поиска оптимального решения сводится к следующей: для заданных векторов начальной и конечной скоростей V_0 и V_K найти такую точку M на гиперболе, сумма расстояний до которой от концов заданных векторов минимальна.

Возможны различные варианты взаимного расположения гиперболы скоростей и векторов V_0 и V_K (рис. 10.30):

- отрезок, соединяющий концы векторов V_0 и V_K , пересекает гиперболу (рис. 10.30, а и б); в этом случае решение задачи дает точка (или две точки) пересечения отрезка с гиперболой;

- отрезок, соединяющий концы векторов V_0 и V_K , не пересекает гиперболу (рис. 10.30, в); в этом случае поиск решения можно представить как поиск точки касания гиперболы с эллипсом, фокусами которого являются концы векторов V_0 и V_K , причем если такой эллипс не единственный, то нас интересует эллипс с меньшим значением большой полуоси (большая полуось есть полусумма ΔV_1 и ΔV_2).

10.5.6. Уравнение коррекции. Воспользуемся результатами § 10.2 и выясним, как меняются характеристики относительного движения при импульсном изменении относительной скорости движения ЛА.

Пусть в некоторый момент t_1 относительное движение характеризуется вектором состояния $\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}$ и пусть в этот же момент импульсным образом скорость ЛА меняется на $\Delta \mathbf{V}_1$. Как изменится результат прогноза вектора состояния на момент t_k после приложения такого импульса?

Запишем уравнение прогноза вектора состояния для случаев приложения импульса и без него:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix}' = M_{k1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} \right\} = M_{k1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} + M_{k1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{V}_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} = M_{k1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}.$$

Из написанных уравнений видно, что результат прогноза возмущенного (импульсом) вектора состояния отличается от результата прогноза исходного невозмущенного вектора на спрогнозированную величину возмущения. Рассмотрим более подробно выражение для результата прогноза воз-

мушающего импульса $M_{k1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}$.

Представим матрицу M_{k1} , имеющую размер 6×6 , в блочном виде: $M_{k1} = [B_{k1} \ ; \ A_{k1}]$, где B_{k1} и A_{k1} — матрицы размера 6×3 . Тогда по правилу умножения блочных матриц

$$M_{k1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = [B_{k1} \ ; \ A_{k1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = A_{k1} \Delta \mathbf{V}_1. \quad (10.32)$$

Что собой представляет матрица A_{k1} ?

Обратимся, например, к первому уравнению системы (10.17) и запишем его для случая прогноза от момента t_1 на момент t_k в следующем виде:

$$x_k = a_{x1} x_1 + a_{x2} y_1 + a_{x3} z_1 + a_{x4} \dot{x}_1 + a_{x5} \dot{y}_1 + a_{x6} \dot{z}_1.$$

Производные от x_k по скоростным параметрам \dot{x}_1 , \dot{y}_1 , \dot{z}_1 суть соответственно коэффициенты a_{x4} , a_{x5} , a_{x6} , которые можно трактовать как компоненты вектора

$$(a_{x4}, a_{x5}, a_{x6})^T = \left(\frac{\partial x_k}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial x_k}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial x_k}{\partial \dot{z}_1} \right)^T = \text{grad } x_k.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть все уравнения системы (10.17)

и получить, что

$$A_{\kappa 1} = \begin{bmatrix} \text{grad } x_{\kappa} \\ \vdots \\ \text{grad } \dot{z}_{\kappa} \end{bmatrix}.$$

Матрицу $A_{\kappa 1}$ называют *матрицей влияния*, поскольку она ставит в соответствие скоростному возмущению в момент t_1 "отклик" на это возмущение в момент t_{κ} , или, другими словами, определяет степень влияния возмущающего воздействия на вектор состояния в момент t_{κ} .

Результат возмущающего воздействия импульса ΔV_1 на вектор состояния в момент t_{κ} может быть записан в виде

$$\begin{bmatrix} \Delta r_{\kappa} \\ \Delta V_{\kappa} \end{bmatrix} = A_{\kappa 1} \Delta V_1 = \begin{bmatrix} \text{grad } x_{\kappa} \cdot \Delta V_1 \\ \vdots \\ \text{grad } \dot{z}_{\kappa} \cdot \Delta V_1 \end{bmatrix}, \quad (10.33)$$

т.е. возмущение каждой компоненты вектора состояния определяется скалярным произведением соответствующего градиента на вектор импульса. Очевидно, что максимум возмущающего воздействия импульса будет иметь место в случае, когда градиент и ΔV_1 коллинеарны. Таким образом, i -я строка матрицы $A_{\kappa 1}$ задает направление, оптимальное для изменения i -й компоненты вектора состояния в момент t_{κ} . Это направление называется *направлением оптимальной коррекции i -й компоненты*.

Если нас интересует изменение i -й и j -й компонент вектора состояния в момент t_{κ} , то можно говорить о *плоскости оптимальной коррекции*. Такой плоскостью является плоскость, натянутая на градиенты i -й и j -й строк матрицы $A_{\kappa 1}$. С другой стороны, если импульс направлен вдоль прямой, ортогональной к плоскости оптимальной коррекции, то скалярные произведения этого вектора и соответствующих градиентов равны нулю, т.е. равны нулю и возмущения i -й и j -й компонент вектора состояния. Такое направление называют *нуль-направлением* для i -й и j -й компонент.

Рассмотрим теперь в рамках линейной теории относительного движения двух ЛА следующую схему полета. Пусть в начальный момент времени t_0

задан вектор состояния $\begin{bmatrix} r_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$ относительного движения; в моменты t_1 и t_2 текущий вектор состояния меняется за счет приложения импульсов

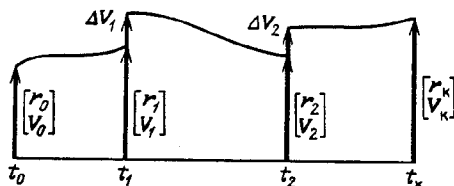


Рис. 10.31. Схема полета с двумя корректирующими импульсами

скорости ΔV_1 и ΔV_2 . Нашей задачей будет определить, каким вектором состояния характеризуется относительное движение в момент t_k . Условное представление рассматриваемой схемы дано на рис. 10.31.

Применяя последовательно уравнение прогноза и используя форму записи, аналогичную (10.32), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} &= M_{k2} M_{21} M_{10} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} + M_{k2} M_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} + M_{k2} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = \\ &= M_{k0} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} + M_{k1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta V_1 \end{bmatrix} + M_{k2} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta V_2 \end{bmatrix} = \\ &= M_{k0} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} + A_{k1} \Delta V_1 + A_{k2} \Delta V_2. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Таким образом, вектор состояния в момент t_k есть результат суперпозиции прогноза на этот момент начального вектора состояния и прогноза возмущающих воздействий импульсов коррекции. Обобщая полученный результат на случай произвольного числа коррекций, приходим к *уравнению коррекции* в общем виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} = M_{k0} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} + \sum_i A_{ki} \Delta V_i. \quad (10.35)$$

Уравнение (10.35) является линейным относительно компонент корректирующих импульсов и в покомпонентной записи представляет собой систему шести линейных уравнений с числом неизвестных, равным суммарному числу компонент корректирующих импульсов.

Если при решении задачи коррекции допускается, чтобы i -й корректирующий импульс имел три компоненты ($\Delta \dot{x}_i$, $\Delta \dot{y}_i$, $\Delta \dot{z}_i$), то говорят, что проводится трехкомпонентная коррекция. В ином случае коррекция может быть двух- или однокомпонентной.

Если при определении компонент каждого корректирующего импульса задача коррекции решается так, что не учитывается возмущающее воздействие всех прочих импульсов, т.е. решается изолированная задача, то говорят, что решается задача *несвязанных коррекций*. Примером такой задачи может быть задача последовательного исправления ошибок движения по мере улучшения знания характеристик движения.

Если компоненты всех корректирующих импульсов определяются одновременно при решении уравнения коррекции, то говорят, что решается задача *связанных коррекций*. В этом случае каждый из корректирующих импульсов вносит свой определенный вклад в изменение вектора состояния в конечный момент времени и характер этого вклада выясняется только после решения уравнения коррекции. Примером такой задачи будет задача сближения, которая рассматривается в п. 10.5.7.

Т а б л и ц а 10.2

 $H = 225$ км

Корректируе- мый параметр, км	Корректи- рующий параметр	Интервал прогноза возмущения			
		$\omega t = \pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Δx	$\Delta \dot{x}$	-0,61	-8,01	-15,42	-16,02
	$\Delta \dot{y}$	-1,70	-3,40	-1,70	0
Δy	$\Delta \dot{x}$	1,70	3,40	1,70	0
	$\Delta \dot{y}$	0,85	0	-0,85	0
Δz	$\Delta \dot{z}$	0,85	0	-0,85	0

 $H = 350$ км

Δx	$\Delta \dot{x}$	-0,62	-8,23	-15,83	-16,46
	$\Delta \dot{y}$	-1,75	-3,49	-1,75	0
Δy	$\Delta \dot{x}$	1,75	3,49	1,75	0
	$\Delta \dot{y}$	0,87	0	-0,87	0
Δz	$\Delta \dot{z}$	0,87	0	-0,87	0

В зависимости от числа включений двигателя (числа импульсов), запланированного для коррекции движения, задача коррекции или просто коррекция может быть однократной и многократной. Очевидно, что задача связанных коррекций может возникнуть только при многократном включении двигателя.

Оценим численно, каково изменение параметров относительного движения при импульсном изменении скорости ЛА. Для простоты положим, что исходная орбита ЛА круговая.

Пусть величина корректирующего импульса $\Delta V = 1$ м/с, а его направление одно из следующих: трансверсальное ($\Delta V = \Delta \dot{x}$), радиальное ($\Delta V = \Delta \dot{y}$) или нормальное ($\Delta V = \Delta \dot{z}$). Движение ЛА после приложения импульса будем рассматривать как возмущенное движение относительно фиктивного ЛА, который продолжает двигаться по исходной (опорной) круговой орбите. Воспользуемся теми элементами матрицы прогноза (10.18), которые образуют матрицу влияния, и определим отклонения Δx , Δy , Δz через четверть, половину, три четверти и виток полета после приложения импульса для исходных круговых орбит высотой 225 км и 350 км (табл. 10.2).

Данные таблицы позволяют заключить следующее:

- возмущающее воздействие импульса для довольно широкого высотного диапазона незначительно изменяется с изменением высоты орбиты;
- при трансверсальном импульсе все точки орбиты как бы удаляются от точки приложения импульса, причем через полвитка увеличение высоты орбиты максимально и составляет примерно 3,4 км; увеличению высоты орбиты соответствует увеличение большой полуоси орбиты примерно на 1,7 км (или периода орбиты на 2 с);

— при радиальном импульсе орбита как бы целиком смещается в направлении орбитальной скорости в момент приложения импульса, при этом максимальное повышение высоты примерно на 0,85 км происходит через четверть витка после импульса, максимальное понижение высоты на 0,85 км — через три четверти витка после импульса; высота орбиты в диаметрально противоположной точке, большая полуось и период орбиты остаются неизменными;

— при нормальном импульсе плоскость орбиты поворачивается вокруг радиального направления в точке приложения импульса, максимальное боковое смещение орбиты примерно на 0,85 км достигается через четверть и три четверти витка после импульса, причем направление смещения через четверть витка совпадает с направлением импульса; высоты и период орбиты остаются неизменными.

Очевидно, что при изменении направления импульса на обратное обратным по знаку станет и изменение характеристик орбиты. Более того, благодаря линейности теории относительного движения увеличение (уменьшение) импульса в несколько раз вызовет увеличение (уменьшение) во столько же раз и возмущений характеристик орбиты. Поскольку импульс произвольной величины и направления может быть представлен в виде суммы трансверсальной, радиальной и нормальной компонент, изменение орбиты таким импульсом может быть представлено в виде суммы возмущений от действия каждой из его компонент.

10.5.7. Задача сближения. Наиболее общей и, пожалуй, наиболее сложной среди задач маневрирования является задача сближения двух ЛА. Задачу межорбитального перехода можно образно назвать задачей "сближения с заданной орбитой", а задачу коррекции — задачей "сближения с фиктивной целью", движение которой в момент t_k характеризуется заданным вектором состояния. С другой стороны, задача сближения решается в результате проведения комплекса межорбитальных переходов и относится к классу многообразных коррекций. Тем не менее сближение с "живой" целью накладывает определенные требования на практическую реализацию задачи.

Как правило, одному из ЛА при осуществлении сближения отводится активная, а второму — пассивная роль. Поэтому первый ЛА, совершающий маневры сближения, будем называть *активным* ЛА, а второй — *пассивным*. Типичным примером такого распределения ролей являются станция "Салют" (пассивный ЛА) и грузовые и транспортные корабли (активные ЛА). В дальнейшем изложении задачи сближения мы будем иметь в виду именно эту космическую программу.

Схема решения задачи сближения или, точнее, схема полета со сближением состоит из нескольких этапов. Первый из них осуществляется еще до выведения на орбиту активного ЛА и является этапом подготовительным. На этом этапе пассивный ЛА, находящийся на орбите, должен определенным образом изменить или скорректировать свое движение с тем, чтобы к моменту выведения активного ЛА параметры орбиты пассивного ЛА и его положение на этой орбите удовлетворяли бы определенным условиям. Подготовительный этап называют этапом *формирования монтажной орбиты* (орбиты, на которой произойдет "монтаж" связи из двух ЛА).

На втором этапе (*этапе выведения* на орбиту) активный ЛА еще не приступает к выполнению своей активной роли — он лишь является полез-

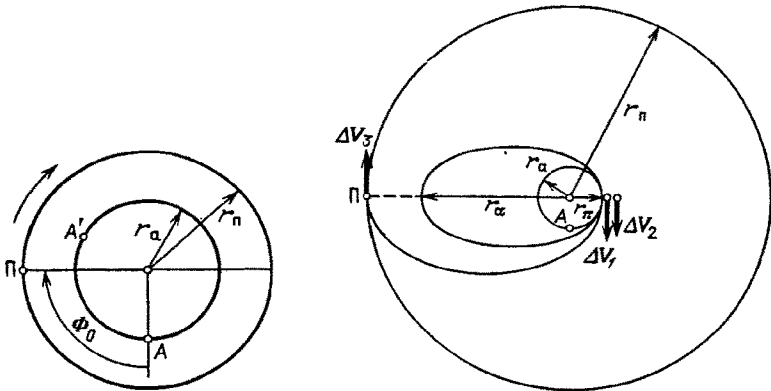


Рис. 10.32. Пример исходного взаимного положения двух летательных аппаратов в задаче сближения

Рис. 10.33. Схема трехимпульсного решения задачи сближения

ным грузом ракеты-носителя. Но и на этом этапе решается ряд вопросов, обеспечивающих успешное выполнение сближения. Прежде всего решается задача выведения активного ЛА практически в плоскость монтажной орбиты — в противном случае в ходе сближения необходимо будет проводить энергетические дорогостоящие маневры по совмещению орбитальных плоскостей сближающихся ЛА. Кроме того, на этапе выведения может быть отчасти или полностью удовлетворено важное требование к начальным условиям для сближения: обеспечение определенного диапазона дальности между пассивным и активным ЛА на момент выведения последнего на орбиту. Решение задач этапа выведения осуществляется выбором даты старта ракеты-носителя, момента старта в выбранную дату и соответствующим выбором программы (или траектории) выведения активного ЛА.

Таким образом, еще до решения собственно задачи сближения и без каких-либо затрат энергии активного ЛА может быть проведен ряд подготовительных операций, способствующих сближению и выполняемых пассивным ЛА и ракетой-носителем. Впрочем, на практике довольно часто выполняется лишь один элемент этапа подготовки — выведение активного ЛА в плоскость монтажной орбиты.

Переходя к изложению решения непосредственно задачи сближения, выясним сначала, каковы физические основы этого решения. Рассмотрим для наглядности следующий конкретный пример (рис. 10.32).

Пусть в начальный момент t_0 пассивный ЛА (П) находится в некоторой точке круговой монтажной орбиты радиуса $r_n = R_e + H_n = 6378 + 350$ км, а активный (А) — на круговой орбите выведения радиуса $r_a = R_e + H_a = 6378 + 200$ км; периоды орбит соответственно $T_n \approx 91,54^m$ и $T_a \approx 88,49^m$. Пусть активный ЛА по своему положению на орбите отстает от пассивного на четверть витка ($\Phi_0 = 90^\circ$). Угол Φ_0 называется *начальным фазовым углом* или *начальным фазовым рассогласованием*. Вдоль орбиты значению $\Phi_0 = 90^\circ$ соответствует дальность около $10,5 \cdot 10^3$ км. Пусть, наконец, по-

ставлена задача завершить сближение ровно через 10 витков полета пассивного ЛА.

Допустим сначала, что активный ЛА не маневрирует, т.е. в течение отведенного времени совершает движение по исходной орбите выведения. Через 10 витков пассивный ЛА вновь займет первоначальное положение П на монтажной орбите, но активный ЛА за промежуток времени $10 T_{\Pi}$ совершит

$$N = \frac{10 T_{\Pi}}{T_a} = \frac{10 (R_e + H_{\Pi})^{3/2}}{(R_e + H_a)^{3/2}} \approx 10,34 \quad (10.36)$$

витка (0,34 витка соответствует $\Delta\Phi \approx 122^\circ$), т.е. не только ликвидирует начальное фазовое рассогласование, но и опередит пассивный ЛА на 32° (A').

Изменение фазового рассогласования между летательными аппаратами в ходе полета называется *фазированием*. В рассматриваемом примере скорость фазирования (122° за 10 витков) была слишком высокой и поэтому начальное фазовое рассогласование (в сторону отставания активного ЛА) в ходе полета было ликвидировано, а затем стало возрастать (но уже в сторону опережения).

Как регулировать скорость фазирования? Очевидно, это достигается регулированием разности периодов орбит пассивного и активного летательных аппаратов или регулированием высотного рассогласования между орбитами в соответствии с (10.36). Поскольку маневрирующим является лишь активный ЛА, изменение скорости фазирования достигается регулированием высотных характеристик движения активного ЛА.

До сих пор мы говорили о ликвидации фазового рассогласования между ЛА. Но факт сближения фиксируется в момент, когда нулевыми становятся и фазовое и высотное рассогласования, т.е. нулевой становится относительная дальность между ЛА. Покажем на примере, каким образом может быть решена такая задача.

Пусть при начальных условиях (см. рис. 10.32) активный ЛА через три четверти витка полета по орбите выведения трансверсальным импульсом ΔV_1 переводится на эллиптическую орбиту с перигеем $r_{\pi} = R_e + H_a$ и апогеем $r_{\alpha} = R_e + H_{\alpha}$ (рис. 10.33). Перигей этой орбиты совпадает с точкой приложения импульса, а период орбиты определяется формулой

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(R_e + \frac{H_a + H_{\alpha}}{2} \right)^{3/2} \quad (10.37)$$

Пусть, далее, совершив некоторое целое число оборотов N по этой орбите, вторым трансверсальным импульсом ΔV_2 в перигее орбиты ЛА вновь изменяет свою орбиту, но так, чтобы ее апогей стал равным $r_{\pi} = R_e + H_{\Pi}$. Период такой орбиты определяется формулой

$$T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left(R_e + \frac{H_a + H_{\Pi}}{2} \right)^{3/2}$$

и для нашего примера равен $90,01^m$.

Пусть, наконец, в точке, в которой намечено сближение, третьим трансверсальным импульсом ΔV_3 скорость активного ЛА доводится до скоро-

сти пассивного ЛА. Очевидно, что после этого импульса орбиты ЛА полностью совпадут.

Полное время полета ЛА до сближения, отведенное условиями задачи, равно $10 T_{\Pi} = 915,4^m$. За этот промежуток времени активный ЛА совершит три четверти витка полета по исходной орбите выведения ($0,75 T_a = = 0,75 \cdot 88,49^m = 66,37^m$), N полных оборотов по эллиптической орбите с периодом $T_1 (NT_1)$ и половину витка по орбите с периодом T_2 ($0,5 T_2 = = 0,5 \cdot 90,01^m = 45,0^m$). Поскольку точка, в которой намечено сближение, должна быть достигнута обоими ЛА одновременно, необходимо выполнение условия

$$915,4^m = 66,37^m + NT_1 + 45^m.$$

Это равенство вместе с (10.37) позволяет определить высоту апогея эллиптической орбиты H_{α} , если известно число витков N :

$$H_{\alpha} = 2 \left[\left(\frac{804,03}{N} \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi} \right)^{2/3} - R_e \right] - H_a. \quad (10.38)$$

Значение N находится подбором. Положив его, например, равным 8, 9 и 10, мы по формуле (10.38) получим значение H_{α} , соответственно равное 1372, 289 и -609 км. Выбор $N = 9$ очевиден, поскольку очевидна практическая нереализуемость отрицательных высот и столь же очевидна энергетическая нецелесообразность подъема эллиптической орбиты в апогее до слишком большой высоты. Действительно, подъем высоты апогея до 1372 км требует импульса около 400 м/с, в то время как сумма всех импульсов при осуществлении сближения с $N = 9$ составляет около 45 м/с.

Рассмотренный пример является лишь некоторой частной упрощенной моделью задачи сближения, но и он позволяет сделать вывод, что решение задачи существенным образом зависит от ее исходных данных (начальные фазовое и высотное рассогласования между ЛА, протяженность участка сближения) и схемы полета, принятой для решения задачи. Практика не только порождает многообразие исходных данных, но и выдвигает довольно жесткие требования и ограничения к реализации сближения. Ко всему этому многообразию и всем ограничениям должен быть готов математический аппарат решения задачи сближения, к краткому описанию которого мы переходим. Воспользуемся для этого теорией относительного движения двух ЛА и уравнением коррекции (10.35):

$$\sum_i A_{ki} \Delta V_i = \begin{bmatrix} r'_k \\ v'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k \\ v_k \end{bmatrix} - M_{k0} \begin{bmatrix} r_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Целью решения задачи сближения является получение в конечный момент времени t_k заданного вектора $\begin{bmatrix} r_{np} \\ v_{np} \end{bmatrix}$, который принято называть *прицельным*. Если прицельный вектор имеет вид $\begin{bmatrix} 0 \\ v_{np} \end{bmatrix}$, то говорят, что

ная задача может быть решена соответствующим выбором значений компонент импульсов скорости — корректирующих параметров. Очевидно, возможности решения задачи зависят от соотношения числа корректирующих и корректируемых параметров.

В соответствии с § 10.2 движение в плоскости опорной орбиты и боковое движение в линейном приближении независимы и могут рассматриваться отдельно друг от друга. Поэтому и в системе (10.39) можно выделить две независимые подсистемы: подсистему четырех уравнений корректировки параметров (x, y, \dot{x}, \dot{y}) движения в плоскости опорной орбиты и подсистему двух уравнений, относящуюся к параметрам бокового движения (z, \dot{z}) . Для совместности и определенности подсистемы бокового движения достаточно, вообще говоря, наличия двух корректирующих параметров, т.е. двух импульсов с компонентами $\Delta \dot{z}_i$, поскольку в этом случае подсистема сводится к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Для получения аналогичной ситуации в подсистеме, относящейся к движению в плоскости опорной орбиты, необходимо иметь суммарно четыре корректирующих компоненты $\Delta \dot{x}_i$ и $\Delta \dot{y}_i$.

Таким образом, характер системы (10.39) определяется схемой сближения, т.е. количеством корректирующих импульсов и количеством компонент в импульсах. Простейшей схемой полета, для которой система (10.39) в целом будет определена, является схема с двумя трехпараметрическими корректирующими импульсами $\Delta V_1 = (\Delta \dot{x}_1, \Delta \dot{y}_1, \Delta \dot{z}_1)^T$ и $\Delta V_2 = (\Delta \dot{x}_2, \Delta \dot{y}_2, \Delta \dot{z}_2)^T$; другим примером, в котором обеспечена определенность системы, является схема полета с четырьмя корректирующими импульсами $\Delta V_1 = (\Delta \dot{x}_1, 0, \Delta \dot{z}_1)^T$, $\Delta V_2 = (\Delta \dot{x}_2, 0, \Delta \dot{z}_2)^T$, $\Delta V_3 = (\Delta \dot{x}_3, 0, 0)^T$ и $\Delta V_4 = (\Delta \dot{x}_4, 0, 0)^T$.

Если в ходе реализации первой схемы появилось ограничение, вынуждающее проведение двухпараметрических корректировок, например $\Delta V_1 = (\Delta \dot{x}_1, 0, \Delta \dot{z}_1)^T$ и $\Delta V_2 = (\Delta \dot{x}_2, 0, \Delta \dot{z}_2)^T$, то система (10.39) становится, вообще говоря, несовместной, так как при шести корректируемых параметрах мы располагаем лишь четырьмя корректирующими. Это приводит к получению вектора промаха при любом наборе значений корректирующих параметров. Необходимость решения задачи сближения, невзирая на возникшую трудность, приводит к поиску способов обхода этой трудности. Один из таких способов — введение штрафа за промах, задаваемого неко-

торой функцией промаха $f\left\{\begin{bmatrix} \delta r \\ \delta v \end{bmatrix}\right\}$. Штрафную функцию выбирают так,

чтобы она с той или иной степенью приближения описывала интересующие нас характеристики, например энергетические затраты на заключительном участке сближения. Тогда задачу решения системы (10.39) можно сформулировать, например, так: отыскать такое приближенное решение, которое доставляет минимум функционалу

$$F = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + f\left\{\begin{bmatrix} \delta r \\ \delta v \end{bmatrix}\right\}.$$

Если в ходе реализации второй (четырёхимпульсной) схемы появляется возможность каждый из четырех корректирующих импульсов сделать трехкомпонентным, то система (10.39) становится неопределенной, по-

сколькx при шести корректируемых параметрах мы имеем возможность варьировать двенадцать корректирующих. Определенность в решении такого варианта задачи сближения появится, если ее сформулировать следующим образом: среди множества решений системы (10.39) найти такое, которое обеспечивает минимум функционалу

$$F = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| + |\Delta V_3| + |\Delta V_4|.$$

Естественно, что задача минимизации функционала, вид которого может быть самым различным, при разнообразии учитываемых требований и ограничений приводит к самым разнообразным математическим методам решения задачи сближения.

До сих пор, говоря о задаче сближения, мы предполагали определенность и неизменность моментов отработки импульсов или, что то же, постоянство коэффициентов системы линейных уравнений. Задача минимизации функционала F в такой постановке называется *внутренней задачей минимизации*. Внутренняя задача является частью или шагом более общей *внешней задачи минимизации*, которая возникает при задании не моментов отработки импульсов t_i , а некоторых интервалов времени $[t_{iH}, t_{iK}]$, в которых допустимо проведение коррекций. Эти интервалы (*интервалы маневрирования*) могут быть заданы не только во временной шкале, но и в шкале угловых положений ЛА на определенных витках его полета относительно начала витка.

Внешняя задача минимизации формулируется следующим образом: на множестве допустимых времен (или мест) проведения коррекций найти такое решение внутренней задачи, которое обеспечивает функционалу F минимум: $\Phi = \min F$.

В постановке, которая порождается практикой космических полетов, возможность аналитического решения внутренней задачи представляется в исключительных случаях. Как правило, для ее решения используются численные методы. Таким образом, маловероятна возможность аналитического представления функционала F и проведения предварительного анализа свойств этого функционала на множестве допустимых времен проведения коррекций. Этим обстоятельством диктуется и метод решения внешней задачи минимизации.

Прежде всего, множество допустимых времен проведения коррекций, заданное интервалами маневрирования $t_i \in [t_{iH}, t_{iK}]$, где i — номер интервала, аппроксимируется дискретным множеством времен

$$t_i \in [t_{iH}, t_{iH} + \Delta t_i, \dots, t_{iK} - \Delta t_i, t_{iK}].$$

На множестве выборок $\{t_j\}$, охватывающем (с точностью до дискрета аппроксимации) все возможные совокупности времен отработки коррекций, строится множество решений внутренней задачи с результирующим значением функционала F_j , где j — номер выборки. Поскольку выбор $\min F$ проводится по анализу всего множества решений F_j , полученное решение внешней задачи будет оптимальным не в локальном, а в глобальном смысле.

Завершая описание задачи сближения, коротко обсудим некоторые практические соображения, учитываемые при проектировании этого участка полета ЛА.

В рассмотренном в начале пункта примере первое включение двигателя активного ЛА предполагалось через три четверти витка полета. Можно

ли первый импульс проводить на первом же витке полета ЛА по орбите выведения? Принципиально — да, но практически такая поспешность может оказаться неоправданной. Дело в том, что ЛА выводится на орбиту ИСЗ, параметры которой, как правило, в какой-то степени отличаются от расчетных значений. А для того чтобы узнать параметры фактической орбиты выведения, надо провести измерения характеристик движения ЛА станциями слежения и обработку этих измерений. Достаточно надежное знание орбиты будет получено после того, как ЛА дважды пройдет в зоне видимости станций слежения, расположенных на территории нашей страны. После получения уточненного знания орбиты выведения следует решить задачу сближения и результаты решения в виде, "понятном" для систем ЛА, передать на борт. Эта передача опять же осуществляется станциями слежения. Следовательно, даже на основании сказанного видно, что первый импульс разумно проводить только после третьего прохождения ЛА в зоне видимости наших станций слежения. Полный же учет всех особенностей работы наземного и бортового комплексов управления и рассмотренные программы полета в целом приводят к тому, что признается наиболее целесообразным первый импульс корабля "Союз" проводить не ранее четвертого витка его полета к станции "Салют".

Можно ли сразу, после того как проведен первый импульс (или импульсы), проводить и последующие импульсы? Принципиально — да, но практически и в этом случае поспешность может быть неоправданной. Во-первых, любой импульс на орбите проводится не так, как мы его рассчитали, а с некоторыми погрешностями. Если все бортовые системы работают нормально, то погрешности эти незначительны, но, будучи предусмотрительными, мы должны учитывать возможность повышенных погрешностей, даже если они маловероятны. Во-вторых, если мы не проводим новых измерений орбиты ЛА, то наше сиюминутное знание его движения базируется на результатах обработки измерений в прошлом, "протянутых" на настоящее. Такая "протяжка" имеет погрешности, поскольку мы не знаем с абсолютной точностью сил, действующих на ЛА со стороны внешней среды, и используем в расчетах лишь модель этих сил. Да и сами измерения в прошлом содержали какую-то ошибку. Все это приводит к тому, что мы всегда знаем орбиту ЛА с некоторой погрешностью и эта погрешность, если нет "свежих" измерений орбиты, нарастает со временем. Отсюда практический вывод — после первых импульсов сближения следует освежить наше знание орбиты. Для корабля "Союз" новые измерения проводятся на пятом и шестом витках его полета, а после этого вплоть до тринадцатого витка "Союз" не появляется в зоне видимости станций слежения, расположенных на нашей территории. Этот период (его называют "глухим" витком) обычно используется для сна экипажа, а контроль состояния бортовых систем осуществляют плавучие станции слежения, через которые в случае необходимости можно "поговорить" с системой управления корабля или экипажем.

Другим примером ограничения, но уже не на расположение импульсов, а на характеристики орбиты корабля "Союз" после приложения импульсов является ограничение на минимальную высоту орбиты. В рассмотренном примере мы столкнулись с очевидной нереальностью: $H_a < 0$. На практике же считается недопустимым, когда минимум высоты орбиты достигает значений около 150 км. Это ограничение объясняется тем, что на таких

высотах (и тем более ниже) плотность атмосферного вещества настолько высока, что при движении ЛА в атмосфере с орбитальной скоростью происходит значительный (на грани допустимого) нагрев поверхности ЛА. Следствие сказанного очевидно: в ходе сближения минимальная высота орбиты корабля "Союз" не должна быть ниже допустимой.

Ограничим на этом перечень соображений практического плана, которые во многом формируют облик процесса сближения, и заметим, что до сих пор мы говорили об участке сближения, который обычно именуется *участком дальнего сближения*. Вслед за ним идет участок *автономного сближения*, который и завершает практическое решение задачи сближения.

Является ли такое разбиение на участки необходимым? Да, и основная причина тому — ограниченность "разрешающей" способности наземного комплекса управления. Эта ограниченность проявляется в двух направлениях. Во-первых, по мере уменьшения дальности между сближающимися летательными аппаратами погрешности измерений их взаимного движения наземными станциями становятся относительно все более высокими. Во-вторых, при малых дальностях, когда до момента стыковки остаются считанные десятки минут и даже минуты, нас не может удовлетворить "быстродействие" цепочки операций: измерение орбит — обработка измерений — решение задачи сближения — передача расчетной информации на борт. Естественным выходом из такого состояния неудовлетворенности является возложение обязанностей по реализации этой цепочки на систему управления активного ЛА. Отсюда и наделение этой системы способностью работать автономно. Набор технических средств для такой работы аналогичен наземному: бортовая система измерений параметров относительного движения двух ЛА (вместо наземных станций слежения) и бортовая ЭВМ (вместо наземных вычислительных центров и центра управления). Помещенная в гущу событий, автономная система обеспечивает и нужную точность, и нужное быстродействие..

Задача сближения на автономном участке в основном сохраняется прежней — нужно свести к нулю промах перехватчика (активного ЛА), движущегося к цели (пассивному ЛА). Особенность реализации этой задачи проявляется в ее заключительной фазе, когда длительность выполнения операций по сближению становится соизмеримой с длительностью полета до момента механического контакта летательных аппаратов. Здесь уже бортовой алгоритм решения задачи должен учитывать, что двигатель корабля "Союз", например, за секунду работы может выдать импульс скорости несколько более полуметра в секунду (а величина требуемого импульса может оказаться более 10 м/с), что разворот корабля при выставке оси двигателя в нужном направлении может занять более минуты, что для очередного уточнения движения корабля "Союз" относительно станции "Салют" могут потребоваться измерения в течение нескольких минут. Кроме того, на заключительной фазе сближения должно быть дополнительно выполнено требование — в момент механического контакта практически нулевой должна быть скорость сближения летательных аппаратов.

Все эти особенности учитываются при планировании схемы и режима работы активного ЛА на автономном участке. Для его реализации при обработке малых импульсов привлекается дополнительное средство корабля

"Союз" — двигатели причаливания и ориентации, менее мощные чем основной, маршевый, двигатель, но дающие возможность отработать импульс произвольного направления без разворотов корабля.

Гашение скорости сближения происходит в два этапа. На первом расстоянии между летательными аппаратами доводится до нескольких сотен метров, а относительная скорость снижается до двух-трех метров в секунду. На втором этапе, называемом *этапом причаливания*, летательные аппараты "сводятся" до механического контакта при относительной скорости порядка десятых долей метра в секунду. В ходе причаливания летательные аппараты должны не только медленно сближаться и быть развернутыми друг к другу своими стыковочными узлами, но и должны быть определенным образом ориентированы относительно линии, проходящей через центры стыковочных узлов. Только при этом условии произойдет стыковка всех устройств (например, электрических разъемов), расположенных на периферийной части стыковочных узлов, и будет гарантирована герметичность стыка двух ЛА.

При необходимости два этапа могут быть разделены промежуточным этапом — *этапом зависания*. Он предусматривается для того, чтобы сместить во времени этап причаливания и тем самым расположить его определенным образом относительно зоны видимости станций слежения или относительно освещенного и теневого участков орбиты. Зависание корабля "Союз" означает, что он "замирает" на расстоянии около 100 метров от станции "Салют", готовый перейти к причаливанию по команде экипажа или с Земли. И тогда последние, очень ответственные метры сближения могут контролироваться Центром управления полетом по телевизионным и телеметрическим каналам или визуалью экипажем при более комфортных условиях подсветки "Салюта" Солнцем.

§ 10.6. Вариации характеристик кеплерова движения

Рассматривая относительное движение двух ЛА, мы получили возможность: по заданным на момент t_0 начальным отклонениям (возмущениям) Δr_0 и ΔV_0 вектора состояния определить подобные же отклонения (возмущения) Δr и ΔV на интересующий нас момент времени t ; вычислить отклонения параметров возмущенной орбиты от опорной; решать с помощью уравнения коррекции задачу целенаправленного изменения характеристик движения ЛА. Перечень подобных возможностей, имеющих явное практическое приложение, можно было бы продолжить.

Область использования перечисленных возможностей ограничена околокруговыми орбитами, т.е. орбитами малого эксцентриситета. Но такие же задачи возникают и для ЛА, который может двигаться по орбите произвольного эксцентриситета, а значит, существует потребность в соответствующей теории и, скажем условно, для "околоэллиптических" орбит. Другими словами, нужна теория возмущений движения ЛА, когда в качестве опорной взята произвольная эллиптическая орбита.

Существует множество различных способов получения интересующих нас результатов (см., например, [13, 31, 34]). Мы коротко остановимся на этом вопросе, отдав предпочтение выводу, для которого характерна краткость и физическая наглядность математических результатов [41].

В соответствии с § 9.1 полную геометрическую характеристику орбиты дают векторная константа площадей

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{V} \quad (10.40)$$

и вектор Лапласа

$$\mathbf{f} = \mathbf{V} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r},$$

вместо которого можно использовать вектор эксцентриситета

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \mathbf{f} = \frac{1}{\mu} \mathbf{V} \times \mathbf{c} - \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (10.41)$$

Орты $\mathbf{c}^0 = \frac{\mathbf{c}}{c}$ и $\mathbf{e}^0 = \frac{\mathbf{e}}{e}$ задают соответственно положение плоскости орбиты в пространстве и ориентацию ее апсидальной оси, модуль вектора e (эксцентриситет) характеризует форму орбиты, а большая полуось

$$a = \frac{c^2}{\mu(1 - e^2)} \quad (10.42)$$

характеризует размер орбиты. Характеристики \mathbf{c}^0 , \mathbf{e}^0 , e и a могут быть названы *элементарными* или *элементами орбиты*, поскольку каждая из них описывает лишь одно геометрическое свойство орбиты.

Возмущения (вариации) интересующих нас характеристик движения ЛА будем выражать через вариации констант \mathbf{c} и \mathbf{e} или через вариации элементарных характеристик. При этом заметим, что вариации $\delta \mathbf{c}$ и $\delta \mathbf{e}$ зависимы, поскольку сами константы связаны условием $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) = 0$. Для того чтобы учесть эту зависимость, представим вариации $\delta \mathbf{c}$ и $\delta \mathbf{e}$ в виде

$$\delta \mathbf{c} = \delta \vec{\theta} \times \mathbf{c} + c^0 \delta c, \quad \delta \mathbf{e} = \delta \vec{\theta} \times \mathbf{e} + e^0 \delta e. \quad (10.43)$$

Здесь $\delta \vec{\theta}$ — вектор конечного поворота пары ортогональных векторов \mathbf{c} и \mathbf{e} , причем $\delta \vec{\theta} = \vec{\theta}^0 \delta \theta$, где $\vec{\theta}^0$ — единичный вектор направления оси вращения пары, а $\delta \theta$ — угол поворота.

Используя свойства смешанного произведения, нетрудно убедиться в том, что с точностью до членов второго порядка малости условие $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) = 0$ выполняется и для возмущенных констант:

$$((\mathbf{c} + \delta \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{e} + \delta \mathbf{e})) = 0.$$

Вектор $\delta \vec{\theta}$ будем называть *вариацией ориентации орбиты*, поскольку он одновременно характеризует смещение плоскости орбиты ($\delta \mathbf{c}^0 = \delta \vec{\theta} \times \mathbf{c}^0$) и ее апсидальной оси ($\delta \mathbf{e}^0 = \delta \vec{\theta} \times \mathbf{e}^0$).

Разрешим (10.43) относительно $\delta \vec{\theta}$. Для этого умножим уравнения (10.43) векторно на \mathbf{c} и используем формулу двойного векторного произведения:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \times \delta \mathbf{c} &= \mathbf{c} \times (\delta \vec{\theta} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{c}^0) \delta c = \\ &= \delta \vec{\theta} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \delta \vec{\theta}) = c^2 \delta \vec{\theta} - \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \delta \vec{\theta}), \\ \mathbf{c} \times \delta \mathbf{e} &= \mathbf{c} \times (\delta \vec{\theta} \times \mathbf{e}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{e}^0) \delta e = \\ &= \delta \vec{\theta} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{e} (\mathbf{c} \cdot \delta \vec{\theta}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{e}^0) \delta e = (\mathbf{c} \times \mathbf{e}^0) \delta e - \mathbf{e} (\mathbf{c} \cdot \delta \vec{\theta}). \end{aligned} \quad (10.44)$$

Умножим, далее, второе выражение (10.44) скалярно на e :

$$(e \cdot (c \times \delta e)) = (e \cdot (c \times e^0)) \delta e - (e \cdot e)(c \cdot \delta \vec{\theta}) = -e^2 (c \cdot \delta \vec{\theta})$$

или

$$(c \cdot \delta \vec{\theta}) = \frac{1}{e^2} (c \cdot (e \times \delta e)),$$

и этот результат подставим в первое выражение (10.44). Получим

$$\delta \vec{\theta} = \frac{1}{c^2} (c \times \delta c) + \frac{1}{c^2 e^2} c (c \cdot (e \times \delta e)). \quad (10.45)$$

Формулы (10.40) – (10.42) позволяют по исходному вектору состояния (векторам r и V) определить константы s и e или элементы c^0 , e^0 , e и a . Пусть какие-то причины вызвали вариацию исходного вектора состояния (вариации δr и δV). Ее следствием будет появление вариаций констант δc и δe или элементов δc^0 , δe^0 , δe и δa . Определим эти вариации.

Из (10.40) и (10.41) получаем выражения для вариаций

$$\delta c = \delta r \times V + r \times \delta V, \quad (10.46)$$

$$\delta e = \frac{1}{\mu} (\delta V \times c + V \times \delta c) - \delta r^0,$$

где δr^0 – вариация направления $r^0 = r/r$ исходного вектора положения:

$$\delta r^0 = \frac{1}{r} [\delta r - \delta r r^0] = \frac{1}{r} [\delta r - (r^0 \cdot \delta r) r^0].$$

По (10.46) вычисляем значения δc и δe . Подставляя их в (10.45), найдем вариацию ориентации орбиты $\delta \vec{\theta}$, знание которой позволяет определить вариации элементов

$$\delta c^0 = \delta \vec{\theta} \times c^0 \quad \text{и} \quad \delta e^0 = \delta \vec{\theta} \times e^0. \quad (10.47)$$

Величину вариации формы орбиты находим из равенства $\delta e = (e^0 \cdot \delta e)$, а для вычисления вариации размера орбиты используем выражение, получаемое из (10.42):

$$\delta a = \frac{2a}{c} \delta c + \frac{2\mu a^2 e}{c^2} \delta e = \frac{2a}{c^2} ((c \cdot \delta c) + \mu a (e \cdot \delta e)). \quad (10.48)$$

Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть некоторой точке орбиты, которую мы назовем начальной, соответствует вектор состояния r_0 и V_0 . Его знание позволяет нам не только полностью восстановить характеристики орбит, но и определить вектор состояния в любой другой точке орбиты, которая задана или временем полета, или своим угловым положением. В частности, вектор состояния в момент t может быть определен через элементы орбиты уравнениями (см. § 9.4 и 9.5)

$$r = a [(\cos E - e) e^0 + \sqrt{1 - e^2} \sin E (c^0 \times e^0)], \quad (10.49)$$

$$V = \frac{\sqrt{\mu a}}{r} [-\sin E e^0 + \sqrt{1 - e^2} \cos E (c^0 \times e^0)], \quad (10.50)$$

где эксцентрическая аномалия E связана с временем t уравнением Кеплера

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau). \quad (10.51)$$

Проварьируем уравнения (10.49) и (10.51). Получим

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{a} \delta a - a \left[\mathbf{e}^0 + \frac{\mu e (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}^0)}{c^2} \mathbf{p}^0 \right] \delta e + \delta \vec{\theta} \times \mathbf{r} + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \mathbf{r} \mathbf{V} \delta E, \quad (10.52)$$

$$\delta E = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}^0)}{r \sqrt{1 - e^2}} \delta e - \frac{3}{2} \frac{n}{r} (t - \tau) \delta a + \frac{a}{r} n \delta t, \quad (10.53)$$

где $\mathbf{p}^0 = \mathbf{c}^0 \times \mathbf{e}^0$.

Поскольку во многих приложениях интерес представляют вариации положения на фиксированный момент t , подставим (10.53) в (10.52), положив $\delta t = 0$:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} = & \frac{1}{a} \left[\mathbf{r} - \frac{3}{2} \mathbf{V} (t - \tau) \right] \delta a - \\ & - a \left[\mathbf{e}^0 - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}^0)}{c} \left(\frac{\mu e}{c} \mathbf{p}^0 - \mathbf{V} \right) \right] \delta e + \delta \vec{\theta} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (10.54)$$

Вид вариации (10.54) позволяет выделить вклад вариации каждой элементарной характеристики в отдельности: размера δa , формы δe и ориентации.

Для получения вариации $\delta \mathbf{V}$ продифференцируем (10.52) по времени и используем (10.53) с учетом $\delta t = 0$. Получим

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{V} = & \frac{1}{a} \left[\mathbf{V} + \frac{3}{2} \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} (t - \tau) \right] \delta a - \\ & - \frac{\mu a}{c} \left[\frac{e}{c} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{p}^0) \mathbf{p}^0 + \frac{\mathbf{r}}{r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}^0) \right] \delta e + \delta \vec{\theta} \times \delta \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (10.55)$$

Таким образом, выведены зависимости, позволяющие определить вариации конечного вектора состояния $\delta \mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{V}$ по вариациям начального вектора состояния $\delta \mathbf{r}_0$ и $\delta \mathbf{V}_0$ с помощью двухшагового процесса. На первом шаге по заданным $\delta \mathbf{r}_0$ и $\delta \mathbf{V}_0$ находятся вариации элементарных характеристик, а на втором по найденным вариациям определяются $\delta \mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{V}$. Поскольку вариации конечного вектора состояния соответствуют фиксированному моменту времени, они называются *изохронными*.

В задачах маневрирования вариация исходного вектора состояния сводится к вариации скорости $\delta \mathbf{V}$. В этом случае вариации элементов можно выразить явно через $\delta \mathbf{V}$ достаточно простыми формулами, которые мы приведем без вывода:

$$\delta \mathbf{c} = \mathbf{r} \times \delta \mathbf{V}, \quad \delta e = \frac{1}{\mu} [\delta \mathbf{V} \times \mathbf{c} + \mathbf{r} (\mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{V}) - \delta \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r})],$$

$$\delta \vec{\theta} = \frac{1}{c^2} \mathbf{r} (\mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{V}) - \frac{1}{\mu c^2 e^2} \mathbf{c} [c^2 (\mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{V}) + (\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \delta \mathbf{V})) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{V})],$$

$$\delta c^0 = \frac{1}{c^2} (\mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{V}) (\mathbf{r} \times \mathbf{c}^0), \quad (10.56)$$

$$\delta e^0 = \frac{1}{c^2} (\mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{V}) (\mathbf{r} \times \mathbf{e}^0) - \frac{1}{\mu c^2 e^2} [c^2 (\mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{V}) + (\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \delta \mathbf{V})) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{V})] (\mathbf{c} \times \mathbf{e}^0), \quad (10.57)$$

$$\delta e = \frac{1}{\mu} [(\delta \mathbf{V} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{e}^0)) + ((\mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{V})) - ((\mathbf{e}^0 \cdot \delta \mathbf{V}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}))],$$

$$\delta a = \frac{2a}{c^2} (\delta \mathbf{V} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r})) + \frac{2a^2}{c^2} \{(\delta \mathbf{V} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{e})) + (\mathbf{e} \cdot [\mathbf{r} (\mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{V}) - \delta \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r})])\}.$$

Из (10.56) видно, что максимум вариации положения плоскости орбиты достигается при условии $\max(\mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{V})$ (направление $\delta \mathbf{V}$ нормально к орбитальной плоскости) и $\max|\mathbf{r} \times \mathbf{c}^0|$ ($\delta \mathbf{V}$ соответствует точке орбиты с $\max|\mathbf{r}|$).

Первый член в (10.57) подобен (10.56) и характеризует смещение апсидальной оси, вызванное смещением плоскости орбиты, а второй определяет ее смещение в орбитальной плоскости.

Рассмотренные в настоящей главе вопросы дают достаточно полное представление о круге задач, с которыми приходится сталкиваться в практике баллистического проектирования орбитального полета, и методах их решения. В рамках этой книги более полное представление дать затруднительно, поскольку перечень задач весьма разнообразен, а методы их решения довольно специфичны. Именно поэтому в литературе, перечень которой достаточно обширен, как правило, подробно рассматриваются отдельные вопросы, относящиеся к баллистическому проектированию (см., например, [5, 34, 38, 39], или комплекс задач определенной направленности (см., например, [11]). Полнота освещения проблемы в целом достигается кратким изложением материала в виде справочных данных без соответствующего методического и теоретического обоснования. В качестве примера такого подхода можно сослаться на [21].

Глава 11

ПРИЛОЖЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ И ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЙ

На начальном этапе развития ракетно-космической техники наибольший практический интерес представляли траектории, пересекающиеся с поверхностью Земли, т.е. траектории, характерные для баллистических ракет.

Если дальность полета ракеты составляет до 1,5 – 2 тысяч километров, то для самых предварительных оценок можно использовать совершенно элементарные формулы, полученные в предположении, что движение происходит в пустоте, а гравитационное поле Земли однородно и плоскопараллельно, т.е. ускорение силы тяжести не зависит от высоты и направлено по нормали к поверхности Земли, которая полагается плоской. Траекто-

рия движения в таких предположениях имеет форму параболы, а теория движения называется *параболической*.

Более точные результаты и возможность расчета траекторий ракеты без каких-либо ограничений на дальность полета получаются при рассмотрении движения в центральном гравитационном поле (также без учета атмосферного сопротивления). Траектории движения ракет, пересекающиеся со сферической поверхностью Земли, являются эллиптическими, а раздел общей теории движения в центральном поле получил название *эллиптической* теории. Формулы этой теории широко применяются в практике проектирования благодаря их простоте и вполне удовлетворительной точности получаемых результатов.

Приложениям параболической и эллиптической теорий к решению задач расчета траекторий баллистических ракет и посвящена настоящая глава. При изложении параболической теории мы будем опираться на работу [33], в которой эта теория рассматривается применительно к полету артиллерийских снарядов. При обсуждении практических задач, решаемых с помощью эллиптической теории, в основу положены результаты [2].

§ 11.1. Параболическая теория и ее приложения

11.1.1. Свойства параболических траекторий. Рассмотрим полет ЛА в системе координат Oxy , ось Ox которой направлена по касательной к поверхности Земли, а ось Oy перпендикулярна к оси Ox и направлена от поверхности Земли вверх. Начало системы координат выберем так, чтобы ось Oy проходила через точку, начиная с которой будет рассматриваться движение ЛА (рис. 11.1).

Поскольку единственная сила, действующая на ЛА массы m , есть сила тяжести $G = mg$, получаем следующую систему дифференциальных уравнений движения в проекциях на оси Ox и Oy :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g. \quad (11.1)$$

Уравнения (11.1) соответствуют случаю равноускоренного движения, для которого

$$\dot{x} = V_H \cos \theta_H, \quad \dot{y} = V_H \sin \theta_H - gt, \quad (11.2)$$

$$x = V_H \cos \theta_H \cdot t, \quad y = y_H + V_H \sin \theta_H \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (11.3)$$

где y_H , V_H и θ_H — высота полета, скорость и угол наклона скорости к местному горизонту, соответствующие начальной точке. Из (11.2) следует, что горизонтальная проекция скорости ЛА постоянна вдоль всей траектории, а вертикальная является линейной функцией времени, убывающей со скоростью g метров в секунду за каждую секунду полета.

Исключая в (11.3) время t , получаем уравнение траектории

$$y = y_H + x \operatorname{tg} \theta_H - \frac{gx^2}{2V_H^2 \cos^2 \theta_H}, \quad (11.4)$$

которая, как видно, представляет собой параболу. К исследованию основных свойств таких траекторий мы и перейдем.

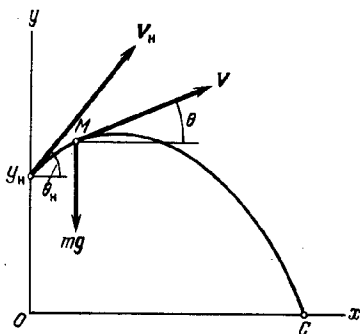


Рис. 11.1. Траектория ЛА в условиях плоскопараллельного поля сил

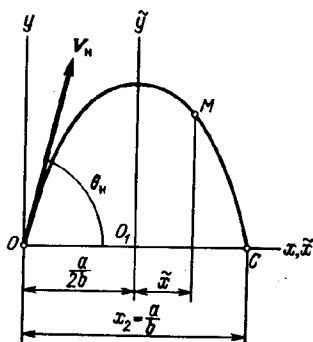


Рис. 11.2. Перенос начала координат на половину полной дальности вдоль оси x

Прежде всего рассмотрим случай равных высот начала и конца траектории. При этом не обязательно, чтобы эти высоты соответствовали нулевому уровню относительно поверхности Земли. Рассматривая часть параболы, расположенную выше некоторого уровня y_n , проведем для удобства ось Ox именно на этом уровне (рис. 11.2).

Итак, при $y_n = 0$ уравнение траектории запишется так:

$$y = x \operatorname{tg} \theta_n - \frac{gx^2}{2V_n^2 \cos^2 \theta_n}. \quad (11.5)$$

Введя обозначения

$$a = \operatorname{tg} \theta_n, \quad b = \frac{g}{2V_n^2 \cos^2 \theta_n}, \quad (11.6)$$

преобразуем (11.5) к виду

$$y = ax - bx^2. \quad (11.7)$$

Корни этого уравнения, полученные из условия $y = 0$, дают точки пересечения параболы с осью Ox :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a/b,$$

где x_2 , очевидно, является дальностью полета ЛА.

Перенесем начало координат вдоль оси Ox на расстояние, равное половине дальности, т.е. на величину $x_2/2 = a/2b$ (см. рис. 11.2). В этой новой системе $O_1\tilde{x}\tilde{y}$ координаты произвольной точки связаны с координатами в первоначальной системе соотношениями

$$y = \tilde{y}, \quad x = \tilde{x} + \frac{a}{2b}.$$

Подставляя в (11.7) эти соотношения, получаем уравнение траектории в новой системе координат

$$\tilde{y} = \frac{a^2}{4b} - b\tilde{x}^2. \quad (11.8)$$

Поскольку в уравнении (11.8) отсутствуют члены с нечетными степенями \tilde{x} , то ось $O_1 \tilde{y}$ является осью симметрии параболы и, следовательно, осью симметрии траектории ЛА, отстоящей от начальной точки на расстоянии, равном половине полной дальности полета.

Уравнения (11.2) и (11.3) определяют компоненты положения и скорости ЛА в произвольной точке траектории, заданной временем полета. С их помощью найдем величину и направление скорости ЛА:

$$\begin{aligned} V^2 &= V_x^2 + V_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = V_H^2 \cos^2 \theta_H + V_H^2 \sin^2 \theta_H - \\ &- 2V_H g \sin \theta_H \cdot t - g^2 t^2 = V_H^2 - 2g \left(V_H \sin \theta_H \cdot t - \frac{gt^2}{2} \right) = \\ &= V_H^2 - 2g(y - y_H), \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{V_H \sin \theta_H - gt}{V_H \cos \theta_H} = \operatorname{tg} \theta_H - \frac{g}{V_H \cos \theta_H} t = \\ &= \operatorname{tg} \theta_H - \frac{gx}{V_H^2 \cos^2 \theta_H}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Из (11.9) и свойства симметрии траектории следует, что:

– скорость ЛА убывает с высотой, достигая минимального значения в вершине траектории, причем скорости в двух точках траектории с одинаковыми высотами равны;

– углы наклона скорости (или, что то же, касательной к траектории) в двух точках траектории с одинаковыми высотами равны по абсолютной величине и противоположны по знаку – положительные на восходящей части и отрицательны на нисходящей части траектории.

Очевидно, что достижение вершины траектории соответствует моменту обращения в нуль вертикальной составляющей скорости ЛА. Приравнявая нулю \dot{y} в (11.2), находим

$$t_B = \frac{V_H \sin \theta_H}{g}. \quad (11.11)$$

Подставляя это значение времени в (11.3), получаем координаты вершины траектории

$$x_B = \frac{V_H^2 \sin 2\theta_H}{2g}, \quad y_B = y_H + \frac{V_H^2 \sin^2 \theta_H}{2g}. \quad (11.12)$$

Поскольку в точке падения $y = 0$, то из (11.3) находим момент падения t_C :

$$t_C = \frac{V_H \sin \theta_H}{g} + \sqrt{\frac{V_H^2 \sin^2 \theta_H}{g^2} + y_H}. \quad (11.13)$$

В этом выражении перед корнем стоит лишь знак "плюс", поскольку знак "минус" соответствует моменту достижения $y = 0$ слева от начальной точки.

Аналогичным образом полная дальность полета находится из уравнения траектории (11.4)

$$x_C = \frac{V_H \cos \theta_H}{g} (V_H \sin \theta_H + \sqrt{V_H^2 \sin^2 \theta_H + 2gy_H}). \quad (11.14)$$

Определим, при каком угле наклона начальной скорости для заданных y_H и V_H можно получить максимальную дальность полета x_{\max} и какова величина этой дальности. Для этого воспользуемся несколько видоизмененным уравнением траектории (11.4):

$$y = y_H + x \operatorname{tg} \theta_H - \frac{gx^2}{2V_H^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H).$$

Прежде всего, приравнявая y нулю, получим зависимость между полной дальностью x_C и углом наклона начальной скорости:

$$0 = y_H + x_C \operatorname{tg} \theta_H - \frac{gx_C^2}{2V_H^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H). \quad (11.15)$$

Найдем производную $\frac{dx_C}{d(\operatorname{tg} \theta_H)}$, рассматривая x_C как неявную функцию $\operatorname{tg} \theta_H$. Продифференцируем (11.15):

$$\left[\operatorname{tg} \theta_H - \frac{gx_C}{V_H^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \right] dx_C + \left[x_C - \frac{gx_C^2}{V_H^2} \operatorname{tg} \theta_H \right] d(\operatorname{tg} \theta_H) = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{dx_C}{d(\operatorname{tg} \theta_H)} = \frac{x_C \left(\frac{gx_C}{V_H^2} \operatorname{tg} \theta_H - 1 \right)}{\operatorname{tg} \theta_H - \frac{gx_C}{V_H^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H)}$$

Поскольку максимальная дальность достигается при обращении этой производной в нуль, то, приравнявая ее нулю, находим соотношение между x_{\max} и оптимальным углом наклона

$$\operatorname{tg} \theta_{H.\text{опт}} = \frac{V_H^2}{gx_{\max}}. \quad (11.16)$$

Подставляя это соотношение в (11.15), находим

$$x_{\max} = \frac{V_H}{g} \sqrt{V_H^2 + 2gy_H}, \quad (11.17)$$

а из (11.16) и (11.17) получаем формулу для определения оптимального угла наклона скорости

$$\operatorname{tg} \theta_{H.\text{опт}} = \frac{V_H}{\sqrt{V_H^2 + 2gy_H}}. \quad (11.18)$$

11.1.2. Семейство траекторий с нулевой начальной высотой и одинаковой начальной скоростью. В частном случае, когда $y_H = 0$, формулы

(11.12)–(11.14) принимают вид

$$x_B = \frac{V_H^2 \sin 2\theta_H}{2g}, \quad y_B = \frac{V_H^2 \sin^2 \theta_H}{2g}, \quad (11.19)$$

$$t_C = \frac{2V_H \sin \theta_H}{g}, \quad x_C = \frac{V_H^2 \sin 2\theta_H}{g}, \quad (11.20)$$

а если воспользоваться обозначениями $V_{xH} = V_H \cos \theta_H$, $V_{yH} = V_H \sin \theta_H$, будем иметь

$$x_B = \frac{V_{xH} V_{yH}}{g}, \quad y_B = \frac{V_{yH}^2}{2g},$$

$$t_C = \frac{2V_{yH}}{g}, \quad x_C = \frac{2V_{xH} V_{yH}}{g}.$$

Из рассмотрения (11.18)–(11.20) следует, что в случае $y_H = 0$ оптимальный угол наклона скорости $\theta_{H, \text{опт}} = 45^\circ$ и при этом $x_C = 4y_B$, т.е. полная дальность равна учетверенной высоте вершины траектории.

Если начальную скорость направить под углом $\bar{\theta}_H = 90^\circ - \theta_H$, то получим дальность

$$x_C = \frac{V_H^2}{g} \sin 2\bar{\theta}_H = \frac{V_H^2}{g} \sin 2(90^\circ - \theta_H) = \frac{V_H^2}{g} \sin 2\theta_H,$$

т.е. одна и та же дальность полета может быть получена при двух различных углах: θ_H и $90^\circ - \theta_H$ (кроме случая использования оптимального угла).

График зависимости дальности x_C от угла θ_H при параметре V_H имеет вид, показанный на рис. 11.3, который иллюстрирует свойства траекторий с постоянной начальной скоростью. Каждой кривой соответствует своя начальная скорость; штриховая кривая соответствует оптимальной траектории для заданной дальности $x_{зад}$. Использование оптимального угла означает достижение заданной дальности при минимально возможной начальной скорости.

Если построить семейство траекторий с постоянной начальной скоростью, варьируя начальный угол θ_H от 90° (вертикальный пуск) до нуля (горизонтальный пуск), то получим картину, изображенную на рис. 11.4.

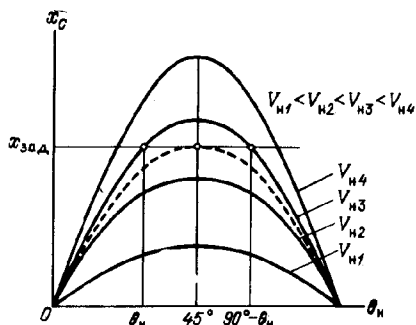


Рис. 11.3. Зависимость дальности от угла θ_H для различных значений начальной скорости V_H

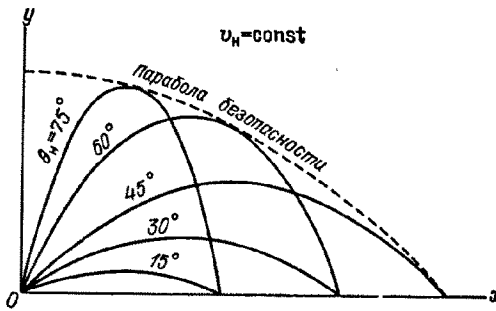


Рис. 11.4. Семейство параболических траекторий с одинаковой начальной скоростью. Парабола безопасности

Определим уравнение огибающей этого семейства. Будем исходить из уравнения параболы (11.5):

$$y = xp_H - \frac{gx^2}{2V_H^2} (1 + p_H^2), \quad (11.21)$$

где $p_H = \operatorname{tg} \theta_H$ будем рассматривать как параметр семейства парабол.

Для отыскания огибающей продифференцируем (11.21) по параметру и приравняем результат нулю. Получим

$$\frac{dy}{dp_H} = x - \frac{gx^2}{V_H^2} p_H = 0 \quad \text{или} \quad p_H = \frac{V_H^2}{gx}.$$

Подставляя это значение p_H в (11.21), находим искомое уравнение огибающей

$$y = \frac{V_H^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_H^2}.$$

Огибающая имеет тот смысл, что она представляет собой множество предельных точек на плоскости Oxy , которые могут быть достигнуты ЛА при заданной начальной скорости, или, иными словами, она ограничивает область достижимых точек. Исходя из этого полученная огибающая носит название *параболы безопасности* или *параболы достижимости*. Ни одна точка вне параболы безопасности не может быть достигнута траекториями ЛА, имеющими начальную скорость не больше заданной.

В уравнении параболы безопасности отсутствуют члены, содержащие нечетные степени x . В силу этого ось Oy является осью симметрии параболы безопасности. Точки пересечения этой параболы с осями Ox и Oy представляют собой максимальную дальность и максимальную высоту, достижимые на траекториях с заданной начальной скоростью.

Можно показать, что любая точка ниже параболы безопасности может быть достигнута двумя траекториями, а на самой параболе — единственной траекторией.

11.1.3. Производные от конечных параметров движения по начальным. В практике часто возникает необходимость в определении изменения ха-

ракетистических траектории ЛА при малых изменениях начальных условий движения, т.е. V_n и θ_n либо V_{xH} и V_{yH} . Для этой цели используются производные от искомым величин по начальным условиям. Рассмотрим в качестве примера случай равных высот в начальной и конечной точках траектории.

Из формулы (11.20) можно получить

$$\frac{dx_C}{dV_n} = \frac{2V_n \sin 2\theta_n}{g} = \frac{2x_C}{V_n},$$

откуда

$$\Delta x_C = \frac{dx_C}{dV_n} \Delta V_n = \frac{2x_C}{V_n} \Delta V_n. \quad (11.22)$$

Из (11.22) следует, что

$$\frac{\Delta x_C}{x_C} = 2 \frac{\Delta V_n}{V_n}.$$

Это означает, что изменению скорости на 1% соответствует изменение дальности на 2%.

Аналогичным образом определяется производная от дальности по начальному углу наклона скорости к горизонту:

$$\frac{dx_C}{d\theta_n} = \frac{2V_n^2 \cos 2\theta_n}{g} = \frac{2x_C}{\operatorname{tg} 2\theta_n} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta x_C}{x_C} = \frac{2\Delta\theta_n}{\operatorname{tg} 2\theta_n}.$$

Производная $dx_C/d\theta_n = 0$ при $\theta_n = 45^\circ$, т.е. при оптимальном угле. Это означает, что малые изменения угла θ_n не приводят к изменению дальности, если используется оптимальный угол.

Таким же путем можно получить ряд других производных и формул, пригодных для оценок влияния малых отклонений начальных условий на интересующие нас конечные результаты. Приведем лишь сводку основных зависимостей:

$$\frac{dx_C}{dV_{xH}} = \frac{2V_{yH}}{g} = t_C, \quad \frac{dx_C}{dV_{yH}} = \frac{2V_{xH}}{g} = \frac{t_C}{\operatorname{tg} \theta_n},$$

$$\frac{dt_C}{dV_n} = \frac{2 \sin \theta_n}{g} = \frac{t_C}{V_n}, \quad \frac{dt_C}{d\theta_n} = \frac{2V_n \cos \theta_n}{g} = \frac{t_C}{\operatorname{tg} \theta_n},$$

$$\frac{dy_B}{dV_n} = \frac{V_n \sin^2 \theta_n}{g} = \frac{2y_B}{V_n}, \quad \frac{dy_B}{d\theta_n} = \frac{V_n^2 \sin 2\theta_n}{2g} = \frac{2y_B}{\operatorname{tg} \theta_n},$$

$$\frac{dt_C}{dV_{xH}} = 0, \quad \frac{dt_C}{dV_{yH}} = \frac{2}{g}, \quad \frac{dy_B}{dV_{xH}} = 0, \quad \frac{dy_B}{dV_{yH}} = \frac{V_{yH}}{g}.$$

Результаты, полученные при рассмотрении параболической теории, позволяют в границах ее применимости (малые дальности полета) решить шесть практически важных задач баллистики ракет:

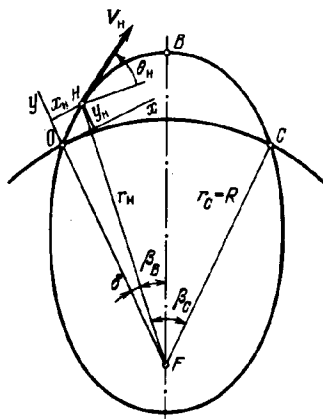
1. По заданным скорости, высоте и углу наклона скорости в начальной точке найти дальность полета.
2. По заданным дальности и начальной высоте и углу найти необходимую начальную скорость.
3. По заданным дальности и начальной высоте найти оптимальный начальный угол, требующий минимальной начальной скорости.
4. По заданным начальным скорости и высоте найти оптимальный начальный угол, обеспечивающий максимальную дальность.
5. Определить изменение конечных параметров движения в зависимости от малых приращений начальных условий.
6. Определить параметры движения ЛА по траектории полета.

§ 11.2. Приложения эллиптической теории

Будем рассматривать эллиптические траектории ракет и головных частей, т.е. полагать, что такие траектории начинаются и завершаются на поверхности сферической Земли. Этому условию удовлетворяют орбиты, перигей которых меньше радиуса земной поверхности.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями, приведенными на рис. 11.5: F — центр Земли, являющийся одним из фокусов эллиптической траектории; O — точка старта; H — начальная точка эллиптического участка траектории; C — точка падения; x_H, y_H — координаты начальной точки относительно точки старта; r_H и r_C — радиальные расстояния от центра Земли соответственно до начальной точки и точки падения; V_H — абсолютная скорость в начальной точке; θ_H — угол наклона вектора скорости к горизонту в начальной точке; B — вершина (апогей) эллиптической траектории; δ — центральный угол, соответствующий активному участку траектории; β_C — центральный угол, соответствующий участку свободного полета; β_B — центральный угол, определяющий положение апогея траектории относительно начальной точки; R — радиус земной поверхности.

Будем считать, что угол δ и начальное радиальное расстояние r_H (или начальная высота $h_H = r_H - R$) известны, так как они легко определяются по заданным координатам x_H и y_H начальной точки относительно места старта. Действительно, из рис. 11.5 имеем



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{x_H}{R + y_H}, \\ r_H &= \frac{R + y_H}{\cos \delta} = \frac{x_H}{\sin \delta}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

При решении шести задач баллистики ракет, перечисленных в предыдущем параграфе, весь участок свободного полета

Рис. 11.5. Схема движения по эллиптической траектории

примем за эллиптический, включая и относительно небольшой атмосферный участок при подходе к цели. В рамках решения проектных задач это не внесет большой ошибки в определение дальности, так как сопротивление воздуха на атмосферном участке почти не влияет на изменение формы траектории. Оно оказывает значительное влияние лишь на скорость и время движения ракеты.

Условимся под дальностью полета понимать длину дуги на поверхности Земли. Тогда полная дальность полета от старта до цели будет равна

$$L = l_{\text{н}} + l_{\text{св}},$$

где $l_{\text{н}}$ — дальность активного участка; $l_{\text{св}}$ — дальность свободного участка. В дальнейшем будем считать, что дальность активного участка уже определена по формуле $l_{\text{н}} = R\delta$, где δ находится из (11.23).

Для определенности будем также полагать $r_{\text{с}} = R$, $r_{\text{н}} \geq r_{\text{с}}$.

Наконец, при решении задач будем использовать результаты главы 9.

З а д а ч а 1. По заданным начальным $V_{\text{н}}$, $r_{\text{н}}$ и $\theta_{\text{н}}$ найти дальность L .

По формулам (9.16) и (9.17) находим параметр p и эксцентриситет e орбиты

$$p = \frac{1}{\mu} r_{\text{н}}^2 V_{\text{н}}^2 \cos^2 \theta_{\text{н}}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} \left(V_{\text{н}}^2 - \frac{2\mu}{r_{\text{н}}} \right) r_{\text{н}}^2 V_{\text{н}}^2 \cos^2 \theta_{\text{н}}}$$

или, если воспользоваться обозначением $\nu = \frac{rV^2}{\mu}$,

$$p = r_{\text{н}} \nu_{\text{н}} \cos^2 \theta_{\text{н}}, \quad e = \sqrt{1 + \nu_{\text{н}} (\nu_{\text{н}} - 2) \cos^2 \theta_{\text{н}}}.$$

На основании уравнения орбиты (9.10) имеем

$$\cos \vartheta_{\text{н}} = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_{\text{н}}} - 1 \right),$$

$$\cos \vartheta_{\text{с}} = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_{\text{с}}} - 1 \right).$$

Для определения истинной аномалии ϑ по значению $\cos \vartheta$ достаточно знать знак $\sin \vartheta$, а его можно определить, используя формулу для радиальной компоненты скорости (9.12)

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta = V \sin \theta,$$

из которой следует, что на восходящей части траектории, т.е. при полете на участке от перигея к апогею, $\vartheta \in (0, \pi)$, $\sin \vartheta > 0$ и, значит, $\sin \theta > 0$; на нисходящей части траектории $\vartheta \in (\pi, 2\pi)$, $\sin \vartheta < 0$ и $\sin \theta < 0$.

Поскольку точка падения всегда принадлежит нисходящей части траектории, то $\vartheta_{\text{с}} \in (\pi, 2\pi)$ и

$$\vartheta_{\text{с}} = 2\pi - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_{\text{с}}} - 1 \right) \right].$$

Если в начальной точке $\theta_n > 0$, то $\sin \theta_n > 0$, $\sin \vartheta_n > 0$ и, следовательно, $\vartheta_n \in (0, \pi)$. Отсюда

$$\vartheta_n = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_n} - 1 \right) \right].$$

Если в начальной точке $\theta_n < 0$, то $\sin \theta_n < 0$, $\sin \vartheta_n < 0$ и, следовательно, $\vartheta_n \in (\pi, 2\pi)$. Отсюда

$$\vartheta_n = 2\pi - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_n} - 1 \right) \right].$$

Угловая дальность свободного полета находится по формуле

$$\beta_C = \vartheta_C - \vartheta_n.$$

В частном случае, когда $r_n = r_C = R$, имеем

$$\beta_C = 2 \left\{ \pi - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{R} - 1 \right) \right] \right\}.$$

Мы получили первый способ расчета дальности:

$$\nu_n = \frac{r_n V_n^2}{\mu}, \quad p = r_n \nu_n \cos^2 \theta_n,$$

$$e = \sqrt{1 + \nu_n (\nu_n - 2) \cos^2 \theta_n},$$

$$\vartheta_C = 2\pi - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_C} - 1 \right) \right],$$

$$\vartheta_n = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_n} - 1 \right) \right], \quad \text{если } \theta_n > 0,$$

$$\vartheta_n = 2\pi - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_n} - 1 \right) \right], \quad \text{если } \theta_n < 0,$$

$$\beta_C = \vartheta_C - \vartheta_n, \quad L = l_n + R\beta_C.$$

Приведенный способ определения угловой дальности β_C может быть применен при любых значениях V_n , r_n и θ_n . Однако при таком их сочетании, которое соответствует малым дальностям и необходимости оценки дальности без привлечения ЭВМ, возможна потеря точности при определении углов ϑ_n и ϑ_C , что происходит в случае, если они незначительно отличаются от π . В такой ситуации лучше использовать традиционный метод расчета [2], который мы приведем ниже. Отметим, что и этому методу присуща своя особенность – он получен в предположении $\beta_C \neq \pi$, и, значит, при значениях β_C , близких к π , также возможна потеря точности.

Преобразуем соотношение (9.34) в соответствии с введенными обозначениями, учитывая, что $V_{rn} = V_n \cos \theta_n$, $V_{rn} = V_n \sin \theta_n$:

$$(\nu_n \cos^2 \theta_n - 1) \cos \beta_C + \left(1 - \nu_n \frac{r_n}{r_C} \cos^2 \theta_n \right) = \nu_n \sin \theta_n \cos \theta_n \sin \beta_C. \quad (11.24)$$

Выразим $\sin \beta_C$ и $\cos \beta_C$ через $\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}$:

$$\sin \beta_C = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2}}, \quad \cos \beta_C = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2}}.$$

Предполагая $\beta_C \neq \pi$ и умножая обе части (11.24) на $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2}$,

получаем

$$\begin{aligned} & (\nu_n \cos^2 \theta_n - 1) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2}\right) + \left(1 - \nu_n \frac{r_n}{r_C} \cos^2 \theta_n\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2}\right) = \\ & = \nu_n \sin \theta_n \cos \theta_n \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}$:

$$\begin{aligned} & [2r_C - (r_n + r_C) \nu_n \cos^2 \theta_n] \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} - \\ & - 2\nu_n r_C \sin \theta_n \cos \theta_n \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} - (r_n - r_C) \nu_n \cos^2 \theta_n = 0. \end{aligned}$$

Разделив это уравнение на $\cos^2 \theta_n$, получим

$$\begin{aligned} & [2r_C(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n) - (r_n + r_C) \nu_n] \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} - \\ & - 2\nu_n r_C \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} - (r_n - r_C) \nu_n = 0. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Обозначим для краткости коэффициенты уравнения (11.25) следующим образом:

$$a = 2r_C(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n) - (r_n + r_C) \nu_n, \quad b = \nu_n r_C \operatorname{tg} \theta_n, \quad c = \nu_n (r_n - r_C).$$

Тогда (11.25) приводится к уравнению

$$a \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} - 2b \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} - c = 0, \quad (11.26)$$

решением которого будет

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + ac}}{a}.$$

Можно показать, что знак "плюс" перед корнем соответствует пересечению с поверхностью Земли нисходящей ветви эллиптической траектории, т.е. для нашей задачи

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a}. \quad (11.27)$$

Таким образом, мы вывели второй способ расчета дальности:

$$\nu_n = \frac{r_n V_n^2}{\mu}, \quad a = 2r_C(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n) - (r_n + r_C) \nu_n,$$

$$b = \nu_n r_C \operatorname{tg} \theta_n, \quad c = \nu_n (r_n - r_C), \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} = \frac{b + \sqrt{b^2 + ac}}{a},$$

$$l_{св} = R\beta_C, \quad L = l_n + l_{св}.$$

В частном случае, когда $r_n = r_C = R$, вершине (апогею) траектории соответствует угловая дальность $\beta_B = \beta_C/2$, коэффициенты квадратного уравнения (11.26) принимают значения

$$a = 2R(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n - \nu_n), \quad b = \nu_n R \operatorname{tg} \theta_n, \quad c = 0$$

и из (11.27) получаем

$$\operatorname{tg} \beta_B = \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} = \frac{2b}{a} = \frac{\nu_n \operatorname{tg} \theta_n}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n - \nu_n}, \quad (11.28)$$

$$l_{св} = 2R\beta_B.$$

Анализируя (11.28), можно получить наглядное представление о зависимости дальности от начальных условий движения. Принимая ν_n за параметр, построим зависимость угла β_B от угла θ_n (рис. 11.6).

При $\nu_n = 1$ из первой формулы (11.28) следует

$$\operatorname{tg} \beta_B = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta_n} = \operatorname{ctg} \theta_n = \operatorname{tg}(90^\circ - \theta_n) \quad \text{или} \quad \beta_B = 90^\circ - \theta_n.$$

Этой зависимости на рисунке соответствует прямая линия, пересекающая оси при $\theta_n = 90^\circ$ и $\beta_B = 90^\circ$.

При $\nu_n = 2$ первая формула (11.28) дает

$$\operatorname{tg} \beta_B = \frac{2\operatorname{tg} \theta_n}{\operatorname{tg}^2 \theta_n - 1} = -\operatorname{tg} 2\theta_n = \operatorname{tg}(180^\circ - 2\theta_n) \quad \text{или} \quad \beta_B = 180^\circ - 2\theta_n.$$

Это уравнение прямой, пересекающей оси при $\theta_n = 90^\circ$ и $\beta_B = 180^\circ$.

Определим оптимальное значение угла θ_n , т.е. такое его значение, при котором для заданного ν_n достигается максимальный угол β_B (или максимальная дальность в случае $r_n = r_C = R$). Для этого достаточно продифференцировать выражение (11.28) по θ_n и результат приравнять нулю.

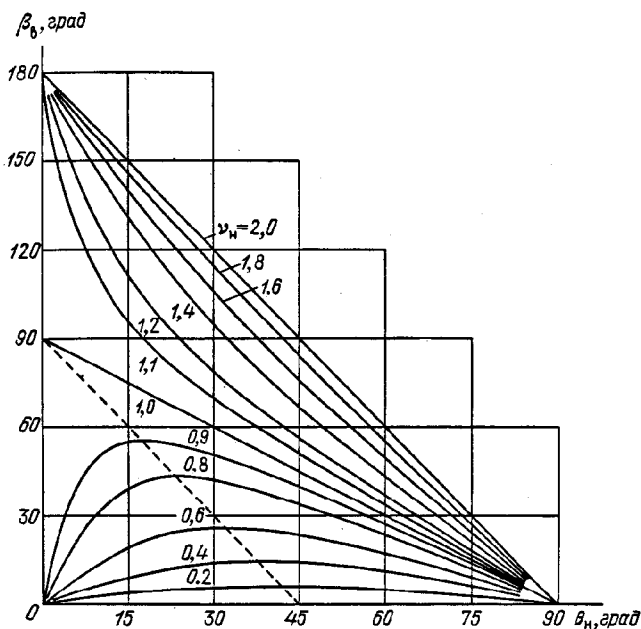


Рис. 11.6. Зависимость угловой дальности β_B от начального угла наклона вектора скорости θ_H для различных значений параметра ν_H

Мы же для удобства возьмем производную от $\text{tg } \beta_B$ по $\text{tg } \theta_H$:

$$\frac{d(\text{tg } \beta_B)}{d(\text{tg } \theta_H)} = \frac{\nu_H (1 + \text{tg}^2 \theta_H - \nu_H) - 2\nu_H \text{tg}^2 \theta_H}{1 + \text{tg}^2 \theta_H - \nu_H}. \quad (11.29)$$

Отсюда получаем

$$\text{tg } \theta_{H.\text{опт}} = \sqrt{1 - \nu_H}, \quad (11.30)$$

т.е. оптимальный угол существует при $\nu_H < 1$. Заметим, что обращение в нуль знаменателя (11.29) возможно только при $\nu_H > 1$, но при этом пропадает смысл в решении задачи на поиск максимума β_B .

Подставляя значение $\text{tg } \theta_{H.\text{опт}}$ в (11.28), получаем для максимальной дальности

$$\text{tg } \beta_{B.\text{max}} = \frac{\nu_H}{2\sqrt{1 - \nu_H}}, \quad (11.31)$$

а исключая ν_H из (11.30) и (11.31), — уравнение линии, проходящей через оптимальные точки на плоскости β_B, θ_H :

$$\beta_{B.\text{max}} = 90^\circ - 2\theta_{H.\text{опт}}. \quad (11.32)$$

Это уравнение прямой, пересекающей оси при $\theta_H = 45^\circ$ и $\beta_B = 90^\circ$.

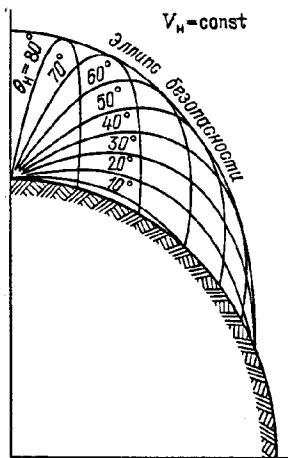


Рис. 11.7. Семейство эллиптических траекторий с одинаковой начальной скоростью. Эллипс безопасности

Формулы (11.30)–(11.32) однозначно связывают значения $\beta_{в\max}$, $\theta_{н.опт}$ и ν_n . Если задана одна из этих величин, то однозначно определяются две другие. Если же задаться некоторыми значениями $\beta_{в} < \beta_{в\max}$ при фиксированной величине ν_n , то каждому значению $\beta_{в}$ будут соответствовать два значения угла θ_n , причем одно из них будет располагаться в области $\theta_n < \theta_{н.опт}$, другое – в области $\theta_n > \theta_{н.опт}$. При фиксированном $\nu_n \geq 1$ заданные значения $\beta_{в}$ могут обеспечиваться только одним углом θ_n .

Интересным свойством обладает семейство эллиптических траекторий, отличающихся углом θ_n при всех прочих равных условиях. Оказывается, огибающая этих траекторий является также эллипсом, причем его апсидальная ось проходит через начальную точку (рис. 11.7). Не приводя выкладки, так как они достаточно громоздки, запишем лишь уравнение огибающего эллипса

$$r = \frac{p_0}{1 - e_0 \cos \beta},$$

где

$$p_0 = \frac{4\nu_n R}{4 - \nu_n^2}; \quad e_0 = \frac{2 - \nu_n}{2 + \nu_n}.$$

По аналогии с параболической теорией эту огибающую можно назвать *эллипсом безопасности* или *эллипсом достижимости*. Он представляет собой границу области, вне которой при заданной начальной скорости не может быть достигнута ни одна точка, а любая точка внутри нее может быть достигнута при двух начальных значениях θ_n ; точка, находящаяся на границе области, может быть достигнута при единственном значении начального угла.

Сформулируем некоторые интересные и наиболее очевидные свойства эллиптических траекторий, вытекающие из проведенного анализа для частного случая равенства высот в начальной и конечной точках траектории:

– дальность полета зависит только от двух параметров: начальных значений ν_n и θ_n ;

– при заданном θ_n дальность всегда больше для больших ν_n ;

– при заданном ν_n дальность колеблется в зависимости от угла θ_n от нуля до некоторого максимального значения, причем каждому ν_n соответствует свое оптимальное значение θ_n , при котором достигается максимальная дальность;

– зависимость максимальной дальности от угла θ_H представляет собой прямую линию, расположенную в области углов θ_H от 0 до 45° , причем с увеличением дальности оптимальный угол уменьшается;

– заданную дальность можно обеспечить при заданном ν_H двумя углами θ_H , большим или меньшим оптимального, кроме случая использования оптимального угла;

– в случае оптимального угла заданная дальность достигается при минимально возможном значении ν_H ;

– при оптимальном угле малые ошибки в величине угла θ_H не приводят к ошибкам по дальности;

– при неоптимальных углах одинаковые ошибки в величине угла θ_H приводят к неодинаковым ошибкам в дальности: в области $\theta_H < \theta_{H.опт}$ (пологие траектории) ошибка больше, чем в области $\theta_H > \theta_{H.опт}$ (крутые траектории);

– при $\nu_H = 1$ зависимость дальности от угла θ_H является линейной; углу $\theta_H = 90^\circ$ соответствует нулевая дальность, углу $\theta_H = 0$ соответствует выход на круговую орбиту;

– в диапазоне $1 < \nu_H < 2$ могут быть получены любые дальности или любые эллиптические орбиты в зависимости от угла θ_H ;

– при $\nu_H \geq 2$ получаются невозвращающиеся параболические и гиперболические орбиты.

Во всех рассуждениях, связанных с траекториями, замыкающимися на земную поверхность, или орбитами, близко расположенными к поверхности Земли, полезно помнить, что на величину ν_H начальная высота влияет сравнительно слабо, так как практически используемый диапазон высот мал по сравнению с радиусом Земли. Так, изменение начальной высоты с 200 км до 300 км (т.е. в полтора раза) приводит к изменению ν_H всего лишь примерно на 1,5%.

Задача 2. По заданным дальности L , углу θ_H , высоте h_H найти необходимую скорость V_H .

Из уравнения (11.24) сразу получаем

$$\begin{aligned} \nu_H &= \frac{1 - \cos \beta_C}{\cos \theta_H \left[\left(\frac{r_H}{r_C} - \cos \beta_C \right) \cos \theta_H + \sin \theta_H \sin \beta_C \right]} = \\ &= \frac{1 - \cos \beta_C}{\cos \theta_H \left[\frac{r_H}{r_C} \cos \theta_H - \cos(\beta_C + \theta_H) \right]} \end{aligned}$$

Схема расчета следующая:

$$\beta_C = \frac{L - l_H}{R},$$

$$\nu_H = \frac{1 - \cos \beta_C}{\cos \theta_H \left[\frac{r_H}{r_C} \cos \theta_H - \cos(\beta_C + \theta_H) \right]}, \quad V_H = \sqrt{\frac{\mu \nu_H}{r_H}}.$$

Задача 3. По заданным дальности L и начальной высоте h_H найти оптимальный угол $\theta_{H \text{ опт}}$, требующий минимальной скорости $V_{H \text{ min}}$. Эта задача фактически решена в § 9.6, результатами которого мы и воспользуемся.

Минимальная скорость $V_{H \text{ min}}$ в начальной точке равна большой полуоси гиперболического годографа скоростей, а наклон этой скорости к местному горизонту $\theta_{H \text{ опт}}$ определяется соотношением

$$\theta_{H \text{ опт}} = 90^\circ - \frac{\Phi_1}{2},$$

где $\Phi_1/2$ — полураствор асимптот гиперболы. Схема расчета следующая:

$$\beta_C = \frac{L - l_H}{R},$$

$$\operatorname{tg} \Phi_1 = \frac{r_C \sin \beta_C}{r_C \cos \beta_C - r_H} \quad \text{при} \quad \beta_C \neq 180^\circ,$$

$$\theta_{H \text{ опт}} = 90^\circ - \frac{\Phi_1}{2},$$

$$V_{H \text{ min}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_H} \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\Phi_1}{2}}}.$$

В соответствии с § 9.6, если $\beta_C = 180^\circ$, имеем

$$\theta_{H \text{ опт}} = 0, \quad V_{H \text{ min}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_H} \frac{r_C}{r_H + r_C}}.$$

Заметим, что для случая $\beta_C \neq 180^\circ$ решение задачи можно получить, если продифференцировать (11.24), рассматривая v_H как неявную функцию θ_H , и приравнять нулю производную $dv_H/d\theta_H$:

$$\cos^2 \theta_H \cos \beta_C dv_H - 2v_H \cos \theta_H \sin \theta_H \cos \beta_C d\theta_H -$$

$$- \frac{r_H}{r_C} \cos^2 \theta_H dv_H + 2v_H \frac{r_H}{r_C} \cos \theta_H \sin \theta_H d\theta_H =$$

$$= \sin \theta_H \cos \theta_H \sin \beta_C dv_H + v_H \sin \beta_C (\cos^2 \theta_H - \sin^2 \theta_H) d\theta_H,$$

$$\frac{dv_H}{d\theta_H} = \frac{v_H \left[\sin 2\theta_H \left(\cos \beta_C - \frac{r_H}{r_C} \right) + \cos 2\theta_H \sin \beta_C \right]}{\cos^2 \theta_H \left(\cos \beta_C - \frac{r_H}{r_C} \right) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_H \sin \beta_C}.$$

Из условия $d\nu_{\text{н}}/d\theta_{\text{н}} = 0$ находим

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\text{н.опт}} = \frac{\sin \beta_{\text{с}}}{\frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{с}}} - \cos \beta_{\text{с}}} = \frac{r_{\text{с}} \sin \beta_{\text{с}}}{r_{\text{н}} - r_{\text{с}} \cos \beta_{\text{с}}},$$

т.е. мы подтвердили формулу расчетной схемы, поскольку

$$\operatorname{tg} 2\theta_{\text{н.опт}} = \operatorname{tg}(180^\circ - \Phi_1) = -\operatorname{tg} \Phi_1.$$

Задача 4. По заданным начальным скорости $V_{\text{н}}$ и высоте $h_{\text{н}}$ найти оптимальный угол $\theta_{\text{н.опт}}$, обеспечивающий максимальную дальность L_{max} .

Дифференцируя выражение (11.25) и считая $\operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{с}}}{2}$ неявной функцией

$\operatorname{tg} \theta_{\text{н}}$, из условия равенства нулю производной $\frac{d \operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{с}}}{2}}{d \operatorname{tg} \theta_{\text{н}}}$ получаем

$$2r_{\text{с}} \operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{сmax}}}{2} - 2 \operatorname{tg} \theta_{\text{н.опт}} - 2\nu_{\text{н}} r_{\text{с}} \operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{сmax}}}{2} = 0,$$

т.е.

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{сmax}}}{2} = \frac{\nu_{\text{н}}}{2 \operatorname{tg} \theta_{\text{н.опт}}}. \quad (11.33)$$

Решая совместно (11.25) и (11.33), находим

$$\left[2r_{\text{с}}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{\text{н.опт}}) - (r_{\text{н}} + r_{\text{с}})\nu_{\text{н}} \right] \frac{\nu_{\text{н}}^2}{4 \operatorname{tg}^2 \theta_{\text{н.опт}}} -$$

$$- 2\nu_{\text{н}} r_{\text{с}} \operatorname{tg} \theta_{\text{н.опт}} \frac{\nu_{\text{н}}}{2 \operatorname{tg} \theta_{\text{н.опт}}} - (r_{\text{н}} - r_{\text{с}})\nu_{\text{н}} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^2 \theta_{\text{н.опт}} = \frac{\nu_{\text{н}} [2r_{\text{с}} - (r_{\text{н}} + r_{\text{с}})\nu_{\text{н}}]}{2[\nu_{\text{н}} r_{\text{с}} + 2(r_{\text{н}} - r_{\text{с}})]}.$$

Таким образом, данная задача решается по следующей схеме:

$$\nu_{\text{н}} = \frac{r_{\text{н}} V_{\text{н}}^2}{\mu},$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{н.опт}} = \sqrt{\frac{\nu_{\text{н}}}{2} \frac{2r_{\text{с}} - (r_{\text{н}} + r_{\text{с}})\nu_{\text{н}}}{\nu_{\text{н}} r_{\text{с}} + 2(r_{\text{н}} - r_{\text{с}})}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_{\text{сmax}}}{2} = \frac{\nu_{\text{н}}}{2 \operatorname{tg} \theta_{\text{н.опт}}},$$

$$l_{\text{max}} = R\beta_{\text{сmax}}, \quad L_{\text{max}} = l_{\text{н}} + l_{\text{max}}.$$

Для частного случая, когда $r_H = r_C$, имеем

$$\operatorname{tg} \theta_{H. \text{опт}} = \sqrt{1 - \nu_H}.$$

Задача 5. Определить изменение дальности L в зависимости от малых изменений высоты h_H , скорости V_H и угла θ_H .

Очевидно, нужно найти производные

$$\partial \beta_C / \partial r_H, \quad \partial \beta_C / \partial V_H, \quad \partial \beta_C / \partial \theta_H.$$

Вспользуемся уравнением (11.25), которое в общем виде может быть записано таким образом:

$$F(r_H, \nu_H, \theta_H, \beta_C) = 0.$$

Продифференцировав его, будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial r_H} dr_H + \frac{\partial F}{\partial \nu_H} d\nu_H + \frac{\partial F}{\partial \theta_H} d\theta_H + \frac{\partial F}{\partial \beta_C} d\beta_C = 0. \quad (11.34)$$

Поскольку $\nu_H = f(V_H, r_H)$, то

$$d\nu_H = \frac{\partial f}{\partial r_H} dr_H + \frac{\partial f}{\partial V_H} dV_H. \quad (11.35)$$

Подставляя (11.35) в (11.34), получаем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_H} + \frac{\partial F}{\partial \nu_H} \frac{\partial f}{\partial r_H} \right) dr_H + \frac{\partial F}{\partial \nu_H} \frac{\partial f}{\partial V_H} dV_H + \frac{\partial F}{\partial \theta_H} d\theta_H + \frac{\partial F}{\partial \beta_C} d\beta_C = 0,$$

откуда

$$d\beta_C = - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial \beta_C}} \left(\frac{\partial F}{\partial r_H} + \frac{\partial F}{\partial \nu_H} \frac{\partial f}{\partial r_H} \right) dr_H - \frac{\frac{\partial F}{\partial \nu_H} \frac{\partial f}{\partial V_H}}{\frac{\partial F}{\partial \beta_C}} dV_H - \frac{\frac{\partial F}{\partial \theta_H}}{\frac{\partial F}{\partial \beta_C}} d\theta_H$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \beta_C}{\partial r_H} = - \left(\frac{\partial F}{\partial r_H} + \frac{\partial F}{\partial \nu_H} \frac{\partial f}{\partial r_H} \right) / \frac{\partial F}{\partial \beta_C}, \quad (11.36)$$

$$\frac{\partial \beta_C}{\partial V_H} = - \frac{\partial F}{\partial \nu_H} \frac{\partial f}{\partial V_H} / \frac{\partial F}{\partial \beta_C}, \quad (11.37)$$

$$\frac{\partial \beta_C}{\partial \theta_H} = - \frac{\partial F}{\partial \theta_H} / \frac{\partial F}{\partial \beta_C}. \quad (11.38)$$

Находим производные:

$$\frac{\partial F}{\partial r_H} = - \nu_H \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} - \nu_H = - \frac{\nu_H}{\cos^2 \frac{\beta_C}{2}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \nu_H} = - (r_H + r_C) \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} - 2r_C \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} - (r_H - r_C).$$

Но из формулы для ν_n задачи 2

$$\begin{aligned} & (r_n + r_C) \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} + 2r_C \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} + r_n - r_C = \\ & \frac{2r_C (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n) \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2}}{\nu_n} . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial \nu_n} = - \frac{2r_C}{\nu_n} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n) \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} .$$

Поскольку $\nu_n = \frac{r_n V_n^2}{\mu}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial r_n} = \frac{V_n^2}{\mu} = \frac{\nu_n}{r_n} , \quad \frac{\partial f}{\partial V_n} = \frac{2r_n V_n}{\mu} = \frac{2\nu_n}{V_n} .$$

Далее,

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_C} = \frac{[2r_C (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n) - (r_n + r_C) \nu_n] \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} - \nu_n r_C \operatorname{tg} \theta_n}{\cos^2 \frac{\beta_C}{2}} .$$

Но из уравнения (11.25)

$$\begin{aligned} & [2r_C (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_n) - (r_n + r_C) \nu_n] \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} - \nu_n r_C \operatorname{tg} \theta_n = \\ & = \nu_n \left(r_n - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}} . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial \beta_C} = \frac{\nu_n \left(r_n - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_n \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \cos^2 \frac{\beta_C}{2}}$$

и, наконец,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_n} = \frac{2r_C \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}}{\cos^2 \theta_n} \left(2 \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \operatorname{tg} \theta_n - \nu_n \right) .$$

Подставляя найденные производные в выражения (11.36) – (11.38),

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_C}{\partial r_H} &= \\ &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \cos^2 \frac{\beta_C}{2}}{\nu_H \left(r_H - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)} \left[\frac{\nu_H}{\cos^2 \frac{\beta_C}{2}} + 2 \frac{r_C}{r_H} \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \right] = \\ &= \frac{\nu_H + \frac{2r_C}{r_H} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \sin^2 \frac{\beta_C}{2}}{\nu_H \left(r_H - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}, \end{aligned} \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_C}{\partial V_H} &= \frac{2r_C \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_C}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \cos^2 \frac{\beta_C}{2} 2\nu_H}{\nu_H^2 \left(r_H - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right) V_H} = \\ &= \frac{4r_C}{V_H} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \sin^2 \frac{\beta_C}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}}{\nu_H \left(r_H - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}, \end{aligned} \quad (11.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_C}{\partial \theta_H} &= \frac{2r_C \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \left(\nu_H - 2 \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \operatorname{tg} \theta_H \right) \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \cos^2 \frac{\beta_C}{2}}{\cos^2 \theta_H \cdot \nu_H \left(r_H - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)} = \\ &= \frac{2r_C (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \left(\nu_H - 2 \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right) \sin^2 \frac{\beta_C}{2}}{\nu_H \left(r_H - r_C + r_C \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Итак, для решения данной задачи имеем следующие формулы (при $r_C = R$):

$$\frac{\partial l_{св}}{\partial r_H} = R \frac{\nu_H + \frac{2R}{r_H} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \sin^2 \frac{\beta_C}{2}}{\nu_H \left(r_H - R + R \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2},$$

$$\frac{\partial l_{св}}{\partial V_H} = \frac{4R^2}{V_H} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \sin^2 \frac{\beta_C}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}}{\nu_H \left(r_H - R + R \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}, \quad (11.42)$$

$$\frac{\partial l_{св}}{\partial \theta_H} = 2R^2 \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \left(\nu_H - 2 \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}{\nu_H \left(r_H - R + R \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}.$$

В частном случае, когда $r_C = r_H$, из уравнений (11.39) – (11.41) получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_C}{\partial r_H} &= \frac{\nu_H + 2 \sin^2 \frac{\beta_C}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H)}{\nu_H r_H \operatorname{tg} \theta_H}, \\ \frac{\partial \beta_C}{\partial V_H} &= \frac{4 \sin^2 \frac{\beta_C}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H)}{\nu_H V_H \operatorname{tg} \theta_H}, \\ \frac{\partial \beta_C}{\partial \theta_H} &= \frac{\left(\nu_H - 2 \operatorname{tg} \theta_H \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right) (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_H) \sin \beta_C}{\nu_H \operatorname{tg} \theta_H}. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Задача 6. По начальным значениям h_H , V_H и θ_H , заданным на момент времени t_H , определить аналогичные параметры траектории в точке, заданной угловой дальностью полета β от начальной точки.

Задача фактически решена в главе 9, поэтому мы приведем лишь итоговые расчетные формулы:

$$r_H = h_H + R, \quad \nu_H = \frac{r_H V_H^2}{\mu}, \quad p = r_H \nu_H \cos^2 \theta_H,$$

$$e = \sqrt{1 + \nu_H (\nu_H - 2) \cos^2 \theta_H},$$

$$\vartheta_H = \begin{cases} \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_H} - 1 \right) \right], & \text{если } \theta_H > 0, \\ 2\pi - \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_H} - 1 \right) \right], & \text{если } \theta_H < 0, \end{cases}$$

$$h = r - R = \frac{p}{1 + e \cos(\vartheta_H + \beta)} - R,$$

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p} [1 + 2e \cos(\vartheta_H + \beta) + e^2]},$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{V_r}{V_n} = \operatorname{arctg} \left[\frac{er}{p} \sin(\vartheta_H + \beta) \right],$$

$$t = t_H + \frac{1}{n} [E - E_H - e(\sin E - \sin E_H)],$$

$$\text{где } n = \sqrt{\mu} \left(\frac{1 - e^2}{p} \right)^{3/2} = \sqrt{\mu} \left(\frac{2 - v_H}{r_H} \right)^{3/2};$$

$$\sin E = \frac{r \sin(\vartheta_H + \beta)}{p}; \quad \sin E_H = \frac{r_H \sin \vartheta_H}{p};$$

$$E = \begin{cases} \arccos \left\{ \frac{r}{p} [e + \cos(\vartheta_H + \beta)] \right\}, & \text{если } \theta > 0, \\ 2\pi - \arccos \left\{ \frac{r}{p} [e + \cos(\vartheta_H + \beta)] \right\}, & \text{если } \theta < 0; \end{cases}$$

$$E_H = \begin{cases} \arccos \left[\frac{r_H}{p} (e + \cos \vartheta_H) \right], & \text{если } \theta_H > 0, \\ 2\pi - \arccos \left[\frac{r_H}{p} (e + \cos \vartheta_H) \right], & \text{если } \theta_H < 0. \end{cases}$$

Частный случай I – определение параметров движения в вершине траектории. При $\theta_H > 0$ начальная точка соответствует восходящей части траектории и в ходе полета летательный аппарат достигнет вершины траектории. При $\theta_H < 0$ движение ЛА будет проходить по нисходящей части траектории с вершиной, пройденной до момента t_H .

В вершине траектории $\vartheta_B = \vartheta_H + \beta = \pi$, $E = \pi$ и в соответствии с этим расчетные формулы при $\theta_H > 0$ принимают вид

$$h_B = \frac{p}{1 - e} - R, \quad V_B = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - e), \quad \theta_B = 0,$$

$$t_B = t_H + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{r_H}{2 - v_H} \right)^{3/2} \left\{ \pi - \arccos \left[\frac{r_H}{p} (e + \cos \vartheta_H) \right] + \frac{r_H}{p} e \sin \vartheta_H \right\}.$$

Частный случай II – вертикальный пуск. При вертикальном пуске $\vartheta_H = \pi/2$, поэтому $p = 0$, $e = 1$, и мы воспользуемся формулами эллиптического движения, не содержащими эти элементы орбиты:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}, \quad r = a(1 - \cos E), \quad t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (E - \sin E).$$

На основании этих формул сразу получаем

$$a = \frac{\mu r_H}{2\mu - r_H V_H^2},$$

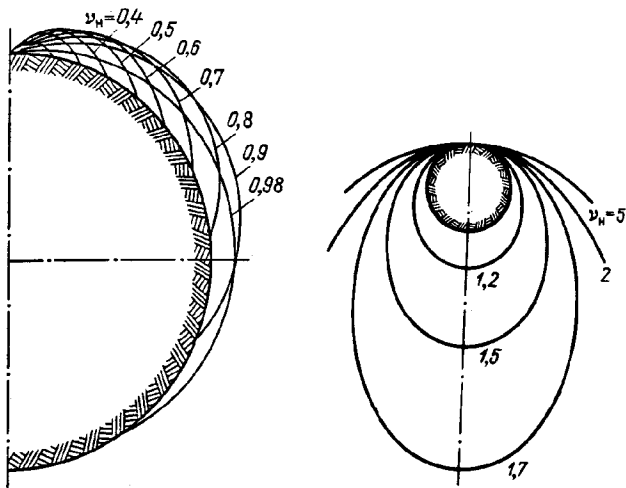


Рис. 11.8. Семейство эллиптических траекторий для значений параметра $\nu_n < 1$ при оптимальном направлении начальной скорости

Рис. 11.9. Семейство траекторий для значений параметра $\nu_n > 1$ при горизонтальном направлении начальной скорости

высота в вершине траектории ($E_B = \pi$)

$$h_B = r_B - R = \frac{2\mu r_n}{2\mu - r_n V_n^2} - R = \frac{2r_n}{2 - \nu_n} - R$$

и время полета до вершины

$$t_B = t_n + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E - E_n - (\sin E - \sin E_n)] = t_n + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} (\pi - E_n + \sin E_n),$$

причем

$$E_n = \arccos \left(1 - \frac{r_n}{a} \right).$$

На рис. 11.8 и 11.9 изображены семейства характерных траекторий полета ЛА. На рис. 11.8 показаны траектории, получающиеся при оптимальном угле бросания для $\nu_n < 1$. Рис. 11.9 изображает траектории при $\nu_n > 1$ и $\theta_n = 0$.

§ 11.3. Переход от относительного движения к абсолютному

Полученные формулы эллиптической теории позволяют решать задачи, связанные с абсолютным движением ракеты. Но для того чтобы такая задача стала определенной, надо уметь находить начальные условия абсолютного движения по известным начальным условиям движения ракеты в земной системе координат, т.е. относительного движения ракеты. С другой

стороны, абсолютное движение нас обычно интересует не само по себе, а с точки зрения возможности перехода от этого движения к движению относительно поверхности вращающейся Земли. Общий подход к построению преобразований характеристик движения при переходе между координатными системами изложен в главе 2. В данном параграфе будут получены формулы, используемые в практических расчетах.

11.3.1. Определение начальных условий абсолютного движения. Воспользуемся системами координат, изображенными на рис. 11.10:

$O'x'y'z'$ – геоцентрическая инерциальная система координат, расположенная так, что в начальный момент движения плоскость $O'x'y'$ проходит через радиус-вектор ракеты r и вектор абсолютной скорости V , а ось $O'y'$ – через точку старта O ;

$O''x''y''z''$ – геоцентрическая экваториальная инерциальная система координат, плоскость $O''x''z''$ которой содержит ось $O'y'$;

$Oxyz$ – земная система координат, оси которой параллельны осям системы $O'x'y'z'$, а начало расположено на поверхности Земли в точке старта.

Будем считать, что известны начальные условия относительного движения ракеты: координаты x_H, y_H, z_H , скорость v_H и ее направление, определяемое углами θ_H и σ_H в земной системе координат (см. § 5.1) $Oxyz$. Тогда в начальный момент t_H координаты ракеты в системе $O'x''y''z''$ будут связаны с координатами x_H, y_H, z_H формулами

$$\begin{aligned} x_H'' &= -x_H \sin \varphi_T \cos \psi + (R + y_H) \cos \varphi_T + z_H \sin \varphi_T \sin \psi, \\ y_H'' &= x_H \sin \psi + z_H \cos \psi, \\ z_H'' &= x_H \cos \varphi_T \cos \psi + (R + y_H) \sin \varphi_T - z_H \cos \varphi_T \sin \psi. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Составляющие относительной скорости v_H по осям системы $O'x''y''z''$ выражаются через $\dot{x}_H, \dot{y}_H, \dot{z}_H$ аналогичными формулами. Но поскольку абсолютная скорость движения складывается из скорости v_H и переносной

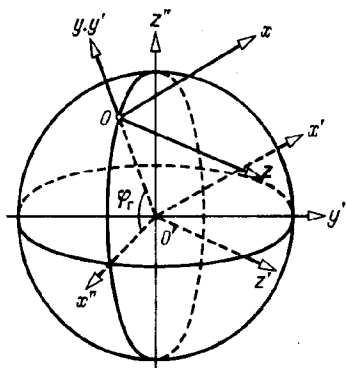


Рис. 11.10. Системы координат, используемые при переходе от относительного движения к абсолютному и наоборот

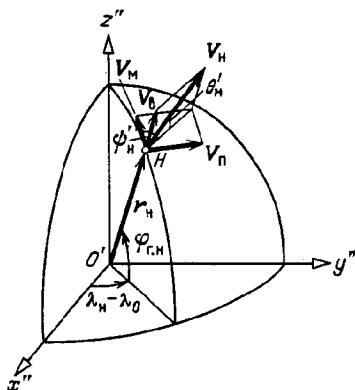


Рис. 11.11. Разложение абсолютной скорости вдоль вертикали (V_B), меридиана (V_M) и параллели (V_P)

скорости

$$\vec{\omega}_3 \times \mathbf{r}_H = \omega_3 z''^0 \times (x''_H x''^0 + y''_H y''^0 + z''_H z''^0) = \omega_3 (x''_H y''^0 - y''_H x''^0),$$

составляющие абсолютной скорости запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}''_H &= -\dot{x}_H \sin \varphi_\Gamma \cos \psi + \dot{y}_H \cos \varphi_\Gamma + \dot{z}_H \sin \varphi_\Gamma \sin \psi - \omega_3 y''_H, \\ \dot{y}''_H &= \dot{x}_H \sin \psi + \dot{z}_H \cos \psi + \omega_3 x''_H, \\ \dot{z}''_H &= \dot{x}_H \cos \varphi_\Gamma \cos \psi + \dot{y}_H \sin \varphi_\Gamma - \dot{z}_H \cos \varphi_\Gamma \sin \psi, \end{aligned} \quad (11.45)$$

где $\dot{x}_H, \dot{y}_H, \dot{z}_H$ определяются по (5.8):

$$\dot{x}_H = v_H \cos \theta_H, \quad \dot{y}_H = v_H \sin \theta_H, \quad \dot{z}_H = -v_H \sigma.$$

Обозначим географическую широту начальной точки Н через $\varphi_{\Gamma, H}$, географическую долготу — через λ_H и географическую долготу точки старта — через λ_0 . Тогда наряду с формулами (11.44) будем иметь (рис. 11.11)

$$\begin{aligned} x''_H &= r_H \cos \varphi_{\Gamma, H} \cos(\lambda_H - \lambda_0), \\ y''_H &= r_H \cos \varphi_{\Gamma, H} \sin(\lambda_H - \lambda_0), \\ z''_H &= r_H \sin \varphi_{\Gamma, H}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\lambda_H - \lambda_0) &= \frac{y''_H}{x''_H}, \\ \operatorname{tg} \varphi_{\Gamma, H} &= \frac{z''_H}{\sqrt{x''_H{}^2 + y''_H{}^2}} = \frac{z''_H \cos(\lambda_H - \lambda_0)}{x''_H}, \\ r_H &= \frac{\sqrt{x''_H{}^2 + y''_H{}^2 + z''_H{}^2}}{\sin \varphi_{\Gamma, H}}. \end{aligned} \quad (11.46)$$

Наконец, обозначим через θ'_H угол, образованный вектором абсолютной скорости \mathbf{V}_H с горизонтальной плоскостью в точке Н, и через ψ'_H — азимут, т.е. угол, который горизонтальная составляющая абсолютной скорости образует с направлением на север. Найдем составляющие абсолютной скорости вдоль меридиана, параллели и вертикали в точке Н (см. рис. 11.11), проектируя на эти направления вектор \mathbf{V}_H и его составляющие $\dot{x}''_H, \dot{y}''_H, \dot{z}''_H$:

$$\begin{aligned} V_M &= V_H \cos \theta'_H \cos \psi'_H = -\dot{x}''_H \sin \varphi_{\Gamma, H} \cos(\lambda_H - \lambda_0) - \\ &\quad - \dot{y}''_H \sin \varphi_{\Gamma, H} \sin(\lambda_H - \lambda_0) + \dot{z}''_H \cos \varphi_{\Gamma, H}, \\ V_\Pi &= V_H \cos \theta'_H \sin \psi'_H = -\dot{x}''_H \sin(\lambda_H - \lambda_0) + \dot{y}''_H \cos(\lambda_H - \lambda_0), \\ V_B &= V_H \sin \theta'_H = \dot{x}''_H \cos \varphi_{\Gamma, H} \cos(\lambda_H - \lambda_0) + \\ &\quad + \dot{y}''_H \cos \varphi_{\Gamma, H} \sin(\lambda_H - \lambda_0) + \dot{z}''_H \sin \varphi_{\Gamma, H}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

Отсюда легко находятся V_H , θ'_H и ψ'_H по формулам, аналогичным (11.46):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi'_H &= \frac{V_H}{V_M}, \\ \operatorname{tg} \theta'_H &= \frac{V_H \cos \psi'_H}{V_M} = \frac{V_H \sin \psi'_H}{V_H} = \frac{V_H}{\sqrt{V_M^2 + V_H^2}}, \\ V_H &= \frac{V_B}{\sin \theta'_H} = \frac{\sqrt{V_M^2 + V_H^2}}{\cos \theta'_H} = \sqrt{V_M^2 + V_H^2 + V_B^2}. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Формулы (11.44) – (11.48) определяют начальные условия абсолютного движения ракеты на участке свободного полета.

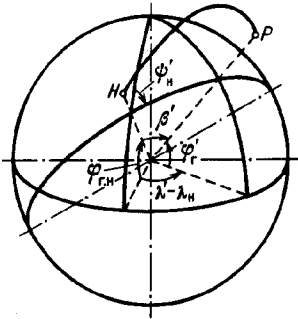


Рис. 11.12. Учет вращения Земли при определении географических координат ЛА

11.3.2. Возврат к относительному движению. Зная географические координаты начальной точки траектории свободного полета $\varphi_{Г.Н}$ и λ_H , азимут ψ'_H абсолютной скорости и центральный угол β' , пройденный ракетой в абсолютном движении, легко найти географические координаты $\varphi'_Г$ и λ' текущей точки P траектории ракеты в предположении, что Земля не вращается (рис. 11.12). Для этого достаточно воспользоваться формулами косинусов и синусов сферической тригонометрии. Имеем

$$\cos(90^\circ - \varphi'_Г) = \cos(90^\circ - \varphi_{Г.Н}) \cos \beta' + \sin(90^\circ - \varphi_{Г.Н}) \sin \beta' \cos \psi'_H$$

или

$$\sin \varphi'_Г = \sin \varphi_{Г.Н} \cos \beta' + \cos \varphi_{Г.Н} \sin \beta' \cos \psi'_H,$$

$$\frac{\sin(\lambda' - \lambda_H)}{\sin \beta'} = \frac{\sin \psi'_H}{\cos \varphi'_Г} \quad \text{или} \quad \sin(\lambda' - \lambda_H) = \frac{\sin \beta' \sin \psi'_H}{\cos \varphi'_Г}.$$

Теперь легко учесть вращение Земли, в результате которого точка с географическими координатами $\varphi'_Г$ и λ' смещается по параллели на угол $\omega_3 t$ (t – время полета ракеты от начальной точки) в сторону вращения Земли, т.е. к востоку. Следовательно, под ракетой (на одном радиусе с ней) будет находиться точка с той же географической широтой $\varphi'_Г = \varphi'_Г$, но с долготой $\lambda = \lambda' - \omega_3 t$. Таким образом, географические координаты движения ракеты относительно вращающейся Земли будут определяться

формулами

$$\sin \varphi_{\Gamma} = \sin \varphi_{\Gamma, \text{H}} \cos \beta' + \cos \varphi_{\Gamma, \text{H}} \sin \beta' \cos \psi'_{\text{H}},$$

$$\sin(\lambda - \lambda_{\text{H}} + \omega_{\text{З}} t) = \frac{\sin \beta' \sin \psi'_{\text{H}}}{\cos \varphi_{\Gamma}}.$$

По географическим координатам начальной и текущей точек легко найти центральный угол β , пройденный ракетой в относительном движении, и угол ψ_{H} — азимут направления на ракету из начальной точки Н, которая к текущему моменту переместилась вместе с Землей и сохранила свои географические координаты:

$$\cos \beta = \sin \varphi_{\Gamma, \text{H}} \sin \varphi_{\Gamma} + \cos \varphi_{\Gamma, \text{H}} \cos \varphi_{\Gamma} \cos(\lambda - \lambda_{\text{H}}),$$

$$\sin \psi_{\text{H}} = \frac{\cos \varphi_{\Gamma} \sin(\lambda - \lambda_{\text{H}})}{\sin \beta}.$$

Азимут абсолютной скорости в точке P определяется формулой

$$\sin \psi' = \frac{\cos \varphi_{\Gamma, \text{H}} \sin \psi'_{\text{H}}}{\cos \varphi_{\Gamma}}.$$

Зная значения V , θ' и ψ' абсолютного движения в точке с географическими координатами φ_{Γ} и λ , по формулам, аналогичным (11.47) и (11.48), можно определить параметры v , θ и ψ относительного движения в этой точке в земной системе координат, принимая во внимание, что

$$v_{\text{M}} = V_{\text{M}}, \quad v_{\text{П}} = V_{\text{П}} - \omega_{\text{З}} r_{\text{P}} \cos \varphi_{\Gamma}, \quad v_{\text{В}} = V_{\text{В}}.$$

Глава 12

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАССЕИВАНИИ

Рассмотрение вопросов рассеивания траекторий ЛА начнем с постановки задачи о рассеивании. В начале главы познакомимся с некоторыми общими понятиями и определениями, являющимися специфическими для этого раздела. Затем опишем основные задачи, с решением которых связаны расчеты рассеивания. Рассмотрим возмущающие факторы как первопричины возникновения отклонения траекторий. В заключение дадим математическую модель возмущенной траектории, которая в дальнейшем будет использована для выяснения связей между параметрами движения ЛА на активном участке траектории и действующими возмущениями.

§ 12.1. Суть проблемы

В главах 4 и 5 рассмотрены силы и моменты, под действием которых происходит полет ЛА, а также приведены уравнения движения, более или менее точно описывающие процесс полета. Если бы эта модель абсолютно точно описывала все процессы, сопровождающие полет, а заложенные в расчет числовые характеристики ЛА и внешних условий также соблюдались бы в точности, то и полет протекал бы точно по рассчитанной траектории. Такую траекторию принято называть *номинальной, невозмущенной* или просто *расчетной*, а движение — *номинальным, невозмущенным* или *расчетным*. Однако в действительности по многим причинам реальное движение всегда отличается от номинального. Номинальная траектория существует лишь как некоторый расчетный эталон, с которым можно сравнивать фактическое движение.

Свойство ЛА отклоняться от заданного движения называется *рассеиванием*. Можно говорить о рассеивании координат траектории в пространстве, рассеивании скорости движения, рассеивании времени полета ЛА до цели, рассеивании времени работы двигателя и т.д. Обычно изучается рассеивание таких характеристик движения, которые являются определяющими в оценке эффективности решения поставленной задачи. Так, для баллистической ракеты наиболее важным является рассеивание координат точки падения головной части, при выведении на орбиту ИСЗ какого-либо объекта чаще всего интересуются рассеиванием периода обращения, в некоторых задачах наибольшее внимание уделяется достижению заданных координат в пространстве в определенный, заранее заданный момент времени, и т.д.

О рассеивании можно говорить только применительно к более или менее крупной серии ракет. Когда же имеют в виду отдельно взятую ракету, то говорят об *отклонении*. Отклонение траектории каждой конкретной ракеты относительно номинальной происходит под воздействием целого ряда не учтенных в расчете траектории факторов, которые принято называть *возмущающими факторами* или просто *возмущениями*, а соответствующие траектории — *возмущенными*. По существу, всякое движение является возмущенным.

Среди возмущающих факторов можно выделить систематические и случайные. *Систематическими* являются возмущения, связанные с неточным знанием средних или номинальных характеристик ракеты (например, аэродинамических), неточным учетом в уравнениях движения внешних условий полета (например, потенциала Земли, средних параметров атмосферы). Систематический характер могут иметь некоторые погрешности измерительных систем, геодезические данные и др. Большая часть возмущений носит случайный характер. *Случайными* возмущениями являются, как правило, отклонения массово-инерционных характеристик, отклонения параметров двигательной установки, отклонения параметров атмосферы, погрешности приборов системы управления и ряд других. Следовательно, отклонение траектории каждой конкретной ракеты относительно номинальной также является случайным. Случайными являются отклонения координат точек падения баллистической ракеты, случайными являются параметры орбиты, на которую выведен объект носителем, и т.д. Совокупность множества случайных отклонений интересующей нас величины и дает представление о рассеивании. Как известно из теории вероятностей, рассеиванию свойственны определенные закономерности, благодаря которым удается выделить наиболее устойчивые его числовые характеристики, такие, как математическое ожидание и дисперсия.

Задачей этой части книги является изучение причин, приводящих к рассеиванию, описание методов расчета рассеивания, анализ способов влияния на характеристики рассеивания и путей его уменьшения.

Подход к исследованию рассеивания может быть различен в зависимости от того, какой информацией и каким временем располагает исследователь для решения поставленной задачи, на каком этапе проектирования и для какой цели нужен результат исследования, и ряда других обстоятельств. Можно выделить два принципиальных подхода: статистический и аналитический.

Статистический подход, как это видно из названия, предусматривает накопление определенного статистического материала для решения задачи. Такой материал может быть получен либо с помощью натурального эксперимента, т.е. при летных испытаниях ракет и носителей, либо путем многократного моделирования процесса полета ЛА, причем этому процессу предписываются определенные предполагаемые свойства в отношении описания характера движения и действующих случайных возмущающих факторов.

Метод определения рассеивания на основании результатов летных испытаний ракет имеет, как и любой другой метод, преимущества и недостатки. Главным преимуществом метода является то, что вместо моделей движения и действующих возмущений здесь используется натуральный процесс без

каких-либо упрощений и условностей. Все нюансы процесса полета, которые мы не очень хорошо понимаем или по каким-либо причинам не в состоянии включить в модель, здесь проявляются в полную меру независимо от наших желаний и возможностей. Но этот метод может быть применен только на самом завершающем этапе отработки и способен зафиксировать только конечный достигнутый результат. Конструктора же начинает интересовать вопрос о рассеивании уже на этапе проектирования ракеты, когда до летных испытаний предстоит пройти еще долгий путь. К недостаткам метода следует отнести также и то, что обычно испытания проводятся на протяжении небольшого промежутка времени в одних и тех же географических и климатических условиях. Это, конечно, сказывается на комплексе возмущающих факторов, хотя, может быть, и не столь кардинально.

Еще одним недостатком экспериментального метода определения рассеивания является малое количество испытаний, на основе которых нужно определить характеристики рассеивания. Если при определении характеристик рассеивания при стрельбе из какого-либо оружия или при бомбометании на количество опытов можно не накладывать больших ограничений, то для ракет и носителей эта проблема становится весьма острой. Чаще всего приходится ограничиться количеством пусков порядка десяти. Надежность получаемого при этом результата оказывается не очень высокой. В § 14.4 будет рассмотрено определение рассеивания по данным летных испытаний.

Другой метод, основанный на статистическом подходе, известен под названием *метода статистических испытаний*, *метода Монте-Карло* или *метода математических стрельб* — все они в равной степени отвечают смысловому значению сути метода. Главные особенности метода описываются в § 14.4, здесь же лишь отметим, что он применяется в основном как поверочный расчетный метод определения рассеивания.

Аналитический подход к определению рассеивания составляет, пожалуй, основу большинства применяемых методов, несмотря на некоторые различия между ними. Поэтому на рассмотрении этого подхода мы остановимся наиболее подробно, тем более, что ряд его фрагментов может использоваться как составная часть метода Монте-Карло.

Поскольку причиной, вызывающей рассеивание, являются возмущающие факторы, первой задачей будет определение состава возмущающих факторов, их классификация и выяснение законов или статистических характеристик их распределения. Эти вопросы мы рассмотрим в § 12.2. Следующая задача заключается в расчете отклонений параметров возмущенной траектории относительно номинальной, т.е. в расчете возмущенной траектории. В частности, наиболее важным является определение отклонений для конца активного участка. Мы рассмотрим несколько возможных способов решения этой задачи, обратив внимание на преимущества и недостатки каждого из них. Это будет сделано в главе 13.

Принципиальным является вопрос о методах окончания активного участка, поскольку от того, как удачно это сделано, зависит судьба дальнейшего полета: насколько близка будет фактическая орбита к расчетной, каков должен быть запас топлива, необходимый для компенсации ошибок выведения, как точно ракета попадет в цель. Вопросу управления выключением двигателя будет посвящена глава 15.

Следующая задача состоит в пересчете полученных для конца активного участка отклонений на конечные результаты полета. В ее постановке возможно большое число вариантов, так как после завершения выведения организация дальнейшего движения подчиняется решению самых разнообразных целевых задач. Одно и то же отклонение какого-либо параметра движения в конце активного участка будет приводить к совершенно различным отклонениям на завершающей части различных траекторий. Приведем несколько примеров. При пуске баллистической ракеты на дальность 12 тыс. км погрешность модуля скорости в конце активного участка в 1 м/с приводит к отклонению координаты точки падения на 10 км. Такая же погрешность при выведении объекта на околокруговую орбиту ИСЗ приводит к отклонению высоты орбиты в антиподной точке на 3,4 км, периода обращения на 2 с, фазового положения спутника на орбите через один виток на 16 км и т.д. Если же после выведения на околокруговую орбиту предстоит дальнейшее выведение объекта на орбиту стационарного спутника Земли с помощью дополнительных импульсов и при этом нет возможности определить и скомпенсировать ошибки предварительной орбиты, то ошибка в 1 м/с при условии точного выполнения всех остальных разгонных маневров приводит к отклонению периода обращения на 145 с, эксцентриситета орбиты на 0,001, географической долготы в точке выведения на $3'$ и т.д. Таким образом, речь идет о вычислении так называемых *баллистических производных*, т.е. производных от некоторых конечных параметров траектории по параметрам движения в конце активного участка. Заметим, что в задаче по пересчету отклонений в конце активного участка в отклонения конечных условий движения расчет баллистических производных не является обязательной частью. Более естественным было бы продолжение расчета траектории после выключения двигателя с теми начальными условиями, которые сформировались в конце активного участка под воздействием возмущений. Однако чаще идут по пути использования баллистических производных, учитывая допустимость такого приема при малых отклонениях и большую экономию в вычислениях.

Рассмотрение некоторых конкретных примеров, иллюстрирующих роль способа выключения двигателя, неизбежно поставит перед нами вопрос о возможностях совершенствования этих способов. Применительно к баллистическим ракетам будут указаны некоторые пути уменьшения рассеивания. По существу, такие исследования приводят нас к синтезу методов управления дальностью полета.

И, наконец, важным является вопрос о расчете суммарных характеристик рассеивания, т.е. вопрос о том, каким образом надо подходить к определению рассеивания, если известны отдельные составляющие.

Существует еще одна проблема, также обусловленная воздействием возмущений: определение предельных возможностей носителя в вероятностном плане. В силу естественного разброса ряда характеристик носителя различные его экземпляры расходуют для выполнения одной и той же задачи разное количество топлива, т.е. имеет место рассеивание остатка топлива. Если каждый экземпляр носителя будет расходовать имеющееся в нем топливо до конца, то это приведет к разбросу предельно достижимых параметров движения (дальности ракеты, энергии орбиты и т.д.). Задача состоит в назначении таких предельных характеристик движения, достиже-

ние которых можно было бы гарантировать с определенной надежностью для каждой ракеты данной серии. Изучению методов проведения таких расчетов посвящена глава 17.

В главе 18 обсуждается проблема выбора формы траектории. Объединение этой задачи с вопросами рассеивания, быть может, носит несколько искусственный характер, так как здесь не рассматриваются ни какие-либо новые свойства рассеивания, ни методы его расчета. Однако рассеивание в значительной степени определяется именно формой выбранной траектории, и при проектировании траектории выведения одним из главных критериев ее качества является ожидаемое рассеивание.

Намеченные к изучению задачи являются основными по исследованию рассеивания, однако ими ни в коей мере не исчерпываются все аспекты проблемы. Остаются в стороне вопросы точности определения траекторий или орбит с помощью автономных бортовых систем или наземных измерительных средств, вопросы точности прогноза орбиты, точности ее коррекции и др. Они выходят за рамки нашей книги, и интересующимся этой стороной дела мы рекомендуем работы [4, 35].

При изложении материала этой части мы воспользуемся некоторыми матрично-векторными преобразованиями, полагая, что основные сведения из курса высшей алгебры читателю известны, например, из [28].

§ 12.2. Возмущающие факторы

По характеру воздействия возмущающие факторы, как уже указывалось, можно разделить на систематические и случайные. Как те, так и другие отклоняют траекторию от расчетной, и в отношении методов расчета их влияния на траекторию никакого различия можно не делать. Систематические возмущения имеют одну и ту же величину при полете любой ракеты данной серии. Следовательно, их влияние на траекторию (если полет совершается по одной и той же расчетной траектории) повторяется от полета к полету. Несмотря на систематический характер этих возмущений, в большинстве случаев их состав и числовые значения остаются неизвестными до определенных этапов разработки. О наличии систематических возмущений легче всего судить по фактическим отклонениям среднеопытной траектории от расчетной; более конкретно — по отклонению математического ожидания какой-либо характеристики траектории относительно расчетного значения этой же характеристики, однако при этом никаких определенных выводов относительно величины и природы действующих возмущений сделать нельзя. Это и понятно, так как представляется вполне очевидным, что разноименным возмущениям можно придать такие числовые значения, которые приведут к равным отклонениям одного и того же траекторного параметра. Например, некоторая систематическая ошибка в расчете процесса отделения головной части от носителя может привести к такому же отклонению точки падения, как и ошибка в геодезической привязке координат точек старта и цели.

Понятно и то, что систематические возмущения, приводя к систематическим отклонениям траектории, на сами характеристики ее разброса относительно средней фактической траектории влияния почти не оказывают. Пользуясь артиллерийской терминологией, можно говорить, что системати-

ческие возмущения ухудшают точность попадания, увеличивают промах, но не увеличивают рассеивание. Тем не менее изучение причин возникновения систематических возмущений и последствий, к которым они приводят, включается в круг вопросов, рассматриваемых при обсуждении проблемы рассеивания.

Состав систематических возмущений принципиально ничем не отличается от состава случайных возмущений, так как в каждой неточности может содержаться как некоторая постоянная часть, обусловленная неточностью нашего знания в силу самых различных причин, так и случайная часть, обусловленная либо чисто технологическими погрешностями изготовления и эксплуатации частей, агрегатов и систем ракетного комплекса, либо естественными флуктуациями процессов и условий, сопровождающих полет ракеты.

Одна из первых задач исследователя заключается в анализе возмущающих факторов с привлечением имеющейся статистики по уже отработанным подобным ракетам, прошедшим летные испытания, статистических данных по наземным лабораторным, стендовым и другим испытаниям основных систем и агрегатов и в выявлении законов и числовых характеристик распределения всех возмущений. Надо постараться отделить систематические возмущения от случайных, а перечень последних составить так, чтобы включенные в него возмущения оказались бы независимыми.

В заключение приведем перечень возмущающих факторов, объединив их в несколько групп, что, конечно, является в какой-то степени условным. В иных источниках можно найти и другой подход, но это не отражается на необходимости иметь такой перечень, чтобы в зависимости от условий конкретного исследования решать вопрос о том, какие из возмущающих факторов следует учесть в первую очередь, а какие оставить до более детального анализа.

Ниже приводится перечень возмущений, действующих на активном и свободном участках траектории. При этом, разумеется, отклонения параметров движения в конце активного участка включены как возмущения начальных условий свободного участка. Кроме того, к возмущениям свободного участка отнесены ошибки процесса спада тяги при выключении двигателей (так называемого *импульса последействия двигателей*) и погрешности, возникающие при отделении головной части или полезного груза от носителя. Для многоступенчатого носителя аналогичные погрешности должны учитываться, как возмущения начальных условий движения исследуемой ступени. Понятно, что процессы, связанные с разделением ступеней, более сложны, нежели отделение полезного груза, но и в этом случае нужно предусмотреть возможность определения возмущений, с которыми начинается полет последующей ступени.

Возмущающие факторы, действующие на активном участке траектории.

Массовые характеристики:

- отклонение сухой массы (или массы конструкции) каждого блока носителя в отдельности;
- отклонение массы полезного груза;
- отклонение массы заправляемого топлива каждого блока в отдельности и покомпонентно (окислителя, горючего, других компонент) за счет

погрешности объемной тарировки баков, погрешности измерительных систем в процессе заправки, разброса удельного веса компонент топлива.

Характеристики двигательной установки:

- отклонение удельной тяги каждого двигателя;
- отклонение секундного расхода топлива каждого двигателя;
- отклонение соотношения расходов компонент каждого двигателя;
- в случае наличия систем регулирования расхода топлива и соотношения расходоуемых компонент — погрешности этих систем;
- отклонение импульса последствия тяги при выключении двигательной установки;
- отклонение достартового количества топлива (с момента запуска двигательной установки до момента старта).

Аэродинамические силы:

- отклонение аэродинамических коэффициентов из-за погрешностей изготовления ЛА;
- отклонение плотности и давления атмосферы;
- ветровые возмущения.

Система управления:

— погрешность реализации заданной программы угла тангажа за счет погрешности начальной выставки осей гиросприборов в полете, зон нечувствительности при измерении рассогласования углов, погрешности задания программы;

— погрешности регулирования движения центра масс за счет погрешности измерительных систем, погрешности задания программных значений регулируемой величины, статической составляющей рассогласования величины регулируемого параметра;

+ погрешности приборов (чаще всего интегратора или блока интеграторов), выдающих команду на выключение двигательной установки.

Система отделения полезного груза:

- погрешность величины и направления дополнительной скорости, сообщаемой грузу при отделении от носителя;
- отклонение начальных условий движения полезного груза вокруг собственного центра масс.

Возмущающие факторы, действующие на участке свободного полета.

Массово-инерционные характеристики:

- отклонение начальной массы;
- отклонение массы в процессе обгара;
- отклонение положения центра масс;
- отклонение центральных главных моментов инерций;
- при наличии центробежных моментов инерций — их отклонение.

Аэродинамические характеристики:

— отклонение коэффициентов силы лобового сопротивления и подъемной силы из-за погрешности формы при изготовлении, изменения формы в процессе обгара;

- разброс коэффициентов аэродинамического стабилизирующего и демпфирующего моментов;
- разброс коэффициента центра давления;
- отклонение плотности атмосферы;
- ветровые возмущения.

*Начальные условия*¹⁾):

– рассеивание кинематических параметров движения центра масс за счет разброса параметров движения в конце активного участка (задается ковариационной матрицей разбросов), отклонение импульса последствием тяги, погрешности величины и направления дополнительной скорости, сообщаемой полезному грузу при отделении от носителя;

– разброс начальных условий движения полезного груза вокруг собственного центра масс.

Погрешности расчета, возникающие главным образом из-за принятой модели потенциала и формы Земли.

§ 12.3. Модель возмущенного движения летательного аппарата на активном участке траектории

Основой любого метода расчета рассеивания являются уравнения, описывающие возмущенное движение ЛА. Модель возмущенного движения можно построить на базе уравнений различной полноты и точности. В главе 5 мы получили несколько систем таких уравнений, и все они годятся для решения поставленной задачи. Однако при выборе той или другой системы необходимо иметь в виду следующие два обстоятельства.

Во-первых, система должна быть приведена к форме, в явном виде содержащей все параметры, возмущающее воздействие которых необходимо учесть. Во-вторых, система должна быть по возможности простой, чтобы избежать неоправданных затрат при подготовке к расчету и в процессе вычислений. Не надо думать, что расчет рассеивания при использовании более простой модели обязательно сопряжен с существенным искажением конечного результата. Не приводя строгих доказательств в пользу высказанного утверждения, попробуем пояснить эту мысль с помощью простых рассуждений. Известно, например, что неучет нецентральности поля и несферичности формы Земли при расчете траектории ракеты может привести к ошибке координат точки падения до 100 км. Поэтому в уравнениях движения, предназначенных для расчета точных (падающих) траекторий, потенциал и форма Земли должны описываться в достаточно полном виде. Это, конечно, усложняет правые части уравнений и увеличивает время, затрачиваемое на расчет.

Нужно ли такое же полное описание потенциала и формы сохранить в уравнениях, предназначенных для расчета рассеивания? Есть основания полагать, что главные возмущающие факторы (например, отклонение удельной тяги) приведут к отклонению координат точки падения почти на одинаковые величины независимо от того, происходит ли движение в центральном поле сил или в нецентральном, имеет Земля сферическую форму или сплюснутую, поскольку отклонения относительно номинальной траектории малы. Если с этим можно согласиться, то для расчета рассеивания можно использовать простые модели потенциала и формы Земли. Так же обстоит дело и в отношении некоторых других факторов, усложняющих уравнения движения.

¹⁾ Разбросы за счет импульса последствием тяги и процесса отделения включены в число возмущений как на активном, так и на свободном участке, так как их относят иногда к одному участку, иногда к другому.

Не приводя других доводов в пользу более простых уравнений, примем, что в основу дальнейших исследований можно положить следующую систему, полученную в § 5.3 (это не исключает, что в необходимых случаях можно воспользоваться и более сложной системой уравнений):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{P-X}{m} - g \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{v} \left[\frac{\varphi - \theta}{m} (P + c_y' q S) - g \cos \theta \right], \\ \frac{dy}{dt} &= v \sin \theta, \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \theta, \quad \varphi = \varphi_{\text{пр}}. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Последнее уравнение показывает, что ракета управляется по углу тангажа и ее продольная ось принимает в каждый момент такое положение, которое задается программным механизмом.

В системе (12.1) выделим явно те параметры, влияние которых на полет ракеты мы хотим исследовать. При этом будем считать, что все исследуемые возмущения могут изменять от ракеты к ракете свои величины, но на протяжении данного активного участка траектории сохраняют постоянные значения. Такое условие, казалось бы, сужает возможности нашего исследования, так как не позволяет проанализировать влияние факторов, переменных в течение полета и задаваемых в виде функций. Однако известно, что в этом случае задачу можно свести к уже рассмотренной, если случайную функцию представить в виде семейства, зависящего от нескольких параметров (так, как это делается в теории случайных процессов), и далее с этими параметрами можно обращаться как со случайными числами.

Согласно (3.46), (4.10) и (6.24)

$$P = \dot{m} u' - S_a p, \quad (12.2)$$

$$X = c_x \frac{\rho v^2}{2} S, \quad (12.3)$$

$$m = m_0 - \dot{m} t \quad (12.4)$$

(здесь принято, что для данной траектории $\dot{m} = \text{const}$, причем это значение может быть и возмущенным.)

Чтобы выделить параметры, от отклонения которых зависит отклонение тяги, запишем формулу (12.2) в виде

$$P = g_0 \dot{m} \frac{u'}{g_0} - S_a p = G P_{\text{уд.п}} - S_a p_0 \frac{p}{p_0}.$$

Здесь как возмущающие факторы рассматриваются отклонения G , $P_{\text{уд.п}}$ и $S_a p_0$. В число возмущений можно было бы включить и отклонение распределения p/p_0 по высоте, что не должно вызвать никаких принципиальных трудностей.

Для исследования возможных отклонений силы лобового сопротивления введем в формулу (12.3) коэффициент формы i :

$$X = c_x \frac{\rho v^2}{2} S = i c_x^{\text{эт}} \frac{\rho v^2}{2} S = \frac{i \rho_0 S}{2} c_x^{\text{эт}} \frac{\rho}{\rho_0} v^2,$$

где $i = \frac{c_x}{c_x^{\text{эт}}}$, как это определено в § 7.2.

В качестве возмущения можно рассматривать отклонения либо постоянного коэффициента $\frac{i \rho_0 S}{2}$, либо только величины i .

Выражение (12.4) запишем в виде

$$m = \frac{1}{g_0} (G_0 - \dot{G} t).$$

Текущая масса будет иметь отклонения от расчетного значения за счет погрешности начального веса ракеты G_0 и секундного расхода \dot{G} .

Наконец, чтобы учесть погрешности задания программы угла тангажа, последнее уравнение системы (12.1) представим в виде

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{пр}}(t) + \Delta\varphi + \Delta\dot{\varphi}t,$$

где $\varphi_{\text{пр}}(t)$ — программное невозмущенное значение угла тангажа в текущий момент времени.

Член $\Delta\varphi$ представляет собой некоторое постоянное отклонение угла тангажа от программного (например, за счет ошибки начальной выставки осей гиросплатформы), а $\Delta\dot{\varphi}$ — скорость равномерного ухода этого угла от расчетного закона изменения. Номинальные значения $\Delta\varphi$ и $\Delta\dot{\varphi}$ равны нулю.

Таким образом, в нашей модели мы имеем возможность исследовать влияние на траекторию малых отклонений следующих семи параметров, которым присвоим обозначения λ_n :

$$\lambda_1 = G_0 \quad \text{— стартовый вес;}$$

$$\lambda_2 = \dot{G} \quad \text{— секунднй расход;}$$

$$\lambda_3 = P_{\text{уд.п}} \quad \text{— удельная тяга в пустоте;}$$

$$\lambda_4 = \frac{i \rho_0 S}{2} \quad \text{— коэффициент в выражении для силы лобового сопротивления;}$$

$$\lambda_5 = S_a p_0 \quad \text{— высотная добавка к тяге;}$$

$$\lambda_6, \lambda_7 \quad \text{— погрешности задания программы угла тангажа.}$$

Заметим, что указанными семью параметрами отнюдь не исчерпывается перечень возможных факторов, которые оказывают влияние на полет ракеты. Например, ничего не сказано о влиянии ветра, о так называемых моментно-центровочных характеристиках ракеты и т.д. Разумеется, при

необходимости исследователь должен суметь включить все интересующие его возмущающие параметры в явном виде в математическую модель возмущенной траектории. Так, при желании учесть влияние продольного ветра необходимо, помимо вычисления скорости в стартовой системе координат, вычислить скорость ракеты относительно воздушного потока и определить аэродинамические силы при этой скорости. Угол атаки также необходимо определять относительно воздушного потока.

Однако мы проиллюстрируем расчет на примере только семи выбранных нами возмущений. С учетом введенных обозначений систему (12.1) запишем в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = g_0 \frac{\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_5 \frac{p}{p_0} - \lambda_4 c_x^{\gamma T} \frac{p}{\rho_0} v^2}{\lambda_1 - \lambda_2 t} - g \sin \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{v} \left[g_0 \frac{\varphi_{\text{нп}}(t) + \lambda_6 + \lambda_7 t - \theta}{\lambda_1 - \lambda_2 t} (\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_5 \frac{p}{p_0} + c_y' q S) - g \cos \theta \right], \quad (12.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \theta.$$

Если в системе (12.5) положить λ_n ($n = 1, 2, \dots, 7$) равными их номинальным значениям, то эта система будет описывать невозмущенное движение ракеты. Придавая λ_n значения, отличные от номинальных, будем получать возмущенные траектории.

Полученная система может быть использована для решения различных задач. Если каждый раз задавать приращение какому-либо одному параметру λ_n , то в результате можно определить влияние данного параметра на траекторию, в том числе, например, на кинематические параметры траектории в конце активного участка.

При расчете такой возмущенной траектории интегрирование можно вести до некоторого заданного момента времени — тогда мы получим изохронные вариации. Можно одновременно с расчетом траектории моделировать работу прибора, управляющего выключением двигателя, добавив к системе (12.5) дополнительное уравнение. Тогда можно получить данные, характеризующие влияние соответствующего возмущающего фактора на рассеивание. Если задать возмущения одновременно целой группе параметров λ_n , то в результате интегрирования системы (12.5) получим какую-то возмущенную траекторию, отвечающую конкретной реализации при данной совокупности возмущений. Вообще говоря, систему (12.5) можно использовать не только для исследований, связанных с рассеиванием, но и в проектных задачах, когда важно знать "цену" каждого параметра в приведении к какой-либо характерной величине — к предельной дальности, весу полезного груза, начальному весу ракеты и т.д.

Во всех этих случаях предполагается применение методов прямого решения системы дифференциальных уравнений движения. Однако это не всегда является самым экономным путем. В следующей главе будут рассмотрены некоторые методы, с помощью которых удастся сократить трудоемкость расчетов по определению разбросов кинематических параметров в конце активного участка.

Движение ЛА, которое мы назвали возмущенным, предполагается происходящим под воздействием малых возмущений. Малыми обычно называют такие возмущения, в пределах которых между интересующими нас результатами (в данном случае отклонениями параметров движения ЛА) и действующими возмущениями существуют зависимости, близкие к линейным. В подобных случаях имеется возможность заменить систему уравнений возмущенного движения системой уравнений в отклонениях относительно опорной (невозмущенной) траектории, причем уравнения этой системы линейны относительно искомого отклонения. Такой прием, называемый *линеаризацией*, приводит к системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эта система, как и исходная система уравнений возмущенного движения (12.5), не допускает получения аналитического решения, но тем не менее использование ее имеет ряд преимуществ. Во-первых, для интегрирования линейных систем могут быть применены способы, принципиально невозможные для нелинейных систем. Во-вторых, чаще всего конечной целью расчетов является не просто оценка отклонений кинематических параметров конца активного участка, а получение ковариационной матрицы этих отклонений, для чего требуется многократное повторение процесса интегрирования (порядка сотен или тысяч раз) при различных случайных сочетаниях возмущений. При интегрировании линеаризованной системы дифференциальных уравнений достигается значительная экономия машинного времени благодаря более простому их виду по сравнению с основной системой уравнений.

В этой главе будут рассмотрены два возможных метода приведения уравнений возмущенного движения (12.5) к линеаризованным уравнениям: к уравнениям в отклонениях и к уравнениям в вариациях. Затем будет показано, как можно резко сократить объем расчетов при большом количестве возмущающих факторов с помощью использования свойств сопряженных систем дифференциальных уравнений. В заключение будет рассмотрено применение конечно-разностного метода для определения влияния малых возмущений на параметры движения ЛА, основанного на интегрировании уравнений возмущенного движения без их линеаризации.

§ 13.1. Дифференциальные уравнения в отклонениях

Обозначим правые части уравнений системы (12.5) через f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f_1(t, v, \theta, y, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), \\ \frac{d\theta}{dt} &= f_2(t, v, \theta, y, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7), \\ \frac{dy}{dt} &= f_3(v, \theta), \quad \frac{dx}{dt} = f_4(v, \theta). \end{aligned} \quad (13.1)$$

Следуя методу линеаризации, представим параметры движения ракеты $v(t), \theta(t), y(t), x(t)$ в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} v(t) &= v^*(t) + \Delta v(t), \quad \theta(t) = \theta^*(t) + \Delta \theta(t), \\ y(t) &= y^*(t) + \Delta y(t), \quad x(t) = x^*(t) + \Delta x(t), \end{aligned} \quad (13.2)$$

где $v^*(t), \theta^*(t), y^*(t), x^*(t)$ — параметры невозмущенного движения по опорной (номинальной) траектории; $\Delta v(t), \Delta \theta(t), \Delta y(t), \Delta x(t)$ — отклонения параметров движения возмущенной траектории от их значений на опорной траектории, вызванные действующими возмущающими факторами.

Пользуясь условием малости отклонений, правые части уравнений системы (13.1) разложим в ряды Тейлора в окрестности параметров движения по опорной траектории и сохраним в этих разложениях только линейные члены:

$$\begin{aligned} f_1(t, v, \theta, y, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) &= \\ &= f_1(t, v^*, \theta^*, y^*, x^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_5^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \right)^* \Delta v + \\ &+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} \right)^* \Delta \lambda_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_5} \right)^* \Delta \lambda_5, \\ f_2(t, v, \theta, y, x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7) &= \\ &= f_2(t, v^*, \theta^*, y^*, x^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_7^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v} \right)^* \Delta v + \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} \right)^* \Delta \lambda_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_7} \right)^* \Delta \lambda_7, \\ f_3(v, \theta) &= f_3(v^*, \theta^*) + \left(\frac{\partial f_3}{\partial v} \right)^* \Delta v + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta, \\ f_4(v, \theta) &= f_4(v^*, \theta^*) + \left(\frac{\partial f_4}{\partial v} \right)^* \Delta v + \left(\frac{\partial f_4}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Здесь $\lambda_1^*, \dots, \lambda_7^*$ — невозмущенные значения параметров ракеты, а $\left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \right)^*, \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right)^*, \dots, \left(\frac{\partial f_4}{\partial \theta} \right)^*$ — частные производные соответствующих функций, взятые для невозмущенной траектории. Продифференцируем по времени соотношения (13.2) и подставим их в левые части уравнений системы (13.1), а в правые части подставим соотношения (13.3). Из полученных таким образом уравнений вычтем соответственно уравнения системы (13.1), записав их для невозмущенного движения. В результате получим систему дифференциальных уравнений поправок или уравнения в отклонениях

$$\frac{d}{dt} (\Delta v) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \right)^* \Delta v + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^* \Delta y + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^* \Delta x +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} \right)^* \Delta \lambda_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} \right)^* \Delta \lambda_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} \right)^* \Delta \lambda_3 + \\
& + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_4} \right)^* \Delta \lambda_4 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_5} \right)^* \Delta \lambda_5, \\
\frac{d}{dt} (\Delta \theta) & = \left(\frac{\partial f_2}{\partial v} \right)^* \Delta v + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^* \Delta y + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^* \Delta x + \\
& + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} \right)^* \Delta \lambda_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} \right)^* \Delta \lambda_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3} \right)^* \Delta \lambda_3 + \\
& + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_5} \right)^* \Delta \lambda_5 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_6} \right)^* \Delta \lambda_6 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_7} \right)^* \Delta \lambda_7, \\
\frac{d}{dt} (\Delta y) & = \left(\frac{\partial f_3}{\partial v} \right)^* \Delta v + \left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta, \\
\frac{d}{dt} (\Delta x) & = \left(\frac{\partial f_4}{\partial v} \right)^* \Delta v + \left(\frac{\partial f_4}{\partial \theta} \right)^* \Delta \theta.
\end{aligned} \tag{13.4}$$

Для удобства записи введем обозначения с двойной индексацией

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f_i}{\partial v} \right)^* & = \alpha_{i1}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial \theta} \right)^* = \alpha_{i2}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^* = \alpha_{i3}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^* = \alpha_{i4}, \\
\left(\frac{\partial f_i}{\partial \lambda_n} \right)^* & = \beta_{in} \quad (i = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots, 7).
\end{aligned}$$

Теперь систему (13.4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\Delta v) & = \alpha_{11} \Delta v + \alpha_{12} \Delta \theta + \alpha_{13} \Delta y + \alpha_{14} \Delta x + \\
& + \beta_{11} \Delta \lambda_1 + \beta_{12} \Delta \lambda_2 + \beta_{13} \Delta \lambda_3 + \beta_{14} \Delta \lambda_4 + \beta_{15} \Delta \lambda_5, \\
\frac{d}{dt} (\Delta \theta) & = \alpha_{21} \Delta v + \alpha_{22} \Delta \theta + \alpha_{23} \Delta y + \alpha_{24} \Delta x + \\
& + \beta_{21} \Delta \lambda_1 + \beta_{22} \Delta \lambda_2 + \beta_{23} \Delta \lambda_3 + \beta_{25} \Delta \lambda_5 + \beta_{26} \Delta \lambda_6 + \beta_{27} \Delta \lambda_7, \\
\frac{d}{dt} (\Delta y) & = \alpha_{31} \Delta v + \alpha_{32} \Delta \theta, \\
\frac{d}{dt} (\Delta x) & = \alpha_{41} \Delta v + \alpha_{42} \Delta \theta.
\end{aligned} \tag{13.5}$$

Можно воспользоваться и более лаконичной и удобной формой матричного представления системы (13.5):

$$\begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{x} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \theta \\ \Delta y \\ \Delta x \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2 \\ \Delta \lambda_3 \\ \Delta \lambda_4 \\ \Delta \lambda_5 \\ \Delta \lambda_6 \\ \Delta \lambda_7 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta \theta \\ \Delta y \\ \Delta x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad (13.6)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} & \beta_{17} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & \beta_{25} & \beta_{26} & \beta_{27} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \beta_{35} & \beta_{36} & \beta_{37} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} & \beta_{45} & \beta_{46} & \beta_{47} \end{bmatrix}.$$

Введя обозначения

$$\Delta X = (\Delta v, \Delta \theta, \Delta y, \Delta x)^T,$$

$$\Delta \vec{\lambda} = (\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \dots, \Delta \lambda_7)^T,$$

запишем (13.6) в виде векторного равенства

$$\Delta \dot{X} = A \Delta X + B \Delta \vec{\lambda}.$$

Матрицы A и B суть матрицы коэффициентов правых частей уравнений (13.5). В рассматриваемом случае, как легко видеть,

$$\alpha_{33} = \alpha_{34} = \alpha_{43} = \alpha_{44} = 0,$$

$$\beta_{16} = \beta_{17} = \beta_{24} = \beta_{3k} = \beta_{4k} = 0,$$

и матрицы A и B принимают вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & \beta_{25} & \beta_{26} & \beta_{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нахождение коэффициентов уравнений (13.5), представляющих собой частные производные типа $df_i/\partial \varphi_j$ или $df_i/\partial \lambda_n$, принципиальных трудностей не составляет, хотя требует проведения некоторых дополнительных

выкладок (через φ_j обозначены параметры движения v, θ, y, x). Ниже приводятся выражения для их вычисления, при написании которых принималось

$$c_x = c_x(M, y), \quad M = \frac{v}{a}, \quad a = a_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}, \quad T = T(y),$$

$$p = \rho RT, \quad \frac{dp}{dy} = -g\rho, \quad g = \frac{\mu}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + (R + y)^2.$$

Итак, имеем:

$$\alpha_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{S\rho v}{m} \left(c_x + \frac{M}{2} \frac{\partial c_x}{\partial M} \right),$$

$$\alpha_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -g \cos \theta,$$

$$\alpha_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\rho}{m} \left\{ S_a g + \frac{1}{2} S v^2 \left[c_x \frac{g}{RT} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(c_x + \frac{M}{2} \frac{\partial c_x}{\partial M} \right) - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right] \right\} + \frac{2\mu}{r^3} \sin \theta,$$

$$\alpha_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{2\mu}{r^4} x \sin \theta,$$

$$\alpha_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial v} = -\frac{1}{v^2} \left[\frac{\varphi_{\text{нп}} - \theta}{m} (P + c'_{y_1} qS) - g \cos \theta \right] +$$

$$+ \frac{\varphi_{\text{нп}} - \theta}{vm} \left(\frac{\partial c'_{y_1}}{\partial M} \frac{1}{a} qS + c'_{y_1} \rho v S \right),$$

$$\alpha_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{1}{v} \left[-\frac{1}{m} (P + c'_{y_1} qS) + g \sin \theta \right],$$

$$\alpha_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{1}{v} \left\{ \frac{\varphi_{\text{нп}} - \theta}{m} \left[S_a g \rho - c'_{y_1} qS \frac{1}{T} \left(\frac{g}{R} + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + \frac{2\mu}{r^3} \cos \theta \right\},$$

$$\alpha_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{2\mu}{r^4} \frac{x \cos \theta}{v}, \quad \alpha_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial v} = \sin \theta,$$

$$\alpha_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = v \cos \theta, \quad \alpha_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial v} = \cos \theta, \quad \alpha_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial \theta} = -v \sin \theta;$$

$$\beta_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} = -\frac{P - X}{g_0 m^2}, \quad \beta_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} = \frac{P_{y \text{ и } n}}{m} + \frac{t}{g_0 m^2} (P - X).$$

(13.7)

$$\begin{aligned}
\beta_{13} &= \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_3} = \frac{\dot{G}}{m}, \\
\beta_{14} &= \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_4} = -\frac{2X}{\rho_0 S m}, \quad \beta_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_5} = -\frac{1}{m} \frac{p}{\rho_0}, \\
\beta_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = -\frac{\varphi_{\text{пр}} - \theta}{v g_0 m^2} (P + c'_{y_1} q S), \\
\beta_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{v} \frac{\varphi_{\text{пр}} - \theta}{m} \left[\frac{t}{m g_0^2} (P + c'_{y_1} q S) + P_{\text{уд.п}} \right], \\
\beta_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_3} = \frac{\varphi_{\text{пр}} - \theta}{v} \frac{\dot{G}}{m}, \quad \beta_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_5} = -\frac{\varphi_{\text{пр}} - \theta}{v m} \frac{p}{\rho_0}, \\
\beta_{26} &= \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_6} = \frac{1}{v m} (P + c'_{y_1} q S), \quad \beta_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_7} = \frac{t}{v m} (P + c'_{y_1} q S).
\end{aligned} \tag{13.8}$$

Для интегрирования полученной системы уравнений в отклонениях коэффициенты α_{ij} и β_{ik} должны быть вычислены однажды для опорной траектории, т.е. при $v(t) = v^*(t)$, $\theta(t) = \theta^*(t)$, $y(t) = y^*(t)$, $x(t) = x^*(t)$. Вычисленные значения коэффициентов должны быть запомнены. При составлении программы для расчета рекомендуется вычисление коэффициентов проводить параллельно с расчетом номинальной траектории, когда на каждом шаге интегрирования все данные "под руками". Запомнить коэффициенты можно на каждом шаге интегрирования, с тем чтобы в дальнейшем интегрирование уравнений в отклонениях вести с тем же шагом, используя запомненные значения непосредственно. Можно запоминание проводить для каких-нибудь узловых точек траектории, количество которых может быть много меньше, чем количество шагов интегрирования. Затем при интегрировании уравнений в отклонениях определять значения коэффициентов для нужных моментов времени с помощью интерполяционных формул. Удобство применения того или другого способа зависит от конкретного вида системы дифференциальных уравнений, применяемого метода численного интегрирования, характера изменения коэффициентов, возможностей ЭВМ, на которой производится расчет, и ряда других соображений.

Для интегрирования полученной системы необходимо задать и начальные условия. Поскольку никакие изменения параметров λ_n не могут повлиять на начальные значения функций v, θ, y, x , то начальными условиями для интегрирования будут $\Delta v = \Delta \theta = \Delta y = \Delta x = 0$ при $t = 0$. Что касается вектора $\Delta \vec{\lambda} = (\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \dots, \Delta \lambda_7)^T$, то его задание зависит от характера решаемой задачи. Можно задачу решать при вполне определенных детерминированных значениях параметров λ_n . В частном случае все значения $\Delta \lambda_n$, кроме одного, могут равняться нулю. Тогда будет решаться задача по определению влияния только данного параметра. Может решаться задача в стохастической постановке, при которой вектор возмущений $\Delta \vec{\lambda}$ должен задаваться случайным образом с учетом известных характеристик рас-

пределения его компонент. Многократно проведя такие расчеты, будем иметь набор (или выборку) векторов $\Delta X = (\Delta v, \Delta \theta, \Delta y, \Delta x)^T$ в конце активного участка. Обработав эту информацию, получим ковариационную матрицу отклонений вектора кинематических параметров. В зависимости от решаемой задачи эту матрицу в дальнейшем можно использовать для определения рассеивания точек падения ракеты, рассеивания параметров орбиты ИСЗ и рассеивания начальных условий движения. если предстоит старт с орбиты ИСЗ.

Заметим, что на каждой из возмущенных траекторий полезно вычислять не только кинематические параметры движения, но и величины, контролируемые автоматом управления дальностью или выключением двигателя. Фиксируя момент срабатывания автомата выключения двигателя на каждой возмущенной траектории и обрабатывая полученные результаты, можно установить характеристики рассеивания и ряда других величин, например времени выключения двигателя, количества остатков компонент топлива в баках, параметров движения отделившихся ступеней и др. В заключение отметим, что уравнения в отклонениях дают выигрыш в тех случаях, когда приходится иметь дело с многократным повторением расчетов для различных векторов возмущений $\Delta \vec{X}$.

В § 13.3 будет показан прием, позволяющий в некоторых случаях существенно сократить количество вычислений с помощью предварительного получения решения сопряженной системы уравнений.

§ 13.2. Уравнения в вариациях

Рассмотрим еще один способ определения отклонений кинематических параметров в конце активного участка. Система уравнений движения (13.1) при начальных условиях

$$t = 0, \quad v = 0, \quad \theta = \pi/2, \quad y = 0, \quad x = 0$$

имеет решение

$$\begin{aligned} v &= \varphi_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7), & \theta &= \varphi_2(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7), \\ y &= \varphi_3(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7), & x &= \varphi_4(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7), \end{aligned}$$

т.е. параметры движения ракеты зависят не только от времени полета, но и от параметров λ_n ($n = 1, 2, \dots, 7$).

Если параметры λ_n равны своим номинальным значениям и автомат, управляющий выключением двигателя, работает без ошибок, то в момент выключения двигателя, совпадающий с расчетным, кинематические параметры v, θ, y, x будут равны своим номинальным значениям. Если же параметры λ_n получают возмущения $\Delta \lambda_n$, то и кинематические параметры, так же как и время выключения двигателя, отклонятся от своих номинальных значений на некоторые величины $\Delta v_k, \Delta \theta_k, \Delta y_k, \Delta x_k, \Delta t_k$. Независимо от того, каким способом производилось выключение двигателя, для отклонений параметров движения будут справедливы следующие выражения при условии малости Δt_k :

$$\begin{aligned} \Delta v_k &= \Delta v|_{t=t_k} + \dot{v}_k \Delta t_k, & \Delta \theta_k &= \Delta \theta|_{t=t_k} + \dot{\theta}_k \Delta t_k, \\ \Delta y_k &= \Delta y|_{t=t_k} + \dot{y}_k \Delta t_k, & \Delta x_k &= \Delta x|_{t=t_k} + \dot{x}_k \Delta t_k. \end{aligned} \tag{13.9}$$

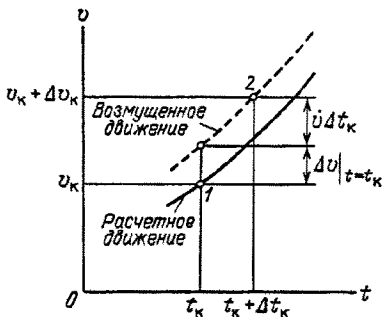


Рис. 13.1. Определение малых отклоненных параметров движения в момент выключения двигателя

На рис. 13.1 сплошной линией показана расчетная зависимость $v(t)$ для невозмущенной траектории; точка 1 – расчетная точка выключения двигателя, которой соответствуют расчетное время t_k и расчетная скорость v_k ; штриховой линией показано изменение фактической зависимости $v(t)$ на возмущенной траектории, на которой (в силу совокупности ряда причин) выключение двигателя произошло в момент $t_k + \Delta t_k$ при скорости $v_k + \Delta v_k$. Отклонение скорости Δv_k можно представить состоящим из двух составляющих: отклонения на величину $\Delta v|_{t=t_k}$ в расчетный момент времени выключения двигателя и отклонения на величину $\dot{v}\Delta t_k$ за счет смещения времени выключения двигателя (с точностью до линейных членов относительно Δt_k). Аналогично в (13.9) записаны и отклонения $\Delta\theta$, Δy , Δx . Заметим, что во всех четырех зависимостях Δt_k имеет одно и то же значение на рассматриваемой конкретной траектории. Таким образом, для определения отклонений параметров движения в момент выключения двигателя необходимо, во-первых, рассчитать отклонения $\Delta v|_{t=t_k}$, $\Delta\theta|_{t=t_k}$, $\Delta y|_{t=t_k}$, $\Delta x|_{t=t_k}$ и, во-вторых, знать Δt_k . Определим Δt_k мы займемся в главе 15, когда будем рассматривать способы выключения двигателя, а сейчас перейдем к расчету отклонений параметров движения в текущие моменты времени. Эти отклонения являются функциями возмущений и каждому возмущению соответствует четверка отклонений v, θ, y, x (если не учитывать бокового движения) или шестерка отклонений (включая v_z и z).

С точностью до линейных величин отклонения $\Delta v|_{t=t_k}$, $\Delta\theta|_{t=t_k}$, $\Delta y|_{t=t_k}$, $\Delta x|_{t=t_k}$, входящие в (13.9), можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} \Delta v|_{t=t_k} &= \sum_n \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_n} \right|_{t=t_k} \Delta \lambda_n, \\ \Delta \theta|_{t=t_k} &= \sum_n \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_n} \right|_{t=t_k} \Delta \lambda_n, \\ \Delta y|_{t=t_k} &= \sum_n \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_n} \right|_{t=t_k} \Delta \lambda_n, \\ \Delta x|_{t=t_k} &= \sum_n \left. \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_n} \right|_{t=t_k} \Delta \lambda_n. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Производные типа $\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_n} \right|_{t=t_k}$ иногда называют *изохронными производными*,

так как они отнесены к одному и тому же моменту времени t_k , причем этот момент может быть выбран и за пределами активного участка. В дальнейшем для сокращения записи условимся вместо символа $|_{t=t_k}$ использовать индекс "к" или вовсе опустить этот символ, (например, вместо

$$\Delta v|_{t=t_k} \text{ будем писать } \Delta v_k, \text{ вместо } \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_n} \right|_{t=t_k} \text{ писать } \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_n}). \text{ В (13.10)}$$

суммирование производится по всей совокупности действующих возмущений на данной конкретной траектории, причем эта совокупность одна и та же для всей четверки рассматриваемых параметров движения. С учетом (13.10) формулы (13.9) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta v_k &= \dot{v}_k \Delta t_k + \sum_n \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n, \\ \Delta \theta_k &= \dot{\theta}_k \Delta t_k + \sum_n \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n, \\ \Delta y_k &= \dot{y}_k \Delta t_k + \sum_n \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n, \\ \Delta x_k &= \dot{x}_k \Delta t_k + \sum_n \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n, \end{aligned} \tag{13.11}$$

т.е. зависимость v_k, θ_k, y_k, x_k от $\Delta \lambda_n$ определится, как только будут известны производные $\partial \varphi_i / \partial \lambda_n$ ($i = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots, 7$).

Продифференцируем уравнения (13.1) по параметру λ_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left(\frac{dv}{dt} \right) &= \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} + \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_n}, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) &= \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_n}, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left(\frac{dy}{dt} \right) &= \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n}, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \left(\frac{dx}{dt} \right) &= \frac{\partial f_4}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial f_4}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n}. \end{aligned} \tag{13.12}$$

В левых частях этих уравнений поменяем порядок дифференцирования, что допустимо, если частные производные от функций f_i по параметрам движения v, θ, y, x и по параметрам λ_n существуют и непрерывны (см.,

например, [27]). Кроме того, введем обозначения

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} = z_{1n}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} = z_{2n}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_n} = z_{3n}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_n} = z_{4n},$$

а также воспользуемся обозначениями, введенными ранее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial v} &= \alpha_{i1}, & \frac{\partial f_i}{\partial \theta} &= \alpha_{i2}, \\ \frac{\partial f_i}{\partial x} &= \alpha_{i3}, & \frac{\partial f_i}{\partial y} &= \alpha_{i4}, & \frac{\partial f_i}{\partial \lambda_n} &= \beta_{in}. \end{aligned}$$

Теперь система (13.2) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dz_{1n}}{dt} &= \alpha_{11} z_{1n} + \alpha_{12} z_{2n} + \alpha_{13} z_{3n} + \alpha_{14} z_{4n} + \beta_{1n}, \\ \frac{dz_{2n}}{dt} &= \alpha_{21} z_{1n} + \alpha_{22} z_{2n} + \alpha_{23} z_{3n} + \alpha_{24} z_{4n} + \beta_{2n}, \\ \frac{dz_{3n}}{dt} &= \alpha_{31} z_{1n} + \alpha_{32} z_{2n}, \\ \frac{dz_{4n}}{dt} &= \alpha_{41} z_{1n} + \alpha_{42} z_{2n}. \end{aligned} \tag{13.13}$$

Систему (13.13) называют *системой уравнений в вариациях*. Решение ее позволяет получить все интересующие нас производные от параметров движения по какому-либо конструктивному параметру λ_n и для любого текущего момента на активном участке траектории:

$$z_{in}(t) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda_n}(t) \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad n = 1, 2, \dots, 7).$$

Коэффициенты α_{ij} и β_{in} вычисляются по формулам (13.7) и (13.8).

После нахождения всех z_{in} определение возмущений параметров движения осуществляется по формулам (13.11), в которых производные $\partial \varphi_i / \partial \lambda_n$ соответственно равны z_{in} .

Систему (13.13) удобно представить в матрично-векторной форме. Введем обозначения

$$\mathbf{Z} = (z_{1n}, z_{2n}, z_{3n}, z_{4n})^T,$$

$$\mathbf{V} = (\beta_{1n}, \beta_{2n}, 0, 0)^T,$$

а коэффициенты α_{ij} , как и прежде, представим матрицей A . Тогда

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{1n} \\ \dot{z}_{2n} \\ \dot{z}_{3n} \\ \dot{z}_{4n} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_{1n} \\ z_{2n} \\ z_{3n} \\ z_{4n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{1n} \\ \beta_{2n} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

или $\dot{\mathbf{Z}} = A \mathbf{Z} + \mathbf{V}$.

системы (13.16). Тогда равенство (13.15) принимает вид

$$\frac{d}{dt} (u_1 z_{1n} + u_2 z_{2n} + \dots + u_m z_{mn}) = u_1 \beta_{1n} + u_2 \beta_{2n} + \dots + u_m \beta_{mn}.$$

Интегрируя это равенство почленно в пределах от $t = 0$ до $t = t_1$, получаем

$$\begin{aligned} & (u_1 z_{1n} + u_2 z_{2n} + \dots + u_m z_{mn}) \Big|_0^{t_1} = \\ & = \int_0^{t_1} (u_1 \beta_{1n} + u_2 \beta_{2n} + \dots + u_m \beta_{mn}) dt. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Будем считать, что нас интересует частное решение системы (13.14) с начальными условиями

$$z_{1n} = z_{2n} = \dots = z_{mn} = 0$$

при $z = 0$. Тогда левая часть равенства (13.17) при подстановке нижнего предела обращается в нуль и оно принимает вид

$$\begin{aligned} & (u_1 z_{1n} + u_2 z_{2n} + \dots + u_m z_{mn}) \Big|_{t=t_1} = \\ & = \int_0^{t_1} (u_1 \beta_{1n} + u_2 \beta_{2n} + \dots + u_m \beta_{mn}) dt. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Равенство (13.18) справедливо, если u_1, u_2, \dots, u_m — произвольные частные решения системы (13.16). Возьмем теперь некоторое из частных решений этой системы, а именно, решение $u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{mi}$, удовлетворяющее при $t = t_1$ начальным условиям

$$u_{ji} = 0 \text{ при } j \neq i, \quad u_{ji} = 1 \text{ при } j = i. \quad (13.19)$$

Фактически условия (13.19) определяют не одно частное решение системы (13.16), а m таких решений, соответствующих значениям $i = 1, 2, \dots, m$. При подстановке такого частного решения в соотношение (13.18) все слагаемые левой части, кроме одного, обратятся в нуль и мы получим

$$z_{in} \Big|_{t=t_1} = \int_0^{t_1} (u_{1i} \beta_{1n} + u_{2i} \beta_{2n} + \dots + u_{mi} \beta_{mn}) dt. \quad (13.20)$$

Таким образом, если найдены m частных решений системы (13.16) при начальных условиях (13.19) для $i = 1, 2, \dots, m$, то значения z_{in} при любом n могут быть найдены без численного интегрирования дифференциальных уравнений (13.14) с помощью значительно менее трудоемкого процесса вычисления определенных интегралов в формулах (13.20) для $i = 1, 2, \dots, m$; $n = 1, 2, \dots, l$. Если порядок m системы (13.14) меньше числа l вариантов этой системы, то легко видеть, что объем вычислений сокращается. Более того, часто нет необходимости определять значения всех z_{in} при $t = t_1$. Достаточно бывает ограничиться вычислением некоторой их линейной комбинации

$$(c_1 z_{1n} + c_2 z_{2n} + \dots + c_m z_{mn}) \Big|_{t=t_1}, \quad (13.21)$$

где c_1, c_2, \dots, c_m — некоторые не зависящие от n коэффициенты.

Линейные комбинации (13.21) для $n = 1, 2, \dots, l$ можно вычислить, определив предварительно все z_{in} по формуле (13.20). Для этого нужно m

раз проинтегрировать систему (13.16) с начальными условиями (13.19) для всех значений i и затем вычислить $m \times l$ интегралов (13.20). Но если проинтегрировать систему (13.16) с начальными условиями при $t = t_1$

$$u_1 = c_1, u_2 = c_2, \dots, u_m = c_m \quad (13.22)$$

и обозначить через $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ полученные частные решения, то из формулы (13.18) следует, что

$$\begin{aligned} & (c_1 z_{1n} + c_2 z_{2n} + \dots + c_m z_{mn})|_{t=t_1} = \\ & = \int_0^{t_1} (\bar{u}_1 \beta_{1n} + \bar{u}_2 \beta_{2n} + \dots + \bar{u}_m \beta_{mn}) dt. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Следовательно, вычисление линейных комбинаций (13.21) для всех значений n может быть сведено к однократному интегрированию системы (13.16) с начальными условиями (13.22) и вычислению l интегралов (13.23).

Метод сопряженных систем не лишен недостатков. Во-первых, он позволяет вычислять по описанной схеме значения z_{in} лишь при значении $t = t_1$. Если значения z_{in} необходимо знать для нескольких значений t , то задача сразу усложняется и становится сравнимой по трудоемкости с интегрированием системы (13.14). Во-вторых, интегрирование сопряженной системы (13.16), начальные условия для которой задаются при $t = t_1$, должно проводиться при убывании t от t_1 до нуля. Поэтому его нельзя вести параллельно с интегрированием основной системы дифференциальных уравнений движения ракеты в направлении от $t = 0$ к $t = t_1$. Это неудобство преодолевается одним из двух приемов. В первом система уравнений невозмущенного движения интегрируется от $t = 0$ до $t = t_1$ и в памяти ЭВМ накапливаются значения коэффициентов α_{ij} и β_{in} . Затем они используются при интегрировании сопряженной системы и вычислении интегралов (13.20) или (13.23). Во втором случае система уравнений невозмущенного движения предварительно интегрируется от $t = 0$ до $t = t_1$. Полученные значения кинематических параметров в момент $t = t_1$ запоминаются и используются затем в качестве начальных условий при параллельном интегрировании этой системы вместе с сопряженной системой в обратном времени. В процессе обратного интегрирования уравнений невозмущенного движения и вычисляются коэффициенты α_{ij} и β_{in} . Первый прием требует использования большого объема памяти ЭВМ, при втором увеличивается объем вычислительной работы.

Все сказанное по поводу возможности применения сопряженной системы для интегрирования уравнений в вариациях относится также и к уравнениям в отклонениях. Ввиду полной аналогии мы ограничимся уже рассмотренным случаем, предоставляя возможность читателю проделать эту работу самостоятельно применительно к уравнениям в отклонениях.

§ 13.4. Метод конечных разностей

Оба рассмотренных метода — интегрирования системы (13.14) и использования сопряженной системы (13.16), — несмотря на определенные их преимущества, имеют следующие недостатки:

- вычисление большого количества коэффициентов по довольно громоздким формулам;
- интегрирование в обратном направлении;
- составление специальных программ для расчетов.

Поэтому, стремясь к унификации расчетов и сокращению объема программы, часто используют для расчета влияния малых отклонений возмущающих параметров на траекторию метод конечных разностей, который основан на аппроксимации производных их конечно-разностными аналогами.

Поясним суть этого метода на примере. Предположим, что требуется найти влияние малого отклонения параметра λ_n на кинематические параметры траектории при условии постоянства времени выключения двигателя t_1 . Рассчитываются две траектории: одна для номинальных условий полета, другая – при возмущенном значении параметра, которое обозначим $\lambda_n^+ = \lambda_n + \Delta\lambda_n$. Сравнивая полученные значения параметров движения в заданный момент выключения двигателя на возмущенной и невозмущенной траекториях, принимают отношение разности параметров движения к величине возмущения за соответствующие производные:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right|_{t_1} = \frac{v^+ - v}{\Delta\lambda_n} = \frac{\Delta v}{\Delta\lambda_n},$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} \right|_{t_1} = \frac{\theta^+ - \theta}{\Delta\lambda_n} = \frac{\Delta \theta}{\Delta\lambda_n} \text{ и т.д.,}$$

где v^+ и θ^+ соответствуют возмущенной траектории при некоторых положительных возмущениях $\Delta\lambda_n$, а v и θ – невозмущенной траектории.

Однако не всегда есть уверенность в том, что в принятом интервале $\Delta\lambda_n$ зависимости v и θ от λ_n достаточно близки к линейным и, следовательно, полученные производные достаточно точны. С целью повышения точности рассчитывают возмущенные траектории при параметре $\lambda_n^- = \lambda_n - \Delta\lambda_n$, получают соответствующие значения v^- , θ^- и в качестве первых производных принимают

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right|_{t_1} = \frac{v^+ - v^-}{2\Delta\lambda_n}, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} \right|_{t_1} = \frac{\theta^+ - \theta^-}{2\Delta\lambda_n}.$$

При этом имеется возможность одновременно получить и вторые производные. В самом деле, разлагая в ряд Тейлора, например, функцию $v(\lambda_n)$ и удерживая в разложении члены, содержащие вторую степень малости относительно $\Delta\lambda_n$, можно записать

$$\Delta v \approx \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \Delta\lambda_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda_n^2} \Delta\lambda_n^2.$$

Применяя эту запись для случая положительных и отрицательных отклонений параметра, равных по абсолютной величине, находим

$$\Delta v^+ = v^+ - v \approx \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \Delta\lambda_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda_n^2} \Delta\lambda_n^2,$$

$$\Delta v^- = v^- - v \approx - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \Delta\lambda_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda_n^2} \Delta\lambda_n^2,$$

откуда

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \approx \frac{v^+ - v^-}{2\Delta\lambda_n} = \frac{\Delta v^+ - \Delta v^-}{2\Delta\lambda_n},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \lambda_n^2} \approx \frac{v^+ + v^- - 2v}{\Delta\lambda_n^2} = \frac{\Delta v^+ + \Delta v^-}{\Delta\lambda_n^2}.$$

Возможность вести оценки с учетом вторых членов разложения в ряд позволяет проводить исследования в более широком интервале вариации параметров, что особенно важно на начальном этапе проектирования. В этих случаях речь идет не о рассеивании, а о влиянии тех или других проектно-баллистических параметров на предельные летно-технические характеристики носителя. Метод конечных разностей успешно может быть применен и для определения чисто баллистических производных, т.е. производных, связывающих конечные условия движения с начальными, если такие производные затруднительно или невозможно получить по аналитическим зависимостям. При наличии быстродействующей ЭВМ метод конечных разностей является, пожалуй, самым простым и в то же время универсальным методом, применимым для решения самых разнообразных практических расчетных задач.

Глава 14

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В настоящей главе приводятся сведения, необходимые для дальнейшего изложения материала и не претендующие на полноту охвата разделов теории вероятностей и математической статистики, используемых при решении многих баллистических задач.

§ 14.1. Основные характеристики распределения случайных величин

Случайной называется величина, принимающая в результате опыта одно из множества возможных значений. Эта величина может быть скалярной и векторной, причем под векторной случайной величиной или *случайным вектором* понимается любая упорядоченная совокупность скалярных случайных величин, называемых *координатами* случайного вектора. Случайную величину можно рассматривать как случайную точку в одно- или многомерном пространстве событий.

Каждое событие, связанное со случайной величиной X , есть не что иное, как попадание величины X в некоторую область A пространства событий. Факт события записывается в виде $X \in A$. Соответствие между областью A и вероятностью попадания в нее величины X называется *распределением* или *законом распределения* вероятности величины X . Полную характеристику закона распределения дает *плотность распределения* или *функция распределения* случайной величины.

Для скалярной случайной величины X плотность распределения есть предел отношения вероятности P попадания ее значения в бесконечно малый интервал $[x, x + \Delta x]$ к длине этого интервала при стягивании длины интервала в нуль:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Графическое представление $f(x)$ называется *кривой распределения*.

Функция распределения скалярной случайной величины X есть вероятность выполнения неравенства $X < x$, рассматриваемая как функция x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Функция и плотность распределения связаны соотношениями

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(u) du, \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал (x_1, x_2) определяется как площадь под кривой распределения на этом интервале:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(u) du.$$

Хотя плотность и функция распределения дают исчерпывающую характеристику случайной величины, они, однако, довольно сложны. Поэтому при решении многих практических задач используются лишь некоторые числовые характеристики случайной величины. Довольно часто ограничиваются такими характеристиками, как *математическое ожидание* и *дисперсия*. Для скалярной случайной величины X эти характеристики определяют соответственно формулами

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, \quad D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx.$$

Вместо дисперсии удобнее использовать характеристику, размерность которой совпадает с размерностью случайной величины, — *среднеквадратическое отклонение* $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

В практических исследованиях и расчетах при описании случайных величин, связанных с погрешностями, возмущениями, рассеиванием, наиболее широко используется *нормальный (гауссов) закон* распределения, для которого плотность распределения дается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right)^2},$$

а функция распределения — формулой

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{u - m_x}{\sigma_x} \right)^2} du.$$

Характерным для нормального закона является то, что он полностью определяется двумя числовыми характеристиками: математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением.

Полезно помнить, что нормальное или близкое к нормальному распределение случайной величины возникает всякий раз, когда ее разброс обусловлен большим числом независимых друг от друга факторов, среди которых нет преобладающих.

При вычислении интеграла в функции $F(x)$ сделаем замену переменной $z = \frac{u - m_x}{\sigma_x}$. Тогда $u = m_x + \sigma_x z$, $du = \sigma_x dz$ и

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Функция $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-z^2/2} dz$, называемая *функцией Лапласа*, затабулирована. Поэтому значение функции распределения

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) - \frac{1}{2}$$

легко определяется по таблице. Также легко определяется вероятность попадания X в интервал (x_1, x_2) :

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Функция Лапласа является нечетной функцией, т.е. $\Phi(-u) = -\Phi(u)$. Поэтому, если нас интересует вероятность попадания в интервал, границы которого симметричны относительно m_x , можно записать

$$P(m_x - x < X < m_x + x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma_x}\right).$$

В частности, при $x = \sigma_x$ $P = 0,6827$, при $x = 2\sigma_x$ $P = 0,9545$, при $x = 3\sigma_x$ $P = 0,9973$.

В теории вероятностей, кроме среднеквадратического отклонения σ , широко используется так называемое *вероятное* или *срединное* отклонение, обозначаемое через B . Под вероятным понимают такое симметричное относительно центра группирования (m_x) отклонение, вероятность превышения которого равна 0,5. Из таблиц функций Лапласа легко определить, что такое отклонение соответствует величине 0,6745 σ_x .

За максимальное отклонение Δ на практике обычно принимают либо $\Delta = 4B = 2,7\sigma$, либо $\Delta = 3\sigma$. Вероятность выхода случайной величины за интервал $\pm\Delta$ в первом случае составляет 0,7%, а во втором — около 0,3%. Понятно, что максимальное отклонение в действительности не является максимально возможным отклонением, а соответствует некоторой условной величине, вероятность выхода за пределы которой достаточно мала.

Довольно часто на практике используется другой вид распределения — *равномерное* распределение. Плотность такого распределения постоянна в некотором интервале (a, b) и равна нулю вне этого интервала:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } X \in (a, b), \\ 0 & \text{при } X \notin (a, b). \end{cases}$$

Математическое ожидание при равномерном распределении $m_x = \frac{b+a}{2}$, а среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Равномерное распределение характерно для ошибок измерений, выполняемых с точностью до целых делений шкалы. Если цена деления s , то ошибка измерений представляет собой случайную величину, распределенную равномерно в пределах от $-s/2$ до $s/2$.

В том случае, когда мы имеем дело со случайными колебаниями, в частности с гармоническими колебаниями со случайными амплитудой и фазой, часто оказывается, что фаза является случайной величиной, равномерно распределенной в пределах периода колебаний.

§ 14.2. Характеристики распределения случайного вектора

Рассмотрим особенности распределения случайного вектора на примере двумерного вектора.

Функция распределения случайного вектора с координатами X и Y есть вероятность совместного выполнения неравенств $X < x$ и $Y < y$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y),$$

а плотность распределения определяется функцией

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P\{(X, Y) \in \delta\}}{\Delta x \Delta y},$$

где через δ обозначен прямоугольник со сторонами Δx и Δy , примыкающий к точке с координатами (x, y) .

Геометрическое представление функции $f(x, y)$ называется *поверхностью распределения*. Вероятность попадания конца вектора (X, Y) в некоторую область A плоскости OXY равна объему цилиндрического тела, опирающегося на область A и ограниченного сверху поверхностью распределения:

$$P\{(X, Y) \in A\} = \iint_A f(x, y) dx dy.$$

Качественно новым при переходе от скалярной к векторной случайной величине является вопрос о степени и характере зависимости случайных величин X и Y .

Эти величины называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая величина. Для независимых случайных величин совместная плотность распределения равна произведению плотностей распределения каждой из них:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

Так же как и для скалярной величины, при описании распределения случайного вектора используются числовые характеристики. При этом математические ожидания величин X и Y определяются формулами

$$m_x = \iint_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy, \quad m_y = \iint_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy,$$

а их дисперсии — формулами

$$D_x = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dx dy,$$

$$D_y = \iint_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 f(x, y) dx dy.$$

Так же как и для скалярной величины, математические ожидания дают координаты точки (на плоскости), вокруг которой происходит рассеивание конца вектора (X, Y) , а дисперсии характеризуют рассеивание конца вектора в направлении осей OX и OY .

Новое качество в распределении случайного вектора, о котором было сказано выше, приводит к необходимости введения и использования дополнительной числовой характеристики, называемой *ковариацией* или *ковариационным моментом* случайных величин X и Y :

$$K_{xy} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy.$$

Именно эта числовая характеристика, помимо рассеивания величин X и Y , описывает связь между ними. Для независимых случайных величин $K_{xy} = 0$.

Для получения числовой характеристики зависимости величин в более "чистом" виде, свободном от размера рассеивания, ковариацию нормируют, переходя к безразмерной характеристике

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x} \sqrt{D_y}} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Эта характеристика называется *коэффициентом корреляции* или *корреляционным моментом* величин X и Y . Очевидно, что для независимых случайных величин $r_{xy} = 0$ — в этом случае говорят, что величины не коррелированы. Отметим, что из некоррелированности случайных величин не всегда следует их независимость, поскольку коэффициент корреляции характеризует не просто вероятностную зависимость величин, а близость этой зависимости к линейной. В частности, если $r_{xy} = \pm 1$, то случайные величины связаны точной линейной функциональной зависимостью

$$Y = aX + b,$$

причем $\text{sign } r_{xy} = \text{sign } a$. В общем случае значение r_{xy} лежит в пределах

$(-1, 1)$. В случае $r_{xy} > 0$ говорят о положительной корреляции величин, в случае $r_{xy} < 0$ — об отрицательной. Положительная корреляция случайных величин означает, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию в среднем возрастать, т.е. повышается вероятность того, что и другая величина примет большее значение.

Для системы двух случайных величин наибольшее распространение на практике получил нормальный закон. В общем случае его плотность распределения выражается формулой (индекс при r опущен)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]\right\}.$$

Как видно, закон полностью определяется заданием пяти числовых характеристик: математических ожиданий m_x, m_y , среднеквадратических отклонений σ_x, σ_y и коэффициента корреляции r . Заметим, что при $r=0$ плотность распределения случайного вектора становится равной произведению плотностей распределения его компонент

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

Этот факт свидетельствует о том, что для нормального распределения термины "некоррелированные величины" и "независимые величины" становятся эквивалентными.

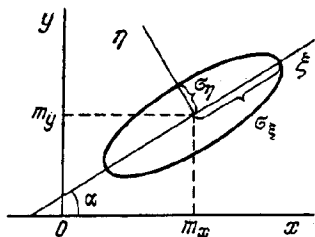


Рис. 14.1. Эллипс рассеивания — кривая равной плотности распределения (главные оси эллипса в общем случае развернуты относительно начальных осей x и y на угол α)

Рассмотрим на плоскости Oxy кривую, в любой точке которой плотность распределения $f(x, y)$ одинакова. Из формулы для $f(x, y)$ следует, что такая кривая определяется уравнением

$$\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} = \text{const} = k^2.$$

Из аналитической геометрии известно, что (рис. 14.1):

- эта кривая является эллипсом;
- центр эллипса находится в точке с координатами (m_x, m_y) ;
- оси симметрии эллипса составляют с осью Ox углы, определяемые уравнением

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2},$$

которое дает значения углов α_1 и α_2 , отличающиеся на $\pi/2$.

Изменяя значение константы k^2 , можно получить семейство подобных эллипсов, имеющих общий центр с координатами (m_x, m_y) и одинаково ориентированных. Такие эллипсы называются *эллипсами равной плотности* или *эллипсами рассеивания*, а их общие оси симметрии — *главными осями рассеивания*.

Уравнение эллипса рассеивания принимает наиболее простой вид, если координатные оси совпадают с осями эллипса. Для перехода к таким координатным осям достаточно перенести начало координат в точку (m_x, m_y) , а координатные оси повернуть на угол α (α_1 или α_2). Величина угла α , а значит, и ориентация осей эллипса относительно координатных осей определяются коэффициентом корреляции r : если величины X и Y не коррелированы ($r=0$), то оси эллипса совпадают с осями системы координат.

После перехода к новой системе координат (что равносильно переходу к новым случайным переменным) уравнение эллипса рассеивания приводится к каноническому виду

$$\frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2} = k^2,$$

к канонической форме приводится и нормальный закон

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{\eta^2}{2\sigma_\eta^2}},$$

где σ_ξ , σ_η — так называемые *главные среднеквадратические отклонения*, которые выражаются через среднеквадратические отклонения в прежней системе координат формулами

$$\begin{aligned}\sigma_\xi^2 &= \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha, \\ \sigma_\eta^2 &= \sigma_x^2 \sin^2 \alpha - r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \alpha.\end{aligned}$$

Эти же формулы могут быть записаны в таком виде:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi^2 &= \frac{1}{2} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4r^2\sigma_x^2\sigma_y^2}], \\ \sigma_\eta^2 &= \frac{1}{2} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4r^2\sigma_x^2\sigma_y^2}].\end{aligned}$$

Естественно, что, имея дело с нормальным законом, обычно стараются выбрать координатные оси так, чтобы они совпадали с главными осями рассеивания. Пусть такой выбор сделан и уравнение эллипса рассеивания имеет канонический вид

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = k^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(k\sigma_x)^2} + \frac{y^2}{(k\sigma_y)^2} = 1.$$

Отсюда видно, что полуоси эллипса пропорциональны главным среднеквадратическим отклонениям. Говорят, что значению $k=1$ соответствует "единичный" или "сигмовый" эллипс рассеивания, а значению $k=3$ — "полный" или "трехсигмовый" эллипс рассеивания. Вероятность попадания конца

случайного вектора (\bar{X}, Y) в эллипс, полуоси которого равны k средне-квадратическим отклонениям, определяется формулой

$$P\{X \in (-k\sigma_x, k\sigma_x), Y \in (-k\sigma_y, k\sigma_y)\} = 1 - e^{-k^2/2}.$$

Значения вероятности при $k = 1; 2$ и 3 равны соответственно $0,393; 0,864$ и $0,9888$, т.е. "полный" эллипс с практической достоверностью охватывает все рассеивание случайного вектора.

Распространяя сказанное на n -мерный нормально распределенный случайный вектор, компонентами которого являются n случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , можно утверждать, что минимальное количество числовых характеристик, с помощью которых исчерпывающе описывается распределение случайного вектора, сводится к следующему:

– n математических ожиданий m_1, m_2, \dots, m_n , характеризующих средние значения компонент;

– n дисперсий D_1, D_2, \dots, D_n , характеризующих их рассеивание;

– $n(n-1)$ ковариаций K_{ij} ($i \neq j$), характеризующих попарную ковариацию всех компонент.

Заметим, что $D_i = K_{ij}$ при $i = j$.

Ковариации удобно записать в виде матрицы

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & D_2 & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & D_n \end{bmatrix}.$$

Такая матрица называется *ковариационной*. По определению $K_{ij} = K_{ji}$, поэтому ковариационная матрица – симметрическая. В случае, если все компоненты случайного вектора взаимно не коррелированы, ковариационная матрица принимает диагональный вид:

$$K = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}.$$

В целях наглядности суждения именно о коррелированности случайных величин безотносительно к их рассеиванию вместо ковариационной используют *корреляционную матрицу*, составленную из коэффициентов корреля-

ции $r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$, где $\sigma_i = \sqrt{D_i}$; $\sigma_j = \sqrt{D_j}$. Такая матрица имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

На практике часто необходимо осуществлять преобразование одного случайного вектора в другой, например при переходе от одной системы координат к другой. Если такое преобразование линейное и осуществляется

с помощью матрицы преобразования

$$Y = AX,$$

то и ковариационная матрица K_x вектора X преобразуется в ковариационную матрицу K_y вектора Y также с помощью матрицы A :

$$K_y = AK_x A^T.$$

В частном случае матрица преобразования A может быть матрицей-столбцом, т.е. вектором. Пусть таковым является единичный вектор направления e . Тогда

$$X_e = (e^T \cdot X) = e_1 X_1 + e_2 X_2 + \dots + e_n X_n$$

есть величина проекции вектора X на направление, заданное единичным

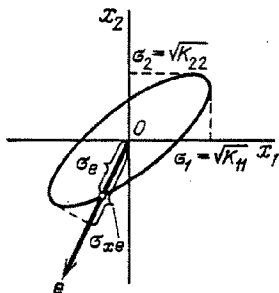


Рис. 14.2. Определение среднеквадратического отклонения проекции случайного двумерного вектора на направление, заданное ортом e

вектором, а $K_{xe} = e^T K_x e$ — ковариационная матрица этой проекции. В рассматриваемом случае ковариационная матрица является скалярной величиной, равной дисперсии случайной величины X_e :

$$K_{xe} = D_{xe} = \sigma_{xe}^2.$$

В качестве вектора направления можно взять, например, орт первой из осей той системы координат, в которой заданы вектор X и его ковариационная матрица: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Тогда для проекции X_{e_1} получим

$$e_1^T K_x e_1 = K_{11} = D_1 = \sigma_1^2.$$

Этот результат показывает, что диагональные элементы ковариационной матрицы K_x являются дисперсиями проекций случайного вектора X на соответствующие оси той системы координат, в которой задана матрица. Геометрический смысл результата следующий (мы опустим его доказательство): среднеквадратическое отклонение проекции случайного вектора на направление, заданное ортом e , равно расстоянию σ_{xe} от центра эллипсоида рассеивания до плоскости, нормальной к орту e и касательной к эллипсоиду. Иллюстрация сказанного для двумерного случайного вектора $X = (X_1, X_2)^T$ приведена на рис. 14.2. Укажем без вывода еще одну полезную на практике характеристику рассеивания — размер эллипсоида рассеивания в направлении орта e (см. рис. 14.2):

$$\sigma_e^2 = (e^T K_x^{-1} e)^{-1}.$$

§ 14.3. Числовые характеристики функций случайных величин

Случайная величина довольно часто является функцией других случайных величин. Зная законы распределения аргументов, иногда удается восстановить и закон распределения функции, но, как правило, такая задача оказывается довольно сложной. К тому же нередко нет надобности определять закон распределения функции, а достаточно указать лишь некоторые его числовые характеристики. Ниже приводятся некоторые результаты из теории вероятностей, относящиеся к числовым характеристикам функций (в основном линейных).

1. Математическое ожидание и дисперсия неслучайной величины. Если c — неслучайная величина, то

$$M[c] = c, \quad D[c] = 0.$$

2. Вынесение неслучайной величины за знаки математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения. Если X — случайная величина, а c — неслучайная, то

$$M[cX] = cM[X], \quad D[cX] = c^2 D[X], \quad \sigma[cX] = |c| \sigma[X].$$

3. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин. Если X и Y — случайные величины, то

$$M[X+Y] = M[X] + M[Y], \quad D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

4. Математическое ожидание и дисперсия линейной функции. Если Y является линейной функцией случайных аргументов X_1, X_2, \dots, X_n ,

$$\text{т.е. } Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b, \text{ то}$$

$$M[Y] = \sum_{i=1}^n a_i M[X_i] + b, \quad D[Y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i] + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}.$$

В частном случае, когда все случайные аргументы не коррелированы,

$$D[Y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i].$$

5. Математическое ожидание произведения случайных величин. Если X и Y — случайные величины, то

$$M[XY] = M[X] M[Y] + K_{xy}.$$

6. Дисперсия произведения независимых случайных величин. Если X и Y — независимые случайные величины, то

$$D[XY] = D[X] D[Y] + m_x^2 D[Y] + m_y^2 D[X].$$

7. Сложение некоррелированных случайных векторов. Если случайный вектор V_1 с координатами X_1, Y_1 и случайный вектор V_2 с координатами X_2, Y_2 не коррелированы, то числовые характеристики распределения случайного вектора $V = V_1 + V_2$ с координатами

$X = X_1 + X_2$ и $Y = Y_1 + Y_2$ определяются следующим образом:

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2}, \quad m_y = m_{y_1} + m_{y_2},$$

$$D_x = D_{x_1} + D_{x_2}, \quad D_y = D_{y_1} + D_{y_2},$$

$$K_{xy} = K_{x_1 y_1} + K_{x_2 y_2}.$$

Этот результат легко обобщается на сумму m некоррелированных n -мерных случайных векторов.

Выше уже говорилось, что построение закона распределения функции по законам распределения ее случайных аргументов является, вообще говоря, задачей довольно сложной. Покажем это.

В задачах, связанных с посадкой ЛА, определением районов падения ступеней ракеты-носителя, определением величины корректирующего импульса, и других, возникает необходимость нахождения закона распределения модуля $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ двумерного вектора (X_1, X_2) , компоненты которого суть нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Подробное решение этой весьма полезной задачи приведено в [32], где без нарушения общности полагалось, что компоненты вектора не коррелированы, и для определенности принималось $\sigma_2 < \sigma_1$.

При построении плотности и функции распределения величины Y в этой работе возникла необходимость воспользоваться теорией функций Бесселя, а при определении математического ожидания — полным эллиптическим интегралом 2-го рода. С точки зрения пользователя конечный результат вполне приемлем, поскольку его удалось затабулировать, но "затраты" на его получение оказались достаточно высокими. Для справки приведем этот результат:

$$M[Y] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_1 \xi, \quad D[Y] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (M[Y])^2,$$

где ξ находится из табл. 14.1 в зависимости от отношения σ_1/σ_2 .

Вероятность попадания величины Y в круг радиуса r определяется функцией распределения

$$F(r) = P(Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} < r),$$

значения которой даны в табл. 14.2 в зависимости от отношений r/σ_2 и σ_2/σ_1 .

Приведенная задача — один из примеров того, что на практике мы обычно имеем дело с нелинейными функциями. Сложность определения числовых характеристик таких функций приводит к естественному желанию пожертвовать точностью ради простоты и найти приближенные формулы, подобные формулам для линейных функций случайных величин. Получение приближенных формул обычно проводится методом линеаризации.

При проведении линеаризации следует иметь в виду следующие соображения:

— математически линеаризация заключается в разложении нелинейной функции в ряд Тейлора в окрестности выбранной точки с сохранением только членов первого порядка малости, что предполагает непрерывность функции и ее первых производных в этой окрестности;

Таблица 14.1

σ_1/σ_2	ξ	σ_1/σ_2	ξ	σ_1/σ_2	ξ	σ_1/σ_2	ξ
1,0	1,0	1,8	0,7937	3,5	0,6935	5,5	0,6620
1,2	0,9186	2,0	0,7710	4,0	0,6802	6,0	0,6589
1,4	0,8631	2,5	0,7325	4,5	0,6748	6,5	0,6576
1,6	0,8234	3,0	0,7062	5,0	0,6688	7,0	0,6366

— точность описания функции ее линейным приближением определяется степенью нелинейности и может регулироваться размером области, в которой допускается изменение случайных аргументов;

— поскольку плотность случайной величины имеет большие значения в районе математического ожидания, естественно добиваться более высокой точности приближения заданием линейной функции в районе математического ожидания ее случайных аргументов.

К задачам, решаемым методом линеаризации, в первую очередь относятся задачи о рассеивании случайной функции под влиянием малых возмущений или погрешностей ее случайных аргументов.

Пусть $Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ есть нелинейная функция случайных аргументов, для которых известны математические ожидания $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$ и ковариационная матрица $K = \|K_{ij}\|$. Требуется найти приближенные числовые характеристики случайной величины Y .

Таблица 14.2

r/σ_2	σ_2/σ_1				
	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5
0,5	0,1175	0,0951	0,0836	0,0719	0,0601
1,0	0,3935	0,3283	0,2926	0,2548	0,2153
2,0	0,8647	0,7917	0,7383	0,6714	0,5901
3,0	0,9889	0,9683	0,9438	0,9019	0,8351
4,0	0,9997	0,9974	0,9923	0,9785	0,9455
5,0	0,9999	0,9997	0,9993	0,9965	0,9853

r/σ_2	σ_2/σ_1			
	0,4	0,3	0,2	0,1
0,5	0,0482	0,0363	0,0248	0,0121
1,0	0,1743	0,1318	0,0885	0,0444
2,0	0,4942	0,3846	0,2635	0,1340
3,0	0,7359	0,5993	0,4256	0,2214
4,0	0,8769	0,7532	0,5605	0,3010
5,0	0,9494	0,8577	0,6724	0,3756

Представим функцию $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности точки $(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})$ в виде

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m (x_i - m_{x_i}),$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m$ — частная производная по аргументу x_i , вычисленная в точке $(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n})$.

К такому линейному представлению функции применимы способы определения числовых характеристик линейных случайных функций, приведенные выше:

$$m_y \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}),$$

$$D_y \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 D_{x_i} + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_m K_{ij}$$

или в более компактной форме

$$D_y = \Phi^T(m) K \Phi(m),$$

где

$$\Phi(m) = (\text{grad } \varphi)_m^T = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)_m^T.$$

Если нас интересует среднеквадратическое отклонение случайной величины Y , то

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_m r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j},$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции величин X_i и X_j .

Если случайные аргументы функции взаимно не коррелированы, имеем

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 \sigma_{x_i}^2.$$

§ 14.4. Метод статистического моделирования

При проектировании, создании, отработке и эксплуатации многих технических систем желательно знать способность и эффективность их функционирования в условиях разнообразных случайных возмущений, действующих в реальной обстановке. Экспериментальное (натурное) изучение этих характеристик часто или требует чрезмерно больших затрат средств и времени, или невозможно до момента изготовления системы, или невозможно принципиально. Поскольку современная вычислительная техника дает возможность моделировать сложнейшие процессы, получил развитие метод исследования, позволяющий сочетать теоретические результаты с имитацией

экспериментальных данных, а в ряде случаев и с данными натурных экспериментов. Такой метод называется *методом статистического моделирования*, иногда его называют *методом Монте-Карло* или *методом математических испытаний*.

При реализации метода статистического моделирования можно выделить три этапа:

- создание математической модели процессов, происходящих в реальной системе или с реальной системой;
- многократное математическое моделирование (расчет) этих процессов совместно с моделированием различных случайных факторов, влияющих на ход процессов в реальных условиях;
- итоговая обработка полученного статистического материала.

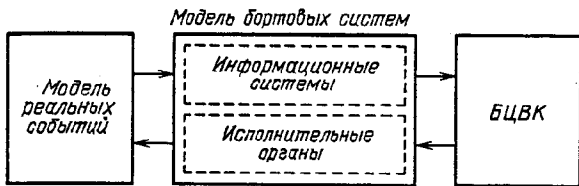


Рис. 14.3. Принципиальная схема статистического моделирования

Основу метода статистического моделирования составляет моделирование на ЭВМ случайных чисел с заданными распределениями. Генерирование случайных значений базируется на использовании случайности некоторых физических явлений или на формировании случайных, а вернее, псевдослучайных чисел чисто алгоритмическим путем. В результате, обращаясь к соответствующим программам ЭВМ (их называют *датчиками случайных чисел* или сокращенно ДСЧ), можно получать последовательности случайных значений, которые соответствуют заданным законам распределения. Имея возможность моделирования случайных скалярных величин, нетрудно организовать моделирование случайных векторов как с коррелированными, так и с некоррелированными случайными координатами.

Каковы принципы построения программы статистического моделирования? Для наглядности рассмотрим их на примере моделирования небольшого участка полета ЛА. Пусть этот участок включает: пассивный полет ЛА по орбите выведения после отделения от последней ступени ракеты-носителя, определение орбиты ЛА по результатам навигационных измерений, маневр перехода ЛА на орбиту с заданными характеристиками. Разовую расчетную реализацию участка полета будем называть *испытанием*. Целью статистического моделирования может быть получение по результатам n испытаний числовых характеристик рассеивания параметров движения ЛА в момент завершения маневра, определение минимального количества топлива, необходимого для надежного выполнения маневра, и т.д.

Принципиальная схема моделирования представлена на рис. 14.3. Поясним ее блоки.

Модель реальных событий – модель реального движения центра масс ЛА как в пассивном полете, так и при работе двигателя. Основу модели составляет алгоритм прогнозирования движения, включающий

достаточно полные модели гравитационного поля и атмосферы Земли. В алгоритме должен быть предусмотрен расчет любой информации о фактическом движении ЛА, которая требуется для работы различных блоков моделирующей программы.

Поскольку выведение ЛА на орбиту осуществляется с определенным рассеиванием, исходный вектор состояния ЛА для каждого испытания должен принадлежать эллипсоиду рассеивания, который задается, например, с помощью шестимерной ковариационной матрицы рассеивания. В качестве закона распределения случайного вектора состояния ЛА в момент выведения обычно принимается нормальный закон. Таким образом, модель реальных событий должна для каждого из испытаний смоделировать выборку случайного вектора из эллипсоида выведения с учетом закона распределения.

Алгоритм прогнозирования реального движения тоже может включать в себя элемент случайности. Источником такой случайности на практике может быть случайность некоторых факторов (например, определяющих состояние атмосферы Земли) или случайность в реализации погрешности нашего знания констант гравитационной модели.

Модель бортовых систем – комплекс моделей систем ЛА, которые могут быть разделены на информационные системы и исполнительные органы.

Под *информационными* понимаются бортовые системы, обеспечивающие ЛА данными о его положении, движении относительно внешнего мира – поверхности Земли, пунктов на земной поверхности, других ЛА и т.д. Реальное (или, точнее, идеальное) значение этих данных рассчитывается в модели реальных событий, но, поскольку любая измерительная система работает с погрешностями, ЛА располагает измерительной информацией, отличающейся от идеальной на погрешность работы измерителей. Предполагается, что нам известны точностные характеристики измерителей (структура, состав погрешностей, их законы распределения и числовые характеристики), поэтому нетрудно организовать модели погрешностей информационных систем.

В рассматриваемом примере мы должны моделировать работу одного из исполнительных органов ЛА – его двигательной установки (ДУ). Существенным здесь также является моделирование погрешностей работы ДУ, которые включают в себя погрешность выставки оси двигателя в заданном направлении, погрешность реализации закона изменения этого направления, погрешность отработки двигательной установкой заданной величины характеристической скорости, разбросы характеристик собственно двигателя (тяги, удельного импульса, соотношения расходоуемых компонент). Для создания такой модели необходимо использовать характеристики работы систем ориентации и стабилизации ЛА, акселерометра и т.д. Знание этих характеристик вместе с наличием ДСЧ позволяет с требуемой степенью точности моделировать реализацию фактического (не расчетного!) маневра ЛА.

Модель бортовых систем является как бы связующим звеном между внешними реальностями и "мозгом" ЛА – бортовым цифровым вычислительным комплексом (БЦВК). Информационные системы поставляют в БЦВК данные об этих реальностях, позволяя составить приближенное,

”бортовое” знание реальных событий, а исполнительные органы физически исполняют реакцию БЦВК на это знание.

Говоря о БЦВК, мы имеем в виду в нашем примере алгоритмы БЦВК: алгоритм обработки измерительной информации и алгоритм расчета маневра. Очевидно, что в модели ЛА алгоритмы БЦВК должны быть отражены с высокой степенью точности, поскольку они в конечном итоге определяют эффективность использования тех систем, которыми располагает ЛА.

Статистическое моделирование, по сути дела, является единственной возможностью проверить и отработать алгоритмы в условиях, которые по своей полноте максимально имитируют реальные условия, т.е. на множестве случайных отклонений внешних факторов и погрешностей работы бортовых систем.

Опишем теперь последовательность событий, происходящих (моделируемых) в модели полета ЛА при одном испытании.

Выведение ЛА производится на орбиту, которая характеризуется вектором состояния, случайным образом выбранным из эллипсоида выведения. Для данного испытания эта орбита является фактической орбитой выведения. Последующее движение ЛА вплоть до маневра проходит на фоне случайных возмущений характеристик атмосферы, но для данного испытания такая возмущенная атмосфера является фактически существующей.

В ходе моделирования движения ЛА по фактической орбите в соответствии с планом проведения измерений рассчитываются фактические значения измеряемых параметров. Эта информация, искаженная погрешностями измерений, вводится в бортовой алгоритм обработки, в результате работы которого в БЦВК формируется ”бортовое” знание фактического движения ЛА, или ”бортовой” вектор состояния. Последний в свою очередь является исходной информацией для алгоритма расчета маневра, который рассчитывает моменты включения и выключения двигателя и ориентацию его оси в ходе работы. Отрабатываются же не расчетные характеристики маневра, а их значения, искаженные соответствующими ошибками ДУ, причем маневр отрабатывается на той фактической орбите, на которой ЛА находится в момент включения двигателя.

После выключения двигателя ЛА совершает полет по новой фактической орбите, вообще говоря, отличающейся от заданной, поскольку алгоритм рассчитал переход с ”бортовой” (а не фактической) орбиты на заданную и маневр был выполнен с погрешностями.

В результате испытания определяются вектор состояния ЛА и количество израсходованного на данном испытании топлива. Проведя n испытаний, мы получим n наборов конечных данных испытаний, которые в своей совокупности являются случайными, и задача теперь заключается в выявлении характеристик этих случайных величин.

Методы обработки, анализа результатов испытаний и определения вероятностных характеристик случайных величин дает математическая статистика. Вероятностные характеристики, подлежащие определению по результатам опыта, называются *статистическими характеристиками*, а их конкретные значения, полученные при этом определении, — *оценками*. Обычно за вероятность события принимается частота этого события при достаточном большом числе испытаний, а за математическое ожидание и ковариацию

случайных величин – их выборочное среднее и выборочная ковариация:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{K}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{m}_x)(Y_i - \hat{m}_y),$$

где \hat{m}_x , \hat{m}_y , \hat{K}_{xy} – оценки математических ожиданий и ковариации случайных величин X и Y ; n – число испытаний.

В случае скалярной случайной величины

$$\hat{D}_x = \hat{K}_{xx} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{m}_x)^2.$$

В ходе обработки данных испытаний может оказаться необходимым вычисление оценок не по завершению всего цикла испытаний, а по мере их поступления. В этом случае текущие значения оценок удобно вычислять по рекуррентным формулам

$$\hat{m}_x^{n+1} = \frac{n}{n+1} \hat{m}_x^n + \frac{1}{n+1} X_{n+1},$$

$$\hat{K}_{xy}^{n+1} = \frac{n-1}{n} \hat{K}_{xy}^n + \frac{1}{n+1} (X_{n+1} - \hat{m}_x^n)(Y_{n+1} - \hat{m}_y^n),$$

$$\hat{D}_x^{n+1} = \hat{K}_{xx}^{n+1} = \frac{n-1}{n} \hat{D}_x^n + \frac{1}{n+1} (X_{n+1} - \hat{m}_x^n)^2.$$

При статистической обработке расчетных или экспериментальных данных часто используют априорное знание (или гипотезу) о характере распределения случайных величин, что позволяет упростить расчетные формулы и сократить объем вычислений. К такому априорному знанию следует подходить весьма осторожно, поскольку его погрешность может существенно исказить представление о вероятностной картине. Пусть, например, принята гипотеза о некоррелированности компонент случайного вектора (X, Y) и в результате статистической обработки получены оценки $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_y$.

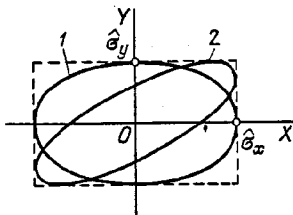


Рис. 14.4. Эллипс рассеивания в зависимости от наличия (кривая 2) или отсутствия (кривая 1) корреляции между компонентами случайного вектора

Такой гипотезе и полученным оценкам соответствует эллипс рассеивания 1 (рис. 14.4). Если же гипотеза неверна, т.е. компоненты вектора коррелированы, то реальный эллипс рассеивания 2 может значительно отличаться от эллипса 1.

При определении статистических характеристик по результатам обработки опытных данных естественно поставить вопрос: насколько точно полученная оценка соответствует истине, т.е. какова ее возможная погрешность? Знание такой погрешности становится необходимым, если полученная

оценка служит основой для принятия последующих решений (например, когда по оценке требуемого количества топлива принимается решение о величине заправляемого топлива).

Для характеристики погрешности полученной оценки вводится понятие доверительной области (для оценки скалярной величины — понятие доверительного интервала). *Доверительной областью*, соответствующей коэффициенту доверия β , называется такая случайная область, которая с вероятностью β содержит истинное значение оцениваемой характеристики, не зависит от неизвестной характеристики и полностью определяется результатами опыта. Границы доверительной области называются *доверительными границами*, а величина $(1 - \beta)$ — *уровнем значимости* отклонения оценки.

Нахождение оценок статистических характеристик обычно называют *точечным оцениванием*, а нахождение доверительных интервалов (областей) — *интервальным оцениванием*. Основную трудность при построении доверительных интервалов (областей) представляет нахождение распределений самих оценок. Этот вопрос хорошо разработан лишь для случая нормального распределения оцениваемой величины. Приведем формулы, определяющие доверительные интервалы на математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины.

Пусть в результате n испытаний получены оценки случайной нормально распределенной величины X

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{D} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{m})^2,$$

математическое ожидание m и дисперсия D которой неизвестны. Тогда доверительные интервалы для \hat{m} и \hat{D} , соответствующие доверительной вероятности β , находятся по формулам

$$I_{m\beta} = (\hat{m} - t_\beta \sigma_{\hat{m}}, \hat{m} + t_\beta \sigma_{\hat{m}}),$$

$$I_{D\beta} = (\hat{D} - t_\beta \sigma_{\hat{D}}, \hat{D} + t_\beta \sigma_{\hat{D}}),$$

где

$$\sigma_{\hat{m}} = \sqrt{\frac{\hat{D}}{n}}; \quad \sigma_{\hat{D}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \hat{D};$$

t_β — функция, обратная функции Лапласа Φ аргумента $\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$. Ниже приведены значения t_β для некоторых уровней доверительной вероятности β :

β	0,8	0,9	0,96	0,99	0,9973	0,999
t_β	1,282	1,643	2,053	2,576	3,000	3,29

ОТКЛОНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ
В КОНЦЕ АКТИВНОГО УЧАСТКА

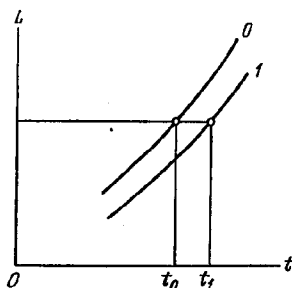
Траектория ЛА на активном участке задается, контролируется и регулируется с помощью ряда устройств и приборов системы управления — этим обеспечивается близость движения по всем параметрам или по наиболее важным параметрам к некоторому желаемому. Эту близость образно можно характеризовать размерами так называемой *трубки траекторий*, являющейся, по существу, некоторым переменным во времени шестимерным вектором (три компоненты скорости и три компоненты положения), описывающим область возможных состояний ЛА. Особое значение имеет нахождение этой области в момент выключения двигателя, так как дальнейшее движение ЛА определяется исключительно кинематическими параметрами движения, сложившимися к этому моменту, во всяком случае до тех пор, пока не будут приложены дополнительные управляющие воздействия (если таковые предусмотрены). Нетрудно представить, что для одной и той же возмущенной траектории в зависимости от того, на основании каких измерений и алгоритмов, составленных по этим измерениям, производилось выключение двигателя, дальнейшее движение будет происходить по-разному.

Совокупность принятых измерений и алгоритма их обработки определяющую момент выдачи команды на выключение двигателя, будем называть *методом выключения двигателя*. Оказывается, что и ковариационная матрица, характеризующая рассеивание кинематических параметров движения в момент окончания активного участка, также существенно зависит от метода выключения двигателя. В этой связи будут рассмотрены и вопросы влияния метода выключения двигателя на отклонения траектории. Будут также обсуждены особенности, свойственные различным методам выключения двигателя, и даны некоторые рекомендации по проведению конкретных расчетов.

§ 15.1. Влияние метода управления выключением двигателя
на отклонение кинематических параметров

15.1.1. Понятие о функционале и методе управления выключением двигателя. Любое отклонение траектории от расчетной обусловлено, как известно, возмущающими факторами. Это — и отклонения основных конструктивных параметров ракеты (начальный вес, тяга и др.), и отклонения внешних условий полета (плотность атмосферы, ветер и др.), и погрешности системы управления (программа угла тангажа, ошибки измерительных систем и т.п.). Мы рассмотрели методы, с помощью которых можно рассчитать влияние различных возмущений на полет ракеты на активном участке траектории. Мы установили также, что для получения отклонений кинематических параметров в конце активного участка недостаточно знания действующих возмущений, а необходимо знать и время выключения двигателя. Если это время каким-то образом удастся определить, то, как показывают формулы (13.9), можно будет определить и всю совокупность отклонений параметров движения.

Рис. 15.1. Зависимость дальности полета от времени выключения двигателя для невозмущенной (индекс 0) и возмущенной (индекс 1) траекторий



То обстоятельство, что активный участок по каким-то параметрам или по всей совокупности параметров движения не следует в точности расчетным зависимостям, не дает оснований для вывода о невозможности решения поставленной целевой задачи. В самом деле, предположим, что конечной целью траектории является попадание в точку с заданными координатами. В случае плоского движения это будет означать достижение заданной дальности.

Рассмотрим, как ведет себя зависимость дальности полета от времени выключения двигателя на активном участке (рис. 15.1).

Ясно, что решение поставленной задачи возможно как на той, так и на другой траектории. Надо только суметь на каждой траектории выбрать такой момент времени, выключение двигателя в который обеспечит достижение заданной дальности. Такие же рассуждения можно привести, если, например, надо обеспечить выведение ЛА на орбиту с заданным периодом обращения, заданной энергией или какой-нибудь другой заданной характеристикой, зависящей от момента выключения двигателя. При таких рассуждениях может создаться впечатление, будто любая задача хорошо решается независимо от действующих возмущений. Но это не так по крайней мере по двум причинам. Во-первых, не во всех задачах оказывается возможным компенсировать за счет времени выключения двигателя накопившиеся отклонения от действия возмущающих факторов. Во-вторых, даже в той задаче, которая в принципе допускает такую компенсацию, решение ее оказывается не так просто реализуемым. Степень влияния одного и того же возмущения оказывается различной в зависимости от принятого способа определения момента выключения двигателя, а также от того, на основе каких измерений и по каким уравнениям решается эта задача.

Рассуждая отвлеченно, можно прийти к заключению, что лучше всего было бы свести в пределе к нулю отклонения возмущающих параметров. Но это практически невозможно осуществить не только из соображений технологических, связанных с изготовлением, отладкой, сборкой, подготовкой к пуску ракеты и т.д., но и из соображений принципиального характера (среди возмущений есть такие, которые не находятся "в руках конструктора или испытателя", — это, например, атмосферные условия). Решение задачи можно искать в применении таких принципов управления движением, которые позволяли бы в любой текущий момент времени компенсировать влияние любых возмущений с помощью соответствующего

где Δx_i — отклонения параметров движения v_x, v_y, x, y . Двигатель выключается при $L = L_0$ или при $\Delta L = 0$. При таком решении методические ошибки образуются за счет остаточных членов разложения, не учтенных в уравнении выключения двигателя.

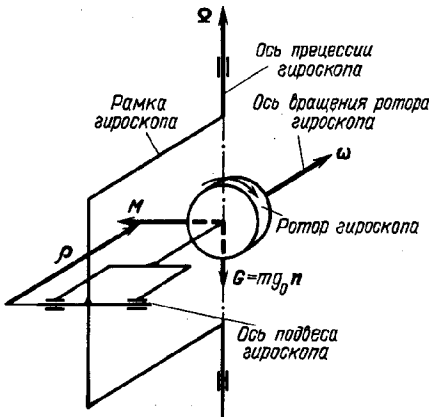
Можно представить себе методы управления дальностью, в которых используется только ограниченная информация о параметрах движения ракеты, например только о составляющих скорости или проекции скорости на заранее выбранное направление. Часто вместо измерения скорости, ее компонент, пути или координат используют измерения некоторых косвенных величин, которые связаны со скоростью или координатами и характеризуют интересующие нас параметры, а следовательно, и дальность. В результате подобных "искажений" в решении поставленной задачи также возникают методические ошибки.

В общем, чем хуже метод управления выключением двигателя описывает условия решения поставленной конечной задачи (достижение заданной дальности, заданного периода обращения, заданной энергии орбиты), тем сильнее будет влияние возмущающих факторов на результат.

В большинстве известных методов управления выключением двигателя используются интеграторы перегрузок. Поэтому, прежде чем перейти к определению отклонений параметров движения в момент выключения двигателя, рассмотрим принцип работы интегратора перегрузок и получим уравнение интегратора.

§ 15.2. Гироскопический интегратор перегрузок

15.2.1. Принцип работы интегратора. Как следует из названия прибора, работа его заключается в том, чтобы измерять и интегрировать перегрузки в полете. Перегрузка — величина безразмерная. Если интегрирование производится по времени, то получаемая величина будет иметь размерность времени. Умножая интегрируемую величину на какую-нибудь постоянную величину, имеющую размерность ускорения (например, на g_0), после интегрирования получим результат, имеющий размерность скорости. Рассмотрим подробнее, какая скорость получается в результате такого



интегрирования и каковы основные принципы работы интегратора.

На рис. 15.2 показана простейшая схема гироскопического интегратора перегрузок. Ротор гироскопа быстро вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (относительно оси подвеса гироскоп не уравновешен). Вся система находится под

Рис. 15.2. Принципиальная схема гироскопического интегратора перегрузок

воздействием перегрузки n , которую примем направленной перпендикулярно к оси подвеса гироскопа. К гироскопу массы m приложена сила $G = mg_0 n$, которая создает на плече $\vec{\rho}$ относительно оси подвеса момент $M = \vec{\rho} \times mg_0 n$. В силу свойств гироскопа ось вращения ротора при этом прецессирует с некоторой угловой скоростью $\vec{\Omega}$ относительно оси, перпендикулярной к плоскости, содержащей векторы M и $\vec{\omega}$, причем вектор $\vec{\omega}$ стремится совместиться с вектором M , двигаясь по кратчайшему пути. Однако конструкция прибора такова, что прецессия оси ротора увлекает за собой рамку, и вектор M поворачивается вместе с осью вращения ротора. На рис. 15.2 вектор угловой скорости прецессии направлен вверх. Модуль этого вектора, как известно, пропорционален действующему моменту и обратно пропорционален моменту инерции гироскопа C и угловой скорости его вращения ω :

$$\Omega = M/C\omega.$$

Величина момента (с учетом того, что угол между векторами $\vec{\rho}$ и n составляет $\pi/2$) равна $M = mg_0 \rho n$. Тогда

$$\Omega = \frac{mg_0 \rho n}{C\omega}.$$

Объединяя постоянные величины в один коэффициент

$$k_1 = \frac{mg_0 \rho}{C\omega}, \text{ получим } \Omega = k_1 n.$$

Угол прецессии рамки гироскопа определяется выражением

$$\psi = \int_0^t \Omega dt = \int_0^t k_1 n dt = k_1 \int_0^t n dt. \quad (15.1)$$

Наиболее простым и часто встречающимся случаем является неподвижная установка интегратора относительно связанной с ракетой системы координат $Ox_1 y_1 z_1$. Тогда ось чувствительности интегратора, т.е. направление, вдоль которого производится измерение перегрузки, совмещают с продольной осью ракеты x_1 . Соответствующую этому случаю перегрузку обозначим через n_{x_1} . Теперь выражение (15.1) запишется так:

$$\psi = k_1 \int_0^t n_{x_1} dt. \quad (15.2)$$

Выразим n_{x_1} через ускорение ракеты и результат подставим в (15.2). Для этого воспользуемся уравнением движения в проекции на касательную к траектории, написанным в наиболее простом виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta. \quad (15.3)$$

Здесь угол атаки принят равным нулю, и, следовательно, направления оси ракеты и скорости совпадают.

Согласно определению, перегрузка есть отношение суммы всех действующих на ракету сил (кроме силы тяжести) к весу ракеты, приведенному к земным условиям. Проектируя перегрузку на направление продольной оси ракеты, при условии отсутствия угла атаки получаем

$$n_{x_1} = \frac{P - X}{mg_0},$$

откуда

$$\frac{P - X}{m} = g_0 n_{x_1}. \quad (15.4)$$

С другой стороны, из уравнения (15.3) следует, что

$$\frac{P - X}{m} = \dot{v} + g \sin \theta. \quad (15.5)$$

Приравняв (15.4) и (15.5) и разрешая относительно n_{x_1} , находим

$$n_{x_1} = \frac{1}{g_0} (\dot{v} + g \sin \theta).$$

Теперь подставим полученное значение n_{x_1} в (15.2):

$$\psi = k_1 \int_0^t \frac{1}{g_0} (\dot{v} + g \sin \theta) dt.$$

Вынося g_0 из под знака интеграла как величину постоянную и обозначая $k_1/g_0 = k$, будем иметь

$$\psi = k \int_0^t (\dot{v} + g \sin \theta) dt = k(v + \int_0^t g \sin \theta dt).$$

Таким образом, угол прецессии интегратора пропорционален сумме, составленной из фактической скорости ракеты v и скорости $\int_0^t g \sin \theta dt$ и называемой *кажущейся скоростью*

$$v_s = v + \int_0^t g \sin \theta dt \quad (15.6)$$

или

$$v_s = \int_0^t \frac{P - X}{m} dt.$$

Величина $\dot{v} + g \sin \theta$ называется *кажущимся ускорением* и обозначается через \dot{v}_s :

$$\dot{v}_s = \dot{v} + g \sin \theta. \quad (15.7)$$

Как следует из (15.7), кажущееся ускорение больше, чем касательное ускорение, действующее на ракету, на величину $g \sin \theta$ (при положительном угле θ).

15.2.2. Уравнение интегратора. Уравнение (15.6) лишь приближенно описывает работу интегратора, в связи с чем его можно использовать только для грубых оценок. На практике же пользуются более полным уравнением, к описанию которого и перейдем.

Представим себе материальную точку массы m^* , связанную с корпусом ракеты. Пренебрегая вращательным движением ракеты вокруг центра масс, будем считать, что ускорение этой материальной точки равно ускорению центра масс ракеты. Но ускорение рассматриваемой точки создается двумя силами: силой тяжести m^*g и силой R , действующей на точку со стороны ракеты и являющейся, по сути дела, реакцией опоры (рис. 15.3, где \dot{v} и $v\dot{\theta}$ — проекции полного ускорения на направления касательной к траектории и нормали к ней).

Напишем уравнение движения точки в проекции на некоторое направление (направление оси чувствительности), которое образует угол α^* с касательной к траектории центра масс ракеты и угол φ^* — с горизонтом (за горизонт принимаем ось Ox , а направление силы тяжести считаем параллельным оси Oy), так что

$$\varphi^* = \theta + \alpha^*. \quad (15.8)$$

Такое уравнение будет иметь вид

$$m^*(\dot{v} \cos \alpha^* + v\dot{\theta} \sin \alpha^*) = R_{\varphi^*} - m^*g \sin \varphi^*, \quad (15.9)$$

где R_{φ^*} — проекция силы R на рассматриваемое направление.

Независимо от устройства интегратора сила R_{φ^*} вызывает какой-либо физический эффект, действие которого интегрируется на протяжении всего активного участка полета. В случае гироскопического интегратора мы имеем дело, как было показано выше, с прецессией гироскопа, причем

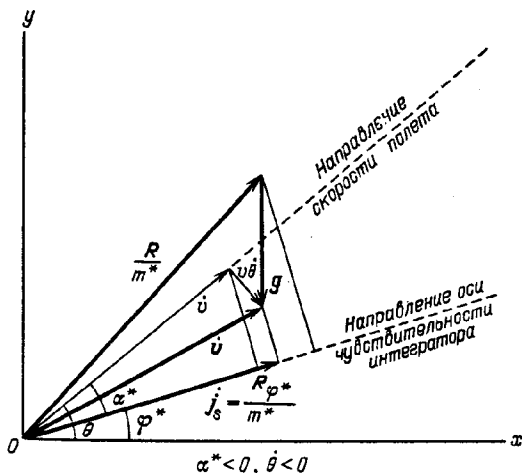


Рис. 15.3. К выводу полного уравнения работы интегратора перегрузок

угловая скорость прецессии пропорциональна перегрузке, а угол прецессии, являющийся измеряемой величиной, пропорционален интегралу от перегрузки.

Если уравнение (15.9) переписать в виде

$$\frac{R_{\varphi^*}}{m^*} = \dot{v} \cos \alpha^* + v \dot{\theta} \sin \alpha^* + g \sin \varphi^*,$$

то его левая часть и будет величиной, пропорциональной перегрузке, действующей в направлении оси чувствительности интегратора, т.е. кажущимся ускорением. Интеграл, взятый от этой величины по времени, даст нам кажущуюся скорость

$$v_s = \int_0^t \frac{R_{\varphi^*}}{m^*} dt = \int_0^t (\dot{v} \cos \alpha^* + v \dot{\theta} \sin \alpha^* + g \sin \varphi^*) dt$$

или

$$v_s = \int_0^t \dot{v} \cos \alpha^* dt + \int_0^t v \dot{\theta} \sin \alpha^* dt + \int_0^t g \sin \varphi^* dt.$$

Первый интеграл берем по частям:

$$\int_0^t \dot{v} \cos \alpha^* dt = v \cos \alpha^* \Big|_0^t - \int_0^t v d(\cos \alpha^*).$$

Поскольку $v = 0$ при $t = 0$, то

$$\int_0^t \dot{v} \cos \alpha^* dt = v \cos \alpha^* + \int_0^t v \sin \alpha^* \dot{\alpha}^* dt$$

и

$$v_s = v \cos \alpha^* + \int_0^t v(\dot{\theta} + \dot{\alpha}^*) \sin \alpha^* dt + \int_0^t g \sin \varphi^* dt.$$

Но на основании (15.8)

$$\dot{\varphi}^* = \dot{\theta} + \dot{\alpha}^*,$$

поэтому

$$v_s = v \cos \alpha^* + \int_0^t v \dot{\varphi}^* \sin \alpha^* dt + \int_0^t g \sin \varphi^* dt.$$

В частности, при $t = t_K$

$$v_{sK} = v_K \cos \alpha_K^* + \int_0^{t_K} g \sin \varphi^* dt + \int_0^{t_K} v \dot{\varphi}^* \sin \alpha^* dt.$$

Если интегратор жестко закреплен на борту ракеты так, что направление его оси чувствительности совпадает с направлением продольной оси ракеты,

то $\varphi = \varphi^*$, $\alpha = \alpha^*$ и

$$v_{sK} = v_K \cos \alpha_K + \int_0^{t_K} g \sin \varphi dt + \int_0^{t_K} v \sin \alpha dt. \quad (15.10)$$

Уравнение (15.10) достаточно точно описывает работу интегратора осевых перегрузок, и им обычно и пользуются практически при всех баллистических расчетах, включая расчеты по составлению таблиц стрельбы и настроечных данных для интегратора.

В уравнении (15.10) последний член мал по сравнению с первыми двумя, так как обычно бывают малы угловая скорость наклона оси ракеты $\dot{\varphi}$ и угол атаки α . Если последним членом пренебречь, а в первом члене принять $\cos \alpha_K \approx 1$, то получим

$$v_{sK} = v_K + \int_0^{t_K} g \sin \varphi dt,$$

что с точностью до углов атаки совпадает с приближенным уравнением интегратора (15.6).

15.2.3. Применение интегратора. Основным назначением интеграторов рассматриваемого типа является формирование команды на выключение двигателя. В процессе полета ракеты непрерывно вырабатывается с помощью интегратора текущее значение кажущейся скорости, которое сравнивается с некоторым заданным постоянным значением. В тот момент, когда эти два значения совпадают, подается команда на выключение двигателя.

Рис. 15.4. Характер набора кажущейся скорости по времени полета

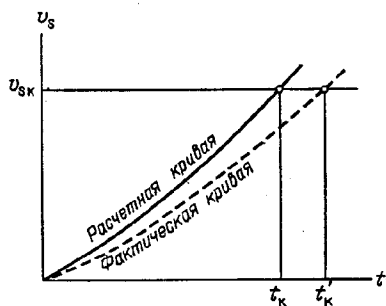
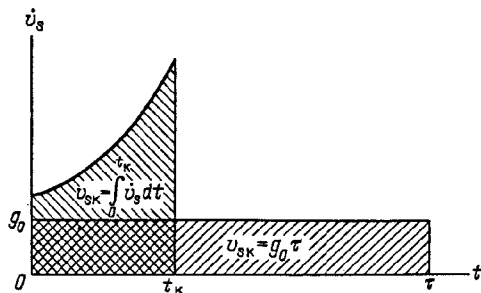


Рис. 15.5. К определению настроечного времени интегратора



Как уже говорилось, в силу различных возмущающих причин полет ракеты происходит не по расчетной траектории; в частности, изменение по времени кажущегося ускорения и кажущейся скорости отличается от расчетного. Поэтому отличается от расчетного и момент достижения заданного значения кажущейся скорости (рис. 15.4).

Настройка интегратора на заданное значение кажущейся скорости производится на старте, перед полетом ракеты, когда действующая перегрузка равна единице, а соответствующее кажущееся ускорение равно ускорению земного притяжения. При этих условиях заданная скорость будет достигнута через τ секунд. Время τ называется *настроечным временем* интегратора.

Таким образом, имеет место равенство

$$v_{\text{зк}} = \int_0^{t_{\text{к}}} \dot{v}_{\text{з}} dt = \int_0^{\tau} g_0 dt = g_0 \tau,$$

откуда

$$\tau = v_{\text{зк}} / g_0.$$

Поскольку на участках выведения перегрузка, как правило, больше единицы, настроечное время всегда больше времени активного участка. На рис. 15.5 сказанному дано графическое пояснение.

§ 15.3. Отклонение кинематических параметров в момент выключения двигателя

Перейдем к определению отклонений параметров движения в момент выключения двигателя, связав этот момент с методами выключения двигателя, т.е. с функционалом. Не имея возможности охватить все виды функционалов, остановимся только на некоторых из них. Для нас основной интерес будет представлять методическая сторона вопроса использования функционала в таких задачах.

Из формул (13.9) или (13.11) следует, что интересующие нас отклонения зависят не только от возмущений $\Delta\lambda_n$, но и от времени выключения двигателя. Другими словами, неизвестными величинами, подлежащими определению, являются не только $\Delta v_{\text{к}}$, $\Delta\theta_{\text{к}}$, $\Delta y_{\text{к}}$, $\Delta x_{\text{к}}$, но и отклонение времени $\Delta t_{\text{к}}$. Четырех зависимостей (13.9) или (13.11) недостаточно для определения пяти неизвестных величин. Для решения задачи должно быть привлечено еще одно уравнение — уравнение выключения двигателя, или функционал.

Как было показано выше, для определения возмущенных значений параметров движения не обязательно пользоваться формулами (13.10), предполагающими знание ряда производных типа $\partial\varphi_i/\partial\lambda_n$ и возможность явного представления связи между отклонениями $\Delta\lambda_n$ и Δt с помощью уравнения выключения двигателя. Общим случаем является интегрирование полной системы уравнений возмущенного движения с одновременным контролем величины функционала. В момент достижения функционалом заданного значения фиксируются параметры движения, в том числе и момент времени. Здесь обычно никаких затруднений не возникает, но подобный метод прямого расчета является самым трудоемким. Поэтому более подробно мы остановимся на решении задачи с использованием производных $\partial\varphi_i/\partial\lambda_n$, полагая, что они определены с помощью уже рассмот-

ренных нами методов, и считая все отклонения малыми, а следовательно, допускающими проведение исследований в линейной постановке.

15.3.1. Выключение двигателя по времени его работы (по функционалу $t_k = t_k^*$). Здесь t_k^* — фиксированное расчетное время выключения двигателя, обеспечивающее достижение заданной цели полета по невозмущенной (номинальной) траектории, t_k — время выключения двигателя на реальной траектории.

Если выключение произошло точно в заданное время, то $\Delta t_k = 0$. При выключении двигателя с некоторой инструментальной погрешностью прибора Δt_n имеем

$$\Delta t_k = \Delta t_n. \quad (15.11)$$

Тогда формулы (13.11) с учетом (15.11) запишутся так:

$$\begin{aligned} \Delta v_k &= \dot{v}_k \Delta t_n + \sum_n \frac{\partial v_k}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n, \\ \Delta \theta_k &= \dot{\theta}_k \Delta t_n + \sum_n \frac{\partial \theta_k}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n, \\ \Delta y_k &= \dot{y}_k \Delta t_n + \sum_n \frac{\partial y_k}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n, \\ \Delta x_k &= \dot{x}_k \Delta t_n + \sum_n \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Таким образом, введение в рассмотрение функционала решило вопрос с неопределенностью отклонения времени выключения двигателя Δt_k .

Формулы (15.12) удобно записать в матрично-векторной форме, для чего введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta X &= (\Delta v_k, \Delta \theta_k, \Delta y_k, \Delta x_k)^T, \\ \Delta \vec{\lambda} &= (\Delta t_n, \Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \dots, \Delta \lambda_7)^T. \end{aligned}$$

$$Z = \begin{bmatrix} \dot{v} & \frac{\partial v_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial v_k}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial v_k}{\partial \lambda_7} \\ \dot{\theta} & \frac{\partial \theta_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \theta_k}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \theta_k}{\partial \lambda_7} \\ \dot{y} & \frac{\partial y_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y_k}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial y_k}{\partial \lambda_7} \\ \dot{x} & \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_7} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\Delta X = Z \Delta \vec{\lambda}. \quad (15.13)$$

Формулы (15.12) или (15.13) дают представление не о рассеивании параметров движения в конце активного участка, а определяют их отклонение для конкретной заданной совокупности возмущений, т.е. для детерминированных значений возмущений. Более полное представление о рассе-

вании дает ковариационная матрица отклонений, которая описывает, по существу, многомерный эллипсоид, полуоси которого соответствуют среднеквадратическим отклонениям исследуемых кинематических параметров.

Если $K_{\Delta \vec{\lambda}}$ — ковариационная матрица вектора $\Delta \vec{\lambda}$, то ковариационная матрица отклонений кинематических параметров конца активного участка будет

$$K_{\Delta X} = Z K_{\Delta \vec{\lambda}} Z^T. \quad (15.14)$$

Как правило, матрица $K_{\Delta \vec{\lambda}}$ диагональная, так как $\Delta t_n, \Delta \lambda_1, \dots, \Delta \lambda_7$ — независимые случайные величины со среднеквадратическими отклонениями $\sigma_{\Delta t_n}, \sigma_{\Delta \lambda_1}, \dots, \sigma_{\Delta \lambda_7}$, т.е.

$$K_{\Delta \vec{\lambda}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta t_n}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta \lambda_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\Delta \lambda_2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta \lambda_7}^2 \end{bmatrix}.$$

Однако матрица $K_{\Delta X}$ даже в этом случае не будет диагональной:

$$K_{\Delta X} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 & K_{v\theta} & K_{vy} & K_{vx} \\ K_{\theta v} & \sigma_\theta^2 & K_{\theta y} & K_{\theta x} \\ K_{yv} & K_{y\theta} & \sigma_y^2 & K_{yx} \\ K_{xv} & K_{x\theta} & K_{xy} & \sigma_x^2 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы $K_{\Delta X}$ представляют собой квадраты среднеквадратических отклонений (дисперсии) соответствующих кинематических параметров, а остальные элементы — ковариации этих параметров.

15.3.2 Выключение двигателя по заданной скорости (по функционалу $v_k = v_k^*$). Здесь v_k^* — фиксированная расчетная скорость при выключении двигателя на невозмущенной траектории, v_k — скорость при выключении двигателя на реальной траектории.

Если выключение произошло точно при заданной скорости, то $\Delta v_k = 0$. При наличии инструментальной погрешности измерения скорости Δv_n в момент выключения двигателя получим

$$\Delta v_k = \Delta v_n. \quad (15.15)$$

Тогда на основании первой формулы (13.11) с учетом (15.15) будем иметь

$$\Delta v_n = \dot{v}_k \Delta t_k + \sum_{n=1}^7 \frac{\partial v_k}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n,$$

откуда

$$\Delta t_k = \frac{1}{\dot{v}_k} \Delta v_n - \frac{1}{\dot{v}_k} \sum_{n=1}^7 \frac{\partial v_k}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n.$$

Таким образом, привлекая к рассмотрению функционал, удалось опреде-

лить отклонение времени выключения двигателя. Теперь, подставляя в формулы (13.11) найденное значение Δt_{κ} , получаем

$$\begin{aligned} \Delta v_{\kappa} &= \Delta v_{и}, \\ \Delta \theta_{\kappa} &= \frac{\dot{\theta}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \Delta v_{и} + \sum_n \left(\frac{\partial \theta_{\kappa}}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{\theta}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \frac{\partial v_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right) \Delta \lambda_n, \\ \Delta y_{\kappa} &= \frac{\dot{y}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \Delta v_{и} + \sum_n \left(\frac{\partial y_{\kappa}}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{y}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \frac{\partial v_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right) \Delta \lambda_n, \\ \Delta x_{\kappa} &= \frac{\dot{x}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \Delta v_{и} + \sum_n \left(\frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{x}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \frac{\partial v_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right) \Delta \lambda_n. \end{aligned} \quad (15.16)$$

По своему смыслу члены, заключенные в скобки под знаком \sum_n в выражениях (15.16), представляют собой производные от соответствующих параметров по возмущающим факторам λ_n при условии постоянства скорости. Для удобства введем обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{\kappa}}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{\theta}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \frac{\partial v_{\kappa}}{\partial \lambda_n} &= \left. \frac{\partial \theta_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v, \\ \frac{\partial y_{\kappa}}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{y}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \frac{\partial v_{\kappa}}{\partial \lambda_n} &= \left. \frac{\partial y_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v, \\ \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{x}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \frac{\partial v_{\kappa}}{\partial \lambda_n} &= \left. \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v. \end{aligned}$$

Теперь выражения (15.16) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta v_{\kappa} &= \Delta v_{и}, \\ \Delta \theta_{\kappa} &= \frac{\dot{\theta}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \Delta v_{и} + \sum_n \left. \frac{\partial \theta_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v \Delta \lambda_n, \\ \Delta y_{\kappa} &= \frac{\dot{y}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \Delta v_{и} + \sum_n \left. \frac{\partial y_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v \Delta \lambda_n, \\ \Delta x_{\kappa} &= \frac{\dot{x}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} \Delta v_{и} + \sum_n \left. \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v \Delta \lambda_n. \end{aligned} \quad (15.17)$$

По аналогии с предыдущим введем вектор $\Delta \vec{\lambda} = (\Delta v_{и}, \Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \dots, \Delta \lambda_n)^T$ и матрицу

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\dot{\theta}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} & \left. \frac{\partial \theta_{\kappa}}{\partial \lambda_1} \right|_v & \left. \frac{\partial \theta_{\kappa}}{\partial \lambda_2} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial \theta_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v \\ \frac{\dot{y}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} & \left. \frac{\partial y_{\kappa}}{\partial \lambda_1} \right|_v & \left. \frac{\partial y_{\kappa}}{\partial \lambda_2} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial y_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v \\ \frac{\dot{x}_{\kappa}}{\dot{v}_{\kappa}} & \left. \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \lambda_1} \right|_v & \left. \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \lambda_2} \right|_v & \dots & \left. \frac{\partial x_{\kappa}}{\partial \lambda_n} \right|_v \end{bmatrix}.$$

Тогда вектор отклонений кинематических параметров и его ковариационная матрица будут

$$\Delta X = Z \Delta \vec{\lambda}, \quad (15.18)$$

$$K_{\Delta X} = Z K_{\Delta \vec{\lambda}} Z^T. \quad (15.19)$$

Матрица $K_{\Delta \vec{\lambda}}$ диагональная, так как случайные величины $\Delta v_{и}, \Delta \lambda_1, \dots, \dots, \Delta \lambda_7$ — независимы:

$$K_{\Delta \vec{\lambda}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta v_{и}}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta \lambda_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\Delta \lambda_2}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_{\Delta \lambda_7}^2 \end{bmatrix}.$$

Из формул (15.17) видно, что наличие инструментальной погрешности в скорости вызывает появление соответствующих ошибок в координатах и угле наклона вектора скорости. Это объясняется тем, что отклонение значения скорости приводит к отклонению времени выключения двигателя на величину $\Delta v_{и}/\dot{v}_{к}$, что и вызывает ошибки, описываемые первыми членами формул (15.17).

15.3.3. Выключение двигателя по кажущейся скорости (по функционалу $v_s = v_s^*$). Возьмем уравнение интегратора в упрощенном виде

$$v_s = v + \int_0^t g \sin \varphi dt. \quad (15.20)$$

Поскольку при рассматриваемом методе текущее значение кажущейся скорости непрерывно сравнивается с заданным конечным значением v_s^* и команда на выключение двигателя выдается при совпадении этих значений, функционал можно записать в следующем виде:

$$v_s = v_s^*$$

(здесь и дальше индексы "к" при параметрах, относящихся к концу активного участка, опущены.)

Если выключение двигателя произошло точно при заданной кажущейся скорости, то

$$\Delta v_s = 0.$$

При учете инструментальной погрешности интегратора $\Delta v_{сн}$ будем иметь

$$\Delta v_s = \Delta v_{сн}. \quad (15.21)$$

Проварьируем левую и правую части уравнения интегратора (15.20) и в левой части на основании (15.21) заменим Δv_s на $\Delta v_{сн}$:

$$\Delta v_{сн} = \Delta v + \int_0^t \delta g \sin \varphi dt + \int_0^t g \cos \varphi \delta \varphi dt + g \sin \varphi \Delta t.$$

В этом выражении пренебрежем вариацией δg за счет вариации высоты

полета и перепишем его в виде

$$\Delta v = \Delta v_{сн} - g \sin \varphi \Delta t - \int_0^t g \cos \varphi \delta \varphi dt. \quad (15.22)$$

Вариация $-\int_0^t g \cos \varphi \delta \varphi dt$ является следствием погрешностей задания и обработки программы угла тангажа. Она представляет собой своего рода инструментальную погрешность, вносимую в измерение скорости. Обозначим этот член в выражении (15.22) через $\Delta v_{с\varphi}$. Тогда для отклонения скорости в момент выключения двигателя получим

$$\Delta v = \Delta v_{сн} + \Delta v_{с\varphi} - g \sin \varphi \Delta t. \quad (15.23)$$

С другой стороны, для этого же отклонения независимо от способа выключения двигателя справедливо выражение

$$\Delta v = \dot{v} \Delta t + \sum_n \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n. \quad (15.24)$$

Приравнявая (15.23) и (15.24), находим Δt :

$$\Delta t = \frac{1}{\dot{v} + g \sin \varphi} (\Delta v_{сн} + \Delta v_{с\varphi}) - \frac{1}{\dot{v} + g \sin \varphi} \sum_n \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n. \quad (15.25)$$

Учитывая, что сумма $\dot{v} + g \sin \varphi$ представляет собой кажущееся ускорение \dot{v}_s , перепишем (15.25) в следующем виде:

$$\Delta t = \frac{1}{\dot{v}_s} (\Delta v_{сн} + \Delta v_{с\varphi}) - \frac{1}{\dot{v}_s} \sum_n \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \Delta \lambda_n. \quad (15.26)$$

Первый член в (15.26) характеризует отклонение времени выключения двигателя, связанное с инструментальными погрешностями измерения кажущейся скорости и задания программы угла тангажа. Второй член определяет отклонение времени из-за влияния возмущений $\Delta \lambda_n$.

Подставив полученное значение Δt в формулы (13.11), получим отклонения параметров движения в конце активного участка при условии выключения двигателя от интегратора перегрузок:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\dot{v}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{сн} + \Delta v_{с\varphi}) + \sum_n \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{v}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right) \Delta \lambda_n, \\ \Delta \theta &= \frac{\dot{\theta}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{сн} + \Delta v_{с\varphi}) + \sum_n \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{\theta}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right) \Delta \lambda_n, \\ \Delta y &= \frac{\dot{y}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{сн} + \Delta v_{с\varphi}) + \sum_n \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{y}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right) \Delta \lambda_n, \\ \Delta x &= \frac{\dot{x}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{сн} + \Delta v_{с\varphi}) + \sum_n \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{x}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right) \Delta \lambda_n. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Множители перед $\Delta \lambda_n$ под знаком \sum_n представляют собой производные от параметров движения по возмущающим факторам при наложении

условия постоянства кажущейся скорости. Поэтому целесообразно ввести обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{v}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} &= \left. \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{\theta}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} &= \left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s}, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{y}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} &= \left. \frac{\partial y}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s}, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda_n} - \frac{\dot{x}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} &= \left. \frac{\partial x}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s} \end{aligned}$$

и переписать (15.27) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\dot{v}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{sн} + \Delta v_{s\varphi}) + \sum_n \left. \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s} \Delta \lambda_n, \\ \Delta \theta &= \frac{\dot{\theta}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{sн} + \Delta v_{s\varphi}) + \sum_n \left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s} \Delta \lambda_n, \\ \Delta y &= \frac{\dot{y}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{sн} + \Delta v_{s\varphi}) + \sum_n \left. \frac{\partial y}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s} \Delta \lambda_n, \\ \Delta x &= \frac{\dot{x}}{\dot{v}_s} (\Delta v_{sн} + \Delta v_{s\varphi}) + \sum_n \left. \frac{\partial x}{\partial \lambda_n} \right|_{v_s} \Delta \lambda_n. \end{aligned}$$

Введем вектор $\Delta \vec{\lambda} = ((\Delta v_{sн} + \Delta v_{s\varphi}), \Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \dots, \Delta \lambda_7)^T$ и матрицу

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{\dot{v}}{\dot{v}_s} \frac{\partial v}{\partial \lambda_1} \Big|_{v_s} & \dots & \frac{\partial v}{\partial \lambda_7} \Big|_{v_s} \\ \frac{\dot{\theta}}{\dot{v}_s} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} \Big|_{v_s} & \dots & \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_7} \Big|_{v_s} \\ \frac{\dot{y}}{\dot{v}_s} \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} \Big|_{v_s} & \dots & \frac{\partial y}{\partial \lambda_7} \Big|_{v_s} \\ \frac{\dot{x}}{\dot{v}_s} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \Big|_{v_s} & \dots & \frac{\partial x}{\partial \lambda_7} \Big|_{v_s} \end{bmatrix}$$

Тогда вектор отклонений кинематических параметров и его ковариационная матрица будут иметь вид

$$\Delta X = Z \Delta \vec{\lambda}, \quad (15.28)$$

$$K_{\Delta X} = Z K_{\Delta \vec{\lambda}} Z^T, \quad (15.29)$$

где $K_{\Delta \vec{\lambda}}$ — диагональная матрица, так как случайные величины $(\Delta v_{sн} + \Delta v_{s\varphi}), \Delta \lambda_1, \dots, \Delta \lambda_7$ независимы. Элементы этой матрицы представляют собой квадраты среднеквадратических отклонений соответствующих случайных

$$\text{параметров} \quad K_{\Delta \vec{\lambda}} = \begin{bmatrix} \sigma^2(\Delta v_{sH} + \Delta v_{s\varphi}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\Delta \lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\Delta \lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma^2_{\Delta \lambda_7} \end{bmatrix}.$$

Выражения (15.13) и (15.14) для случая выключения двигателя по времени его работы, (15.18) и (15.19) — по заданной скорости, (15.28) и (15.29) — по кажущейся скорости решают задачу об определении отклонений и рассеивания кинематических параметров в конце активного участка. Для других функционалов задача решается аналогично.

Глава 16

РАСЧЕТ РАССЕИВАНИЯ

Расчет рассеивания не всегда заканчивается определением ковариационной матрицы параметров движения в конце активного участка. В ряде случаев полученная матрица рассматривается как промежуточный результат, на основании которого предстоит провести расчет рассеивания каких-либо наиболее важных характеристик движения, являющихся следствием рассеивания параметров движения в конце активного участка. Кроме того, имеется ряд других компонент, вносящих свой вклад в общее рассеивание. Эти вопросы будут рассмотрены применительно к расчету рассеивания баллистической ракеты по дальности. В заключение главы обсуждаются некоторые принципы построения систем управления, применение которых позволяет уменьшить рассеивание.

§ 16.1. Рассеивание целевой функции

Следующая задача заключается в определении рассеивания целевой функции, т.е. в определении рассеивания тех конечных характеристик траектории, которыми определяется эффективность решения поставленной задачи. Для баллистической ракеты, например, такой целевой функцией являются заданные координаты цели, и тогда речь идет о рассеивании координат точек падения ракеты относительно цели.

При выведении на орбиту ИСЗ большое внимание уделяется разбросу периода обращения относительно заданного. Если оценка эффективности решения траекторной задачи определяется рассеиванием периода обращения, то целевой функцией является период обращения и в таком случае речь идет об определении рассеивания периода обращения.

Рассмотрим более сложный пример. При выведении спутника связи на стационарную орбиту Земли обычно критическими являются отклонения периода обращения T , наклона орбиты i , эксцентриситета орбиты e и долготы положения спутника. Эффективность решения задач связи, поставленных перед стационарным спутником, является некоторой сложной

функцией указанных параметров. После выведения спутника связи на достаточно низкую опорную орбиту осуществляется его перевод на конечную орбиту с помощью нескольких включений разгонных блоков.

В этой задаче рассеивание конечных параметров спутника зависит как от погрешностей выведения на опорную орбиту, так и от погрешностей, возникающих при работе разгонных блоков. Поэтому следует оценить вклад, вносимый в конечное рассеивание параметров движения спутника каждым участком траектории, в том числе и участком выведения на опорную орбиту. Для этого надо отклонения параметров движения, полученные для момента выведения на опорную орбиту, перевести в отклонения на стационарной орбите, воспользовавшись частными производными от параметров конечной орбиты по параметрам движения в конце выведения на опорную орбиту. При этом, естественно, полагается, что работа разгонных блоков происходит идеально и никаких дополнительных погрешностей не вносит. Под идеальной работой разгонных блоков понимается, что на этом участке все операции производятся в точном соответствии с заранее рассчитанной номинальной траекторией, каковы бы ни были результаты выведения на опорную орбиту, т.е. при работе разгонных блоков ошибки выведения на опорную орбиту не компенсируются. В этом и подобном примерах отклонения параметров движения в момент выведения на опорную орбиту рассматриваются как некие начальные возмущения ΔX_1 , которые приводят к отклонениям ΔX_k целевой функции. В общем случае можно написать

$$\Delta X_k = \frac{\partial X_k}{\partial X_1} \Delta X_1, \quad (16.1)$$

где $\partial X_k / \partial X_1$ — матрица частных производных от параметров вектора X_k по параметрам вектора X_1 . Но поскольку $\Delta X_1 = Z \Delta \vec{\lambda}$, то

$$\Delta X_k = \frac{\partial X_k}{\partial X_1} Z \Delta \vec{\lambda}. \quad (16.2)$$

Формула (16.1) дает отклонения вектора X_k , если известны отклонения вектора X_1 .

Рассеивание вектора целевой функции X_k будет характеризоваться ковариационной матрицей

$$K_{\Delta X_k} = \frac{\partial X_k}{\partial X_1} K_{\Delta X_1} \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \right)^T. \quad (16.3)$$

Но поскольку

$$K_{\Delta X_1} = \frac{\partial X_1}{\partial \vec{\lambda}} K_{\Delta \vec{\lambda}} \left(\frac{\partial X_1}{\partial \vec{\lambda}} \right)^T,$$

то можно написать

$$K_{\Delta X_k} = \frac{\partial X_k}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial \vec{\lambda}} K_{\Delta \vec{\lambda}} \left(\frac{\partial X_1}{\partial \vec{\lambda}} \right)^T \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \right)^T$$

или

$$K_{\Delta X_k} = \frac{\partial X_k}{\partial X_1} Z K_{\Delta \vec{\lambda}} Z^T \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \right)^T \quad (16.4)$$

Эту формулу можно получить и иначе. Запишем

$$K_{\Delta X_k} = \frac{\partial X_k}{\partial \vec{\lambda}} K_{\Delta \vec{\lambda}} \left(\frac{\partial X_k}{\partial \vec{\lambda}} \right)^T, \quad (16.5)$$

но

$$\frac{\partial X_k}{\partial \vec{\lambda}} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial \vec{\lambda}} \right) = \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial X_1}{\partial \vec{\lambda}} \right) = \frac{\partial X_k}{\partial X_1} Z,$$

$$\left(\frac{\partial X_k}{\partial \vec{\lambda}} \right)^T = \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} Z \right)^T = Z^T \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \right)^T,$$

и после подстановки последнего выражения в (16.5) получаем

$$K_{\Delta X_k} = \frac{\partial X_k}{\partial X_1} Z K_{\Delta \vec{\lambda}} Z^T \left(\frac{\partial X_k}{\partial X_1} \right)^T.$$

Как отмечалось, в большинстве случаев представляет интерес отклонение или рассеивание какой-либо одной конечной характеристики траектории, например максимальной высоты орбиты, периода обращения, дальности полета и т.д. Разумеется, для этих случаев все полученные формулы остаются в силе, однако их конкретная реализация в вычислительном плане значительно упрощается, так как вместо многокомпонентного конечного вектора рассматривается только одна его компонента. Например, если нас интересует отклонение периода обращения T спутника, то надо воспользоваться производными $\partial T/\partial v$, $\partial T/\partial \theta$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial x$ для пересчета отклонений Δv , $\Delta \theta$, Δy , Δx в отклонение ΔT :

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial T}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x$$

или в векторной форме записи

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial X} \Delta X,$$

где

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \left(\frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Но [см. (15.28)]

$$\Delta X = Z \Delta \vec{\lambda},$$

поэтому

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial X} Z \Delta \vec{\lambda}.$$

Для определения рассеивания периода обращения следует воспользоваться общей формулой (16.3), в которой $\partial X_k/\partial X_1$ надо заменить на

$\partial T/\partial X$, и тогда мы получим величину дисперсии периода обращения

$$\sigma_T^2 = \frac{\partial T}{\partial X} K_{\Delta X} \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)^T, \quad (16.6)$$

где $K_{\Delta X}$ — ковариационная матрица вектора отклонений кинематических параметров в конце активного участка.

Как было показано ранее,

$$K_{\Delta X} = ZK_{\Delta \lambda} Z^T.$$

Поэтому формулу (16.6) можно записать следующим образом:

$$\sigma_T^2 = \frac{\partial T}{\partial X} ZK_{\Delta \lambda} Z^T \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)^T. \quad (16.7)$$

Особенностью формул, имеющих структуру (16.6) или (16.7), является наличие в них производных типа $\partial T/\partial X$. Такие производные должны быть заранее получены теми или иными методами. Чаще всего удается их представить в виде конечных аналитических зависимостей. Рассматривая задачу определения рассеивания по дальности для баллистической ракеты, мы покажем некоторые особенности использования этих производных.

§ 16.2. Рассеивание баллистической ракеты по дальности

16.2.1. Составляющие рассеивания. Рассеивание по дальности при полете баллистической ракеты является следствием возмущений, действующих на трех характерных участках траектории: активном, переходном и свободном. Каждый из этих участков вносит свой вклад в общее рассеивание.

Наиболее сильные возмущения действуют на активном участке, и если не принимать мер для парирования эффекта от их действия, разброс по дальности может достигать сотен километров. Это нетрудно оценить. При пуске ракеты на дальности 10–12 тыс. км скорость в конце активного участка составляет около 7000 м/с. Скорость примерно пропорциональна удельной тяге двигателя, которая может колебаться в пределах $\pm 1\%$. Следовательно, колебания скорости будут достигать 70 м/с, что равносильно отклонению дальности до 600 – 700 км. Контроль скорости полета и формирование команды на выключение двигателя с учетом достигнутой скорости является одним из возможных способов парирования вредного влияния естественного разброса не только удельной тяги, но и ряда других факторов.

Наряду с использованием более совершенных функционалов для определения момента выключения двигателя можно, как указывалось выше, осуществлять регулирование движения центра масс ракеты вдоль всей траектории по заранее заданному закону. Из сказанного следует, что хотя действующие на активном участке возмущения и способны привести к большому неприятностям, однако имеющиеся в нашем распоряжении средства воздействия достаточно эффективны и дают принципиальную возможность ограничить отклонения по дальности за счет этих возмущений до минимума.

Совсем не так обстоит дело на последующих участках полета, если иметь в виду ракету, построенную по классической схеме¹⁾. Любые отклонения от расчетного движения, возникающие на этих участках, никак не компенсируются и поэтому в полной мере сказываются на дальности полета.

Переход от полета на активном участке к свободному полету происходит не мгновенно, а в течение определенного времени, за которое головная часть (ГЧ) должна отделиться от носителя и освободиться от его влияния на полет. В зависимости от способа отделения ГЧ циклограмма протекания при этом процессов может быть разнообразной. Наиболее простым способом является отделение с помощью толкателей пневматического, пружинного или пиротехнического типа, сообщающих головной части сравнительно небольшую относительную скорость (порядка 1 м/с). Но из-за малости располагаемых импульсов процесс отделения можно начинать только после полного прекращения истечения газов из сопла двигателя, т.е. после прекращения так называемого *последствия газов*, во избежание столкновения ГЧ с "догоняющим" ее носителем. А это означает, что ГЧ вместе с носителем воспримет как возмущающее воздействие весь разброс импульса последствия двигателя (номинальная величина импульса последствия учитывается при расчете траектории). Только после этого спустя некоторое время происходит отделение ГЧ, которое также сопровождается отклонениями относительно расчетного (невозмущенного) случая отделения.

Другой часто используемый способ отделения ГЧ заключается в резком торможении ракетного блока сразу же после команды на выключение двигателя. Таким способом можно принципиально полностью исключить влияние импульса последствия на движение ГЧ, если тягу тормозных двигателей (обычно твердотопливных) выбрать достаточно большой. Понятно, что реализация этого способа сопряжена со значительными весовыми затратами, однако когда на первом месте стоит точность, на подобные жертвы приходится идти.

Отделившись ГЧ продолжает самостоятельный полет до встречи с поверхностью Земли. К тем возмущениям, с которыми она покинула носитель, дополнительные возмущения добавляются только после ее входа в плотные слои атмосферы, т.е. начиная с высот порядка 80–100 км. Разброс ряда параметров атмосферы, массово-инерционных, аэродинамических характеристик ГЧ и начальных условий входа в атмосферу приводит к отклонению движения от расчетного и, следовательно, к дополнительному рассеиванию.

16.2.2. Рассеивание за счет активного участка. Как мы видели ранее, задача определения конечного рассеивания (т.е. рассеивания целевой функции) состоит из двух самостоятельных задач. Первая — определение разбросов параметров движения в конце активного участка и ковариационной матрицы этих разбросов. Методы решения этой задачи обсуждены в главе 15. Вторая задача состоит в нахождении частных производных от конечных характеристик траектории, рассеиванием которых мы интересуемся, по параметрам движения в конце активного участка. Для баллистической

¹⁾ Под классической схемой понимается ракета, управляемая только до момента выключения двигателя.

ракеты вторая задача сводится, очевидно, к нахождению частных производных от дальности по кинематическим параметрам конца активного участка траектории. Такие производные мы будем называть *баллистическими производными*. Эту задачу и рассмотрим.

В общем случае баллистические производные не могут быть записаны в виде аналитических выражений. Тогда их определяют методом конечных разностей, для чего приходится рассчитывать интегрированием уравнений движения ряд траекторий, придавая начальным условиям некоторые возмущения. Ранее мы отмечали, что для подавляющего большинства проектных задач применимы формулы эллиптической теории полета. В данном случае эти формулы также вполне пригодны, так как в результате всех расчетов по определению рассеивания мы получаем только оценку. Обычно оценка, содержащая погрешность порядка 10 – 20%, считается вполне хорошей.

Итак, для определения нужных нам производных воспользуемся эллиптической теорией. Будем считать, что отклонения параметров движения в момент выключения двигателя можно рассматривать как отклонения начальных параметров на участке свободного полета, так как в подобных расчетах эти моменты можно считать совпадающими. Будем также считать, что сопротивление атмосферы в момент выключения двигателя пренебрежимо мало и наличие атмосферы на последнем участке траектории не оказывает заметного влияния на величины интересующих нас производных. При оговоренных условиях справедливы следующие формулы для частных производных от дальности свободного участка полета по начальным кинематическим параметрам, полученные в главе 11 (с заменой $\partial l_{св}/\partial r_n$ на $\partial l_{св}/\partial h_n$):

$$\frac{\partial l_{св}}{\partial h_n} = R \frac{\nu_n + \frac{2R}{r_n} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{м.н}) \sin^2 \frac{\beta_C}{2}}{\nu_n \left(r_n - R + R \operatorname{tg} \theta_{м.н} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2},$$

$$\frac{\partial l_{св}}{\partial \nu_n} = \frac{4R^2}{\nu_n} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{м.н}) \sin^2 \frac{\beta_C}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2}}{\nu_n \left(r_n - R + R \operatorname{tg} \theta_{м.н} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}, \quad (16.8)$$

$$\frac{\partial l_{св}}{\partial \theta_{м.н}} = 2R^2 \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{м.н}) \left(\nu_n - 2 \operatorname{tg} \theta_{м.н} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}{\nu_n \left(r_n - R + R \operatorname{tg} \theta_{м.н} \operatorname{tg} \frac{\beta_C}{2} \right)}.$$

В отличие от обозначений углов, принятых в главе 11, в этой главе через θ обозначен угол наклона вектора скорости к стартовому горизонту, а через $\theta_{м.н}$ – начальное значение угла наклона вектора скорости к местному, или текущему, горизонту.

Для определения отклонения полной дальности полета надо учесть, что полная дальность складывается из дальности l_n активного участка

и дальности $l_{св}$ свободного участка полета:

$$L = l_n + l_{св}, \quad (16.9)$$

где

$$l_n = R\delta, \quad l_{св} = R\beta_{св}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{x_n}{R + y_n}. \quad (16.10)$$

Производными (16.8) для расчета отклонения дальности свободного участка можно воспользоваться в том случае, если для конца активного участка (или начала свободного участка) были определены отклонения Δl_n , Δh_n , Δv_n , $\Delta \theta_{м.н}$. Но в предыдущем параграфе отклонение траектории в конце активного участка было определено в виде отклонения параметров движения Δv_k , $\Delta \theta_k$, Δy_k , Δx_k или (относя их к началу свободного участка) в виде отклонений Δv_n , $\Delta \theta_n$, Δy_n , Δx_n .

Отклонение полной дальности можно получить как через параметры Δv_n , $\Delta \theta_{м.н}$, Δh_n , Δl_n , так и через параметры Δv_n , $\Delta \theta_n$, Δy_n , Δx_n , т.е.

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_n} \Delta v_n + \frac{\partial L}{\partial \theta_{м.н}} \Delta \theta_{м.н} + \frac{\partial L}{\partial h_n} \Delta h_n + \frac{\partial L}{\partial l_n} \Delta l_n,$$

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_n} \Delta v_n + \frac{\partial L}{\partial \theta_n} \Delta \theta_n + \frac{\partial L}{\partial y_n} \Delta y_n + \frac{\partial L}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Для того чтобы воспользоваться первым из этих выражений, надо отклонения Δv_n , $\Delta \theta_n$, Δy_n , Δx_n пересчитать в отклонения Δv_n , $\Delta \theta_{м.н}$, Δh_n , Δl_n . Если расчет вести по второму выражению, потребуется пересчитать производные $\partial L/\partial v_n$, $\partial L/\partial \theta_{м.н}$, $\partial L/\partial h_n$, $\partial L/\partial l_n$ в производные $\partial L/\partial v_n$, $\partial L/\partial \theta_n$, $\partial L/\partial y_n$, $\partial L/\partial x_n$. Оба пути равноправны. Мы пойдем по второму из них. Для этого воспользуемся соотношениями

$$R + y_n = (R + h_n) \cos \delta, \quad x_n = (R + h_n) \sin \delta, \quad \theta_{м.н} = \theta_n + \delta, \quad (16.11)$$

связывающими величины δ , h_n , $\theta_{м.н}$ с x_n , y_n , θ_n , и проследим, как зависит дальность полета от параметров v_n , θ_n , y_n , x_n . При изменении v_n изменяется только $l_{св}$ в формуле (16.9). При изменении x_n или y_n изменяется параметр h_n , влияющий на $l_{св}$, а также параметр δ , от которого зависит l_n и $l_{св}$ через $\theta_{м.н}$. Наконец, при изменении θ_n меняется $\theta_{м.н}$, а вместе с ним и $l_{св}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_n} &= \frac{\partial l_{св}}{\partial v_n}, \\ \frac{\partial L}{\partial y_n} &= \frac{\partial l_n}{\partial y_n} + \frac{\partial l_{св}}{\partial y_n} = R \frac{\partial \delta}{\partial y_n} + \frac{\partial l_{св}}{\partial h_n} \frac{\partial h_n}{\partial y_n} + \frac{\partial l_{св}}{\partial \theta_{м.н}} \frac{\partial \theta_{м.н}}{\partial y_n}, \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= \frac{\partial l_n}{\partial x_n} + \frac{\partial l_{св}}{\partial x_n} = R \frac{\partial \delta}{\partial x_n} + \frac{\partial l_{св}}{\partial h_n} \frac{\partial h_n}{\partial x_n} + \frac{\partial l_{св}}{\partial \theta_{м.н}} \frac{\partial \theta_{м.н}}{\partial x_n}, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_n} &= \frac{\partial l_{св}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial l_{св}}{\partial \theta_{м.н}}. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Для вычисления частных производных $\partial h_{\text{н}}/\partial y_{\text{н}}$, $\partial h_{\text{н}}/\partial x_{\text{н}}$, $\partial \delta/\partial y_{\text{н}}$, $\partial \delta/\partial x_{\text{н}}$ продифференцируем четвертое и пятое соотношения (16.11):

$$dy_{\text{н}} = dh_{\text{н}} \cos \delta - (R + h_{\text{н}}) \sin \delta d\delta,$$

$$dx_{\text{н}} = dh_{\text{н}} \sin \delta + (R + h_{\text{н}}) \cos \delta d\delta,$$

откуда

$$dh_{\text{н}} = dy_{\text{н}} \cos \delta + dx_{\text{н}} \sin \delta,$$

$$d\delta = -\frac{\sin \delta}{R + h_{\text{н}}} dy_{\text{н}} + \frac{\cos \delta}{R + h_{\text{н}}} dx_{\text{н}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h_{\text{н}}}{\partial y_{\text{н}}} = \cos \delta, \quad \frac{\partial h_{\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}} = \sin \delta, \quad \frac{\partial \delta}{\partial y_{\text{н}}} = -\frac{\sin \delta}{R + h_{\text{н}}}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial x_{\text{н}}} = \frac{\cos \delta}{R + h_{\text{н}}}.$$

(16.13)

На основании формул (16.11) имеем

$$\frac{\partial \theta_{\text{м.н}}}{\partial y_{\text{н}}} = \frac{\partial \delta}{\partial y_{\text{н}}}, \quad \frac{\partial \theta_{\text{м.н}}}{\partial x_{\text{н}}} = \frac{\partial \delta}{\partial x_{\text{н}}}$$

или с учетом (16.13)

$$\frac{\partial \theta_{\text{м.н}}}{\partial y_{\text{н}}} = -\frac{\sin \delta}{R + h_{\text{н}}}, \quad \frac{\partial \theta_{\text{м.н}}}{\partial x_{\text{н}}} = \frac{\cos \delta}{R + h_{\text{н}}}.$$

(16.14)

Подставляя выражения (16.13) и (16.14) в формулы (16.12), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial y_{\text{н}}} = \cos \delta \frac{\partial l_{\text{св}}}{\partial h_{\text{н}}} - \frac{\sin \delta}{R + h_{\text{н}}} \left(R + \frac{\partial l_{\text{св}}}{\partial \theta_{\text{м.н}}} \right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\text{н}}} = \frac{\cos \delta}{R + h_{\text{н}}} \left(R + \frac{\partial l_{\text{св}}}{\partial \theta_{\text{м.н}}} \right) + \sin \delta \frac{\partial l_{\text{св}}}{\partial h_{\text{н}}}.$$

Таким образом, производные $\partial L/\partial v_{\text{н}}$, $\partial L/\partial \theta_{\text{н}}$, $\partial L/\partial y_{\text{н}}$ и $\partial L/\partial x_{\text{н}}$ мы выразили через известные по формулам эллиптической теории производные $\partial l_{\text{св}}/\partial v_{\text{н}}$, $\partial l_{\text{св}}/\partial \theta_{\text{м.н}}$, $\partial l_{\text{св}}/\partial h_{\text{н}}$, и отклонение по дальности может быть определено по формуле

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_{\text{н}}} \Delta v_{\text{н}} + \frac{\partial L}{\partial \theta_{\text{н}}} \Delta \theta_{\text{н}} + \frac{\partial L}{\partial y_{\text{н}}} \Delta y_{\text{н}} + \frac{\partial L}{\partial x_{\text{н}}} \Delta x_{\text{н}}.$$

(16.15)

Еще проще можно получить выражения для производных, если воспользоваться формулами параболической теории. Разумеется, это приемлемо для не очень больших дальностей и только в задачах, не требующих высокой точности оценок. Для дальности имеем

$$L = \frac{1}{g} (v_{\text{н}}^2 \sin \theta_{\text{н}} \cos \theta_{\text{н}} + v_{\text{н}} \cos \theta_{\text{н}} \sqrt{v_{\text{н}}^2 \sin^2 \theta_{\text{н}} + 2gy_{\text{н}} + x_{\text{н}}})$$

или

$$L = \frac{v_{\text{хн}} v_{\text{ун}} + v_{\text{хн}} \sqrt{v_{\text{ун}}^2 + 2gy_{\text{н}}}}{g} + x_{\text{н}}.$$

Можно воспользоваться и приближенной формулой

$$L \approx x_H + \frac{v_H^2 \sin 2\theta_H}{g} + y_H \operatorname{ctg} \theta_H,$$

из которой получаем

$$\frac{\partial L}{\partial v_H} = \frac{2v_H \sin 2\theta_H}{g},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_H} = \frac{2v_H^2 \cos 2\theta_H}{g} - \frac{y_H}{\sin^2 \theta_H},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_H} = \operatorname{ctg} \theta_H, \quad \frac{\partial L}{\partial x_H} = 1.$$

Теперь надо вернуться к формуле (16.3) и записать применительно к нашей задаче $\partial L / \partial X$ вместо $\partial X_K / \partial X_1$, а вместо ковариационной матрицы $K_{\Delta X_K}$ — дисперсию дальности σ_L^2 :

$$\sigma_L^2 = \frac{\partial L}{\partial X} K_{\Delta X} \left(\frac{\partial L}{\partial X} \right)^T, \quad (16.16)$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \left(\frac{\partial L}{\partial v_H}, \frac{\partial L}{\partial \theta_H}, \frac{\partial L}{\partial y_H}, \frac{\partial L}{\partial x_H} \right).$$

С учетом того, что

$$K_{\Delta X} = ZK_{\Delta \vec{\lambda}}Z^T,$$

формулу (16.16) можно записать в ином виде:

$$\sigma_L^2 = \frac{\partial L}{\partial X} ZK_{\Delta \vec{\lambda}}Z^T \left(\frac{\partial L}{\partial X} \right)^T. \quad (16.17)$$

Формулам (16.16) и (16.17) эквивалентна другая форма записи:

$$\sigma_L^2 = \frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} K_{\Delta \vec{\lambda}} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\lambda}} \right)^T. \quad (16.18)$$

Если при применении формулы (16.18) иметь в виду, что $K_{\Delta \vec{\lambda}}$ — диагональная матрица в силу независимости возмущений $\Delta \lambda_n$, то операции, предписываемые формулой (16.18), сводятся к суммированию дисперсий по дальности, вызываемых отдельными возмущениями, т.е.

$$\sigma_L^2 = \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n} \right)^2,$$

или, если перейти к записи через отклонения параметров движения в конце активного участка и баллистические производные,

$$\sigma_L^2 = \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial v_H} \frac{\partial v_H}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial L}{\partial \theta_H} \frac{\partial \theta_H}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial L}{\partial y_H} \frac{\partial y_H}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial L}{\partial x_H} \frac{\partial x_H}{\partial \lambda_n} \right)^2 \sigma_{\lambda_n}^2.$$

Эта форма записи наиболее употребительна, так как она дает возможность

получить более развернутое и наглядное представление о влиянии каждого из возмущений непосредственно на отклонение по дальности полета. Заметим, что в последней формуле производные $\frac{\partial v_H}{\partial \lambda_n}, \dots, \frac{\partial x_H}{\partial \lambda_n}$ должны быть

вычислены при условии выключения двигателя по заданному функционалу.

16.2.3. Рассеивание за счет переходного участка. Прежде всего подлечит оценке влияние разброса импульса последействия двигателя. Если головная часть отделяется от носителя по окончании процессов, протекающих после прекращения подачи топлива, импульс последействия сообщает

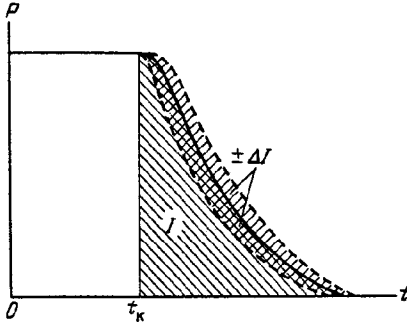


Рис. 16.1. Характер спада тяги после выключения двигателя (образование импульса последействия I и его разброса $\pm \Delta I$)

дополнительную скорость суммарной массе носителя m_H и ГЧ $m_{Г.ч}$ в направлении линии действия тяги, которое, как правило, совпадает с направлением продольной оси ракеты. Интервал времени, в течение которого сообщается импульс, обычно невелик (несколько секунд), поэтому реальную картину можно упростить, полагая, что импульс сообщается мгновенно. Это означает, что ракета приобретает только дополнительную скорость, не изменяя своих координат. Импульс последействия имеет некоторую номинальную величину I и разброс $\pm \Delta I$ (рис. 16.1). Величина I , учитываемая при расчете номинальной траектории, не создает отклонений относительно расчетного движения. Разброс импульса создает разброс скорости

$$\Delta v = \frac{\Delta I}{m_H + m_{Г.ч}} x_1^0.$$

Изменение модуля скорости и ее направления определяется по очевидным формулам

$$\Delta v = \frac{\Delta I}{m_H + m_{Г.ч}} \cos \alpha,$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta I}{m_H + m_{Г.ч}} \frac{\sin \alpha}{v}.$$

Если в последних формулах использовать среднеквадратическое отклонение импульса последействия σ_I и с помощью производных $\partial L/\partial v$ и $\partial L/\partial \theta$ перевести отклонения в скорости и угле ее наклона в дальность, получим формулу для среднеквадратического отклонения по дальности

за счет разброса импульса последствием:

$$\begin{aligned} \sigma_{L_I} &= \frac{\sigma_I}{m_H + m_{Г.ч}} \cos \alpha \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\sigma_I}{m_H + m_{Г.ч}} \frac{\sin \alpha}{v} \frac{\partial L}{\partial \theta} = \\ &= \frac{\sigma_I}{m_H + m_{Г.ч}} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \cos \alpha + \frac{1}{v} \frac{\partial L}{\partial \theta} \sin \alpha \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь процесс отделения ГЧ, происходящий на переходном участке полета. Описание процесса отделения в упрощенной постановке трудностей не вызывает, и его можно рассматривать также в импульсной постановке. Пусть отделение ГЧ, имеющей скорость v и массу $m_{Г.ч}$, от носителя массы m_H происходит под влиянием пружинного толкателя, обладающего энергией A (рис. 16.2). В результате его действия ГЧ приобретает дополнительную скорость $v_{Г.ч}$, а носитель — дополнительную скорость v_H . Количество движения системы, состоящей из носителя и ГЧ, должно остаться величиной неизменной, т.е.

$$m_H v_H + m_{Г.ч} v_{Г.ч} = 0.$$

Суммарная энергия, приобретенная ГЧ и носителем, должна равняться энергии, отданной пружинным толкателем:

$$\frac{m_H v_H^2}{2} + \frac{m_{Г.ч} v_{Г.ч}^2}{2} = A.$$

Решая последние два уравнения относительно $v_{Г.ч}$ и v_H , получаем

$$v_{Г.ч} = \sqrt{\frac{2Am_H}{m_{Г.ч}(m_H + m_{Г.ч})}}, \quad v_H = -\sqrt{\frac{2Am_{Г.ч}}{m_H(m_H + m_{Г.ч})}}.$$

Относительная скорость между ГЧ и носителем будет равна

$$v_r = v_{Г.ч} - v_H = \sqrt{\frac{2A(m_H + m_{Г.ч})}{m_H m_{Г.ч}}}.$$

В данном случае нас интересует приращение скорости $v_{Г.ч}$ в направлении продольной оси ракеты, ибо ее и надо учитывать при проведении расчета номинальной траектории. Однако реальный процесс отделения не так прост, и он сопровождается рядом отклонений — относительно расчетного случая. Что это за отклонения?

Прежде всего — отклонение направления скорости отделения. Это направление совпадает с продольной осью ракеты, однако последняя может

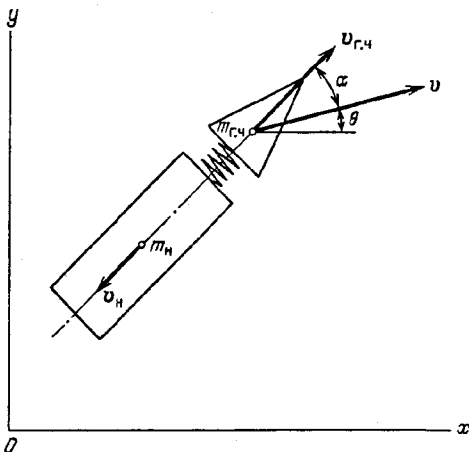


Рис. 16.2. Схема отделения ГЧ с помощью пружинного толкателя

отклониться от некоторого среднего положения на значительный угол, так как в течение промежутка времени от выключения двигателя до отделения ГЧ ракета находится (если не предусмотрены специальные меры) в неуправляемом движении и вращается с некоторой остаточной угловой скоростью, которая является случайной величиной.

Некоторым разбросом обладают характеристики систем отделения (в нашем случае энергия пружины). Массы $m_{г.ч}$ и m_n также подвержены определенным случайным разбросам. Усилие на отделение ГЧ прикладывается не строго по оси, что приводит к более сложной картине отделения. Замки, удерживающие ГЧ на корпусе носителя, срабатывают не строго одновременно. Штыри, на которые "посажена" ГЧ, создают трение в процессе разъединения, причем трение это с учетом индивидуальных зазоров и перекосов может колебаться в значительных пределах. Указанных причин достаточно, чтобы представить себе сложность процесса разделения.

Независимо от типа системы разделения в каждом конкретном случае процесс должен быть математически смоделирован с достаточной полнотой, выполнены статистические расчеты разделения с учетом разбросов характеристик элементов системы, проведено экспериментальное подтверждение расчетных характеристик разделения и т.д. В результате должны быть получены номинальная дополнительная скорость, сообщаемая ГЧ в процессе разделения, ее среднеквадратическое отклонение, направление этой скорости, его разброс, угловая скорость ГЧ и ее разброс (для формирования начальных условий движения при входе в атмосферу).

Обсуждаемая задача относится к одной из задач динамики систем, в которой исследуется относительное движение двух или более тел, имеющих нежесткие связи. Наиболее полно вопрос этот освещен применительно к ракетостроению в [15].

Нам же достаточно воспользоваться конечными результатами этих расчетов и трансформировать их в отклонения координат точки падения ГЧ. Примем, что процесс отделения ГЧ приводит к разбросу точки падения по дальности со среднеквадратическим отклонением $\sigma_{L_{отд}}$. Таким образом, суммарное отклонение по дальности за счет погрешностей, вносимых переходным участком, будет характеризоваться среднеквадратической ошибкой $\sigma_{\Pi} = \sqrt{\sigma_{L_I}^2 + \sigma_{L_{отд}}^2}$.

16.2.4. Рассеивание за счет участка свободного полета. К сожалению, в рамках этой книги мы не можем подробно рассмотреть рассеивание свободно летящей ГЧ, а дадим только некоторые пояснения по поводу того, под действием каких возмущений происходит движение на этом участке. Интересующиеся могут обратиться к работам [19, 40], посвященным изучению динамики свободно летящих тел. Напомним, что в главе 8 даны некоторые методы расчета движения ГЧ в атмосфере, которые в принципе пригодны для оценки влияния ряда возмущающих факторов, но не дают исчерпывающего ответа на поставленный вопрос.

Итак, какие же факторы надо учитывать при оценке рассеивания, возникающего при свободном полете?

Прежде всего отметим, что ГЧ после отделения от носителя продолжает движение с медленным вращением вокруг произвольной оси. Говоря точнее, ГЧ движется так, что ее продольная ось равномерно обкатывает по-

верхность прямого кругового конуса, так называемого *конуса прецессии*, ось которого совпадает с вектором кинетического момента, сохраняющим постоянными величину и направление. Такое движение, известное под названием *регулярной прецессии*, хорошо освещено практически в любом курсе классической механики.

Угловая скорость вращения ГЧ обычно редко достигает нескольких градусов в секунду, если не была предусмотрена специальная закрутка. Чаще всего угловая скорость составляет десятые доли градуса в секунду и является случайной величиной, номинальное значение которой равно нулю. Распределение угловой скорости обычно подчиняется закону Рэлея. При входе ГЧ в атмосферу со скоростью 6 – 7 км/с вертикальная компонента составляет около 2 км/с и на высотах порядка 100 км за каждые 10 с ГЧ углубляется в атмосферу на 20 км. Плотность атмосферы быстро возрастает: на высоте 100 км она в 20 раз выше, чем на высоте 120 км, а на высоте 80 км в 40 раз выше, чем на высоте 100 км. Таким образом, за 20 с аэродинамические силы и моменты возрастают в 800 раз!

При движении с весьма малой угловой скоростью вокруг поперечной оси головная часть может довольно быстро оказаться в зоне очень больших аэродинамических сил и иметь произвольную ориентацию продольной оси, в том числе днищем к потоку (т.е. с углом атаки 180°) или боковой поверхностью к потоку (т.е. с углом атаки 90° или 270°). В дальнейшем движение приобретает колебательный характер, однако длительное движение по отношению к потоку носовой частью, боком или днищем не остается без последствий: потери скорости оказываются разными, и, кроме того, начальная амплитуда колебаний и характер ее затухания оказывают влияние на дальнейшее движение, вызывая разброс его параметров. Из сказанного следует, что при определении рассеивания за счет свободного участка полета необходимо исследовать влияние начальных условий входа в атмосферу на отклонение координат точки падения. Эту задачу обычно рассматривают только в статистическом плане, исходя из случайных возмущений, сообщенных ГЧ при отделении от носителя.

Результаты расчетов возмущенного движения ГЧ используются не только для оценки рассеивания, но и для определения нагрузок, действующих на ГЧ, и проведения расчетов на прочность, так как наиболее опасные случаи нагружения конструкции возникают именно на этом режиме движения.

Уместно сделать одно замечание. В реальном полете ГЧ совершает не плоские, а пространственные колебания. Исследование такого процесса представляет значительные трудности в теоретическом и расчетном отношениях. Однако нужно иметь в виду, что при пространственном характере колебаний условия полета получаются менее напряженные, чем при плоских колебаниях, поэтому принятие плоской модели колебаний не только упрощает расчетную работу, но и создает определенные запасы по условиям нагружения.

Следующая группа факторов, влияющих на рассеивание ГЧ, связана с характеристиками самой ГЧ. Здесь имеются в виду разброс массы головной части, нестабильность ее внешних обводов, т.е. геометрии (конечно, в пределах технологических допусков), смещение центра масс в продольном и поперечном направлениях, разброс моментов инерции и некоторые

другие. Отклонения обводов и смещение центра масс приводят непосредственно к отклонениям практически всех аэродинамических характеристик: лобового сопротивления, подъемной силы, центра давления, демпфирующих свойств, а это в свою очередь — к отклонению движения от номинального. Например, смещение центра масс от продольной оси к периферии приводит к движению под некоторым балансировочным углом атаки, отличным от нуля. Нарушение симметричности распределения масс относительно продольной геометрической оси ГЧ приводит к появлению центробежных моментов инерции, что сильно усложняет картину движения.

Все эти особенности подлежат учету при исследовании возмущенного движения, в частности при определении рассеивания, если задачу требуется решить достаточно точно.

Наконец, при расчете рассеивания за счет участка свободного полета необходимо учитывать влияние состояния атмосферы, вернее, ее изменчивости. Под изменчивостью атмосферы понимаются колебания плотности, температуры и ветер. Методы учета этих факторов хорошо освещены в [19] и здесь не приводятся.

Подобно тому как мы поступали при определении рассеивания за счет активного участка, суммируя дисперсии, вызываемые различными случайными независимыми факторами, так же поступают и при определении рассеивания за счет свободного участка. В результате сложения всех составляющих получается среднеквадратическая ошибка в дальности $\sigma_{L_{св}}$, которую и следует учитывать в суммарном рассеивании.

16.2.5. Суммарное рассеивание по дальности. Определяя рассеивание за счет различных участков траектории, мы исходили из возмущающих факторов, действующих на этих участках, и убедились в том, что для каждого участка характерна своя группа возмущений, не зависящая практически от других групп возмущений. Это дает нам основание рассматривать составляющие рассеивания, вносимые различными участками траектории, как независимые величины и применять правило сложения их дисперсий для получения дисперсии суммарного рассеивания:

$$\sigma_L^2 = \sigma_{L_a}^2 + \sigma_{L_{п}}^2 + \sigma_{L_{св}}^2.$$

§ 16.3. Способы уменьшения рассеивания

Сначала рассмотрим, с помощью каких мер можно сократить рассеивание на свободном участке. Затем остановимся на принципах, используемых для улучшения организации процессов выключения двигателя на переходном участке траектории. И, наконец, обсудим ряд возможностей по уменьшению ошибок, в основном методических, на активном участке траектории. Рассмотрим также один известный метод уменьшения инструментальной погрешности, основанный на принципе группирования измерений.

16.3.1. Участок свободного полета. Ранее мы установили, что одной из причин, вызывающих рассеивание, является разброс начальных условий входа ГЧ в атмосферу. Следовательно, меры по уменьшению этого разброса, по регуляризации условий входа должны способствовать уменьшению рассеивания.

Сужения области возможных начальных условий входа можно добиться путем:

- придания головной части при отделении или после отделения от носителя специальной закрутки;
- применения мер активной стабилизации и ориентации.

Смысл предварительной закрутки заключается в том, чтобы сообщить ГЧ определенный кинетический момент и тем самым добиться большей стабильности по высоте полета, на которой регулярная прецессия переходит в колебательное движение.

В общем случае с учетом нагружения конструкции ГЧ, которое почти целиком определяется условиями входа, должен быть проведен анализ возможности появления неблагоприятных сочетаний угла атаки и угловой скорости входа и на основании такого анализа выбран вектор кинетического момента, обеспечивающий достаточно малую вероятность неблагоприятных исходов.

В [19] содержатся конкретные рекомендации по проведению расчетов с целью выделения неблагоприятных областей начальных условий. Применение мер по активной стабилизации и ориентации ГЧ при самостоятельном полете связано с созданием соответствующих систем управления вплоть до систем самонаведения, использующих различные принципы измерений, обработки информации, фильтрации и т.д. Мы этих вопросов касаться не будем. Заметим лишь, что на этом пути можно добиться приведения ГЧ в заданную точку с отклонениями порядка 100 м.

16.3.2. Переходный участок. Одним из давно признанных способов уменьшения рассеивания является двухступенчатое выключение двигателя. Идея способа проста и очевидна: чем спокойнее режим движения, тем точнее можно сформировать команду на выключение двигателя. В конце активного участка продольное ускорение нередко достигает $80 - 100 \text{ м/с}^2$. Сотая доля секунды задержки в выдаче и исполнении команды на выключение приводит к недопустимо большой ошибке в скорости. Кроме того, разброс импульса последствия при большой величине тяги всегда больше, чем при малой тяге. Отсюда возникает естественное предложение о предварительном переходе на существенно меньшую тягу, с тем чтобы формирование заданного функционала заканчивалось на более спокойном режиме работы. Первая команда, по которой производится переход на малую тягу, называется *предварительной*, а окончательная команда на выключение двигателя — *главной*. Погрешности, возникающие при выдаче предварительной команды, учитываются системой управления, которая продолжает выполнять свои функции, и не сказываются на рассеивании. В то же время разброс скорости в момент выключения двигателя сократится, грубо говоря, пропорционально величине тяги.

Однако возможности по уменьшению тяги двигателя с помощью глубокого дросселирования весьма ограничены, так как обычной границей устойчивой работы двигателя считается режим снижения тяги до 50 % (в некоторых случаях до 30%). Поэтому в тех случаях, когда двигательная установка состоит из одного двигателя, тягу на переходном участке снижать более чем втрое не удастся. Если ракета снабжена управляющими двигателями и схемой предусмотрена возможность их автономной работы, тогда можно им и поручить "дотягивание" на переходном участке (суммарная тяга этих двигателей на порядок меньше, чем тяга основного двигателя). В многодвигательных установках можно вместо глубокого дросселиро-

вания пойти на выключение части двигателей с одновременным не очень глубоким дросселированием оставшихся. Во всех вариантах организации "малой тяги" вопрос о возможности практической реализации должен быть хорошо согласован с особенностями пневмогидравлической схемы, уравнениями работы двигательной установки, конструктивным решением забора топлива при малом его количестве и малых перегрузках и другими небаллистическими факторами.

Наконец, если все варианты снижения тяги не приводят к удовлетворительному решению вопроса, остается последнее средство: продолжить процесс управления головной частью уже после ее отделения, снабдив ГЧ прецизионными системами, решающими поставленную задачу с высокой точностью.

16.3.3. Активный участок. Введение в интегратор временной компенсации. При выключении двигателя от интегратора осевых перегрузок, т.е. по достижении заданной кажущейся скорости, методическая ошибка в дальности возникает из-за отклонения фактической скорости от расчетной и неучета координат в функционале. Из этих ошибок определяющей является ошибка в скорости. Как видно из упрощенного уравнения интегратора, ошибка в скорости зависит от отклонения времени набора заданной кажущейся скорости относительно номинального времени. В самом деле, из уравнения для кажущейся скорости

$$v_s = v + \int_0^t g \sin \varphi dt \quad (16.19)$$

следует, что при $v_s = \text{const}$ скорость v будет тем больше, чем меньше t (предполагается, что подынтегральная функция $g \sin \varphi$ будет изменяться в соответствии с расчетом), и наоборот. Причинами достижения заданного значения v_s не в расчетный момент времени могут быть отклонения тяги, массы и другие факторы. Как же избавиться от этого явления?

Допустим, что показания интегратора корректируются неким дополнительным членом, пропорциональным времени, и выключение двигателя производится тогда, когда эта скорректированная величина, например

$$v_s^k = v_s - kt, \quad (16.20)$$

достигает заданного значения v_{s1}^k . С учетом (16.19) имеем

$$v_s^k = v + \int_0^t g \sin \varphi dt - kt. \quad (16.21)$$

Подобный прием называется введением *временной компенсации*, интегратор, вырабатывающий величину v_s^k , — *интегратором с временной компенсацией*, а величина k — *коэффициентом компенсации*. Если проварьировать уравнение (16.21), пренебрегая вариацией $g \sin \varphi$ и полагая ошибку в отработке величины v_s^k равной нулю, получим для момента t_1

$$\Delta v_1 + g_1 \sin \varphi_1 \Delta t_1 - k \Delta t_1 = 0.$$

Отсюда ошибка в скорости будет равна

$$\Delta v_1 = (k - g_1 \sin \varphi_1) \Delta t_1. \quad (16.22)$$

Из (16.22) видно, что достаточно принять $k = g_1 \sin \varphi_1$, как ошибка в ско-

рости обратится в нуль, т.е. мы сможем избавиться от наиболее крупной части методической ошибки, и способ выключения двигателя от интегратора с компенсацией окажется эквивалентным способу выключения по достижению заданной скорости.

В более общем случае уравнение выключения можно записать так:

$$v_s^k(v_{s1}, t) = v_{s1}^k.$$

Тогда

$$\Delta v_{sn}^k = \frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} \Delta v_{s1} + \frac{\partial v_s^k}{\partial t} \Delta t, \quad (16.23)$$

где Δv_{s1} и Δt — отклонения кажущейся скорости и времени выключения двигателя при данном способе управления дальностью; Δv_{sn}^k — инструментальная ошибка прибора, вырабатывающего величину v_s^k .

Из (16.23) следует, что

$$\Delta v_{s1} = \frac{1}{\partial v_s^k / \partial v_s} \Delta v_{sn}^k - \frac{\partial v_s^k / \partial t}{\partial v_s^k / \partial v_s} \Delta t,$$

или, вводя обозначение

$$- \frac{\partial v_s^k / \partial t}{\partial v_s^k / \partial v_s} = k_1, \quad (16.24)$$

будем иметь

$$\Delta v_{s1} = k_1 \Delta t + \frac{1}{\partial v_s^k / \partial v_s} \Delta v_{sn}^k.$$

Используя последнее соотношение, можно провести необходимые выкладки для получения отклонений параметров движения в конце активного участка, как это было сделано в главе 15. Приведем окончательные формулы без дополнительных пояснений:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{1}{\frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} (\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1)} \Delta v_{sn}^k + \\ &+ \frac{1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \Delta v_{s\varphi} - \sum_n \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \Delta \lambda_n, \\ \Delta v_1 &= \frac{\dot{v}_1}{\frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} (\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1)} \Delta v_{sn}^k + \\ &+ \frac{\dot{v}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \Delta v_{s\varphi} + \sum_n \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{\dot{v}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \right) \Delta \lambda_n, \\ \Delta \theta_1 &= \frac{\dot{\theta}_1}{\frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} (\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1)} \Delta v_{sn}^k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \Delta v_{s\varphi} + \sum_n \left(\frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{\dot{\theta}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \right) \Delta \lambda_n, \\
\Delta y_1 = & \frac{\dot{y}_1}{\frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} (\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1)} \Delta v_{s1}^k + \\
& + \frac{\dot{y}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \Delta v_{s\varphi} + \sum_n \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{\dot{y}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \right) \Delta \lambda_n, \\
\Delta x_1 = & \frac{\dot{x}_1}{\frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} (\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1)} \Delta v_{s1}^k + \\
& + \frac{\dot{x}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \Delta v_{s\varphi} + \sum_n \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{\dot{x}_1}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \right) \Delta \lambda_n.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\dot{L} = & \frac{\partial L}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x}, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} = & \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda_n}.
\end{aligned}$$

Применяя формулу (16.15), отклонение по дальности получим в виде

$$\begin{aligned}
\Delta L = & \frac{\dot{L}}{\frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} (\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1)} \Delta v_{s1}^k + \\
& + \frac{\dot{L}}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \Delta v_{s\varphi} + \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{\dot{L}}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \right) \Delta \lambda_n.
\end{aligned}$$

Далее, обозначая

$$\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1 = \dot{v}_{s1}^k$$

и принимая для v_s^k формулу (16.20), из которой следует, что $\partial v_s^k / \partial v_s = 1$, можно записать:

$$\Delta L = \frac{\dot{L}}{\dot{v}_{s1}^k} (\Delta v_{s1}^k + \Delta v_{s\varphi}^k) + \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{\dot{L}}{\dot{v}_{s1}^k} \right) \Delta \lambda_n.$$

Если возмущения λ_n — независимые величины, подчиняющиеся нормальному закону распределения со среднеквадратическими отклонениями σ_{λ_n} , дисперсию методической ошибки в дальности можно представить в виде

$$\sigma_{L_M}^2 = \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \frac{\dot{L}}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1} \right)^2 \sigma_{\lambda_n}^2. \quad (16.25)$$

Видно, что дисперсия является явной функцией коэффициента компенсации k_1 .

Можно попытаться решить задачу по отысканию такого значения коэффициента компенсации, которое доставит минимум функции σ_{L_M} . Обозначая

$$q = \frac{\dot{L}}{\dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - k_1}, \quad (16.26)$$

запишем (16.25) в виде

$$\sigma_{L_M}^2 = \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} q \right)^2 \sigma_{\lambda_n}^2 \quad (16.27)$$

и найдем минимум σ_{L_M} по переменной q . Производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sigma_{L_M})^2}{\partial q} &= -2 \sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} q \right) \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n}^2 = \\ &= -2 \sum_n \frac{\partial L}{\partial \lambda_n} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n}^2 + 2q \sum_n \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \right)^2 \sigma_{\lambda_n}^2 \end{aligned}$$

обращается в нуль при

$$q = \frac{\sum_n \frac{\partial L}{\partial \lambda_n} \frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n}^2}{\sum_n \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n} \right)^2}. \quad (16.28)$$

Поскольку вторая производная

$$\frac{\partial^2 (\sigma_{L_M})^2}{\partial q^2} = 2 \sum_n \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n} \right)^2$$

положительна, найденное значение q будет соответствовать минимуму σ_{L_M} . Разрешая (16.26) относительно k_1 и используя (16.28), получаем

$$k_1 = \dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - \frac{\dot{L}}{q} = \dot{v}_1 + g_1 \sin \varphi_1 - \frac{\dot{L} \sum_n \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n} \right)^2}{\sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda_n} \sigma_{\lambda_n} \right)}. \quad (16.29)$$

Формула (16.29) определяет оптимальный коэффициент компенсации интегратора k_1 как функцию времени полета или дальности полета.

Из (16.24) следует, что функция v_s^k должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных

$$k_1 \frac{\partial v_s^k}{\partial v_s} + \frac{\partial v_s^k}{\partial t} = 0. \quad (16.30)$$

Простейшим решением такого уравнения будет функция

$$v_s^k = v_s - \int_{t_0}^{t_1} k_1 dt. \quad (16.31)$$

Время t_0 может выбираться любым, но так, чтобы оно не превосходило времени работы двигателя, соответствующего минимальной дальности. Переменность коэффициента k_1 в формуле (16.31) может вызвать сложности в создании прибора. В качестве более простого функционала можно предложить ту же формулу (16.31), но взятую при постоянном значении k_1 :

$$v_s^k = v_s - k_1 t. \quad (16.32)$$

Формула (16.32) повторяет уже введенный нами в рассмотрение простой функционал (16.20). Понятно, что для такого функционала уравнение (16.30) будет удовлетворяться только при одном времени выключения двигателя, равном t_1 . Значит, на заданную дальность должна быть настроена не только величина v_s^k , но и величина коэффициента компенсации k_1 , вычисленная для этой дальности по формуле (16.29).

Рассмотренный способ уменьшения рассеивания может дать хорошие результаты в тех случаях, когда методические ошибки преобладают над остальными составляющими рассеивания, и, кроме того, при условии, что отношение величин $\partial L / \partial \lambda_n$ и $\partial v / \partial \lambda_n$ сохраняется примерно одинаковым для различных параметров λ_n , особенно для тех, которые сильно влияют на рассеивание. Это видно из формулы (16.27).

Ранее было показано, что если коэффициент компенсации выбрать равным $g \sin \varphi_1$, то выключение двигателя от интегратора с временной компенсацией практически становится эквивалентным способу выключения по достижении истинной скорости. Оптимизация коэффициента компенсации в соответствии с формулой (16.29) даст еще лучший результат, так как в статистическом плане при этом учитываются отклонения всех параметров движения, от которых зависит дальность.

О принципах регулирования движения. Здесь уместно заметить, что чем ближе траектория к расчетной, чем меньше отклонения фактических параметров движения от расчетных, тем меньше роль коэффициента компенсации. В идеальном случае, если бы ход изменения скорости в точности совпадал с расчетным, никакой необходимости во временной компенсации не возникало бы. Однако без специальных мер нельзя добиться близкого совпадения действительной траектории с расчетной, оставаясь в рамках разумных требований к технологическим допускам изготовления ракеты и ее систем и агрегатов. Один из широко применяемых способов сужения трубки траекторий заключается в регулировании кажущейся скорости или кажущихся скоростей, измеренных в нескольких направлениях (например, вдоль оси ракеты и по двум другим направлениям в ортогональной к ней плоскости — по нормали и в боковом направлении). Пропорционально рассогласованию между измеренным и заданным программными значениями скорости вырабатывается управляющий сигнал, который воздействует на величину и направление тяги, чем и достигается желаемый результат.

Само собою разумеется, что при подобном способе не удастся добиться идеального совпадения фактической и расчетной траекторий, так как процессу регулирования свойственны определенные динамические и статические погрешности, но все же сравнительно с нерегулируемым движением область возможных траекторий резко сокращается.

Исследование возмущенных траекторий с учетом работы систем регулирования требует добавления к уравнениям движения, которыми мы пользовались в главах 12 и 13, уравнений регулирования и их совместного интегрирования с учетом воздействия возмущающих факторов. Номинальные значения регулируемых величин задаются при этом из расчета невозмущенной траектории, и они воспринимаются как программные зависимости, относительно которых и производится регулирование. Более подробно этих вопросов мы здесь касаться не будем, а сошлемся на книгу [24], в которой читатель найдет необходимый материал для более детального изучения. Описанный способ дает очень хорошие результаты, но он может быть применен только для таких ракет, двигательные установки которых допускают регулирование режима работы в полете. Однако такая возможность имеется не всегда. Например, в силу специфики закона горения регулирование режима работы твердотопливных двигателей практически исключено. Между тем ракеты именно с такими двигателями в наибольшей степени нуждаются в регулировании движения, поскольку их характеристики обладают весьма высокими разбросами. Так, одно только влияние температуры заряда приводит к отклонению тяги до 10%. Как же быть?

Не приводя никаких доказательств, поясним смысл применяемого при этом приема. Чем выше тяга, тем быстрее набирается скорость. Если программную зависимость угла тангажа от времени оставить жесткой, то каждому заданному значению текущей скорости будет соответствовать большая величина угла тангажа, что приведет к реализации более крутой траектории. Чтобы избавиться от такого нежелательного явления или хотя бы по возможности уменьшить его отрицательный эффект, можно корректировать угол тангажа в зависимости от набранной кажущейся скорости или просто задавать угол тангажа не как жесткую функцию времени, а как функцию кажущейся скорости. Подобные траектории обычно называют *гибкими траекториями*, а применяемые методы управления – *гибкими методами*.

Гибкие методы могут применяться и в ряде других случаев, например при управлении ракетами с многодвигательными установками. Дело в том, что с увеличением количества двигателей, имеющих даже высокую надежность, заметно возрастает вероятность выхода из строя отдельных двигателей. Если выход из строя хотя бы одного двигателя рассматривать как аварийную ситуацию, приводящую к прекращению полета и к невыполнению задачи, надежность таких ракет может оказаться неприемлемо низкой. Следовательно, надо предпринять такие меры, которые позволяли бы осуществлять продолжение полета и решение поставленной задачи в случае выхода из строя одного, а иногда и нескольких двигателей. В подобных задачах нельзя обойтись без применения гибких методов управления, так как возмущения слишком велики, чтобы можно было рассчитывать только на функционал, какой бы сложной ни была его структура. Заметим, однако, что принципы регулирования, связанные с особенностями многодвигательных установок, применяются главным образом для носителей,

выводящих на орбиты ИСЗ большой полезный груз, а для боевых ракет такая необходимость не возникает в силу специфики требований к ним и сравнительно небольших размеров таких ракет. Этими общими пояснениями мы и ограничим обсуждение вопроса о гибких траекториях и продолжим рассмотреть возможности использования интеграторов.

Измерение кажущегося пути. Мы видели, что с помощью введения в показания интегратора временной компенсации удастся избавиться от значительной части методических ошибок в дальности. Следующая по значимости часть методических ошибок обусловлена разбросом координат при выключении двигателя, точнее, неучетом этого разброса. Поэтому естественным шагом является попытка измерения координат и введения соответствующего члена в функционал. Такая возможность имеется и ее можно реализовать, вводя вторичное интегрирование показаний акселерометра, т.е. вычисляя двойной интеграл от кажущегося ускорения:

$$l_s = \int_0^t \int_0^{\tau} \dot{v}_s(\tau) d\tau dt = \int_0^t v_s(\tau) d\tau.$$

В результате двойного интегрирования будет получен не истинный путь, измеренный вдоль переменного направления оси чувствительности интегратора, а кажущийся путь l_s . Функционал, по которому производится управление дальностью, можно представить в виде

$$\Phi = v_s + a l_s.$$

Имеется возможность минимизировать рассеивание по дальности при использовании такого функционала за счет выбора коэффициента при l_s . Исследование методических ошибок, свойственных этому функционалу, можно проводить уже известными нам способами.

Измерения в фиксированных направлениях. Рассмотренные методы управления дальностью, основанные на применении интеграторов, жестко закрепленных относительно продольной оси ракеты, имеют тот недостаток, что они принципиально не могут учитывать последствия возможных отклонений оси ракеты от запрограммированного направления. В самом деле, если ось ракеты не будет следовать в точности заданному закону, изменится крутизна траектории; кажущаяся скорость, вырабатываемая интегратором, не будет соответствовать расчетному направлению; появится составляющая скорость в перпендикулярном направлении, которая функционалом не принята во внимание. Поэтому было бы хорошо уметь определять и учитывать не только величину, но и направление скорости (хотя бы кажущейся). Но для этого необходимо иметь на борту не один, а три интегратора, причем направления измерений должны быть постоянны. Если пренебречь влиянием бокового движения на дальность, то можно обойтись двумя интеграторами. Этого достаточно не только для того, чтобы определить полную кажущуюся скорость и ее направление, но и получить с помощью несложных преобразований проекцию скорости на любое заданное направление.

Точно так же с помощью повторных интегрирований можно вычислять и кажущиеся координаты. Для решения этой задачи необходимо интеграторы поместить на так называемую *гиростабилизированную платформу*, т.е.

на такую площадку, которая ориентирована и стабилизирована с помощью гироскопов в инерциальном пространстве. Оси чувствительности интеграторов можно ориентировать в интересующих нас направлениях, например вдоль осей x_0 и y_0 начально-стартовой системы координат. С точностью до случайных отклонений осей гироскопических приборов направления чувствительных элементов интеграторов будут постоянными относительно инерциальной (в нашем случае начально-стартовой) системы координат. Тут мы подходим к одному принципиальному вопросу о различии в определении дальности по кинематическим параметрам, измеренным в стартовой и начально-стартовой системах координат. Поскольку точки старта и цели движутся вместе с Землей в ее вращательном движении вокруг своей оси, то трех координат и трех составляющих скорости, заданных для любой точки свободного участка траектории в стартовой системе координат независимо от времени, достаточно для однозначного определения точки пересечения траектории с поверхностью Земли, т.е. координат точки падения ГЧ. Поэтому мы пользовались соотношениями

$$L = f(v_n, \theta_n, y_n, x_n),$$

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_n} \Delta v_n + \frac{\partial L}{\partial \theta_n} \Delta \theta_n + \frac{\partial L}{\partial y_n} \Delta y_n + \frac{\partial L}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Если заменить кинематические параметры в стартовой системе координат на соответствующие параметры в начально-стартовой системе координат, то L и ΔL окажутся функциями не только шести кинематических параметров, но и времени выключения двигателя. В этом легко убедиться, обратившись к таблицам направляющих косинусов для преобразований этих систем. Углы поворотов одной системы относительно другой являются функциями времени. Таким образом, решение задачи определения дальности, соответствующей текущему моменту выключения двигателя, должно проводиться на основе информации, содержащей не только кинематику движения в виде вектора скорости и вектора положения ракеты в начально-стартовой системе координат, но и времени полета, что вызывает дополнительные трудности в приборной реализации системы. От этой трудности можно избавиться, если движение ракеты регулировать так, чтобы условие выключения двигателя в любом полете удовлетворялось в очень малом интервале времени. При обычно применяемых системах регулирования разброс времени выключения двигателя не превышает десятых долей секунды. Это позволяет решать задачу с помощью функционалов, содержащих только кинематические параметры движения в инерциальной системе координат и не содержащих время.

Хорошее качество регулирования движения, позволяющее сузить область возможных траекторий, имеет и другие важные последствия, на которых остановимся чуть подробнее. Мы имели возможность убедиться в том, что дальность полета определяется вектором скорости и вектором положения ракеты. Но на борту ракеты, как правило, отсутствуют средства, позволяющие непосредственно определять истинные кинематические параметры. Основными (если не единственными) измерителями в автономных системах управления являются акселерометры, т.е. измерители ускорений (или перегрузок) и интеграторы этих ускорений. Мы видели ранее, что такие

измерители реагируют на ускорения, вызываемые силами тяги, аэродинамическими силами и т.п., и не реагируют на ускорения, вызываемые массовыми силами (силами тяготения и инерции). По этой причине в результате интегрирования формируется не истинная скорость, а кажущаяся. При повторном интегрировании вместо истинных перемещений ракеты получаются кажущиеся перемещения. Из рассмотрения соотношений между истинными и кажущимися характеристиками движения

$$\dot{v}_s = \dot{v} - g, \quad v_s = v - \int_0^t g dt$$

следует, что вектор скорости определяется вектором кажущейся скорости с точностью до вариации интеграла от g . При достаточно точном регулировании движения отсутствуют причины, приводящие к существенным вариациям вектора g и интеграла от него. В этом случае измерение кажущейся скорости будет эквивалентным измерению истинной скорости, и поэтому функционал, содержащий вектор кажущейся скорости, будет практически столь же "хорошим", как и функционал, содержащий истинную скорость. Сказанное можно отнести и к координатам.

§ 16.4. Оптимальные направления измерений

Имея возможность измерить истинную или кажущуюся скорость в любом направлении, естественно задаться вопросом: а равноценны ли эти направления в смысле их влияния на рассеивание? Такой же вопрос можно поставить и в отношении координат или пути. Если окажется, что имеются предпочтительные направления измерений, то каким образом их определить? Для подобной постановки вопроса имеются достаточные логические основания. Предположим, что форма траектории выбрана так, чтобы обеспечивалась максимальная дальность полета на эллиптической ее части. Для такой траектории, как известно, должно выполняться условие $\partial l_{св} / \partial \theta_{м.н} = 0$. Небольшие отклонения в истинной скорости вдоль нормали к траектории будут приводить только к малым отклонениям угла наклона скорости, не изменяя модуля скорости. В таком случае отклонение в дальности из-за отклонений скорости вдоль нормали с точностью до линейных оценок будет равно нулю. Это означает, что измерения скорости вдоль нормали к траектории были бы неэффективны, так как дальность нечувствительна к отклонениям скорости в этом направлении. Интегратор, ось

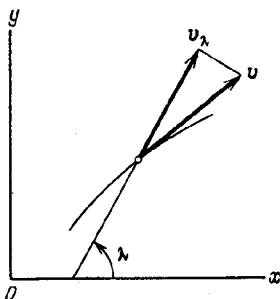


Рис. 16.3. Измерение скорости в проекции на некоторое направление под углом λ к оси x

чувствительности которого установлена по нормали к скорости в конце траектории, производил бы бесполезные измерения.

Очевидно, наиболее ценными были бы измерения в направлении градиента дальности по скорости, т.е. в таком направлении, изменению скорости вдоль которого соответствовало бы максимальное изменение дальности. Таким образом, задача минимизации ошибок в дальности решается путем возможно точной фиксации скорости в наиболее "опасном" направлении. Определим это направление. Для этого представим себе, что скорость ракеты v измеряется в проекции на некоторое направление, составляющее с осью x угол λ , с ошибкой Δv (рис. 16.3). Ошибка в дальности будет равна

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_x} \Delta v_x + \frac{\partial L}{\partial v_y} \Delta v_y.$$

Но поскольку

$$\Delta v_x = \Delta v \cos \lambda, \quad \Delta v_y = \Delta v \sin \lambda,$$

можно написать, что

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_x} \Delta v \cos \lambda + \frac{\partial L}{\partial v_y} \Delta v \sin \lambda.$$

Запишем условие экстремума ΔL по углу λ :

$$\frac{\partial(\Delta L)}{\partial \lambda} = - \frac{\partial L}{\partial v_x} \Delta v \sin \lambda + \frac{\partial L}{\partial v_y} \Delta v \cos \lambda = 0$$

или

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\partial L / \partial v_y}{\partial L / \partial v_x}. \quad (16.33)$$

Экстремум соответствует максимуму ΔL , так как вторая производная отрицательна:

$$\frac{\partial^2(\Delta L)}{\partial \lambda^2} = - \frac{\partial L}{\partial v_x} \Delta v \cos \lambda - \frac{\partial L}{\partial v_y} \Delta v \sin \lambda.$$

Направление, определяемое формулой (16.33), является направлением градиента дальности по скорости. Малые ошибки в скорости, расположенные в плоскости, перпендикулярной к найденному направлению, не будут приводить к ошибкам в дальности. На этом основании достаточно измерение скорости производить в единственном направлении, составляющем с осью x угол λ , и отклонение дальности из-за ошибки измерения скорости можно представить в виде

$$\Delta L_v = \frac{\partial L}{\partial v_\lambda} \Delta v_\lambda.$$

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести относительно перемещений ракеты (или пути), из которых будет следовать, что направление градиента дальности по перемещению определяется формулой

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\partial L / \partial y}{\partial L / \partial x}.$$

Отсюда следует, что достаточно производить измерение пути только по координате вдоль направления, составляющего с осью x угол μ , и отклонение дальности из-за ошибки измерения пути можно записать в виде

$$\Delta L_t = \frac{\partial L}{\partial l_\mu} \Delta l_\mu,$$

где Δl_μ — ошибка измерения пути в направлении μ .

Малые перемещения в плоскости, перпендикулярной к направлению μ , не окажут влияния на отклонения в дальности и их можно не измерять.

Суммируя сказанное относительно оптимальных направлений измерения скорости и пути, можно синтезировать функционал, управляющий дальностью полета, в виде

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v_\lambda} \Delta v_\lambda + \frac{\partial L}{\partial l_\mu} \Delta l_\mu = 0. \quad (16.34)$$

Здесь Δv_λ и Δl_μ — отклонения текущих измеренных значений параметров движения от их расчетных (номинальных) значений. Функционал (16.34) исключает появление методических ошибок в дальности (с точностью до линейного описания) и иллюстрирует принципиальную возможность доведения количественного состава измерений до минимума, т.е. до двух.

Производные $\partial L/\partial v_\lambda$ и $\partial L/\partial l_\mu$, являющиеся коэффициентами при Δv_λ и Δl_μ в формуле (16.34), легко рассчитать. Для $\partial L/\partial v_\lambda$ находим

$$\frac{\partial L}{\partial v_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial v_x} \frac{\partial v_x}{\partial v_\lambda} + \frac{\partial L}{\partial v_y} \frac{\partial v_y}{\partial v_\lambda},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial v_\lambda} = \cos \lambda, \quad \frac{\partial v_y}{\partial v_\lambda} = \sin \lambda,$$

так как

$$v_x = v_\lambda \cos \lambda, \quad v_y = v_\lambda \sin \lambda.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\partial L}{\partial v_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial v_x} \cos \lambda + \frac{\partial L}{\partial v_y} \sin \lambda.$$

Аналогично можно получить, что

$$\frac{\partial L}{\partial l_\mu} = \frac{\partial L}{\partial x} \cos \mu + \frac{\partial L}{\partial y} \sin \mu.$$

Функционал (16.34) и аналогичные функционалы в литературе часто именуется $(\mu-\lambda)$ -функционалами, а соответствующие методы управления — $(\mu-\lambda)$ -управлениями.

§ 16.5. Повышение точности и надежности измерений на основе использования принципа группирования

Мы видели, что с помощью совершенствования функционала, управляющего выключением двигателя, можно добиваться значительного сокращения методических ошибок. До сих пор, говоря об инструментальных погрешностях, мы исходили из того, что это — некоторые заданные величины, которые находятся вне сферы влияния баллистиков. Однако использование одного из свойств группирования параллельных измерений, оказывается, позволяет уменьшить и инструментальные погрешности управления. Принцип группирования широко используется в технике, и мы рассмотрим его на примере применения нескольких одинаковых интеграторов, установленных на борту ракеты.

Пусть каждый интегратор измеряет кажущуюся скорость с некоторой ошибкой, свойственной данному прибору и являющейся величиной случайной. Из измеренных значений можно составить некоторую функцию U , по достижении которой заданного значения U^* будет выдана команда на выключение двигателя. Разумеется, функция U будет случайной, поскольку аргументами ее являются случайные величины. Выключение двигателя и в этом случае произойдет с некоторой ошибкой, однако составить функцию U можно так, что ее статистические характеристики в некотором смысле будут лучше, чем статистические характеристики одного прибора. Предположим для определенности, что в системе управления ракеты использованы три одинаковых интегратора и ошибки показаний каждого интегратора Δx_i распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_x^2 = 1 \text{ м}^2/\text{с}^2$. Пусть сгруппированный сигнал U образуется как среднее арифметическое показаний интеграторов, т.е.

$$U = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad (16.35)$$

где x_i ($i = 1, 2, 3$) — показание i -го интегратора.

Из теории вероятностей [6] известно, что случайная величина U имеет нормальное распределение с дисперсией $\sigma_U^2 = \frac{1}{3} \sigma_x^2$. Тот факт, что дисперсия U в три раза меньше дисперсии x , уже говорит о том, что отклонения кажущейся скорости при выключении двигателя по сигналу U будут существенно ниже, чем в случае выключения по сигналу от одного интегратора. Иными словами, инструментальная погрешность в определении скорости уменьшится в $\sqrt{3}$ раз. Для большей убедительности можно провести и другую оценку, а именно, найти вероятность того, что ошибка в кажущейся скорости при выключении двигателя не превысит некоторой заданной величины, например 1,5 м/с, т.е. найти $P\{|\Delta x| < 1,5\}$ для случая выключения от одного интегратора и $P\{|\Delta U| < 1,5\}$ для случая выключения по сгруппированному сигналу. Здесь через Δx и ΔU обозначены ошибки приборов (отклонения сигналов, выдаваемых прибором, от точного значения измеряемой величины).

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, попадает в заданный интервал (α, β) , выражается с помощью

нормированной функции распределения или интеграла вероятностей следующим образом:

$$P\{\alpha < x < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где Φ — функция распределения нормированного и центрированного нормального распределения; m — математическое ожидание случайной величины, которое в нашем случае равно нулю. Для случая одного интегратора будем иметь

$$P\{-1,5 < \Delta x < 1,5\} = \Phi\left(\frac{1,5}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-1,5}{1}\right) = 0,8664.$$

Для случая трех интеграторов

$$P\{-1,5 < \Delta U < 1,5\} = \Phi\left(\frac{1,5}{1/\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(\frac{-1,5}{1/\sqrt{3}}\right) = 0,9906.$$

Таким образом, вероятность того, что ошибка в кажущейся скорости в момент выключения двигателя не выйдет за пределы $\pm 1,5$ м/с, для группы из трех интеграторов окажется выше приблизительно на 14%, чем для одного интегратора.

Рассмотренный способ при всей своей привлекательности обладает одним существенным недостатком, присущим, впрочем, одноканальной схеме в еще большей степени — недостаточной надежностью. Выход из строя интегратора в одноканальной схеме приводит к тому, что выключение двигателя в момент достижения ракетой нужной кажущейся скорости становится либо вообще невозможным, либо может произойти с непредсказуемым отклонением. В схеме с тремя интеграторами два исправных прибора будут выполнять свои функции, однако если продолжать учитывать показания неверно работающего интегратора, сигнал U может настолько отличаться от истинного значения кажущейся скорости, что задача полета не будет выполнена. Напрашивается введение какого-либо фильтра, который отсеивал бы слишком большие отклонения и изменял бы функцию (16.35), приводя ее к одному из двух возможных видов

$$U = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3^*),$$

или

$$U = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

В первой формуле показание неверно работающего третьего прибора заменено на расчетное значение кажущейся скорости x_3^* , чтобы не изменять структуры формулы. Во второй формуле пришлось изменить структуру, исключив из нее одно из измерений.

Из других возможных решений рассмотрим одно из наиболее простых в отношении реализации. Представим себе, что параллельно работают n интеграторов, настроенных на выдачу сигнала при наборе одной и той же величины скорости X , а команда на выключение двигателя проходит при

поступлении k -го по порядку сигнала ($n > k$). В случае трех интеграторов ($n = 3$) выключение, очевидно, целесообразно производить при поступлении второго сигнала ($k = 2$).

Примем во внимание и то, что существует некоторая вероятность отказа любого из интеграторов. Введем следующие обозначения:

x_i — значение скорости, при которой поступит сигнал от i -го интегратора;

p — вероятность исправной работы интегратора;

q_1 — вероятность отказа, при котором сигнал поступает с большим недобором скорости;

q_2 — вероятность отказа, при котором сигнал поступает с большим перебором скорости.

Будем считать, что опережение или запаздывание при отказе интегратора суть большие величины. Случайные величины x_i могут быть как больше, так и меньше заданного значения X .

Вероятность подачи сигнала i -м интегратором при скорости меньшей заданной будет складываться из вероятности отказа q_1 и вероятности выдачи этого сигнала при условии исправной работы интегратора $P(x_i < X)p$. Обозначая вероятность события $P(x_i < X)$ через $F_x(X)$, запишем

$$P_1(X) = q_1 + pF_x(X).$$

Аналогичным образом можно записать и вероятность невыдачи сигнала i -м интегратором к моменту достижения скорости X :

$$Q_1(X) = 1 - P_1(X) = q_2 + p[1 - F_x(X)].$$

Вероятность того, что все n интеграторов сработали к моменту достижения скорости X , будет равна $P_1(X)^n$; вероятность того, что к этому моменту поступили сигналы ровно от $(n - 1)$ -го прибора, будет

$$C_n^1 P_1(X)^{n-1} Q_1(X),$$

ровно от $(n - 2)$ -х приборов —

$$C_n^2 P_1(X)^{n-2} Q_1(X)^2,$$

ровно от k приборов —

$$C_n^k P_1(X)^{n-k} Q_1(X)^k.$$

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — сочетание из n элементов по k .

Вероятность того, что к моменту достижения скорости X поступили сигналы от k или более приборов, будет равна

$$\sum_{i=k}^n C_n^i P_1(X)^i Q_1(X)^{n-i}. \quad (16.36)$$

Полученное выражение и является законом распределения величины X при принятых условиях задачи.

Принимая во внимание, что $Q_1(X) = 1 - P_1(X)$, можно получить для частного случая $n = 3, k = 2$:

$$\sum_{i=2}^3 C_3^i P_1(X)^i Q_1(X)^{3-i} = 3P_1(X)^2 - 2P_1(X)^3,$$

для частного случая $n = 5$, $k = 3$:

$$\sum_{i=3}^5 C_5^i P_1(X)^i Q_1(X)^{5-i} = 10P_1(X)^3 - 15P_1(X)^4 + 6P_1(X)^5.$$

Подобным образом можно группировать какое угодно количество приборов, а выключение двигателя производить после того, как поступит $(n + 1)/2$ сигналов от сработавших приборов (обычно количество n выбирают нечетным). Эффект, достигаемый в точности, с увеличением количества приборов растет сначала довольно интенсивно, затем все медленнее, и при количестве приборов $n = 11$ наступает практическое "насыщение" и дальнейшего улучшения точности таким путем добиться невозможно.

Используя формулу (16.36), можно решить задачу о вероятности нахождения величины X в каком-либо заданном интервале или наоборот, определить интервал, соответствующий заданной вероятности нахождения в нем величины X .

Ниже приводится таблица, в которой показано отношение среднеквадратического отклонения σ_1 сигнала от одного прибора к среднеквадратическому отклонению σ_n сгруппированного сигнала от n приборов в зависимости от количества приборов в группе:

n	1	3	5	7	9	11
$\frac{\sigma_1}{\sigma_n}$	1	1,58	2,22	2,86	3,33	3,57

Трех-четырёхкратное понижение инструментальной погрешности, достигаемое при применении соответственно 7 и 11 приборов в группе, представляется вполне достаточной компенсацией за дополнительный "расход" приборов.

Глава 17

ГАРАНТИЙНЫЙ ЗАПАС ТОПЛИВА

Известно, что стоимость выведения на орбиту каждого килограмма массы полезного груза все еще остается очень высокой. Поэтому естественно стремление использовать возможности каждого носителя в максимально возможной степени. Вместе с тем назначение величины массы полезного груза, близкой к максимальному уровню, необходимо производить с учетом высокой надежности обеспеченности носителя топливом — эти два условия находятся в прямом противоречии. Оно разрешается с помощью определенного компромисса при выборе так называемых *гарантийных запасов* топлива. Методам расчета гарантийных запасов топлива и обсуждению некоторых путей их снижения посвящена данная глава.

§ 17.1. Постановка вопроса

Выполнение задачи, стоящей перед ЛА, предполагает наличие определенных гарантий в отношении обеспеченности топливом, служащим единственным источником для сообщения ЛА требуемого энергетического уровня. Идет ли речь о выведении ЛА на орбиту ИСЗ, достижении заданной дальности для баллистической ракеты, проведении орбитальных маневров с целью сближения с другим ЛА, разгона для отлета от планеты или торможения с целью посадки — во всех этих и других случаях встает один и тот же вопрос: как гарантировать достаточность топливных запасов? И вообще, что понимается под словом "гарантировать"?

Рассматривая возмущенное движение ЛА на активном участке, мы установили, что под влиянием различных факторов возникают отклонения фактической траектории от расчетной, приводящие к рассеиванию целевой функции (дальности полета, периода орбиты выведения и т.д.). При этом мы не интересовались ни количеством израсходованного топлива, ни его остатком в баках после выключения двигателя. А между тем эти две задачи очень сходны по содержанию и методам решения. В самом деле, количество израсходованного (или оставшегося) топлива не является неизменной величиной, а колеблется от ракеты к ракете, от пуска к пуску, т.е. имеет место рассеивание расходуемого топлива или его остатка относительно некоторого номинального значения (здесь подразумеваются различные экземпляры одной и той же серии ЛА, подготовленные для выполнения одной и той же задачи при настройках приборов системы управления именно на заданные постоянные конечные условия движения). Рассеивание расходуемого топлива и его остатка имеет далеко идущие последствия и поэтому не может быть оставлено без внимания.

Вопрос о назначении предельной дальности для боевой ракеты, предельных энергетических параметров орбиты выведения или энергообеспеченности ЛА для маневрирования на орбите, предельно допустимой величины полезного груза на заданной орбите для носителя космических объектов теснейшим образом связан именно с этим свойством. Если, например, максимальную дальность ракеты назначить исходя из того, чтобы использовать все имеющееся на борту топливо без остатка, то в некоторых случаях при достижении заданной дальности в баках может остаться еще некоторое количество топлива, а в других случаях, наоборот, имеющегося топлива не будет хватать и, следовательно, задача не будет выполнена. Очевидно, подобный метод назначения предельной дальности является неприемлемым. Как же надо поступать?

Пусть мы каким-то образом определили максимальное количество топлива, которое может быть израсходовано при выполнении поставленной задачи, и пусть эта величина совпадает с величиной заправленного топлива. При этом мы отдаем себе отчет в том, что в номинальных условиях, т.е. при отсутствии каких-либо возмущающих факторов, будет израсходовано не все топливо, другими словами, мы сознательно пошли на некоторый запас топлива сверх номинального. Более того, в наиболее благоприятных условиях, т.е. когда действие возмущающих факторов будет приводить к экономии топлива, в баках, кроме запланированного запаса, может остаться еще столько же топлива.

То количество топлива, которое планируется для компенсации возможного разброса его расхода сверх номинального количества, в практике ракетно-космической техники принято называть *гарантийным запасом*.

Остаток топлива, так же как и расходуемое топливо, является функцией многих случайных факторов, действующих на ЛА в полете, и также является случайной величиной. В некоторых работах применяется термин "гарантийный остаток", и по этому поводу уместно сделать небольшое замечание по терминологии. Количество топлива, сознательно планируемое для компенсации разброса его расхода относительно номинального значения, правильнее называть не остатком, даже если к нему добавить слово "гарантийный", а именно гарантийным запасом, поскольку этот термин, на наш взгляд, правильнее отражает физическую суть вопроса. Однако в методологическом плане понятие "остаток" является довольно наглядным, и поэтому нет смысла отказываться от его использования при изложении материала.

Если известны действующие при полете ЛА возмущения со своими законами распределения, известны связи между этими возмущениями и расходуемым топливом, то можно определить основные вероятностные характеристики расходуемого топлива: математическое ожидание, дисперсию и закон распределения. Предположим, закон распределения получился нормальным и среднеквадратическое отклонение расходуемого топлива σ_G оказалось равным 100 кгс. Каким должен быть гарантийный запас? На этот вопрос нет однозначного ответа. Если гарантийный запас назначить равным $G^{\text{гар}} = 100$ кгс, то из таблиц нормированной функции Лапласа будет следовать, что для выполнения задачи с вероятностью $P = 0,8413$ большего запаса и не требуется. По-видимому, это слишком низкая гарантия при решении серьезных задач. Запасу топлива $G^{\text{гар}} = 200$ кгс из тех же таблиц соответствует $P = 0,9772$. Это означает, что только в 23 случаях из 1000 топлива может потребоваться больше, т.е. задача не будет решена. Если такой риск допустим, тогда вопрос исчерпан. Если же требуются более высокие гарантии, тогда запас надо увеличивать. Так, при запасе $G^{\text{гар}} = 2,5\sigma_G = 250$ кгс задача будет решена с вероятностью $P = 0,9937$, при $G^{\text{гар}} = 3\sigma_G = 300$ кгс — с вероятностью $P = 0,9986$ и т.д.

Следовательно, решая вопрос о назначении гарантийных запасов топлива, необходимо установить, с какой степенью надежности требуется обеспечить решение поставленной задачи. Обратим внимание на то, что при увеличении запаса от 100 до 200 кгс вероятность возрастает от 0,8413 до 0,9772 (на 14%), с 200 до 250 кгс вероятность возрастает от 0,9772 до 0,9937 (на 2%), в то время как добавление следующих 50 кгс увеличивает вероятность лишь до 0,9986 (на 0,5%). Поэтому с назначением высоких уровней гарантии надо быть весьма осторожным, поскольку в погоне за ничтожно малым приростом гарантии можно потерять значительную часть полезного груза ЛА. С другой стороны, в погоне за увеличением массы полезного груза мы рискуем потерять не только этот груз, но и ракету в целом и не решить поставленную задачу. В этом смысле роль волевых решений нельзя недооценивать.

Обычно гарантийный запас назначают в пределах $(2,7 \div 3,0)\sigma_G$, гарантируя тем самым обеспеченность топливом выполнения задачи с вероятностью 0,9965 — 0,9986.

Рассмотрим более подробно взаимосвязь понятий гарантийного запаса и вероятности решения поставленной задачи. Под решением поставленной задачи целесообразно понимать достижение некоторым обобщенным функционалом F заданного значения F^* . Для боевой ракеты это будет дальность; для носителя, выводящего на орбиту ИСЗ какой-либо объект, это может быть высота или период обращения; для ракетного разгонного блока можно принять энергию конечной орбиты. Для определенности примем, что чем больше численное значение функционала F , тем больше топлива требуется для его достижения.

Каждому значению F^* может быть поставлена в соответствие вероятность $P(F^*)$ того, что запас топлива окажется достаточным для достижения функционалом значения F^* . *Предельным значением функционала* $F_{\text{пред}}$ называется такое максимальное значение F^* , которое может быть достигнуто с вероятностью $P(F_{\text{пред}}) = P_0$, достаточно близкой к единице. Подчеркнем, что речь идет не об отдельно взятом экземпляре ракеты, носителя или разгонного блока, а о достижении функционала $F_{\text{пред}}$ почти любым экземпляром из рассматриваемой серии ЛА. Предельное значение $F_{\text{пред}}$ характеризует всю серию и не имеет отношения к максимально возможному значению функционала F_{max} , который может быть достигнут отдельным экземпляром серии и будет значительно превосходить $F_{\text{пред}}$ благодаря случайному благоприятному сочетанию основных проектно-баллистических параметров и внешних условий полета.

Итак, следовательно, гарантийный запас — это то топливо, которое запланировано остаться в баках при достижении предельного значения функционала $F_{\text{пред}}$ в номинальных условиях полета (т.е. при номинальных характеристиках ЛА и номинальных внешних условиях). Именно гарантийный запас обеспечивает достижение $F_{\text{пред}}$ с заданной вероятностью P_0 , несмотря на воздействие всех реально действующих возмущений.

§ 17.2. Метод расчета гарантийного запаса топлива

Для решения задачи об определении гарантийного запаса топлива и соответствующего предельного значения $F_{\text{пред}}$ могут применяться различные методы. Наиболее точным был бы метод, позволяющий получить для заданного запаса топлива зависимость $P(F^*)$, а затем решить уравнение $P(F^*) = P_0$ и определить значение $F_{\text{пред}}$, отвечающее назначенному P_0 . Однако этот путь осложнен большой трудоемкостью расчетов и, идя по нему, как правило, нельзя обойтись без громоздких аналитических выкладок. Между тем в стремлении к высокой точности в этих расчетах нет большого смысла. Дело в том, что законы распределения основных возмущающих факторов почти всегда принимаются без достаточно хорошей экспериментальной проверки, а между некоторыми из них имеются корреляционные связи, которыми приходится пренебрегать ввиду слабой их изученности. Поэтому ниже приводится один из простых способов, которым обычно пользуются в практике проектирования.

Рассмотрим ракету, расходующую топливо из двух баков, содержащих окислитель ($G_{\text{ок}}$) и горючее ($G_{\text{г}}$). Примем, как и в главе 12, что при

полете ракеты действуют малые возмущения $\Delta\lambda_i$. При фиксированном времени работы двигателя t_1 , которое соответствует достижению значения функционала F_1 на невозмущенной траектории, функционал F и израсходованные количества окислителя и горючего получают малые отклонения от своих номинальных значений. Будем считать для отклонений справедливыми следующие линейные уравнения:

$$\delta F = f_1 \Delta\lambda_1 + f_2 \Delta\lambda_2 + \dots + f_n \Delta\lambda_n. \quad (17.1)$$

$$\delta G_{\text{ок}} = a_1 \Delta\lambda_1 + a_2 \Delta\lambda_2 + \dots + a_n \Delta\lambda_n, \quad (17.2)$$

$$\delta G_{\text{г}} = b_1 \Delta\lambda_1 + b_2 \Delta\lambda_2 + \dots + b_n \Delta\lambda_n. \quad (17.3)$$

Выключение двигателя системой управления произойдет в момент, когда функционал F достигнет заданного значения F_1 . На возмущенной траектории этому будет соответствовать момент $t_1 + \Delta t_1$. С учетом отклонения Δt_1 израсходованные количества окислителя и горючего также отклонятся от номинальных значений на

$$\Delta G_{\text{ок}} = \delta G_{\text{ок}} + \dot{G}_{\text{ок}} \Delta t_1, \quad (17.4)$$

$$\Delta G_{\text{г}} = \delta G_{\text{г}} + \dot{G}_{\text{г}} \Delta t_1, \quad (17.5)$$

где $\dot{G}_{\text{ок}}$ и $\dot{G}_{\text{г}}$ — секундные расходы окислителя и горючего.

Отклонение времени работы Δt_1 определим из условия достижения значения F_1 и на возмущенной траектории, т.е. из условия равенства нулю суммы отклонений

$$\delta F + \dot{F} \Delta t_1 = 0,$$

откуда

$$\Delta t_1 = - \frac{\delta F}{\dot{F}},$$

где \dot{F} — производная F по времени на номинальной траектории. Теперь вместо (17.4) и (17.5) можно написать

$$\Delta G_{\text{ок}} = \delta G_{\text{ок}} - \frac{\dot{G}_{\text{ок}}}{\dot{F}} \delta F,$$

$$\Delta G_{\text{г}} = \delta G_{\text{г}} - \frac{\dot{G}_{\text{г}}}{\dot{F}} \delta F.$$

Используя эти формулы совместно с (17.1) — (17.3), получаем

$$\Delta G_{\text{ок}} = \sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{\dot{G}_{\text{ок}}}{\dot{F}} f_i \right) \Delta\lambda_i, \quad (17.6)$$

$$\Delta G_{\text{г}} = \sum_{i=1}^n \left(b_i - \frac{\dot{G}_{\text{г}}}{\dot{F}} f_i \right) \Delta\lambda_i. \quad (17.7)$$

Формулы (17.6) и (17.7) дают отклонения расходуемых количеств окислителя и горючего для заданной совокупности возмущений $\Delta\lambda_i$. Нас же интересуют статистические характеристики расходуемого топлива. Их можно получить по крайней мере двумя способами. В основе первого лежит метод статистического моделирования. При этом задаваемая для каждого испытания совокупность возмущений $\Delta\lambda_i$ должна выбираться

случайным образом и в согласии с соответствующими законами распределения этих возмущений, которые, конечно, должны быть известны. Из формул (17.6) и (17.7) для каждого испытания получаются случайные отклонения расходуемых компонент, а после проведения достаточного количества испытаний и их обработки — математические ожидания и среднеквадратические отклонения этих характеристик. Поскольку отклонения расходуемых компонент является результатом воздействия значительного числа случайных величин, они, как правило, подчинены нормальному закону распределения, и это не требует дополнительной проверки.

При втором способе, наиболее распространенном, предполагают, что отклонения $\Delta\lambda_i$ представляют собой независимые случайные величины, подчиненные нормальному закону распределения с нулевыми математическими ожиданиями и среднеквадратическими отклонениями σ_{λ_i} . В таких предположениях среднеквадратические отклонения расходуемых компонент можно определить по формулам

$$\sigma[G_{ок}] = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{\dot{G}_{ок}}{\dot{F}} f_i \right)^2 \sigma_{\lambda_i}^2} \quad (17.8)$$

$$\sigma[G_r] = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(b_i - \frac{\dot{G}_r}{\dot{F}} f_i \right)^2 \sigma_{\lambda_i}^2} \quad (17.9)$$

а математические ожидания отклонений расходуемых компонент будут равны нулю.

Итоговое распределение отклонений расходуемых компонент будет близким к нормальному, и формулы (17.8), (17.9) будут вполне применимы и в случае, если даже все $\Delta\lambda_i$ распределены не нормально. Для этого, однако, существенно, чтобы линейные зависимости (17.1) — (17.3) достаточно правильно отражали действительную картину, чтобы число возмущений, реально влияющих на расход, было достаточно большим и чтобы среди них не было одного или нескольких, доминирующих над остальными по своему влиянию.

Для нормального распределения отклонений расходуемых компонент плотность распределения той и другой компоненты опишется формулой

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_G \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_G^2}}$$

Назначив гарантийные запасы в количествах $k\sigma[G_{ок}]$ и $k\sigma[G_r]$, оценим вероятность того, что случайные отклонения расходуемых компонент не превзойдут величин гарантийных запасов. Для нормального распределения эта вероятность такова:

$$P_k = \frac{1}{\sigma_G \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k\sigma_G} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_G^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + P.$$

Пользуясь таблицами функции P , можно решить и обратную задачу: задавшись вероятностью P_k , определить значение k , обеспечивающее эту вероятность.

Теперь оценим, какова будет вероятность достижения заданного значения функционала F , если запасы компонент топлива выбраны описанным способом, т.е. если в момент выключения двигателя на номинальной невозмущенной траектории они имеют значения $k\sigma_G$, где $\sigma[G_{ок}]$ и $\sigma[G_T]$ определяются формулами (17.8) и (17.9). Достижение функционала F не будет обеспечиваться при трех возможных комбинациях отклонений расходоуемых компонент:

$$\Delta G_{ок} \leq k\sigma[G_{ок}], \quad \Delta G_T > k\sigma[G_T];$$

$$\Delta G_{ок} > k\sigma[G_{ок}], \quad \Delta G_T \leq k\sigma[G_T];$$

$$\Delta G_{ок} > k\sigma[G_{ок}], \quad \Delta G_T > k\sigma[G_T].$$

Вероятность того, что величина отклонения какой-либо из расходоуемых компонент выйдет за границу $\pm k\sigma_G$, равна $1 - P_0$. Но нас интересует только случай выхода за правую границу интервала $\pm k\sigma_G$, и вероятность такого

исхода в силу симметричности закона распределения равна $\frac{1}{2}(1 - P_0)$

для каждой компоненты. Поскольку при первой и второй комбинациях недостаток одной компоненты реализуется в условиях достаточности другой с вероятностью P_0 , вероятность каждой из этих комбинаций будет равна

$\frac{1}{2} P_0 (1 - P_0)$. Третья комбинация, предусматривающая одновременный

дефицит по обоим компонентам, может реализоваться с вероятностью

$\left[\frac{1}{2}(1 - P_0) \right]^2 = \frac{1}{4} (1 - P_0)^2$. Тогда полная вероятность того, что заданное значение функционала не будет достигнуто из-за нехватки топлива

(хотя бы одной из компонент), будет равна

$$2 \cdot \frac{1}{2} P_0 (1 - P_0) + \frac{1}{4} (1 - P_0)^2 =$$

$$= (1 - P_0) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} P_0 \right) < (1 - P_0).$$

Отсюда следует, что рассмотренный достаточно простой метод определения гарантийных запасов топлива для ЛА с двумя отдельными баками для компонент топлива обеспечивает достижение заданного значения функционала с вероятностью хотя и не точно равной P_0 , но во всяком случае не меньшей P_0 . Если топливо размещается более чем в двух баках, корректное решение задачи осложняется весьма сильно, однако ввиду простоты изложенного метода он применяется и для более сложных случаев, хотя оценить допускаемую при этом погрешность и не удастся.

Перейдем теперь к определению коэффициентов f_i, a_i, b_i в формулах (17.1) – (17.3) и (17.6) – (17.9). Коэффициенты f_i в этих формулах имеют смысл производных, характеризующих влияние различных возмущающих факторов на величину функционала F . Методы их получения

рассмотрены в главе 13 в связи с обсуждением вопросов рассеивания и дополнительных пояснений не требуют. Коэффициенты a_i и b_i обычно получают способом, который выглядит совсем просто при использовании понятия остатка топлива.

Для остатка окислителя в номинальный момент выключения двигателя t_1 можно записать выражение

$$G_{\text{ок}}^{\text{ост}} = G_{\text{ок}}^0 - \dot{G}_{\text{ок}} t_1, \quad (17.10)$$

где $G_{\text{ок}}^0$ — вес окислителя, содержащегося в баке в момент старта; $\dot{G}_{\text{ок}}$ — номинальный секундный расход окислителя.

Секундный расход окислителя $\dot{G}_{\text{ок}}$ целесообразно выразить через суммарный секундный расход топлива \dot{G} и соотношение расходов компонент $k = \dot{G}_{\text{ок}}/\dot{G}_r$. Так мы делаем потому, что для жидкостных ракетных двигателей именно величины \dot{G} и k являются, как правило, независимыми величинами, тогда как секундные расходы компонент $\dot{G}_{\text{ок}}$ и \dot{G}_r связаны довольно сложными корреляционными зависимостями.

Секундный расход окислителя выражается через \dot{G} и k зависимостью

$$\dot{G}_{\text{ок}} = \frac{k}{1+k} \dot{G},$$

и формулу (17.10) можно переписать так:

$$G_{\text{ок}}^{\text{ост}} = G_{\text{ок}}^0 - \frac{k}{1+k} \dot{G} t_1. \quad (17.11)$$

Аналогично для остатка горючего

$$G_r^{\text{ост}} = G_r^0 - \frac{1}{1+k} \dot{G} t_1. \quad (17.12)$$

Продифференцируем (17.11) и (17.12) при условии $t_1 = \text{const}$ и заметим дифференциалы конечными приращениями:

$$\delta G_{\text{ок}}^{\text{ост}} = \Delta G_{\text{ок}}^0 - \frac{k t_1}{1+k} \Delta \dot{G} - \frac{\dot{G} t_1}{(1+k)^2} \Delta k, \quad (17.13)$$

$$\delta G_r^{\text{ост}} = \Delta G_r^0 - \frac{t_1}{1+k} \Delta \dot{G} + \frac{\dot{G} t_1}{(1+k)^2} \Delta k. \quad (17.14)$$

Формулы (17.13) и (17.14) представляют собой конкретную запись соотношений, которые в общем виде были представлены формулами (17.2) и (17.3), с учетом того, что отклонение израсходованной компоненты δG и отклонение остатка $\delta G^{\text{ост}}$ связаны между собой очевидным соотношением $\delta G = -\delta G^{\text{ост}}$. Величины $G_{\text{ок}}^0$, G_r^0 , \dot{G} и k должны быть включены в число параметров λ_i . Если какой-нибудь из них, например удельная тяга $P_{\text{уд.п}}$, непосредственно не влияет на отклонение расходуемой компоненты (при фиксированном $t = t_1$), то соответствующие коэффициенты a_i и b_i в формулах (17.2) и (17.3) следует считать равными нулю. Точно так же следует считать равными нулю коэффициенты f_i при отклонении такого параметра λ_i , который входит в формулы (17.2) и (17.3),

но не влияет на величину функционала при неизменном времени работы двигателя (например, соотношение расходов компонент k).

Для различных конкретных систем двигательных установок и компоновочных схем носителей и ЛА (имеется в виду, что с одним и тем же баком могут быть связаны один или несколько различных двигателей, что связь между баками может осуществляться или простым перетеканием или регулируемой перекачкой компоненты и т.д.) зависимости для расчета гарантийных запасов могут оказаться более сложными и содержать большее количество факторов, чем было принято нами, но принципиальная основа метода не изменяется.

§ 17.3. Влияние возмущающих факторов на величину гарантийного запаса топлива

В ряде случаев на начальной стадии проектирования можно обойтись весьма простыми методами расчета гарантийного запаса, на одном из которых мы и остановимся. Одновременно, пользуясь возможностью более наглядно представить влияние различных возмущающих факторов на гарантийный запас топлива, мы попытаемся установить некоторые интересные свойства.

Представим себе, что задача о достижении заданного значения функционала F сводится к задаче о достижении заданной кажущейся скорости. Если отвлечься от влияния атмосферы, условие выполнения задачи можно записать в виде

$$v_k = -g_0 P_{уд.п} \ln \mu_k = \text{const}, \quad (17.15)$$

где, как и раньше,

$$\mu_k = G_k / G_0. \quad (17.16)$$

Подобная постановка вполне допустима, поскольку в действительности часто в качестве функционала используется именно кажущаяся скорость. Достижение заданной кажущейся скорости принимается как условие решения задачи по энергетическому уровню.

Начальный вес ракеты представим в виде суммы сухого веса $G_{сух}$ и веса начальной заправки топливом $G_{т0}$:

$$G_0 = G_{сух} + G_{т0}.$$

Конечный вес запишем в виде суммы того же сухого веса и веса конечного остатка топлива

$$G_k = G_{сух} + G_{т.к}.$$

Тогда вместо (17.15) и (17.16) будем иметь

$$v_k = g_0 P_{уд.п} \ln \frac{G_{сух} + G_{т0}}{G_{сух} + G_{т.к}}, \quad (17.17)$$

где

$$\mu_k = \frac{G_{сух} + G_{т.к}}{G_{сух} + G_{т0}}. \quad (17.18)$$

Скорость может получить отклонения за счет отклонений удельной тяги, сухого веса и начального веса топлива. Эти отклонения должны

быть компенсированы за счет дополнительного расхода топлива, т.е. за счет изменения конечного остатка топлива. Необходимо определить, каковы соотношения между этим потребным конечным весом топлива и отклонениями возмущающих факторов.

Будем рассматривать в отдельности каждое из возмущений.

Начнем с удельной тяги, которой придадим некоторое приращение $\Delta P_{уд.п}$. Скорость при этом получит приращение, которое определим, дифференцируя (17.17) и заменяя дифференциалы малыми приращениями:

$$\begin{aligned} \Delta v_{к1} &= g_0 \ln \frac{G_{сух} + G_{т0}}{G_{сух} + G_{т.к}} \Delta P_{уд.п} = \\ &= g_0 \ln \frac{G_0}{G_k} \Delta P_{уд.п} . \end{aligned}$$

По условию задачи нам необходимо добиться постоянства скорости за счет варьирования конечного веса топлива, т.е. его остатка $G_{т.к}^{ост}$. Вновь дифференцируем (17.17), задавая $G_{т.к}^{ост}$ малое приращение:

$$\begin{aligned} \Delta v_{к2} &= -g_0 P_{уд.п} \frac{G_{сух} + G_{т.к}}{G_{сух} + G_{т0}} \frac{(G_{сух} + G_{т0}) G_{т.к}^{ост}}{(G_{сух} + G_{т.к})^2} = \\ &= - \frac{g_0 P_{уд.п}}{G_k} \Delta G_{т.к}^{ост} . \end{aligned}$$

Поскольку нам необходимо добиться постоянства v_k , мы должны суммарное приращение Δv_k за счет $\Delta P_{уд.п}$ и $\Delta G_{т.к}^{ост}$ приравнять нулю, в результате чего получим

$$\begin{aligned} \Delta v_k &= \Delta v_{к1} + \Delta v_{к2} = g_0 \ln \frac{G_0}{G_k} \Delta P_{уд.п} - \\ &- \frac{g_0 P_{уд.п}}{G_k} \Delta G_{т.к}^{ост} = 0 . \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta G_{т.к}^{ост} = \frac{G_k \ln \frac{1}{\mu_k}}{P_{уд.п}} \Delta P_{уд.п} . \quad (17.19)$$

Из полученной зависимости видно, что положительному отклонению $\Delta P_{уд.п}$ соответствует положительное отклонение $\Delta G_{т.к}^{ост}$. Критичным является отрицательное отклонение, для компенсации которого и требуется предусмотреть соответствующий гарантийный запас. Требуемый запас должен состоять из остатков окислителя и горючего, взятых в соотношении их номинальных расходов, т.е.

$$\Delta G_{ок}^{ост} = \frac{\Delta G_{т.к}}{1+k} k, \quad \Delta G_{г}^{ост} = \frac{\Delta G_{т.к}}{1+k} . \quad (17.20)$$

Рассмотрим влияние отклонения сухого веса ракеты $\Delta G_{\text{сух}}$. Заметим, что для обеспечения постоянства v_k в данном случае достаточно обеспечить постоянство μ_k . Приравняем нулю отклонение μ_k , полученное дифференцированием (17.18) при переменных $G_{\text{сух}}$ и $G_{\text{т.к}}^{\text{ост}}$:

$$\Delta \mu_k = \frac{(G_{\text{сух}} + G_{\text{т0}}) (\Delta G_{\text{сух}} + \Delta G_{\text{т.к}}^{\text{ост}}) - (G_{\text{сух}} + G_{\text{т.к}}) \Delta G_{\text{сух}}}{(G_{\text{сух}} + G_{\text{т0}})^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\Delta G_{\text{т.к}}^{\text{ост}}$, после очевидных преобразований получаем

$$\Delta G_{\text{т.к}}^{\text{ост}} = -(1 - \mu_k) \Delta G_{\text{сух}}. \quad (17.21)$$

Естественно, что положительное отклонение сухого веса требует для своей компенсации уменьшения конечного веса топлива, причем весьма значительного. Так, если относительный конечный вес ракеты равен 0,2, то за каждый килограмм возможной погрешности в сухом весе надо расплачиваться 0,8 килограмма остатка топлива. Потребное количество запаса топлива (или его остаток) надо разделить между окислителем и горючим в соотношении k , т.е.

$$\begin{aligned} \Delta G_{\text{ок}}^{\text{ост}} &= \frac{(1 - \mu_k)}{1 + k} k \Delta G_{\text{сух}}, \\ \Delta G_{\text{г}}^{\text{ост}} &= \frac{(1 - \mu_k)}{1 + k} \Delta G_{\text{сух}}. \end{aligned} \quad (17.22)$$

Рассмотрим, как отражается на потребном запасе ошибка в заправке топливом.

Как и в предыдущем случае, нужный результат получим, дифференцируя (17.18) при переменных $G_{\text{т0}}$ и $G_{\text{т.к}}^{\text{ост}}$:

$$\Delta \mu_k = \frac{(G_{\text{сух}} + G_{\text{т0}}) \Delta G_{\text{т.к}}^{\text{ост}} - (G_{\text{сух}} + G_{\text{т.к}}^{\text{ост}}) \Delta G_{\text{т0}}}{(G_{\text{сух}} + G_{\text{т0}})^2} = 0,$$

откуда

$$\Delta G_{\text{т.к}}^{\text{ост}} = \mu_k \Delta G_{\text{т0}}. \quad (17.23)$$

Каждый килограмм перезаправленного топлива приводит к накоплению μ_k килограммов в конечном весе. Остальная часть, т.е. $1 - \mu_k$ килограммов, расходуется на сообщение μ_k килограммам топлива скорости v_k . При недозаправке картина будет обратной. Все было бы так, если бы отклонение в заправке предполагало пропорциональные доли в окислителе и горючем. В действительности, однако, такой корреляции нет. Как правило, заправка каждой компоненты сопровождается своими независимыми ошибками, и это обстоятельство нельзя не учитывать. Только что мы установили, что при отклонении заправки на $\Delta G_{\text{т0}}$ дополнительно расходуется количество топлива, равное $(1 - \mu_k) \Delta G_{\text{т0}}$. Предположим, что это отклонение заправки приходится только на долю окислителя, т.е. $\Delta G_{\text{т0}} = \Delta G_{\text{ок0}}$. Тогда изменение остатка окислителя определится как разность между отклонением начальной заправки и отклонением его израсходованного количества. В потребном дополнительном расходе приходится на

долю окислителя $\frac{1 - \mu_k}{1 + k} k \Delta G_{\text{ок}0}$, на долю горючего $\frac{1 - \mu_k}{1 + k} \Delta G_{\text{ок}0}$.

Таким образом изменение остатков составит:
окислителя

$$\Delta G_{\text{ок}}^{\text{ост}} = \Delta G_{\text{ок}0} - \frac{1 - \mu_k}{1 + k} k \Delta G_{\text{ок}0} = \frac{1 + k\mu_k}{1 + k} \Delta G_{\text{ок}0}, \quad (17.24)$$

горючего

$$\Delta G_{\text{г}}^{\text{ост}} = - \frac{1 - \mu_k}{1 + k} \Delta G_{\text{ок}0}. \quad (17.25)$$

Отсюда следует, что на случай недозаправки окислителя необходимо предусмотреть запас окислителя в количестве, определяемом формулой (17.24); на случай его перезаправки следует предусмотреть остаток горючего согласно формуле (17.25). Нетрудно видеть, что эти остатки не пропорциональны соотношению расходов, что будет вызывать непропорциональность между гарантийными запасами окислителя и горючего.

Не приводя подробных пояснений, запишем аналогичные формулы на случай отклонения заправки горючего $\Delta G_{\text{г}0}$:

$$\Delta G_{\text{ок}}^{\text{ост}} = - \frac{1 - \mu_k}{1 + k} k \Delta G_{\text{г}0}, \quad (17.26)$$

$$\Delta G_{\text{г}}^{\text{ост}} = \frac{k + \mu_k}{1 + k} \Delta G_{\text{г}0}. \quad (17.27)$$

Как уже отмечалось, процесс расходования топлива может сопровождаться нарушением установленного соотношения расходов между окислителем и горючим, причин которого мы касаться не будем. Примем, что это нарушение выражается в рассогласовании между "заправленным" соотношением компонент и их "израсходованным" соотношением на величину Δk . Кроме того, будем считать, что подобное отклонение не вызывает отклонения удельной тяги. Строго говоря, между этими отклонениями существует определенная связь. Но если значение k выбрано близким к оптимальному стехиометрическому соотношению, то при его малых изменениях действительно $P_{\text{уд.п}}$ не изменяется. В тех же случаях, когда номинальный режим работы двигателя выбран не вблизи стехиометрического соотношения, эффект отклонения удельной тяги в зависимости от отклонения Δk должен быть учтен в расчетах. При нашем же предположении скорость ракеты будет зависеть только от того, сколько выработано обеих компонент в сумме, и не будет зависеть от нарушения их соотношения. Если для достижения нужной скорости расходуются количество топлива $G_{\text{г}}$, то при номинальном значении k оно будет состоять из следующих количеств окислителя и горючего:

$$G_{\text{ок}} = \frac{G_{\text{г}}}{1 + k} k, \quad G_{\text{г}} = \frac{G_{\text{г}}}{1 + k}. \quad (17.28)$$

Отклонение израсходованных количеств окислителя и горючего при малом отклонении соотношения их расходов на величину Δk и при

$G_T = \text{const}$ составит

$$\Delta G_{\text{ок}} = - \frac{G_T [(1+k)\Delta k - k\Delta k]}{(1+k)^2} = - \frac{G_T}{(1+k)^2} \Delta k, \quad (17.29)$$
$$\Delta G_T = \frac{G_T}{(1+k)^2} \Delta k.$$

Как видно, отклонения израсходованных количеств окислителя и горючего равны по величине, но противоположны по знаку. Следовательно, на случай повышенных k в полете необходимо иметь запас окислителя, а на случай пониженных k — запас горючего. Поскольку эти запасы равны, а не пропорциональны рабочему соотношению k , это приведет к нарушению пропорциональности гарантийных запасов по отношению к рабочим запасам. Такое же нарушение мы усмотрели при учете ошибок в заправке компонент. Однако это нарушение ничем не грозит, и правильное выдерживание гарантийных запасов в баках легко выполнимо.

§ 17.4. Некоторые пути уменьшения гарантийного запаса топлива

Расчеты, проведенные для конкретных ракет с учетом отклонений возмущающих факторов в реальных пределах, показывают, что гарантийный запас топлива играет существенную роль в определении массы выводимого носителем полезного груза или предельной дальности полета. Некоторые возмущающие факторы, обуславливающие гарантийный запас, столь значительны, что их снижение заметным образом улучшает общий массово-энергетический баланс. В связи с этим ниже остановимся на некоторых возможных способах уменьшения гарантийного запаса.

17.4.1. Регулирование соотношения расхода компонент. Рассмотрим на числовом примере, как влияет нарушение соотношения расходов компонент на массу полезного груза одноступенчатой ракеты. Пусть начальный вес ракеты $G_0 = 100$ тс, конечный вес $G_k = 20$ тс (вес топлива $G_T = 80$ тс), вес полезного груза 3 тс. Пусть соотношение расходов $k = 2$, а возможное его отклонение колеблется в пределах $\pm 3\%$, т.е. в пределах $\pm 0,06$. Если бы никаких других возмущений не было, надо было бы предусмотреть для данной ракеты гарантийные запасы окислителя и горючего, определяемые формулой (17.29):

$$\Delta G_{\text{ок}}^{\text{гар}} = \Delta G_T^{\text{гар}} = \frac{80}{(1+2)^2} 0,06 = 0,53 \text{ тс},$$

что в сумме составляет более 1 тс.

Принятая нами погрешность $\pm 3\%$ является для нерегулируемой системы предельно малой, почти недостижимой, и тем не менее "поглощает" целую тонну, которую можно было бы "использовать" для полезного груза. В самом деле, эта тонна для ракеты является балластом, как бы дополнительный сухим весом конструкции. Не будь погрешности Δk , можно было бы заменить тонну остаточного топлива тонной полезного груза. Отсюда вытекает важность мер, направленных на уменьшение рассогласования заданного номинального соотношения расходов компонент. Извест-

ны системы регулирования соотношения расходов, основанные на разных принципах. Укажем, например, на обычные расходомерные устройства, которые могут давать информацию как о текущем секундном расходе, так и об интегральном количестве израсходованной компоненты. Эта информация используется для регулирования расхода одной или обеих компонент с помощью дроссельных устройств на магистралах. Известны системы регулирования, использующие изменение уровней жидких компонент в баках и вырабатывающие команды на приводы дроссельных устройств, пропорциональные измеренному рассогласованию между текущими количествами остатков компонент или израсходованными количествами. Понятно, что использовать устройства, основанные на измерении уровней, можно только в случаях, когда баки имеют удлиненную форму. Для баков, имеющих форму тора или чечевицы, такие способы не пригодны. При расчете гарантийных запасов для ракет, снабженных регулирующими системами, необходимо либо разброс Δk принимать из условий погрешности процесса регулирования и пользоваться формулой (17.29), либо составляющую, обусловленную разбросом Δk , из расчета гарантийных запасов исключить вовсе, но добавить рассогласование в остатках компонент топлива, исходя из анализа погрешности системы.

17.4.2. Синхронизация опорожнения баков в многоблочных ракетах.

До сих пор ничего не говорилось о гарантийных запасах, связанных с погрешностью реализации суммарного секундного расхода, заложенного в расчет номинальной траектории. Это было связано с тем, что в рассматриваемом методе определения гарантийных запасов в качестве функционала была принята кажущаяся скорость в условиях пустоты, которая, как известно, не зависит от величины или закона расходования топлива, а зависит только от отношения начальной и конечной масс. В действительности количество расходуемого топлива для достижения заданной величины функционала F не зависит от секундного расхода только для тех ракет или их ступеней, тяговооруженность которых выбрана энергетически оптимальной. В других случаях надо считать с возможными отклонениями секундного расхода. Однако большинство ракет снабжают системой регулирования кажущейся скорости, благодаря которой величина тяги в полете в среднем не может иметь существенных отклонений относительно запрограммированного значения. Таким образом, необходимость учета разброса секундного расхода в гарантийных запасах отпадает.

Но на одном важном случае сильного влияния секундного расхода необходимо остановиться особо — имеется в виду случай нескольких параллельно работающих ракетных блоков подобно тому, как это было реализовано на носителе "Восток" (рис. 17.1). Каждый из четырех боковых блоков имеет "свой" двигатель, который питается из "своих" баков. Выключение до расчетного момента хотя бы одного двигателя недопустимо, так как

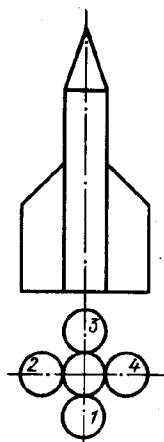


Рис. 17.1. Схема ракеты-носителя с четырьмя боковыми блоками, двигатели которых работают параллельно и каждый из которых расходует топливо только из "своего" бака

это приведет к неустойчивому движению ракеты в целом. Если работу этих блоков каким-то образом не связать между собой, не синхронизировать процессы расходования топлива, то из каждого блока будет расходоваться топливо независимо от других блоков со случайными отклонениями в пределах точности настройки двигателей. Как же это отразится на гарантийных запасах топлива и на величине полезного груза? Проведем элементарную оценку.

Пусть в каждом боковом блоке имеется топливо в количестве $G_{\tau 1}$, которое при секундном расходе \dot{G}_1 расходуется за время $t = G_{\tau 1} / \dot{G}_1$. Если в одном из блоков (обозначим его цифрой 1) топливо расходуется с завышенным секундным расходом, то оно израсходуется раньше номинального времени на

$$\Delta t = \frac{G_{\tau 1}}{\dot{G}_1^2} \Delta \dot{G}_1.$$

К этому моменту в каждом из остальных трех блоков останется неизрасходованного топлива

$$\Delta G_{\tau 1} = \dot{G}_1 \Delta t = \frac{G_{\tau 1}}{\dot{G}_1} \Delta \dot{G}_1,$$

а в трех блоках

$$\Delta G_{\tau} = \frac{3 G_{\tau 1}}{\dot{G}_1} \Delta \dot{G}_1.$$

Для того чтобы сообщить первой ступени ракеты расчетную скорость, необходимо, очевидно, израсходовать и это количество топлива (для доведения относительного конечного веса до расчетной величины). Но для этого необходимо из каждого блока, в том числе и из блока 1, израсходовать 1/4 часть этого количества топлива, т.е.

$$\Delta G_{\tau 1} = \frac{3}{4} G_{\tau 1} \frac{\Delta \dot{G}_1}{\dot{G}_1}.$$

Следовательно, на этот случай в блоке 1 должно быть предусмотрено именно такое количество топлива в виде гарантийного запаса.

Проводя подобные рассуждения для случая отрицательного отклонения секундного расхода в блоке 2, можно установить, что в блоке 1 дополнительно должен быть предусмотрен гарантийный запас топлива в количестве

$$\Delta G_{\tau 1} = \frac{1}{4} G_{\tau 1} \frac{\Delta \dot{G}_1}{\dot{G}_1}.$$

Такие же запасы надо иметь в блоке 1 на случай отрицательных отклонений секундного расхода в блоках 3 и 4. Поскольку все эти отклонения можно считать независимыми случайными величинами, подчиненными нормальному закону распределения, суммарный запас, который должен быть предусмотрен в блоке 1, будет равен

$$\Delta G_{\tau 1}^{\text{гар}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4} G_{\tau 1} \frac{\Delta \dot{G}_1}{\dot{G}_1}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{4} G_{\tau 1} \frac{\Delta \dot{G}_1}{\dot{G}_1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4} \left(G_{\tau 1} \frac{\Delta \dot{G}_1}{\dot{G}_1} \right)^2} \approx 0,85 G_{\tau 1} \frac{\Delta \dot{G}_1}{\dot{G}_1}. \quad (17.30)$$

Если принять максимально возможное отклонение $\Delta \dot{G}_1 / \dot{G}_1 = 0,04$ (т.е. 4%), то при $G_{\tau 1} = 40$ тс гарантийный запас в каждом из боковых блоков для компенсации только этого возмущения будет составлять около 1,3 тс, а в четырех блоках 5,2 тс. Для носителя "Восток" это приводит к потере 400 – 500 кгс полезного груза на орбите при выводимом полезном грузе 6 – 7 тс. Такова цена рассогласования секундных расходов в многобачковых не связанных между собой топливных системах. Чтобы избежать таких потерь, предусматриваются устройства, синхронизирующие процессы расходования топлива из разных блоков и сводящие к минимуму разность остатков топлива в них. В этих случаях в гарантийный запас включаются количества компонент топлива, определяемые погрешностью регулирования остатков.

После определения по формулам (17.19) – (17.29) составляющих отклонений остатков от расчетных значений необходимо их просуммировать. Полагая возмущения случайными величинами, подчиненными нормальному закону распределения, суммарное отклонение остатка по каждой компоненте получаем как корень квадратный из суммы квадратов составляющих. При этом, если пользоваться среднеквадратическими отклонениями возмущающих факторов, получим среднеквадратические отклонения остатков, если пользоваться "максимальными" (т.е. $2,7 \sigma_{\lambda_i}$ или $3,0 \sigma_{\lambda_i}$ – в зависимости от степени надежности) отклонениями, получим максимальные отклонения остатков, которые и примем за гарантийные запасы соответствующих компонент. Сказанное можно записать в следующей форме:

$$\Delta G_{ок}^{гар} = \sqrt{\sum (\Delta G_{ок i}^{ост})^2}, \quad (17.31)$$

$$\Delta G_r^{гар} = \sqrt{\sum (\Delta G_{r i}^{ост})^2},$$

где $\Delta G_{ок i}^{ост}$ и $\Delta G_{r i}^{ост}$ – составляющие потребных остатков компонент топлива для компенсации рассматриваемых возмущений.

17.4.3. Совмещение гарантийных запасов ступеней. Укажем еще на один путь повышения весовой отдачи носителей, связанный с гарантийным запасом топлива, – это возможность объединения (совмещения) гарантийных запасов ступеней многоступенчатых носителей и размещения их на последней (или последующей промежуточной) ступени.

Рассмотрим двухступенчатый носитель, на каждой ступени которого предусмотрен свой гарантийный запас, обеспечивающий достижение заданного для этой ступени функционала (чаще всего кажущейся скорости). С помощью баллистических соотношений можно привести этот запас к весу полезного груза, т.е. пересчитать их в условные потери полезного груза.

Обозначим эти потери через $\Delta G_{п.г}^I$ и $\Delta G_{п.г}^{II}$, и тогда суммарная потеря будет равна

$$\Delta G_{п.г} = \Delta G_{п.г}^I + \Delta G_{п.г}^{II}. \quad (17.32)$$

Подобное назначение гарантийных запасов предполагает такое построение системы управления и функционирования носителя, при котором продолжение полета второй ступени становится возможным только при условии достижения заданного значения функционала на первой ступени.

При использовании в качестве функционала кажущейся скорости это условие запишется в виде

$$v_s^I = \text{const}, \quad (17.33)$$

а условие выполнения задачи в целом — в виде

$$v_s = v_s^I + v_s^{II} = \text{const}, \quad (17.34)$$

откуда с учетом (17.33) следует, что

$$v_s^{II} = \text{const}. \quad (17.35)$$

Не будь гарантийных запасов, кажущиеся скорости, достигаемые при полете каждой ступени, имели бы случайные отклонения в пределах $\pm \Delta v_s^I$ и $\pm \Delta v_s^{II}$, распределенные, как правило, по нормальному закону. Если пренебречь условием (17.33), а исходить только из условия (17.34), то с помощью гарантийного запаса необходимо будет компенсировать только случайные суммарные отклонения Δv_s , которые, подчиняясь нормальному закону распределения, будут иметь максимальное значение

$$\Delta v_s = \sqrt{(\Delta v_s^I)^2 + (\Delta v_s^{II})^2}.$$

Это потребует гарантийного запаса, который, будучи приведенным к весу полезного груза, составит величину

$$\Delta G_{п.г} = \sqrt{(\Delta G_{п.г}^I)^2 + (\Delta G_{п.г}^{II})^2}. \quad (17.36)$$

По сравнению со случаем разделения гарантийных запасов между ступенями выигрыш в весе полезного груза получится как разность между арифметической суммой потерь (17.32) и геометрической суммой гарантийного запаса (17.36). Если, например, доли гарантийных запасов первой и второй ступеней одинаковы, то выигрыш в гарантийном запаса, приведенном к весу полезного груза, составит около 40%. Однако выигрыш дается не просто. Дело в том, что при отсутствии гарантийного запаса на первой ступени полет второй ступени начинается при значительных некомпенсированных возмущениях начальных условий движения, и траектория может иметь недопустимо большие отклонения от расчетной.

В этих случаях не обойтись без глубокого регулирования режима работы двигателя второй ступени, так как только таким способом можно добиться удерживания траектории в достаточно узкой области. Но глубокое регулирование означает, что для этого должен быть предусмотрен соответствующий диапазон форсирования двигателя в необходимых случаях. Следовательно, номинальная тяга двигателя, учитываемая при расчете невозмущенной траектории, должна быть меньше максимально возможной тяги на величину

ну потребного ее форсирования. Снижение тяговооруженности, как правило, снижает и вес выводимого полезного груза. Таким образом, суммарный выигрыш в весе полезного груза получается как разность между "чистым" выигрышем за счет объединения гарантийных запасов и проигрышем за счет снижения номинальной тяговооруженности.

Выше приведены только случаи расчета гарантийных запасов топлива, наиболее часто встречающиеся в практических приложениях, и пояснены основные принципы подхода к проведению таких расчетов. Перед проведением расчета для конкретной схемы носителя необходимо тщательный предварительный анализ особенностей работы его двигательной установки и принципов регулирования расхода компонент топлива; необходимо также установить состав возмущений и законы их распределения, обратив особое внимание на наличие или отсутствие между ними корреляционных связей. Только после этого можно приступить к непосредственному расчету.

Глава 18

ВЫБОР ФОРМЫ ТРАЕКТОРИИ

Главой о выборе формы траектории завершается часть, посвященная проблемам рассеивания. При выборе формы траектории рассматриваются вопросы ее оптимизации с разных позиций, подчас противоречивых. Одной из главных задач, решаемых при выборе формы траектории, является минимизация рассеивания. Однако необходимо использовать все возможности и по энергетической оптимизации траектории. Приходится считаться также с целым рядом ограничений, предъявляемых к траектории системой управления, географическими условиями пуска, особенностями нагружения конструкции и др. Таким образом, синтезируемая траектория является как бы результатом поиска наиболее приемлемого компромисса между многими наложенными на нее условиями. Совокупность условий не всегда может быть представлена в виде какой-либо единой функции, подлежащей оптимизации, — в этом основная трудность полной формализации процесса поиска.

После обсуждения основных требований и ограничений к траектории активного участка будут рассмотрены вопросы выбора программы угла тангажа, реализующей максимальную дальность полета баллистической ракеты, программы, обеспечивающей выведение на орбиту максимального полезного груза, и программы минимального рассеивания. Будут даны также рекомендации по формированию отдельных участков траектории, удовлетворяющих некоторым особым условиям.

§ 18.1. Постановка задачи

Летно-технические характеристики ракеты в большой степени зависят от того, как сформирована ее траектория. Неудачно сформированная траектория не позволяет в полной мере использовать все возможности ракеты и тем самым снижает эффективность ее применения. Поэтому одним из главных вопросов теории движения ракеты, который, по существу, является

связующим звеном между конструкцией ракеты и решаемой ею задачей, является вопрос о выборе формы траектории.

Основным, а чаще всего единственным фактором, определяющим форму траектории, является программа угла тангажа. Как уже говорилось ранее, программой угла тангажа называется закон изменения угла наклона продольной оси ракеты (или направления тяги двигателя), задаваемый тем или другим устройством, специально для того предназначенным. Угол тангажа может задаваться в зависимости от времени или какого-либо другого удобного аргумента, например кажущейся скорости.

Как известно, между положением оси ракеты, задаваемым программным механизмом, и положением, реализуемым на номинальной траектории, имеется некоторое различие.

В главе 5, записывая уравнения движения с учетом уравнения управления, взятом в наиболее простом виде, мы убедились, что реальный полет всегда проходит с некоторым углом рассогласования по тангажу $\Delta\varphi$ относительно программного. Это различие невелико, и поэтому при выборе программы угла тангажа им пренебрегают. Мы так и будем поступать. Однако после выбора программы при расчете точной траектории это различие автоматически учитывается через уравнение управления.

Конкретный вид программы угла тангажа зависит от множества факторов, изменяющихся от задачи к задаче, достаточно полный состав которых трудно перечислить. Тем не менее можно указать на три группы факторов, оказывающих решающее влияние на программную зависимость $\varphi(t)$:

- 1) основные проектно-баллистические параметры, особенности конструкции ракеты и ее системы управления;
- 2) основные цели и задачи, поставленные перед полетом ракеты;
- 3) ограничения, которым должна удовлетворять выбранная траектория.

Суть первого пункта заключается в том, что разные ракеты, предназначенные для решения одной и той же задачи, будут иметь разные программы. Например, ракеты, выполненные по двухступенчатой и трехступенчатой схемам, но предназначенные для выведения одного и того же полезного груза на одинаковые орбиты, будут иметь различные программы. Точно так же для формирования траекторий, обеспечивающих минимальное рассеивание, для одной и той же ракеты потребуются различные программы, если исходить из различных принципов управления дальностью.

Во втором пункте говорится о том, что одна и та же ракета в зависимости от поставленной перед нею задачи будет иметь различные программы. Простейшим примером могут служить траектории, формируемые с целью достижения наибольшей высоты подъема или наибольшей дальности полета. Более тонкие различия появляются, если сопоставить, например, программы, выбираемые с целью реализации максимально возможной дальности полета или минимально возможного рассеивания.

В третьем пункте речь идет об ограничениях самой разной природы. Из них можно указать следующие, наиболее часто встречающиеся: ограничения на величину максимально допустимого угла атаки, максимально допустимой угловой скорости или углового ускорения программного разворота, величину максимального скоростного напора на траектории, величину допустимого скоростного напора в момент разделения ступеней или отделения головных обтекателей (для носителей космических объектов), ограни-

чения на расположение и размеры районов падения отделяющихся от ракеты частей (ступеней, разгонных ракетных блоков, различных элементов конструкции), ограничения на условия движения полезного груза после отделения от носителя и ряд других. Чаще всего эти ограничения даже для одной и той же ракеты могут изменяться в зависимости от условий применения, например от расположения стартовой позиции и азимута прицеливания. Все это требует достаточно скрупулезного анализа в процессе выбора программы угла тангажа.

Имея в виду указанные обстоятельства, можно понять, что нельзя выработать единый подход к выбору программы. Процесс этот индивидуальный и от исполнителя требует не только применения известных стандартных приемов, но и искусства, основанного на большом опыте и инженерной интуиции.

Но все же имеются определенные принципы, которыми следует руководствоваться в процессе выбора программы угла тангажа. Прежде всего мы заинтересованы в максимальной степени использовать массово-энергетические характеристики ракеты. Для боевой ракеты это означает достижение максимальной дальности при заданной массе полезного груза. Для носителя орбитального объекта это означает выведение наибольшей массы на орбиту с заданными параметрами. Этим бы и исчерпывалась постановка задачи, если бы масса полезного груза и дальность полета были единственными критериями, определяющими эффективность применения ракеты. Однако многое зависит от такой важной характеристики ракеты, как рассеивание.

Не обсуждая вопроса о том, какой вклад вносят в оценку эффективности решения поставленной задачи рассеивание или величина массы полезного груза на орбите, максимальная дальность или точность попадания в цель, примем, что для правильной оценки эффективности знание этих характеристик является необходимым. Поэтому нужно уметь решать задачи по выбору программ, либо реализующих максимальную дальность (для боевой ракеты) или максимальную массу полезного груза на орбите, или наилучшие характеристики по рассеиванию, либо, наконец, оптимизирующих одну из этих характеристик при соблюдении заданных ограничений на другие. Решение этих задач необходимо также для оценки проигрыша, например, в максимальной дальности боевой ракеты, если применить программу, выбранную из условия минимального рассеивания, или проигрыша в рассеивании, если будет принята программа, обеспечивающая максимальную дальность.

Говоря о траекториях, обеспечивающих максимальную дальность либо минимальное рассеивание, надо было бы установить принципиальную возможность (или, наоборот, невозможность) сочетания этих двух условий на одной траектории. Попытаемся это сделать, для чего придется сформулировать условие того, что выбранная программа угла тангажа является программой максимальной дальности или минимального рассеивания.

Программой максимальной дальности назовем такую функцию $\varphi(t)$, которая при номинальных значениях всех параметров ракеты и при условии использования заданного количества топлива реализует максимальную дальность. Это означает, что любые вариации функции $\varphi(t)$ относительно выбранной не могут привести к увеличению дальности, а при малых вариациях функции вариация дальности должна равняться нулю.

Программой минимального рассеивания назовем такую функцию $\varphi(t)$, применение которой в условиях воздействия возмущающих факторов, включая погрешности приборов системы управления, в том числе и погрешности реализации самой функции $\varphi(t)$, минимизирует дисперсию отклонения в дальности.

Как было показано в главе 16, рассеивание при известной совокупности возмущений с заданными законами их распределения зависит от способа управления дальностью. Записать в общем виде выражение для определения рассеивания так, чтобы можно было выделить роль программы угла тангажа и на этой основе провести анализ наилучшей программы, чрезвычайно трудно. Но для понимания принципиальной стороны вопроса можно рассмотреть ограниченную задачу, сформулировав ее следующим образом: среди возможных функций $\varphi(t)$ найти такую, малые вариации которой при отсутствии иных возмущений и при условии точного выключения двигателя по удовлетворению функционала управления дальностью не приведут к изменению дальности.

Если дальность считать функцией четырех параметров движения v_k, θ_k, x_k и y_k , отнесенных к моменту выключения двигателя t_k , то условие отсутствия отклонения дальности относительно заданной запишется таким образом:

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial v} \Delta v_k + \frac{\partial L}{\partial \theta} \Delta \theta_k + \frac{\partial L}{\partial x} \Delta x_k + \frac{\partial L}{\partial y} \Delta y_k = 0. \quad (18.1)$$

Каждое отклонение $\Delta v_k, \Delta \theta_k, \Delta x_k$ и Δy_k , являющееся следствием воздействия вариации $\delta \varphi(t)$, можно представить как сумму вариаций в расчетный момент времени t_k и вариаций, вызванных изменением расчетного момента времени выключения двигателя Δt_k , определяемого данным функционалом управления дальностью, т.е.

$$\begin{aligned} \Delta v_k &= \delta v \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t_k, \\ \Delta \theta_k &= \delta \theta \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \Delta t_k, \\ \Delta x_k &= \delta x \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial x}{\partial t} \Delta t_k, \\ \Delta y_k &= \delta y \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial y}{\partial t} \Delta t_k. \end{aligned} \quad (18.2)$$

Подставляя вариации (18.2) в условие (18.1), получаем

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \delta \theta \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y \Big|_{t=t_k} + \\ &+ \left(\frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Delta t_k = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \delta \theta \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \Big|_{t=t_k} + \\ & + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t_k = 0. \end{aligned} \quad (18.3)$$

Не каждый способ выключения двигателя сможет удовлетворить условию (18.3) при любой наперед выбранной программе угла тангажа, поскольку Δt_k является индивидуальной реакцией способа выключения на действующее возмущение, в данном случае на возмущения $\delta \varphi(t)$. Но можно себе представить программу, специально выбранную для данного способа выключения двигателя так, чтобы добиться удовлетворения условия (18.3), — это и будет искомой программой, минимизирующей отклонение дальности относительно заданной из-за погрешностей реализации программы $\varphi(t)$. Мы пришли к важному принципиальному выводу о том, что программа минимальных отклонений дальности зависит от принятого способа выключения двигателя, т.е. от структуры функционала, управляющего дальностью полета ракеты.

Теперь вернемся к программе максимальной дальности. Выше мы связали максимальную дальность с условием использования заданного количества топлива. Этому количеству топлива при номинальных значениях всех параметров ракеты может быть поставлено в соответствие определенное время работы двигателя t_k . Такое соответствие означает, что закон расходования топлива задан и он варьированию не подлежит. В этом случае вместо условия расходования заданного количества топлива можно говорить о заданном времени работы двигателя t_k . При оговоренных положениях условие достижения максимальной дальности можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\partial L}{\partial v} \delta v \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \delta \theta \Big|_{t=t_k} + \\ & + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \Big|_{t=t_k} + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y \Big|_{t=t_k} = 0. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Здесь, как и раньше, $\delta v \Big|_{t=t_k}$, $\delta \theta \Big|_{t=t_k}$, $\delta x \Big|_{t=t_k}$, $\delta y \Big|_{t=t_k}$ — вариации кинематических параметров траектории в заданный момент времени t_k , вызванные вариацией $\delta \varphi(t)$ программы угла тангажа.

Сопоставим условие достижения максимальной дальности (18.4) и условие достижения минимального отклонения дальности (18.3). Обратим внимание на то, что программа, обеспечивающая достижение максимальной дальности, от способа выключения двигателя не зависит. Условие же минимального отклонения дальности, а следовательно, и программа $\varphi(t)$, удовлетворяющая этому условию, зависят, как было показано выше, от способа выключения двигателя.

Таким образом, мы пришли к заключению, что в общем случае интересные нас программы не одинаковы и, следовательно, с помощью одной

программы нельзя одновременно удовлетворить и условию (18.3), и условию (18.4). Однако при хорошо подобранном функционале ошибки, вызванные большинством возмущений $\Delta\lambda_i$, будут малы и наибольший вклад в рассеивание начнут вносить инструментальные погрешности, т.е. погрешности измерения функционала $\Delta\Phi_n$, и ошибки, возникающие после подачи команды на выключение двигателя. Но все они довольно чувствительны к форме активного участка траектории. Например, величина $\frac{\partial L}{\partial \Phi} \Delta\Phi_n$, да и другие составляющие ΔL , как правило, уменьшаются, если

траектория активного участка становится более крутой. Но если угол θ_k становится при этом больше оптимального, то снижается дальность полета при сохранении полезного груза. Вывести же спутник на орбиту по слишком крутой траектории вообще невозможно. В этом главная причина противоречия, которое приходится разрешать, или компромисса, который приходится искать при выборе программы угла тангажа.

Говоря об особенностях подхода к выбору программы, надо остановиться еще на одном моменте. Дело в том, что для каждой ракеты имеется некоторый заданный рабочий диапазон дальностей — от минимальной до максимальной, — в пределах которого желательно, чтобы обеспечивалось хорошее рассеивание, близкое к минимально возможному. Это означает, что надо было бы, вообще говоря, для каждой дальности, а точнее, для каждой пары точек старта и цели выбрать свою программу угла тангажа. В современных бортовых системах управления такая возможность предусматривается. Но можно идти и по другому пути: иметь на борту некоторое ограниченное количество программ, каждая из которых рассчитана на использование в одном узком поддиапазоне дальностей и направлений пуска. Оба пути правомерны и применяются в зависимости от конкретных требований к ракете и к ее системе управления.

Теперь перейдем к описанию практических приемов и методов, которые применяются при выборе программы угла тангажа.

§ 18.2. Основные требования и ограничения

В § 18.1, обсуждая постановку задачи о выборе формы траектории, мы указали на ряд условий, ограничивающих решение задачи. Рассмотрим эти и некоторые другие ограничения с точки зрения их учета при выборе программы угла тангажа.

1. Прежде всего отметим, что старт ракет рассматриваемого класса происходит в вертикальном положении, и в течение некоторого отрезка времени ракета движется вертикально вверх. Вертикальный старт является наиболее удобным, простым и обеспечивает не только наилучшие условия предстартового обслуживания, но и минимальные нагрузки на конструкцию заправленной ракеты. Кроме того, при вертикальном старте сводятся к минимуму боковые перемещения ракеты, которые могут иметь место на первых секундах полета. Продолжительность вертикального участка полета определяется главным образом временем, необходимым для того, чтобы органы управления оказались достаточно эффективными. В ряде случаев это также зависит от приемистости двигателей, т.е. от их способ-

ности быстро выходить на расчетный режим работы. В общем случае вертикальный участок полета стараются делать как можно короче, поскольку его затяжка приводит к крутым траекториям с увеличенными потерями скорости на преодоление гравитации. Обычно это время колеблется в пределах от 2 – 3 с до 10 – 15 с. Чем больше начальная тяговооруженность ракеты, тем быстрее она набирает скорость и высоту и тем меньше должна быть продолжительность вертикального движения.

2. При выборе программы угла тангажа желательно исходить из предположения о непрерывности функций $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$ и ограниченности $\dot{\varphi}(t)$ и $\ddot{\varphi}(t)$. Эти ограничения обусловлены возможностями приборов и органов управления. В самом деле, разрыв функции $\varphi(t)$ противоречит физическому смыслу процесса, а разрыв функции $\dot{\varphi}(t)$ [или излом кривой $\varphi(t)$] соответствует бесконечно большому управляющим моментам. Разрыв функции $\ddot{\varphi}(t)$ соответствует мгновенному изменению действующего момента, т.е. угла отклонения руля, или бесконечно большой угловой скорости руля. Ограниченность $\dot{\varphi}(t)$ и $\ddot{\varphi}(t)$ диктуется ограниченными возможностями и органов управления, и гироскопических приборов, задающих программу.

В некоторых случаях от точного соблюдения этих условий можно отойти. Так, наличие разрывов в функциях $\dot{\varphi}(t)$ и $\ddot{\varphi}(t)$ будет восприниматься автоматом угловой стабилизации как действие внешних возмущений, и в результате реакции на эти возмущения ход истинной зависимости $\varphi(t)$ окажется сглаженным. А в проектных расчетах, как правило, можно допускать и изломы кривой $\varphi(t)$ и разрывы до 15 – 20° и более. Однако при задании программных функций для приборной реализации эти функции должны быть соответствующим образом "сглажены". Вообще для каждого нового носителя разработчики системы управления специально оговаривают условия, при которых должны проводиться выбор и задание программы угла тангажа.

3. Почти во всех случаях выбора программы следует исходить из необходимости создания наилучших условий по нагружению конструкции, в частности обеспечения наименьших поперечных перегрузок и изгибающих моментов. Соответствующее требование задается в виде ограничения либо на величину программногo аэродинамического момента, либо на величину произведения скоростного напора на угол атаки $q\alpha$, либо в виде иного ограничения, обусловленного требованиями устойчивости движения, динамики конструкции, ее нагружения и прочности.

При наличии на ракете устройств по регулированию q задача по выбору программы угла тангажа решается совместно с задачей по ограничению q .

Если на ракете отсутствуют устройства, позволяющие регулировать величину скоростного напора в полете, то задача сводится к ограничению только угла атаки α . Утверждение, что ограничение по поперечным силам или моментам сводится к ограничению угла атаки, следует из выражений для аэродинамических сил и моментов

$$Y = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} q S \alpha, \quad M_{z_1} = \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} q S \alpha (x_{ц.д} - x_{ц.м}).$$

Здесь все сомножители, кроме α , мало зависят от программы угла тангажа и практически не влияют на величины сил и моментов. Понятно, что наибольшую остроту это ограничение приобретает в зоне больших скоростных напоров. Расчетное (номинальное) значение углов атаки в зоне $q \geq \frac{1}{2} q_{\max}$ обычно стараются свести к нулю. Даже при таком подходе к вопросу реальные углы атаки в этой зоне все же могут достигать существенных величин главным образом из-за воздействия ветровых возмущений. В области высот 8 — 13 км, в которой обычно достигается максимальная величина скоростного напора, скорость горизонтального ветра может достигать 70 м/с, что уже приводит к появлению значительных углов атаки.

4. При выборе программы угла тангажа необходимо позаботиться о том, чтобы область трансзвуковых скоростей проходила с углами атаки, близкими к нулю. Это объясняется тем, что область чисел $M = 0,8 \div 1,2$ характеризуется резким изменением аэродинамических коэффициентов. Желая свести влияние этих изменений на процесс управления и устойчивости движения ракеты к минимуму, при расчете программы угол атаки в этой области принимают равным нулю или исчезающе малым.

5. Одним из важных ограничений является допустимая величина скоростного напора и угла атаки в момент разделения ступеней. Дело в том, что наличие аэродинамических сил осложняет надежное проведение процесса разделения и безударного удаления частей ракеты друг от друга. Влияние углов атаки усугубляет трудности этого участка полета. Следует помнить, что эффективность органов управления второй ступени выбирается исходя из обеспечения устойчивости движения именно на этом кратковременном участке, связанном с разделением и первыми секундами полета после него, и поэтому любое ухудшение условий полета на этом участке вынуждает предусматривать высокую эффективность органов управления, не используемую на остальной части траектории.

Обеспечение необходимых условий для разделения ступеней осложняется тем, что одновременно необходимо добиться падения отделившейся части ракеты в отведенный район. Обычно для каждой ракеты существует ярко выраженная зависимость между скоростным напором в момент разделения и дальностью полета отделившейся части. Это и понятно: чем круче траектория первой ступени, тем меньше скоростной напор и тем больше дальность отделившейся части (так как траекторию всегда выгодно строить в области дооптимальных углов). Из условий выведения максимального полезного груза траекторию надо "прижимать" к Земле, но при этом возрастает скоростной напор. Иногда ради достижения отведенного района падения траекторию необходимо "поднимать", что приводит к потере полезного груза. В этих противоречиях и приходится искать "золотую середину".

6. Большинство полезных грузов, выводимых носителями на орбиту ИСЗ, предохраняется от аэродинамического и температурного воздействия при прохождении плотных слоев атмосферы с помощью так называемых головных обтекателей, которые затем сбрасываются.

Конструкция космических объектов имеет обычно ряд весьма тонких, ажурных элементов, таких, как антенны, слои пленки экрано-вакуумной тепловой изоляции и др., которые допускают воздействие скоростного

напора, исчисляемого всего лишь несколькими килограммами на квадратный метр поверхности. Этим определяется ограничение на момент сброса обтекателя. Однако при этом нужно обеспечить также падение обтекателя в заданный район. Понятно, что чем быстрее будет сброшен обтекатель после выполнения условия по скоростному напору, тем лучше.

7. Выбранная программа угла тангажа должна быть пригодной для максимально возможного диапазона решаемых задач. Для боевых ракет это означает, что программа должна допускать ее применение для широкого диапазона дальностей без существенного ухудшения характеристик рассеивания. Для носителя космических объектов — допустимость применения при выведении на орбиту с заданной высотой в точке выведения, но с различным периодом обращения (или высотой апоцентра) для различных масс полезного груза. Чем шире диапазон применения программы, тем меньшим количеством программ можно будет обойтись для данной ракеты и тем, следовательно, проще и надежней будет проходить подготовка ее для решения поставленной задачи.

Помимо требований и ограничений, указанных в п. 1—7, встречается, конечно, и ряд других, специфических для той или другой ракеты требований. Все они, разумеется, должны быть удовлетворены при проектировании траекторий.

§ 18.3. Программа максимальной дальности

Рассмотрим задачу выбора программы максимальной дальности в ее практическом приложении. Задача по определению программы $\varphi(t)$, реализующей максимум дальности при всех прочих заданных характеристиках ракеты, является вариационной задачей. В самом деле, полная дальность полета является функцией векторов положения \mathbf{r} и скорости \mathbf{v} в конце активного участка. Но векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} зависят от характера изменения функции $\varphi(t)$. Поэтому дальность полета L , так же как и векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} , представляет собой функционалы от $\varphi(t)$. Таким образом, задача отыскания максимума дальности сводится к нахождению такой функции $\varphi(t)$, которая доставляет максимум функционалу L . Вариационной является и задача, например, по нахождению максимума модуля скорости и некоторые другие задачи, встречающиеся в практике.

Отметим, что подобные задачи, вообще говоря, должны решаться с учетом значительного количества ограничений, о которых говорилось в § 18.2. Точного решения задачи по максимизации дальности с учетом ограничений в конечном виде пока еще не найдено. Однако известен ряд решений, полученных при некоторых упрощающих предположениях. Эти результаты могут быть использованы как некий начальный ориентир при решении задачи в реальных условиях полета, с наложенными ограничениями. Другими словами, сначала решается так называемая *модельная задача* (при упрощенной модели движения), а затем результаты ее решения с коррективами распространяются на действительную модель движения. Здесь применяются, как правило, численные методы поиска оптимальных решений, но поиск ведется в известном довольно узком классе программ, полученном с учетом решения модельной задачи. Не приводя здесь процесса реше-

ний вариационных задач, остановимся на описании основных результатов некоторых из них.

Вариационная задача по определению программы максимальной дальности в условиях плоскопараллельного поля сил тяжести и отсутствия атмосферы рассмотрена в [22]. В результате решения задачи получено, что максимум дальности реализуется при некотором постоянном направлении силы тяги двигателя, причем это направление является функцией основных проектно-баллистических параметров ракеты. Владея этим результатом, можно свести вариационную задачу по отысканию максимума дальности к задаче по отысканию экстремума функции одной переменной $\varphi_{np} = \text{const}$. Если дальности не очень велики (малы по сравнению с радиусом Земли), этот результат вполне применим, начиная с некоторого момента, когда ограничение по углу атаки уже может не приниматься во внимание. Мы обращаем внимание именно на угол атаки, поскольку полет с постоянно ориентированной продольной осью обязательно сопряжен с появлением более или менее существенных углов атаки.

Там же рассмотрена вариационная задача по выбору программы угла тангажа, обеспечивающей максимальную горизонтальную скорость на заданной высоте. Задача решена в предположении, что движение происходит вне атмосферы в плоскопараллельном поле сил тяжести. В результате решения получено, что тангенс угла тангажа оптимальной программы должен быть линейной функцией времени, т.е.

$$\text{tg } \varphi = \text{tg } \varphi_0 + ct. \quad (18.5)$$

Этот вывод означает, что поиск зависимости $\varphi(t)$ сводится к решению задачи по нахождению экстремума функции двух параметров. Опять-таки не надо забывать, что таким способом решение можно искать практически только для внеатмосферной части траектории, на которой допускаются большие углы атаки.

Далее устанавливается, что решение вариационной задачи на отыскание экстремума функционала, выражающегося в самом общем виде через параметры движения в конце активного участка, приводит к программе, определяемой либо уравнением (18.5), либо более универсальной дробно-линейной функцией

$$\text{tg } \varphi = \frac{a + bt}{c + dt}.$$

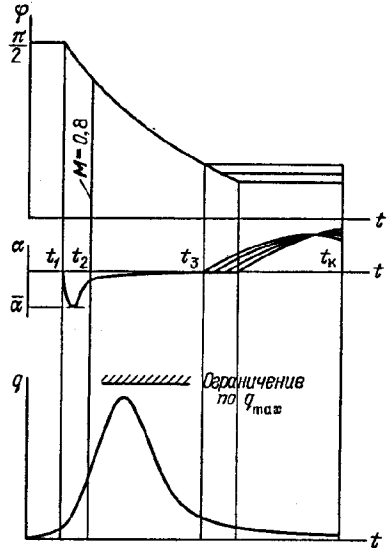
В работе [22] рассмотрена эта задача и в более сложной постановке, а именно с учетом переменности поля тяготения и вращения Земли. Для получения оптимальной программы приходится решать сложную систему трансцендентных уравнений с использованием численных итерационных методов. В результате решения различных задач в широком диапазоне значений основных проектно-баллистических характеристик ракет было установлено, что в условиях практического отсутствия атмосферы оптимальная программа угла тангажа весьма близка к линейной зависимости от времени. Сказанное относится как к случаям максимизации дальности, так и к случаям максимизации полезного груза на заданной орбите ИСЗ. Попытки применить более сложные программы к практически ощутимым

Рис. 18.1. К выбору программы угла тангажа: задание функции $\alpha(t)$; проверка ограничения по величине q_{\max} ; варьирование момента перехода на постоянный угол тангажа

результатам не приводят. Поэтому будем считать, что оптимальная программа выбирается из семейства линейных программ, имеющих вид

$$\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}t.$$

Учитывая результаты решения обр-сужденных выше вариационных задач и имея в виду основные требования и ограничения, накладываемые на выбор программы, приходим к следующей довольно стандартной схеме, которая, по существу, является решением с помощью численных методов многопараметрической экстремальной задачи с ограничениями типа равенств или неравенств.



1. Проводим расчет вертикального участка траектории до некоторого момента t_1 (рис. 18.1). Это время может варьироваться при выборе траектории и потому рассматривается как один из свободных параметров.

2. Для того чтобы ракету на начальном участке траектории направить в сторону цели, необходимо организовать ее движение с некоторыми отрицательными углами атаки так, чтобы к моменту t_2 при достижении чисел Маха $M = 0,7 \div 0,8$ углы атаки свести практически к нулю и не допускать их появления до окончания полета первой ступени (для многоступенчатых носителей) или до выхода из плотных слоев атмосферы (для ракет одноступенчатых). Такому условию хорошо отвечает зависимость угла атаки от времени, задаваемая в виде

$$\alpha = \bar{\alpha} k(k - 2). \quad (18.6)$$

Здесь

$$k = 2e^{a(t_1 - t)},$$

где $\bar{\alpha}$ — предельное значение угла атаки на дозвуковом участке траектории; t_1 — время окончания вертикального полета и начала программного разворота;

a — некоторый коэффициент, определяющий интенсивность "создания" и "снятия" угла атаки.

Для получения программы угла тангажа на этом участке нужно проинтегрировать систему уравнений движения, аналогичную (5.47),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P - X}{m} - g \sin \theta - \frac{x}{r} g \cos \theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{v} \left[\frac{\alpha}{m} \left(P + qS \frac{l_1 - x_{ц.п}}{l_1 - x_{ц.м}} c'_y \right) - g \cos \theta + \frac{x}{r} g \sin \theta \right], \quad (18.7)$$

$$\frac{dy}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \theta$$

при заданном законе изменения угла атаки (18.6). Получив в результате интегрирования $\theta(t)$, тут же определяем и программу угла тангажа:

$$\varphi(t) = \theta + \alpha.$$

Каждой заданной конкретной зависимости $\alpha(t)$ будут соответствовать некоторое решение системы (18.7) и некоторая программа $\varphi(t)$. Количество свободных варьируемых параметров в зависимости (18.6) и определяет возможности варьирования программы. В нашем случае зависимость (18.6) содержит три свободных параметра: $\bar{\alpha}$, t_1 , a . Варьируя их, и нужно формировать траекторию на всем участке полета. Критерием удачно сформированной траектории является удовлетворение требованиям, приведенным в § 18.2.

Если ракета имеет только одну ступень и время активного участка не очень продолжительно, так что движение с работающим двигателем происходит до конца активного участка при заметном влиянии атмосферы, то выбором параметров $\bar{\alpha}$, t_1 , a одновременно должна быть обеспечена и максимальная дальность.

Имеют место случаи, когда ограничения, предъявляемые к параметрам, не очень жесткие и выполняются автоматически, без специальных мер. Тогда выбор параметров $\bar{\alpha}$, t_1 , a осуществляется только из условия обеспечения максимальной дальности. Однако надо иметь в виду, что не всегда удается воспользоваться всеми тремя параметрами как совершенно самостоятельными и независимыми, хотя они и независимы.

Дело в том, что часто одного и того же эффекта можно достичь за счет варьирования любого из них, поэтому один параметр, чаще всего коэффициент a , подобрав однажды, дальше не варьируют. Тогда задача трансформируется из трехпараметрической в двухпараметрическую.

Если активный участок достаточно продолжителен, так что в конце его после выхода из области интенсивного аэродинамического воздействия можно вновь двигаться с ненулевыми углами атаки, то обычно с некоторого момента времени переходят к движению по программе с постоянным углом тангажа. Основанием для этого служат результаты решения вариационной задачи на максимум дальности в условиях плоскопараллельного поля сил тяжести и тот факт, что на активном участке это поле мало отличается от плоскопараллельного. В этом случае момент t_3 перехода на постоянный угол тангажа (см. рис. 18.1) или величину угла тангажа рассматривают как третий параметр и решают задачу на экстремум дальности по трем параметрам: t_1 , $\bar{\alpha}$, t_3 . Для решения такой задачи пригоден ряд известных методов поиска экстремума функции по многим параметрам, в том числе методы градиентного или наискорейшего спуска. Часто пользуются аппроксимацией зависимости $L = f(t_1, \bar{\alpha}, t_3)$ в виде полинома второй степени

$$L = at_1^2 + b\bar{\alpha}^2 + ct_3^2 + dt_1\bar{\alpha} + et_1t_3 + f\bar{\alpha}t_3 + gt_1 + h\bar{\alpha} + it_3 + k.$$

Неизвестные десять коэффициентов полинома определяют из решения системы алгебраических уравнений, составленных по результатам расчетов

десяти траекторий с различными десятью сочетаниями параметров $t_1, \bar{\alpha}$ и t_3 . Далее, приравнявая нулю первые производные от дальности по каждому из параметров, получают систему трех алгебраических уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = 2at_1 + d\bar{\alpha} + et_3 + g = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\alpha}} = 2b\bar{\alpha} + dt_1 + ft_3 + h = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_3} = 2ct_3 + et_1 + f\bar{\alpha} + i = 0,$$

решение которой и дает искомые значения параметров $t_1, \bar{\alpha}, t_3$, реализующие в первом приближении максимум дальности.

При отыскании программы максимальной дальности для двухступенчатой ракеты поступают примерно так же. Отличие заключается в том, что, опираясь на решение вариационной задачи, оптимальную программу для второй ступени надо искать в семействе линейных программ. Это дает два свободных параметра, которыми являются начальное значение угла тангажа φ_0^{II} и угловая скорость $\dot{\varphi}^{\text{II}}$. Следовательно, общее количество параметров может быть увеличено до пяти. Однако с увеличением числа свободных параметров резко возрастают трудности чисто вычислительного свойства, связанные с отысканием экстремума. Поэтому обычно задачу все же сводят к трехпараметрической, исходя из следующих соображений.

Параметр t_3 можно опустить, поскольку за счет вариации программы на кратковременном участке траектории между моментом t_3 и моментом окончания полета первой ступени добиться практического выигрыша трудно. Продолжительность вертикального участка траектории (до момента t_1) выбирается по возможности малой, так как чем она больше, тем круче траектория (увеличиваются потери скорости на преодоление земного притяжения) и тем труднее осуществить разворот скорости в последующем (требуются большие углы атаки). Таким образом, выбор траектории первой ступени производится только по одному параметру $\bar{\alpha}$. К каждой из траекторий этого семейства может применяться любая программа для второй ступени из двухпараметрического семейства $(\varphi_0^{\text{II}}, \dot{\varphi}^{\text{II}})$.

Тут необходимо сделать одно замечание. При подобном методе составления программ угла тангажа углы в конце полета первой ступени $\varphi_{\text{к}}^{\text{I}}$ и в начале полета второй ступени φ_0^{II} могут не стыковаться, между ними могут образоваться разрывы большей или меньшей величины. Это будет нарушать п.2 требований к программе, установленных в § 18.2, так как противоречит реальным возможностям системы управления, органов управления и ракеты в целом. Такое нарушение допустимо на этапе предварительных расчетов по выбору программы, но оно должно быть устранено на последующей стадии. Это достигается с помощью сглаживания изломов на стыках соседних участков и организации вместо разрывов плавных переходов от одного участка к другому. При организации таких плавных переходов обычно исходят из величины допустимого углового

ускорения, определяемого возможностями системы управления и органов управления. Формируя на первой части участка сопряжения $t' t''$ (рис. 18.2) программную зависимость с максимальным угловым ускорением одного знака, а не второй части $t'' t'''$ — противоположного знака, можно осуществить достаточно плавный переход между двумя участками программы, как это показано на рис. 18.2. При этом продолжительность участка программы, на котором реализуется скачок заданной величины, будет минимальной.

Итак, оптимальная в смысле наибольшей дальности программа для двухступенчатой ракеты выбирается из семейства трехпараметрических программ, а в качестве параметров используются максимальная величина

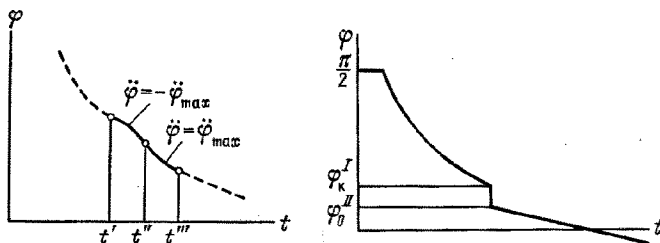


Рис. 18.2. Плавное сопряжение кривых $\varphi(t)$ в случае разрыва функции между участками полета

Рис. 18.3. Типичная проектная программа угла тангажа для двухступенчатого носителя

угла атаки $\bar{\alpha}$, начальный угол тангажа φ_0^{II} и угловая скорость $\dot{\varphi}^{\text{II}}$ второй ступени. Этот же метод целесообразен и для ракет, имеющих три ступени, причем для второй и третьей ступеней программная зависимость описывается обычно единой формулой вида $\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi} t$. Отступления от изложенных приемов неизбежны для удовлетворения требований п.5, 6 и 7, упомянутых в § 18.2. Типичная для двухступенчатого носителя программа $\varphi(t)$ изображена на рис. 18.3.

§ 18.4. Программа выведения на орбиту максимального полезного груза

Основные принципы выбора программы, рассмотренные для случая обеспечения максимальной дальности, остаются в силе и для случая выведения на орбиту ИСЗ, однако имеются и некоторые принципиальные отличия. Общими являются ограничения, описанные в § 18.2 и относящиеся главным образом к условиям формирования траектории полета первой ступени. Общими являются рекомендации, вытекающие из решений вариационных задач о линейной или почти линейной зависимости угла тангажа от времени. Одно из принципиальных отличий заключается в необходимости решать краевую задачу, поскольку выведение на заданную орбиту предполагает удовлетворение определенных краевых условий в конце выведения. Например, в наиболее часто встречающейся постановке требуется в конце выведения обеспечить условия кругового движения на заданной

высоте. Тем самым определяется и высота, и угол наклона скорости, и величина скорости к моменту конца активного участка.

Задачу отыскания программы, максимизирующей массу полезного груза, можно записать следующим образом (заданные параметры движения снабжены индексами "нуль"): определить функцию $\varphi(t)$, которая обеспечивает условия

$$h = h_0, \quad \theta = \theta_0 = 0, \quad v = v_0 = \sqrt{\frac{fM}{R + h_0}}$$

при максимальной конечной массе ракеты-носителя. Максимизация конечной массы равносильна максимизации относительной конечной массы μ_k , так как обычно подобные задачи решаются при заданной начальной массе носителя.

Итак, после того как сформирована траектория первой ступени с учетом всех ограничений, задача сводится к отысканию программы угла тангажа траектории второй (для двухступенчатой) или второй и третьей (для трехступенчатой ракеты-носителя) ступеней полета.

Поиск проводится в семействе линейных программ, имеющих два свободных параметра: начальное значение угла тангажа φ_0^{II} и угловую скорость $\dot{\varphi}^{\text{II}}$. Выбор φ_0^{II} и $\dot{\varphi}^{\text{II}}$ подчинен краевым условиям. В зависимости от наличия среди стандартных процедур тех или иных методов решения краевых задач программист отдает предпочтение какому-либо из них. Здесь многое зависит от привычки, навыков и опыта исследователя, поэтому ограничивать действия узкими рамками не следует. Мы укажем лишь на один из методов, который довольно широко применяется при решении подобных задач. Применительно к двухпараметрической краевой задаче его можно назвать *методом секущей плоскости*. Алгоритм его состоит в следующем.

Рассчитываются три траектории при некоторых подходящим образом заданных параметрах программы угла тангажа

$$[\varphi, \dot{\varphi}], \quad [(\varphi + \Delta\varphi), \dot{\varphi}], \quad [\varphi, (\dot{\varphi} + \Delta\dot{\varphi})].$$

Расчет ведется до достижения значения скорости $v = v_0$. Этим программам соответствуют решения

$$[h, \theta], \quad [h + \Delta h(\varphi), \theta + \Delta\theta(\varphi)],$$

$$[h + \Delta h(\dot{\varphi}), \theta + \Delta\theta(\dot{\varphi})].$$

Вычисляются приближенные значения производных

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} \approx \frac{\Delta h(\varphi)}{\Delta \varphi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \approx \frac{\Delta \theta(\varphi)}{\Delta \varphi},$$

$$\frac{\partial h}{\partial \dot{\varphi}} \approx \frac{\Delta h(\dot{\varphi})}{\Delta \dot{\varphi}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \dot{\varphi}} \approx \frac{\Delta \theta(\dot{\varphi})}{\Delta \dot{\varphi}}.$$

Далее определяются потребные приращения $\Delta\varphi$ и $\Delta\dot{\varphi}$, которые при условии линейной зависимости h и θ от этих параметров ликвидируют имеющиеся

невязки по высоте h и углу θ :

$$\begin{aligned}
 h - h_0 &= \frac{\partial h}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial h}{\partial \dot{\varphi}} \Delta \dot{\varphi}, \\
 \theta - \theta_0 &= \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial \dot{\varphi}} \Delta \dot{\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{18.8}$$

Полученные из решения системы (18.8) значения $\Delta \varphi$ и $\Delta \dot{\varphi}$ образуют новую опорную программу, относительно которой повторяют описанный алгоритм. Число итераций, которое приводит к конечной цели, в сильной

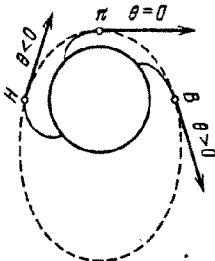


Рис. 18.4. Примеры выведения на одну и ту же орбиту: в точку перигея π ($\theta = 0$), в точку H на нисходящей части орбиты ($\theta < 0$) или в точку B на восходящей части орбиты ($\theta > 0$)

степени зависит от двух обстоятельств. Первое — удачно выбранное начальное приближение. Тут очень помогает личный опыт исследователя и привлечение уже известных ему решений задач для носителей, имеющих близкие проектно-баллистические параметры. Второе — задание степени точности, с которой ищется решение. Высокие требования к точности решения чреват так называемым "зацикливанием", т.е. бесконечным повторением процесса поиска решения. Наоборот, сильное закругление точности может дать быстрое решение, но результат может не устроить проектанта. Обычно ограничиваются по высоте точностью до нескольких сотен метров или до километра, а по углу — до десятых долей угловых минут, что соответствует остаточной радиальной скорости менее одного метра в секунду.

Однако не во всех задачах, связанных с выведением на орбиту, задаются кинематические параметры в точке выведения. Часто сами по себе параметры в конце активного участка самостоятельного значения не имеют, а в задаче необходимо обеспечить получение каких-нибудь более общих свойств. Например, требуется вывести на орбиту с заданным периодом обращения максимальный полезный груз. В некоторых случаях важно бывает задать максимальную и минимальную высоты орбиты относительно поверхности Земли, оговаривая или не оговаривая положение оси апсид эллипса. В подобных случаях могут появиться дополнительные возможности по максимизации массы полезного груза. В самом деле, орбиту заданного периода можно получить при различных значениях высоты выведения. Кроме того, точка выведения может быть не перигеем и не апогеем орбиты, т.е. угол наклона вектора скорости к местному горизонту θ не обязательно должен иметь нулевое значение. Например, на орбиту, изображенную на рис. 18.4, возможно выведение в точку перигея π ($\theta = 0$), в точку B , расположенную на восходящей части орбиты ($\theta > 0$),

или в точку Н, расположенную на нисходящей части орбиты ($\theta < 0$). Какой из этих вариантов окажется оптимальным в смысле максимума выводимого полезного груза — подлежит определению именно при выборе программы угла тангажа.

Рассмотрим случай, когда необходимо вывести максимальный полезный груз на орбиту заданного периода без ограничений на расположение оси апсид эллипса, но с ограничением снизу на высоту над поверхностью Земли. Здесь также программа выбирается из семейства двухпараметрических линейных программ. Среди возможных методов поиска оптимального решения мы остановимся лишь на одном, который при всей своей простоте дает вполне удовлетворительные результаты и по точности и по сходимости.

Масса полезного груза или значение относительной конечной массы аппроксимируется некоторой билинейной функцией параметров φ_0^{II} и $\dot{\varphi}^{\text{II}}$:

$$\mu_k = a\varphi_0^{\text{II}} + b\dot{\varphi}^{\text{II}} + c\varphi_0^{\text{II}}\dot{\varphi}^{\text{II}} + d. \quad (18.9)$$

Условие экстремума μ_k записывается в обычном виде (приравниванием нулю частных производных по варьируемому параметрам)

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \varphi_0^{\text{II}}} = a + c\dot{\varphi}^{\text{II}} = 0, \quad \frac{\partial \mu_k}{\partial \dot{\varphi}^{\text{II}}} = b + c\varphi_0^{\text{II}} = 0,$$

откуда следует

$$\varphi_{\text{опт}}^{\text{II}} = -\frac{a}{c}, \quad \dot{\varphi}_{\text{опт}}^{\text{II}} = -\frac{b}{c}. \quad (18.10)$$

Коэффициенты a , b , c , d определяются расчетом четырех траекторий с различными сочетаниями параметров φ_0^{II} и $\dot{\varphi}^{\text{II}}$ и подстановкой результатов в (18.9).

Расчет каждой траектории надо проводить до момента времени, выключение двигателя в который будет давать заданный период обращения, и фиксировать получаемое при этом значение μ_k . Само собою разумеется, что в процессе расчета траектории необходимо, начиная с некоторого момента времени, для текущих точек активного участка рассчитывать и параметры соответствующей орбиты. Это следует делать не только для того, чтобы найти нужный момент времени выключения двигателя из условия обеспечения заданного периода обращения, но и для того, чтобы исключить те траектории, которые не подходят из-за нарушения ограничения по минимально допустимой высоте.

Далее, на основании (18.10) определяются оптимальные значения $\varphi_{\text{опт}}^{\text{II}}$ и $\dot{\varphi}_{\text{опт}}^{\text{II}}$, принимаемые в качестве первого приближения. Задавая в окрестности этих найденных значений еще несколько значений, весь процесс поиска повторяем, начиная с нахождения новых коэффициентов a , b , c , d в уравнении (18.9).

Итерационный процесс прекращается тогда, когда последующее приближение будет уточнять предыдущее значение μ_k (или $G_{\text{п.г}}$) менее чем на некоторую заданную величину. Задавать слишком высокую точность не следует, так как при этом почти неизбежно возникнут вычислительные особенности, которые не позволят удовлетворительно завершить решение задачи. Из опыта можно сказать, что погрешность величины $G_{\text{п.г}}$ порядка 0,1% вполне достаточна и не создает трудностей в вычислительном процессе.

§ 18.5. Программа минимального рассеивания

При сопоставлении условий максимальной дальности и минимального рассеивания мы установили, что программа угла тангажа, выбираемая из условия минимизации рассеивания, зависит от способа управления дальностью. Это прежде всего проявляется в том, что чем совершенней способ, тем меньше задач возлагается на программу. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим способ управления дальностью, близкий к идеальному.

Путь способ выключения двигателя основан на измерении всех шести параметров движения и непрерывном вычислении с помощью специальной БЦВМ дальности полета

$$L = f(v_x, v_y, v_z, x, y, z) \quad (18.11)$$

или

$$L = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

где x_1, \dots, x_6 — любые шесть величин, взаимно однозначно связанные с v_x, \dots, z , которые могут быть измерены измерительными устройствами системы управления. Когда функция (18.11) достигает заданного значения, подается команда на выключение двигателя.

Очевидно, в данном случае методические ошибки, в том числе и вызванные отклонениями $\delta\varphi(t)$, будут сведены к нулю и отклонения по дальности будут появляться только как следствие инструментальных погрешностей измерения параметров движения. С точностью до линейных членов отклонение по дальности будет равно

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\partial L}{\partial v_x} \Delta v_{x_i} + \frac{\partial L}{\partial v_y} \Delta v_{y_i} + \frac{\partial L}{\partial v_z} \Delta v_{z_i} + \\ & + \frac{\partial L}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial L}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial L}{\partial z} \Delta z_i \end{aligned}$$

или

$$\Delta L = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial L}{\partial x_i} \Delta x_{i_n},$$

где $\Delta v_{x_i}, \Delta v_{y_i}, \dots, \Delta z_i$ или Δx_{i_n} — инструментальные погрешности измерений соответствующих параметров.

В рассматриваемом случае влияние программы угла тангажа на рассеивание будет проявляться только через величины производных $\frac{\partial L}{\partial v_x}, \frac{\partial L}{\partial v_y}, \dots, \frac{\partial L}{\partial z}$, зависящих от расчетных значений параметров движения в момент

выключения двигателя. Поэтому, строго говоря, можно с помощью выбора программы минимизировать величину среднеквадратического отклонения в дальности. Это отклонение, если считать инструментальные погрешности $\Delta v_{x_i}, \dots, \Delta z_i$ (или Δx_{i_n}) случайными и независимыми и обозначить соответствующие среднеквадратические ошибки измерений через $\sigma_{v_{x_i}}, \dots$

, σz_{in} (или σx_{in}), можно записать в виде

$$\sigma L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial v_{x_{in}}} \sigma v_{x_{in}}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial v_{y_{in}}} \sigma v_{y_{in}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \sigma z_{in}\right)^2}$$

или

$$\sigma L = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \sigma x_{in}\right)^2}. \quad (18.12)$$

В такой постановке производные от дальности по параметрам движения следует считать функциями параметров программы и отыскивать такие значения последних, которые сводят значение выражения (18.12) к минимуму.

Можно представить себе способ управления дальностью, использующий измерения тех же шести параметров движения, но решающий задачу о достижении заданной дальности не в виде (18.11), а в виде разложения дальности в ряд Тейлора в окрестности расчетной точки по степеням отклонений параметров движения от их расчетных значений:

$$\begin{aligned} \Delta L = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} \Delta x_i^2 \right) + \\ + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^6 \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \dots = 0. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Производные, входящие в (18.13), должны быть вычислены заранее. Они являются некоторыми константами для данной пары точек старта и цели и либо хранятся в памяти бортовой машины, либо вводятся перед стартом носителя. Это представляет значительные неудобства, особенно в случаях удержания в формуле (18.13) членов второй и более высоких степеней ради приближения формулы (18.13) к истинной зависимости (18.11). Однако во многих случаях ограничиваются только линейными членами. Тогда за счет неучтенных членов в разложении возникают методические ошибки.

С помощью программы угла тангажа можно влиять не только на инструментальные погрешности, но и на методические ошибки, используя зависимость коэффициентов формулы (18.13) (т.е. частных производных) от программы. Но методические ошибки в более сильной степени зависят от величин Δx_i , т.е. от того, сколь велики могут быть отклонения параметров движения от расчетных значений к моменту выключения двигателя, целиком определяемые действующими на носитель случайными возмущениями. Рассчитывать на значительное сужение допусков на величины возмущений и с помощью таких чисто технологических мер влиять на рассеивание нереально, так как это было бы сопряжено с усложнением технологии изготовления и возрастанием стоимости носителя. Более эффективными оказываются меры по регулированию движения центра масс в продольном, нормальном к траектории и боковом направлениях. С этой целью в системе управления предусматриваются соответствующие контуры регулирования кажущейся скорости. Функции этих контуров состоят в измерении теку-

щих значений кажущейся скорости в нужных направлениях, сравнении этих скоростей с их программными значениями и формировании сигналов, воздействующих на величину и направление тяги двигательной установки с целью устранения имеющихся рассогласований. Не приводя подробного математического описания подобных контуров, отметим лишь, что они нашли широкое применение и являются эффективным средством воздействия на размеры области возможных траекторий.

Независимо от того, снабжен носитель устройством по регулированию кажущейся скорости или нет, определение методических ошибок для заданной совокупности случайных независимых возмущений и для заданной программы угла тангажа с учетом уравнения выключения двигателя проводится методами, описанными в главе 16. Необходимо только иметь в виду, что для расчета возмущенного движения при наличии на борту носителя систем регулирования движения центра масс к имеющимся уравнениям нужно добавить соответствующие уравнения регулирования.

Таким образом, задача по выбору программы угла тангажа сводится к выбору параметров программы из условия минимума суммарного среднеквадратического отклонения по дальности за счет методических ошибок и инструментальных погрешностей управления.

Описанный подход к выбору программы минимального рассеивания является достаточно общим и пригоден для любых способов выключения двигателя. Остановимся несколько подробнее на способах, связанных с применением интеграторов перегрузок в различных вариантах. Если программа угла тангажа задана, то методические ошибки и инструментальные погрешности определяются так, как это было показано в главе 16.

В наиболее простом случае применения интегратора, ось чувствительности которого совпадает с направлением тяги двигателя, уравнение его

$$v_s = v \cos \alpha + \int_0^t g \sin \varphi dt + \int_0^t v \dot{\varphi} \sin \alpha dt$$

не содержит никаких свободных коэффициентов, подбирая которые надлежащим образом можно было бы влиять на методические ошибки по дальности. В этом случае методические ошибки и инструментальные погрешности оказываются функциями только параметров программы угла тангажа. При этом предполагается, конечно, что вероятностные характеристики (в первую очередь среднеквадратическое отклонение) случайной погрешности измерения кажущейся скорости являются заданными величинами. Понятно, что задача сводится к определению значений некоторого числа параметров программы из условия минимума суммарного отклонения по дальности.

Дополнительную возможность уменьшения отклонения по дальности предоставляет применение интегратора с временной компенсацией:

$$v_s^k = v \cos \alpha + \int_0^t g \sin \varphi dt + \int_0^t v \dot{\varphi} \sin \alpha dt - kt.$$

Коэффициент компенсации k , вообще говоря, может быть выбран произвольно, поэтому для каждой программы угла тангажа можно рассматривать выключение двигателя при различных значениях коэффициента

компенсации, но при заданных вероятностных характеристиках инструментальных погрешностей и возмущений. Значение коэффициента компенсации, при котором будет реализована минимальная ошибка в дальности, и будет оптимальным для данной программы.

Но такой относительный минимум существует для каждой программы рассматриваемого семейства. Поэтому в итоге надо выбрать ту программу и тот коэффициент компенсации, при которых реализуется абсолютный минимум рассеивания по дальности. Следовательно, задача сводится к отысканию минимума функционала (отклонения по дальности), зависящего от $n+1$ параметров, где n — количество параметров собственно программы угла тангажа.

Отметим, что выбранная таким образом программа угла тангажа даст наилучший результат только для какой-то одной единственной траектории. Как только будут изменены дальность, координаты точки старта и азимут направления пуска, строго говоря, задачу надо было бы решать заново. Теоретически надо было бы иметь бесчисленное количество программ и соответственно выбранных коэффициентов. На практике обходятся некоторым доступным набором программ, каждая из которых предназначена для определенной области условий пуска. В середине этой области, очевидно, будет обеспечено меньшее рассеивание, а по границам — несколько худшее.

Примерно так же обстоит дело с выбором программы, если предполагается, что управление дальностью будет осуществляться с помощью интегратора, установленного не жестко относительно корпуса носителя, а на стабилизированной платформе. Это позволяет иметь фиксированное относительно инерциального пространства направление оси чувствительности прибора и определять кажущуюся скорость в проекции на выбранное постоянное направление. Здесь надо рассматривать задачу по минимизации суммарного отклонения по дальности, зависящего от параметров программы угла тангажа и угла наклона оси чувствительности интегратора.

Если управляющий функционал усложнен введением двукратного интегрирования перегрузки, т.е. учетом кажущегося пути, то подлежит определению также и оптимальное направление оси чувствительности, вдоль которого производится вычисление пути. Количество параметров, подлежащих оптимизации, увеличивается еще на один. Нетрудно видеть, что почти во всех задачах минимизация должна проводиться по количеству параметров, колеблющемуся от одного до пяти. Поскольку точное решение иногда затруднено даже с применением высокоскоростных ЭВМ, обычно предварительно проводят упрощенный анализ зависимости рассеивания от программы угла тангажа и возмущающих факторов, а затем полученный результат подвергают более тщательному исследованию. При упрощенном анализе рассматривают раздельно инструментальные погрешности и методические ошибки для более или менее подходящих программ в зависимости от свободных параметров управляющего функционала (коэффициента компенсации, направлений осей чувствительности т.д.). В главе 16 было показано, что оптимальные значения подобных параметров из условия минимума методической ошибки определяются достаточно просто. Этого, как правило, бывает достаточно, чтобы остановиться на каком-то узком пучке программ и составить представление об основных законо-

мерностях, которым подчиняются составляющие суммарного отклонения по дальности.

Как указывалось раньше, чаще всего выбранная программа угла тангажа является результатом некоторого компромисса между энергетической оптимизацией траектории и ее оптимизацией по характеристикам рассеивания. Для формализации задачи удобно было бы иметь некий обобщенный критерий, учитывающий обе стороны вопроса, и в некоторых случаях такой подход возможен. Рассмотрим, например, следующую часто встречающуюся схему полета. С помощью носителя на опорную орбиту ИСЗ выводится полезный груз, состоящий из собственного топливно-энергетического блока и целевой нагрузки. Сразу после выведения на опорную орбиту или спустя некоторое время, обычно отводимое для контроля состояния всех систем и определения посредством высокоточных измерений параметров полученной орбиты, предстоит операции по переходу на окончательную целевую орбиту (например, на монтажную орбиту для стыковки с другим объектом). Количество топлива, требуемое для гарантированного обеспечения всех необходимых орбитальных маневров и выхода на целевую орбиту, зависит от точности выведения на опорную орбиту, и эта зависимость может оказаться весьма существенной. Будем считать, что такая зависимость нами определена. С другой стороны, представим себе, что при выведении на опорную орбиту наблюдается такая закономерность: чем ниже высота орбиты выведения, тем больше масса выводимого полезного груза, но хуже характеристики рассеивания, и, следовательно, требуется большее количество топлива на формирование окончательной целевой орбиты. Пусть определены и эти зависимости. Теперь, приняв массу полезного груза на целевой орбите за обобщенный критерий, можно оптимизировать траекторию выведения на опорную орбиту ИСЗ по этому критерию.

К сожалению, решение вопроса не столь просто, как это может показаться с первого взгляда. Дело в том, что зависимость между рассеиванием на опорной орбите и массой целевой нагрузки нельзя рассматривать как определенную функциональную зависимость, ибо она носит вероятностный характер, и, следовательно, анализ задачи по оптимизации траектории надо вести также в вероятностном плане. Это, конечно, усложняет задачу, но она все же вполне разрешима.

В других аналогичных ситуациях можно применить и иной подход, а именно: массу полезного груза на орбите (или дальность полета баллистической ракеты при заданной массе полезного груза) максимизировать при ограничении на рассеивание. Можно поступить и наоборот — минимизировать рассеивание при ограничении массы полезного груза на орбите (или дальности полета). В общем случае мы приходим к оптимизационной задаче с ограничениями типа равенств или неравенств.

В заключение отметим, что при выборе программы угла тангажа учет эффекта вращения Земли является обязательным.

При пуске ракеты в восточных направлениях, т.е. по направлению вращения Земли, траектория относительно Земли как бы поднимается, становится круче, а при пуске на запад — как бы прижимается к Земле, становится более пологой. Это приводит к тому, что в первом случае программу угла тангажа приходится формировать с меньшими конечными программными углами, а во втором — с большими.

§ 18.6. Особые участки при выборе программы

В некоторых случаях при выборе программы возникает необходимость на каких-то участках организовать движение, подчиненное специальным условиям. Ниже рассматриваются участки траектории, на которые наложено одно из следующих условий:

- постоянство угла наклона вектора скорости относительно стартового горизонта ($\theta = \text{const}$);
- строгое равенство программного угла атаки нулю ($\alpha = 0$);
- ограничение по величине нормальной перегрузки ($n_y \leq \tilde{n}_y$);
- ограничение по величине осевой перегрузки ($n_x \leq \tilde{n}_x$).

Движение с постоянным углом θ . В §5.3 было показано, что при условии движения с заданным законом изменения угла θ уравнение движения относительно нормали к траектории используется для определения угла атаки, реализующего заданное движение.

В зависимости от степени точности расчета можно применять одну из следующих формул:

$$\alpha = \frac{m \left(v \frac{d\theta}{dt} + g \cos \theta - \frac{x}{r} g \sin \theta \right)}{P - X_{1p} + \frac{l_1 - x_{ц.д}}{l_1 - x_{ц.м}} c'_{y_1} q S}$$

или

$$\alpha = \frac{m \left(v \frac{d\theta}{dt} + g \cos \theta \right)}{P + c'_{y_1} q S}$$

Положив в этих формулах $\theta = \text{const}$ ($\frac{d\theta}{dt} = 0$), будем иметь

$$\alpha = \frac{mg \left(\cos \theta - \frac{x}{r} \sin \theta \right)}{P - X_{1p} + \frac{l_1 - x_{ц.д}}{l_1 - x_{ц.м}} c'_{y_1} q S}$$

или

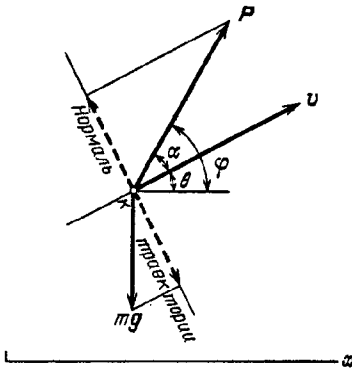
$$\alpha = \frac{mg \cos \theta}{P + c'_{y_1} q S},$$

и интересующая нас программа угла тангажа получится в виде

$$\varphi = \theta + \alpha.$$

Отметим, что при прямолинейном движении сумма проекций сил на нормаль к траектории должна быть равна нулю. В нашем случае это означает, что проекция на нормаль силы тяжести должна быть скомпенсирована суммой составляющих силы тяги и подъемной силы, а при больших высотах полета — только составляющей силы тяги, как это показано на рис. 18.5. При этом требуемый угол атаки по мере движения постепенно уменьшается, поскольку масса ракеты убывает, а величина тяги остается неизменной.

Рис. 18.5. К условию прямолинейности траектории



Движение с нулевым углом атаки. Положив во втором уравнении системы (5.47) $\varphi_{пр} - \theta = 0$, запишем:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{v} \left(\cos\theta + \frac{x}{r} \sin\theta \right). \quad (18.14)$$

Это и есть условие движения без угла атаки, выраженное в виде дифференциального уравнения. Проинтегрировав его совместно с остальными уравнениями системы (5.47), получим

некоторую функцию $\theta(t)$. Если теперь программу угла тангажа задать в соответствии с равенством

$$\varphi_{пр}(t) = \theta(t),$$

то и получим искомую программу.

В случае малости $\frac{x}{r} \sin\theta$ сравнительно с $\cos\theta$, что почти всегда можно принять при полете первой ступени, уравнение (18.14) упрощается, переменные разделяются и решение получается в виде квадратуры:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{v} \cos\theta, \quad \frac{d\theta}{\cos\theta} = -\frac{g}{v} dt,$$

$$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_H}{2} \right) - \int_{t_H}^t \frac{g}{v} dt,$$

где θ_H и t_H соответствуют начальному моменту движения без угла атаки.

При движении без угла атаки единственной силой, искривляющей траекторию, является гравитационная сила — под ее действием возникает угловая скорость, с которой изменяется направление касательной к траектории. Подобное движение иногда называют *движением по баллистической кривой* или просто *баллистическим движением*, а соответствующий поворот направления скорости — *гравитационным разворотом*.

Движение с ограниченной по величине нормальной перегрузкой. Как известно, нормальная перегрузка определяется формулой

$$n_{y_1} = \frac{c'_{y_1} q S \alpha}{mg_0}.$$

Для ограниченной по величине нормальной перегрузки $|\tilde{n}_{y_1}|$ допустимое значение угла атаки будет

$$\alpha = \pm \frac{\tilde{n}_{y_1} mg_0}{c'_{y_1} q S}.$$

Подставляя это значение в уравнение движения относительно нормали

к траектории

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{v} \left[\frac{\alpha}{m} (P + c'_{y_1} qS) - g \cos\theta \right],$$

получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{v} \left[\pm g_0 \tilde{n}_{y_1} \left(1 + \frac{P}{c'_{y_1} qS} \right) - g \cos\theta \right].$$

Знак перед первым слагаемым в квадратных скобках следует выбирать в зависимости от того, быстрее или медленнее требуется изменять угол θ . Возможно, иногда на одной части траектории следует брать один знак, на другой части — противоположный. При аэродинамически несимметричных конструкциях ракеты задается не только модуль $|\tilde{n}_{y_1}|$, но и знак, и тогда вопрос о выборе знака перед первым слагаемым в квадратных скобках отпадает. Интегрирование полученного уравнения совместно с остальными тремя уравнениями системы (5.48) и дает нам траекторию, ограниченную величиной нормальной перегрузки.

Движение с ограниченной по величине осевой перегрузкой. В ряде случаев выбор программы угла тангажа производится в условиях введения на отдельных участках траектории ограничений на величину максимальной осевой перегрузки. Поэтому приведем основные зависимости, характеризующие движение при постоянной перегрузке на уровне заданного ограничения.

Осевая перегрузка определяется формулой

$$n_x = \frac{P - X}{g_0 m}.$$

Ограничение осевой перегрузки величиной \tilde{n}_x предъявляет требования к величине тяги и определяет необходимость регулирования режима работы двигательной установки, так как добиться желаемого результата за счет программы угла тангажа практически невозможно. Возрастание перегрузки при постоянном режиме работы двигателя в основном определяется интенсивным уменьшением массы ракеты и происходит по зависимости, близкой к гиперболе, а при отсутствии атмосферы — по гиперболе.

Обычно задача по ограничению осевой перегрузки возникает на конечной части траектории первой или второй ступени полета носителя, когда его масса приближается к своему конечному значению. Условие постоянства осевой перегрузки запишем в виде

$$\tilde{n}_x = \frac{g_0 \dot{m} P_{уд.п} - S_a p - X}{g_0 m},$$

откуда следует, что

$$-\dot{m} = \frac{dm}{dt} = - \frac{g_0 m \tilde{n}_x + S_a p + X}{g_0 P_{уд.п}}. \quad (18.15)$$

Решение уравнения (18.15) дает закон изменения массового расхода, а следовательно, и тяги. Текущее значение массы

$$m = m_{\text{н}} - \int_{t_{\text{н}}}^t \dot{m} dt,$$

где $m_{\text{н}}$ и $t_{\text{н}}$ соответствуют моменту, начиная с которого вводится условие

$$n_x = \tilde{n}_x = \text{const.}$$

Если полет происходит при пренебрежимо малом влиянии атмосферы, уравнение (18.15) упрощается

$$\frac{dm}{dt} = - \frac{m \tilde{n}_x}{P_{\text{уд.п}}},$$

переменные разделяются

$$\frac{dm}{m} = - \frac{\tilde{n}_x}{P_{\text{уд.п}}} dt$$

и получаем (при условии, что удельная тяга постоянна) следующее конечное соотношение:

$$\ln \frac{m}{m_{\text{н}}} = - \frac{\tilde{n}_x}{P_{\text{уд.п}}} (t - t_{\text{н}})$$

или

$$m = m_{\text{н}} e^{-\frac{\tilde{n}_x}{P_{\text{уд.п}}} (t - t_{\text{н}})}.$$

Для текущих значений секундного расхода массы и тяги можем написать следующие выражения:

$$\dot{m} = m_{\text{н}} \frac{\tilde{n}_x}{P_{\text{уд.п}}} e^{-\frac{\tilde{n}_x}{P_{\text{уд.п}}} (t - t_{\text{н}})},$$

$$P = g_0 \dot{m} P_{\text{уд.п}} = g_0 m_{\text{н}} \tilde{n}_x e^{-\frac{\tilde{n}_x}{P_{\text{уд.п}}} (t - t_{\text{н}})}.$$

Для реализации рассматриваемого движения на борту должны быть предусмотрены соответствующие органы, позволяющие регулировать режим работы двигательной установки, а также счетно-решающее или программное устройство, задающее нужный режим.

В этой главе мы остановились только на самых принципиальных сторонах вопроса выбора формы траектории с тем, чтобы ознакомиться с существом задачи и подходом к ее решению. Более тонкие моменты, относящиеся к конкретным структурам системы управления, условиям эксплуатации и другим характеристикам, конечно же, могут привести к существенным изменениям изложенной схемы.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

E	— эксцентрическая аномалия;
F	— главный вектор внешних сил;
G	— сила тяжести; вес;
K	— количество движения;
L	— момент количества движения; дальность;
M	— главный момент внешних сил; средняя аномалия;
P	— сила; тяга;
$P_{уд.п}$	— удельная тяга в пустоте;
$P_{уд0}$	— удельная тяга на поверхности Земли;
Q	— сила лобового сопротивления руля;
R	— подъемная сила руля; радиальная дальность
S	— площадь;
T	— период обращения;
U	— потенциал силового поля;
V	— объем тела; скорость;
W	— ускорение;
e	— эксцентриситет;
f	— постоянная тяготения;
f	— вектор Лапласа;
h	— высота; константа энергии;
i	— наклонение;
m	— масса;
n	— перегрузка; среднее движение;
n_0	— начальная перегрузка;
p	— давление; нагрузка; фокальный параметр;
q	— скоростной напор; круговая частота;
r_α	— расстояние до апоцентра;
r_π	— расстояние до перигенцентра;
u	— истинная скорость истечения газов из сопла; аргумент широты;
u'	— эффективная скорость истечения;
v	— скорость центра масс ракеты;
v_a	— скорость центра выходного сечения сопла;
Ω	— угловая скорость вращения; долгота восходящего узла орбиты;
α	— угол атаки; прямое восхождение;
β	— угловая дальность; угол места;
δ	— склонение;
η	— угол крена;
ϑ	— истинная аномалия;
θ	— угол наклона вектора скорости к местному горизонту;
λ	— географическая долгота;
μ_k	— относительная конечная масса;
v_0	— стартовая нагрузка на тягу;
ξ	— угол рыскания;
ρ	— плотность;

- φ – широта; угол тангажа;
- ψ – азимут прицеливания; угол прецессии;
- ω – угловая скорость вращения; аргумент широты перицентра.

Нижние индексы

- З** – Земля;
- а** – аэродинамический; абсолютная; активный;
- б** – биэллиптический;
- в** – видимость; вертикальная;
- вкл** – включение;
- выкл** – исключение;
- г** – географическая; горячее;
- гц** – геоцентрическая;
- г.ч** – головная часть;
- д** – динамическая; демпфирование;
- др** – драконический;
- зад** – заданное;
- и** – инструментальная;
- к** – конечная;
- кр** – круговая;
- крит** – критическое;
- м** – мидель; меридиан; методическая; местный;
- н** – начальная; носитель;
- ном** – номинальное;
- ок** – окислитель;
- опт** – оптимальный;
- осв** – освещенность;
- оск** – оскулирующая;
- отбр** – отбрасывание;
- отд** – отделение;
- п** – пустота; падение; пассивный; переходная; параллельный;
- пар** – параболическая;
- пр** – программное;
- пред** – предельное;
- п.г** – полезный груз;
- п.н** – пункт наблюдения;
- р** – руль;
- с** – система; стартовая;
- св** – свободный;
- ср** – средняя;
- ст** – статическая;
- сух** – сухой;
- т** – твердое; топливо;
- уд** – удельный;
- ц** – центр; центральное;
- ц.д.** – центр давления;
- ц.м** – центр масс;
- э** – эллиптическая;
- а** – сопло;
- с** – кориолисово;
- е** – экваториальная; переносная;
- т** – нормальная; меридиональная;
- п** – трансверсальная;
- р** – полярная;
- г** – радиальная; относительная;
- s** – кажущаяся;
- α – апоцентрический;
- π – перицентрический.

Индексы верхние

- (С) – относительно центра масс системы;
- г – горизонтальная;
- гар – гарантийный;
- ост – остаток;
- э – экватор;
- эт – эталонная;
- 0 – в момент старта.

Аббревиатуры

- ГГ – гиригоризонт;
- ГВ – гировертиконт;
- ГЧ – головная часть;
- ДСЧ – датчик случайных чисел;
- ДУ – двигательная установка;
- ИСЗ – искусственный спутник Земли;
- ЛА – летательный аппарат;
- СК – система координат;
- СОЗ – угол Солнце – объект – Земля;
- УТ – всемирное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абгарян К.А., Рапопорт И.М.* Динамика ракет. — М.: Машиностроение, 1969.
2. *Аппазов Р.Ф., Лагров С.С., Мишин В.П.* Баллистика управляемых ракет дальнего действия. — М.: Наука, 1966.
3. *Балк М.Б.* Элементы динамики космического полета. — М.: Наука, 1965.
4. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения: гарантирующий подход. — М.: Наука, 1980.
5. *Бэггин Р.* Наведение в космосе. — М.: Машиностроение, 1966.
6. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
7. *Гантмахер Ф.Р., Левин Л.М.* Теория полета неуправляемых ракет. — М.: Физматгиз, 1959.
8. *Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В.* Механика полета. — М.: Машиностроение, 1969.
9. *Дмитриевский А.А., Казаковцев В.П., Устинов В.Ф., Лысенко Л.Н., Жилейкин В.Д., Кольцов Ю.Ф.* Движение ракет. — М.: Воениздат, 1968.
10. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: основные задачи и методы. — М.: Физматгиз, 1975.
11. *Ильин В.А., Кузмак Г.Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. — М.: Наука, 1976.
12. *Карагодин В.М.* Теоретические основы механики тела переменного состава. — М.: Оборонгиз, 1963.
13. *Козлов И.С.* Зависимость орбитальных элементов от импульса, расположенного произвольным образом в пространстве//Механика космического полета/Под ред. В.В. Добронравова. — М.: Машиностроение, 1969.
14. *Колесников К.С.* Жидкостная ракета как объект регулирования. — М.: Машиностроение, 1969.
15. *Колесников К.С., Козлов В.И., Кокушкин В.В.* Динамика разделения ступеней летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1977.
16. *Космодемьянский А.А.* Общие теоремы динамики тела переменной массы//Уч. зап. МГУ, — 1951. — Т. III, вып. 152.
17. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. — М.: Учпедгиз, 1955.
18. *Краснов Н.Ф.* Аэродинамика. — М.: Высшая школа, 1969.
19. *Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф.* Баллистика ракет. — М.: Машиностроение, 1970.
20. *Лоуден Д.Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации. — М.: Мир, 1966.
21. Основы теории полета и проектирования космических аппаратов/Под ред. Г.С. Нариманова. — М.: Машиностроение, 1972.
22. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли//Успехи физических наук. — 1957. — Т. 63, вып. 1а.
23. *Охоцимский Д.Е.* Динамика космических полетов. — М.: Изд-во МГУ, 1968.
24. *Разыграев А.П.* Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей. — М.: Машиностроение, 1977.
25. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика летательных аппаратов. — М.: Наука, 1982.
26. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/Под ред. Г.Н. Дубошина. — М.: Наука, 1971.

27. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
28. Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. – М.: Машиностроение, 1973.
29. Творческое наследие академика Сергея Павловича Королева: Избранные труды и документы. – М.: Наука, 1980.
30. Феодосьев В.И. Основы техники ракетного полета. – М.: Наука, 1979.
31. Чагный В.И. Об изохронных производных//Искусственные спутники Земли. – Изд-во Академии наук СССР, 1963. – Вып. 16.
32. Чернов А.А. Функция распределения модуля случайного вектора//Уч. зап. Ереванского гос. ун-та. – 1980. – № 3.
33. Шапиро Я.М. Внешняя баллистика. – М.: Оборонгиз, 1946.
34. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли: – М.: Наука, 1965.
35. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. – М.: Наука, 1976.
36. Эрике К. Космический полет. Т. I: Окружающие условия и небесная механика. – М.: Физматгиз, 1963.
37. Эрике К. Космический полет. Т. II: Динамика. Ч. I. – М.: Наука, 1969; Ч. II. – М.: Наука, 1970.
38. Эскобал П. Методы определения орбит. – М.: Мир, 1970.
39. Эскобал П. Методы астродинамики. – М.: Мир, 1971.
40. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. – М.: Машиностроение, 1978.
41. Hestens D. A vectorial form the conic variational equation. – Journal of Guidance, Control and Dynamics. – 1982. – V. 5, No. 5.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Азимут прицеливания 26
Акселерометр 381
Аномалия истинная 184
– средняя 198
– эксцентрическая 196
Апогей 185, 219
Аппарат летательный активный 257
– – пассивный 257
– – статически неустойчивый 83
– – – устойчивый 83
Аргумент широты перицентра 192
– – – , смещение 216
Афелий 185
- Баллистика 11, 14
БЦВК 338
- Вариации см. Возмущения
Вариация ориентации орбиты 267
– положения плоскости орбиты 270
– формы орбиты 268
Вектор Лапласа 181, 267
– относительной дальности 220
– прицельный 260
– промаха 261
– случайный 328
– эксцентриситета 227, 267
Величина случайная 324
Видимость спутника 233, 235
Витки суточные 237
Возмущения 299
– вековые 215
– долгопериодические 216
– короткопериодические 216
– периодические 216
– радиального расстояния 218
– систематические 299, 302
– случайные 299, 302
– элементов орбиты 267
Вращение Земли, учет при выборе программы тангажа 426
Время всемирное 24
– декретное 24
– идеальное полного сгорания 131
- Время летнее 24
– московское 24
– настроенное интегратора 352
– полетное 24
– поясное 24
– прогноза 223
– среднее звездное 23
– – солнечное 23
– старта 238–241
Вспышки солнечные 34
Встреча (перехват) 261
– мягкая 261
Выведение активного ЛА 257
Выключение двигателя 342–359
– – двухступенчатое 373
Высота встречи допустимая 265
– входа в атмосферу 173
– орбиты над поверхностью 218
– полета реальная 219
- Гармоники зональные 31
Гашение скорости сближения 266
Геоид 28
Гипербола отлетных скоростей 250
Гировертикант 79
Гирогоризонт 78
Годограф скоростей отлета и прилета 252
– скорости орбитальной 200
– – отлета 250
– – перелета 203
Гоудела условия совместимости 205, 250
Границы доверительные 341
Группирование приборов 385
- Дальность 15, 343, 389
– в параболической теории 272, 274
– в эллиптической теории 279, 282
– относительная, вектор 220
Датчик случайных чисел 337
Двигатели управляющие 82
Движение баллистическое 428
– вертикальное 184

Движение вертикальное гиперболического типа 189, 209
— — эллиптического типа 189, 209
— орбитальное 178
— относительное в окрестности круговой орбиты 220 и д.
— расчетное (номинальное, невозмущенное) 298
— среднее
Дисперсия 325, 333
Долгота восходящего узла 192
— — —, вековое изменение 216
— — — географическая 236

Задача встречи (перехвата) 261
— — мягкой 261
— коррекции многообразовая 256
— — однообразовая 256
— Ламберта 207
— маневрирования 241 и д.
— минимизации внешняя 263
— — внутренняя 263
— модельная 413
— сближения 257
— связанных коррекций 255
— Циолковского вторая 125–127
— — первая 118–125

Закон распределения 328
— — нормальный (гауссов) 325

Законы Кеплера 178, 198
Закрутка ГЧ предварительная 373
Замораживание вектора состояния 229
Запас топлива гарантийный 17, 388, 390, 400

Импульс скорости 242
— — нормальный 257
— — последнего двигателя 303
— — радиальный 257
— — трансверсальный 256
— — удельный 64

Интеграл Лапласа векторный 181
— площадей векторный 179
— энергии ("живых сил") 182

Интегратор 346, 382
— с временной компенсацией 374

Интервалы маневрирования 249, 263

Испытания летные 299

Кеплера законы 178, 198
— уравнение 197

Ковариация 328

Компенсация временная 374

Комплекс измерительный 19

Компонента скорости радиальная 187
— — трансверсальная 187

Конец активного участка 301, 342

Константа площадей векторная, 179, 267
— энергии 182, 184

Конус прецессии 371

Коррекции связанные 255

Коррекция 242
— двухкомпонентная 255
— многообразовая 256, 257
— однокомпонентная 255
— однообразовая 256
— оптимальная, направление 254
— трехкомпонентная 255
—, уравнение 255

Коэффициент компенсации 374, 424
— корреляции 328
— лобового сопротивления 135
— формы 135

Кратность орбиты 236

Кривая распределения 325

Ламберта задача 207

Лапласа вектор 267
— функция 326

Линеаризация 144, 309 и д.

Линия апсид 185

Маневрирование на орбите 19, 241

Масса относительная 120
— — конечная 120
— — суммарная 124

Математическое ожидание 325, 333

Матрица влияния 254
— ковариационная 331
— корреляционная 331
— преобразования замораживания вектора состояния 230
— — случайного вектора 332
— прогноза 223, 228

Метод исключения двигателя 342
— линеаризации 144, 310 и д.
— статистических испытаний (метод Монте-Карло, метод математических стрельб) 300, 336
— управления гибкий 379

Механизм программный 80

Модель атмосферы динамическая 34
— — стационарная 33
— — сферическая 33
— баллистическая вычислительная 21
— бортовых систем 338

Момент аэродинамический демпфирующий 84, 96, 161
— — опрокидывающий 83, 161
— — противодемпфирующий (анти-демпфирующий) 161
— — стабилизирующий 83, 161

Момент ковариационный 328
— корреляционный 328

Момент оскуляции 215
— старта носителя 238

Моменты реактивные 66

Наблюдаемость спутника 233, 235

- Наклонение 192
 - критическое 217
 - оптимальной коррекции 254
- Неустойчивость статическая 83
- Нецентральность гравитационного поля 215 и д.
- Нуль-направление 254

- Обстановка баллистическая 18
- Обтекатель, момент сброса 413
- Окно старта 18, 241
- Определение орбит 19, 198–213
- Орбита возмущенная 226
 - кеплерова средняя 218
 - круговая "реальная" 218
 - монтажная 257
 - околосолнечная, возмущения 266
 - опорная 222
 - эллиптическая 266
- оскулирующая 215
- перелета гиперболическая 203
- эллиптическая 203
- солнечно-синхронная 237
- , постоянно освещенная Солнцем 238
- эллиптическая относительная 226
- *n*-суточной кратности 236
- Освещенность спутника Земли 230, 235
- Оскуляющая 215
- Остаток топлива гарантийный 390
- Ось апсидальная 185
 - , прецессия 217
 - мира 25
- Отделение ГЧ 363, 369
- Отклонение 299
 - среднеквадратичное 325
- Оценивание интервальное 341
 - точное 341
- Оценки 128, 334
- Ошибки методические 345

- Парабола безопасности 276
- Параметр фокальный 184
- Параметры основные проектно-баллистические 135
- Перегрузка начальная 121
 - ограниченная нормальная 428
 - – осевая 429
- Переход межорбитальный 242
 - – бипараболический 244
 - – Гомана 243
 - – котангенциальный 247
 - – , общий случай 249
 - – параболический (пределный) 244
- Перигей 185, 217, 219
- Период орбиты 197
 - – драконический 217
- Перицентр 185

- Платформа гироскопическая стабилизируемая 380
- Плотность распределения 328
- Поверхность распределения 327
- Поворот плоскости орбиты 248
 - – – трехимпульсный 248
- Погрешности инструментальные 345
- Подход к рассеиванию аналитический 300
 - – – статистический 299
- Поле гравитационное нецентральное 215 и д.
 - – центральное 28
- Полет свободный ГЧ 370, 372 и д.
- Полигон посадки 17
- Последствие газов 363, 368
- Потенциал нецентрального поля 215
 - нормального поля 31
 - поля Земли 30
- Потери скорости 133
 - – гравитационные 134
 - – на преодоление сопротивления атмосферы 134
- Пояс часовой 24
- Предложение техническое 128
- Преобразование "замораживания" 230
- Преобразования координат 35 и д.
- Прецессия ГЧ регулярная 371
 - плоскости орбиты 217, 235
- Приземление спускаемого аппарата 237
- Принцип группирования 385
- Причливание 266
- Программа выведения максимального груза 418 и д.
 - максимальной дальности 407, 413
 - минимального рассеивания 408, 422
 - угла тангажа 406, 411
- Проект эскизный 129
- Проектирование 127 и д.
 - рабочее 129
- Производные баллистические 301
 - изохронные 316
 - от конечных параметров по начальным в параболической теории 276
- Путь кажущийся 380

- Радиус поверхности в подспутниковой точке 219
- Разворот гравитационный 428
- Ракета баллистическая 270 и д.
 - многоступенчатая 123
 - – типа тандем 123
- Распределение вероятности 324
 - – равномерное 327
- Рассеивание 298, 359
 - , выбор формы траектории 405
 - по дальности 362 и д.
 - расходуемого топлива 389
 - целевой функции 359

- Рассогласование фазовое 258
- Расстояние межвитковое 237
 - радиальное, возмущение 218
- Расход достартовый 70
 - относительный 120
- Рули газоструйные 79
- Сближение 242, 257
 - автономное 265
 - дальнее 265
- Сжатие Земли 215
- Сила аэродинамическая 73 и д.
 - возмущающая 214 и д.
 - притяжения 69, 71
 - реактивная 59
 - тяги см. Тяга
 - тяжести 32, 71
- Синхронизация расходов топлива в блоках носителя 401–403
- Система аварийного спасения 17
 - бортовая информационная 338
 - координат 22
 - – геоцентрическая инерциальная 294
 - – – вращающаяся (гринвичская, № 2) 26
 - – – экваториальная инерциальная (№1) 25, 294
 - – земная 22, 294
 - – инерциальная 22
 - – начально-стартовая (№5) 27
 - – нецентральная (уточненная, №5) 49
 - – неинерциальная 22
 - – объектоцентрическая орбитальная вращающаяся (№3) 26
 - – орбитальная 22
 - – – замороженная 229
 - – – цилиндрическая 223
 - – связанная 22
 - – – объектоцентрическая (№6) 27
 - – , – с плоскостью орбиты и направлением на Солнце 231
 - – стартовая (№4) 26
 - – – нецентральная (уточненная, №4) 49
 - спутниковая 19
 - управления 77 и д.
 - уравнений в вариациях 318
- Ситуация нештатная 16
- Скорость гиперболическая 186
 - идеальная 133
 - истечения эффектная 62, 122
 - кажущаяся 382
 - космическая вторая 186
 - – первая 186
 - круговая 186
 - максимально достижимая 15
 - на бесконечности 183, 188
 - параболическая 186
 - прецессии 217
- Скорость секториальная 181
 - фазирования 259
 - характеристическая 133
 - эллиптическая 186
- Совмещение гарантийных запасов ступеней 403
- Солнце среднее экваториальное 23
- Спасение частей носителя 17
- Старт 238
 - вертикальный 410
- Статистика 299
- Степень статической устойчивости 83, 162
- Сутки звездные 23
 - полетные 237
 - солнечные 23
- Тандем 123
- Тень Земли 231
- Теория параболическая 271 и д.
 - эллиптическая 271, 278 и д.
- Топливо, гарантийный запас 388 и д.
 - , рассеивание расхода 389
- Точка апсидальная 185
 - весны 25
 - оскуляции 215
- Траектория возмущенная 299, 309 и д.
 - выведения, возмущающие факторы 302
 - гибкая 379
 - пассивная, возмущающие факторы 304
 - перехода Гомана 243
 - попадающая 111
 - расчетная (номинальная, невозмущенная) 298
- Трубка траекторий 342
- Тяга динамическая 59
 - статическая 61, 76
 - стендовая 60
 - удельная 64
- Тяговооруженность начальная 121
- Угол атаки нулевой 428
 - , ограничение 412
 - наклона вектора скорости к местному горизонту 188
 - тангажа, программа 406, 411
 - фазовый начальный 258
 - часовой 24
- Узел орбиты, смещение за виток 217
- Управление 77 и д.
- Уравнение интегратора 351
 - Кеплера 197
 - коррекции 255
 - Мещерского 115, 118
 - орбиты 184
 - Эйлера–Ламберта 210
- Ускорение кажущееся 344, 348
- Условия внешние 21
 - начальные абсолютного движения 294

Условия начальные, возмущения 305
— —, переход от относительного движения к абсолютному 293 и д.
— совместимости Гоудела 206, 250
Устойчивость статическая 83, 161
Участок автономного сближения 265
— активный 13, 239
— — вертикальный 410
— дальнего сближения 265

Фазирование 259

Факторы возмущающие 299, 302 и д.
— —, влияние на гарантийный запас топлива 396

Фигура Земли 27

Формирование монтажной орбиты 257

Формулы Циолковского 119

Функционал 344

—, предельное значение 391

Функция Лапласа 326

— — нормированная 390

— промаха 262

— распределения 328

— штрафная 262

Характеристики статистические 339

— элементарные 267

Центр годографа 189

— окружности годографа 190

Цикличность условий видимости 235

Циолковского задача вторая 125–127

— — первая 118–125

Части головные 17, 159 и д.

Эйлера – Ламберта уравнение 210

Эксцентриситет 184

— относительного движения 227

Элементы орбиты 191–195, 267

— оскулирующие 215

Эллипс безопасности (достижимости) 284

— рассеивания (равной плотности) 329, 330, 340

Энергетика маневрирования 242

Эпоха 25

Эффект полугодовой 34

— суточный 34

(μ - λ)-управления 384

(μ - λ)-функционалы 384