

6267  
0-76



# ДИНАМИКА ПОЛЕТА

ТРАЕКТОРИИ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ  
АППАРАТОВ

И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, И. В. СТРАЖЕВА

МАШИНОСТРОЕНИЕ-1968

И. В. Остославский, И. В. Стражева

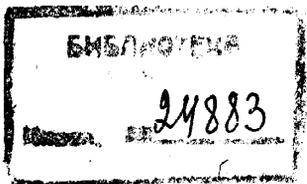
# ДИНАМИКА ПОЛЕТА

---

## ТРАЕКТОРИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

(ИЗДАНИЕ 2-е, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ)

*Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебника  
для студентов вузов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МАШИНОСТРОЕНИЕ»  
Москва 1969

В книге изложены методы расчета траекторий полета различных атмосферных и внеатмосферных летательных аппаратов.

Приведены уравнения движения в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, основные законы механики полета и краткие сведения о математическом аппарате для исследования различных траекторий полета.

Рассмотрены квазиустановившееся и неустановившееся движения с учетом дополнительных кинематических связей, основные и вариационные методы решения задач динамики полета. Даны методы расчета элементов траекторий, стартовых и посадочных характеристик различных летательных аппаратов, в том числе баллистических ракет, орбитальных самолетов, искусственных спутников Земли и космических кораблей.

Дана методика расчета траектории баллистической ракеты на активном и пассивном участках, а также траектории движения искусственного спутника Земли при выводе его на орбиту. Кратко рассмотрены методы оптимального управления космическим кораблем.

Книга является учебником для студентов вузов. Она может также служить пособием для инженеров промышленности.

Иллюстр. 282. Табл. 45. Библ. 62 назв.

Рецензент д-р техн. наук **Н. В. Куршев**

Редактор инж. **В. А. Леонов**

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Круг вопросов, возникающих при исследовании динамики полета, в последние годы чрезвычайно расширился.

Еще в начале второй мировой войны основным и практически единственным летательным аппаратом был *самолет*, использующий для поддержания в воздухе аэродинамическую подъемную силу, создаваемую главным образом крыльями. Самолеты летали со сравнительно небольшими ускорениями, а вследствие небольшого расхода топлива вес их изменялся с течением времени медленно. Это позволяло при решении большинства возникающих на практике задач рассматривать движение самолета как квазиустановившееся; при этом решение задач и анализ результатов были достаточно просты.

В последующие годы появились летательные аппараты, хотя принципиально не отличавшиеся от самолетов, но оборудованные реактивными двигателями, имевшими значительно большую силу тяги по сравнению с винтовыми. Вес таких самолетов изменялся с течением времени гораздо быстрее, чем прежде, а ускорения получались большими. Становилось ясным, что упрощенный подход к изучению динамики полета, ранее дававший хорошие результаты, неприменим для изучения динамики новых летательных аппаратов.

В последние годы второй мировой войны появились летательные аппараты, уже *принципиально отличавшиеся* от самолетов. Новые аппараты не использовали для полета аэродинамическую подъемную силу крыльев и вообще не имели крыльев; их полет за пределами атмосферы происходил под действием только силы тяготения. Диапазон скоростей и высот полета значительно расширился; стало невозможным пренебрегать неинерциальностью системы отсчета, связанной с земной поверхностью, и зависимостью ускорения силы тяготения  $g$  от высоты полета, как это делалось раньше.

Авторы поставили перед собой задачу ознакомить читателя с общими основами динамики летательных аппаратов разного типа и с методами решения важнейших задач динамики полета. В силу ограниченности объема книги в ней не рассматриваются вопросы динамики вертолетов и такой специальный вопрос, как влияние нестационарности процессов внутри летательного аппарата на характер его движения.

Для лучшего усвоения материала в книге затронуты вопросы смежных дисциплин (математики, механики, аэродинамики) — в самой общей форме.

Материал, необходимый для интересующихся только вопросами динамики самолета, отмечен в оглавлении звездочкой, для интересующихся вопросами динамики ракет, — двумя звездочками. Материал, необходимый для более глубокого изучения вопросов, затронутых в книге, а также материал, содержащий обоснования математического аппарата, применяемого при исследовании вопросов динамики полета, набран мелким шрифтом; он не обязателен для читателя, хорошо знакомого с методами математического исследования.

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

За 6 лет, прошедших после выхода в свет первого издания книги, в области исследований динамики полета были получены новые результаты. При подготовке второго издания «Динамики полета» их нельзя было не включить в книгу, в то же время было бы нецелесообразным существенно увеличить объем книги, которая должна служить учебником для высших технических учебных заведений. Эти соображения привели к необходимости радикальной переработки материала, содержавшегося в первом издании.

В новом издании значительно большее место уделено вопросам динамики космических летательных аппаратов, которые в первом издании затрагивались только вскользь или не были рассмотрены вовсе. В то же время там, где это казалось возможным, несколько сокращен материал по динамике самолетов в атмосфере. Несколько подробнее изложены вопросы математического аппарата, используемого в книге, в частности, методы решения вариационных задач; добавлено краткое изложение методов матричного счета и векторной алгебры.

В отличие от первого издания материал разбит на три части. В первой части излагаются общие основы исследования динамики полета. Во второй части рассмотрены вопросы динамики полета в атмосфере применительно к самолетам и ракетам. Наконец, третья часть книги посвящена изложению вопросов динамики полета в космическом пространстве; по соображениям, отмеченным выше, здесь затрагиваются только основные, важнейшие, по мнению авторов, вопросы космической динамики.

Опыт чтения лекций, а также многочисленные замечания, полученные авторами от читателей, заставили авторов изменить методику изложения некоторых вопросов. Исправлены недочеты и погрешности, вкравшиеся в первое издание книги.

Авторы считают своим долгом отметить помощь в доработке рукописи, оказанную рецензентом проф. Н. В. Куршевым, а также приносят свою благодарность Я. Е. Ткаченко, В. А. Леонову и Е. П. Жаркову за ряд полезных замечаний, сделанных ими при просмотре рукописи.

Авторы с благодарностью примут замечания читателей по содержанию книги и просят их направлять по адресу: Москва, К-51, Петровка, 24, издательство «Машиностроение».

---

## ВВЕДЕНИЕ

Динамика полета изучает законы, описывающие движение различных летательных аппаратов в различных условиях, и, следовательно, представляет собой один из разделов механики.

*Динамика* — теоретическая основа полета.

За несколько десятков лет, отделяющих нас от первого удачного полета на летательном аппарате тяжелее воздуха, в области летания человечество достигло огромного прогресса. Первые летательные аппараты передвигались со скоростями в несколько десятков километров в час на высотах, измеряемых десятками метров. Скорости полета современных самолетов превышают скорость звука в несколько раз, а высоты, на которых они летают, составляют уже несколько десятков километров.

Человек научился создавать искусственные спутники Земли, полет которых происходит со скоростью около  $8 \text{ км/сек}$ , и космические корабли с еще большими скоростями полета. В освоении космоса почетная роль принадлежит нашей Родине. 4 октября 1957 г. — день запуска первого в истории человечества советского искусственного спутника Земли — начало эры космических полетов. 14 сентября 1959 г. впервые на поверхность Луны был сброшен вымпел с гербом Советского Союза. 1961 год был годом выдающихся побед в освоении космоса человеком. 12 апреля этого года впервые в истории Юрий Алексеевич Гагарин совершил космический орбитальный полет вокруг Земли на корабле «Восток-1». В августе этого же года совершил суточный полет по околоземной орбите космический корабль «Восток-2», пилотируемый Германом Степановичем Титовым. В последующие годы советские космонавты (и среди них первая женщина-космонавт В. В. Терешкова) не раз совершали полеты в космическом пространстве. 18 октября 1967 г. советская автоматическая станция «Венера-4» успешно осуществила вход в атмосферу Венеры, впервые провела измерения физико-химических характеристик атмосферы и плавно опустилась на ее поверхность.

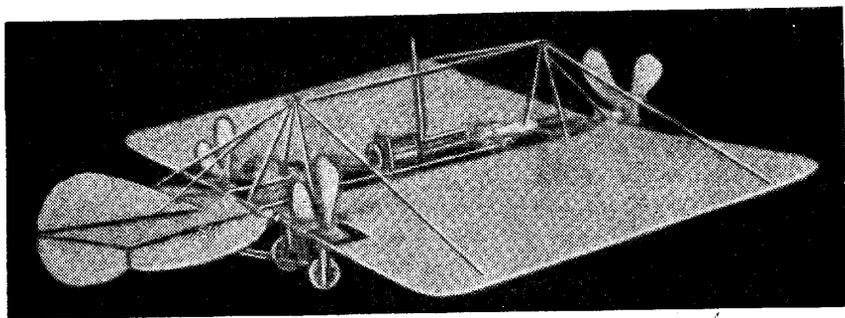
Изучение динамики полета широкого круга летательных аппаратов представляет исключительно сложную задачу. Для успешного ее решения, помимо знаний в области техники, инженер должен обладать широкими знаниями в области математики, механики, физики и ряда других отраслей науки.

Все первые попытки полета связывались со стремлением использовать аэродинамические силы, возникающие при движении тел в воздухе; о существовании этих сил человек знал очень давно (вспомним о ветряных мельницах или о парусных судах). Вначале казалось наиболее простым осуществить полет на летательном аппарате, устроенном подобно птицам, — на *орнитоптере* (летательном аппарате с машущими крыльями), и только позднее человек пришел к мысли, что буквальное копирование природы не всегда целесообразно.

Наряду с созданием летательных аппаратов тяжелее воздуха — самолетов — после удачных опытов братьев Монгольфье с воздушными

шарами в конце XVIII и начале XIX вв. казалась заманчивой идея полета на аппаратах легче воздуха — на *аэростатах*. Этот способ, однако, не давал радикального решения вопроса: помимо того, что аэростатом не удавалось управлять, так что он летел в направлении ветра, подобные летательные аппараты получались очень большого размера, так как подъемная сила газа, наполняющего оболочку аэростата, была невелика; вспомним, что подъемная сила  $1 \text{ м}^3$  водорода составляет всего 11,48 н (1,17 кГ) на уровне моря.

К концу XIX в. идея полета на аппаратах тяжелее воздуха окончательно победила, хотя аппараты легче воздуха применялись и даже в настоящее время применяются для некоторых целей. Наш великий соотечественник Д. И. Менделеев писал в 1878 г.: «Воздухоплавание бывает и будет двух родов: одно — в аэростатах, другое — в аэродинамах. Первые легче воздуха и всплывают в нем (рыба). Вторые тяжелее его и тонут (птица). Подражать первой уже умеют в размерах, годных для практики. Подражание второй — еще в зародыше. Но этот род воздухоплавания обещает наибольшую будущность и, так сказать, указы-



Самолет А. Ф. Можайского

вается самой природой, потому что птица тяжелее воздуха и есть аэродинам»<sup>1</sup>.

Первым самолетом, оторвавшимся от земли более 80 лет тому назад, был самолет, построенный нашим *талантливым соотечественником* А. Ф. Можайским (1825—1890). Самолет Можайского был, конечно, далеко не совершенным летательным аппаратом и не мог долго продержаться в воздухе; однако было сделано главное — доказана возможность полета человека на аппарате тяжелее воздуха. Потребовались еще многие годы для того, чтобы от *попыток* полета перейти к *уверенному* полету. Через 25 лет после полета Можайского американские конструкторы братья Райт построили самолет, на котором удалось совершить ряд полетов.

Первые три десятилетия XX века характеризуются бурным развитием авиации. К концу этого периода самолет стал уже надежным транспортным средством. В дальнейшем высота и скорость полета самолетов продолжали увеличиваться, и в настоящее время, как известно, достигнуты скорости, превышающие скорость звука.

Самолеты, однако, содержат в себе одно неразрешимое противоречие. Дело в том, что у современного самолета и подъемная сила, и сила тяги получаются в результате *отбрасывания масс воздуха* в соответствующих направлениях (вниз и назад). Таким образом, для полета само-

<sup>1</sup> «Воздухоплавание и авиация в России до 1907 г.», Оборонгиз, 1956.

В дальнейшем ссылки на литературные источники даются цифрами, заключенными в квадратные скобки. В конце книги дан список этих источников.

лета современного типа необходим воздух. Плотность воздуха быстро падает с увеличением высоты полета; например, на высоте  $H=10$  км плотность воздуха в 3 раза меньше, чем на уровне моря, на высоте 20 км — в 14 раз меньше, а на высоте 30 км — уже в 70 раз меньше, чем на уровне моря. На высоте 60—80 км плотность воздуха настолько мала, что аэродинамические силы получаются незначительными, и практически не удается, например, создать подъемную силу, способную уравновесить вес самолета на этих высотах.

Таким образом, самый принцип, лежащий в основе полета современного самолета, — использование в качестве рабочего тела для создания необходимых подъемной силы и силы тяги окружающей среды воздуха — не позволяет реализовать полет самолета на очень больших высотах. Для полета на таких больших высотах, не говоря уже о космических полетах, необходимы летательные аппараты принципиально другого типа, чем современные самолеты.

Сила тяги движителя, установленного на летательном аппарате, равна секунднему изменению количества движения рабочего тела, а изменение количества движения практически равно произведению массы рабочего тела на скорость его отбрасывания. Так как скорость отбрасывания ограничена, а плотность воздуха при увеличении высоты полета быстро падает, в качестве рабочего тела на больших высотах приходится использовать вещество, находящееся на борту летательного аппарата. Тогда можно получить силу тяги и при полете за пределами атмосферы, а ориентируя тягу определенным образом относительно направления силы тяжести — и нужную для полета подъемную силу. Такой способ получения тяги, однако, менее экономичен по сравнению со способом, при котором в качестве рабочего тела используется окружающая среда. В качестве иллюстрации можно привести следующие цифры: у самолета с винтовыми двигателями собственное рабочее тело (топливо) составляет примерно  $1/7000$  часть всего рабочего тела (топливо + воздух), для самолета с турбореактивными двигателями —  $1/20$  —  $1/50$ , для ракеты —  $1/1$ . Эти цифры свидетельствуют о неэкономичности длительного активного полета ракеты, так как при этом расход топлива (рабочего тела) получался бы весьма значительным.

Полет летательного аппарата на больших высотах, однако, можно осуществить и не прибегая к искусственному созданию подъемной силы. Это возможно по следующим причинам.

Земля представляет собой тело, по форме близкое к сфере. Поэтому, когда мы говорим о «горизонтальном» полете тела (например, ракеты) на постоянной высоте, то это означает, что тело перемещается приблизительно по круговой траектории, эквидистантной поверхности Земли. На всякое тело, движущееся по криволинейной траектории, как известно из механики, действует центростремительное ускорение  $j_c$  (по нормали к траектории), равное

$$j_c = \frac{V^2}{r},$$

где  $V$  — скорость движения тела, а  $r$  — радиус кривизны траектории тела.

Если рассматривать движение тела по круговой траектории по отношению к поверхности Земли, то необходимо принять во внимание центробежную силу инерции, направленную вдоль радиуса Земли от ее центра наружу. Кроме того, следует учесть центробежную и кориолисову силы инерции, связанные с суточным вращением Земли, как об этом сказано в гл. III.

Когда скорость движения тела невелика, то и центробежная сила инерции невелика; так, например, центробежная сила, действующая на

пешехода, передвигающегося по поверхности Земли, равна приблизительно  $10^{-5} \text{ н}$ ; на самолет, летящий со скоростью  $2800 \text{ км/час}$ , действует центробежная сила, составляющая 1% веса  $G = mg$  самолета, и т. д.

С увеличением скорости движения относительная роль центробежной силы инерции, связанной с кривизной земной поверхности, возрастает: существует такая скорость движения, при которой центробежная сила полностью уравнивает силу земного притяжения (вес летательного аппарата). При этом справедливо равенство

$$\frac{V_{\text{кр}}^2}{r} = g,$$

где  $V_{\text{кр}}$  — скорость движения летательного аппарата по круговой траектории с центром в центре Земли;

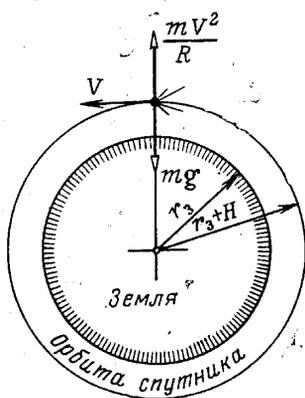
$r$  — расстояние (радиус) траектории от центра Земли;

$g$  — ускорение силы тяготения на расстоянии  $r$  от центра Земли.

Следовательно, если сообщить летательному аппарату скорость, величина которой удовлетворяет написанному выше равенству, и считать аэродинамические силы равными нулю (это можно сделать, если высота полета достаточно велика), то летательный аппарат будет неограниченное время совершать полет<sup>1</sup> по круговой траектории. Как видим, искусственная подъемная сила, как и сила тяги, для совершения такого полета не требуется.

Скорость  $V_{\text{кр}}$  называют *круговой*, или *первой космической скоростью*. Подставив в написанное равенство числовые величины радиуса Земли ( $r_3 = 6371 \text{ км}$ ) и ускорения тяготения ( $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ ), получим, что круговая скорость на уровне моря ( $H = 0$ ) будет  $V_{\text{кр}} = 7,9 \text{ км/сек}$ .

Движение спутника по круговой орбите



Анализ показывает<sup>2</sup>, что если ракете сообщить скорость, большую, чем круговая, то ракета будет перемещаться по траектории, имеющей эллиптическую форму, причем одним из фокусов эллипса является в этом случае центр Земли.

Если скорость тела превышает так называемую *вторую космическую* (параболическую скорость ухода)  $V_{\text{пар}}$ , то тело, вылетевшее с Земли, будет двигаться по незамкнутой траектории и уйдет из сферы притяжения Земли в космическое пространство<sup>3</sup>.

Само собой разумеется, что для совершения полета с такими скоростями требуется предварительная затрата мощности для сообщения летательному аппарату необходимых начальных скорости и высоты полета.

Летательные аппараты можно разделить на два больших класса: летательные аппараты *активного полета*, у которых на протяжении почти всего полета работает двигатель, и летательные аппараты *пассивного*

<sup>1</sup> Более точное исследование этого вопроса показывает, что вследствие влияния притяжения Луны и некоторых других причин время существования спутника Земли ограничено (см. гл. XIII).

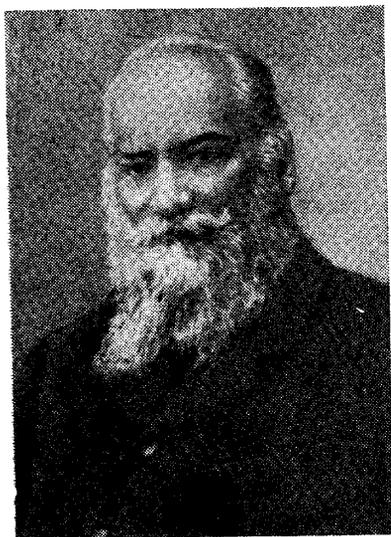
<sup>2</sup> Такой анализ приведен в гл. II.

<sup>3</sup> Теоретическая величина второй космической скорости на поверхности Земли  $V_{\text{пар}} = 11,2 \text{ км/сек}$ . Величины первой и второй космических скоростей для разных планет получаются разными. Для Луны  $V_{\text{кр}} = 1,7 \text{ км/сек}$ ,  $V_{\text{пар}} = 3,5 \text{ км/сек}$ ; для Венеры  $V_{\text{кр}} = 7,2 \text{ км/сек}$ ,  $V_{\text{пар}} = 10,2 \text{ км/сек}$ , для Марса  $V_{\text{кр}} = 3,5 \text{ км/сек}$ ,  $V_{\text{пар}} = 5 \text{ км/сек}$  и т. д. Как видим, осуществить космический полет, например, с Марса или Луны легче, чем с Земли.

полета, у которых на большей части полета двигатель не работает. К первому классу относятся самолеты, использующие для поддержания в воздухе аэродинамическую подъемную силу, и ракеты, у которых подъемная сила получается главным образом как проекция силы тяги на вертикаль. Ко второму классу относятся ракеты дальнего действия (баллистические ракеты) и космические корабли.

Указанное деление летательных аппаратов на два класса в известной мере условно, так как летательные аппараты обоих классов в течение некоторого времени совершают активный (с работающим двигателем), а в течение другого времени — пассивный полет. Однако у аппаратов, отнесенных к первому классу, большую часть времени занимает активный полет, а у отнесенных ко второму классу — пассивный.

Как мы видели, при полете в пределах атмосферы в качестве поддерживающей силы целесообразно использовать аэродинамическую



Николай Егорович Жуковский



Сергей Алексеевич Чаплыгин

подъемную силу; для изучения динамики полета в атмосфере поэтому прежде всего необходимо располагать сведениями по теоретической основе активного полета в атмосфере — *по аэродинамике*.

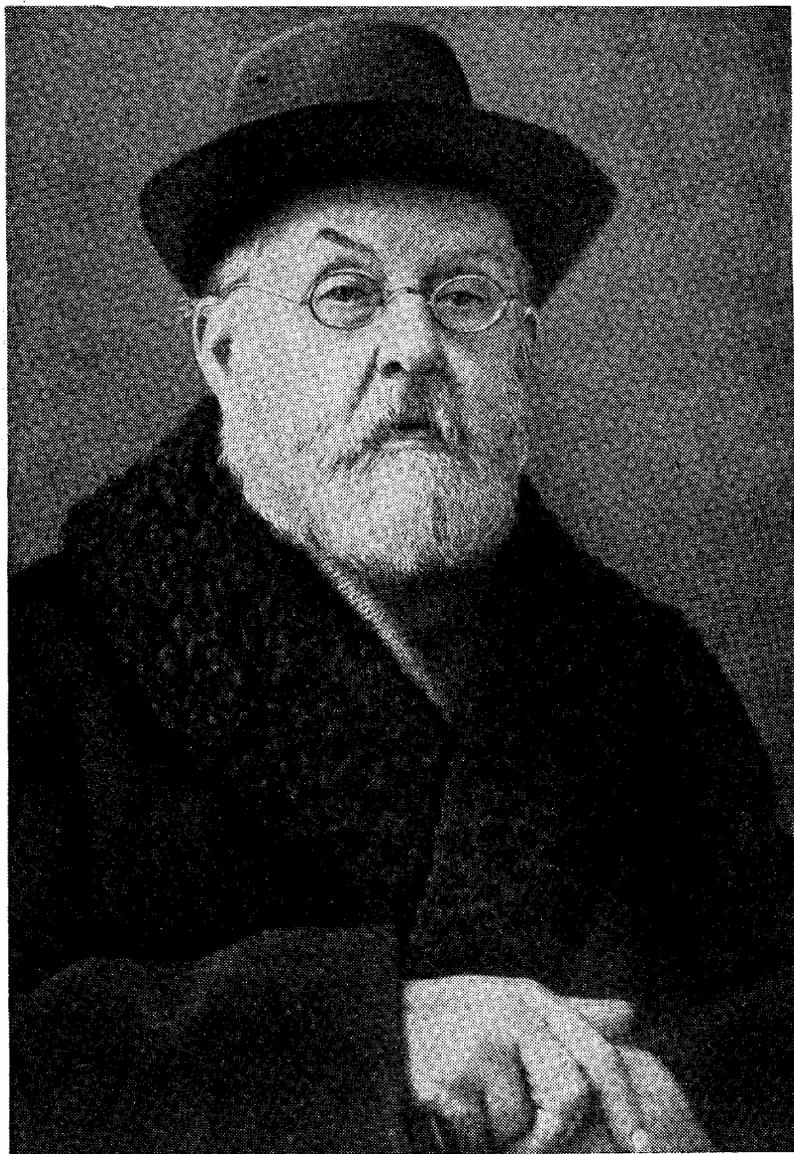
Главой аэродинамической школы в нашей стране по праву считается Николай Егорович Жуковский (1847—1921) — «отец русской авиации», как его назвал В. И. Ленин.

Вместе с другим нашим знаменитым ученым — Сергеем Алексеевичем Чаплыгиным (1869—1942) — Н. Е. Жуковский выдвинул гипотезу, известную во всем мире под названием «постулат Жуковского — Чаплыгина», согласно которой точка схода потока фиксируется вблизи задней кромки крыла. Эта гипотеза, блестяще подтверждающаяся на опыте, сразу позволила далеко продвинуть теорию крыла и получить ряд важных для практики результатов. Разработанная Жуковским и Чаплыгиным теория позволила определить необходимую для изучения динамики полета подъемную силу крыльев.

Вторым важнейшим успехом аэродинамики явилось создание немецким ученым Л. Прандтлем теории пограничного слоя. Прандтль предположил, что вязкость воздуха (как известно, небольшая) проявляется только в узком слое (пограничном слое), непосредственно при-

мыкающем к поверхности тела, находящегося в потоке воздуха; во всем остальном пространстве, по теории Прандтля, вязкостью воздуха можно пренебрегать. Такая постановка задачи позволила дать ответ на второй важный вопрос об определении силы лобового сопротивления, обусловленной вязкостью воздуха.

Эти два «краеугольных камня» современной аэродинамики послужили прочным основанием для развития теории и совершенствования авиационной техники. Авиация стала развиваться бурными темпами.



Константин Эдуардович Циолковский

Уже во время второй мировой войны наряду с самолетами стали успешно летать ракеты; в настоящее время ракетные летательные аппараты получили широкое распространение.

Родоначальником теории реактивного полета в нашей стране яв-

ляется К. Э. Циолковский (1857—1935). Задолго до реализации первых полетов ракет К. Э. Циолковский сумел правильно оценить огромные перспективы, которые открывают ракеты для космических полетов, и формулировал основные принципы теории полета в космосе.

Как уже упоминалось, пассивному полету должен предшествовать активный полет, в продолжение которого ракете сообщают необходимые для пассивного полета начальную скорость и высоту полета. Другими словами, ракете должен быть сообщен некоторый запас энергии; эту энергию получают в результате сжигания топлива в камере ракетного двигателя. Чем большее количество топлива сжигается, тем больший запас энергии получается в конце активного участка полета. Совершенство ракеты можно оценить по скорости, которую набрала бы ракета на активном участке полета, если бы на нее не действовали никакие другие силы (в том числе и сила тяжести), кроме силы тяги. Если принять секундный расход топлива постоянным, то для такой *идеальной скорости*  $v_i$  (иногда эту скорость называют характеристической) получим следующее выражение:

$$v_i = g P_{уд} \ln \frac{m_0}{m_k} = V_a \ln \frac{m_0}{m_k},$$

где  $P_{уд}$  — так называемая удельная тяга двигателя [тяги, получающаяся при сжигании 1 кг (9,81 н) топлива в 1 сек];

$m_0$  — начальная масса ракеты;

$m_k$  — масса ракеты без топлива;

$V_a = g P_{уд}$  — средняя по сечению сопла скорость истечения газов из сопла ракетного двигателя.

Это выражение впервые было получено К. Э. Циолковским и носит название *формулы Циолковского*.

Формула Циолковского показывает, что для получения большой идеальной скорости при определенной скорости истечения  $V_a$  запас топлива на борту ракеты должен составлять значительную часть полного (стартового) веса ракеты. Создание ракет с очень большими относительными запасами топлива связано с серьезными техническими трудностями. Поэтому, если необходимо получить большую идеальную скорость, обычно вместо простой одноступенчатой ракеты применяют составные многоступенчатые.

Хотя полет ракеты на активном участке занимает сравнительно небольшое время, на его протяжении вес ракеты изменяется в широких пределах, и это нельзя не учитывать при изучении динамики ракет. Современник К. Э. Циолковского русский ученый И. В. Мещерский (1859—1935) заложил основы и формулировал важнейшие положения механики тел *переменной массы*. На теоремах Мещерского основаны уравнения движения ракет, которые рассмотрены в настоящей книге. Надо заметить, что и для самолетов в некоторых случаях нельзя не учитывать изменения массы вследствие выгорания топлива, так как это привело бы к заметным погрешностям в результатах расчета.

В настоящей книге рассмотрены вопросы динамики полета как в плотных слоях атмосферы, так и в космическом пространстве, где аэродинамические силы пренебрежимо малы. В первой части книги в краткой форме приводятся основные положения механики и математики, используемые в книге.

Далее рассмотрены вопросы, связанные с полетом самолетов, пилотируемых летчиком, когда на характер движения не наложены какие-либо заранее определенные кинематические условия, а также вопросы, связанные с полетом автоматически управляемых летательных аппара-

тов, движение которых выполняется по определенной программе и непрерывно корректируется командной станцией.

При изучении сложного явления целесообразно это явление в известной степени схематизировать, выделив его главные, основные черты и пренебрегая второстепенными. Такой подход к изучению динамики полета, на котором мы будем основываться в дальнейшем, даст возможность установить общие закономерности, описывающие то или иное движение с известным приближением. Для получения более точного решения следовало бы рассмотреть и «второстепенные» черты явления; эти вопросы, однако, относятся скорее к проектированию летательных аппаратов, и мы здесь не будем затрагивать их.

Формулируем основные упрощающие предположения, лежащие в основе всего дальнейшего содержания.

1. Внешнюю среду, в которой происходит полет летательного аппарата, будем считать неизменной во времени, а характеристики этой среды — однозначно известными.

2. Летательный аппарат будем рассматривать как тело переменной массы с жестко фиксированной внешней оболочкой (контуром). Другими словами, будем пренебрегать упругими деформациями конструкции летательного аппарата, связанными с внешними нагрузками и с кинетическим нагревом поверхности аппарата.

3. Нестационарностью процессов, происходящих внутри оболочки, ограничивающей тело переменной массы (внутри летательного аппарата), будем пренебрегать. Таким образом, мы не будем принимать во внимание, например, так называемый эффект «жидких наполнений» — быстрого перемещения внутри летательного аппарата масс топлива.

Все задачи динамики полета можно разбить на две группы.

К первой группе относятся задачи о возможных и наивыгоднейших траекториях летательных аппаратов. При рассмотрении таких задач можно, не вникая в процесс управления летательным аппаратом, фиксировать внимание на *результатах* этого процесса, сводящихся к определенным изменениям скорости, высоты полета и других кинематических величин, характеризующих движение, в зависимости от времени. При этом должны быть выявлены требования



Многоступенчатая ракета

к внешним силам, обеспечивающие тот или иной характер движения летательного аппарата.

Как будет показано, в первом приближении при решении задач первой группы летательный аппарат можно рассматривать как *материальную точку*, в общем случае переменной массы. Изложение этих задач и составляет содержание настоящей книги.

В задачах второй группы основным является *процесс управления* во всех его деталях и оценка устойчивости движения летательного аппарата по той или иной траектории. В результате решения задач второй группы выясняется *возможность осуществления полета* по той или иной траектории, полученной в результате решения задач первой группы. При решении задач второй группы летательный аппарат приходится рассматривать как *тело переменной массы*. Такие задачи относятся к области устойчивости и управляемости летательных аппаратов и рассматриваются во второй книге.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ  
ОБЩИЕ ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

---

ГЛАВА I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРАЕКТОРИЙ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

§ 1. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

Обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение вида

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] = 0, \quad (1.1)$$

содержащее независимую переменную  $x$ , неизвестную функцию  $y(x)$  и ее производные<sup>1</sup>

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}; \quad y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

В уравнении (1.1) имеется одна неизвестная функция  $y(x)$ . В общем случае приходится иметь дело с системой  $n$  дифференциальных уравнений, содержащих  $n$  неизвестных функций  $y_j(x)$ , где  $(j=1, 2, \dots, n)$ .

Общим решением дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется множество решений, которое состоит из всех без исключения частных решений. Полное или общее решение обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка содержит  $n$  произвольных постоянных, определяемых по заданным граничным условиям. Частные решения получают из общего при определенных значениях постоянных.

Геометрически общее решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка представляет семейство кривых, зависящих от  $n$  параметров. Частное решение  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения, которое связывает между собой одну зависимую переменную  $y$  и независимую переменную  $x$ , представляет некоторую кривую в плоскости  $(x, y)$ . Этому решению  $y = \varphi(x)$  соответствует кривая, которую называют *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение называется *линейным* дифференциальным уравнением, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее производных. Уравнение  $n$ -го порядка такого рода записывается в виде

$$\frac{d^ny}{dx^n} + X_1(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + X_n(x) y = Y(x), \quad (2.1)$$

где  $X_i(x)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и  $Y(x)$  являются определенными функциями независимого переменного  $x$ .

<sup>1</sup> Далее вместо  $y(x)$ ,  $y'(x)$  и т. д. для краткости пишется  $y$ ,  $y'$  и т. д.



применение в инженерной практике в связи с развитием вычислительной техники.

Существует множество различных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений: метод Эйлера, Рунге — Кутта, Чаплыгина, Адамса и др. Общей чертой всех этих методов является то, что весь интервал интегрирования разбивается на мелкие участки, внутри которых принимается тот или иной приближенный характер изменения искомой функции (по закону прямой, ломаной, параболы и т. д.). Достоинство того или иного метода численного интегрирования оценивается по точности даваемых результатов и по простоте вычисления.

Большинство существующих методов интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (каковыми являются, как уже было отмечено, уравнения движения летательного аппарата) приспособлено к системам уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных искомых функций.

Ограничимся кратким описанием лишь некоторых методов, наиболее распространенных в инженерной практике.

Рассмотрим простейшую задачу интегрирования дифференциального уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией  $y=y(x)$ . От этого простого случая, как будет показано далее, нетрудно перейти к более общему случаю интегрирования системы  $n$  дифференциальных уравнений с  $n$  неизвестными функциями.

Пусть ищется решение (интегральная кривая) дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (4.1)$$

в области  $x_0 \leq x \leq x_k$ , удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (5.1)$$

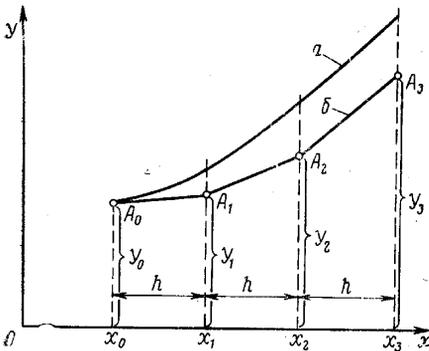


Рис. 21. К методу Эйлера:

*a* — интегральная кривая (точное решение);  
*b* — решение по методу Эйлера

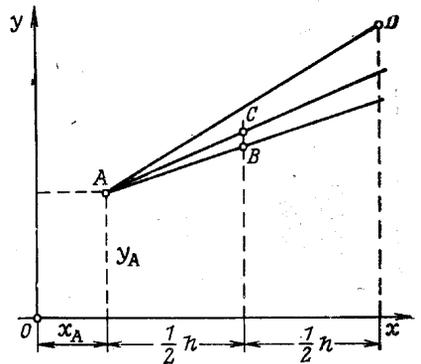


Рис. 3. 1. Графическая интерпретация метода Рунге — Кутта

Предположим, что решение такой задачи (задачи Коши) существует и единственно.

Рассмотрим вначале простейший метод численного интегрирования уравнения (4.1), предложенный Л. Эйлером (1707—1783).

**Метод Эйлера.** Ищется решение уравнения (4.1), удовлетворяющее начальному условию (5.1), где  $x_0, y_0$  — заданные числа.

При численном интегрировании по методу Эйлера весь участок интегрирования делится на достаточно большое число интервалов  $n$  достаточно малой протяженности  $h$ , так что<sup>1</sup>

$$nh = x_k - x_0.$$

Длина каждого интервала  $h$  называется *шагом интегрирования*.

Сущность метода Эйлера заключается в том, что производная  $y'$  на каждом шаге интегрирования принимается постоянной, равной значению  $y'$  в начале каждого шага. Таким образом, действительная интегральная кривая (4.1), проходящая через заданную начальную точку  $(x_0, y_0)$ , заменится ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (рис. 2.1).

По мере увеличения на рассматриваемом участке интегрирования числа интервалов  $n$ , т. е. уменьшения шага  $h$ , погрешность от замены действительной кривой ломаной линией уменьшается.

<sup>1</sup> Вообще говоря, протяженность шага  $h$  может быть не одинакова в процессе интегрирования, так что вместо  $nh$  следовало бы писать  $\sum_{i=1}^n h_i$ . Однако практически чаще всего шаг  $h$  выбирают постоянным; этот случай далее и будет рассмотрен.

Для вычисления значения функции  $y_1$  в конце первого шага интегрирования заменим точную интегральную кривую отрезком ее касательной в начальной точке с координатами  $(x_0, y_0)$ . Таким образом, на первом шаге интегрирования

$$y_1 = y_0 + h y'_0, \tag{6.1}$$

где в соответствии с (4.1)

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

Для второго и последующих шагов за начальные условия принимаются результаты, соответствующие концу предыдущего шага:

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= y_1 + h y'_1, \\ y_3 &= y_2 + h y'_2, \\ &\dots \dots \dots \\ y_k &= y_{k-1} + h y'_{k-1}, \end{aligned} \right\} \tag{7.1}$$

где по (4.1)

$$\begin{aligned} y'_1 &= f(x_1, y_1), \\ y'_2 &= f(x_2, y_2), \\ &\dots \dots \dots \\ y'_{k-1} &= f(x_{k-1}, y_{k-1}). \end{aligned}$$

Вычисления по методу Эйлера осуществляются сравнительно просто. Однако в некоторых случаях этот метод может привести к значительным погрешностям.

В самом деле, пусть точное решение исходного дифференциального уравнения (4.1) с начальным условием (5.1) имеет вид

$$y = \varphi(x) \tag{8.1}$$

и пусть эта зависимость представлена на рис. 2.1 кривой  $a$ .

Производя интегрирование по методу Эйлера, вместо действительной кривой  $a$  получим ломаную линию  $b$ . При переходе к каждому следующему шагу  $h$  мы будем совершать ошибку вследствие неточного значения функции в конце предыдущего шага и неточного определения касательной на рассматриваемом шаге. Накопление таких ошибок может привести к заметной погрешности в окончательном значении искомой функции  $y = \varphi(x)$ .

Погрешности метода Эйлера при прочих одинаковых условиях получаются тем большими, чем больше зависимость (8.1) отстает от линейной. Если это отличие значительно, то точность решения по методу Эйлера можно повысить, лишь выбрав весьма малый шаг<sup>1</sup>. Уменьшение шага  $h$  приводит, естественно, к более длительным вычислениям.

Метод Эйлера, несмотря на недостаточную точность, довольно часто применяется на практике для приближенной оценки, так как интегрирование по этому методу выполняется весьма просто. Ниже на конкретном примере оценена погрешность, которая получается при интегрировании по методу Эйлера.

**Метод Рунге — Кутты.** Значительно более точным, но и существенно более трудоемким по сравнению с методом Эйлера является метод, разработанный немецкими учеными Рунге и Кутта. Метод Рунге — Кутта основан на аппроксимации искомой интегральной кривой соприкасающейся параболой.

Пусть, как и ранее, дифференциальное уравнение разрешено относительно производной

$$y' = f(x, y) \tag{9.1}$$

и задано начальное условие  $x_A, y_A$ .

Выполним следующие операции.

1. По известным начальным условиям  $(x_A, y_A)$  определим значение производной  $y'_A$  в начальной точке  $A$ :

$$y'_A = f(x_A, y_A).$$

Из начальной точки  $A(x_A, y_A)$  проведем (рис. 3.1) прямую

$$y = y_A + y'_A(x - x_A)$$

<sup>1</sup> Надо заметить, что с уменьшением шага увеличивается число шагов, что приводит к нарастанию погрешности вычисления, так что существует оптимальное число шагов; на этом вопросе мы не останавливаемся.

и отметим значение ординаты этой прямой в середине шага интегрирования  $h$  (точка  $B$ ). Ордината в точке  $B$  с абсциссой

$$x_B = x_A + \frac{h}{2}.$$

очевидно, будет

$$y_B = y_A + y'_A \frac{h}{2}.$$

2. Найдем значение производной  $y'$  по формуле (9.1) в точке  $B$ :

$$y'_B = f(x_B, y_B)$$

и проведем из точки  $A$  прямую

$$y = y_A + y'_B (x - x_A).$$

Ордината этой прямой в середине шага интегрирования будет уже ближе к истинному значению функции  $y$  в этой точке, так как наклон прямой получен не для начального значения ординаты  $y_A$ , а для некоторого ее среднего значения  $y_B$ .

Отметим значение ординаты новой прямой в середине шага интегрирования (точка  $C$ ):

$$y_C = y_A + y'_B \frac{h}{2}.$$

3. По уравнению (9.1) найдем значение производной в точке  $C$ :

$$y'_C = f\left(x_A + \frac{h}{2}, y_C\right).$$

Из точки  $A$  проведем прямую

$$y = y_A + y'_C (x - x_A)$$

и отметим ординату этой прямой в конце (точка  $D$ ) шага интегрирования  $h$ :

$$y_D = y_A + y'_C h.$$

4. По уравнению (9.1) найдем значение производной  $y'_D$  в точке  $D$ :

$$y'_D = f(x_A + h, y_D).$$

В результате построений 1—4 найдем, таким образом, значения производных функции  $y$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Отложим эти значения на графике рис. 4.1.

Как видно из графика, в точке с абсциссой  $x = x_A + \frac{h}{2}$  получены два значения производной  $y'$ , в то время как в действительности, конечно, каждой абсциссе должно соответствовать единственное значение производной  $y'$ . Это — следствие приближенности метода. Практически для абсциссы  $x = x_A + \frac{h}{2}$  следует принять среднее значение производной

$$y'_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (y'_B + y'_C) = y'_M.$$

Отложив на графике рис. 4.1 ординату  $y'_M$ , получим точку  $M$ . Будем считать, что кривая, изображающая зависимость

$$y' = y'(x),$$

должна проходить через точки  $A$ ,  $M$  и  $D$ . Проведем через эти три точки параболу, уравнение которой

$$y' = a + b(x - x_A) + c(x - x_A)^2. \quad (10.1)$$

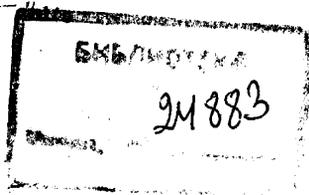
Значения коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  должны быть выбраны из того условия, что парабола проходит через точки  $A$ ,  $M$ ,  $D$ . Коэффициент  $a$ , очевидно,

$$a = y'_A.$$

Для определения коэффициентов  $b$  и  $c$  имеем два уравнения:

$$\frac{h}{2} b + \frac{h^2}{4} c = y'_M - y'_A,$$

$$hb + h^2c = y'_D - y'_A.$$



Решив эти уравнения, найдем

$$b = \frac{1}{h} (-y'_D + 4y'_M - 3y'_A),$$

$$c = \frac{2}{h^2} (y'_D - 2y'_M + y'_A).$$

Проинтегрируем теперь уравнение (10.1) в пределах от  $x = x_A$  до  $x = x_{A+h}$ . Значение этого интеграла представляет собой приращение искомой функции  $y$  при изменении  $x$  на величину  $h$ . Таким образом,

$$\Delta y = y_D - y_A = ah + \frac{b}{2} h^2 + \frac{c}{3} h^3. \quad (11.1)$$

Подставив в выражение (11.1) вместо  $a, b, c$  полученные для них выше выражения, после приведения подобных членов для общего случая ( $x_A = x_{n-1}$ ,  $x = x_{n-1} + h = x_n$ ) получим

$$\Delta y = y_n - y_{n-1} = \frac{h}{6} (y'_A + 4y'_M + y'_D) = \frac{h}{6} [y'_A + 2(y'_B + y'_C) + y'_D]. \quad (12.1)$$

Как видно из выражения (12.1), приращение искомой функции на шаге  $h$  при помощи описанных построений удалось представить через значения первых производных функции в четырех точках, лежащих в пределах шага интегрирования  $h$ .

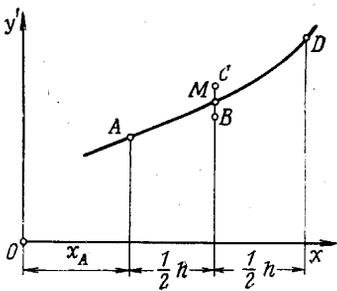


Рис. 4.1. Вспомогательный график  $y'(x)$  (метод Рунге — Кутта)

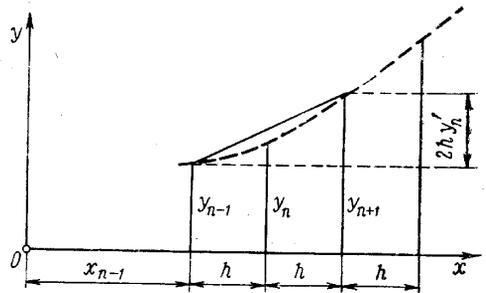


Рис. 5.1. К методу средней ординаты

Следует отметить, что интегрирование по методу Рунге — Кутта требует существенно большей затраты труда, чем по методу Эйлера: для каждого шага интегрирования при нахождении  $y$  приходится определять сначала четыре значения производных — четыре числа — и затем уже вычислять  $\Delta y$  по формуле (12.1). Поэтому метод Рунге — Кутта находит широкое применение в машинном интегрировании, а при интегрировании «вручную» применяется редко.

**Метод средней ординаты** (модифицированный метод Эйлера). Основные погрешности при интегрировании по методу Эйлера получаются вследствие того, что производной  $y'$  на всем шаге интегрирования приписывается ее значение в начале шага. Погрешность можно существенно уменьшить, если вместо начального значения производной взять ее значение в середине шага интегрирования.

Рассмотрим три соседних шага интегрирования:  $(n-1)$ -й,  $n$ -й и  $(n+1)$ -й (рис. 5.1). Значение функции  $y_{n+1}$  в начале  $(n+1)$ -го шага найдем по формуле

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hy'_n. \quad (13.1)$$

Определив значения производной  $y'$  и функции  $y$  в начале второго шага интегрирования  $x = x_0 + h$  при помощи формулы (13.1), можно найти значения функции  $y$  в начале третьего, четвертого и т. д. шагов интегрирования.

При пользовании описанным *методом средней ординаты* желательно вычислять значения  $y_1$  в начале второго шага интегрирования возможно более точным способом, например по методу Рунге — Кутта. При этом объем вычислительной работы возрастает только за счет вычислений в начале второго шага интегрирования, а степень точности результатов интегрирования заметно возрастает. Последовательность вычислений при пользовании методом средней ординаты такая.

1. Выбираем шаг интегрирования  $h$ , находя разумный компромисс между точностью и трудоемкостью расчета.

2. Находим значение ординаты  $y_1$  в начале второго шага интегрирования, пользуясь для этого по возможности точным методом (например Рунге — Кутта).

3. Находим значение производной  $y_1'$  в начале второго шага для значений  $x_1 = x_0 + h$ ,  $y_1$  по исходному дифференциальному уравнению.

4. По формуле (13.1) определяем значение ординаты  $y_2$  в начале третьего шага интегрирования и т. д.

Для суждения о степени точности при интегрировании рассмотренными методами численного интегрирования приведем результаты вычислений для простого дифференциального уравнения

$$y' = y + x$$

при начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  в интервале  $0 \leq x \leq 1$ .

Это уравнение легко интегрируется в квадратурах, так что результаты приближенного интегрирования по различным методам можно сравнить с точным решением

$$y = 2e^x - x - 1.$$

В табл. 1.1 приведены результаты вычислений точного решения, а также решений,

Таблица 1.1

| Метод интегрирования | Шаг интегрирования $h$ | $x$ | 0 | 0,3    | 0,5    | 0,7    | 1,0    | $\delta$ % | Число столбцов таблицы |
|----------------------|------------------------|-----|---|--------|--------|--------|--------|------------|------------------------|
| Точный               | —                      | $y$ | 1 | 1,3998 | 1,7974 | 2,3275 | 3,4365 | —          | —                      |
| Рунге—Кутта          | 0,1                    | $y$ | 1 | 1,3998 | 1,7974 | 2,3275 | 3,4365 | 0          | 40                     |
| Эйлера               | 0,1                    | $y$ | 1 | 1,362  | 1,721  | 2,197  | 3,188  | 8          | 10                     |
|                      | 0,05                   | $y$ | 1 | 1,381  | 1,759  | 2,260  | 3,307  | 4          | 20                     |
|                      | 0,025                  | $y$ | 1 | 1,390  | 1,777  | 2,292  | 3,367  | 2          | 40                     |
| По средней ординате  | 0,1                    | $y$ | 1 | 1,398  | 1,794  | 2,322  | 3,241  | 0,5        | 13                     |
|                      | 0,05                   | $y$ | 1 | 1,399  | 1,797  | 2,327  | 3,435  | 0,1        | 23                     |

полученных численными методами. Как видно из таблицы, результаты интегрирования по методу Рунге — Кутта практически полностью совпадают с результатами точного интегрирования. При этом, однако, объем вычислений получается значительным: во взятом примере требуется при шаге интегрирования  $h=0,1$  заполнить таблицу из 40 столбцов, так как для каждого  $x$  необходимо вычислять четыре значения производной  $y'$ .

Метод Эйлера при шаге интегрирования  $h=0,1$  в значении  $y$  при  $x=1,0$  приводит к погрешности  $\delta$ , равной 8% истинного значения. Уменьшение шага интегрирования до  $h=0,05$  увеличивает объем вычислений вдвое и уменьшает погрешность  $\delta$  до 4%. Даже при увеличении вычислительной работы в 4 раза ( $h=0,025$ ) погрешность получается все же значительной ( $\delta=2\%$ ).

Метод средней ординаты уже при шаге интегрирования  $h=0,1$  в величине  $y$  при  $x=1,0$  приводит к погрешности  $\delta$ , равной всего 0,5%, а при уменьшении интервала вдвое — к погрешности  $\delta$ , равной 0,1% истинного значения. При этом требуется заполнить таблицу в первом случае из  $10+3=13$  столбцов, а во втором случае — при уменьшении шага интегрирования вдвое — из 23.

Таким образом, для практического применения счета «вручную», если не требуется очень большая степень точности, можно рекомендовать метод средней ординаты.

**Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений.** Покажем, как следует применять описанные выше методы к численному интегрированию системы дифференциальных уравнений.

Пусть, например, имеется система двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями  $y(x)$  и  $z(x)$ :

$$y' = f_1(x, y, z), \quad z' = f_2(x, y, z)$$

и заданы начальные условия  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ .

Рассмотрим ход вычислений при интегрировании по методу Рунге — Кутта (как наиболее сложному из рассмотренных) на  $n$ -м шаге интегрирования: от  $x_{n-1} = x_0 + (n-1)h$  до  $x_n = x_0 + nh$ .

Значения  $y_{n-1}$  и  $z_{n-1}$  в начале рассматриваемого шага будем считать известными на основании выполненного ранее интегрирования.

Следуя изложенным выше правилам, вычислим значения необходимых для расчета производных.

Очевидно, в начале участка

$$y'_A = f_1(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}),$$

$$z'_A = f_2(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}).$$

Далее

$$y'_B = f_1(x_B, y_B, z_B),$$

$$z'_B = f_2(x_B, y_B, z_B),$$

где

$$x_B = x_{n-1} + \frac{h}{2},$$

$$y_B = y_{n-1} + \frac{h}{2} y'_A,$$

$$z_B = z_{n-1} + \frac{h}{2} z'_A.$$

Точно так же

$$y'_C = f_1(x_B, y_C, z_C),$$

$$z'_C = f_2(x_B, y_C, z_C),$$

где

$$y_C = y_{n-1} + \frac{h}{2} y'_B,$$

$$z_C = z_{n-1} + \frac{h}{2} z'_B.$$

Наконец,

$$y'_D = f_1(x_n, y_D, z_D),$$

$$z'_D = f_2(x_n, y_D, z_D),$$

где

$$y_D = y_{n-1} + h y'_C,$$

$$z_D = z_{n-1} + h z'_C.$$

В результате по формуле (12.1) найдем приращение функций  $y$  и  $z$  при перемещении на шаг интегрирования:

$$\Delta y = \frac{h}{6} [y'_A + 2(y'_B + y'_C) + y'_D], \quad (14.1)$$

$$\Delta z = \frac{h}{6} [z'_A + 2(z'_B + z'_C) + z'_D]. \quad (15.1)$$

Применяя формулы (14.1) и (15.1) на всем интервале интегрирования, начиная с первого шага, получим приближенную зависимость  $y(x)$  и  $z(x)$ .

Методы решения дифференциальных уравнений, естественно, не зависят от физического содержания процессов, описываемых этими уравнениями. Крупнейший ученый и инженер, выдающийся математик, механик и кораблестроитель А. Н. Крылов (1863—1945) очень образно охарактеризовал универсальность математического аппарата [33]: «Казалось бы, что может быть общего между расчетом небесных светил под действием притяжения к Солнцу и между качкой корабля на волнении, или между определением вековых неравенств в движении небесных тел и

крутильными колебаниями вала многоцилиндрового двигателя Дизеля, работающего на корабельный винт или электрогенератор? Между тем, если написать только формулы и уравнения без слов, то нельзя отличить, какой из этих вопросов решается: уравнения одни и те же».

Методы математического моделирования основываются на формальной тождественности дифференциальных уравнений, описывающих различные физические явления в оригинале и на модели. При математическом моделировании основой является математическое описание процесса, который уже потом реализуется при помощи специальной математической модели, т. е. вычислительной машины.

При интегрировании дифференциальных уравнений, в том числе и уравнений динамики, могут применяться счетно-решающие устройства двух типов: электронно-моделирующие (аналоговые вычислительные машины) и цифровые (машины дискретного счета).

Существующие *моделирующие установки* оперируют некоторыми физическими величинами (например напряжением электрического тока), которые связаны между собой определенными математическими зависимостями. Эти установки — аналоговые вычислительные машины, состоящие из отдельных решающих элементов, — основываются на последовательном и непрерывном выполнении элементарных математических операций. На таких установках можно решать сложные математические задачи, используя, например, такие простые электрические устройства, как усилители постоянного тока или потенциометры. Напряжение подается на вход группы решающих элементов, которые выполняют требуемые математические операции и дают на выходе соответствующие напряжения.

Аналоговые вычислительные машины приспособлены для работы с непрерывно изменяющимися входными данными. Наиболее распространенными установками являются электронные модели постоянного тока, состоящие из стандартных радиотехнических деталей. Эти установки обычно строятся по блочному принципу: каждый отдельный блок, выполняющий ту или иную математическую операцию (суммирование, интегрирование и т. д.), состоит из некоторого сочетания счетно-решающих элементов, определенным образом связанных между собой.

В качестве основного решающего элемента<sup>1</sup>, который может выполнять различные математические операции, в существующих электронно-моделирующих установках широко используются операционные усилители постоянного тока с большим внутренним коэффициентом усиления и с отрицательной обратной связью.

Эти решающие элементы позволяют получить линейную связь между величинами напряжения на входе и выходе. Однако при решении задач динамики полета, как упоминалось ранее, часто приходится иметь дело с нелинейными функциями независимого переменного. Введение нелинейности требует наличия в электронно-моделирующих установках специальных линейных решающих элементов, так называемых функциональных преобразователей, которые могут воспроизводить нелинейные функции одного или нескольких переменных.

Если задача содержит большое число нелинейностей, то, с одной стороны, возрастает сложность ее набора, а с другой, — увеличиваются погрешности, свойственные электронно-моделирующим установкам. Этого недостатка принципиально лишены *цифровые машины дискретного счета*.

Характерными свойствами цифровых машин является универсальность их применения, большая точность получаемых результатов и бы-

<sup>1</sup> В этой книге мы не останавливаемся на деталях устройства электронно-моделирующих установок, вопросах их эксплуатации и наладки. Сведения по таким вопросам можно получить, например, в работе [28].

стродействие. В основу интегрирования дифференциальных уравнений при помощи цифровых машин дискретного счета положена идея численного интегрирования дифференциальных уравнений, сводящая процессы интегрирования и дифференцирования к более простым арифметическим операциям: сложению, вычитанию, умножению и делению.

Выше было указано, что, используя достаточно точные методы численного интегрирования (например Рунге — Кутта) и уменьшая шаг интегрирования, можно получить результаты интегрирования со сколь угодно высокой степенью точности. При выполнении обоих указанных условий трудоемкость процесса численного интегрирования возрастает. Это является препятствием для повышения точности результатов численного интегрирования «вручную». При применении же быстродействующих машин дискретного счета, основанных на полной автоматизации вычислительного процесса при помощи электронных схем, которые работают за доли секунды, это препятствие полностью практически устраняется.

При применении цифровых машин для интегрирования систем дифференциальных уравнений используются наиболее точные методы численного интегрирования, причем интервалы интегрирования выбираются достаточно малыми.

В отличие от машин непрерывного действия, у которых исходные данные задаются посредством определенных физических величин, подлежащих измерению (например напряжение), в цифровых машинах дискретного счета исходные данные задачи представляются в кодированной форме, т. е. даются числами в цифровой записи.

Как отмечено выше, современные автоматические быстродействующие машины являются универсальными; они могут выполнять в соответствии с заданной программой любую последовательность арифметических действий. Для этого в каждой машине предусмотрены специальные схемы для нужных арифметических действий, выполняемых путем дачи одной или ряда команд. Команда изображается в машине в виде определенного числа. Помимо характера производимого действия (сложение, вычитание и т. д.), в команде также указываются и числа, с которыми должны быть произведены соответствующие действия. Последовательность таких команд и составляет программу вычисления, которая готовится заранее для каждой решаемой задачи вне машины и затем вводится в машину. Изменяя программу, на цифровой машине можно решать множество различных задач. Наиболее трудоемкая часть решения задачи на цифровой машине — это программирование, само же решение уравнений при готовой программе занимает незначительное время.

Программа вычислений для какой-либо задачи обычно состоит из основной программы, характерной для данной задачи, и ряда стандартных подпрограмм. Стандартные подпрограммы составляются заранее и дают решение общих этапов расчета, повторяющихся в рассматриваемой задаче (например нахождение элементарных или специальных функций, извлечение корней и т. д.).

Программа решения уравнений на цифровой машине дискретного счета и исходные данные задаются в виде перфорированных карт или лент, на которых в соответствующих местах пробиваются специальные отверстия (на специальных машинах-перфораторах). Правильность нанесения отверстий в свою очередь тщательно проверяется на вспомогательных машинах<sup>1</sup>.

Оба класса вычислительных машин, как аналоговые, так и цифровые, имеют самостоятельное значение и свою область применения. Одна-

<sup>1</sup> Подробно с устройством и действием цифровых вычислительных машин можно познакомиться, например, по книгам [16], [24].

ко в связи с проблемой необходимости обеспечения все более высокого быстродействия и точности счета приобретают значение на современном этапе развития вычислительной техники комбинированные аналого-цифровые устройства.

## § 2. Краткие сведения из векторной алгебры. Производная вектора во вращающейся системе координат

Напомним [34], [51], [52], что вектор  $\vec{R}$  вполне определяется своей величиной (модулем) и направлением. Скалярная величина (скаляр) вполне определяется числом  $S$ , измеряющим ее.

Векторы, параллельные одной прямой, либо лежащие на этой прямой, называются *коллинеарными*. Векторы, параллельные одной плоскости или лежащие в ней, называются *компланарными*. Векторы называются *равными*, если они имеют равные модули, коллинеарны и направлены в одну сторону. Векторы называются *свободными*, если они не

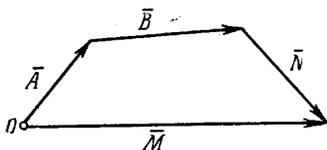


Рис. 6.1. К определению суммы векторов

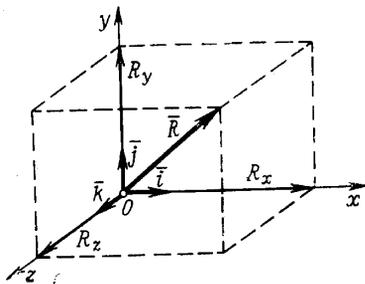


Рис. 7.1. Вектор  $\vec{R}$  в прямоугольной системе координат

связаны ни с какими материальными и геометрическими точками и их начало при параллельном переносе может быть помещено в любую точку пространства.

Суммой векторов  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ , ...,  $\vec{N}$  называется новый вектор

$$\vec{M} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \dots + \vec{N}.$$

Этот вектор  $\vec{M}$  замыкает ломаную линию, построенную из векторов  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ , ...,  $\vec{N}$ , таким образом, что начало каждого из последующих векторов совмещается с концом предыдущего вектора. Замыкающий вектор  $\vec{M}$  (сумма векторов) направлен из начала первого вектора  $\vec{A}$  к концу последнего вектора  $\vec{N}$  (рис. 6.1).

Всякий вектор в прямоугольной (декартовой) системе координат можно представить в виде следующей суммы (рис. 7.1):

$$\vec{R} = \vec{i}R_x + \vec{j}R_y + \vec{k}R_z, \quad (16.1)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  — единичные векторы (орты), т. е. векторы, модули которых равны единице, и  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  — проекции вектора  $\vec{R}$  на оси координат  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Различают скалярное и векторное произведения векторов.

Скалярным произведением двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  называют скаляр (число)  $S$ , величина которого равна произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B} = |A| |B| \cos \theta. \quad (17.1)$$

Скалярные произведения ортов будут:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1,$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0.$$

Скалярное произведение двух векторов в *декартовых координатах*, если через  $a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z$  обозначить проекции (компоненты) векторов  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  на оси  $Ox, Oy, Oz$ , будет:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k})(b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (18.1)$$

*Произведением вектора  $\bar{A}$  на скаляр (число)  $f$*  называется новый вектор  $\bar{C}$ , модуль которого равен модулю вектора  $\bar{A}$ , умноженному на абсолютное значение числа  $f$ , и коллинеарный вектору  $\bar{A}$ . При  $f > 0$  этот вектор направлен в одну сторону с вектором  $\bar{A}$ , при  $f < 0$  — в сторону, противоположную вектору  $\bar{A}$ .

*Векторное произведение* двух векторов  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  называют вектор  $\bar{R}$  с модулем, равным площади параллелограмма, построенного на векторах  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  (рис. 8.1), направленный перпендикулярно к плоскости параллелограмма так, что векторы  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  образуют правую систему координат.

Векторное произведение обозначают

$$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{R}.$$

Модуль (длина) вектора  $\bar{R}$  будет

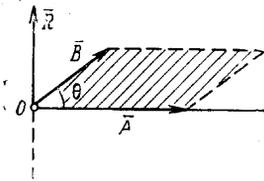
$$|R| = |A| |B| \sin \theta. \quad (19.1)$$

Векторные произведения ортов будут:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0,$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$$

Рис. 8.1. К определению векторного произведения



или на основании переместительного свойства векторного произведения

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}.$$

Векторное произведение в *декартовых координатах*, если  $a_x, b_x, a_y, b_y, a_z, b_z$  — проекции векторов  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  на оси  $Ox, Oy, Oz$ :

$$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \bar{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \bar{k}(a_x b_y - a_y b_x), \quad (20.1)$$

или, используя для записи символический определитель,

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (21.1)$$

Далее, при перестановке множителей векторное произведение меняет свое направление на противоположное, модуль при этом сохраняется:

$$\bar{A} \times \bar{B} = -(\bar{B} \times \bar{A}).$$

Для векторного произведения справедлива формула

$$(\bar{A} + \bar{B}) \times \bar{R} = \bar{A} \times \bar{R} + \bar{B} \times \bar{R}, \quad (22.1)$$

которую, применяя декартовы координаты и обозначая через  $r_x, r_y$  и  $r_z$  соответствующие проекции вектора  $\vec{R}$  на оси  $Ox, Oy, Oz$ , можно записать в виде

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix}. \quad (23.1)$$

Для двойного векторного произведения справедливо равенство

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix}.$$

Смешанным или скалярно-векторным произведением трех векторов  $\vec{A}, \vec{B}$  и  $\vec{C}$  называют скаляр (число)  $S_1 = (\vec{A} \times \vec{B}) \vec{C}$ , равный по объему параллелепипеда, построенному на этих векторах.

Смешанное произведение в декартовых координатах после применения формул как скалярного, так и векторного произведений имеет вид

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \vec{C} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (24.1)$$

Роль векторов, составляющих смешанное произведение, одинакова, и отсюда имеют место следующие равенства:

$$\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \vec{C}.$$

Производная по времени вектора  $\vec{R} = \vec{R}(t)$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\delta\vec{R}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad (25.1)$$

где

$$\frac{\delta\vec{R}}{\delta t} = \frac{dR_x}{dt} \vec{i} + \frac{dR_y}{dt} \vec{j} + \frac{dR_z}{dt} \vec{k}$$

и  $\vec{\omega}$  — вектор угловой скорости поворота вектора  $\vec{R}$ .

В частности, если рассматривать производную вектора скорости  $\vec{V}$ , то производная этого вектора, как известно, будет вектором ускорения

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{W}.$$

В дальнейшем для вывода уравнений движения летательного аппарата понадобятся выражения для скалярных составляющих вектора абсолютного ускорения по осям координат для различных систем. Такие формулы, как будет видно, можно получить, используя формулы производных векторов.

Остановимся несколько подробнее на определении производной вектора в неподвижной системе координат через производную вектора во вращающейся системе координат.

Рассмотрим систему координат  $Oxyz$ , начало которой  $O$  перемещается относительно некоторой неподвижной системы отсчета  $O_1x_1y_1z_1$  со скоростью  $\vec{V}_0$  и которая вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  (рис. 9.1).

Вектор  $\vec{V}_M$  абсолютной (относительно неподвижной системы отсчета) скорости точки  $M$ , движение которой в системе  $Oxyz$  определено радиусом-вектором  $\vec{\rho}$  и вектором относительной скорости  $\vec{V}_r$ , можно представить в виде

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \quad (26.1)$$

Для того чтобы получить выражение для ускорения точки  $M$ , возьмем производную по времени  $t$  от обеих частей векторного уравнения (26.1). Применяя изложенное выше правило (25.1) дифференцирования векторов, получим

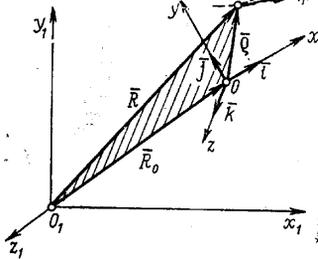


Рис. 9.1. К определению производной вектора во вращающейся системе координат

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_M}{dt} = & \frac{\delta\vec{V}_0}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{V}_0 + \frac{\delta\vec{V}_r}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \\ & + \frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left[ \frac{\delta\vec{\rho}}{\delta t} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \right] \end{aligned}$$

или, поскольку  $\frac{\delta\vec{\rho}}{\delta t} = \vec{V}_r$ ,

$$\frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{\delta\vec{V}_0}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{V}_0 + \frac{\delta\vec{V}_r}{\delta t} +$$

$$+ \frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t} \times \vec{\rho} + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}). \quad (27.1)$$

Формулу (27.1) можно переписать в следующем виде:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{\text{пер}} + \vec{W}_{\text{отн}} + \vec{W}_{\text{кор}}. \quad (28.1)$$

Здесь  $\vec{W}_a = \vec{W}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt}$  — абсолютное ускорение точки  $M$  (относительно неподвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ );

$\vec{W}_{\text{пер}} = \frac{d\vec{V}_{\text{пер}}}{dt}$  — полное переносное ускорение точки  $M$ , которое в свою очередь складывается из переносного ускорения поступательного движения подвижного начала  $O$ , т. е. равного  $\left( \frac{\delta\vec{V}_0}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{V}_0 \right)$ , и переносного ускорения, обусловленного вращением подвижной системы  $Oxyz$ , т. е. равного

$$\frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho});$$

$\vec{W}_{\text{кор}} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$  — поворотное или корiolисово ускорение, обусловленное взаимодействием переносного и относительного движений;

$\vec{W}_{\text{отн}} = \frac{\delta\vec{V}_r}{\delta t}$  — относительное ускорение точки  $M$  в системе  $Oxyz$ .

Представив векторы, входящие в формулу (28.1), в виде сумм

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \\ \bar{V}_r &= V_{rx}\bar{i} + V_{ry}\bar{j} + V_{rz}\bar{k}, \\ \bar{\omega} &= \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}, \\ \bar{V}_0 &= V_{0x}\bar{i} + V_{0y}\bar{j} + V_{0z}\bar{k},\end{aligned}$$

после раскрытия векторных произведений получим

$$\begin{aligned}\frac{\delta\bar{\omega}}{\delta t} \times \bar{\rho} &= \left( \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y \right) \bar{i} + \left( \frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z \right) \bar{j} + \left( \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x \right) \bar{k}, \\ \bar{\omega} \times \bar{V}_0 &= (\omega_y V_{0z} - \omega_z V_{0y}) \bar{i} + (\omega_z V_{0x} - \omega_x V_{0z}) \bar{j} + (\omega_x V_{0y} - \omega_y V_{0x}) \bar{k}, \\ \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) &= [\omega_x \omega_y y + \omega_x \omega_z z - x(\omega_y^2 + \omega_z^2)] \bar{i} + [\omega_x \omega_y x + \omega_y \omega_z z - y(\omega_x^2 + \omega_z^2)] \bar{j} + \\ &+ [\omega_x \omega_z x + \omega_y \omega_z y - z(\omega_x^2 + \omega_y^2)] \bar{k}, \\ \bar{\omega} \times \bar{V}_r &= (\omega_y V_{rz} - \omega_z V_{ry}) \bar{i} + (\omega_z V_{rx} - \omega_x V_{rz}) \bar{j} + (\omega_x V_{ry} - \omega_y V_{rx}) \bar{k}.\end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в формулу (28.1), получим скалярные составляющие вектора абсолютного ускорения точки  $M$  по осям координат подвижной системы<sup>1</sup>  $Oxyz$ :

$$\begin{aligned}W_x &= \frac{dV_{0x}}{dt} + \omega_y V_{0z} - \omega_z V_{0y} + \frac{d\omega_y}{dt} z - \frac{d\omega_z}{dt} y + \omega_x \omega_y y + \omega_x \omega_z z - \\ &- x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + \frac{dV_{rx}}{dt} + 2(\omega_y V_{rz} - \omega_z V_{ry}),\end{aligned}\quad (29.1)$$

$$\begin{aligned}W_y &= \frac{dV_{0y}}{dt} + \omega_z V_{0x} - \omega_x V_{0z} + \frac{d\omega_z}{dt} x - \frac{d\omega_x}{dt} z + \omega_x \omega_y x + \omega_y \omega_z z - \\ &- y(\omega_x^2 + \omega_z^2) + \frac{dV_{ry}}{dt} + 2(\omega_z V_{rx} - \omega_x V_{rz}),\end{aligned}\quad (30.1)$$

$$\begin{aligned}W_z &= \frac{dV_{0z}}{dt} + \omega_x V_{0y} - \omega_y V_{0x} + \frac{d\omega_x}{dt} y - \frac{d\omega_y}{dt} x + \omega_x \omega_z x + \\ &+ \omega_y \omega_z y - z(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{dV_{rz}}{dt} + 2(\omega_x V_{ry} - \omega_y V_{rx}).\end{aligned}\quad (31.1)$$

Формулы (29.1) — (31.1) справедливы при любом выборе подвижной системы координат  $Oxyz$ .

### § 3. Некоторые приложения матричного исчисления

*Матрицами* называются системы элементов или чисел, расположенных в виде прямоугольных таблиц, с которыми согласно определенным правилам можно производить алгебраические операции сложения, вычитания и умножения.

Матрица  $A$ , состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется *прямоугольной матрицей* порядка  $m \times n$  или просто  $(m, n)$  матрицей. Одна из форм записи матриц следующая:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.\quad (32.1)$$

<sup>1</sup> Напомним, что в (29.1)—(31.1)  $x, y, z$  — координаты точки  $M$  относительно начала координат подвижной системы  $Oxyz$ .

Числа  $a_{ij}$ , составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Первый индекс ( $i$ ) соответствует номеру строки, второй ( $j$ ) — номеру столбца. Операции над матрицами сводятся к операциям над их элементами.

Матрицу (32.1) можно сокращенно обозначать либо через  $\|a_{ij}\|$ , где  $i=1, 2, \dots, m$  и  $j=1, 2, \dots, n$ , либо просто одной буквой (например  $A, B, C$ ).

Матрица, состоящая из одного столбца ( $n=1$ ), называется *матрица-столбец* (вектор-столбец):

$$\left\| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \right\|$$

Матрица, состоящая из одной строки ( $m=1$ ), называется *матрица-строка* (вектор-строка)

$$\| a_1, a_2, \dots, a_n \|.$$

В частности, любой вектор  $R$   $k$ -мерного пространства может быть представлен в виде матрицы-столбца или матрицы-строки.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов  $n$ , называется *квадратной* матрицей порядка  $n$ :

$$A = \| a_{ij} \|_{n \times n}.$$

Квадратная матрица, все элементы которой равны нулю, кроме тех, которые расположены на главной диагонали, называется *диагональной* матрицей:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|.$$

*Единичной* матрицей называют диагональную матрицу, все элементы которой равны единице. Обозначают единичную матрицу через  $E$ . Ее роль в матричном исчислении такая же, как и роль числа 1 в алгебре.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей. Обозначается она символом 0 и играет в матричном исчислении такую же роль, какую играет 0 в алгебре.

Матрица — это только таблица, и смешивать ее с определителем нельзя. Определитель матрицы является числом и обозначается  $|A|$  или  $\det A$ , т. е.

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратная матрица с определителем, равным нулю, называется *вырожденной* или *особенной*.

*Минором матрицы*  $A$  называется определитель, который получается путем вычеркивания из матрицы одинакового числа строк и столбцов.

*Рангом матрицы*  $A$  называется наибольший из порядков миноров, отличных от нуля. Иначе говоря, если среди возможных миноров матрицы все миноры порядка  $(r+1)$  и выше равны нулю или не могут быть составлены, а минор порядка  $r$  отличен от нуля, то число  $r$  и будет рангом матрицы.

Пример вырожденной матрицы четвертого порядка с рангом  $r=1$ :

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & -3 \\ -6 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

*Алгебраическим дополнением* элемента  $a_{ij}$  в матрице  $A$  называется произведение минора элемента  $a_{ij}$  на величину  $(-1)^{i+j}$ .

Матрица  $A'$ , строками которой являются соответствующие столбцы матрицы  $A$ , называется *транспонированной* по отношению к матрице  $A$ .

Например, матрица

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

будет транспонированной по отношению к матрице

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Определим некоторые действия над прямоугольными матрицами: сложение и вычитание, умножение на действительное число, перемножение.

*Суммой* (разностью) двух прямоугольных матриц  $A$  и  $B$  одного и того же порядка называется матрица  $C$  того же порядка:

$$C = A \pm B,$$

элемент которой

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}.$$

Пример суммирования (вычитания) двух матриц:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm c_1 & a_2 \pm c_2 & a_3 \pm c_3 \\ b_1 \pm d_1 & b_2 \pm d_2 & b_3 \pm d_3 \end{vmatrix}.$$

Операция сложения (вычитания) матриц распространяется на случай любого числа матриц и подчиняется тем же законам, что и сложение (вычитание) скалярных величин.

Операция сложения матриц обладает переместительными и сочетательными свойствами, а именно:

1.  $A \pm B = B \pm A$ .
2.  $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$ .
3.  $A \pm (\mp A) = 0$ .
4.  $A \pm 0 = A$ ,

где  $A$ ,  $B$  и  $C$  — прямоугольные матрицы.

Умножение матрицы на действительное число  $l$  (скалярную величину) эквивалентно умножению на это число каждого элемента этой матрицы:

$$l \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} la_1 & la_2 & la_3 \\ lb_1 & lb_2 & lb_3 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

1.  $l(A \pm B) = lA \pm lB$ .
2.  $(l \pm \mu)A = lA \pm \mu A$ .
3.  $(l\mu)A = l(\mu A)$ .
4.  $1 \cdot A = A$ ,

где  $A$  и  $B$  — прямоугольные матрицы одного порядка, а  $l$  и  $\mu$  — числа.

*Произведением* двух прямоугольных матриц  $A = \|a_{ij}\|$  и  $B = \|b_{jk}\|$ , заданных в определенном порядке и связанных условием равенства числа столбцов первой числу строк второй, называется прямоугольная матрица  $C$ , число строк которой равно числу строк первой матрицы  $A$ , а число столбцов равно числу столбцов второй матрицы  $B$ .

Элементы матрицы  $C$  определяются по следующему правилу: элемент  $c_{ik}$ , стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца, равен

сумме произведений соответствующих элементов  $i$ -й строки первой матрицы  $A$  и  $k$ -го столбца второй матрицы  $B$ , т. е.

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk},$$

где  $i=1, 2, \dots, l$ ;  $k=1, 2, \dots, n$ ;

$$j=1, 2, \dots, m.$$

Умножение матриц не коммутативно, т. е. не зависит от порядка сомножителей. Пример умножения матриц ( $i=2, j=3$  и  $k=4$ ):

$$AB = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3, & a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3, & a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, & a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3, & b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3, & b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, & b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3 f_3 \end{vmatrix}$$

Операции умножения матриц обладают следующими свойствами:

1.  $(AB)C = A(BC)$ .
2.  $(A \pm B)C = AC \pm BC$ .
3.  $A(B \pm C) = AB \pm AC$

и распространяются на случай нескольких сомножителей.

Пример перемножения трех матриц:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2, & a_1 d_1 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2, & b_1 d_1 + b_2 d_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1 c_1 + a_2 c_2) e_1 + (a_1 d_1 + a_2 d_2) e_2, & (a_1 c_1 + a_2 c_2) f_1 + (a_1 d_1 + a_2 d_2) f_2, \\ (b_1 c_1 + b_2 c_2) e_1 + (b_1 d_1 + b_2 d_2) e_2, & (b_1 c_1 + b_2 c_2) f_1 + (b_1 d_1 + b_2 d_2) f_2. \end{vmatrix}$$

*Обратной матрицей* для квадратной матрицы  $A$  порядка  $n$  называется квадратная матрица  $A^{-1}$  того же порядка, обладающая следующим свойством:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где  $E$  — единичная матрица.

Матрица, обратная матрице произведения матриц  $A$  и  $B$ , равна произведению обратных матриц, взятых в обратном порядке:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Вычислять обратную матрицу  $A^{-1}$  можно следующим образом:

1. Транспонированная матрица  $A'$  записывается по отношению к исходной матрице  $A$ .
2. Каждый элемент транспонированной матрицы  $A'$  заменяется его алгебраическим дополнением.
3. Полученная матрица делится на определитель  $\Delta$  исходной матрицы  $A$ .

Приведем пример вычисления обратной матрицы.  
Имеется исходная матрица

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

с определителем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 15$$

Транспонированная матрица

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

После замены каждого элемента его алгебраическим дополнением получаем

$$\begin{vmatrix} -3 & +6 & -3 \\ -24 & +3 & +6 \\ +22 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

После деления на определитель  $\Delta$  находим обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -8/5 & 1/5 & 2/5 \\ 22/15 & -4/15 & -1/5 \end{vmatrix}$$

Матричное исчисление широко применяется при решении систем линейных уравнений в связи с тем, что оно позволяет производить записи в сжатой форме, удобной для практического применения. Кроме того, при помощи матричной записи удобно проводить ортогональные преобразования систем координат<sup>1</sup>.

В теории систем линейных уравнений вводится понятие *n*-мерного векторного пространства (см., например [34]). Матричное исчисление является для такого многомерного векторного пространства основным аналитическим аппаратом для изучения линейных операций.

Введение понятия векторного пространства связано с тем обстоятельством, что иногда для определения объекта (вектора на плоскости, вектора в пространстве, твердого тела в пространстве и т. п.) приходится задавать ряд действительных чисел, характеризующих его состояние.

Упорядоченную систему *n* чисел

$$\bar{x} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

называют *n*-мерным вектором, а числа  $a_i$  (при  $i = 1, 2, \dots, n$ ) — его компонентами.

Под *n*-мерным векторным пространством можно понимать совокупность всех *n*-мерных векторов, над которыми определены операции: сложение векторов и умножение вектора на скаляр.

Если имеется система векторов

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r \quad (r \geq 2),$$

то она называется *линейно зависимой* в том случае, если хотя бы один из перечисленных векторов является линейной комбинацией остальных векторов, входящих в систему. Это означает, что существуют числа  $\alpha, \beta, \dots, \delta$  (из поля  $k$ ), не равные одновременно нулю и отвечающие условию

$$\alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2 + \dots + \delta \bar{x}_r = 0.$$

<sup>1</sup> Более подробно по этому вопросу см. [52].

Примером линейной зависимости может быть зависимость вида

$$\bar{x}_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \bar{x}_2 - \dots - \frac{\delta}{\alpha} \bar{x}_r$$

(при условии, что  $\alpha \neq 0$ ).

Если линейную зависимость, отвечающую поставленному условию, подобрать не удается, то записанная выше система векторов будет *линейно независимой*.

#### § 4. Основные положения вариационного исчисления

Для того чтобы обеспечить экстремум какой-либо интегральной характеристики, являющейся результатом изменения состояния механической системы (например перемещения летательного аппарата), надо решить задачу об *оптимальном управлении*. Задачи подобного рода относятся к области теории оптимального управления, математической основой которого является вариационное исчисление.

Различают *прямые методы* решения вариационных задач, сводящиеся к отысканию некоторой минимизирующей последовательности, и *косвенные методы*, при пользовании которыми приходится решать краевую задачу для дифференциальных уравнений. Наиболее широкое распространение получили косвенные методы решения вариационных задач. В дальнейшем будут приведены в краткой форме основные положения вариационного исчисления, позволяющие применять эти методы для решения конкретных задач динамики полета.

Классическое вариационное исчисление оперирует открытой областью фазовых координат и управлений, когда на них не наложены никакие ограничения. На практике, однако, часто приходится встречаться с различными ограничениями, накладываемыми как на фазовые координаты, так и на управление. Для решения подобных задач математический аппарат классического вариационного исчисления непосредственно не применим<sup>1</sup>. Должны быть выдвинуты некоторые новые положения, к числу которых относятся, например, «принцип максимума» Л. С. Понтрягина, «принцип оптимальности», предложенный В. Ф. Кротовым [32], и т. д.

В последние годы внимание исследователей и инженеров привлекает новый подход к решению вариационных задач, предложенный американским ученым Р. Беллманом [5]. Если в классических методах вариационного исчисления приходится иметь дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями, то в методе Беллмана их место занимает дифференциальное уравнение в частных производных. Переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнению в частных производных усложняет задачу, но в этом случае решается более общая задача о построении синтеза оптимальных управлений.

Ограниченный объем книги не позволяет рассмотреть здесь все упомянутые вопросы; поэтому в дальнейшем будут рассмотрены главным образом методы решения простейших вариационных задач, основанные на применении косвенных методов вариационного исчисления.

Движение механической системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\dot{y}_i = f_i(t, y_j, u_k) \quad (33.1)$$

$(i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, r).$

При этом, как видно из (33.1), число неизвестных функций  $y_j$  равно числу уравнений, так что неизвестные функции  $u$  являются «лишними» и могут быть выбраны из других соображений, например из условия оптимизации какого-либо критерия, характеризующего состояние системы.

Входящие в уравнение (33.1) функции  $y_j(t)$  характеризуют изменение состояния исследуемого объекта в каждый момент времени  $t$  и называются *фазовыми координатами*. В задачах динамики, например, фазовыми координатами являются геометрические координаты, определяющие положение летательного аппарата, его масса, составляющие линейной и угловой скоростей по осям координат и т. д.

Для сокращения записи фазовые координаты можно представить как скалярные составляющие некоторого вектора состояния  $\bar{Y}(t)$ , называемого *фазовым вектором*.

Если бы в уравнении (33.1) функции  $u_k$  отсутствовали, то система этих уравнений была бы замкнутой: число неизвестных в точности равнялось бы числу уравнений. Решение такой замкнутой системы уравнений было бы единственным при заданных началь-

<sup>1</sup> Для того чтобы воспользоваться классическими методами, надо ввести дополнительно новые переменные (о конкретном применении этого приема см. стр. 54). Это позволяет перейти к операциям с открытой областью фазовых координат и управлений.

ных условиях, и, следовательно, возможность оптимизации отсутствовала бы. Оптимизация возможна лишь в том случае, когда в уравнения (33.1) входит некоторое количество «лишних» функций  $u_k$ , которые называют *управляющими функциями* или просто *управлениями*.

Управления  $u_k$  также удобно считать скалярными составляющими некоторого *управляющего вектора*  $U(t)$ .

Под *фазовым пространством* исследуемого объекта понимают такое  $n$ -мерное пространство, в котором в виде точек изображаются фазовые состояния объекта. Если состояние исследуемого объекта характеризуется только двумя фазовыми координатами, то фазовое пространство превращается в *фазовую плоскость*.

Задав начальное фазовое состояние и выбрав закон управления, можно однозначно определить движение объекта, т. е. найти в фазовом пространстве *фазовую траекторию*.

В технике приходится встречаться с двумя группами задач. К первой группе *задач анализа* относятся такие, в которых по заданному закону управления требуется найти фазовую траекторию. Вторую группу задач составляют *задачи синтеза*, в которых отыскивается закон управления, обеспечивающий реализацию необходимой (например оптимальной) фазовой траектории.

Сделав эти общие замечания, перейдем к изложению правил пользования вариационными методами.

Если задана некоторая дифференцируемая функция  $y = y(t)$ , где  $t$  — независимая переменная, и требуется найти экстремум этой функции, то, как известно из дифференциального исчисления, необходимо взять производную от функции  $y$  по  $t$  и приравнять ее нулю:

$$\dot{y}(t) = 0.$$

Далее нужно решить это уравнение и, убедившись, что решение дает экстремум функции (например, оценив величину второй производной  $\ddot{y}$ ), подставить найденное  $t_0$  в выражение искомой функции и получить экстремальное (минимальное или максимальное) значение функции. Подобным же образом решается задача об экстремуме функции нескольких независимых переменных.

Когда говорят о функции независимого переменного, то это значит, что каждому *численному* значению независимого переменного (аргумента) соответствует определенное *число*.

В вариационном исчислении решается задача не об экстремуме функции, а об экстремуме функционала. Говорят, что задан функционал, если каждой *функции* (геометрически — каждой кривой) соответствует *определенное число*. Таким образом, функционал — это функция, в которой роль независимого переменного (или нескольких независимых переменных) играет другая функция (одна или несколько).

Поясним смысл термина «функционал» на следующем простом примере. Пусть точка перемещается в плоскости  $(x, y)$ , причем для каждой пары значений ее координат  $(x, y)$  величина скорости перемещения определена и не зависит от направления движения:

$$v = v(x, y).$$

Пусть перемещение происходит по кривой  $l$  из положения 1  $(x_1, y_1)$  в положение 2  $(x_2, y_2)$ . Тогда время перемещения из положения 1 в положение 2 будет

$$T = \int_l \frac{ds}{v(x, y)}$$

или, поскольку  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ,

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx.$$

Каждой кривой  $l$ , соединяющей точки 1 и 2, т. е. каждой функции  $y(x)$ , соответствует свое время перемещения  $T$ . Следовательно, время перемещения или, что то же, интеграл

$$J = \int_l \frac{ds}{v(x, y)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{v(x, y)} dx,$$

величина которого зависит от вида траектории (от вида функции  $y(x)$ ), будет функционалом, зависящим от  $l$  (от  $y(x)$ ).

Изменяя кривую  $l$ , по которой перемещается точка, мы будем изменять и значение функционала  $J$ . Среди всех возможных кривых  $l$  некото-

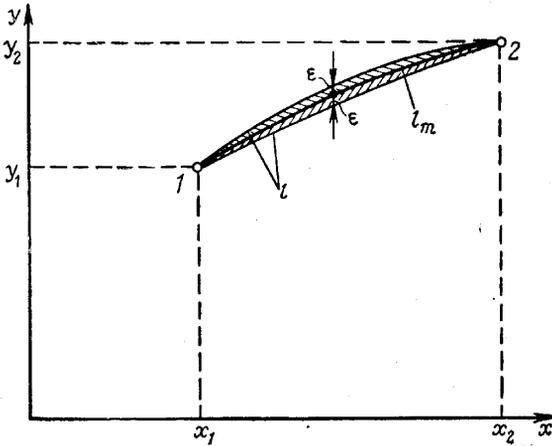


Рис. 10.1. К понятию об экстремуме функционала

определяются следующим образом. Если обозначить  $l_m$  кривую, дающую функционалу экстремум, то говорят о  $\epsilon$ -близости нулевого порядка кривых  $l$  к кривой  $l_m$ ; при этом кривые  $l$  не выходят за пределы заштрихованной на рис. 10.1 области, границы которой отстоят на расстоянии  $\pm \epsilon$  от основной кривой  $l_m$ .

Если, кроме того, производные кривых  $\dot{y}_l$  отличаются от производной основной кривой  $\dot{y}_{l_m}$  не больше, чем на величину  $\epsilon$ , то говорят об  $\epsilon$ -близости первого порядка (рис. 11.1) и т. д.

В том случае, когда ограничение по близости кривых не ставится, т. е. когда рассматриваются все кривые в области

$$(x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2),$$

экстремум называют *абсолютным*. В дальнейшем будем пользоваться только понятием относительного экстремума, который будем называть просто экстремумом.

Итак, когда мы будем говорить об экстремуме функционала, это значит, что, помимо рассматриваемого, возможно существование и других экстремумов, причем ординаты кривых, дающих эти экстремумы, отличаются от ординат основной кривой больше чем на  $\epsilon$ . Аналогично в дифференциальном исчислении, когда говорят об экстремуме функции  $y = y(t)$ , это значит, что возможны и другие экстремумы этой функции при значениях переменной  $t$ , выходящих за пределы  $(t_m \pm \epsilon)$  (рис. 12.1).

Заметим, что функции  $y(t)$ , среди которых ищут функцию, дающую экстремум некоторому функционалу  $J$ , обычно подчиняются некоторым *дополнительным* условиям, связанным с самим существом поставленной задачи. К числу таких дополнительных условий относится, например,

решенной определенной кривой  $l_m$  будет (при некоторых условиях) соответствовать экстремум функционала  $J$ . При этом функционал на кривой  $l_m$  (если она существует) достигает наибольшего (или наименьшего) значения по сравнению со всеми его значениями, соответствующими другим кривым, близким к  $l_m$ .

Такой экстремум называют *относительным*; этим названием подчеркивается, что речь идет о семействе кривых, близких к кривой  $l_m$ , дающей экстремум функционалу. Близкие кривые  $l$

непрерывность функций  $y(t)$  на рассматриваемом интервале или непрерывность на интервале  $t$  этих функций и их нескольких производных и т. д. Поэтому при отыскании экстремали обычно принято оговаривать *класс рассматриваемых функций*. Например, функция  $y(t)$  при  $(t_1 \ll t \ll t_2)$  принадлежит *классу  $C_n$* , если в рассматриваемом замкнутом интервале  $[t_1, t_2]$ , в котором ищется экстремаль, эта функция  $y(t)$  непрерывна вместе с первыми  $n$ -производными и т. д.

Пока мы накладываем условие непрерывности на экстремаль  $y(t)$  вместе с несколькими ее производными в рассматриваемом интервале  $t$ . В конце главы рассмотрен и случай таких решений, когда производные функции  $y(t)$  в некоторых точках терпят разрывы.

Как отмечено ранее, если дифференцируемая функция  $y(t)$  независимого переменного  $t$  при некотором значении  $t=t_m$  имеет экстремум, то необходимым условием экстремума является равенство нулю производной  $\dot{y}(t)$  или, что то же, дифференциала  $dy$  этой функции при  $t=t_m$ . В вариационном исчислении роль независимого переменного играет

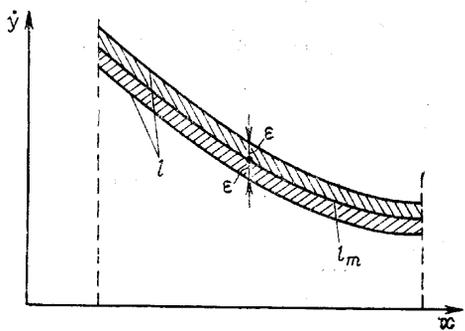


Рис. 11.1. К понятию о  $\epsilon$ -близости первого порядка

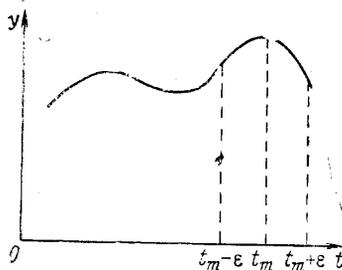


Рис. 12.1. К понятию об экстремуме функции

функция (некоторая кривая). Поэтому вместо приращения аргумента (независимого переменного) надо рассматривать изменение функции  $y(t)$ .

Рассмотрим следующий простой функционал:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y(t), \dot{y}(t)] dt,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  — фиксированные числа и допустимые  $y(t)$  проходят через две заданные точки  $y_1 = y(t_1)$  и  $y_2 = y(t_2)$  (вариационная задача с фиксированными граничными условиями).

Каждой кривой  $y(t)$  соответствует определенное значение функционала  $J$ . Пусть экстремум функционала достигается на кривой  $y_m(t)$ . Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых

$$y(t) = y_m(t) + \alpha \eta(t), \tag{34.1}$$

где  $\eta(t)$  — непрерывная и дифференцируемая внутри интервала  $(t_1, t_2)$  функция, равная нулю на концах интервала;  $\alpha$  — некоторый малый параметр, изменяющийся в окрестностях нуля, т. е.

$$(-\epsilon) < \alpha < (+\epsilon).$$

Для кривых семейства (34.1) рассматриваемый функционал будет иметь вид

$$J(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y_m(t) + \alpha \eta(t), \dot{y}_m(t) + \alpha \dot{\eta}(t)] dt. \tag{35.1}$$

Функцию  $\delta y = \alpha \eta(t)$  называют *вариацией функции*  $y(t)$ .

Очевидно, что определенный интеграл (35.1) при фиксированных  $y_m(t)$  и  $\eta(t)$  будет функцией параметра  $\alpha$ . При  $\alpha=0$ , по условию, кривая семейства (34.1) дает экстремум интегралу  $J$ . Поэтому при  $\alpha=0$  (если  $J(\alpha)$  — дифференцируемая функция) приходим к *необходимому условию экстремума функционала*

$$J'(0)d\alpha=0 \text{ или } dJ(0)=0.$$

Дифференциал функционала, определенный таким образом, называют *первой вариацией функционала* и обозначают символом  $\delta J$ . Следовательно, необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его первой вариации:

$$\delta J=0.$$

Если взять производную по  $\alpha$  от интеграла (35.1) и затем полученное выражение проинтегрировать по частям, то можно получить развернутое выражение первой вариации функционала:

$$\delta J = [F^y \delta y]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( F^y - \frac{dF^y}{dt} \right) \delta y dt. \quad (36.1)$$

При фиксированных граничных условиях вариации  $\delta y$  на концах интегрирования равна нулю, и на основании известной леммы вариационного исчисления приходим к уравнению Эйлера<sup>1</sup>, являющемуся необходимым условием экстремума функционала и вытекающему из условия равенства нулю первой вариации, т. е.

$$F^y - \frac{dF^y}{dt} = 0. \quad (37.1)$$

В более общем случае, когда функционал содержит несколько (например  $n$ ) функций независимого переменного, т. е.

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y_1(t), \dot{y}_1(t), y_2(t), \dot{y}_2(t), \dots, y_n(t), \dot{y}_n(t)] dt,$$

вместо одного уравнения Эйлера получается система уравнений Эйлера

$$F^{y_1} - \frac{dF^{\dot{y}_1}}{dt} = 0; \quad F^{y_2} - \frac{dF^{\dot{y}_2}}{dt} = 0, \quad \dots, \quad F^{y_n} - \frac{dF^{\dot{y}_n}}{dt} = 0, \quad (38.1)$$

т. е. число уравнений Эйлера равно числу функций  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), входящих в выражение функционала.

Из теории функций известно, что одного условия  $dy=0$  еще недостаточно для существования экстремума; точно так же и условия  $\delta J=0$  еще недостаточно для существования экстремума функционала. Кроме того, должны выполняться еще и достаточные условия существования экстремума функционала.

При определении экстремума функции таким достаточным условием является, например, условие (рис. 13.1)

$$d^2y \neq 0.$$

Существуют достаточные условия экстремума функционала, связанные со второй вариацией функционала<sup>2</sup>, аналогичной второму дифференциалу функции.

Анализ достаточных условий существования экстремума функционала оказывается в большинстве случаев значительно сложнее, чем анализ необходимого условия. В силу ограниченности объема книги мы не останавливаемся здесь на этом вопросе, подробно рассматриваемом в курсе вариационного исчисления.

Итак, в дальнейшем будут исследоваться только необходимые условия существования экстремума функционала, которые сводятся к выполнению равенства

$$\delta J=0.$$

Каждое из уравнений Эйлера (38.1) можно представить в несколько иной форме, если взять полные производные от  $F^{\dot{y}_1}, F^{\dot{y}_2}, \dots, F^{\dot{y}_n}$  по  $t$ . Так, например,

$$\frac{d}{dt} F^{\dot{y}_1} = F^{\dot{y}_1 t} + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_1 y_i} \dot{y}_i + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_1 \dot{y}_i} \ddot{y}_i,$$

<sup>1</sup> Уравнение Эйлера было опубликовано впервые в 1744 г.

<sup>2</sup> Подробнее по этому вопросу см. [6], [15], [32], [35], [49].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F^{\dot{y}_2} &= F^{\dot{y}_2 t} + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_2 y_i} \dot{y}_i + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_2 \dot{y}_i} \ddot{y}_i, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt} F^{\dot{y}_n} &= F^{\dot{y}_n t} + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_n y_i} \dot{y}_i + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_n \dot{y}_i} \ddot{y}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо (38.1) уравнения Эйлера можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_1 \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_1 y_i} \dot{y}_i + F^{\dot{y}_1 t} - F^{y_1} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_2 \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_2 y_i} \dot{y}_i + F^{\dot{y}_2 t} - F^{y_2} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_n \dot{y}_i} \ddot{y}_i + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_n y_i} \dot{y}_i + F^{\dot{y}_n t} - F^{y_n} &= 0. \end{aligned} \right\} (39.1)$$

Как видно из (39.1), уравнения Эйлера представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка. Решения  $n$  таких уравнений будут содержать  $2n$  произ-

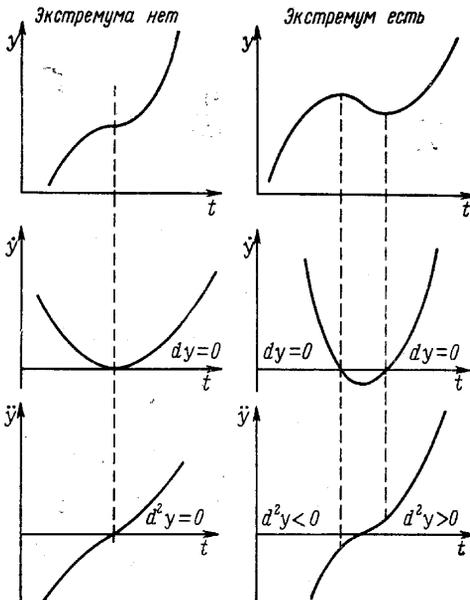


Рис. 13.1. К определению экстремума функции

вольных постоянных, значения которых найдутся по  $2n$  заданным значениям искомым функций

$$y_i(t_1), y_i(t_2) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

в начале и в конце промежутка интегрирования. Этим обеспечивается удовлетворение граничных условий задачи.

Из уравнений Эйлера можно получить полезное следствие

$$\frac{d}{dt} (F - \dot{y}_1 F^{\dot{y}_1} - \dot{y}_2 F^{\dot{y}_2} - \dots - \dot{y}_n F^{\dot{y}_n}) = F^t$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( F - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i F^{\dot{y}_i} \right) = F^t. \quad (40.1)$$

Действительно, выполняя дифференцирование в левой части (40.1), получим

$$F^t + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_i} \dot{y}_i + \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_i \ddot{y}_i} \ddot{y}_i - \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_i \ddot{y}_i} \ddot{y}_i - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \frac{d}{dt} F^{\dot{y}_i} = F^t,$$

откуда видно, что это равенство выполняется при выполнении условий (38.1).

Интегральные кривые уравнений Эйлера

$$y_i = y_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (41.1)$$

т. е. кривые, получающиеся в результате интегрирования уравнений Эйлера, как было сказано ранее, называются *экстремалиями*.

Итак, экстремум функционала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y_i(t), \dot{y}_i(t)] dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

может достигаться только на экстремалиях.

Для нахождения интегральной кривой, реализующей экстремум функционала  $J$ , надо проинтегрировать уравнения Эйлера и определить произвольные постоянные, входящие в общее решение этих уравнений, используя условия на границе  $y_i(t_1) = y_{i1}$  и  $y_i(t_2) = y_{i2}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Для дифференциального уравнения (37.1), являющегося дифференциальным уравнением второго порядка, уравнение экстремали имеет вид

$$y = y(t, c_1, c_2),$$

т. е. содержит две произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , которые можно определить из граничных условий.

Рассмотрим *частные случаи уравнений Эйлера*, имеющие важное значение для исследования задач динамики полета, на примере функции вида

$$F[t, y(t), \dot{y}(t)],$$

причем переход к более общему случаю

$$F[t, y_i(t), \dot{y}_i(t)] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

не представляет сложности.

1. Подынтегральная функция  $F$  не содержит переменной  $y$ , т. е. функционал имеет вид

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, \dot{y}(t)] dt. \quad (42.1)$$

В этом случае, очевидно, частная производная функции  $F$  по  $y$  равна нулю ( $F_y = 0$ ) и уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{dF^{\dot{y}}}{dt} = 0.$$

Первый интеграл этого уравнения получается сразу:

$$F^{\dot{y}}(t, \dot{y}) = \text{const} = c_1. \quad (43.1)$$

Уравнение (43.1) является дифференциальным уравнением первого порядка, не содержащим  $y$ ; если оно может быть разрешено относительно производной  $y$ :

$$\dot{y} = f(t, c_1),$$

то оно интегрируется до конца:

$$y = y(t, c_1, c_2).$$

2. Подынтегральная функция  $F$  не содержит в явном виде независимой переменной  $t$ , т. е. функционал имеет вид

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[y(t), \dot{y}(t)] dt. \quad (44.1)$$

В этом случае частная производная

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

и первый интеграл уравнения Эйлера, как это следует из (40.1), имеет вид

$$F - \dot{y}F_{\dot{y}} = \text{const} = c_1. \quad (45.1)$$

Поскольку уравнение (45.1) первого порядка и не содержит явно  $t$ , его можно проинтегрировать до конца, если удастся разрешить его относительно производной  $\dot{y}$ . В этом случае получим

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, c_1), \\ t &= \int \frac{dy}{f(y, c_1)} + c_2 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$y = y(t, c_1, c_2).$$

3. Подынтегральная функция  $F$  не содержит производной  $\dot{y}$ . В этом случае частная производная

$$F_{\dot{y}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

и уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y(t, y) = 0, \quad (46.1)$$

т. е. представляет собой не дифференциальное, а *конечное* уравнение. Решение такого уравнения не содержит произвольных постоянных, при помощи которых можно удовлетворить заданным граничным условиям; экстремаль в этой *вырожденной задаче* в общем случае не будет проходить через заданные граничные точки. Таким образом, в этом случае вариационная задача не имеет решения в классе непрерывно дифференцируемых функций, однако в классе кусочно-гладких функций решение может быть найдено, как это будет видно из дальнейшего.

4. Вариационная задача может не иметь смысла вообще, если уравнения Эйлера удовлетворяются тождественно. Так, если функция  $F$  имеет вид

$$F = F_0(t, y) + \dot{y}F_1(t, y),$$

то, как это легко проверить, уравнение Эйлера будет

$$F_1^t = F_0^y.$$

Если структура функций  $F_0$  и  $F_1$  такова, что

$$F_1^t \equiv F_0^y,$$

то уравнение Эйлера превращается в тождество, и функционал получается не зависящим от пути перемещения из начальной точки в конечную: вариационная задача не имеет смысла.

## § 5. Различные вариационные задачи. Вариационная задача в форме Майера

До сих пор предполагалось, что на функцию  $y(t)$ , дающую экстремум функционалу, не наложены какие-либо дополнительные условия. Экстремум в этом случае называют *безусловным*.

Рассмотрим теперь несколько иную задачу, которую формулируем следующим образом.

Найти экстремум функционала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y(t), \dot{y}(t)] dt \quad (47.1)$$

при условии, что другой функционал

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} G[t, y(t), \dot{y}(t)] dt = \text{const} = c. \quad (48.1)$$

В функционалах (47.1) и (48.1) заданы  $t_1, t_2, y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2$ , а также функции  $F$  и  $G$ .

Задачи этого типа называют *изопериметрическими*. Это название происходит от одной частной задачи, в которой среди всех линий заданной длины требуется найти такую, которая ограничивала бы наибольшую площадь.

Решение изопериметрической задачи сводится к составлению уравнений Эйлера, как и в случае задачи на безусловный экстремум, но только не для функционала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F dt,$$

а для вспомогательного функционала

$$J_B = \int_{t_1}^{t_2} H dt, \quad (49.1)$$

где

$$H = F + \lambda G \quad (50.1)$$

и  $\lambda$  — некоторая постоянная, подлежащая определению.

Составив по общим правилам уравнение Эйлера и решив его, получим две произвольные постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , так как это уравнение в общем случае есть дифференциальное уравнение второго порядка. Таким образом, в результате решения изопериметрической задачи получим три произвольные постоянные:  $c_1, c_2$  и  $\lambda$ , которые определяются из двух граничных условий

$$y(t_1) = y_1, \quad y(t_2) = y_2$$

и из изопериметрического условия (48.1).

Приведенные выше выражения относились к случаю простейшего функционала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(t, y(t), \dot{y}(t)) dt$$

при наличии одной изопериметрической связи (48.1).

В более общем случае функционала, содержащего  $n$  функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y_i(t), \dot{y}_i(t)] dt \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и при наличии любого числа  $k$  изопериметрических связей вспомогательный функционал записывается в виде

$$J_B = \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( F + \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i \right) dt, \quad (51.1)$$

а число уравнений Эйлера равно числу  $n$  функций  $y_1, y_2, \dots$ . В этом случае будет  $(2n+k)$  постоянных, которые найдутся из  $2n$  граничных условий и  $k$  изопериметрических условий.

Отметим одно важное обстоятельство. Совершенно очевидно, что решение изопериметрической задачи не изменится, если вместо принятого выше выражения подынтегральной функции вспомогательного функционала (49.1) положить

$$H' = \lambda_1 F + \lambda_2 G,$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — постоянные.

Так как в выражение для  $H'$  функции  $F$  и  $G$  входят симметрично, то вместо задачи определения экстремума функционала (47.1) при условии (48.1) можно решать задачу определения экстремума функционала (48.1) при условии, что функционал (47.1) равен постоянной величине. Это частная формулировка *принципа взаимности*. Так, например, задача о максимуме расстояния, которое пролетает летательный аппарат при заданном расходе топлива, эквивалентна задаче о минимуме расхода топлива на заданном расстоянии.

Принципом взаимности иногда удобно пользоваться при решении различных практических задач, как это будет видно из дальнейшего.

**Задача на условный экстремум (задача Лагранжа).** При расчете траекторий летательных аппаратов наиболее часто встречается задача на *условный экстремум*, которая формулируется следующим образом. Найти функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , дающие экстремум функционалу

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y_i(t), \dot{y}_i(t)] dt \quad (52.1)$$

при заданных граничных условиях

$$y_i(t_1) = y_{i1}; \quad y_i(t_2) = y_{i2} \quad (53.1)$$

при условии, что на движение системы наложено некоторое число  $m$  *дополнительных связей*

$$\Phi_j[t, y_i(t), \dot{y}_i(t)] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m). \quad (54.1)$$

Отметим, что вариационная задача на условный экстремум может быть поставлена *только в том случае, если число  $m$  дополнительных связей меньше числа  $n$  неизвестных функций*, так как только в этом случае можно свободно варьировать  $(n-m)$  функций независимого переменного. Оптимальный выбор этих произвольных функций и является результатом решения вариационной задачи. Здесь видно существенное отличие задачи на условный экстремум от изопериметрической задачи, в которой число изопериметрических связей не ограничивается.

Решение задачи о нахождении экстремума функционала (52.1) при наличии связей (54.1) сводится к составлению и решению  $n$  уравнений Эйлера, но только не для основного, а для вспомогательного функционала

$$J_B = \int_{t_1}^{t_2} H dt \quad (55.1)$$

с подынтегральной функцией (функцией Лагранжа)

$$H = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \Phi_j. \quad (56.1)$$

Уравнения Эйлера необходимо решать совместно с уравнениями связей (например уравнениями движения летательного аппарата), так что всего получается  $(n+m)$  дифференциальных уравнений, содержащих  $(n+m)$  неизвестных:  $n$  неизвестных функций

$y_i(t)$  и  $m$  неизвестных  $\lambda_j(t)$ , которые называются *множителями Лагранжа* и в отличие от изопериметрической задачи не постоянны, а являются функциями независимой переменной  $t$ .

Составляя для вспомогательного функционала с подынтегральной функцией (56.1) уравнения Эйлера<sup>1</sup>, получим  $n$  уравнений вида<sup>2</sup>

$$\frac{dF^{\dot{y}_i}}{dt} + \sum_{j=1}^m \left( \lambda_j \Phi_j^{\dot{y}_i} + \lambda_j \frac{d\Phi_j^{\dot{y}_i}}{dt} \right) = F^{y_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi_j^{y_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (57.1)$$

Связи (54.1) могут быть голономными и неголономными.

Неголономные связи содержат как сами неизвестные функции  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , так и их производные

$$\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_n(t).$$

Именно этому случаю соответствует приведенная в тексте форма связей (54.1). В случае неголономных связей, как видно из (57.1), неизвестные множители Лагранжа  $\lambda_j$  входят в уравнения Эйлера вместе со своими первыми производными  $\dot{\lambda}_j$ .

Голономные связи содержат только сами неизвестные функции  $y_i(t)$  при ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и не содержат их производных. В этом частном случае производные

$$\Phi_j^{\dot{y}_i} \equiv 0$$

и, как видно из (57.1), производные множителей Лагранжа исчезают. Следовательно, в этом случае система будет состоять из  $n$  дифференциальных и  $m$  конечных уравнений. Число постоянных интегрирования будет равно  $2n$ , и они найдутся из  $2n$  граничных условий (53.1).

Несколько сложнее обстоит дело в случае неголономных связей, когда уравнения (54.1) содержат производные  $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ .

Остановимся на этом случае. Введем новые переменные

$$z_i = \dot{y}_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (58.1)$$

Тогда связи (54.1) становятся голономными и принимают вид

$$\Phi_j(t, y_i, z_i) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (59.1)$$

Уравнения Эйлера (57.1) содержат неизвестные величины

$$y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i, \lambda_j, \dot{\lambda}_j.$$

После подстановки новых переменных получим преобразованные уравнения Эйлера, которые будут содержать

$$y_i, z_i, \dot{z}_i, \lambda_j, \dot{\lambda}_j,$$

т. е. получим  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $z$  и  $\lambda$ , содержащих  $(2n+m)$  неизвестных:

$$y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m.$$

Если уравнения связей (59.1) разрешимы относительно каких-либо  $m$  неизвестных, то, подставляя выражения этих неизвестных в преобразованные уравнения Эйлера, получим систему  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка по  $z$  и  $\lambda$ , содержащую  $2n$  неизвестных:  $(2n-m)$  неизвестных  $y$  и  $z$  и  $m$  неизвестных  $\lambda$ .

Исключив из (59.1)  $m$  функций и подставив их в (58.1), получим  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка с теми же  $(2n-m)$  неизвестными  $y$  и  $z$ , что и выше. Таким образом, вместе с уравнениями Эйлера всего получим  $2n$  дифференциальных уравнений первого порядка (относительно  $y, z, \lambda$ ), содержащих  $2n$  неизвестных.

Решение этой системы  $2n$  дифференциальных уравнений будет содержать  $2n$  произвольных постоянных, которые найдутся из  $2n$  граничных условий (54.1).

**Естественные граничные условия.** В задачах, которые рассматривались до сих пор, граничные условия были фиксированы, т. е. на концах промежутка интегрирования  $t_1, t_2$  значения  $y_{i1}, y_{i2}$  были заданы; такие задачи называются задачами с *закрепленными концами*.

<sup>1</sup> Эти уравнения часто называют уравнениями Эйлера — Лагранжа.

<sup>2</sup> Далее вместо  $y(t), \dot{y}(t), \dots, \Phi(t), \dots, \lambda(t)$  и т. д. будем пользоваться обозначениями  $y, \dot{y}, \dots, \Phi, \dots, \lambda$  и т. д.

В дальнейшем нам придется встречаться также с задачами, в которых граничные условия *не заданы жестко*, а должны быть определены из условия получения экстремума. Такие граничные условия называют *естественными граничными условиями*, а задачи этого рода — *задачами со свободными концами*.

В ряде случаев одно<sup>1</sup> из граничных условий можно считать фиксированным, а другое свободным, подлежащим определению.

Простейшая задача со свободными концами формулируется следующим образом. Найти закон изменения функций  $y_i(t)$ , обеспечивающий экстремум функционала

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F[t, y_i, \dot{y}_i] dt \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

при наличии  $m$  связей

$$\Phi_j(t, y_i, \dot{y}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

и при условии, что значения независимого переменного  $t_1, t_2$  на концах интегрирования фиксированы, но значения варьируемых функций

$$y_1(t_1), y_1(t_2), \dots, y_n(t_1), y_n(t_2)$$

на концах промежутка интегрирования остаются свободными.

Если в задаче с закрепленными концами  $2n$  произвольных постоянных, получающихся при решении уравнений Эйлера, определялись из граничных условий, то в рассматриваемом случае эти  $2n$  произвольных постоянных должны быть найдены из уравнений, получающихся из условия равенства нулю первой вариации ( $\delta J_B = 0$ ) функционала (55.1) при  $\delta y_{i1} \neq 0, \delta y_{i2} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

$$H^{\dot{y}_i} |_{t=t_1} = H^{\dot{y}_i} |_{t=t_2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (60.1)$$

или с учетом (56.1)

$$F^{\dot{y}_i} |_{t=t_1} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi_j^{\dot{y}_i} |_{t=t_1} = F^{\dot{y}_i} |_{t=t_2} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi_j^{\dot{y}_i} |_{t=t_2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (61.1)$$

Возможен более общий случай, когда и значения независимой переменной  $t_1$  и  $t_2$  на концах промежутка интегрирования не фиксированы, а известна лишь форма кривых, по которым могут перемещаться концы экстремалей:

$$y_{i1} = y_{i1}(t_1); \quad y_{i2} = y_{i2}(t_2) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $t_1$  и  $t_2$  могут выбираться произвольно.

В рассматриваемом более общем случае граничных условий задача формулируется так же, как и в предыдущем случае, но значения  $t_1$  и  $t_2$ , которые в предыдущих задачах были заданы, теперь должны быть определены из условия получения экстремума функционала.

Вариации граничных значений функций  $y_{i1}$  и  $y_{i2}$  на концах интервала интегрирования в этом случае определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} (\delta y_{i1})_1 &= \delta y_{i1} + \dot{y}_{i1} \delta t_1, \\ (\delta y_{i2})_2 &= \delta y_{i2} + \dot{y}_{i2} \delta t_2 \\ (i &= 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (62.1)$$

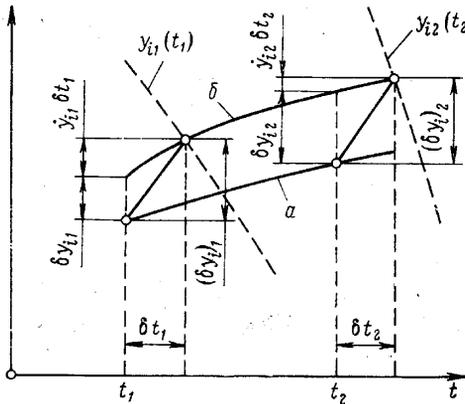
<sup>1</sup> Обычно в задачах динамики фиксированными бывают граничные условия при  $t = t_1$ .

где через  $\dot{y}_{i1}$  и  $\dot{y}_{i2}$  обозначены производные по времени функций  $y_i(t)$  в начале и в конце интервала интегрирования (рис. 14.1).

Действительно, при фиксированных значениях  $t_1$  и  $t_2$  независимого переменного, варьируя значения  $y_{i1}$  и  $y_{i2}$ , мы смещаем концы кривой по вертикали, как это показано на рис. 14.1; соответствующие вариации обозначены через

$$\delta y_{i1}, \delta y_{i2}.$$

Если помимо функций  $y_{i1}$  и  $y_{i2}$  варьируются и значения независимого переменного на концах интервала интегрирования, получается дополнительное смещение концов кривой по вертикали на величину  $y_{i1}\delta t_1$  или  $y_{i2}\delta t_2$ , так что концы экстремали перемещаются по некоторой кривой.



Соответствующие величины полных вариаций обозначены

$$(\delta y_i)_1, (\delta y_i)_2.$$

В таких задачах, когда значения независимого переменного на концах интервала интегрирования остаются свободными, вместо (60.1) должны удовлетворяться условия трансверсальности:

Рис. 14.1. К определению вариаций:  
а — основная кривая  $y_i(t)$ ; б — кривая сравнения  $y_i(t) + \delta y_i(t)$

при  $t=t_1$

$$\left( H - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i H^{\dot{y}_i} \right) \delta t \Big|_{t=t_1} + \sum_{i=1}^n H^{\dot{y}_i} \delta y_i \Big|_{t=t_1} = 0 \quad (60a.1)$$

и при  $t=t_2$

$$\left( H - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i H^{\dot{y}_i} \right) \delta t \Big|_{t=t_2} + \sum_{i=1}^n H^{\dot{y}_i} \delta y_i \Big|_{t=t_2} = 0. \quad (60б.1)$$

Если все вариации  $\delta y_i$ ,  $\delta t_1$  и  $\delta t_2$  не зависят друг от друга, то записанные равенства (60a.1) и (60б.1) распадаются на следующие:

при  $t=t_1$

$$\left. \begin{aligned} \left( H - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i H^{\dot{y}_i} \right) \delta t \Big|_{t=t_1} &= 0, \\ H^{\dot{y}_i} \delta y_i \Big|_{t=t_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (60в.1)$$

и при  $t=t_2$

$$\left. \begin{aligned} \left( H - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i H^{\dot{y}_i} \right) \delta t \Big|_{t=t_2} &= 0, \\ H^{\dot{y}_i} \delta y_i \Big|_{t=t_2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (60г.1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

С условиями трансверсальности мы встретимся при рассмотрении вариационной задачи в форме Майера.

**Ломаные экстремали.** До сих пор предполагалось, что допустимые функции  $y_i(t)$  непрерывны вместе со своими производными первого

порядка. В некоторых случаях решение вариационной задачи в этом классе функций не может быть получено.

Пусть, например, рассматривается функционал

$$J = \int_{-1}^{+1} (e^{y^2} - 1)(1 - \dot{y})^2 dx$$

при граничных условиях

$$x_1 = -1, y_1 = 0, \quad x_2 = +1, y_2 = +1.$$

Очевидно, что для любой гладкой кривой, проходящей через заданные граничные точки, величина функционала получится положительной, так как  $(e^{y^2} - 1)$  и  $(1 - \dot{y})^2$  всегда не отрицательны.

На рис. 15.1 из точки  $M_1(-1, 0)$ , соответствующей началу промежутка интегрирования, проведем прямую  $y=0$  в начало координат, а из начала координат — прямую  $y=x$  в точку  $M_2(+1, +1)$ , соответствующую концу промежутка интегрирования. Ясно, что если вместо гладкой кривой возьмем ломаную  $M_1OM_2$ , то интеграл получится равным нулю:  $J=0$ .

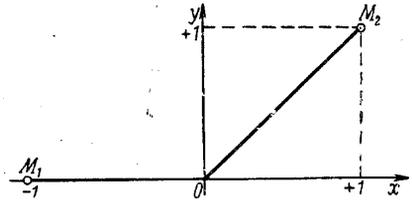


Рис. 15.1. К построению ломаной экстремали

Таким образом, в рассмотренном примере экстремум реализуется на ломаной экстремали, относящейся к классу кусочно-гладких функций. Аналогичные случаи могут иметь место и в некоторых задачах динамики полета.

В том случае, когда экстремум реализуется на ломаной экстремали, координаты угловых точек экстремалей должны удовлетворять дополнительным условиям.

Пусть, например, экстремали имеют угловые точки при  $t=t_p$ . Тогда в угловых точках (в точках разрыва производной) необходимо удовлетворить условиям Вейерштрасса — Эрдмана, которые получаются из условия равенства нулю первой вариации функционала при варьировании угловой точки:

$$\left( H - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i H^{\dot{y}_i} \right)_{t_p-0} = \left( H - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i H^{\dot{y}_i} \right)_{t_p+0}, \quad (63.1)$$

$$(H^{\dot{y}_i})_{t_p-0} = (H^{\dot{y}_i})_{t_p+0} \quad (64.1)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

Индексом  $(t_p - 0)$  здесь обозначены пределы слева рассматриваемых величин в угловой точке  $t_p$ , а  $(t_p + 0)$  — пределы справа.

Уравнения (63.1) и (64.1) показывают, что, несмотря на то, что в угловой точке производная  $y_i$  претерпевает скачок, выражения

$$\left( H - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i H^{\dot{y}_i} \right) \text{ и } H^{\dot{y}_i}$$

должны оставаться непрерывными.

Итак, если экстремаль существует в классе кусочно-гладких функций, то последовательность решения задачи будет такая.

1. Составляются и решаются уравнения Эйлера для вспомогательного функционала с подынтегральной функцией (56.1).

2. Произвольные постоянные, получающиеся при решении уравнений Эйлера, определяются из граничных условий и из условий (63.1) — (64.1), записанных для угловых точек сопряжения разных отрезков экстремалей.

**Вариационная задача в форме Майера.** Пусть имеется  $n$  функций независимого переменного  $t$ :

$$y_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

и пусть эти функции в интервале

$$t_1 \leq t \leq t_2$$

удовлетворяют  $m$  дифференциальным уравнениям (*связям*):

$$\Phi_j(t, t_1, t_2, K_k, y_i, \dot{y}_i) = 0, \quad (65.1)$$

где ( $j=1, 2, \dots, m < n$ ) и  $K_k$  ( $k=1, 2, \dots, q$ ) — параметры, постоянные на интервале  $t_1 \leq t \leq t_2$ , физический смысл которых различен для различных задач.

Так как число  $n$  функций  $y_i(t)$  больше числа уравнений, то имеется  $(n-m)$  управляющих функций (управлений) и  $m$  функций  $y_i(t)$  — фазовых координат. Пусть имеется  $p$  уравнений для граничных условий:

$$\psi_l(t_1, t_2, y_{i1}, y_{i2}) = 0 \quad (l=1, 2, \dots, p). \quad (66.1)$$

Уравнения (66.1) представляют собой связи, наложенные на граничные условия, так что вариации  $\delta t_1, \delta t_2, \delta y_{i1}, \delta y_{i2}$  оказываются взаимозависимыми. Отсутствие связей (66.1) означает свободу выбора этих вариаций, которые становятся независимыми.

В различных задачах вид связей (66.1) может быть различным. Наибольшее число значений функций  $y_{i1}$  и  $y_{i2}$  соответственно на левом и правом концах интегрирования равно  $2n$ ; кроме того, имеются два значения независимого переменного  $t_1$  и  $t_2$  на левом и правом концах интегрирования. Из условия возможности постановки вариационной задачи следует, что все эти значения одновременно не могут быть фиксированы: по крайней мере одно значение  $y_i$  или  $t$  на правом (или на левом) конце интегрирования должно быть оставлено свободным. Отсюда следует, что число связей (66.1) должно быть по крайней мере на одну меньше, чем  $(2n+2)$  значений функций  $y_i$  и независимого переменного  $t$  на левом и правом концах интегрирования, т. е.

$$p < 2n + 2.$$

Требуется выбрать функции  $y_i(t)$ , удовлетворяющие уравнениям (65.1) и (66.1), значения независимого переменного  $t_1$  и  $t_2$  и параметры  $K_k$ , обеспечивающие минимум некоторой функции граничных значений

$$J(t_1, t_2, y_{i1}, y_{i2}) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Частным случаем поставленной задачи является задача о минимальном времени  $(t_2 - t_1)$  перемещения системы из одного фазового состояния  $y_{i1}$  в другое  $y_{i2}$ . Эту задачу называют задачей на *быстродействие*; функционалом задачи на быстродействие будет  $J = t_2 - t_1$ .

Другим частным случаем будет задача о достижении экстремума какой-нибудь функции  $y_{i2}$  в конечный момент времени.

Будем считать, что функции  $y_i(t)$ , являющиеся решением задачи, вместе со своими производными непрерывны всюду на интервале интегрирования, за исключением конечного числа точек, где они могут претерпевать разрывы первого рода.

Итак, основным функционалом рассматриваемой задачи, которую называют<sup>1</sup> задачей Майера, является функция граничных значений

$$J = J(t_1, t_2, y_{i1}, y_{i2}) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Сами граничные значения  $t_1, t_2, y_{i1}, y_{i2}$  и  $J$  зависят от изменения функций  $y_i(t)$  на всем пути интегрирования, так как задача Майера есть вариационная задача со свободными концами; такие задачи решаются по правилам, изложенным выше. Поскольку по условиям задачи должны удовлетворяться граничные условия (66.1), то необходимо искать минимум вспомогательной функции

$$J_1 = J + \sum_{l=1}^p \nu_l \psi_l, \quad (67.1)$$

где  $\psi_l$  — связи, наложенные на граничные условия, и  $\nu_l$  — постоянные, которые определяются по способу, указанному ниже.

Так как на характер перемещения в фазовом пространстве наложены связи — дифференциальные уравнения (65.1), то задача Майера относится к задачам на условный экстремум, и необходимо составить вспомогательный функционал. Выполняя обычную процедуру (см. стр. 41) составления вспомогательного функционала вариационной задачи, получим

$$J_{\text{в}} = J_1(t_1, t_2, t_{i1}, t_{i2}, \nu_l) + \int_{t_1}^{t_2} F(t_1, t_2, t, K_k, t_i, \dot{t}_i, \lambda_j) dt \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$(j=1, 2, \dots, m) \quad (l=1, 2, \dots, p). \quad (68.1)$$

где для краткости обозначено

$$F = \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi_j \quad (69.1)$$

и  $\lambda_j(t)$  — множители Лагранжа, определяемые из уравнений Эйлера.

Выражение вспомогательного функционала (68.1) отличается от встречавшегося ранее выражения (55.1). Основной функционал  $J$ , представляющий собой интегральную характеристику, рассматривается как функция конечных значений  $t_1, t_2, y_{i1}, y_{i2}$  и согласно (67.1) входит слагаемым в выражение функционала  $J_1$ , который, следовательно, является функцией конечных значений. Эта функция  $J_1$  выделена в (68.1) в виде отдельного слагаемого, так что под знаком интеграла помещены только выражения входящих в функцию  $F$  (69.1) связей, наложенных на движение, в выражение которых могут входить варьируемые параметры  $K_k$  и граничные значения  $t_1$  и  $t_2$  независимого переменного.

Форма записи задачи Майера в виде (68.1) является более общей по сравнению с применявшимися ранее, поскольку, помимо управляющих функций и фазовых координат, она позволяет определить наиболее выгодное значение параметров, от которых зависит движение ( $K_k$ ). Кроме того, начальное и конечное фазовые состояния могут удовлетворять дополнительным связям вида (66.1).

Необходимым условием существования экстремума функционала (68.1), как известно, является равенство нулю его первой вариации, т. е.  $\delta J_{\text{в}} = 0$ . Будем пока предполагать  $t_1$  и  $t_2$  свободными и все вариации  $\delta t_1, \delta t_2, \delta y_{i1}, \delta y_{i2}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — независимыми<sup>2</sup>. Как отмечено выше,

<sup>1</sup> Задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах, относятся к числу задач типа Лагранжа.

<sup>2</sup> Следовательно, предполагается, что связи (66.1) отсутствуют.

в случае варьируемых  $t_1$  и  $t_2$  вариации граничных значений  $\delta y_{i1}$  и  $\delta y_{i2}$  определяются по формулам (62.1):

$$(\delta y_i)_1 = \delta y_{i1} + \dot{y}_{i1} \delta t_1; \quad (\delta y_i)_2 = \delta y_{i2} + \dot{y}_{i2} \delta t_2,$$

где  $\delta y_{i1}$  и  $\delta y_{i2}$  — вариации функций  $y_i(t)$  в начале и в конце интервала интегрирования, записанные в предположении неизменных  $t_1$  и  $t_2$ .

Составляя вариацию  $\delta J_B$ , получим

$$\delta J_B = \delta J_1 + \delta \left[ \int_{t_1}^{t_2} F dt \right] \quad (70.1)$$

или<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \delta J_B = & \frac{\partial J_1}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial J_1}{\partial t_2} \delta t_2 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i1}} \dot{y}_{i1} \delta t_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} \dot{y}_{i2} \delta t_2 + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i1}} \delta y_{i1} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} \delta y_{i2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial F}{\partial t_2} \delta t_2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \frac{d\delta y_i}{dt} \right] dt. \end{aligned} \quad (71.1)$$

Выражение (71.1) для  $\delta J_B$ , помимо вариаций  $\delta y_i$ , содержит  $\delta t_1$ ,  $\delta t_2$ ,  $\delta y_{i1}$ ,  $\delta y_{i2}$ ; заметим, что вариации  $\delta t_1$ ,  $\delta t_2$  в (71.1) встречаются не только во внеинтегральном члене, но и под знаком интеграла.

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \frac{d\delta y_i}{dt} dt = \delta y_i F \dot{y}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta y_i \frac{dF \dot{y}_i}{dt} dt,$$

где

$$F \dot{y}_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i},$$

так что предыдущее выражение принимает вид

$$\begin{aligned} \delta J_B = & \left( \frac{\partial J_1}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i1}} \dot{y}_{i1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial t_1} dt \right) \delta t_1 + \left( \frac{\partial J_1}{\partial t_2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} \dot{y}_{i2} + \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial t_2} dt \right) \delta t_2 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial J_1}{\partial y_{i1}} - F \dot{y}_i \right) \delta y_{i1} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} + F \dot{y}_i \right) \delta y_{i2} + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \delta y_i \left( F \dot{y}_i - \frac{dF \dot{y}_i}{dt} \right) dt. \end{aligned} \quad (72.1)$$

<sup>1)</sup> Здесь вариация

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt,$$

взятая по пределам, равна нулю, поскольку

$$F = \sum_{j=1}^m \lambda_j \Phi_j \equiv 0.$$

Как было отмечено, необходимое условие существования экстремума функционала  $J_B$  есть равенство

$$\delta J_B = 0.$$

По сделанному предположению, вариации  $\delta t_1$ ,  $\delta t_2$ ,  $\delta y_{i1}$ ,  $\delta y_{i2}$ ,  $\delta y_i$  не зависят одна от другой; следовательно, коэффициенты при каждой из этих вариаций в отдельности равны нулю. Это означает, что равенство нулю первой вариации разбивается на ряд равенств<sup>1</sup>:

1) при  $\delta t_1$

$$\frac{\partial J_1}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i1}} \dot{y}_{i1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial t_1} dt = 0; \quad (73.1)$$

2) при  $\delta t_2$

$$\frac{\partial J_1}{\partial t_2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} \dot{y}_{i2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial t_2} dt = 0; \quad (74.1)$$

3) при  $\delta y_{i1}$

$$\frac{\partial J_1}{\partial y_{i1}} - F^{y_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (75.1)$$

4) при  $\delta y_{i2}$

$$\frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} + F^{y_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (76.1)$$

Далее, в силу основной леммы вариационного исчисления равенство нулю интеграла, входящего в (72.1),

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta y_i \left( F^{y_i} - \frac{dF^{y_i}}{dt} \right) dt$$

обеспечивается при условии

$$F^{y_i} - \frac{dF^{y_i}}{dt} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (77.1)$$

Уравнения (77.1) представляют собой уравнения Эйлера.

Кроме того, так как параметры  $K_k$  должны быть выбраны из условия оптимизации функционала и от  $K_k$  зависит только последнее слагаемое  $F(t_1, t_2, t, K_k, y_i, \dot{y}_i)$  в выражении (68.1), то эти параметры должны удовлетворять необходимому условию экстремума

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial K_k} dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots, q). \quad (78.1)$$

Итак, получена система уравнений, решение которых и будет представлять собой решение вариационной задачи, сформулированной в начале этого раздела.

Число уравнений Эйлера (дифференциальных уравнений второго порядка) равно числу  $n$  неизвестных функций  $y_i(t)$ . В эти уравнения будут входить  $m$  неизвестных множителей Лагранжа  $\lambda_j$ . Вместе с  $m$  дифференциальными уравнениями связей первого порядка (65.1) получаем  $(n+m)$  дифференциальных уравнений. В эти уравнения будут входить  $(n+m)$  неизвестных  $y_i$  и  $\lambda_j$ .

Далее имеем два уравнения (73.1) и (74.1),  $2n$  уравнений (75.1) и (76.1),  $q$  уравнений (78.1) и  $p$  уравнений (66.1). К этим уравне-

<sup>1</sup> Равенства (73.1)—(76.1) представляют собой условия трансверсальности, составленные для задачи в форме Майера.

ниям надо добавить еще  $2m$  уравнений, получающихся из уравнений связи (65.1), если положить в них  $t=t_1$  и  $t=t_2$ .

Решая совместно уравнения связей (65.1) и уравнения Эйлера (77.1), найдем функции  $y_i(t)$  и  $\lambda_j(t)$ , причем эти решения будут содержать пока неопределенные постоянные интегрирования. Кроме того, определению подлежат  $q$  параметров  $K_k$  и  $p$  постоянных  $v_l$ . Всего, таким образом, из решения всех уравнений надо определить

$$2(n+m) + 2 + q + p$$

постоянных, а именно:

$2n$  граничных значений функции  $y_i(t)$  на левом и правом концах интервала интегрирования;

$2m$  граничных значений множителей Лагранжа  $\lambda_j (j=1, 2, \dots, m)$ ;

$2$  граничных значения  $t_1$  и  $t_2$  независимой переменной;

$q$  параметров  $K_k (k=1, 2, \dots, q)$  и  $p$  постоянных  $v_l (l=1, 2, \dots, p)$ , содержащихся в уравнениях (73.1) — (76.1).

Таким образом, задача решается до конца.

В дальнейшем для нас представит интерес частная задача, которая получается из рассмотренной выше общей задачи, если принять граничные условия на левом конце интегрирования заданными ( $t_1, y_{i1}$ ), а на правом ( $t_2, y_{i2}$ ) свободными и независимыми. Для этого частного случая все вариации на левом конце интегрирования равны нулю, а связи вида (66.1) отсутствуют.

Примем за начало отсчета время  $t_1$ , т. е. будем считать, что  $t_1=0$ , а  $y_{i1}$  заданы.

Кроме того, предположим, что граничное значение  $t_2$  в уравнениях связей (65.1) не входит, так что в соответствии с (69.1)

$$\frac{\partial F}{\partial t_2} = 0.$$

В рассматриваемой частной задаче, очевидно,

$$J_1 = J$$

и

$$J_B = J + \int_{t_1}^{t_2} F(t, K_k, y_i, \dot{y}_i) dt.$$

Из выражения (76.1), учитывая, что  $J_1 = J$ , имеем

$$\frac{\partial J}{\partial y_{i2}} = -F \dot{y}_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (76a.1)$$

а из (74.1), приняв во внимание, что  $\frac{\partial F}{\partial t_2} = 0$ ,

$$\frac{\partial J}{\partial t_2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J}{\partial y_{i2}} \dot{y}_{i2} = 0. \quad (79.1)$$

С учетом (76a.1) уравнение (79.1) можно переписать в следующем виде:<sup>1</sup>

$$\frac{\partial J}{\partial t_2} - \sum_{i=1}^n F \dot{y}_i \dot{y}_{i2} = 0. \quad (80.1)$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае задачи Майера уравнения (74.1) и (76.1) заменяются более простыми уравнениями

<sup>1</sup> Именно в такой форме приведены уравнения в первом издании этой книги; как видно, эти уравнения являются частным видом (74.1) и (76.1).

трансверсальности (76a.1) и (80.1). Заметим, что если все связи (65.1) не содержат в явном виде независимое переменное  $t$  (система автономна), то согласно (45.1) первый интеграл уравнений Эйлера имеет вид

$$F - \sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_i} \dot{y}_i = \text{const} = C$$

или, так как вдоль экстремали  $F \equiv 0$ , то

$$\sum_{i=1}^n F^{\dot{y}_i} \dot{y}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \dot{y}_i = -C.$$

Следовательно, для автономной системы условие (80.1) будет

$$\frac{\partial J}{\partial t_2} + C = 0.$$

Для случая, когда время  $t_2$  не задано, а ищется его экстремум (минимум  $t_2$ ), функционал  $J = -t_2$ ; в этом случае

$$\frac{\partial J}{\partial t_2} = -1 \text{ и } C = 1.$$

Во всех остальных случаях, когда  $J$  не содержит  $t_2$ ,

$$\frac{\partial J}{\partial t_2} = 0 \text{ и } C = 0.$$

Постановка вариационной задачи в форме Майера имеет то преимущество, что при этом уравнения Эйлера одинаковы независимо от вида основного функционала  $J$ . Такой результат является следствием того, что основной функционал представляется как функция граничных значений фазовых переменных, в то время как в рассмотренной ранее постановке задачи основной и вспомогательный функционалы представляли одно целое; поэтому уравнения Эйлера получались разными для разных функционалов. Недостатком постановки задачи в форме Майера является то, что при этом получается большее число множителей Лагранжа (на единицу), так как теперь функция  $F$  содержит все связи, наложенные на движение, в то время как ранее одна из этих связей использовалась для составления основного функционала. Это усложнение, однако, не является решающим, так что задача Майера все больше проникает в инженерную практику.

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример, который решим в форме Лагранжа и в форме Майера. Пусть на плоскости  $(x, y)$  в поле тяготения перемещается материальная точка неизменной массы  $m$  под действием неизменной силы  $R$ , направление которой ( $\varphi$  — угол между направлением силы  $R$  и осью  $Ox$ ) может изменяться, из состояния 1 ( $x_1, y_1$ ) в состояние 2 ( $x_2, y_2$ ). Требуется выбрать такой закон изменения угла  $\varphi$ , который обеспечивал бы максимум координаты  $y_2$  в точке 2; время  $(t_2 - t_1)$ , затрачиваемое на перемещение из точки 1 в точку 2, предполагается заданным, координаты  $x_1, y_1, x_2$  — фиксированы.

**Решение задачи в форме Лагранжа.** Уравнения движения и кинематические уравнения записываются в следующем виде:

$$\dot{V}_x - \bar{R} \cos \varphi = 0, \quad (81.1)$$

$$\dot{V}_y - \bar{R} \sin \varphi + g = 0, \quad (82.1)$$

$$\dot{x} - V_x = 0, \quad (83.1)$$

$$\dot{y} - V_y = 0, \quad (84.1)$$

где обозначено

$$\bar{R} = \frac{R}{m}.$$

Для составления основного функционала используется уравнение (84.1), так как

$$y_2 = y_1 + \int_{t_1}^{t_2} V_y dt.$$

Подынтегральная функция вспомогательного функционала при этом

$$H = V_y + \lambda_1 (\dot{V}_x - \bar{R} \cos \varphi) + \lambda_2 (\dot{V}_y - \bar{R} \sin \varphi + g) + \lambda_3 (\dot{x} - V_x).$$

Неизвестные функции

$$V_x, V_y, x, \varphi.$$

Уравнения Эйлера, число которых равно четырем, получаются следующие:

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_3,$$

$$\dot{\lambda}_2 = 1,$$

$$\dot{\lambda}_3 = 0,$$

$$\lambda_1 \sin \varphi - \lambda_2 \cos \varphi = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$\lambda_1 = c_1 + c_3 t, \quad \lambda_2 = c_2 + t, \quad \lambda_3 = -c_3,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_2 + t}{c_1 + c_3 t}.$$

Как видим, оптимальным оказывается дробно-линейный закон изменения  $\operatorname{tg} \varphi$ . Далее, при свободном времени перемещения  $t_2$  (т. е. при  $\delta t_2 \neq 0$ ), по первому условию трансверсальности (60 г.1), принимая во внимание, что выражения

$$\dot{V}_x - \bar{R} \cos \varphi = 0, \quad \dot{V}_y - \bar{R} \sin \varphi + g = 0, \quad \dot{x} - V_x = 0 \text{ и } F = V_y,$$

получим

$$V_{y_2} - \lambda_{12} \dot{V}_{x_2} - \lambda_{22} \dot{V}_{y_2} - \lambda_{32} \dot{x}_2 = 0.$$

Но, по второму условию трансверсальности (60 г.1), считая все вариации независимыми, найдем, что на правом конце

$$\lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_{32} = 0,$$

так что из предыдущего выражения на правом конце интегрирования получаем

$$V_{y_2} = 0.$$

Последние четыре условия позволяют найти значения произвольных постоянных  $c_1, c_2, c_3$  и оптимальное время перемещения  $T = (t_2 - t_1)$ . Поскольку рассмотренный пример является чисто иллюстративным, мы не будем подробно останавливаться на практических приемах определения постоянных.

**Решение задачи в форме Майера.** Основной функционал задачи  $J = y_2$ , а вспомогательный функционал в соответствии с (68.1)

$$J_B = y_2 + \int_{t_1}^{t_2} [\lambda_1 (\dot{V}_x - \bar{R} \cos \varphi) + \lambda_2 (\dot{V}_y - \bar{R} \sin \varphi + g) + \lambda_3 (\dot{x} - V_x) + \lambda_4 (\dot{y} - V_y)] dt.$$

Как видно, вспомогательный функционал содержит четыре множителя Лагранжа, в то время как в предыдущем решении их было три. Уравнения Эйлера будут:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -\lambda_3, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_3 &= 0, \\ \dot{\lambda}_4 &= 0, \\ \lambda_1 \sin \varphi - \lambda_2 \cos \varphi &= 0.\end{aligned}$$

Решения уравнений Эйлера:

$$\lambda_1 = c_1 + c_3 t, \quad \lambda_2 = c_2 + c_4 t, \quad \lambda_3 = -c_3, \quad \lambda_4 = -c_4,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_2 + c_4 t}{c_1 + c_3 t}.$$

Далее, по условию (76a.1), так как  $\frac{\partial J}{\partial y_2} = -1$  и  $\frac{\partial F}{\partial y} = \lambda_4$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \dot{V}_x} =$   
 $= \frac{\partial F}{\partial \dot{V}_y} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$ , находим

$$\lambda_{42} = -1, \quad \lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_{32} = 0.$$

Отсюда видно, что  $c_4 = 1$ , и выражение  $\operatorname{tg} \varphi$  примет вид, совпадающий с полученным выше в задаче Лагранжа:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_2 + t}{c_1 + c_3 t}.$$

Наконец, из условия (80.1) с учетом полученной выше информации  $V_{y2} = 0$ .

Конечно, как и следовало ожидать, результаты решения задачи в форме Лагранжа и Майера получились тождественными.

В заключение этой главы сделаем одно замечание по поводу вариационных задач с ограничениями, наложенными на фазовые координаты и на управления.

Хотя новейшие работы в области вариационного исчисления и позволяют решать задачи этого рода в самой общей их постановке, ход решения в общем случае оказывается довольно сложным. Поэтому мы рассмотрим более простую частную задачу, в которой ограничения наложены только на управления. В соответствующих местах книги (см. гл. VIII и XIII) изложены практические приемы учета ограничений, наложенных на фазовые координаты в некоторых частных задачах.

Задачу с *ограничениями, наложенными на управление*, можно решать либо классическими методами вариационного исчисления<sup>1</sup>, либо, используя для решения такие новые положения, как принцип максимума Понтрягина и др.

Идея решения задачи *классическими методами* заключается в раскрытии замкнутой области управления с помощью введения некоторой новой переменной. Пусть, например, на управление  $u$  наложено условие, согласно которому  $u$  не должно превосходить некоторого предельного значения:

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max}. \quad (85.1)$$

<sup>1</sup> См. сноску на стр. 32.

Введем некоторую новую функцию управления  $v$ , такую, что при изменении  $u$  от  $u_{\min}$  до  $u_{\max}$  новая функция  $v$  изменяется в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , как это видно на рис. 16.1. Введенная новая функция  $v$  не имеет какого-либо определенного физического смысла и требуется лишь для проведения математического исследования.

В то время как выбор управления  $u$  должен быть подчинен неравенству (85.1), управление  $v$  может быть выбрано любым, так как по этой новой функции область управления не ограничена. Следовательно, вводя в алгоритм задачи вместо  $u$  новое управление  $v$ , мы получаем возможность пользоваться всеми формулами классического вариационного исчисления. В общем случае экстремаль будет состоять из отдельных отрезков, часть которых будет соответствовать перемещению с оптимальным управлением  $u$ , а другая часть — с предельно допустимым значением  $u_{\max}$  или  $u_{\min}$ .

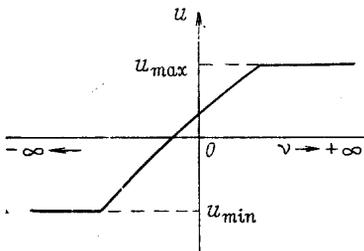


Рис. 16.1. К преобразованию замкнутой области управления в открытую

Практическое применение этой идеи связано с известными трудностями. Пусть в некоторый момент времени осуществлен переход с оптимальных значений  $u$  на предельно допустимые значения  $u_{\max}$  или  $u_{\min}$ . Возникает вопрос: как поступать в дальнейшем? Нужно ли и в какой момент времени переходить от предельных значений управления к меньшим, соответствующим оптимальному управлению?

В общем случае ответ на эти вопросы может быть получен путем рассмотрения не только необходимых, но и достаточных условий существования экстремума. Решение таких задач получается достаточно сложным, и мы на нем останавливаться не будем. Простые результаты удается получить лишь в некоторых частных случаях. Иногда сравнительно простым получается решение задачи с ограничениями, наложенными на управление, при использовании принципа максимума. Не останавливаясь на подробных доказательствах этого положения ([48], [7]), изложим в общих чертах лишь последовательность вычислений.

1. Составляют выражение так называемого гамильтониана, представляющего собой правую часть функции Лагранжа. Так, например, если функция Лагранжа имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\dot{y}_i - f_i(t, y_j, u_k)], \quad (86.1)$$

то гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t, y_j, u_k), \quad (87.1)$$

где  $j=1, 2, \dots, n$ ;  $k=1, 2, \dots, r$ .

2. Для каждого момента времени в интервале интегрирования и соответствующих этому моменту времени значений фазового состояния  $y_j$  и множителей  $\lambda_k$  строят зависимость  $H$  от  $u_k$ , задаваясь значениями  $u_k$ , лежащими в допустимых пределах.

3. На рис. 17.1 приведены возможные зависимости  $H=H(u_k)$  при  $k=1$ . По этим графикам, построенным для каждого момента времени, определяют значения  $u_*$ , обеспечивающие максимум  $H$ . Эти значения управления  $u_*$  и вводят в дальнейшем в расчет.

Если управление  $u_*$  лежит внутри допустимого интервала ( $u_{\min}, u_{\max}$ ), это означает, что наивыгоднейшим будет перемещение вдоль экстремали, получаемой как интеграл уравнений Эйлера. Если максимум  $H$  получается при минимально или максимально допустимом значении  $u$ , то наивыгоднейшим будет перемещение по фазовой траектории, полученной для этих предельных значений  $u$ .

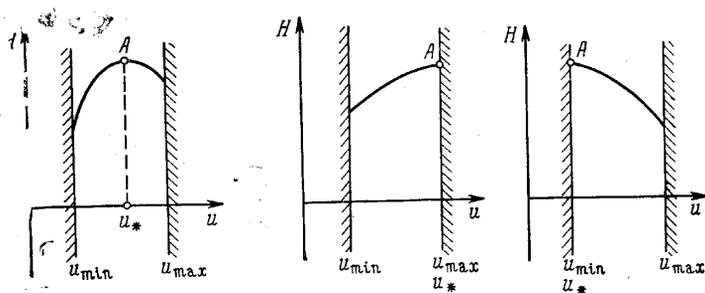


Рис. 17.1. Возможные случаи зависимости  $H=H(u)$  при определении  $u_*$

Заметим, что при пользовании принципом максимума в общем случае не удастся избежать трудностей, связанных с отысканием зависимостей  $\lambda_i(t)$ , т. е. с решением краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

## ГЛАВА II

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕХАНИКИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ДИНАМИКЕ ПОЛЕТА

#### § 1. О силах, действующих на летательный аппарат в полете

В полете на летательный аппарат действуют следующие силы.

1. Массовые внешние силы, обусловленные притяжением Солнца, Луны и различных планет.

2. Внешние аэродинамические силы (в случае полета в достаточно плотных слоях атмосферы).

3. Реактивная сила тяги двигателя, установленного на летательном аппарате (в том случае, если двигатель работает).

При полете летательного аппарата в космическом пространстве его движение происходит в поле тяготения различных небесных тел. Взаимное расположение летательного аппарата и небесных тел в пространстве непрерывно изменяется. Поэтому задача расчета траекторий орбитального полета, известная в небесной механике как «задача нескольких притягивающихся тел», оказывается достаточно сложной. На помощь приходит то обстоятельство, что сила притяжения различными небесными телами существенно различна по величине. Среди всех притягивающих небесных тел можно выделить *основные* притягивающие тела и *второстепенные* — возмущающие — небесные тела, сила притяжения которых мала в сравнении с силой притяжения основных тел. Обычно доминирующей является сила притяжения, действующая на космический корабль со стороны одного какого-либо небесного тела; это позволяет

сложную задачу « $n$  притягивающих тел» заменить гораздо более простой задачей «двух тел», как об этом подробно сказано в § 4.

Силы притяжения, действующие со стороны основных притягивающих тел, на несколько порядков больше, чем силы притяжения возмущающих тел. Так, например, притяжение Солнца, масса которого в 332 000 раз больше массы Земли, а наименьшее расстояние от Земли около 147 000 000 км, даже на высоте полета 1000 км будет составлять для космического летательного аппарата всего 0,1% притяжения Земли.

Сила притяжения Луны, масса которой примерно в 82 раза меньше массы Земли, а расстояние от центра Земли в 60 раз больше радиуса земного шара, на высоте 1000 км над поверхностью Земли составляет всего

$$F_{\text{л}} = \frac{1}{82} \frac{1}{51^2} F_{\text{з}} \approx 0,47 \cdot 10^{-6} F_{\text{з}},$$

т. е. около  $5 \cdot 10^{-4}\%$  земного притяжения.

Таким образом, при исследовании полета летательных аппаратов на сравнительно небольших высотах (до  $H=1000-2000$  км) без большой погрешности можно ограничиться только массовой силой притяжения Земли.

При исследовании движения космического корабля, совершающего перелет Земля — Луна или планета — планета в сфере действия Земли (или другой планеты), учитывается только ее притяжение. Далее может следовать полет в сфере действия Луны, в сфере действия Солнца, в сфере действия планеты назначения.

В небесной механике пользуются понятиями *сферы притяжения* и *сферы действия*.

Пусть материальная точка  $P$  массы  $m$  движется в пределах Солнечной системы вблизи какой-либо планеты массы  $M_1$ . Предположим, что масса материальной точки  $m$  (космического корабля) гораздо меньше масс  $M_1$  планеты и  $M_2$  Солнца, так что влиянием притяжения этой точки на планету и Солнце можно пренебречь.

По закону Ньютона силы притяжения планеты и Солнца

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{пл}} &= G \frac{mM_1}{r_1^2}, \\ F_{\text{солн}} &= G \frac{mM_2}{r_2^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где  $r_1$ ,  $r_2$  — расстояния от материальной точки до планеты и до Солнца;  
 $G$  — универсальная постоянная тяготения.

Так как масса планеты  $M_1$  существенно меньше массы Солнца  $M_2$  (масса Солнца составляет 99,86% массы всех тел, образующих солнечную систему), а расстояние  $r_1$  материальной точки от планеты может быть как небольшим, так и значительным, сила притяжения материальной точки  $P$  (космического корабля) планетой будет различной в разных точках пространства.

Если (рис. 1.2) прямой линией  $A_1A_2$  соединить планету (точка  $A_1$ ) и Солнце (точка  $A_2$ ) и вдоль этой прямой определять силу притяжения, действующую на точку  $P$  со стороны планеты, то по мере удаления ма-

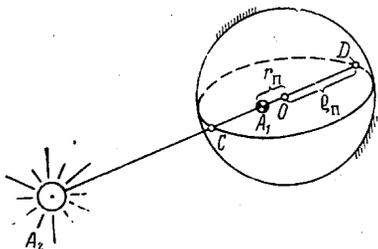


Рис. 1.2. К понятию сферы притяжения

териальной точки  $P$  от планеты и приближения к Солнцу сила притяжения планеты будет уменьшаться, а сила притяжения Солнца — увеличиваться. В некоторой точке  $C$  сила притяжения материальной точки  $P$  к  $A_1$  и  $A_2$  будет одинакова.

При перемещении точки  $P$  в противоположном направлении, т. е. по мере удаления ее от притягивающих центров  $A_1$  и  $A_2$ , в некоторой точке  $D$  сила притяжения станет такой же, как и в точке  $C$ .

Таким образом, в точках  $C$  и  $D$ , где  $F_{пл} = F_{солн}$ , имеют место равенства

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\bar{M}} \quad \text{и} \quad \frac{A_1D}{A_2D} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\bar{M}},$$

где  $\sqrt{\bar{M}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \text{const} \ll 1$ .

Геометрическим местом точек, в котором отношение расстояния от материальной точки  $P$  до притягивающих центров  $A_1$  и  $A_2$  остается постоянным, является сфера диаметром  $CD$ , которую называют *сферой притяжения*. Внутри этой сферы  $F_{пл} > F_{солн}$ , за ее пределами  $F_{пл} < F_{солн}$ .

Центр сферы притяжения всегда находится вне отрезка  $a = A_1A_2$ . Нетрудно найти<sup>1</sup> выражения для определения *радиуса сферы притяжения*  $\rho_{п}$  и *расстояния*  $r_{п}$  *от центра сферы притяжения до притягивающего центра планеты* ( $A_1$ ) (см. рис. 1.2):

$$\rho_{п} = a \frac{\sqrt{\bar{M}}}{1 - \bar{M}}, \quad (2.2)$$

$$r_{п} = a \frac{\bar{M}}{1 - \bar{M}}. \quad (3.2)$$

Так, например, радиус сферы притяжения Луны будет  $\rho_{п} \approx 43\,000$  км, а расстояние от центра сферы притяжения до центра Луны  $r_{п} \approx 4500$  км.

*Сферой действия планеты* называют область пространства вокруг планеты, внутри которой справедливо неравенство

$$\frac{\delta F_1}{F_2} < \frac{\delta F_2}{F_1}, \quad (4.2)$$

- где  $F_2$  — сила притяжения материальной точки планетой;  
 $F_1$  — сила притяжения материальной точки Солнцем;  
 $\delta F_1$  — сила, с которой Солнце возмущает планетоцентрическое движение точки (движение только под действием притяжения планеты);  
 $\delta F_2$  — сила, с которой планета возмущает гелиоцентрическое движение точки (движение только под действием притяжения Солнца).

Более подробное исследование [27], [4] приводит к выводу, что сфера действия в действительности представляет собой, поверхность, не-

<sup>1</sup> Выражения (2.2) и (3.2) получаются из приведенных выше равенств, если принять во внимание (см. рис. 1.2), что  $A_1C = \rho_{п} - r_{п}$ ,  $A_2C = a - (\rho_{п} - r_{п})$ ,  $A_1D = \rho_{п} + r_{п}$ ,  $A_2D = a + (\rho_{п} + r_{п})$ .

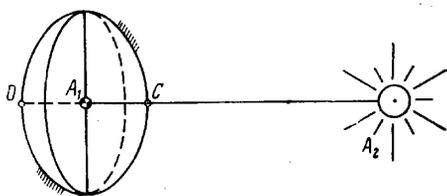


Рис. 2.2. Истинная сфера действия

сколько вытянутую в направлении, перпендикулярном линии  $A_1A_2$  (рис. 2.2). Однако в первом приближении сферу действия можно отождествить с геометрической сферой.

Радиус сферы действия планеты массы  $M_1$ , отстоящей от Солнца с массой  $M_2$  на расстоянии  $a=A_1A_2$ , можно определить по формуле

$$r_d = a \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2}{5}}. \quad (5.2)$$

В табл. 1.2 приведены радиусы сфер действия больших планет (при средних расстояниях до Солнца).

Таблица 1.2

Радиус сфер действия больших планет

| Планета  | $r_d$ млн. км | Планета | $r_d$ млн. км |
|----------|---------------|---------|---------------|
| Меркурий | 0,11          | Юпитер  | 48,2          |
| Венера   | 0,62          | Сатурн  | 54,5          |
| Земля    | 0,93          | Уран    | 51,8          |
| Марс     | 0,58          | Нептун  | 86,8          |

Радиус сферы действия Луны относительно Земли равен примерно 66 000 км.

С помощью понятия сферы действия<sup>1</sup> траекторию полета космического корабля можно разбить на отдельные участки, лежащие внутри сфер действия тех небесных тел, вблизи которых проходит траектория, и на каждом из таких участков представить движение как результат решения задачи двух тел.

В этой книге рассматриваются главным образом траектории полета летательных аппаратов, стартующих с Земли. Остановимся поэтому несколько подробнее на силе притяжения Земли.

Ускорение силы тяжести  $g$  на земной поверхности, вообще говоря, зависит от географического положения пункта, в котором определяется  $g$ . Это объясняется, с одной стороны, тем, что внутри объема Земли массы распределены не вполне равномерно, а с другой стороны, тем, что Земля имеет не точно шарообразную форму. Оба эти обстоятельства, однако, несильно влияют на  $g$ . Массы ближайших к поверхности Земли частей, которые могли бы существенно повлиять на силу притяжения, ничтожно малы по сравнению со всей массой Земли, так что их влияние на  $g$  получается незначительным. Влияние нешарообразности Земли на силу притяжения также невелико. Так, например, ускорение силы тяжести на поверхности Земли на экваторе равно  $g_э = 9,7830 \text{ м/сек}^2$ , а на полюсе  $g_п = 9,83215 \text{ м/сек}^2$ . Вполне допустимо поэтому принимать некоторое среднее, постоянное для всех точек земной поверхности, ускорение силы тяжести. Примем, как обычно в технических расчетах,

$$g_0 = 9,81 \text{ м/сек}^2.$$

Итак, в дальнейшем будем считать<sup>2</sup>, что Земля имеет форму шара

<sup>1</sup> Можно было бы воспользоваться понятием сферы притяжения, однако правильнее основываться на понятии сферы действия. Кроме того, вместо сфер действия для повышения точности приближенных расчетов траекторий искусственных спутников Земли можно воспользоваться понятием сферы влияния малого тела относительно большого. Подробнее по этому вопросу см. [27].

<sup>2</sup> Исключение из этого общего правила приходится делать при точном исследовании траекторий баллистических ракет (см. гл. XII).

и центром ее притяжения является геометрический центр этого шара. Другими словами, будем исходить из *кеплерова поля тяготения*.

Ускорение силы притяжения согласно закону Ньютона обратно пропорционально квадрату расстояния от центра притяжения до рассматриваемой точки. В механике доказывается, что закон Ньютона справедлив и для материальных тел сферической формы с распределением плотности, зависящим только от радиуса. Если считать, что Земля отвечает этим условиям, то ускорение силы тяжести в поле тяготения Земли определяется следующей формулой:

$$g = g_0 \left( \frac{r_3}{r_3 + H} \right)^2 = 9,81 \left( \frac{r_3}{r_3 + H} \right)^2, \quad (6.2)$$

где  $r_3 \approx 6371$  км — радиус земного шара и  $H$  — высота рассматриваемой точки над поверхностью Земли, за которую будем принимать уровень моря.

При не очень больших высотах полета величина  $g$  мало отличается от  $g_0$  на уровне моря, которую мы приняли равной  $9,81$  м/сек<sup>2</sup>. Так, например, на высоте  $H = 50$  км ускорение силы тяжести

$$g = 9,81 \left( \frac{6371}{6421} \right)^2 \approx 9,70 \text{ м/сек}^2.$$

Поэтому в задачах, связанных с изучением полета летательного аппарата на небольших высотах — приблизительно до 50—100 км, в целях упрощения допустимо принимать  $g$  постоянным, не зависящим от высоты полета. Таким образом, если рассматриваются небольшие высоты полета, то с достаточной степенью точности связь между массой и весом можно считать линейной:

$$G = mg = (m \cdot 9,81) \text{ кг}$$

или по системе СИ

$$G = m \cdot 9,81^2 \text{ н.}$$

На значительных высотах ускорение силы тяжести  $g$  изменяется заметно по сравнению с его величиной на уровне моря. Так, на высоте  $H = 1000$  км (на таких высотах могут летать баллистические ракеты или спутники Земли) величина  $g$  получается равной  $7,3$  м/сек<sup>2</sup>. Пренебрежение изменением величины  $g$  привело бы к существенным погрешностям в конечных результатах. Поэтому при исследовании полета летательных аппаратов на больших высотах  $g$  следует определять по формуле (6.2).

Приведенные выше соображения получены в предположении, что Землю можно отождествить с шаром, плотность распределения вещества в котором зависит только от его радиуса. В действительности такое предположение надо рассматривать лишь как первое приближение; большую точность дает представление Земли в виде эллипсоида или геоида (более подробно по этому вопросу сказано в третьей части этой книги).

На летательные аппараты, движущиеся вблизи Земли, существенное влияние оказывают *внешние силы, связанные с наличием атмосферы*. Физическая природа этих сил обуславливается сложным взаимодействием летательного аппарата (системы материальных точек) и масс воздуха. Величина и направление возникающих при этом взаимодействии сил зависят от свойств среды, в которой происходит движение, в том числе от давления воздуха на поверхность летательного аппарата, от вязкости и сжимаемости воздуха, а также от геометрической формы тела (наличие донного среза, наличие или отсутствие крыльев и т. д.).

Величина полной аэродинамической силы, действующей на лета-

тельный аппарат, определяется по формуле

$$R = c_R \frac{\rho V^2}{2} S,$$

где  $c_R$  — коэффициент полной аэродинамической силы;

$\rho$  — плотность атмосферы;

$V$  — скорость движения летательного аппарата относительно атмосферы (воздушная скорость);

$S$  — характерная площадь (мидель фюзеляжа или корпуса снаряда, площадь крыла или эквивалентной поверхности в плане), к которой относят все силы и моменты, действующие на летательный аппарат.

Величина аэродинамических сил при проведении траекторных расчетов определяется на основании данных, полученных при испытаниях в аэродинамических трубах, а также расчетным путем.

Общая масса атмосферы Земли составляет примерно  $5,27 \cdot 10^{15}$  т. В слоях атмосферы до 10 км находится 75% всей массы атмосферы; на высотах более 30—35 км масса атмосферы составляет около 1% от всей массы.

Поскольку масса атмосферы Земли распределяется по высотам неравномерно, величина аэродинамических сил существенно зависит от степени удаления летательного аппарата от поверхности Земли. Примерно на высотах 80—90 км, которые условно можно принять за границу плотной части земной атмосферы, роль аэродинамических сил в общем силовом балансе становится столь незначительной, что при исследовании динамики летательного аппарата на этих высотах влиянием этих сил на полет можно пренебречь.<sup>1</sup>

При сравнительно небольших высотах и скоростях полета воздушную среду, в которой происходит движение летательного аппарата, можно рассматривать как континуум; собственное движение молекул при этом проявляется только как температура среды. Наоборот, при достаточно больших высотах и скоростях полета, когда длина свободного пробега молекул велика, такая модель атмосферы, как континуум, оказывается слишком грубой. Более близким к действительности теперь становится предположение о воздушной среде как о совокупности молекул (а не континуума), совершающих сложное движение.

В гл. IV мы остановимся более подробно на вопросе влияния конкретных характеристик воздушной среды на аэродинамические характеристики летательных аппаратов.

Одной из основных сил, действующих на летательный аппарат, является *реактивная сила тяги движителя*, установленного на летательном аппарате.

На самолетах, совершающих полет в сравнительно плотных слоях атмосферы, сила тяги действует практически на всем протяжении полета, так как это необходимо для преодоления лобового сопротивления. На активном участке полета космического корабля или баллистической ракеты сила тяги является основной силой, создающей необходимый для дальнейшего пассивного полета запас кинетической и потенциальной энергии. Однако и на пассивном участке движения космического корабля сила тяги может использоваться как управляющая сила, с помощью которой можно изменять траекторию полета космического корабля.

В настоящее время существует множество различных типов и конструкций двигательных установок, с помощью которых летательный аппарат может изменять траекторию полета и получать требуемое для изменения скорости полета ускорение. Эти двигательные установки от-

<sup>1</sup> В то же время эта небольшая по величине сила оказывается существенной при решении вопроса о долговечности искусственного спутника Земли.

личаются друг от друга по виду используемого рабочего тела, способу создания реактивной струи, принципу действия отдельных частей двигателя и т. п. *Основными характеристиками двигательных установок являются сила тяги движителя и удельный расход топлива, т. е. расход топлива на единицу тяги в единицу времени.*

Применяемые на летательных аппаратах двигатели можно разделить на два следующих класса:

а) автономные реактивные двигатели, сила тяги которых получается независимо от внешней среды,

б) реактивные двигатели, сила тяги которых получается в результате взаимодействия с внешней средой.

К числу первых относятся двигатели ракетного типа (РД), способные работать и вне пределов атмосферы; такие ракетные двигатели могут работать на твердом или жидком топливе, а также использовать ядерную энергию.

Двигатели второго типа могут работать только в пределах атмосферы, так как рабочее тело таких двигателей в значительной части состоит из окружающего воздуха. Энергия сжигаемого топлива у таких двигателей может преобразовываться в силу тяги либо непосредственно через реакцию струи продуктов сгорания, выходящих из сопла двигателя (система прямого реактивного действия), либо затрачиваться для работы специального движителя — воздушного винта или ротора вертолета.

К первому типу относятся турбореактивные (ТРД), прямоточные (ПВРД) и пульсирующие двигатели, ко второму — турбовинтовые (ТВД) и поршневые (ВД). Следует заметить, что у ТВД некоторая часть тяги получается и благодаря прямой реакции выходящей струи.

В гл. IV дана более подробная характеристика различных движителей, применяемых на летательных аппаратах, и рассматривается классификация по составу их рабочего тела.

## § 2. Системы координат, применяемые в динамике полета

Когда говорят о движении тела (материальной точки)  $A$ , подразумевают перемещение во времени тела  $A$  относительно группы  $B$  других тел (материальных точек). Система координат или система отсчета, в которой рассматривается движение, связана, таким образом, с группой тел  $B$ .

Так, если рассматривается движение материальной точки по отношению к определенной поверхности (например движение автомобиля по поверхности земного шара), то система отсчета связана с этой поверхностью. Если рассматривается движение частиц внутри контура тела (например движение продуктов сгорания внутри реактивного двигателя), то систему отсчета целесообразно связать с контуром тела. Если рассматривается движение космического корабля, совершающего перелет, например, от Земли к Венере, в свою очередь совершающих орбитальное движение вокруг Солнца, то в сфере действия Солнца систему отсчета целесообразно связать с Солнцем.

В зависимости от выбора начала координат системы отсчета можно классифицировать следующим образом.

1. *Топоцентрическая система отсчета* (система координат), начало которой помещается в пункте наблюдения, в частности на поверхности земного шара. Топоцентрические системы координат используются в тех случаях, когда рассматривается движение по отношению к поверхности Земли или какой-либо другой планеты.

В таких системах координат будут рассматриваться далее задачи динамики полета летательных аппаратов, летающих на сравнительно

небольшой высоте над поверхностью земного шара, взлетающих с Земли и совершающих посадку на Землю (самолеты, баллистические ракеты и т. п.).

2. *Геоцентрическая система отсчета (координат)* с началом координат в центре земного шара. Геоцентрическая система является частным случаем более общей планетоцентрической системы координат, в которой начало помещено в центре планеты. Другим частным случаем планетоцентрической системы является луноцентрическая или селеноцентрическая система, начало координат которой помещено в центре Луны.

Планетоцентрическими системами координат обычно пользуются при исследовании задач движения космических летательных аппаратов

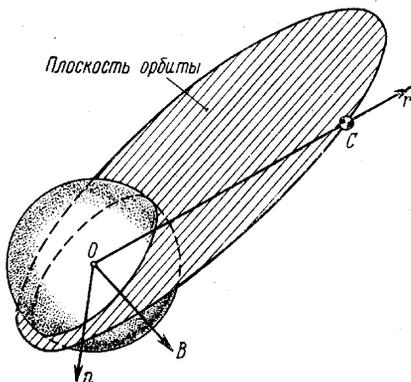


Рис. 3.2. Орбитальная система координат

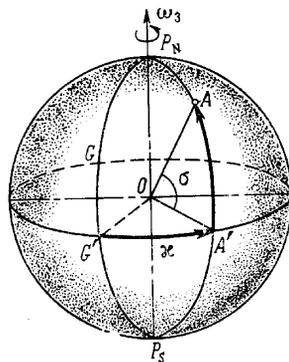


Рис. 4.2. Географическая система координат

в сфере действия планет, т. е. когда рассматривается перелет от Земли к Луне или от какой-либо одной планеты солнечной системы к другой планете.

3. *Гелиоцентрическая система отсчета (координат)*. Начало координат этой системы помещается в центре Солнца. Гелиоцентрической системой координат удобно пользоваться при исследовании тех фаз движения космических кораблей, на которых это движение происходит в основном под действием притяжения Солнца (см. гл. XIV), т. е. этой системой пользуются при изучении фазы движения космического корабля в сфере действия Солнца.

4. В *орбитальной системе* начало координат помещается в центре притягивающего тела (в фокусе орбиты), как это показано на рис. 3.2. Пользование орбитальной системой координат иногда удобно при исследовании движения космических кораблей.

Помимо расположения *начала координат*, всякая система координат характеризуется еще *основной плоскостью* и *основным направлением*.

В качестве основной плоскости может быть принята какая-либо одна из координатных плоскостей, например плоскость  $xOz$ ; в качестве основного направления можно взять направление какой-либо одной координатной оси, например оси  $Ox$ . В топоцентрической системе отсчета (в частности в системе координат, связанной с поверхностью Земли и именуемой в дальнейшем для краткости *земной поверхностной системой*) в качестве основной плоскости рационально выбрать *местную горизонтальную плоскость*, а в качестве основного направления — касательную к географической параллели, направленную с запада на восток.

В практике астрономических наблюдений широко используются *географические координаты*, связанные с Землей. Начало географических координат (рис. 4.2) поме-

щается в центре Земли, основной плоскостью является плоскость земного экватора, а за основное направление принимается направление гринвичского или пулковского меридиана  $P_NGG'P_S$ .

Напомним, что географическим меридианом какой-либо точки  $A$ , расположенной на поверхности Земли, называется большой полукруг  $P_NAA'P_S$ , проходящий через точку  $A$  и географические полюсы Земли  $P_N$  и  $P_S$ . За нулевой или начальный географический меридиан обычно принимают географический меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию в Англии.

Положение любой точки на поверхности Земли определяется географической широтой  $\sigma$  и географической долготой  $\kappa$ . Если принять, что Земля представляет собой шар постоянного радиуса  $r_3=6371$  км, то географическая широта  $\sigma$  может быть измерена дугой меридиана от экватора до данной точки, а географическая долгота  $\kappa$  — дугой экватора от начального меридиана до меридиана, проходящего через данную точку.

Поскольку на самом деле Земля представляет собой не шар, а сфероид с неоднородным распределением масс, для каждой точки поверхности приходится рассматривать три вида географической широты: астрономическую, геоцентрическую и геодезическую. Более подробные сведения по этому вопросу можно получить, например, в [3].

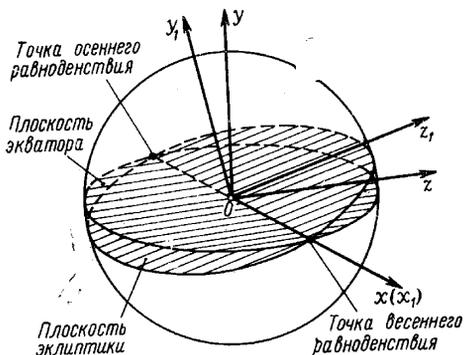


Рис. 5.2. Геоцентрическая экваториальная  $(x, y, z)$  и эклиптическая  $(x_1, y_1, z_1)$  системы координат

В планетоцентрической (в частности, в геоцентрической) системе координат за основную плоскость может быть принята *экваториальная* (плоскость земного экватора). За основное направление при этом выбирают точку весеннего равноденствия (рис. 5.2), т. е. точку, в которой Солнце пересекает небесный экватор при переходе из южного полушария небесной сферы в северное. За основную плоскость в геоцентрической (или в более общем случае — планетоцентрической) системе координат можно принять также *плоскость эклиптики*<sup>1</sup> — плоскость, в которой лежит орбита Земли (планеты). Основное направление в этом случае остается таким же, как и в предыдущем случае, — в точку весеннего равноденствия (см. рис. 5.2).

За основную плоскость гелиоцентрической системы координат обычно принимают также *плоскость эклиптики*, а за основное направление — направление в точку весеннего равноденствия.

В случае орбитальной прямоугольной системы координат, в которой изучается движение космического корабля, за основную плоскость принимается *плоскость орбиты* (см. рис. 3.2). Направление в этом случае либо направление на перигеицентр (ближайшую к началу координат точку орбиты), либо направление линии узлов (см. § 4). Основное направление оси  $Or$  — это направление на движущуюся точку  $C$  (например искусственный спутник Земли). Оси  $Or$  (радиальная) и  $On$  (трансверсальная) лежат в плоскости орбиты, ось  $OB$  (бинормальная) перпендикулярна плоскости орбиты и образует правую систему координат.

В зависимости от конкретных условий рассматриваемой задачи используют прямоугольные, цилиндрические, сферические и полярные системы координат.

В дальнейшем нам придется встречаться главным образом с прямоугольными и полярными системами координат. Все такие системы координат будут определяться нами как правые системы, в которых поворот на  $90^\circ$  оси  $Ox$  до совмещения с осью  $Oy$  происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца луча  $Oz$ .

<sup>1</sup> Орбита Земли при этом принимается плоской.

Если задача заключается в исследовании движения материальной точки, то ее положение по отношению к системе отсчета в каждый момент времени вполне определяется тремя координатами (или соответствующим вектором положения точки). Если же стоит задача изучения движения тела (системы материальных точек), то для определения положения тела в каждый момент времени необходимо знать не только координаты какой-либо точки тела в этот момент времени (например координаты центра масс), но и *ориентацию* тела относительно системы отсчета. Ориентацию можно установить, рассматривая по отношению к системе отсчета положение какой-либо системы координат, связанной с телом. В качестве такой системы можно рассматривать систему координат,

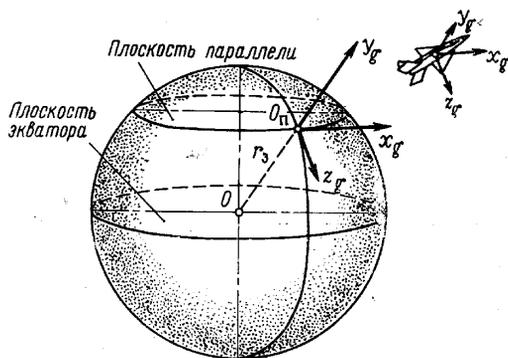


Рис. 6.2. Земная система координат

жестко связанную с контуром тела; такую систему координат в дальнейшем будем называть *связанной системой*.

При составлении уравнений движения летательного аппарата, рассматриваемого как материальная точка, приходится иметь дело с силами, действующими на летательный аппарат, которые удобно определять в различных системах координат. Эти системы координат подробно рассмотрены ниже.

Векторное уравнение движения летательного аппарата относительно той или иной принятой системы отсчета можно заменить тремя скалярными уравнениями, описывающими движение в проекциях на оси какой-либо системы координат. Выбор этой системы координат *совершенно произволен*. Направление этих осей координат может либо совпадать, либо не совпадать с направлением осей координат системы отсчета.

В дальнейшем при исследовании траекторий движения летательного аппарата будем пользоваться главным образом скоростной системой координат, жестко связанной с траекторией полета; более подробное описание этой системы координат приведено ниже.

Дадим описание нескольких систем координат, с которыми в дальнейшем мы будем встречаться.

1. **Земная система координат.** Начало координат земной системы помещается в центре масс летательного аппарата; направление координатных осей совпадает с направлением осей координат земной поверхностной системы отсчета. Таким образом, ось  $Ox_g$  направлена с запада на восток, параллельно касательной к географической параллели. Ось  $Oy_g$  земной системы координат направлена по продолжению радиуса, соединяющего центр Земли с центром масс летательного аппарата. Ось  $Oz_g$  лежит в плоскости меридиана и направлена с севера на юг, так что земная система координат — правая система (рис. 6.2).

Координатная плоскость  $x_g Oz_g$  параллельна *местной горизонтальной плоскости*; очевидно, местная горизонтальная плоскость нормальна к радиусу земного шара.

Координатную плоскость  $x_g Oy_g$  называют *местной вертикальной плоскостью*; местная вертикальная плоскость всегда содержит радиус земного шара<sup>1</sup>.

Вследствие шарообразности Земли и ее суточного вращения в процессе полета летательного аппарата местные горизонтальная и вертикальная плоскости изменяют свое положение в пространстве.

2. При решении некоторых задач динамики полета иногда пользуются *стартовой системой координат*, например, при исследовании движения баллистической ракеты [2].

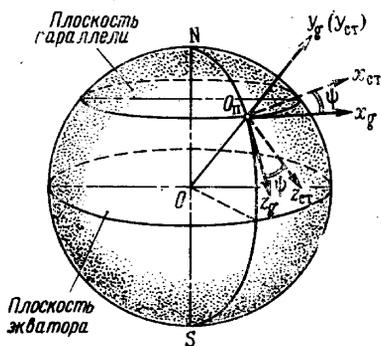


Рис. 7.2. К определению стартовой системы координат

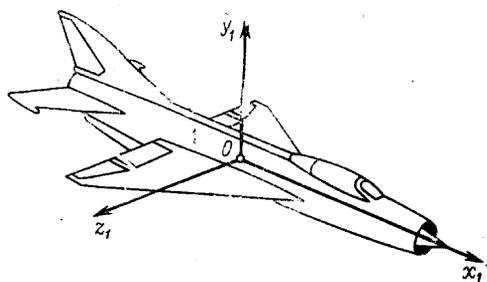


Рис. 8.2. Связанная с летательным аппаратом система координат

Положение стартовой системы координат относительно земной поверхностной системы определяется ее поворотом в местной горизонтальной плоскости на некоторый угол  $\psi$ , определяющий направление прицеливания по отношению к касательной к географической параллели. Таким образом, направление осей  $Ox_{ст}$  относительно оси  $Ox_g$  составляет угол  $\psi$ . Под этим же углом  $\psi$  направлена ось  $Oz_{ст}$  по отношению к оси  $Oz_g$ . Оси  $Oy_{ст}$  и  $Oy_g$  обеих систем совпадают (рис. 7.2).

2. Связанной с летательным аппаратом системой осей координат (рис. 8.2) будем называть систему, начало которой помещено в центре масс летательного аппарата; оси  $Ox_1$  и  $Oy_1$  расположены в вертикальной плоскости симметрии летательного аппарата и направлены вдоль его главных осей инерции. Так как в большинстве случаев направление главных осей инерции летательных аппаратов мало отличается от направления его геометрических осей, то ось  $Ox_1$  можно считать направленной вдоль оси корпуса аппарата, а ось  $Oy_1$  — по перпендикуляру к оси  $Ox_1$ , лежащему в вертикальной плоскости симметрии. Ось  $Oz_1$  перпендикулярна плоскости симметрии летательного аппарата и образует правую систему координат.

Приведенное определение связанной системы координат (в котором оси координат параллельны главным осям инерции) обусловлено простотой последующих выражений; при таком определении в уравнения движения не входят центробежные моменты инерции летательного аппарата, так что выражения получаются более простыми.

<sup>1</sup> Местных вертикальных плоскостей можно провести бесконечное множество; среди этого множества целесообразно выделить плоскость меридиана, содержащего ось  $Oz_g$ , или плоскость, содержащую вектор скорости  $\bar{V}$ .

Положение связанной системы относительно земной системы координат определяется тремя углами: углом тангажа  $\theta$ , углом рысканья  $\psi$  и углом крена  $\gamma$  (рис. 9.2).

Углом тангажа  $\theta$  называется угол между направлением связанной оси  $Ox_1$  и местной горизонтальной плоскостью.

Углом рысканья  $\psi$  будем называть угол между проекцией связанной оси  $Ox_1$  на местную горизонтальную плоскость и направлением земной оси  $Ox_g$ . Так как, как отмечено выше, в общем случае земная система координат неинерциальна, то направление оси  $Ox_g$  в пространстве с течением времени изменяется, поэтому сам по себе угол рысканья  $\psi$  не может определить положение летательного аппарата в инерциальном прост-

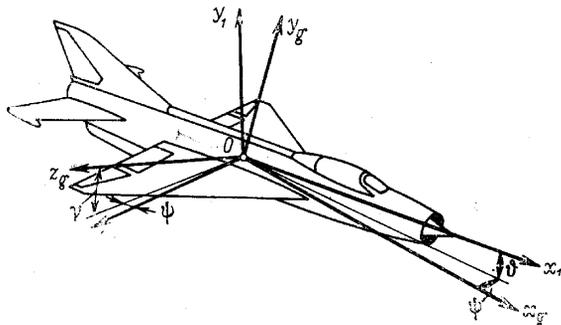


Рис. 9.2. Связанная и земная системы координат

ранстве в каждый момент времени, а определяет только его положение по отношению к текущим положениям местной горизонтальной и вертикальной плоскостей.

Наконец, *угол крена*  $\gamma$  — угол между вертикальной плоскостью симметрии летательного аппарата и местной вертикальной плоскостью, содержащей ось  $Ox_1$ .

Найдем связь между углами тангажа, рысканья и крена, с одной стороны, и проекциями  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  вектора угловой скорости  $\omega$  на оси связанной системы координат, — с другой.

Пусть в некоторый начальный момент времени положение связанной системы координат совпадает с положением земной системы координат. Осуществим последовательно *три* поворота вокруг осей координат так, чтобы система, связанная с аппаратом, заняла новое положение. Последовательность поворотов обусловлена введенными выше тремя углами  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$ .

Вначале повернем связанную систему вокруг оси  $Oy_g$  на произвольный угол; этот угол поворота согласно определению будет углом рысканья  $\psi$  (рис. 10.2).

Далее осуществим также произвольный поворот около оси  $Oz'$ ; этот угол поворота, очевидно, есть угол тангажа  $\theta$  (рис. 11.2).

Наконец, повернем систему относительно оси  $Ox_1$  снова на произвольный угол, который, очевидно, будет углом крена  $\gamma$  (рис. 12.2).

В результате указанных поворотов получим три вектора угловых скоростей: при повороте вокруг оси  $Oy_g$  — вектор  $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$  вдоль оси  $Oy_g$ , при втором повороте — вектор  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  вдоль оси  $Oz'$  и при третьем повороте — вектор  $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$  вдоль оси  $Ox_1$ . Проектируя векторы

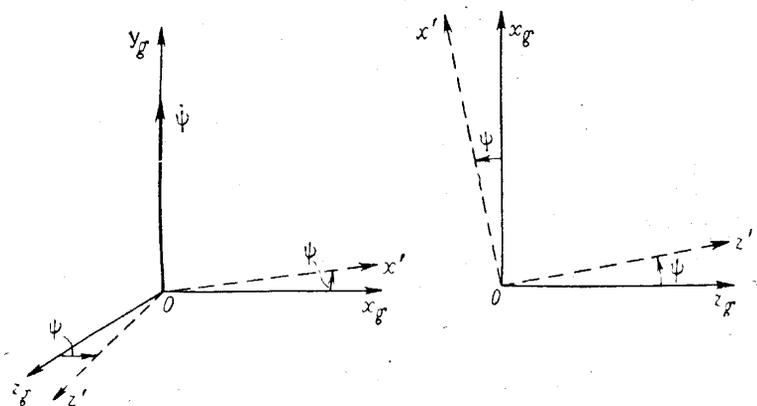


Рис. 10.2. Поворот вокруг оси  $Oy_g$

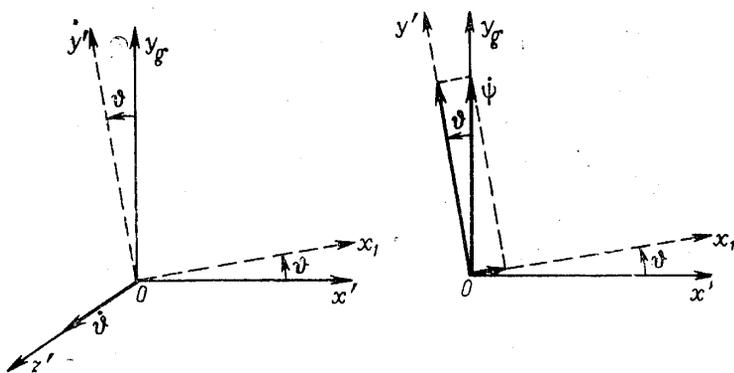


Рис. 11.2. Поворот вокруг оси  $Oz'$

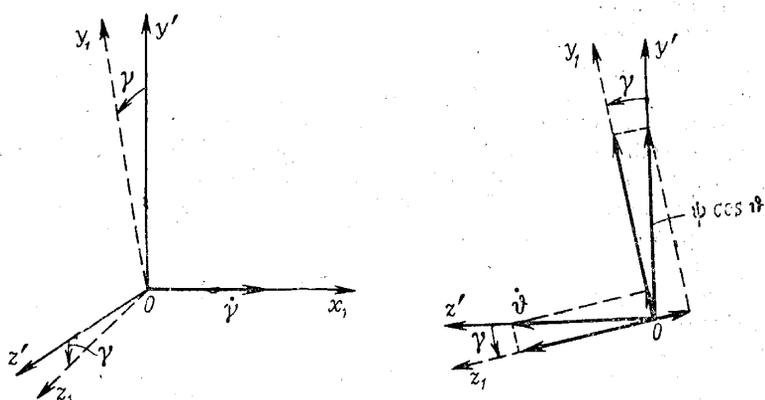


Рис. 12.2. Поворот вокруг оси  $Ox_1$

$\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$  и  $\dot{\gamma}$  на направление осей координат  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ , получаем

$$\omega_{x1} = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad (7.2)$$

$$\omega_{y1} = \omega_y' \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma, \quad (8.2)$$

$$\omega_{z1} = \dot{\vartheta} \cos \gamma - \omega_y' \sin \gamma = \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma. \quad (9.2)$$

Уравнения (7.2) — (9.2) определяют проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат в зависимости от величины углов  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$  и их производных.

Решая эти уравнения относительно неизвестных  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$  и  $\dot{\gamma}$ , получаем следующие выражения:

$$\dot{\vartheta} = \omega_{y1} \sin \gamma + \omega_{z1} \cos \gamma, \quad (10.2)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_{x1} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma). \quad (11.2)$$

$$\dot{\psi} = \sec \vartheta (\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma). \quad (12.2)$$

3. При решении многих задач динамики уравнения равновесия сил удобно, как уже упоминалось, записывать в *скоростной системе координат, связанной с траекторией полета летательного аппарата.*

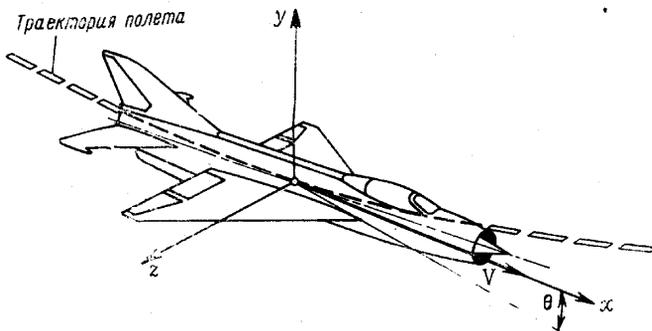


Рис. 13.2. Скоростная система координат

Начало координат такой системы помещается также в центре масс летательного аппарата. Ось  $Ox$  направлена параллельно вектору скорости полета летательного аппарата (рис. 13.2). Ось  $Oy$  направлена по перпендикуляру к оси  $Ox$ , лежащему в местной вертикальной плоскости, содержащей вектор  $\vec{V}$ . Ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости  $xOy$  и образует правую систему осей координат.

Рассмотренная система координат отличается от часто применяемой в экспериментальной аэродинамике *поточной* системы координат различной ориентацией осей  $Oy_n$  и  $Oy$ : в поточной системе координат ось  $Oy_n$  расположена в вертикальной плоскости симметрии летательного аппарата. Таким образом, плоскость  $x_nOy_n$  поточной системы наклонена к плоскости  $xOy$  системы координат, связанной с траекторией полета летательного аппарата, на угол  $\gamma_c$ , который можно назвать углом крена.

Положение скоростной системы координат относительно земной системы определяется двумя углами:  $\theta$  и  $\psi_c$ .

*Углом наклона траектории полета летательного аппарата к местной горизонтальной плоскости* называют угол  $\theta$  между вектором скорости полета и местной горизонтальной плоскостью.

*Углом пути*, или, как будем называть его в дальнейшем, *углом курса* называют угол  $\psi_c$  между проекцией вектора скорости на местную гори-

горизонтальную плоскость и некоторым направлением, условно принятым за начальное. За такое направление примем направление оси  $Ox_g$ . По отношению к углу курса  $\psi_c$  следует сделать то же замечание, что и по отношению к углу рысканья  $\psi$ .

Угол  $\gamma_c$  между плоскостями  $xOy$  скоростной системы и  $x_pOy_p$  поточной системы есть угол между осью  $Oy_p$  поточной системы и местной вертикальной плоскостью, содержащей вектор скорости  $\vec{V}$ .

Положение скоростной системы координат относительно земной может быть определено в результате *двух* последовательных поворотов.

Вначале пусть скоростная система совпадает с земной. Осуществим поворот скоростной системы вокруг оси  $Oy_g$  на некоторый угол, который согласно определению будет углом курса  $\psi_c$ . При этом вдоль оси  $Oy_g$  получим вектор угловой скорости  $\dot{\psi}_c$  (рис. 14а.2). Далее осуществим по-

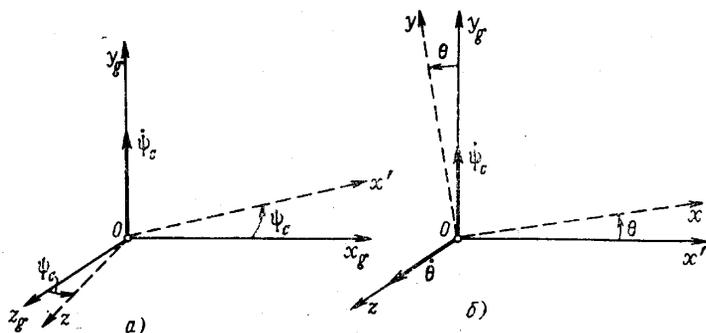


Рис. 14.2.

а — поворот вокруг оси  $Oy_g$ ; б — поворот вокруг оси  $Oz$

ворот системы вокруг оси  $Oz$  (рис. 14б.2) на некоторый угол, который согласно определению будет углом  $\theta$  наклона траектории к местной горизонтальной плоскости. При этом вдоль оси  $Oz$  получим вектор угловой скорости  $\dot{\theta}$ . В результате придем к таким соотношениям:

$$\omega_x = \dot{\psi}_c \sin \theta, \quad (13.2)$$

$$\omega_y = \dot{\psi}_c \cos \theta, \quad (14.2)$$

$$\omega_z = \dot{\theta}. \quad (15.2)$$

4. Летательный аппарат ориентируют относительно вектора скорости набегающего потока двумя углами:  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Углом атаки*  $\alpha$  называют угол между проекцией вектора скорости на вертикальную плоскость симметрии аппарата и связанной осью  $Ox_1$  летательного аппарата.

*Углом скольжения*  $\beta$  называют угол между вектором скорости и вертикальной плоскостью симметрии летательного аппарата.

Аэродинамические силы, действующие на летательный аппарат, определяются обычно в аэродинамических лабораториях в полусвязанной системе координат.

Начало координат полусвязанной системы помещается по-прежнему в центре масс летательного аппарата. Ось  $Ox'$  полусвязанной системы направлена параллельно проекции вектора скорости полета на вертикальную плоскость симметрии летательного аппарата. Ось  $Oy'$  полусвязанной системы перпендикулярна оси  $Ox'$  и лежит в вертикальной плоскости симметрии летательного аппарата. Наконец, ось  $Oz'$  полусвязан-

ной системы перпендикулярна плоскости  $x'Oy'$  и образует правую систему координат.

Положение вектора скорости по отношению к полусвязанной системе осей координат определяется углом скольжения  $\beta$ .

Следует заметить, что углы крена  $\gamma$  и  $\gamma_c$  в связанной и поточной системах координат не совпадают друг с другом. Эти углы связаны соотношением<sup>1</sup>

$$\sin \gamma_c = \frac{\sin \theta \sin \beta + \cos \theta \sin \gamma}{\cos \theta \cos \beta}. \quad (16.2)$$

В случае полета без скольжения ( $\beta=0$ ) и с нулевым углом атаки ( $\alpha=0$ ) по уравнению (16.2) получаем [см. уравнение (9.2)]

$$\cos \gamma = \cos \gamma_c \quad (17.2)$$

так что в этом случае  $\gamma = \gamma_c$ .

Между углами атаки  $\alpha$ , скольжения  $\beta$ , наклона траектории к местной горизонтальной плоскости  $\theta$ , крена  $\gamma$  и тангажа  $\phi$  существует следующая связь:

$$\sin \phi = \sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta (\sin \alpha \cos \gamma_c + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_c). \quad (18.2)$$

В случае  $\beta=0$  уравнение (18.2) несколько упрощается и принимает вид

$$\sin \phi = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \cos \gamma_c. \quad (19.2)$$

Наконец, в случае прямолинейного полета без крена и скольжения между углами  $\phi$ ,  $\theta$  и  $\alpha$  получается следующее простое соотношение:

$$\phi = \theta + \alpha. \quad (20.2)$$

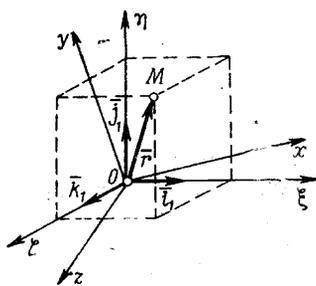


Рис. 15.2. К повороту осей координат

**Поворот осей координат.** Рассмотрим две прямоугольные правые системы координатных осей: подвижную  $Oxyz$  и неподвижную (фиксированную)  $O\xi\eta\zeta$  с общим началом в центре  $O$  (рис. 15.2). Предполагаются известными декартовы координаты  $(\xi, \eta, \zeta)$  некоторой точки  $M$  в неподвижной системе координат. Требуется найти декартовы координаты  $(x, y, z)$  точки в подвижной системе отсчета  $Oxyz$ .

Обозначим через  $\bar{r}$  вектор, соединяющий точку  $M$  с началом  $O$ , и через  $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$  и  $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2$  — единичные векторы (орты) соответственно неподвижных и подвижных осей. Осям  $O\xi$  и  $Ox$  придадим первый порядковый номер, осям  $O\eta$  и  $Oy$  — второй и осям  $O\zeta$  и  $Oz$  — третий.

Вектор  $\bar{r}$  для обеих систем осей можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \xi \bar{i}_1 + \eta \bar{j}_1 + \zeta \bar{k}_1, \\ \bar{r} &= x \bar{i}_2 + y \bar{j}_2 + z \bar{k}_2. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Умножив скалярно (см. стр. 23) равенство (21.2) на единичные орты  $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2$ , получим

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi (\bar{i}_2 \bar{i}_1) + \eta (\bar{i}_2 \bar{j}_1) + \zeta (\bar{i}_2 \bar{k}_1), \\ y &= \xi (\bar{j}_2 \bar{i}_1) + \eta (\bar{j}_2 \bar{j}_1) + \zeta (\bar{j}_2 \bar{k}_1), \\ z &= \xi (\bar{k}_2 \bar{i}_1) + \eta (\bar{k}_2 \bar{j}_1) + \zeta (\bar{k}_2 \bar{k}_1). \end{aligned} \right\} \quad (22.2)$$

<sup>1</sup> Эти соотношения можно получить с помощью табл. 2.2 и 3.2.

Для самого общего случая, принимая во внимание (17.1), формулы (22.2) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \varphi_{11} \xi + \cos \varphi_{12} \eta + \cos \varphi_{13} \zeta, \\ y &= \cos \varphi_{21} \xi + \cos \varphi_{22} \eta + \cos \varphi_{23} \zeta, \\ z &= \cos \varphi_{31} \xi + \cos \varphi_{32} \eta + \cos \varphi_{33} \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (23.2)$$

где через  $\varphi_{nm}$  обозначен угол, образованный подвижной осью с порядковым номером  $n$  (при  $n=1, 2, 3$ ), с неподвижной осью с порядковым номером  $m$  (при  $m=1, 2, 3$ ).

В матричной форме записи формула (23.2) будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{11} & \cos \varphi_{12} & \cos \varphi_{13} \\ \cos \varphi_{21} & \cos \varphi_{22} & \cos \varphi_{23} \\ \cos \varphi_{31} & \cos \varphi_{32} & \cos \varphi_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} \quad (24.2)$$

Если от подвижной системы координат  $Oxyz$  потребуется перейти к новой системе подвижных осей  $Ox'y'z'$ , то координаты точки  $M$  определятся по формуле

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \beta_{11} & \cos \beta_{12} & \cos \beta_{13} \\ \cos \beta_{21} & \cos \beta_{22} & \cos \beta_{23} \\ \cos \beta_{31} & \cos \beta_{32} & \cos \beta_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad (25.2)$$

Через  $\beta$  здесь обозначен угол между осью системы  $Oxyz$  с номером  $m$  и осью системы  $Ox'y'z'$  с номером  $l$  (при  $m=l=1, 2, 3$ ).

Формулы (24.2) и (25.2) можно записать в более сжатом виде:

$$\bar{r}_1 = A\bar{r}, \quad (26.2)$$

$$\bar{r}_2 = B\bar{r}_1 \quad (27.2)$$

или

$$\bar{r}_2 = B(A\bar{r}) = (BA)\bar{r} \quad (28.2)$$

при принятых обозначениях

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} = \bar{r}, \quad \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \bar{r}_1, \quad \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \bar{r}_2,$$

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi_{11} & \cos \varphi_{12} & \cos \varphi_{13} \\ \cos \varphi_{21} & \cos \varphi_{22} & \cos \varphi_{23} \\ \cos \varphi_{31} & \cos \varphi_{32} & \cos \varphi_{33} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} \cos \beta_{11} & \cos \beta_{12} & \cos \beta_{13} \\ \cos \beta_{21} & \cos \beta_{22} & \cos \beta_{23} \\ \cos \beta_{31} & \cos \beta_{32} & \cos \beta_{33} \end{vmatrix} = B.$$

В самом общем случае переход от неподвижной системы осей координат к подвижной осуществляется путем трех последовательных поворотов на три Эйлера угла. Для того чтобы осуществить такой переход с помощью полученных выше формул, надо для каждого из трех поворотов найти соответствующие матрицы поворотов  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  и составить общую матрицу поворота

$$A = A_3 A_2 A_1. \quad (29.2)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что в матрице-произведении  $A$  множители  $A_i$  следуют *слева направо* в порядке, *обратном* последовательности производимых поворотов.

В том случае, когда надо осуществить *обратный* переход, например от подвижной системы  $Oxyz$  к неподвижной системе  $O\xi\eta\zeta$ , надо также в самом общем случае провести три последовательных поворота, но только уже в обратном порядке и в обратном направлении. Полученную в этом случае матрицу

$$B = B_1 B_2 B_3$$

называют обычно матрицей *проективных коэффициентов*. Матрица  $B$  является транспонированной (см. стр. 28) по отношению к матрице  $A$ .

В качестве иллюстрации изложенного выше рассмотрим, как осуществляется переход от *земной* системы координатных осей, принимаемой за неподвижную, к системе осей, *связанных с летательным аппаратом*.

В начальный момент времени оси  $Ox_g y_g z_g$  земной системы и оси  $Ox_1 y_1 z_1$  связанной с летательным аппаратом системы совмещены и имеют общее начало  $O$  (в центре масс летательного аппарата).

*Первый поворот* осуществим вокруг оси  $Oy_g$  (см. рис. 10.2) на угол рысканья  $\psi$  (причем  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ). В результате получим систему отсчета  $Ox'y'z'$ , в которой  $Oy' \equiv Oy_g$ . Углы  $\varphi_{nm}$  между осями рассматриваемых систем будут

|       | $Ox_g$         | $Oy_g$  | $Oz_g$         |
|-------|----------------|---------|----------------|
| $Ox'$ | $\psi$         | $\pi/2$ | $\pi/2 + \psi$ |
| $Oy'$ | $\pi/2$        | 0       | $\pi/2$        |
| $Oz'$ | $\pi/2 - \psi$ | $\pi/2$ | $\psi$         |

Матрица, с помощью которой осуществляется первый поворот, имеет вид

$$A_1 = \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix}$$

*Второй поворот* на угол тангажа  $\vartheta$  (причем  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ) производится вокруг оси  $Oz'$  (см. рис. 11.2). После второго поворота получаем систему  $Ox''y''z''$ , в которой ось  $Oz'' = Oz'$ , а ось  $Ox'' = Ox_1$  занимает окончательное положение.

Углы  $\varphi_{nm}$  между осями систем  $Ox''y''z''$  и  $Ox'y'z'$  будут

|               | $Ox'$               | $Oy'$               | $Oz'$   |
|---------------|---------------------|---------------------|---------|
| $Ox'' = Ox_1$ | $\vartheta$         | $\pi/2 - \vartheta$ | $\pi/2$ |
| $Oy''$        | $\pi/2 + \vartheta$ | $\vartheta$         | $\pi/2$ |
| $Oz''$        | $\pi/2$             | $\pi/2$             | 0       |

Матрица  $A_2$ , с помощью которой осуществляется второй поворот,

$$A_2 = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Наконец, *третий поворот* относительно оси  $Ox''$  на угол крена  $\gamma$  дает окончательное положение осей  $Oy_1$  и  $Oz_1$  (см. рис. 12.2).

Углы  $\varphi_{nm}$  между осями систем  $Ox''y''z''$  и  $Ox_1y_1z_1$  будут

|        | $Ox''$  | $Oy''$           | $Oz''$           |
|--------|---------|------------------|------------------|
| $Ox_1$ | 0       | $\pi/2$          | $\pi/2$          |
| $Oy_1$ | $\pi/2$ | $\gamma$         | $\pi/2 - \gamma$ |
| $Oz_1$ | $\pi/2$ | $\pi/2 + \gamma$ | $\gamma$         |

Матрица  $A_3$  для осуществления поворота относительно оси  $Ox''$  запишется так:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Матрица-произведение

$$A = A_3 A_2 A_1$$

согласно правилу (см. гл. I) перемножения матриц получается

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi & \cos \gamma \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi & -\sin \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \cos \gamma \cos \psi \end{pmatrix}$$

Транспонируя матрицу  $A$  в матрицу  $B$ , можно получить формулы для перехода от связанной системы координат к земной; строки матрицы  $A$  станут в этом случае столбцами матрицы  $B$ .

Таким образом, используя аппарат матричного преобразования, можно получить матрицы перехода для различных систем координатных осей и на основе их составить таблицы направляющих косинусов.

В табл. 2.2 и 3.2 приведены соответствующие направляющие косинусы для перехода к скоростной системе координат от других систем (земной, связанной, полусвязанной и поточной), а также для перехода к земной системе координат от скоростной, связанной и полусвязанной систем.

Таблица 2.2

**Переход от земной, связанной, полусвязанной и поточной систем координат к скоростной системе**

*Земные оси*

| Ось  | $Ox_g$                        | $Oy_g$           | $Oz_g$                        |
|------|-------------------------------|------------------|-------------------------------|
| $Ox$ | $\cos \vartheta \cos \psi_c$  | $\sin \vartheta$ | $-\cos \vartheta \sin \psi_c$ |
| $Oy$ | $-\sin \vartheta \cos \psi_c$ | $\cos \vartheta$ | $\sin \vartheta \sin \psi_c$  |
| $Oz$ | $\sin \psi_c$                 | 0                | $\cos \psi_c$                 |

*Связанные оси*

| Ось  | $Ox_1$   | $Oy_1$   | $Oz_1$                      |
|------|--|--|-----------------------------|
| $Ox$ | $\cos \alpha \cos \beta$   | $-\sin \alpha \cos \beta$  | $\sin \beta$                |
| $Oy$ | $\sin \alpha \cos \gamma_c + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_c$ | $\cos \alpha \cos \gamma_c - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma_c$ | $-\cos \beta \sin \gamma_c$ |
| $Oz$ | $\sin \alpha \sin \gamma_c - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_c$ | $\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_c + \cos \alpha \sin \gamma_c$ | $\cos \beta \cos \gamma_c$  |

*Полусвязанные оси*

| Ось  | $Ox'$                       | $Oy'$           | $Oz'$                       |
|------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|
| $Ox$ | $\cos \beta$                | 0               | $\sin \beta$                |
| $Oy$ | $\sin \beta \sin \gamma_c$  | $\cos \gamma_c$ | $-\cos \beta \sin \gamma_c$ |
| $Oz$ | $-\sin \beta \cos \gamma_c$ | $\sin \gamma_c$ | $\cos \beta \cos \gamma_c$  |

*Поточные оси*

| Ось  | $Ox_{\Pi}$ | $Oy_{\Pi}$      | $Oz_{\Pi}$       |
|------|------------|-----------------|------------------|
| $Ox$ | 1          | 0               | 0                |
| $Oy$ | 0          | $\cos \gamma_c$ | $-\sin \gamma_c$ |
| $Oz$ | 0          | $\sin \gamma_c$ | $\cos \gamma_c$  |

Таблица 3.2

**Переход от скоростной, связанной и полусвязанной систем координат к земной системе**

*Скоростные оси*

| Ось    | $Ox$                       | $Oy$                       | $Oz$          |
|--------|----------------------------|----------------------------|---------------|
| $Ox_g$ | $\cos \theta \cos \psi_c$  | $-\sin \theta \cos \psi_c$ | $\sin \psi_c$ |
| $Oy_g$ | $\sin \theta$              | $\cos \theta$              | 0             |
| $Oz_g$ | $-\cos \theta \sin \psi_c$ | $\sin \theta \sin \psi_c$  | $\cos \psi_c$ |

*Связанные оси*

| Ось    | $Ox_1$                      | $Oy_1$  | $Oz_1$   |
|--------|-----------------------------|---|--|
| $Ox_g$ | $\cos \psi \cos \vartheta$  | $-\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma$ | $\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma$ |
| $Oy_g$ | $\sin \vartheta$            | $\cos \vartheta \cos \gamma$                                    | $-\cos \vartheta \sin \gamma$                                  |
| $Oz_g$ | $-\cos \vartheta \sin \psi$ | $\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma$  | $\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma$ |

| Ось    | $Ox'$  | $Oy'$  | $Oz'$   |
|--------|--|--|---|
| $Ox_g$ | $\cos \alpha \cos \vartheta \cos \psi -$<br>$-\sin \alpha (\sin \psi \sin \gamma -$<br>$-\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma)$  | $\sin \alpha \cos \vartheta \cos \psi +$<br>$+\cos \alpha (\sin \psi \sin \gamma -$<br>$-\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma)$  | $\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma +$<br>$+\sin \psi \cos \gamma$                    |
| $Oy_g$ | $\cos \alpha \sin \vartheta -$<br>$-\sin \alpha \cos \vartheta \cos \gamma$  | $\sin \alpha \sin \vartheta +$<br>$+\cos \alpha \cos \vartheta \cos \gamma$  | $-\cos \vartheta \sin \gamma$   |
| $Oz_g$ | $-\cos \alpha \cos \vartheta \sin \psi -$<br>$-\sin \alpha (\cos \psi \sin \gamma +$<br>$+\sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)$ | $-\sin \alpha \cos \vartheta \sin \psi +$<br>$+\cos \alpha (\cos \psi \sin \gamma +$<br>$+\sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)$ | $\cos \psi \cos \gamma -$<br>$-\sin \vartheta \sin \psi \times$<br>$\times \sin \gamma$ |

Аналогичные таблицы направляющих косинусов и соответствующие им матрицы перехода можно получить и для различных систем (геоцентрических, планетоцентрических, гелиоцентрических и др.), применяемых для изучения полета внеатмосферных летательных аппаратов.

### § 3. Уравнения движения точки и тела переменного состава

С точки зрения механики летательный аппарат в самом общем случае представляет собой *тело переменного состава*.

Термин «тело переменного состава» означает, что в процессе движения тела к нему присоединяются или отделяются от него материальные частицы (тела), движущиеся с различными относительными скоростями. Присоединение или отделение частиц может происходить одновременно.

Если массы присоединяемых к телу частиц будут равны массам отделяемых за это же время частиц, масса тела не изменится — изменится только его состав. Таким образом, понятие о теле переменного состава является более общим по сравнению с понятием тела переменной массы, поскольку тело переменной массы всегда будет и телом переменного состава; тело переменного состава может иметь массу и переменной, и постоянной.

Механика тел переменного состава и переменной массы играет важную роль в изучении теории ракет и ракетных двигателей. В работах замечательного русского ученого К. Э. Циолковского [54] и [55] заложены основы динамики ракет, базирующиеся на механике тел с учетом переменной массы исследуемого объекта.

Тело переменного состава представляет собой совокупность точек переменного состава.

Рассмотрим сначала механику *точки переменной массы*, движение которой относительно некоторой неподвижной системы координат описывается уравнением И. В. Мещерского.

В основе вывода уравнения Мещерского лежит *гипотеза быстродействия* присоединяемых или отбрасываемых частиц. Согласно этой гипотезе при присоединении или отделении частиц происходит явление, подобное удару. Во время ударного силового воздействия за малый промежуток времени частицы приобретают относительную скорость; дальнейшее взаимодействие частиц с материальной точкой на этом прекращается.

Поскольку в ряде задач динамики полета может иметь место процесс одновременного присоединения и отделения частиц, рассмотрим вывод [30] *обобщенного уравнения Мещерского*. Решая задачу о движении точки переменного состава, будем в самом общем случае полагать, что в процессе движения к ней могут присоединяться и отделяться от нее час-

тицы не в равных количествах и с разными относительными и абсолютными скоростями.

Предположим, что относительно некоторой неподвижной системы координат  $Oxyz$  (рис. 16.2) движется точка переменной массы  $m(t)$ , абсолютная скорость которой в момент времени  $t$  пусть будет  $\bar{v}$ , и количество движения

$$\bar{Q}_0 = m\bar{v}. \quad (30.2)$$

Положим далее, что за некоторое время  $\Delta t$  точка массы  $m(t)$  отделяет (излучает) частицы массы  $\Delta m_1$  или присоединяет (поглощает) частицы массы  $\Delta m_2$ .

В первом случае, т. е. в случае отделения частиц, в момент времени

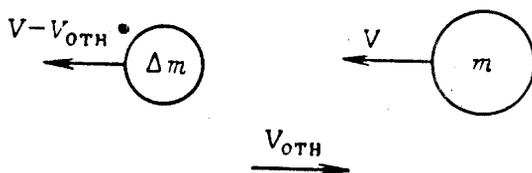


Рис. 16.2. К выводу уравнения Мещерского

( $t + \Delta t$ ) количество движения системы (излучающая точка плюс отделяемая частица)

$$\bar{Q}_1 = (m - \Delta m_1)(\bar{v} + \Delta \bar{v}_1) + \Delta m_1 \bar{u}_1, \quad (31.2)$$

где  $\Delta \bar{v}_1$  — изменение скорости излучающей точки вследствие отделения частицы массы  $\Delta m_1$  и  $\bar{u}_1$  — абсолютная скорость (скорость по отношению к системе координат  $Oxyz$ ) частицы, отделившейся в момент времени ( $t + \Delta t$ ).

Так как на систему внешние силы не действуют, то количество движения остается неизменным, т. е.

$$\bar{Q}_0 = \bar{Q}_1$$

или

$$m\bar{v} = (m - \Delta m_1)(\bar{v} + \Delta \bar{v}_1) + \Delta m_1 \bar{u}_1. \quad (32.2)$$

Пренебрегая малыми второго порядка, вместо (32.2) получим

$$m\Delta \bar{v}_1 \approx -\Delta m_1(\bar{u}_1 - \bar{v}). \quad (33.2)$$

Отсюда можно определить изменение скорости излучающей точки:

$$\Delta \bar{v}_1 = -\frac{\Delta m_1}{m}(\bar{u}_1 - \bar{v}). \quad (34.2)$$

Относя  $\Delta \bar{v}_1$  к интервалу времени  $\Delta t$  и устремляя  $\Delta t$  к нулю, получим ускорение излучающей точки

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dm_1}{dt}(\bar{u}_1 - \bar{v}). \quad (35.2)$$

Формулу (35.2) можно переписать, представив ее в виде

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = \frac{1}{m} \dot{m}_1(\bar{u}_1 - \bar{v}), \quad (36.2)$$

где через  $\dot{m}_1 = -\frac{dm_1}{dt}$  обозначен секундный расход, характеризующий интенсивность уменьшения массы движущейся точки  $m$  (ясно, что  $\dot{m}_1 > 0$ ).

Во втором случае, т. е. в случае присоединения частиц, в первоначальный момент времени  $t$  количество движения системы (основная точка  $m$  плюс присоединяемая частица  $\Delta m_2$ )

$$\bar{Q}_{20} = \bar{Q}_0 + \Delta m_2 \bar{u}_2 = m\bar{v} + \Delta m_2 \bar{u}_2. \quad (37.2)$$

Через  $\bar{u}_2$  в формуле (37.2) обозначена абсолютная скорость (скорость по отношению к системе координат  $Oxyz$ ) частицы  $\Delta m_2$  в момент времени  $t$ , т. е. до ее присоединения к основной точке массы  $m$ . В случае присоединения  $\bar{u}_2 < \bar{v}$ .

В момент времени  $(t + \Delta t)$  количество движения системы (основная точка плюс присоединяемая частица) будет уже

$$\bar{Q}_2 = (m + \Delta m_2)(\bar{v} + \Delta \bar{v}_2), \quad (38.2)$$

где  $\Delta \bar{v}_2$  — изменение скорости основной точки массы  $m$  за счет присоединения частицы массы  $\Delta m_2$ .

В этом случае, используя закон сохранения количества движения, получим

$$\bar{Q}_{20} = \bar{Q}_2$$

или

$$m\bar{v} + \Delta m_2 \bar{u}_2 = (m + \Delta m_2)(\bar{v} + \Delta \bar{v}_2). \quad (39.2)$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$m\Delta \bar{v}_2 = -\Delta m_2(\bar{v} - \bar{u}_2), \quad (40.2)$$

откуда

$$\Delta \bar{v}_2 = -\frac{1}{m} \Delta m_2(\bar{v} - \bar{u}_2), \quad (41.2)$$

и замедление движения основной точки вследствие присоединения частиц массы  $\Delta m_2$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \bar{v}_2}{\Delta t} \right) = \frac{d\bar{v}_2}{dt} = -\frac{1}{m} \frac{dm_2}{dt} (\bar{v} - \bar{u}_2)$$

или

$$\frac{d\bar{v}_2}{dt} = -\frac{1}{m} \dot{m}_2 (\bar{v} - \bar{u}_2). \quad (42.2)$$

Величина  $\dot{m}_2 = \frac{dm_2}{dt} > 0$  в формуле (42.2) характеризует интенсивность увеличения массы точки  $m$ .

До сих пор предполагалось, что внешние силы отсутствуют. На самом деле движение точки переменной массы  $m$  может происходить в силовом поле. За счет действующих внешних сил (например силы тяготения, аэродинамических сил, силы тяги движителя) скорость движущейся точки изменится за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t$  на некоторую величину  $\Delta \bar{v}_3$ . Это изменение скорости движения на основании второго закона Ньютона приближенно

$$\Delta \bar{v}_3 = \frac{1}{m} \bar{F} \Delta t. \quad (43.2)$$

Через  $\bar{F}$  в (43.2) обозначена равнодействующая всех внешних сил, действующих на точку массы  $m$ . Сила  $\bar{F}$ , действующая на точку массы

$m$ , вызовет в свою очередь ускорение или замедление движения

$$\frac{d\bar{v}_3}{dt} = \frac{1}{m} \bar{F} \quad (44.2)$$

и изменит количество движения на величину

$$d\bar{Q}_3 = \bar{F} dt.$$

Таким образом, под действием внешних сил и контактного взаимодействия присоединяемых или отделяемых частиц у движущейся точки переменной массы будут возникать соответствующие ускорения или замедления, оцениваемые величинами производных

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt}, \quad \frac{d\bar{v}_2}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{v}_3}{dt}.$$

В самом общем случае, когда движение точки переменной массы происходит в силовом поле и идет процесс одновременного присоединения и отделения частиц с массами  $dm_1$  и  $dm_2$ , на основании известной из механики аксиомы о независимости действия сил полное ускорение движущейся точки можно представить в виде следующей суммы:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_1}{dt} + \frac{d\bar{v}_2}{dt} + \frac{d\bar{v}_3}{dt} \quad (45.2)$$

или, используя формулы (36.2), (42.2) и (44.2),

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \dot{m}_1(\bar{u}_1 - \bar{v}) - \dot{m}_2(\bar{v} - \bar{u}_2). \quad (46.2)$$

Дифференциальное уравнение (46.2) точки переменной массы является *обобщенным уравнением Мещерского*. Это уравнение можно также переписать в несколько ином виде:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \dot{m}_1 \bar{v}_{a1} - \dot{m}_2 \bar{v}_{a2}, \quad (47.2)$$

обозначив через  $\bar{v}_{a1}$  и  $\bar{v}_{a2}$  относительные скорости отделяемых и присоединяемых частиц.

Относительная скорость  $\bar{v}_{a1}$  отделяемых частиц (скорость относительно излучающей точки, например летательного аппарата)

$$\bar{v}_{a1} = (\bar{u}_1 - \bar{v})$$

может быть получена, в частности, за счет сжигания топлива, находящегося на борту летательного аппарата.

Относительная скорость  $\bar{v}_{a2}$  присоединяемых частиц

$$\bar{v}_{a2} = (\bar{v} - \bar{u}_2)$$

может отличаться от нуля только за счет поля скоростей, создаваемого летательным аппаратом. Без большой погрешности при изучении динамики полета летательных аппаратов эту относительную скорость  $v_{a2}$  можно принять равной нулю. Тогда уравнение (47.2) принимает вид

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \dot{m}_T \bar{v}_a, \quad (48.2)$$

где  $-\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_T$  — секундный расход топлива. Именно в таком виде уравнение движения точки переменной массы было дано И. В. Мещерским.

Уравнение (48.2) дает для инженерной практики достаточную степень точности при проведении расчетов.

Нетрудно заметить, что слагаемое  $\dot{m}_r \bar{v}_a$  в уравнении (48.2) имеет размерность силы. Эта добавочная реактивная сила

$$\bar{R} = \dot{m}_r \bar{v}_a \quad (49.2)$$

является следствием контактного взаимодействия частиц и возникает при их отделении.

Уравнение (48.2) можно записать теперь так:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{R}. \quad (50.2)$$

Формулируем теперь основной закон Мещерского: для любого момента времени  $t$  при движении точки переменной массы произведение массы точки на ее ускорение равно геометрической сумме равнодействующей всех внешних сил  $\bar{F}$  и дополнительной реактивной силы  $\bar{R}$ .

В том случае, если относительная скорость излучаемых частиц  $\bar{v}_a$  будет равна нулю, уравнение Мещерского (50.2) принимает вид

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}, \quad (51.2)$$

т. е. имеет вид уравнения движения точки постоянной массы.

Уравнения движения точки переменной массы в скалярной форме можно получить, спроектировав уравнение (50.2) на оси координат подвижной системы  $Oxyz$ :

$$\left. \begin{aligned} m(t) \frac{dv_x}{dt} &= F_x + R_x, \\ m(t) \frac{dv_y}{dt} &= F_y + R_y, \\ m(t) \frac{dv_z}{dt} &= F_z + R_z. \end{aligned} \right\} \quad (52.2)$$

Дифференциальное уравнение Мещерского в общем случае можно проинтегрировать лишь с помощью численных методов. Однако, вводя ряд упрощающих предположений, можно найти простые решения и даже получить решение в квадратурах. В качестве примера рассмотрим одну из таких задач, которая носит название первой задачи Циолковского<sup>1</sup>.

**Первая задача К. Э. Циолковского.** Точка переменной массы движется в безвоздушном пространстве (вне поля тяготения). Единственной силой, действующей на точку, является реактивная сила, возникающая вследствие отделения частиц. Относительная скорость отделяемых частиц  $\bar{v}_a$  принимается постоянной по величине, коллинеарной вектору скорости  $\bar{v}$  и направленной в сторону, противоположную движению рассматриваемой точки. Поскольку по условию задачи  $\bar{F} = 0$ , уравнение Мещерского в векторной форме запишется в виде

$$m \dot{\bar{v}} = \bar{R}, \quad (53.2)$$

где

$$\bar{R} = \dot{m}_r \bar{v}_a = -\dot{m} \bar{v}_a.$$

<sup>1</sup> Вторая задача К. Э. Циолковского о движении материальной точки вверх по вертикали в однородном поле силы тяжести рассмотрена в его трудах [55] и подробно изложена в [30] и [26].

Проектируя уравнение (53.2) на направление движения, получим

$$m \frac{dv}{dt} = -\dot{m}v_a \quad (54.2)$$

или

$$dv = -v_a \frac{dm}{m}. \quad (54a.2)$$

Интегрируя далее уравнение (54a.2) при начальных условиях

$$t=0, m(0) = m_0,$$

получим формулу для определения скорости

$$v = v_0 - \int_{m_0}^m v_a \frac{dm}{m} \quad (55.2)$$

или

$$v = v_0 + \int_m^{m_0} v_a \frac{dm}{m}. \quad (55a.2)$$

Воспользовавшись формулой (55a.2), нетрудно определить конечную скорость движения точки  $v_k$ , которая будет иметь место в конце отделения частиц:

$$v_k = v_0 + \int_{m_k}^{m_0} v_a \frac{dm}{m}. \quad (56.2)$$

В этой формуле  $m_k$  — масса точки в конце процесса отделения частиц.

Поскольку сверхкритическая скорость<sup>1</sup> истечения  $v_a$ , как известно, постоянна, формулу для определения конечной скорости  $v_k$  можно записать в виде

$$v_k = v_0 + v_a \ln \frac{m_0}{m_k} \quad (57.2)$$

или

$$v_k = v_0 + gP_{уд} \ln \frac{m_0}{m_k}, \quad (57a.2)$$

где  $P_{уд}$  — удельная тяга — сила тяги, получающаяся при сжигании одного килограмма ( $кг$ ) топлива в одну секунду,  $v_a = gP_{уд}$ ;

$g$  — ускорение силы тяжести.

Формула (57a.2), полученная впервые К. Э. Циолковским, носит название *первой формулы Циолковского*. С помощью этой формулы можно определить конечную идеальную скорость одноступенчатой ракеты, движущейся вне поля тяготения. В этом случае движение ракеты заменяется движением некоторой материальной точки.

До сих пор рассматривалась динамика точки переменной массы. Несколько сложнее обстоит дело с исследованием механики (динамики) тела переменного состава. Хотя такое тело и представляет собой совокупность точек переменной массы, выводы, полученные при изучении динамики точки переменной массы, нельзя прямо применить к телу переменного состава.

Дело в том, что внутри контура тела при присоединении и отделении масс возникают дополнительные внутренние силы, которых не было в случае движения материальной точки и которые взаимодействуют с

<sup>1</sup> Истечение будет заведомо сверхкритическим, так как по условию задачи движение ракеты происходит в пустоте (давление  $p_H = 0$ ).

внешними силами, действующими на совокупность точек переменной массы.

Вопросами динамики тела переменного состава занимались многие исследователи, в том числе в нашей стране А. А. Космодемьянский, Ф. Р. Гантмахер, Л. М. Левин, В. М. Карагодин и др. [26], [30], [14]. Приведем основной результат, полученный Ф. Р. Гантмахером и Л. М. Левиным, опуская подробные доказательства.

В неинерциальной системе координат, связанной с неизменным контуром тела переменного состава, изменение количества движения

$$\frac{d\bar{Q}_{\text{ТВ}}}{dt} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{R}_{\text{кор}} - \frac{d\bar{Q}_{\text{отн}}}{dt}, \quad (58.2)$$

где  $\bar{Q}_{\text{ТВ}}$  — количество движения твердого тела;

$\bar{F}$  — вектор равнодействующей всех внешних сил;

$\bar{R} = m_t \bar{V}_a$  — реактивная сила;

$\bar{V}_a$  — относительная скорость точек, взаимодействующих с телом;

$\bar{R}_{\text{кор}}$  — кориолисова сила инерции, связанная с движением масс внутри контура тела, совершающего поступательное и вращательное движение;

$\frac{d\bar{Q}_{\text{отн}}}{dt}$  — изменение количества движения в относительном движении, равное результирующей сил, которые называются *вариационными*. Вариационные силы связаны с нестационарностью движения материальных точек внутри контура тела.

Записанный результат можно формулировать следующим образом: уравнения движения тела переменного состава, ограниченного неизменным контуром, можно написать, предположив, что в данный момент времени тело переменного состава затвердело, а к внешним силам, действующим на тело, добавлены реактивные силы, силы Кориолиса и вариационные силы.

Анализ показывает, что в тех задачах динамики, с которыми мы встретимся в этой книге, кориолисовы и вариационные силы, обусловленные процессами, происходящими внутри контура тела, значительно меньше по абсолютной величине, чем реактивные силы. Допустимо<sup>1</sup> поэтому в (58.2) пренебречь кориолисовыми и вариационными силами по сравнению с внешними  $\bar{F}$  и реактивными  $\bar{R}$  силами. При этом (58.2) принимает более простой вид

$$\frac{d\bar{Q}_{\text{ТВ}}}{dt} = \bar{F} + \bar{R}. \quad (59.2)$$

Полученное уравнение тождественно уравнению движения точки переменной массы.

#### § 4. Орбитальные движения тел. Законы Кеплера

Если движение тела (например космического корабля) происходит на достаточно большой высоте (порядка  $H > 80-100$  км), на которой плотность окружающего воздуха исчезающе мала, то аэродинамические силы, действующие на тело, получаются весьма малыми и ими в первом

<sup>1</sup> Такое допущение справедливо при исследовании траекторий летательных аппаратов. Как показано в [45], при изучении устойчивости движения за пределами атмосферы момент кориолисовых сил надо учитывать.

приближении можно пренебречь. Если к тому же и сила тяги, действующая на тело (космический корабль, баллистическую ракету), равна нулю, то единственными действующими силами будут силы притяжения. Движение тел при таких условиях называют орбитальным. Таким образом, *орбитальное движение* — это движение под действием только сил притяжения.

Тело, движущееся в пространстве, испытывает притяжение со стороны множества (теоретически — бесконечного числа) других тел, находящихся также в этом пространстве. Так, ракета, стартовавшая с Земли, испытывает притяжение Земли, Луны, Солнца, других планет солнечной системы и т. д. Однако величина сил притяжения этих небесных тел получается существенно различной.

В соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, согласно которому величина силы притяжения, действующей на единицу массы тела, пропорциональна массе притягивающего тела и обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами, наиболее сильное влияние оказывают небесные тела, ближайšie к рассматриваемому телу и имеющие достаточно большую массу.

Расстояния от каждого из притягивающих небесных тел до космического корабля с течением времени изменяются, следовательно, и силы притяжения этих тел. Поэтому определение движения тела с учетом притяжения многих тел — так называемая *задача  $n$  тел* — является довольно сложной задачей, и ее решение требует большой затраты вычислительного труда. В то же время, как показано в § 1 этой главы, основную роль играет сила притяжения только ближайшего к движущемуся телу небесного тела (например сила притяжения Земли). Это позволяет в первом приближении сложную задачу  $n$  тел заменить гораздо более простой *задачей двух тел*.

Задача двух тел рассматривает движение тела (космического корабля) в поле тяготения только одного небесного тела. Силу притяжения с достаточной степенью точности можно считать направленной к центру масс небесного тела. Такое поле тяготения называют *центральным*, или *кеплеровым полем тяготения*. В центральном поле тяготения сила притяжения направлена от центра масс притягиваемого тела к центру масс притягивающего тела; ее величина обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами.

Как известно, Кеплер в начале XVII в., анализируя результаты наблюдений Марса, проведенных астрономом Тихо де Браге, установил следующие законы движения планет, называемые *законами Кеплера*:

1. Орбита каждой планеты лежит в неподвижной плоскости, проходящей через центр Солнца, и является эллипсом, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор, соединяющий центры Солнца и планеты, ометает равные площади в равные промежутки времени.
3. Квадраты времени обращения планет пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца.

Знаменитый математик и механик Ньютон показал общемеханический смысл законов Кеплера, первоначально имевших чисто эмпирический характер.

Покажем, что орбита тела, движущегося в центральном поле тяготения, представляет собой коническое сечение.

Полная энергия единицы массы тела, движущегося со скоростью  $V$ , складывается из кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия равна, очевидно,  $V^2/2$ . По закону Ньютона сила притяжения на единицу массы тела

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

где  $r$  — расстояние от центра масс тела до центра притяжения и  $\mu$  — некоторая постоянная величина<sup>1</sup>

$$\mu = GM,$$

$G = 6,670 \cdot 10^{-8} [м^3 \cdot кг^{-1} \cdot сек^{-2}]$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса притягивающего тела; например, если притягивающим телом является Земля, масса которой  $M = 5,947 \cdot 10^{21} [кг]$ , то  $\mu \approx 4 \cdot 10^{14} [м^3 \cdot сек^{-2}]$ . Тогда потенциальная энергия

$$\int_{\infty}^r F dr = \int_{\infty}^r \frac{\mu}{r^2} dr = -\frac{\mu}{r}.$$

В силу закона сохранения энергии справедливо равенство

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_1^2}{2} - \frac{\mu}{r_1} = \text{const.} \quad (60.2)$$

Константу в правой части этого равенства можно обозначить через  $h/2$ . Тогда

$$h = V_1^2 - \frac{2\mu}{r_1} \quad (61.2)$$

и  $V_1, r_1$  соответствуют начальному моменту времени (началу орбитального движения).

Выберем инерциальную полярную систему координат<sup>2</sup> с полюсом  $O$  в центре притяжения, который принимается неподвижным (рис. 17.2). Радиус-вектор материальной точки  $m$ , совершающей плоское движение, обозначим через  $r$ , а угол, который составляет этот радиус с радиусом-вектором  $r_0$ , неподвижным в пространстве, обозначим  $\chi$ .

Тангенциальная составляющая скорости материальной точки

$$V_s = r\dot{\chi},$$

а радиальная составляющая

$$V_r = \dot{r},$$

так что полная скорость будет

$$V = \sqrt{V_s^2 + V_r^2} = \sqrt{r^2\dot{\chi}^2 + \dot{r}^2}. \quad (62.2)$$

Второй закон Кеплера в более широком механическом смысле утверждает, что момент количества движения тела, движущегося в центральном поле тяготения, с течением времени остается неизменным: при силе притяжения, направленной к центру, силы в направлении движения отсутствуют, так что нет причины, способной изменить количество движения тела. В силу этого закона справедливо равенство

$$V_s r = r^2 \dot{\chi} = \text{const} = c_1, \quad (63.2)$$

где

$$c_1 = V_{s1} r_1 = V_1 \cos \theta_1 r_1 \quad (64.2)$$

и  $\theta_1$  — угол между скоростью  $V_1$  и перпендикуляром к радиусу  $r_1$ . Поэтому

$$r^2 \dot{\chi}^2 = \frac{(r^2 \dot{\chi})^2}{r^2} = \frac{c_1^2}{r^2}.$$

Далее очевидно, что

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\chi} \frac{d\chi}{dt} = \dot{\chi} \frac{dr}{d\chi} = \frac{c_1}{r^2} \frac{dr}{d\chi}.$$

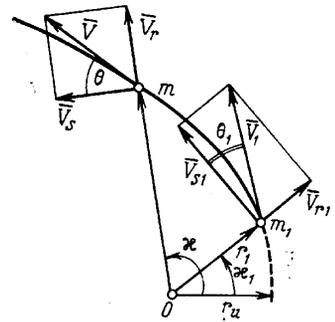


Рис. 17.2. Тангенциальная и радиальная составляющие скорости  $V$

<sup>1</sup> В дальнейшем, вследствие того что масса космического корабля мала по сравнению с массой притягивающего тела, влиянием притяжения корабля на движение притягивающего тела пренебрегаем.

<sup>2</sup> Об инерциальных системах см. § 2 гл. III.

Квадрат полной скорости тела

$$\begin{aligned}
 V^2 &= V_s^2 + V_r^2 = V_s^2 + \dot{r}^2 = \frac{c_1^2}{r^2} + \frac{c_1^2}{r^4} \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 = \\
 &= c_1^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left[ \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \right]^2 \right\},
 \end{aligned} \tag{65.2}$$

так как  $d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{dr}{r^2}$  и  $\left[ d\left(\frac{1}{r}\right) \right]^2 = \frac{(dr)^2}{r^4}$ .

Из сравнения (60.2) и (65.2) получаем

$$c_1^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left[ \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \right]^2 \right\} = \frac{2\mu}{r} + h$$

или

$$\left[ \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \right]^2 = -\left( \frac{1}{r} - \frac{\mu}{c_1^2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{c_1^4} + \frac{h}{c_1^2}. \tag{66.2}$$

Введем обозначение

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu}{c_1^2} = \rho \sqrt{\frac{\mu^2}{c_1^4} + \frac{h}{c_1^2}}. \tag{67.2}$$

Тогда производная

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} = \frac{d\rho}{dx} \sqrt{\frac{\mu^2}{c_1^4} + \frac{h}{c_1^2}}.$$

В новых обозначениях уравнение (66.2) принимает вид

$$\left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 = 1 - \rho^2$$

или

$$dx = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x - x_1 = \pm \arccos \rho, \quad \rho = \cos(x - x_1),$$

где  $x_1$  соответствует начальному моменту времени.

Подставив полученное выражение для  $\rho$  в (67.2), получим

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{c_1^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{c_1^4} + \frac{h}{c_1^2}} \cos(x - x_1).$$

Обозначив

$$\frac{c_1^2}{\mu} = p, \quad \sqrt{1 + \frac{hc_1^2}{\mu^2}} = e, \tag{68.2}$$

предыдущее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(x - x_1)}. \tag{69.2}$$

Из курса аналитической геометрии известно, что (69.2) представляет собой уравнение конического сечения в полярной системе координат с фокусом, помещенным в полюс;  $p$  называется *параметром кривой*,  $e$  — *эксцентриситетом кривой*. Известно также, что если  $e=0$ , то кривая второго порядка (коническое сечение) представляет собой окружность; при  $0 < e < 1$  коническое сечение есть эллипс, при  $e=1$  — парабола и при  $e > 1$  — гипербола.

Напишем теперь развернутые выражения для эксцентриситета  $e$  и параметра кривой  $p$  для случая, когда *притягивающим телом является Земля*, которую будем считать сферическим телом.

Прежде всего заметим, что на поверхности земного шара  $r=r_3$ , а согласно закону Ньютона сила притяжения на единицу массы тела  $F=g_0$ . В таком случае из условия

$$F = \frac{\mu}{r^2}$$

получаем

$$\mu = g_0 r_3^2. \quad (70.2)$$

Используя (70.2), а также выражения (61.2) и (64.2), на основании (68.2) имеем

$$e = \sqrt{1 + \frac{V_1^2 - 2g_0 r_3^2 / r_1}{g_0^2 r_3^4} V_1^2 \cos^2 \theta_1 r_1^2}. \quad (71.2)$$

В частности, если траектория движущегося тела есть окружность радиуса  $r_1$ , то сила притяжения уравнивается центробежной силой инерции. Скорость движения тела  $V_{кр}$ , которая необходима для такого движения по окружности, определится из равенства<sup>1</sup>

$$\frac{V_{кр}^2}{r_1} = g = g_0 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2,$$

откуда

$$V_{кр} = r_3 \sqrt{\frac{g_0}{r_1}}. \quad (72.2)$$

Скорость  $V_{кр}$ , необходимую для движения тела (космического корабля) по окружности вокруг центра притяжения, называют *круговой* или *первой космической скоростью*. Круговая скорость для небесных тел получается различной в соответствии с различным притяжением этих тел. Так, например, если притягивающим телом является Земля, то на поверхности земного шара ( $r_1=r_3$ ), если принять ускорение силы тяжести на уровне моря  $g_0=9,81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ , круговая скорость получится  $V_{кр}=7,9 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Если в качестве притягивающего тела взять

<sup>1</sup> Это равенство можно получить и чисто формальным путем. Если тело движется по окружности, то очевидно, что  $\theta=0$  и  $\cos \theta=1$ . В этом случае  $e=0$ , так что на основании (71.2)

$$1 + \frac{V_1^2 - 2g_0 r_3^2 / r_1}{g_0^2 r_3^4} V_1^2 r_1^2 = 0.$$

Решение этого уравнения и есть

$$\frac{V_{кр}^2}{r_1} = g_0 \left( \frac{r_3}{r_1} \right)^2.$$

Луну или Марс, то на поверхности Луны или Марса соответственно круговая скорость  $V_{кр} = 1,7 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$  и  $V_{кр} = 3,5 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$  и т. д. Из приведенных цифр видно, между прочим, что вследствие меньшей, чем на Земле, круговой скорости для перевода космического корабля с поверхности Луны на круговую орбиту требуется меньшая мощность, чем для перехода космического корабля с поверхности Земли на круговую орбиту вокруг Земли.

Круговая скорость для данной планеты, как видно из (72.2), зависит от высоты, на которой лежит круговая орбита, и уменьшается при увеличении высоты (увеличении  $r_1$ ).

Введем вместо действительной скорости тела  $V$  относительную

$$\bar{V} = \frac{V}{V_{кр0}},$$

где  $V_{кр0}$  — круговая скорость на уровне моря.

Выражение (71.2) при этом примет следующий вид:

$$e = \sqrt{1 - (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1) \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1}, \quad (73.2)$$

где  $\bar{r}_1 = \frac{r_1}{r_s}$  — радиус рассматриваемой точки в момент времени  $t_1$ , отнесенный к радиусу земного шара;  $\bar{V}_1 = \frac{V_1}{V_{кр0}}$ .

Аналогично для параметра  $p$  с помощью (68.2), (64.2) и (70.2) получим

$$p = \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1^2 r_s. \quad (74.2)$$

Если подкоренное выражение в (73.2) равно нулю, то  $e=0$  и орбита становится круговой; при этом, очевидно, будет и  $\theta_1=0$ . Приравняв правую часть выражения (73.2) нулю, придем к квадратному уравнению

$$(\bar{V}_1^2 \bar{r}_1)^2 - 2(\bar{V}_1^2 \bar{r}_1) + 1 = 0,$$

имеющему два совпадающих корня

$$\bar{V}_1^2 \bar{r}_1 = 1,$$

как и следовало ожидать.

Скорость, необходимая для движения по круговой орбите, равна круговой скорости на уровне моря, поделенной на  $\sqrt{\bar{r}_1}$ , что находится в полном соответствии с выражением (72.2).

Если  $1 < \bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} < \sqrt{2}$ , то эксцентриситет  $e > 0$  и орбита представляет собой эллипс.

При  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} = \sqrt{2}$  эксцентриситет получается равным единице; орбита при этом превращается в параболу. Соответствующая скорость

$$V_{пар} = \sqrt{2} V_{кр}$$

называется *параболической скоростью*, или *скоростью ухода*, так как при сообщении телу такой скорости оно выйдет за пределы сферы притяжения центрального тела (параболическую скорость называют также *второй космической скоростью*).

Для Земли скорость ухода  $V_{пар} = 11,2 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$ , для Луны —  $2,4 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$ , для Марса —  $5,0 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$  и т. д.

Если  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} > \sqrt{2}$ , то орбита представляет собой гиперболу. Соответствующая скорость  $V_{гип} > \sqrt{2} V_{кр}$ .

Таким образом, законы Кеплера описывают только один частный

случай движения в задаче двух тел — движение по замкнутым эллиптическим орбитам.

В качестве притягивающего тела в задаче двух тел надо брать ближайшее к движущемуся телу небесное тело. Так, при изучении движения планет (или космических кораблей, движущихся под действием притяжения Солнца) за притягивающее тело следует брать Солнце. При исследовании движения тела в поле притяжения Земли (например для баллистических ракет) притягивающим телом является Земля и т. д.

Задача двух тел, как уже упоминалось, значительно проще задачи  $n$  тел; ее решение, как видно, получается наглядным и позволяет легко проводить анализ. Однако всегда надо иметь в виду погрешности при замене задачи  $n$  тел задачей двух тел. Эти погрешности, приемлемые при решении одних задач, могут дать совершенно неверный ответ на другие вопросы. Так, при определении орбит планет, движущихся вокруг Солнца, замена реальной задачи задачей двух тел дает близкие к действительности результаты. Расчеты показывают, что наибольшее притяжение, которое испытывает Земля, помимо Солнца, от других небесных тел, дает Юпитер; это притяжение составляет всего около  $1/17\,000$  притяжения Солнца. Понятно, что пренебрежение этой небольшой силой не может привести к существенным погрешностям при расчете земной орбиты.

Так же точно расчеты показали, что влияние Луны как третьего тела на искусственный спутник « $\delta$ -2», запущенный в США в 1959 г., прекратит его существование в течение двух лет вместо 29 лет, получавшихся при решении задачи двух тел [56].

Советская автоматическая межпланетная станция (АМС), запущенная 4 октября 1959 г., после фотографирования обратной стороны Луны в соответствии с решением задачи двух тел должна была бы двигаться по эллиптической орбите, в фокусе которой помещалась Земля. Расчеты показали, что учет притяжения Луны (задача трех тел) приводит к тому, что при каждом новом витке расстояние от АМС до Земли уменьшается. Вследствие этого АМС попадает во все более плотные слои атмосферы, что через полгода должно привести к прекращению ее существования. Ясно, что в этом случае замена задачи  $n$  тел задачей двух тел недопустима.

В большинстве тех задач, в которых движение рассматривается на небольшом интервале времени, погрешности от замены задач  $n$  тел задачей двух тел будут невелики, так что, как правило, мы будем исходить из задачи двух тел.

Вернемся к исследованию орбитального движения. Как мы видели, в зависимости от начальной скорости траектория тела может быть эллиптической, параболической или гиперболической. Возникает вопрос: какой будет траектория, если начальная скорость меньше круговой скорости?

Анализируя выражение (73.2), можно прийти к заключению, что эксцентриситет будет наименьшим при  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} = 1$ , т. е. при начальной скорости, равной круговой скорости. При  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} < 1$  по формуле (73.2) будем получать действительные значения, лежащие между нулем и единицей. Это означает, что траектория при  $V_1 < V_{кр}$  будет эллиптической, как и при  $V_1 > V_{кр}$ . Для того чтобы выяснить, как по отношению к земному шару будет располагаться эллиптическая траектория при  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} < 1$  и при  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} > 1$ , запишем выражение для меньшей полуоси эллипса.

Из аналитической геометрии известно, что меньшая полуось

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Подставив сюда полученные ранее выражения (73.2) для  $e$  и (74.2) для  $p$  и отнеся  $b$  к начальному радиусу  $r_1$  и  $r_1$  к радиусу  $r_3$  земного шара, получим

$$\bar{b} = \frac{b}{r_1} = \frac{\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} \cos \theta_1}{\sqrt{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}}. \quad (75.2)$$

Выражение (75.2) позволяет легко получить ответ на поставленный выше вопрос.

$\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} < 1$ . При этом, очевидно,  $\sqrt{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1} > 1$  и отношение

$$\frac{b}{r_1} < 1$$

при всех значениях начального угла  $\theta_1$ . Это означает, что эллиптическая траектория будет пересекать сферическую поверхность Земли в двух точках  $A$  и  $A'$  (рис. 18.2). Тело, запущенное с Земли ( $\bar{r}_1 = 1$ ) со скоро-

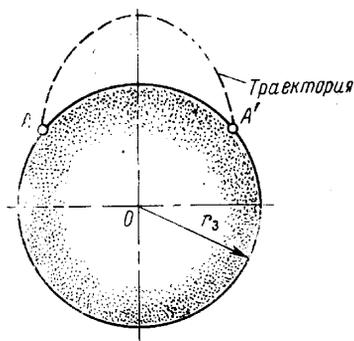


Рис. 18.2. Траектория полета (в случае  $V_1 < V_{кр}$ )

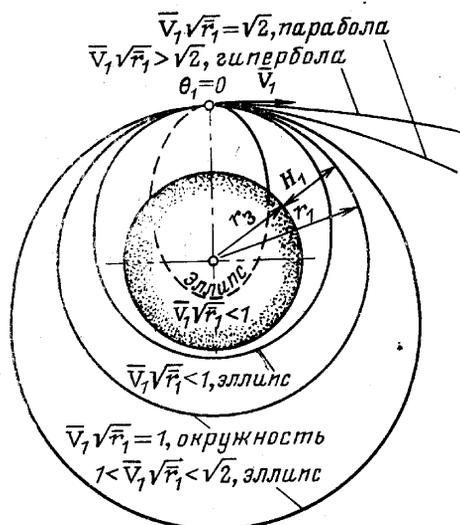


Рис. 19.2. Траектории полета при  $\theta_1 = 0$  и при различных  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1}$

стью, меньшей, чем круговая, через некоторое время упадет на Землю. Именно с такими начальными скоростями запускают баллистические ракеты. Предельным случаем полета баллистической ракеты будет полет с начальной скоростью  $V_1 = V_{кр}$  и начальным углом  $\theta_1 = 0$ . В этом случае по формуле (75.2) получим  $\bar{b} = 1$ , что соответствует (рис. 19.2) полету по круговой орбите.

$\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} = 1$ . В этом случае по (75.2) получим

$$\frac{b}{r_1} = \cos \theta_1.$$

Если начальный угол  $\theta_1 = 0$ , траекторией будет окружность с радиусом, равным начальному радиусу. В частности, при  $\bar{r}_1 = 1$  траектория будет лежать на поверхности земной сферы<sup>1</sup>. Если начальный угол траек-

<sup>1</sup> Напомним, что атмосфера во внимание не принимается.

тории  $\theta > 0$ , то  $\cos \theta_1 < 1$  и эллиптическая траектория будет пересекать сферу радиуса  $r_1$ , т. е. (при  $\bar{r}_1 = 1$ ) земную сферу.

$\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} > 1$ . В этом случае  $\sqrt{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1} < 1$ , и в зависимости от начального угла  $\theta_1$  может получиться

$$\frac{b}{r_1} > 1 \text{ или } \frac{b}{r_1} < 1.$$

Эллиптическая траектория либо будет, либо не будет пересекать сферу радиуса  $r_1$ . Условие пересечения траектории со сферой запишется в виде

$$\cos \theta_1 < \frac{\sqrt{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}}{\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1}}.$$

Как отмечено выше, в случае, когда  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} = \sqrt{2}$ , траектория, соответствующая такой начальной скорости, из эллиптической превращается в параболическую, а при  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} > 2$  — в гиперболическую. Формально по (75.2) величина  $b$  при  $\bar{V}_1 \sqrt{\bar{r}_1} > 2$  становится мнимой, т. е. не существует эллипса, соответствующего такой начальной скорости.

На рис. 20.2 показаны траектории ракет, запущенных с земной поверхности (пренебрегая атмосферой) при трех разных начальных скоростях. Начальные углы  $\theta_1$  подобраны таким образом, чтобы дальность полета во всех случаях получалась одинаковой.

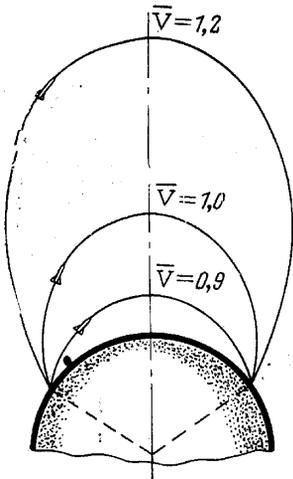


Рис. 20.2. Траектории ракет при трех различных начальных скоростях полета

Итак, одна и та же дальность баллистической ракеты может быть достигнута в широком диапазоне начальной скорости и начальных углов соответственно. Наиболее экономичной, очевидно, будет ракета, имеющая наименьшую начальную скорость.

Рассмотрим теперь более подробно случаи

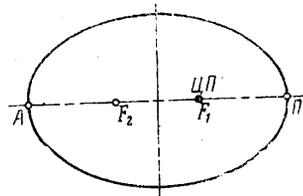


Рис. 21.2. Эллиптическая траектория

движения по эллиптической, параболической и гиперболической траекториям.

**Эллиптическая траектория.** Как было отмечено, центр притяжения (ЦП) находится в одном из фокусов  $F_1$  эллипса. Точка эллипса  $П$ , наиболее близкая к фокусу, называется <sup>1</sup> перигелием (рис. 21.2), точка  $А$ , наиболее удаленная от центра притяжения, — афелием.

<sup>1</sup> В общем случае любого конического сечения эту точку называют перигелием.

Для эллипсов с большой полуосью  $a$ , параметром  $p$  и эксцентриситетом  $e$ , как известно,

$$p = a(1 - e^2).$$

На основании (61.2) постоянная

$$h = V_1^2 - \frac{2\mu}{r_1} = V_1^2 - \frac{2\mu}{r_3 r_1}$$

или, относя скорость  $V_1$  к круговой скорости  $V_{кр0}$  на уровне моря и приняв во внимание, что по (70.2) и (72.2)

$$V_{кр0}^2 = g_0 r_3 = \frac{\mu}{r_3},$$

получим

$$h = -\frac{\mu}{r_1 r_3} (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1).$$

Но по (73.2)

$$2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1 = (1 - e^2) \frac{1}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} = \frac{1}{a} \frac{p}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1},$$

а по (74.2)

$$\frac{p}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} = r_3 \bar{r}_1,$$

так что для постоянной  $h$  получается выражение

$$h = -\frac{\mu}{a}. \quad (76.2)$$

Подставив выражение (76.2) в уравнение энергии (60.2), имея в виду, что  $r = r_3 \bar{r}$ , получим

$$V^2 = \frac{\mu}{r_3} \left( \frac{2}{r} - \frac{r_3}{a} \right). \quad (77.2)$$

Квадрат радиальной составляющей скорости  $\dot{r}^2$  по формуле (62.2)

$$\dot{r}^2 = V^2 - r^2 \dot{\chi}^2,$$

а по формулам (63.2) и (64.2)

$$r^2 \dot{\chi}^2 = \frac{c_1^2}{r_3^2 \bar{r}^2}.$$

Следовательно, используя (60.2) и (77.2), получим

$$\dot{r}^2 = \frac{\mu}{r_3} \left( \frac{2}{r} - \frac{r_3}{a} \right) - \frac{c_1^2}{r_3^2} \frac{1}{\bar{r}^2}.$$

Так как согласно (68.2) постоянная

$$c_1^2 = \mu p = \mu a (1 - e^2),$$

то предыдущее выражение можно переписать в виде

$$\left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \dot{r}^2 = \frac{\mu}{r_3} \left( \frac{2}{r} - \frac{r_3}{a} - \frac{a}{r_3} \frac{1 - e^2}{\bar{r}^2} \right).$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - a^2 + 2ar - r^2}}$$

или после несложного преобразования подкоренного выражения

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}}. \quad (78.2)$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (78.2) положим

$$a - r = ae \cos E. \quad (79.2)$$

Угол  $E$  называется *эксцентрисической аномалией*<sup>1</sup> в отличие от угла  $\kappa$  — *истинной аномалии* (рис. 22.2).

С учетом (79.2) выражение (78.2) принимает вид

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = \frac{r dr}{ae \sin E}. \quad (80.2)$$

Дифференцируя (79.2), получим

$$dr = ae \sin E dE.$$

Подставив в (80.2) это выражение  $dr$ , а также  $r$  по (79.2), имеем

$$\sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = a(1 - e \cos E) dE. \quad (81.2)$$

Интегрируя уравнение (81.2), получим следующее *уравнение Кеплера*:

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (t - \tau) = E - e \sin E. \quad (82.2)$$

Стоящую в левой части уравнения Кеплера величину

$$M = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (t - \tau) \quad (83.2)$$

называют *средней аномалией*, а

$$n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

*средним движением*.

<sup>1</sup> Из рис. 22.2 получаем

$$a \cos E - r \cos \kappa = ae, \quad (a)$$

но по уравнению эллипса (69.2)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \kappa} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \kappa} \text{ и } r \cos \kappa = \frac{p - r}{e},$$

так что равенство (a) принимает вид

$$ae \cos E - p + r = ae^2. \quad (б)$$

Приняв во внимание, что  $p = a(1 - e^2)$ , из равенства (a) получаем (79.2).

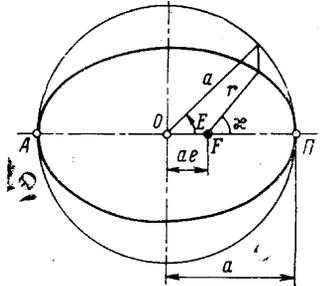


Рис. 22.2. К определению эксцентрисической ( $E$ ) и истинной ( $\kappa$ ) аномалии

Время  $\tau$ , входящее в (82.2) и (83.2), соответствует моменту прохождения тела через перигелий.

С помощью уравнения Кеплера нетрудно определить взаимное расположение тел (притягивающего и движущегося) в некоторый момент времени, зная параметры эллипса. Для этого находим среднюю аномалию  $M$  по формуле (83.2), по (82.2) находим  $E$  (графическим путем) и по (79.2) определяем величину  $r$ . Далее, как следует из рис. 22.2, с учетом (79.2)

$$a \cos E = ae + r \cos \chi = a [e + (1 - e \cos E) \cos \chi],$$

откуда

$$\cos \chi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

Вместо полученной формулы удобнее угол  $\chi$  определять по несколько иной формуле для тангенса половинного угла

$$\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (84.2)$$

**Параболическая траектория.** У параболы эксцентриситет  $e=1$ , так что на основании (68.2)  $h=0$ . Далее, для параболы

$$p = 2q,$$

где  $q$  — расстояние от фокуса до вершины параболы, так что уравнение параболы в полярных координатах будет

$$r = \frac{2q}{1 + \cos \chi}. \quad (85.2)$$

Напишем очевидное равенство

$$dt = \frac{dx}{\dot{\chi}}$$

и подставим в него согласно (63.2)  $\dot{\chi} = \frac{c_1}{r^2}$ . Получим

$$dt = \frac{r^2 dx}{c_1}.$$

Но, поскольку из (68.2)  $c_1^2 = \mu p$ , то в случае параболы

$$c_1^2 = 2\mu q. \quad (86.2)$$

С учетом (85.2) и (86.2) выражение для  $dt$  перепишем в виде

$$dt = \frac{dx}{(1 + \cos \chi)^2} \sqrt{\frac{8q^3}{\mu}}. \quad (87.2)$$

Проинтегрировав выражение (87.2), получим

$$\sqrt{\frac{\mu}{8q^3}} (t - \tau) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \frac{\chi}{2}}{3 \cos^3 \frac{\chi}{2}} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \right]$$

или после несложных преобразований

$$\sqrt{\frac{\mu}{2q^3}} (t - \tau) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}. \quad (88.2)$$

Уравнение (88.2) представляет *аналог уравнения Кеплера для параболической орбиты*. С помощью этого уравнения нетрудно определить положение тела на параболической орбите в любой момент времени, подобно тому, как это делалось в случае эллиптической орбиты.

**Гиперболическая траектория.** Как отмечено выше, если начальная скорость тела превышает скорость ухода (параболическую скорость), то тело движется по гиперболической траектории. Для гиперболы, как известно, эксцентриситет  $e > 1$ . Имеем

$$c_1^2 = \mu p = -\mu a (e^2 - 1).$$

Далее

$$r^2 = \frac{a^2 (e^2 - 1)^2}{(1 + e \cos x)^2},$$

так что

$$\frac{r^2}{c_1} = \sqrt{\frac{-a^3 (e^2 - 1)^3}{\mu}} \frac{1}{(1 + e \cos x)^2}.$$

Следовательно,

$$dt = \frac{r^2}{c_1} dx = \sqrt{\frac{-a^3 (e^2 - 1)^3}{\mu}} \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2}. \quad (89.2)$$

Интегрируя выражение (89.2), получим

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3 (e^2 - 1)^3}} (t - \tau) = \int_0^x \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2}. \quad (90.2)$$

Вычисляя интеграл, входящий в правую часть этого выражения, найдем

$$\int_0^x \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2} = \frac{1}{e^2 - 1} \times \\ \times \left[ \frac{e \sin x}{1 + e \cos x} - \frac{2}{\sqrt{e^2 - 1}} \operatorname{arth} \left( \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right].$$

Введя обозначение

$$\operatorname{th} \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad (91.2)$$

после соответствующих преобразований получим

$$\int_0^x \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2} = \frac{1}{e^2 - 1} \left[ \frac{2e \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th} \frac{F}{2}}{(e+1) \left(1 - \operatorname{th}^2 \frac{F}{2}\right)} - \frac{F}{\sqrt{e^2 - 1}} \right].$$

Теперь уравнение (90.2) принимает вид

$$\sqrt{\frac{\mu}{-a^3}}(t-\tau) = e \operatorname{sh} F - F. \quad (92.2)$$

Это уравнение аналогично уравнению Кеплера в случае гиперболической траектории, в то время как (91.2) аналогично (84.2).

Полученные в этом параграфе формулы позволяют решать ряд интересных для практики задач, связанных с движением космических кораблей; с некоторыми такими задачами мы встретимся в гл. XIV.

### ГЛАВА III

## ОБЩИЙ ВИД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

### § 1. О взаимодействии уравнений сил и моментов при исследовании траекторий полета

Как известно из механики, движение летательного аппарата, отождествляемого с твердым телом, описывается системой шести дифференциальных уравнений, три из которых отражают условие равновесия сил в проекциях на оси координат, а три — условие равновесия моментов относительно трех осей координат.

Следует отметить, что представление о летательном аппарате как о твердом теле, масса и инерционные характеристики которого являются функцией времени, надо рассматривать лишь как приближение к действительности. В самом деле в процессе полета органы управления могут отклоняться, так что внешняя конфигурация летательного аппарата с течением времени изменяется. Кроме того, вследствие неизбежной деформации конфигурация конструкции летательного аппарата также изменяется.

Таким образом, строго говоря, летательный аппарат следует рассматривать как тело с большим числом степеней свободы. При общей оценке динамических свойств летательного аппарата допустимо принять упрощенную схему твердого тела постоянной конфигурации, а при определении внешних сил, действующих на летательный аппарат, учитывать лишь силы инерции переносного движения и кориолисовы силы инерции.

Для уточненной оценки таких свойств летательного аппарата, как его устойчивость и управляемость, необходимо принимать во внимание упругость конструкции и дополнительные силы, возникающие при отклонении органов управления.

Рассмотрим процесс изменения направления полета летательного аппарата. Для того чтобы изменить *направление* и *характер движения* летательного аппарата, необходимо приложить к летательному аппарату дополнительные внешние силы. Такими силами могут быть изменение силы тяги  $\Delta P$  и результирующей аэродинамической силы  $\Delta R$ .

В общем случае для получения таких дополнительных сил необходимо изменить *угловое положение* летательного аппарата в пространстве. Так, например, при полете летательного аппарата в плотных слоях атмосферы в случае необходимости изменить направление полета надо изменить угол атаки  $\alpha$  или угол скольжения  $\beta$ , т. е. повернуть летательный аппарат по отношению к вектору скорости полета.

При полете в разреженных слоях атмосферы, где основной управляющей силой является сила тяги, для изменения направления полета необходимо повернуть вектор тяги относительно вектора скорости. Если двигатель неподвижен относительно летательного аппарата, то необходимо изменить угол тангажа летательного аппарата  $\vartheta$  или угол рысканья  $\varphi$ , т. е. повернуть относительно центра массы весь летательный аппарат.

Если двигатель может поворачиваться относительно осей, связан-

ных с летательным аппаратом, то поворачивать весь летательный аппарат нет надобности, так как необходимая для изменения направления полета сила получается непосредственно. Также нет необходимости поворачивать весь летательный аппарат для получения силы, изменяющей направление полета, в том случае, если он снабжен поворотными крыльями.

Поворот летательного аппарата относительно каких-либо осей координат можно осуществить, приложив соответствующие моменты относительно этих осей координат. Для создания таких моментов служат орга-

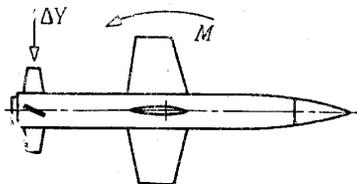


Рис. 1.3. Дополнительная сила, действующая на летательный аппарат при отклонении руля

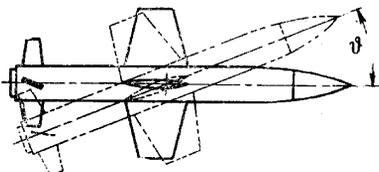


Рис. 2.3. Поворот летательного аппарата в результате отклонения руля

ны управления летательным аппаратом: воздушные или газовые (струйные) рули, механизмы, изменяющие направление оси двигателя (в том случае, если двигатель может поворачиваться относительно летательного аппарата), и механизмы, регулирующие силу тяги.

Направление полета летательного аппарата изменяется в такой последовательности. Вначале, после отклонения соответствующего руля возникает дополнительная сила, приложенная к рулю и соз-

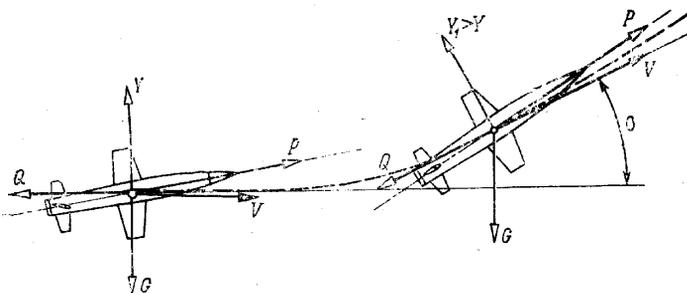


Рис. 3.3. Поворот вектора скорости летательного аппарата

дающая относительно центра масс некоторый момент (рис. 1.3). Этот момент через некоторое время приводит к возникновению угловой скорости вращения летательного аппарата около центра масс. Еще через некоторое время под действием угловой скорости летательный аппарат повернется на некоторый угол (рис. 2.3). В результате поворота изменится направление основных внешних сил, действующих на летательный аппарат, а также и величина некоторых сил, как, например, аэродинамической подъемной силы. При этом баланс сил<sup>1</sup>, действующих на летательный аппарат, нарушится, что и приведет к изменению направления движения (рис. 3.3).

Баланс сил нарушается, как мы видим, вследствие двух причин: во-первых, появляется отсутствовавшая ранее дополнительная сила, приложенная к рулю, а во-вторых, изменяются основные внешние силы,

<sup>1</sup> На рис. 3.3 рассматривается движение летательного аппарата при отклонении руля высоты.

действующие на летательный аппарат, например аэродинамическая подъемная сила, создаваемая крыльями.

Результирующая всех внешних сил, действующих на летательный аппарат, возникающая вследствие описанных выше действий, таким образом, зависит от угла отклонения руля. Процесс создания этой результирующей силы естественно занимает некоторое время.

Таким образом, движение летательного аппарата в случае изменения направления его полета должно описываться уравнениями равновесия сил и равновесия моментов, т. е. шестью дифференциальными уравнениями.

Теория в полном согласии с экспериментом показывает, что время для создания дополнительной результирующей внешней силы, необходимой для изменения направления движения летательного аппарата, получается существенно меньшим, чем время для изменения направления полета. Поэтому если нас интересует в основном конечный результат всех описанных действий, то в первом приближении можно пренебречь временем, необходимым для создания дополнительной силы, по сравнению со временем, необходимым для изменения направления полета. Другими словами, можно принять, что дополнительная внешняя сила для изменения направления полета появляется мгновенно вслед за отклонением руля.

Это допущение, вполне приемлемое при исследовании вопросов, связанных с изучением траекторий движения летательных аппаратов, конечно, не может быть использовано при исследованиях так называемого переходного процесса — движения летательного аппарата на том отрезке времени, на протяжении которого формируется дополнительная внешняя сила. Такие вопросы, относящиеся к области управляемости и устойчивости движения летательного аппарата, рассматриваются во второй книге.

В большинстве случаев сила, возникающая при отклонении руля и приложенная к рулю, получается по абсолютной величине существенно меньшей, чем основные внешние силы, определяющие движение летательного аппарата (сила тяги, аэродинамическая подъемная сила, сила тяжести). Исключением в этом смысле являются крылатые летательные аппараты, выполненные по схеме «бесхвостка» и в меньшей степени по схеме «утка», у которых расстояние от центра массы до рулей невелико, так что для получения необходимого момента приходится создавать достаточно большую силу, приложенную к рулю. В соответствующих разделах второй книги излагаются приемы приближенного учета дополнительной силы, возникающей на руле при исследовании траектории полета летательных аппаратов.

Итак, если считать внешние силы не зависящими от углов отклонения рулей, то характер движения летательного аппарата можно определить, исследуя только три уравнения равновесия сил в проекциях на координатные оси. При этом решение задачи, конечно, существенно упрощается.

## § 2. Уравнения движения в инерциальной системе отсчета

Когда говорят о *движении тела*, то имеют в виду *перемещение* этого тела *относительно другого тела* (или других тел), образующего систему отсчета. Если рассматривать систему отсчета, связанную с бесконечно удаленными звездами, взаимное расположение которых благодаря громадным расстояниям практически не меняется в течение столетий, то можно считать, что эта система отсчета связана с «абсолютно неподвижным» пространством.

Напомним, что в механике различают инерциальные и неинерциальные системы отсчета.

Инерциальной системой отсчета называют систему, находящуюся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного поступательного движения относительно «абсолютно неподвижного» пространства. Систему отсчета, не удовлетворяющую этим условиям, т. е. движущуюся ускоренно, называют *неинерциальной* системой отсчета.

В векторной форме уравнение движения центра масс твердого тела имеет следующий вид:

$$m \frac{d\bar{V}_a}{dt} = \bar{R},$$

где  $m$  — масса тела;

$\frac{d\bar{V}_a}{dt}$  — поступательное ускорение тела относительно «абсолютно неподвижного» пространства;

$\bar{R}$  — равнодействующая всех внешних сил, действующих на тело.

Приведенное векторное уравнение можно заменить тремя скалярными, спроектировав его на оси произвольно выбранной системы координат, связанной с центром масс тела. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для движения вокруг центра масс тела.

Изменение характера движения тела (материальной точки) определяется ускорениями движущегося тела. Вектор абсолютного ускорения

$\frac{d\bar{V}_a}{dt}$  есть производная вектора абсолютной скорости

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_0,$$

где  $\bar{V}_r$  — вектор скорости относительно системы отсчета, в которой рассматривается движение, и  $\bar{V}_0$  — вектор скорости этой системы отсчета относительно «абсолютно неподвижного» пространства.

Взяв производную абсолютной скорости, получим

$$\frac{d\bar{V}_a}{dt} = \frac{d\bar{V}_r}{dt} + \frac{d\bar{V}_0}{dt}.$$

Это выражение определяет абсолютное ускорение  $\frac{d\bar{V}_a}{dt}$  как сумму относительного ускорения  $\frac{d\bar{V}_r}{dt}$  и ускорения системы отсчета относительно «абсолютно неподвижного» пространства<sup>1</sup>  $\frac{d\bar{V}_0}{dt}$ .

Если принятая система отсчета инерциальная, то в соответствии с приведенным выше определением скорость  $\bar{V}_0$  постоянна, так что

$$\frac{d\bar{V}_0}{dt} = 0$$

и абсолютное (полное) ускорение движущегося тела получается равным относительному ускорению:

$$\frac{d\bar{V}_a}{dt} = \frac{d\bar{V}_r}{dt},$$

т. е., как это известно из механики, то обстоятельство, что система отсчета находится в прямолинейном и равномерном движении, не сказывается на величине ускорения.

<sup>1</sup> Заметим, что в зависимости от той или иной задачи под «абсолютно неподвижной» системой отсчета можно понимать не только системы отсчета, связанные с бесконечно удаленными звездами, как об этом более подробно сказано далее.

Для инерциальной системы отсчета справедлив известный *принцип Галилея*, из которого вытекает первый закон динамики — закон Ньютона, утверждающий, что действующая на тело сила  $\bar{F}$  равна произведению массы тела  $m$  на ускорение  $\frac{d\bar{V}_a}{dt}$ .

Все небесные тела совершают ускоренное движение. Поэтому связанные с ними системы отсчета неинерциальные. В зависимости от решаемой задачи, однако, ту или иную систему координат (отсчета) целесообразно принимать за инерциальную.

Так, земная поверхностная система координат есть неинерциальная система. Однако в некоторых задачах динамики полета можно полагать, что центр Земли неподвижен в «абсолютно неподвижном» пространстве, и, кроме того, можно пренебрегать кривизной земной поверхности и суточным вращением Земли. В этом случае земную поверхностную систему в первом приближении можно считать инерциальной системой отсчета.

В дальнейшем при исследовании полета самолетов с умеренными скоростями, существенно меньшими, чем круговая скорость (см. гл. II), в соответствии со сделанными замечаниями будем считать земную поверхностную систему инерциальной системой отсчета. В то же время при изучении движения ракетопланов, баллистических ракет и космических кораблей принимать земную поверхностную систему координат за инерциальную систему отсчета означало бы совершать существенную ошибку.

Из механики известно, что движение твердого тела, обладающего шестью степенями свободы, в инерциальной системе отсчета описывается шестью скалярными дифференциальными уравнениями:

$$m(\dot{V}_x + V_z\omega_y - V_y\omega_z) = X, \quad (1.3)$$

$$m(\dot{V}_y + V_x\omega_z - V_z\omega_x) = Y, \quad (2.3)$$

$$m(\dot{V}_z + V_y\omega_x - V_x\omega_y) = Z, \quad (3.3)$$

$$J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z - J_{xy}(\omega_y - \omega_x\omega_z) - J_{xz}(\omega_z + \omega_x\omega_y) + J_{yz}(\omega_z^2 - \omega_y^2) = M_x, \quad (4.3)$$

$$J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z - J_{xy}(\omega_x + \omega_y\omega_z) + J_{xz}(\omega_x^2 - \omega_z^2) - J_{yz}(\omega_z - \omega_x\omega_y) = M_y, \quad (5.3)$$

$$J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y - J_{xz}(\omega_x - \omega_y\omega_z) - J_{yz}(\omega_y + \omega_x\omega_z) + J_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2) = M_z. \quad (6.3)$$

В уравнениях (1.3) — (6.3) приняты следующие обозначения:

$m$  — масса тела;

$J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  — осевые и центробежные моменты инерции тела; в общем случае масса и моменты инерции<sup>1</sup> — функции времени  $t$ ;

$V_x, V_y, V_z$  — составляющие скорости движения центра масс тела по осям произвольно выбранной системы координат;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — составляющие вектора угловой скорости поворота выбранной системы координат;

<sup>1</sup> У летательных аппаратов вследствие их симметрии в первом приближении центробежные моменты инерции  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ .

$X, Y, Z$  — проекции внешних и реактивных сил на оси координат;  
 $M_x, M_y, M_z$  — моменты внешних и реактивных сил относительно соответствующих осей координат.

Уравнения (1.3) — (6.3) записаны в *инерциальной системе отсчета*; линейные и угловые скорости  $V_x, V_y, V_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  могут быть взяты в *любой системе координат*, так или иначе связанной с центром масс летательного аппарата<sup>1</sup>. Описание таких систем координат приведено в § 2 гл. II.

Приведем вывод уравнений движения твердого тела (1.3) — (6.3).

Представим твердое тело как совокупность  $n$  дискретных материальных точек, массы которых и относительное расположение не зависят от времени. Элементарная внешняя сила, действующая на каждую такую точку, на основании закона Ньютона

$$\delta \bar{R} = m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt}, \quad (7.3)$$

где  $\bar{V}_i$  — вектор абсолютной скорости этой точки, который можно представить суммой

$$\bar{V}_i = \bar{V} + \frac{d\bar{r}_i}{dt}, \quad (8.3)$$

и  $\bar{V}$  — вектор скорости центра масс тела, а  $\bar{r}_i$  — радиус-вектор точки  $m_i$  относительно центра масс тела.

Суммируя (7.3) по всем точкам, образующим твердое тело, обозначив сумму всех элементарных внешних сил  $\Sigma \delta \bar{R} = \bar{R}$ , получим

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i. \quad (9.3)$$

Подставив в (9.3) выражение (8.3) и замечая, что

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{V} = \bar{V} \sum_{i=1}^n m_i,$$

так как  $\bar{V}$  постоянен для всех материальных точек, образующих тело, и может быть вынесен за знак суммы, и что

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \right) = 0,$$

так как начало координат помещено в центре масс тела и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i = 0,$$

вместо (9.3) получим

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{R}, \quad (10.3)$$

где  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса твердого тела.

<sup>1</sup> При одновременном исследовании поступательного и вращательного движения твердого тела систему координат, в проекциях на оси которой записываются уравнения движения, удобно связывать с контуром тела; при исследовании только поступательного движения (а такие вопросы и рассматриваются в настоящей книге) связывать систему координат с контуром тела необязательно, так как предметом изучения является движение центра масс тела.

Увеличивая число  $n$  материальных точек, образующих твердое тело (т. е. уменьшая их массы  $m_i$ ), и устремляя его к бесконечности, в пределе приходим к непрерывному распределению массы внутри оболочки твердого тела.

Для определения ускорения центра масс твердого тела  $\frac{d\bar{V}}{dt}$  воспользуемся формулой дифференцирования вектора (см. гл. I)

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\delta\bar{V}}{\delta t} + \bar{\omega} \times \bar{V},$$

где  $\bar{\omega}$  — вектор угловой скорости выбранной системы координат.

Тогда уравнение (10.3) можно переписать в виде

$$m \left( \frac{\delta\bar{V}}{\delta t} + \bar{\omega} \times \bar{V} \right) = \bar{R}. \quad (11.3)$$

Спроектируем это векторное уравнение на оси координат, связанные с центром масс тела, для чего раскроем векторное произведение:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{V} &= (\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}) \times (V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k}) = \\ &= (\omega_y V_z - \omega_z V_y) \bar{i} + (\omega_z V_x - \omega_x V_z) \bar{j} + (\omega_x V_y - \omega_y V_x) \bar{k}; \end{aligned}$$

здесь  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — орты по осям координат.

В итоге приходим к трем скалярным уравнениям (1.3)—(3.3) движения центра масс, приведенным выше.

Далее, элементарный момент количества движения частицы тела с массой  $m_i$

$$\bar{G}_i = \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i.$$

Взяв производную, получим

$$\frac{d\bar{G}_i}{dt} = m_i \left[ \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times \bar{V}_i + \bar{r}_i \times \frac{d\bar{V}_i}{dt} \right], \quad (12.3)$$

но по (8.3)

$$\frac{d\bar{r}_i}{dt} = \bar{V}_i - \bar{V},$$

а на основании (7.3)

$$\delta M = m_i \bar{r}_i \times \frac{d\bar{V}_i}{dt},$$

где  $\delta M$  — момент элементарной силы  $\delta \bar{R} = m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt}$ .

С учетом приведенных выражений уравнение (12.3) перепишем в виде

$$\frac{d\bar{G}_i}{dt} = -m_i \bar{V} \times \bar{V}_i + \delta M, \quad (13.3)$$

так как  $\bar{V}_i \times \bar{V}_i = 0$ .

Просуммировав (13.3) для всех частиц, составляющих тело, приходим к следующему равенству:

$$\frac{d\bar{G}}{dt} = - \sum_{i=1}^n m_i \bar{V} \times \bar{V}_i + \bar{M}. \quad (14.3)$$

Здесь  $\bar{M} = \Sigma \delta M$  — момент внешних и реактивных сил, действующих на тело;

$\bar{G} = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i$  — момент количества движения тела.

Подставив в (14.3)

$$\bar{V}_i = \bar{V} + \frac{d\bar{r}_i}{dt}$$

и замечая, что  $\bar{V} \times \bar{V} = 0$  и что, так как начало координат помещено в центре масс тела,

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i = 0,$$

векторное уравнение (14.3) перепишем в следующем окончательном виде:

$$\frac{d\bar{G}}{dt} = \bar{M}. \quad (15.3)$$

Уравнение (15.3) выражает известное из механики положение, что производная вектора главного момента количества движения твердого тела равна моменту всех сил, действующих на тело.

Напишем теперь развернутое выражение для момента количества движения  $\bar{G}$  тела:

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \times \bar{V}_i.$$

На основании формулы

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\delta \bar{r}}{\delta t} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i,$$

имея в виду, что для твердого тела  $\frac{\delta \bar{r}}{\delta t} = 0$ , для скорости движения какой-либо частицы с массой  $m_i$  будем иметь

$$\bar{V}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i + \bar{V}.$$

Таким образом, момент количества движения элементарной частицы

$$\bar{G}_i = m_i \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i) + m_i \bar{r}_i \times \bar{V}.$$

Так как  $\bar{V}$  — величина постоянная для всех точек тела и может быть вынесена за знак суммы при определении момента количества движения тела и так как начало координат совпадает с центром масс тела, так что  $\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i = 0$ , то момент количества движения тела

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i). \quad (16.3)$$

Раскрывая тройное векторное произведение, входящее в (16.3), получим скалярные составляющие вектора момента количества движения  $\bar{G}$  по осям координат:

$$G_x = \omega_x \sum_{i=1}^n m_i (y^2 + z^2) - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i xy - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i xz, \quad (17.3)$$

$$G_y = -\omega_x \sum_{i=1}^n m_i xy + \omega_y \sum_{i=1}^n m_i (x^2 + z^2) - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i yz, \quad (18.3)$$

$$G_z = -\omega_x \sum_{i=1}^n m_i xz - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i yz + \omega_z \sum_{i=1}^n m_i (x^2 + y^2). \quad (19.3)$$

Вводя понятие осевых  $J_x, J_y, J_z$  и центробежных  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  моментов инерции:

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i (y^2 + z^2), \quad J_y = \sum_{i=1}^n m_i (x^2 + z^2), \quad J_z = \sum_{i=1}^n m_i (x^2 + y^2),$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i xy, \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i xz, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i yz,$$

выражения (17.3)—(19.3) перепишем в виде

$$G_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z, \quad (17a.3)$$

$$G_y = -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z, \quad (18a.3)$$

$$G_z = -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z. \quad (19a.3)$$

Наконец, дифференцирование вектора  $\bar{G}$  по общим правилам дифференцирования векторов дает следующие выражения скалярных составляющих по осям координат производной вектора момента количества движения твердого тела:

$$\frac{dG_x}{dt} = \dot{G}_x + \omega_y G_z - \omega_z G_y, \quad (20.3)$$

$$\frac{dG_y}{dt} = \dot{G}_y + \omega_z G_x - \omega_x G_z, \quad (21.3)$$

$$\frac{dG_z}{dt} = \dot{G}_z + \omega_x G_y - \omega_y G_x. \quad (22.3)$$

После подстановки в (20.3)—(22.3) развернутых выражений (17a.3)—(19a.3) составляющих вектора  $\bar{G}$  по осям координат придем к уравнениям равновесия моментов (4.3)—(6.3), приведенным выше.

В предыдущем параграфе мы установили, что при некоторых допущениях (управление летательным аппаратом — идеальное, и величина действующих сил не зависит от отклонения органов управления) уравнения равновесия сил можно рассматривать *независимо* от уравнений равновесия моментов. Другими словами, исследование траекторий центра масс летательных аппаратов можно вести, основываясь только на трех уравнениях равновесия сил (1.3)—(3.3).

Уравнения равновесия моментов (4.3)—(6.3) при этом служат для определения отклонения органов управления летательного аппарата по траектории.

При исследовании изменения углового положения летательного аппарата в зависимости от времени необходимо рассматривать все шесть уравнений движения (1.3)—(6.3). Такая необходимость возникает при исследовании устойчивости и управляемости летательных аппаратов, при изучении же траекторий достаточно ограничиться тремя уравнениями (1.3)—(3.3).

Приведенные выше уравнения движения записаны в прямоугольной системе координат; в некоторых случаях удобно пользоваться цилиндрической или полярной системой координат. Приведем уравнения движения летательного аппарата в инерциальной системе отсчета в следующих двух случаях, которые более подробно рассмотрим впоследствии.

**1. Уравнения движения относительно плоской Земли в проекциях на оси земной системы координат.** Как уже упоминалось, при некоторых упрощающих предположениях, сводящихся к пренебрежению суточным вращением Земли, кривизной ее поверхности и ускорением центра масс Земли в «абсолютно неподвижном» пространстве, земную поверхностьную систему координат можно считать инерциальной. В соответствии с определением земной системы координат (см. § 2 гл. II) оси координат параллельны осям координат земной поверхностной системы отсчета.

Следовательно, в рассматриваемом случае оси координат земной системы сохраняют неизменное направление в пространстве, т. е.  $\omega=0$ .

Полагая в уравнениях (1.3) — (3.3)  $\omega=0$ , получим

$$m\dot{V}_{xg} = X_g, \quad (23.3)$$

$$m\dot{V}_{yg} = Y_g, \quad (24.3)$$

$$m\dot{V}_{zg} = Z_g, \quad (25.3)$$

где через  $X_g, Y_g, Z_g$  обозначены проекции равнодействующей всех внешних сил и реактивной силы тяги на оси земной системы координат.

**2. Уравнения плоского движения летательного аппарата в полярной системе координат.** Полюс поместим в центре земного шара, угол пово-

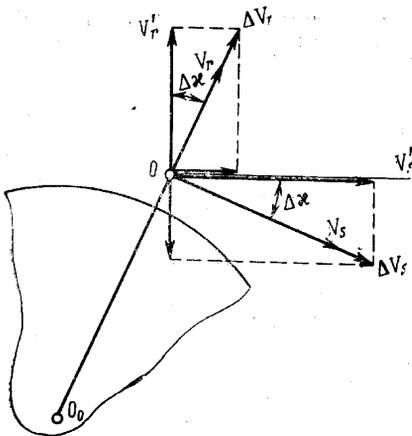


Рис. 4.3. Поворот радиуса-вектора в полярной системе координат

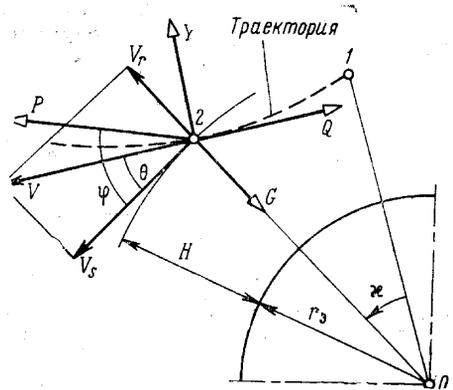


Рис. 5.3. Внешние силы, действующие на летательный аппарат

рота радиуса-вектора будем отсчитывать от некоторого начального неизменного в пространстве радиуса-вектора. Очевидно, что эта система отсчета будет инерциальной. Радиальную и тангенциальную составляющие скорости обозначим  $V_r$  и  $V_s$ .

Рассмотрим два последовательных положения радиуса-вектора, соответствующие моментам времени  $t$  и  $t_1 = t + \Delta t$ . За малое время  $\Delta t$  радиус-вектор повернется на малый угол  $\Delta x$ ; величины составляющих скорости возрастут соответственно на  $\Delta V_r$  и  $\Delta V_s$ . Как видно из рис. 4.3, приращения составляющих скорости на касательную и радиус, направления которых соответствуют моменту времени  $t$ , будут

$$\delta V_s = (V_s + \Delta V_s) \cos \Delta x + (V_r + \Delta V_r) \sin \Delta x - V_s \approx \Delta V_s + V_r \Delta x,$$

$$\delta V_r = (V_r + \Delta V_r) \cos \Delta x - (V_s + \Delta V_s) \sin \Delta x - V_r \approx \Delta V_r - V_s \Delta x.$$

Поделив обе части этих равенств на  $\Delta t$  и переходя к пределу, найдем тангенциальное и центростремительное ускорения:

$$j_s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\delta V_s}{\Delta t} \right) = \dot{V}_s + V_r \dot{x}, \quad (26.3)$$

$$j_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\delta V_r}{\Delta t} \right) = \dot{V}_r - V_s \dot{x}. \quad (27.3)$$

Направление внешних сил, действующих на летательный аппарат, показано на рис. 5.3.

Проектируя внешние силы на направление радиуса-вектора и касательной к нему, получим следующие уравнения движения летательного аппарата в полярной системе координат:

$$m(\dot{V}_s + V_r \dot{\varphi}) = P \cos \varphi - Q \cos \theta - Y \sin \theta, \quad (28.3)$$

$$m(\dot{V}_r - V_s \dot{\varphi}) = P \sin \varphi - mg - Q \sin \theta + Y \cos \theta. \quad (29.3)$$

Если ось двигателя совпадает с осью летательного аппарата и двигатель неподвижен относительно летательного аппарата, то в уравнениях (28.3) и (29.3) следует положить

$$\varphi = \theta,$$

где  $\theta$  — угол тангажа.

В частности, если полет происходит с нулевой силой тяги на больших высотах и аэродинамическими силами, действующими на летательный аппарат, можно пренебречь, уравнения (28.3) и (29.3) принимают вид

$$\dot{V}_s + V_r \dot{\varphi} = 0, \quad (30.3)$$

$$\dot{V}_r - V_s \dot{\varphi} = -g = -g_0 \frac{r_3^2}{r^2}. \quad (31.3)$$

Этими уравнениями с достаточной степенью точности описывается движение баллистической ракеты на пассивном участке полета.

Если воспользоваться приведенными на стр. 83 выражениями

$$V_s = r \dot{\varphi} \quad \text{и} \quad V_r = \dot{r},$$

то (30.3) и (31.3) можно переписать в виде

$$r \ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} \dot{r} = 0, \quad (30a.3)$$

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -g = -g_0 \frac{r_3^2}{r^2}. \quad (31a.3)$$

### § 3. Уравнения движения в неинерциальной системе отсчета

В предыдущем параграфе были составлены уравнения движения в инерциальной системе отсчета.

Инерциальной системой отсчета (например геоцентрической) целесообразно пользоваться и при рассмотрении ряда других задач; например в задаче о выводе ИСЗ и его движении по орбите, в задаче о движении космического корабля и т. д. Однако при рассмотрении движения таких летательных аппаратов, как, например, самолет, крылатая и баллистическая ракета и т. п., систему отсчета целесообразно связать с *поверхностью Земли, не делая при этом тех упрощающих предположений*, которые были сформулированы в предыдущем параграфе. Такая система отсчета будет заведомо неинерциальной; уравнения движения относительно этой системы отсчета будут отличаться от уравнений (1.3) — (3.3).

Уравнения движения летательного аппарата в неинерциальной системе отсчета можно составить двумя способами.

Во-первых, в уравнениях (1.3) — (3.3) для инерциальной системы отсчета под составляющими линейной и угловой скорости и соответствующих ускорений можно понимать составляющие векторов *полной* (абсолютной) линейной и угловой скорости и ускорений. Эти полные

скорости и ускорения представляют собой суммы скоростей и ускорений относительно неинерциальной системы отсчета и скоростей и ускорений неинерциальной системы по отношению к «абсолютно неподвижному» пространству. В левые части составленных таким образом уравнений, помимо интересующих нас скоростей и ускорений, в неинерциальной системе отсчета войдут некоторые добавочные члены, описывающие перемещение рассматриваемой неинерциальной системы отсчета (например, связанной с поверхностью Земли) по отношению к инерциальной системе. В правых частях уравнений движения при этом должны быть помещены только проекции внешних сил и реактивной силы тяги, действующих на летательный аппарат.

Во-вторых, уравнения движения в неинерциальной системе отсчета можно записать, оставив в левой части уравнений (1.3)—(3.3) только скорости и ускорения в неинерциальной системе отсчета, добавив к правым частям уравнений особые силы — *силы инерции*.

Силы инерции встречаются только в неинерциальных системах отсчета, но в этих системах они имеют вполне реальный смысл и отличаются от других сил только тем, что нельзя указать тела, в результате взаимодействия с которыми силы инерции появляются.

Выражения для сил инерции имеют следующий вид:

$$\bar{F}_{ин} = -m(\bar{W}_{пер} + \bar{W}_{кор}),$$

где  $\bar{W}_{пер}$  и  $\bar{W}_{кор}$  — переносное и кориолисово ускорения, связанные с неинерциальностью системы отсчета.

Если рассмотреть выражение (28.1) для абсолютного ускорения

$$\bar{W}_a = \bar{W}_{отн} + \bar{W}_{пер} + \bar{W}_{кор},$$

то станет ясным, что оба способа составления уравнений движения приведут к одинаковому окончательному результату, как это хорошо известно из механики. В дальнейшем уравнения движения летательного аппарата в неинерциальной системе отсчета будем составлять по первому из указанных способов.

Таким образом, уравнение движения тела в неинерциальной системе отсчета в векторной форме имеет вид

$$m(\bar{W}_{отн} + \bar{W}_{пер} + \bar{W}_{кор}) = \bar{F}, \quad (32.3)$$

где  $\bar{F}$  — вектор равнодействующей внешних и реактивных сил.

В скалярной форме (в проекциях на оси некоторой пока не определенной системы координат) уравнение (32.3) можно записать, воспользовавшись формулами (29.1)—(31.1) для составляющих абсолютного ускорения. Получим

$$m[\dot{V}_{0x} + \omega_y V_{0z} - \omega_z V_{0y} + \dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y + \omega_x \omega_y y + \omega_x \omega_z z - x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + \dot{V}_{rx} + 2(\omega_y V_{rz} - \omega_z V_{ry})] = X, \quad (33.3)$$

$$m[\dot{V}_{0y} + \omega_z V_{0x} - \omega_x V_{0z} + \dot{\omega}_x z - \dot{\omega}_x z + \omega_x \omega_y x + \omega_y \omega_z z - y(\omega_x^2 + \omega_z^2) + \dot{V}_{ry} + 2(\omega_z V_{rx} - \omega_x V_{rz})] = Y, \quad (34.3)$$

$$m[\dot{V}_{0z} + \omega_x V_{0y} - \omega_y V_{0x} + \dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x + \omega_x \omega_z x + \omega_y \omega_z y - z(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \dot{V}_{rz} + 2(\omega_x V_{ry} - \dot{\omega}_y V_{rx})] = Z. \quad (35.3)$$

В уравнениях (33.3)—(35.3) приняты следующие обозначения:

$V_{0x}$ ,  $V_{0y}$ ,  $V_{0z}$  — составляющие скорости перемещения начала  $O$  неко-

торой (пока не определенной) подвижной системы координат относительно инерциальной системы отсчета;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — составляющие вектора угловой скорости вращения подвижной системы координат относительно инерциальной системы отсчета;

$V_{rx}, V_{ry}, V_{rz}$  — проекции на оси координат вектора скорости относительного движения (по отношению к подвижной системе координат);

$x, y, z$  — координаты движущейся точки относительно подвижной системы координат;

$X, Y, Z$  — проекции равнодействующей всех внешних и реактивных сил на оси подвижной системы координат.

В соответствии с постановкой задачи, данной в начале этого параграфа, за *неинерциальную систему отсчета* примем систему, связанную с поверхностью планеты (в частности — с поверхностью Земли). *Инерциальную систему отсчета* свяжем с центром планеты (в частности — с центром Земли).

Общие уравнения (33.3) — (35.3) можно применить для записи уравнений движения в проекциях на оси любой выбранной системы координат. Составим уравнения движения летательного аппарата относительно земной поверхностной системы отсчета в проекциях на оси *земной системы координат* (см. § 2 гл. II).

Введем *подвижную земную поверхностную систему отсчета* следующим образом. Начало координат подвижной системы перемещается по поверхности земной сферы так, что проекции вектора скорости начала координат этой системы равны:

$$V_{0xg} \neq 0, \quad V_{0yg} \equiv 0, \quad V_{0zg} \neq 0.$$

Направление осей подвижной системы координат выберем параллельным направлению осей земной системы координат. В этой подвижной системе координат летательный аппарат совершает относительное движение, имея возможность перемещаться вдоль оси  $Oy_g$ . Составляющие скорости относительного движения летательного аппарата будут:

$$V_{rxg} \equiv 0, \quad V_{ryg} = V_{yg} \neq 0, \quad V_{rzg} \equiv 0.$$

Координаты летательного аппарата в подвижной системе отсчета:

$$x \equiv 0, \quad y = y_g = H, \quad z \equiv 0.$$

С учетом сделанных замечаний уравнения (33.3) — (35.3) можно переписать в следующем виде:

$$m(\dot{V}_{0xg} + \omega_{yg}V_{0zg} - \dot{\omega}_{zg}H + \omega_{xg}\omega_{yg}H - 2\omega_{zg}V_{yg}) = X_g, \quad (36.3)$$

$$m[\omega_{zg}V_{0xg} - \omega_{xg}V_{0zg} - H(\omega_{xg}^2 + \omega_{zg}^2) + \dot{V}_{yg}] = Y_g, \quad (37.3)$$

$$m(\dot{V}_{0zg} - \omega_{yg}V_{0xg} + \omega_{xg}H + \omega_{yg}\omega_{zg}H + 2\omega_{xg}V_{yg}) = Z_g, \quad (38.3)$$

где  $X_g, Y_g, Z_g$  — проекции равнодействующей внешних сил и реактивной силы тяги на соответствующие оси земной системы координат.

Пусть в некоторый момент времени летательный аппарат находится на высоте  $H$  относительно уровня моря, т. е. на сфере радиуса  $(r_3 + H)$  с центром в центре Земли. Положение точки на сфере определяется двумя угловыми координатами: углом географической широты  $\sigma$  и углом географической долготы  $\lambda$ .

Составляющие скорости летательного аппарата относительно инерциальной системы отсчета в проекциях на оси координат земной системы на основании рис. 6.3

$$\left. \begin{aligned} V_{xg} &= \dot{\lambda}(r_s + H) \cos \sigma, \\ V_{yg} &= \dot{H}, \\ V_{zg} &= -\dot{\sigma}(r_s + H). \end{aligned} \right\} \quad (39.3)$$

Составляющие угловой скорости суточного вращения Земли  $\omega_3$  по осям земной системы координат (рис. 7.3)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{3xg} &= 0, \\ \omega_{3yg} &= \omega_3 \sin \sigma, \\ \omega_{3zg} &= -\omega_3 \cos \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (40.3)$$

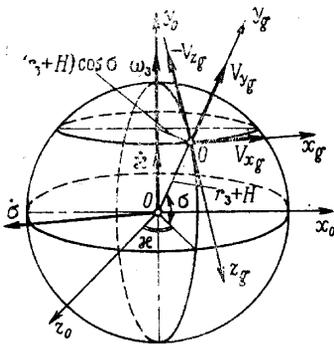


Рис. 6.3. К определению составляющих скорости  $V_{xg}$ ,  $V_{yg}$  и  $V_{zg}$

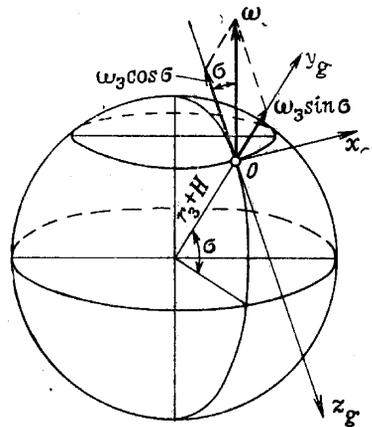


Рис. 7.3. К определению составляющих угловой скорости  $\omega_3$  в земной системе координат

Как нетрудно убедиться, угловая скорость  $\dot{\lambda}$  изменения долготы направлена вдоль оси вращения Земли, а угловая скорость  $\dot{\sigma}$  изменения широты — вдоль отрицательной оси  $Ox_g$ . Проекции угловой скорости  $\dot{\lambda}$  на оси земной системы координат будут:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{xg} &= 0, \\ \dot{\lambda}_{yg} &= \dot{\lambda} \sin \sigma = \frac{V_{xg}}{r_s + H} \operatorname{tg} \sigma, \\ \dot{\lambda}_{zg} &= -\dot{\lambda} \cos \sigma = -\frac{V_{xg}}{r_s + H}, \end{aligned}$$

а проекции угловой скорости  $\dot{\sigma}$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xg} &= \dot{\sigma} = -\frac{V_{zg}}{r_s + H}, \\ \dot{\sigma}_{yg} &= \dot{\sigma}_{zg} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, составляющие полной угловой скорости (относительно инерциальной системы отсчета) с учетом (39.3) и (40.3) и предыдущих соотношений получатся равными:

$$\omega_{xg} = -\dot{\sigma} = \frac{V_{zg}}{r_3 + H}, \quad (41.3)$$

$$\omega_{yg} = \dot{\sigma} \sin \sigma + \omega_{zyg} = \frac{V_{xg}}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma + \omega_3 \sin \sigma, \quad (42.3)$$

$$\omega_{zg} = -\left( \frac{V_{xg}}{r_3 + H} + \omega_3 \cos \sigma \right). \quad (43.3)$$

Взяв производные по времени  $t$  от этих выражений, получим

$$\dot{\omega}_{xg} = \frac{\dot{V}_{zg}}{r_3 + H} - \frac{V_{zg}}{(r_3 + H)^2} \dot{H} = \frac{\dot{V}_{zg}}{r_3 + H} - \frac{V_{zg} V_{yg}}{(r_3 + H)^2}, \quad (44.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{yg} &= \frac{\dot{V}_{xg}}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma - \frac{V_{xg}}{(r_3 + H)^2} \dot{H} \operatorname{tg} \sigma + \frac{V_{xg}}{r_3 + H} \frac{\dot{\sigma}}{\cos^2 \sigma} + \omega_3 \dot{\sigma} \cos \sigma = \\ &= \frac{\dot{V}_{xg}}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma - \frac{V_{xg} V_{yg}}{(r_3 + H)^2} \operatorname{tg} \sigma - \frac{V_{xg} V_{zg}}{(r_3 + H)^2} \frac{1}{\cos^2 \sigma} - \frac{V_{zg}}{r_3 + H} \omega_3 \cos \sigma, \end{aligned} \quad (45.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{zg} &= -\left[ \frac{\dot{V}_{xg}}{r_3 + H} - \frac{V_{xg}}{(r_3 + H)^2} \dot{H} - \omega_3 \dot{\sigma} \sin \sigma \right] = \\ &= -\left[ \frac{\dot{V}_{xg}}{r_3 + H} - \frac{V_{xg} V_{yg}}{(r_3 + H)^2} + \frac{V_{zg}}{r_3 + H} \omega_3 \sin \sigma \right]. \end{aligned} \quad (46.3)$$

Так как летательный аппарат находится над поверхностью земной сферы, то составляющие скорости начала координат подвижной системы

$$V_{0xg} = \frac{r_3}{r_3 + H} V_{xg} + r_3 \omega_3 \cos \sigma, \quad (47.3)$$

$$V_{0yg} = 0, \quad (48.3)$$

$$V_{0zg} = \frac{r_3}{r_3 + H} V_{zg}. \quad (49.3)$$

Для производных по времени этих составляющих получаются следующие выражения:

$$\dot{V}_{0xg} = \frac{r_3}{r_3 + H} \dot{V}_{xg} - \frac{r_3}{(r_3 + H)^2} V_{xg} V_{yg} + \frac{r_3}{r_3 + H} V_{zg} \omega_3 \sin \sigma, \quad (50.3)$$

$$\dot{V}_{0yg} = 0, \quad (51.3)$$

$$\dot{V}_{0zg} = \frac{r_3}{r_3 + H} \dot{V}_{zg} - \frac{r_3}{(r_3 + H)^2} V_{zg} V_{yg}. \quad (52.3)$$

Мы получили выражения для всех кинематических величин, входящих в левые части уравнений движения (36.3) — (38.3). Используя эти выражения, запишем уравнения движения летательного аппарата в проекциях на оси земной системы координат:

$$m W_{axg} = X_g, \quad (53.3)$$

$$m W_{ayg} = Y_g, \quad (54.3)$$

$$m W_{azg} = Z_g, \quad (55.3)$$

где составляющие абсолютного ускорения  $\overline{W}_a$  на оси  $Ox_g$ ,  $Oy_g$  и  $Oz_g$

$$W_{axg} = \dot{V}_{xg} + \frac{V_{xg}V_{yg}}{r_3 + H} + \frac{V_{xg}V_{zg}}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma + 2\omega_3(V_{yg} \cos \sigma + V_{zg} \sin \sigma), \quad (56.3)$$

$$W_{ayg} = \dot{V}_{yg} - \frac{V_{xg}^2 + V_{zg}^2}{r_3 + H} - (r_3 + H) \omega_3^2 \cos^2 \sigma - 2\omega_3 V_{xg} \cos \sigma, \quad (57.3)$$

$$W_{azg} = \dot{V}_{zg} + \frac{V_{yg}V_{zg}}{r_3 + H} - \frac{V_{xg}^2}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma - 2\omega_3 V_{xg} \sin \sigma - (r_3 + H) \omega_3^2 \sin \sigma \cos \sigma. \quad (58.3)$$

Правые части уравнений (53.3) — (55.3) представляют собой проекции внешних сил и силы тяги на оси земной системы координат.

Уравнения (53.3) — (55.3) целесообразно записать также и в несколько другом виде, оставив в левых частях этих уравнений только составляющие, содержащие ускорения  $\dot{V}_{xg}$ ,  $\dot{V}_{yg}$  и  $\dot{V}_{zg}$ . Эти составляющие ускорения описывают перемещение летательного аппарата в неинерциальной системе отсчета, в данном случае — земной системе отсчета. В правых частях уравнений появятся слагаемые, обусловленные наличием кривизны земной поверхности и суточного вращения Земли.

Уравнения движения (53.3) — (55.3) летательного аппарата в земной системе координат примут после такого преобразования вид

$$m\dot{V}_{xg} = X_g - m \frac{V_{xg}}{r_3 + H} (V_{yg} + V_{zg} \operatorname{tg} \sigma) - 2m\omega_3 (V_{yg} \cos \sigma + V_{zg} \sin \sigma), \quad (59.3)$$

$$m\dot{V}_{yg} = Y_g + m \frac{V_{xg}^2 + V_{zg}^2}{r_3 + H} + m(r_3 + H) \omega_3^2 \cos^2 \sigma + 2m\omega_3 V_{xg} \cos \sigma, \quad (60.3)$$

$$m\dot{V}_{zg} = Z_g - m \frac{V_{yg}V_{zg}}{r_3 + H} + m \frac{V_{xg}^2}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma + 2m\omega_3 V_{xg} \sin \sigma + m(r_3 + H) \omega_3^2 \sin \sigma \cos \sigma. \quad (61.3)$$

Слагаемые, содержащие  $(r_3 + H)$  и  $\omega_3$ , перенесенные в правые части уравнений, представляют собой силы инерции, связанные с кривизной земной поверхности и с суточным вращением Земли.

Уравнения (59.3) — (61.3), описывающие движение летательного аппарата в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, записаны в проекциях на оси земной системы координат. Для краткости в дальнейшем будем называть эти уравнения просто *уравнениями движения в земной системе координат*.

При решении ряда задач динамики полета удобно рассматривать уравнения движения в той же системе отсчета (связанной с поверхностью Земли), но в проекциях на оси других систем координат, в частности — скоростной системы координат. Эти уравнения по аналогии будем называть уравнениями в скоростной системе координат. Переход от уравнений движения в земной системе координат к уравнениям движения в скоростной системе осуществляется с помощью таблицы направляющих косинусов, приведенной на стр. 74.

После выполнения несложных преобразований придем к следующей системе *уравнений движения в скоростной системе координат*:

$$m\dot{V} = X_c + m\omega_3^2 (r_3 + H) \cos \sigma (\sin \theta \cos \sigma - \cos \theta \sin \sigma \sin \psi_c), \quad (62.3)$$

$$mV\dot{\theta} = Y_c + m\omega_s^2(r_s + H) \cos \sigma (\cos \theta \cos \sigma + \sin \theta \sin \sigma \sin \psi_c) + \\ + 2mV\omega_s \cos \sigma \cos \psi_c + m \frac{V^2 \cos \theta}{r_s + H}, \quad (63.3)$$

$$-mV\dot{\psi}_c \cos \theta = Z_c + m\omega_s^2(r_s + H) \sin \sigma \cos \sigma \cos \psi_c + \\ + 2mV\omega_s (\cos \theta \sin \sigma - \sin \theta \cos \sigma \sin \psi_c) + m \frac{V^2}{r_s + H} \cos^2 \theta \operatorname{tg} \sigma \cos \psi_c. \quad (64.3)$$

Через  $\theta$  обозначен угол между вектором скорости полета и местной горизонтальной плоскостью, а  $\psi_c$  — угол между проекцией скорости на местную горизонтальную плоскость и касательной к параллели.

В правых частях уравнений (62.3) — (64.3)  $X_c$ ,  $Y_c$  и  $Z_c$  — проекции равнодействующей внешних и реактивной сил на соответствующие оси скоростной системы координат. Член  $mV\dot{\theta}$  в уравнении (63.3) представляет собой силу, возникающую вследствие изменения в функции времени угла  $\theta$ , а член  $m \frac{V^2 \cos \theta}{r_s + H}$  в том же уравнении отражает изменение положения в пространстве с течением времени местной горизонтальной плоскости, обусловленное кривизной земной поверхности.

Так же точно члены

$$-mV \cos \theta \dot{\psi}_c \text{ и } m \frac{V^2 \cos \theta}{r_s + H} \operatorname{tg} \sigma \cos \psi_c$$

в уравнении (64.3) описывают соответственно силу, обусловленную изменением угла  $\psi_c$ , и силу, связанную с поворотом оси  $Ox_g$  в инерциальном пространстве.

Соответствующие слагаемые уравнений (63.3) и (64.3) можно объединить. Суммы этих слагаемых будут представлять собой силы, обусловленные изменением их направления в инерциальной системе отсчета при невращающейся Земле.

Выполнив такое объединение слагаемых, вместо уравнений (63.3) и (64.3) можем написать

$$mV\dot{\theta}_a = Y_c + m\omega_s^2(r_s + H) \cos \sigma (\cos \theta \cos \sigma + \sin \theta \sin \sigma \sin \psi_c) + \\ + 2mV\omega_s \cos \sigma \cos \psi_c, \quad (65.3)$$

$$-mV \cos \theta \dot{\psi}_{ca} = Z_c + m\omega_s^2(r_s + H) \sin \sigma \cos \sigma \cos \psi_c + \\ + 2mV\omega_s (\cos \theta \sin \sigma - \sin \theta \cos \sigma \sin \psi_c), \quad (66.3)$$

где  $\dot{\theta}_a$  — угловая скорость поворота вектора  $\bar{V}$  в координатной плоскости  $xOy$ , а  $\dot{\psi}_{ca}$  — в координатной плоскости  $xOz$ :

$$\dot{\theta}_a = \dot{\theta} - \frac{V \cos \theta}{r_s + H}, \quad (67.3)$$

$$\dot{\psi}_{ca} = \dot{\psi}_c + \frac{V \cos \theta}{r_s + H} \operatorname{tg} \sigma \cos \psi_c. \quad (68.3)$$

Угловые скорости  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\psi}_c$  характеризуют поворот вектора  $\bar{V}$  относительно *местных* горизонтальной и вертикальной плоскостей, положение которых с течением времени *меняется*. Угловые скорости  $\dot{\theta}_a$  и  $\dot{\psi}_{ca}$  характеризуют поворот вектора скорости  $\bar{V}$  относительно *неподвижных* в инерциальном пространстве плоскостей. Определение углов  $\theta_a$  и  $\psi_{ca}$  здесь не приводится, как не представляющее интереса для практики.

Если суточным вращением Земли можно пренебречь ( $\omega_3=0$ ) и летательный аппарат движется по прямолинейной траектории в инерциальной системе отсчета, то нормальные ускорения отсутствуют, т. е.

$$\dot{\theta}_a = \dot{\psi}_{ca} = 0.$$

В этом случае, хотя углы  $\theta$  или  $\psi_c$  непрерывно изменяются вследствие кривизны земной поверхности, так что

$$\dot{\theta} \neq 0, \dot{\psi}_c \neq 0,$$

слагаемые

$$-\frac{V \cos \theta}{r_3 + H} \text{ и } \frac{V \cos \theta}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma \cos \psi_c$$

в точности компенсируют слагаемые  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\psi}_c$ .

Действительно, рассмотрим движение летательного аппарата по прямолинейной траектории (рис. 8.3).

В результате перемещения летательного аппарата за малый промежуток времени  $\Delta t$  угол наклона траектории изменится на  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , причем

$$\Delta\theta = \Delta\chi.$$

Поделив левую и правую части на  $\Delta t$  и переходя к пределам, получим

$$\dot{\theta} = \dot{\chi},$$

но из рис. 8.3 видно, что

$$\dot{\chi} = \frac{V \cos \theta}{r_3 + H}.$$

Тогда

$$\dot{\theta} = \frac{V \cos \theta}{r_3 + H},$$

что соответствует (67.3) при  $\dot{\theta}_a = 0$ .

Аналогичный результат можно получить, но несколько более сложным образом, и для другого угла  $\psi_c$ . В этом случае траектория аппарата расположена в неизменной плоскости, проходящей через центр Земли, которую называют *плоскостью большого круга*. Реализовать движение летательного аппарата в плоскости большого круга можно, например (при  $\omega_3=0$ ), осуществляя полет с нулевым креном и нулевым скольжением ( $\gamma_c = \beta = 0$ ). Уравнение (66.3) при этом превращается в тождество вида  $0 \equiv 0$ .

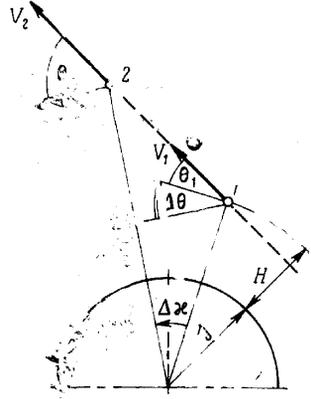


Рис. 8.3. Прямолинейная траектория в инерциальном пространстве

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИЙ ПОЛЕТА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

В гл. III выведены уравнения движения летательного аппарата под действием внешних сил и реактивной силы тяги.

Для решения уравнений движения необходимо располагать сведениями о зависимости внешних сил, действующих на летательный аппарат, от кинематических параметров движения — скорости и высоты полета и состояния атмосферы. Краткие сведения по этим вопросам приводятся в этой главе.

Выше (см. гл. II) дана зависимость ускорения силы тяжести от высоты полета. Помимо силы тяжести, на летательный аппарат при полете в атмосфере действуют аэродинамические силы, которые обычно рассматриваются в виде трех составляющих — подъемной силы  $Y$ , силы лобового сопротивления  $Q$  и боковой силы  $Z$ . Аэродинамические силы довольно сложным образом зависят от скорости полета и от ориентировки вектора скорости по отношению к летательному аппарату, от давления и температуры наружного воздуха и, конечно, от геометрической формы и размеров летательного аппарата.

При полете в атмосфере с большими скоростями существенно нагревается поверхность летательного аппарата. Явление кинетического нагрева связано с переходом кинетической энергии частиц воздуха, соприкасающихся с поверхностью аппарата, в тепловую энергию. Условия кинетического нагрева могут ограничивать возможные режимы полета летательного аппарата.

Подробное исследование зависимостей аэродинамических сил от кинематических параметров движения, а также явлений, связанных с кинетическим нагревом, составляет предмет специальных курсов — теоретической и экспериментальной аэродинамики. В настоящей книге мы ограничимся лишь общими соображениями по этим вопросам, необходимыми для расчета траекторий летательных аппаратов.

Точно так же мы ограничимся лишь некоторыми фактическими сведениями о состоянии атмосферы, не вникая в физику процессов, происходящих в ней.

Наконец, мы приведем лишь краткое описание некоторых характеристик движителей, применяемых на летательных аппаратах, поскольку подробно эти вопросы рассматриваются в курсе двигателей.

### § 1. Характеристики среды, в которой происходит движение летательного аппарата. Стандартная атмосфера Земли

Характер движения летательного аппарата в пределах атмосферы зависит от состава и структуры атмосферы планеты. В настоящее время более или менее полные и достоверные данные имеются лишь для атмосферы Земли. Суждение о составе и структуре атмосферы других планет основывается на оптических и радиоизмерениях различных видов; такие измерения дают информацию хотя и ценную, но допускающую самые широкие толкования и предположения.

В табл. 1.4 приведены некоторые сведения по этому вопросу. Коэффициент  $\beta$  есть показатель экспоненциального изменения плотности атмосферы в предположении об ее изотермичности:

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta H}.$$

Это допущение об изотермичности атмосферы, конечно, надо рассматривать лишь как самое первое грубое приближение. Колебания

температуры земной атмосферы, даже в сравнительно небольшом диапазоне высот, составляют около 20%. Однако в технических расчетах для прогнозирования изменения плотности в зависимости от высоты это предположение может быть принято.

Представление об изменении параметров атмосферы Марса по сравнению с параметрами атмосферы Земли дает табл. 2.4, полученная по данным работы [62].

Таблица 1.4

**Физические постоянные планет, их спутников и характеристики атмосфер<sup>1</sup>**

| Планета                 | Средний радиус $R_0$<br>м · 10 <sup>6</sup> | Ускорение силы тяжести у поверхности<br>$\frac{g}{m/сек^2}$ | Химический состав атмосферы      | $m^{-1} \cdot 10^{-5}$ |
|-------------------------|---|---|----------------------------------|------------------------|
| Венера                  | 6,2   | 8,50  | CO <sub>2</sub> , N <sub>2</sub> | 16,08                  |
| Земля                   | 6,37  | 9,81  | N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>  | 14,1                   |
| Луна                    | 1,74  | 1,62  | Kr, Xe                           | 7,2                    |
| Марс                    | 3,4   | 3,76  | N <sub>2</sub> , CO <sub>2</sub> | 3,6                    |
| Юпитер                  | 71,4  | 26,00   | H <sub>2</sub> , CH <sub>4</sub> | 5,57                   |
| Титан (спутник Сатурна) | 2,5   | 1,46  | CH <sub>4</sub>                  | 3,28                   |
| Сатурн                  | 60,4  | 11,20   | H <sub>2</sub> , CH <sub>4</sub> | 5,26                   |

<sup>1</sup> Таблица составлена по данным работ Гезли (Gazley C., Atmospheric Entry, The RAND Corp. Rep. P-2052, July, 1960) и Чепмена (Chapman D. R., An Approximate Analytical Method for Studying Entry into Planetary Atmospheres NASA, TN-4276 May 1958).

Таблица 2.4

**Изменение плотности и температуры в атмосфере Марса и Земли**

| Высота $H$ км | Марс  |                    | Земля   |                    |
|---------------|---|--------------------|---|--------------------|
|               | плотность $\rho$<br>кг · сек <sup>2</sup> · м <sup>-4</sup> | температура $T$ °К | плотность $\rho$<br>кг · сек <sup>2</sup> · м <sup>-4</sup> | температура $T$ °К |
| 0             | 0,074—0,149   | 200—300            | 0,125   | 288                |
| 10            | 0,0414—0,106  | 162—263            | 0,042   | 223                |
| 20            | 0,0235—0,0649   | 124—263            | 0,0091  | 217                |
| 30            | 0,0086—0,0392   | 101—263            | 0,0018  | 230                |
| 40            | 0,0024—0,0238   | 101—261            | 0,0004  | 258                |

В этой таблице помещены некоторые данные об атмосфере Марса, полученные при различных предположениях о законе изменения температуры атмосферы; там же для сравнения приводятся соответствующие данные для атмосферы Земли. Как видно из этой таблицы, в зависимости от предположения о величине и характере изменения по высотам температуры атмосферы Марса получается очень широкий диапазон возможного изменения плотности, особенно на больших высотах полета.

Данные об атмосфере Земли, конечно, гораздо более достоверны, чем об атмосфере других планет и прежде всего наших ближайших соседей — Марса и Венеры.

Состояние атмосферы, т. е. соотношение между давлением воздуха, его температурой и плотностью и геометрической высотой относительно поверхности Земли, на разных географических широтах в разное время года и даже суток различно.

Таким образом, например, результаты испытаний одного и того же летательного аппарата, проведенных в разное время и в различных географических пунктах, несопоставимы между собой, так как в этих условиях плотность, давление, температура воздуха, от которых зависят аэродинамические силы, различны.

Очевидно, что для получения сравнимых между собой результатов расчета траекторий и данных летных испытаний необходимо принять не зависящую от времени и от географического положения одинаковую во всех случаях *стандартную атмосферу*.

В СССР в настоящее время принята таблица стандартной атмосферы (ГОСТ 4401—64), которая устанавливает численные значения основных термодинамических параметров и других физических характеристик атмосферы на высотах от —2000 до 200 000 м<sup>1</sup>.

При расчете стандартной атмосферы за определяющие параметры взяты температура и молекулярный вес.

На высотах до 200 000 м по характеру изменения температуры атмосфера делится на 11 слоев. Общим свойством всех этих слоев является линейность изменения так называемой молекулярной температуры  $T_m$ , выражаемой в градусах по шкале Кельвина, по геопотенциальной высоте  $\Phi$ , выражаемой в геопотенциальных метрах, с градиентом  $a_m = \frac{\Delta T_m}{\Delta \Phi}$ .

Геопотенциальная высота  $\Phi$  связана с геометрической высотой  $H^2$  соотношением

$$\Phi = \frac{r_3 H}{r_3 + H},$$

где  $r_3$  — средний радиус Земли.

Молекулярная температура  $T_m$  связана с кинетической  $T$  зависимостью

$$T_m = T \frac{M_0}{M_h},$$

где  $M_0$  и  $M_h$  — молекулярный вес воздуха на уровне моря и на рассматриваемой высоте соответственно.

Исходные значения физических характеристик атмосферы на уровне моря следующие:

барометрическое давление воздуха

$$p_0 = 1013,25 \text{ мбар} = 10332,3 \text{ кг/м}^2 = 760 \text{ мм рт. ст.};$$

температура воздуха

$$T_0 = 288,15^\circ \text{ К (или } t_0 = 15^\circ \text{ С)}.$$

Физические константы по стандартной атмосфере:  
газовая постоянная сухого воздуха (удельная)

$$R = 287,039 \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{сек} = 29,3 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{кг} \cdot \text{град} = 2,87039 \text{ эрг}/\text{град} \cdot \text{г};$$

динамический коэффициент вязкости воздуха при  $T = 273,15^\circ \text{ К}$

$$\mu_0 = 1,75 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{сек}/\text{м}^2;$$

<sup>1</sup> Для высот от 200 000 до 300 000 м в ГОСТ 4401—64 приведены характеристики атмосферы, рекомендуемые Координационной комиссией при АН СССР по составлению ГОСТ на стандартную атмосферу.

<sup>2</sup> По ГОСТ 4401—64 геометрическая высота обозначается  $h$ .

отношение теплоемкости воздуха при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4000;$$

ускорение свободного падения тела на уровне моря

$$g_0 = 9,80665 \text{ м/сек}^2$$

(соответствующее географической широте  $\sigma = 45^\circ 32' 40''$ ).

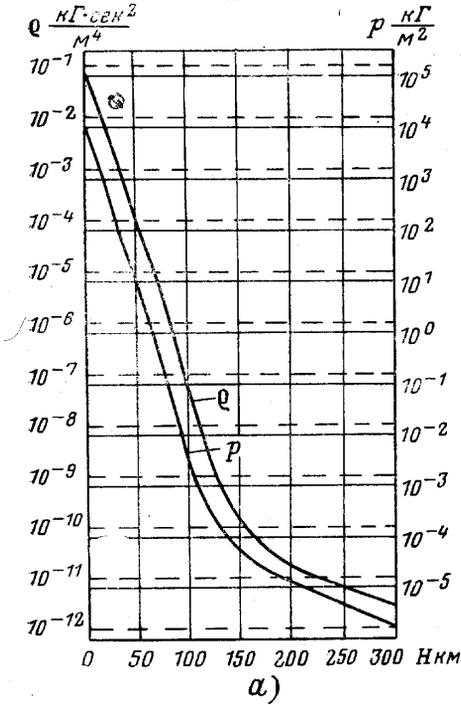
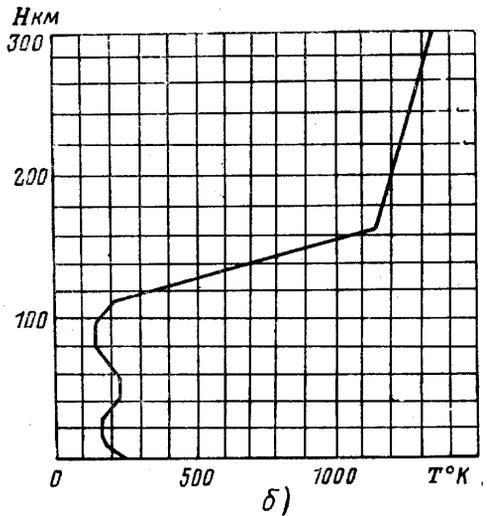


Рис. 1.4. Параметры стандартной атмосферы (ГОСТ 4401—64) в зависимости от высоты:

а — зависимость плотности  $\rho$  и давления  $p$  от высоты; б — зависимость температуры  $T$  от высоты  $H$



Для этих данных по уравнению состояния идеального газа

$$\frac{p_0}{\rho_0} = g_0 R T_0$$

можно найти плотность воздуха  $\rho$  на уровне моря:

$$\rho_0 = 1,2250 \text{ кг/м}^3 = 1,2492 \cdot 10^{-1} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4.$$

Для расчета таблиц стандартной атмосферы пользовались следующими формулами:  
для давления:

в изотермическом слое

$$\lg p = \lg p_* - 0,434294 \frac{G_0}{RT} (\Phi - \Phi_*);$$

в слое с линейно изменяющейся температурой

$$\lg p = \lg p_* - \frac{G_0}{a_M R} \lg \frac{T_{M*} + a_M (\Phi - \Phi_*)}{T_{M*}};$$

для плотности:

в изотермическом слое

$$\lg \rho = \lg \rho_* - 0,434294 \frac{G_0}{RT} (\Phi - \Phi_*);$$

в слое с линейно изменяющейся температурой

$$\lg \rho = \lg \rho_* - \left( 1 + \frac{G_0}{a_M R} \right) \lg \frac{T_{M*} + a_M (\Phi - \Phi_*)}{T_{M*}}.$$

Здесь  $G_0$  — коэффициент, численно равный  $g_0$ . Индекс «\*» показывает значения параметров, относящихся к нижней границе рассматриваемого слоя.

Динамическая вязкость воздуха определялась по формуле

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + 110,4}{T + 110,4}$$

и кинематическая вязкость по формуле

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

В таблице стандартной атмосферы (см. Приложение) наряду с основными физическими параметрами воздуха приводятся и другие данные для расчета траекторий летательных аппаратов. На рис. 1.4 приведены графики, показывающие характер изменения с высотой температуры, давления и плотности окружающего воздуха согласно ГОСТ 4401—64.

## § 2. Аэродинамические силы, действующие на летательный аппарат

Аэродинамические силы, действующие на летательный аппарат, представляют обычно в виде трех составляющих по осям полусвязанной системы координат: силы лобового сопротивления  $Q = c_x S q$ , подъемной силы  $Y = c_y S q$  и боковой силы  $Z = c_z S q$ , где  $q = \rho V^2 / 2$  — скоростной напор,  $S$  — характерная площадь.

Значения коэффициентов лобового сопротивления  $c_x$ , подъемной силы  $c_y$  и боковой силы  $c_z$  обычно получают на основании результатов испытания моделей летательных аппаратов в аэродинамической трубе или путем теоретического расчета.

Вопросы, связанные с теоретическим или экспериментальным определением этих коэффициентов, составляют предмет теоретической и экспериментальной аэродинамики и газодинамики; в этой книге вопросы такого рода не рассматриваются.

При решении ряда задач динамики летательного аппарата целесообразно иметь аналитические выражения коэффициентов  $c_x$ ,  $c_y$  и  $c_z$ , связывающие эти коэффициенты с основными кинематическими параметрами движения: скоростью  $V$ , высотой полета  $H$ , углами атаки  $\alpha$  и скольжения  $\beta$ . Ниже рассмотрены приближенные способы представления поляры летательного аппарата в аналитической форме. Поляра является основой для расчета траекторий летательных аппаратов, полет которых происходит в относительно плотных слоях атмосферы.

Аэродинамические силы, действующие на тело (например на летательный аппарат), возникают в результате взаимодействия тела и воздушной среды, в которой это тело движется. Это взаимодействие представляет собой совокупность достаточно сложных физических процессов. Поэтому для выяснения общих закономерностей обычно рассматривают упрощенную модель явления, выделяя главные характерные черты и пренебрегая второстепенными.

Воздушная среда представляет собой совокупность молекул, которые находятся в состоянии непрерывного хаотического движения. Кроме того, молекулы могут перемещаться относительно летательного аппарата с некоторой «упорядоченной» скоростью — средней поступательной (скоростью набегающего потока).

Как известно из кинетической теории газов, длина свободного пробега молекулы зависит от числа молекул в единице объема, т. е. от плотности среды, скорости хаотического движения молекул (температуры среды) и от размеров самих молекул. Средняя длина свободного пробега молекул может быть определена с помощью выражения

$$l_{св} = 1,255 \sqrt{\kappa} \frac{\nu}{a}, \quad (1.4)$$

где  $\kappa$  — показатель изоэнтропы, равный отношению  $\frac{c_p}{c_v}$ ;

$\nu$  — кинематический коэффициент вязкости воздуха в  $m^2/сек$ ;

$a$  — скорость распространения звука в воздушной среде в  $m/сек$ .

Поскольку кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  и скорость звука  $a$  зависят от высоты полета, длина свободного пробега молекул  $l_{св}$  есть функция высоты полета  $H$ .

При небольших высотах  $H$  длина свободного пробега молекул мала; с увеличением высоты  $H$  длина свободного пробега увеличивается и на больших высотах может достигать значительной величины.

В табл. 3.4 приведены значения средней длины свободного пробега молекул для различных высот.

Таблица 3.4

| Высота<br>в км | 0                   | 10                  | 30                  | 62                  | 84  | 100 | 120              | 150            | 200            | 400              |
|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----|-----|------------------|----------------|----------------|------------------|
| в см           | $8,6 \cdot 10^{-6}$ | $2,1 \cdot 10^{-5}$ | $4,8 \cdot 10^{-5}$ | $4,9 \cdot 10^{-2}$ | 0,5 | 6   | $1,3 \cdot 10^2$ | $2 \cdot 10^3$ | $3 \cdot 10^4$ | $5,5 \cdot 10^4$ |

До тех пор, пока длина свободного пробега молекул  $l_{св}$  мала по сравнению с размерами тела, динамическим эффектом хаотического движения молекул можно пренебрегать и рассматривать воздушную среду как континуум (сплошную среду). При таком предположении единственным следствием хаотического движения молекул является та или иная температура континуума.

Важным физическим свойством воздуха является его вязкость. Как известно, влияние вязкости воздуха на характер течения проявляется особенно сильно в узкой области потока, примыкающей к поверхности тела, — в пограничном слое; в остальной области потока вязкостью воздуха в первом приближении можно пренебрегать.

Для оценки влияния относительного движения молекул следовало бы рассмотреть соотношение между длиной свободного пробега молекул  $l_{св}$  и характерным размером тела  $b$ . Вместо размера  $b$  можно взять толщину пограничного слоя  $\delta$  и рассматривать вместо отношения  $l_{св}/b$  величину отношения  $l_{св}/\delta$ . Если это отношение мало, то имеется основание для представления о воздухе как о континууме.

Толщина пограничного слоя  $\delta$ , как известно, зависит от кинематического коэффициента вязкости  $\nu$ , меняющегося по высоте  $H$ , от скорости полета  $V$  и от характерного размера тела  $b$ . Кроме того, толщина пограничного слоя зависит от структуры пограничного слоя, течение в котором может быть ламинарным или турбулентным.

Отсюда следует, что отношение  $l_{св}/\delta$  зависит от скорости  $V$  и высоты

полета  $H$ . Если высота и скорость полета не очень велики, то отношение  $l_{св}/\delta$  получается малым, и в первом приближении воздушную среду можно рассматривать как континуум — сплошную среду.

Эта гипотеза сплошности среды значительно облегчает задачу определения аэродинамических сил, действующих на движущееся в воздухе тело.

Скорости полета, при которых применима гипотеза сплошности, могут быть дозвуковыми, звуковыми и сверхзвуковыми.

В другом крайнем случае, когда длина свободного пробега молекул соизмерима с размерами обтекаемого тела, более близким к действительности является представление о воздушной среде как о пространстве, заполненном отдельными молекулами. Аэродинамические силы при этом получаются в результате взаимодействия отдельных молекул и поверхности тела.

Область скоростей и высот полета, для которых применимо такое ньютоновское представление о воздушной среде, называют областью *свободно-молекулярного потока*.

В свободно-молекулярном потоке молекулы, соударяясь с телом, почти не изменяют количества движения соседних молекул, так как частота взаимных соударений молекул значительно меньше частоты соударений молекул с поверхностью обтекаемого тела. В результате вблизи поверхности тела скорость потока практически остается такой же, как и на некотором расстоянии от тела: приторможенный телом пограничный слой отсутствует.

Если отношение длины свободного пробега молекул  $l_{св}$  к толщине пограничного слоя  $\delta$  лежит в промежутке между двумя рассмотренными крайними случаями, то реализуется некоторая средняя картина обтекания тела. Ближайшие к поверхности тела частицы воздуха не остаются неподвижными, как в сплошной среде, и не сохраняют полную свою скорость, как в свободно-молекулярном потоке. Поток обтекает тело с проскальзыванием частиц, находящихся в пограничном слое, относительно поверхности тела.

В большинстве задач динамики полета, приведенных в этой книге, при определении аэродинамических сил нас будет интересовать главным образом область скоростей и высот полета, для которой справедлива гипотеза сплошности.

При расчете траекторий движения летательных аппаратов и при определении величины аэродинамических сил, действующих на летательный аппарат, необходимо принимать во внимание кинетический нагрев поверхности летательного аппарата, как об этом упоминалось в начале этой главы. Вопросы кинетического нагрева рассмотрены в следующем параграфе. Здесь же сделаем лишь общие замечания.

Вязкость воздуха  $\mu$ , плотность  $\rho$ , теплопроводность  $\lambda$ , удельные теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  зависят от температуры воздуха  $T$ . Вследствие кинетического нагрева температура воздуха вблизи поверхности тела повышается; вместе с этим изменяются и все указанные выше параметры воздуха, что существенно усложняет задачу теоретического определения аэродинамических сил, действующих на летательный аппарат при больших скоростях полета.

Кроме того, при достаточно больших скоростях и высотах полета имеет место явление диссоциации — распад молекул воздуха на составляющие атомы, так что представление о воздухе как о двухатомном газе теряет силу. Помимо диссоциации, происходит также электризация частиц воздуха — ионизация газа; при изучении движения таких газов надо принимать во внимание электростатические и магнитные силы.

При проведении точных расчетов температуры поверхности тел, летящих на больших высотах с большой скоростью, а также при точном теоретическом расчете аэродинамических сил все эти явления необходимо принимать во внимание.

**Область применения гипотезы сплошности.** Наметим приблизительно области скоростей и высот полета, для которых применимы гипотеза сплошности и гипотеза свободно-молекулярного потока. Как уже было отмечено, основным критерием при решении этого вопроса является отношение длины свободного пробега молекул  $l_{св}$  к характерному линейному размеру тела  $b$ , называемое *числом Кнудсена*:

$$Kn = \frac{l_{св}}{b}.$$

Число Кнудсена можно записать и иначе, приняв за характерный размер толщину пограничного слоя  $\delta$ :

$$Kn_{\delta} = \frac{l_{св}}{\delta}. \quad (2.4)$$

Если в выражение (2.4) подставить  $l_{св}$  из (1.4), то получим

$$Kn = 1,255 \sqrt{\kappa} \frac{b}{\delta} \frac{M}{Re}, \quad (3.4)$$

где число Рейнольдса  $Re = \frac{Vb}{\nu}$ , а число Маха  $M = \frac{V}{a}$ .

Для той приближенной задачи, которая поставлена здесь — выяснения области применимости той или иной гипотезы, — толщину пограничного слоя можно определить по простым формулам для несжимаемой жидкости, которые для плоской пластинки в зависимости от структуры пограничного слоя имеют следующий вид:

при ламинарном пограничном слое

$$\frac{\delta}{b} = \frac{4,64}{\sqrt{Re}}, \quad (4.4)$$

при турбулентном пограничном слое

$$\frac{\delta}{b} = \frac{0,37}{Re^{0,2}}. \quad (5.4)$$

В выражениях (4.4) и (5.4) через  $Re$  обозначено число Рейнольдса, определяемое по длине  $b$  пластинки:

$$Re = \frac{V \cdot b_{пл}}{\nu}.$$

Приблизительно можно считать, что при обтекании плоской пластинки, установленной под нулевым углом атаки, ламинарный пограничный слой реализуется в диапазоне

$$10^2 \leq Re \leq 10^5,$$

а турбулентный — при

$$Re > 10^5.$$

При числах  $Re$ , меньших  $10^2$ , пограничный слой практически заполняет всю область течения (*течение Стокса*), так что силы вязкости надо учитывать во всем потоке.

Если не принимать во внимание влияние сжимаемости воздуха на толщину пограничного слоя, то по выражениям (3.4) — (5.4) можно

построить приблизительные границы областей, в которых справедливы гипотезы сплошности и свободно-молекулярного потока. Результаты такого расчета приведены на рис. 2.4.

При построении графика рис. 2.4 было принято, что при  $K_\delta \leq 0,01$  справедлива гипотеза сплошности, а при  $K_\delta > 1,0$  — гипотеза свободно-молекулярного потока.

Промежуточной области, заключенной в интервале

$$0,01 \leq K_\delta < 1,$$

будет соответствовать течение с проскальзыванием в пограничном слое.

Эти же результаты показаны на рис. 3.4 и 4.4 в виде зависимости скорости от высоты полета, построенной в предположении, что длина

пластинки  $b_{пл} = 2$  м и  $b_{пл} = 10$  м соответственно. По приведенным графикам можно составить приближенное представление о применимости той или иной гипотезы при решении задач динамики полета.

Рассматривая полет летательных аппаратов различных типов, летающих на различных высотах и с различными скоростями, можно прийти к выводу, что во всей области скоростей и высот полета, где аэродинамические силы играют заметную роль, при определении величины этих аэродинамических сил в большинстве случаев можно исходить из гипотезы сплошности.

**Приближенное аналитическое выражение поляры.** При решении ряда задач, связанных с расчетом траекторий полета крылатых летательных аппаратов, как уже упоминалось, удобно представить полярю летательного аппарата приближенной аналитической зависимостью.

Остановимся вначале на области скоростей полета, в которой сжимаемостью воздуха можно пренебрегать и, следовательно, рассматривать воздух как несжимаемую жидкость. В этой области скоростей полета, как известно, коэффициент лобового сопротивления летательного аппарата  $c_x$  можно представить в виде квадратичной зависимости от коэффициента подъемной силы  $c_y$ :

$$c_x = c_{x0} + Bc_y^2, \quad (6.4)$$

где коэффициент

$$B = \frac{1}{\pi \lambda_0} \quad (7.4)$$

и  $\lambda_0$  — так называемое эффективное удлинение, связанное с действительным удлинением крыльев  $\lambda$  эмпирической формулой, например,

$$\frac{1}{\pi \lambda_0} = \frac{1}{\pi \lambda} + 0,01.$$

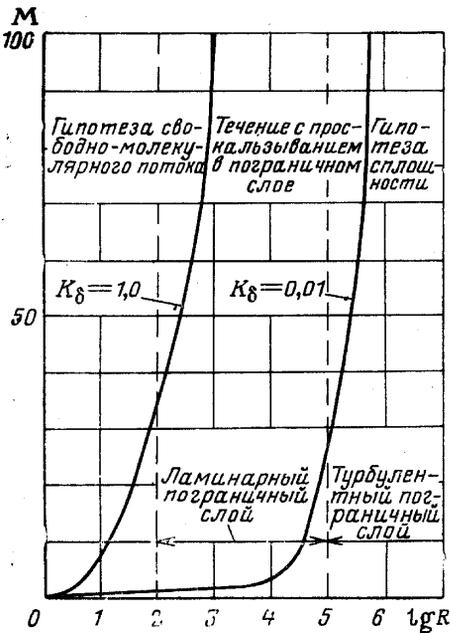


Рис. 2.4. Границы областей применимости гипотезы сплошного и свободно-молекулярного течения

Величина, обратная качеству  $K$  летательного аппарата, на основании (6.4) будет

$$\frac{c_x}{c_y} = \frac{1}{K} = \frac{c_{x0}}{c_y} + Bc_y. \quad (8.4)$$

Дифференцируя (8.4) по  $c_y$  и приравнявая производную  $\frac{d}{dc_y} (1/K)$  нулю, получим значение  $c_{yк}$ , соответствующее максимальному качеству:

$$c_{yк} = \sqrt{\frac{c_{x0}}{B}}. \quad (9.4)$$

Подставив найденное значение  $c_{yк}$  в выражение (8.4), найдем максимальное качество:

$$\left(\frac{c_y}{c_x}\right)_{\max} = K_{\max} = \frac{0,5}{\sqrt{c_{x0}B}}. \quad (10.4)$$



Рис. 3.4. Область применимости гипотезы сплошности для пластинки длиной  $b_{пл} = 2$  м

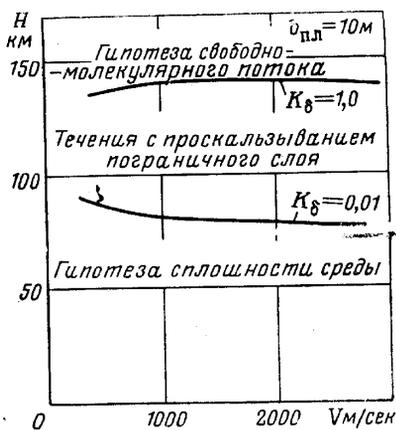


Рис. 4.4. Область применимости гипотезы сплошности для пластинки длиной  $b_{пл} = 10$  м

Заметим, что, как нетрудно убедиться из (9.4), на режиме максимального качества  $K_{\max}$  коэффициент вредного сопротивления  $c_{x0}$  получается равным коэффициенту индуктивного сопротивления, равному

$$c_{x0} = Bc_{yк}^2 = c_{xi}.$$

Как видно из гл. VI и VII, представляет также интерес определить максимальные значения отношений

$$(c_y^{1,5}/c_x)_{\max} \text{ и } (c_y^{0,5}/c_x)_{\max}.$$

Выполнив операции, аналогичные определению максимума отношения  $c_y/c_x$ , найдем, что

$$\left(\frac{c_y^{1,5}}{c_x}\right)_{\max} = \frac{0,57}{\sqrt[4]{c_{x0}B^3}} \quad (11.4)$$

при

$$c_y = \sqrt[3]{3 \frac{c_{x0}}{B}} = 1,732c_{yк}. \quad (12.4)$$

Точно так же 
$$\left(\frac{c_y^{0,5}}{c_x}\right)_{\max} = \frac{0,57}{\sqrt[4]{c_{x0}^3 B}} \quad (13.4)$$

при 
$$c_y = \sqrt{\frac{c_{x0}}{3B}} = 0,578 c_{yk}. \quad (14.4)$$

Полученные выражения справедливы для аппаратов, летающих с небольшими скоростями полета, при которых влиянием сжимаемости воздуха на величину аэродинамических сил можно пренебречь. Этим скоростям полета соответствует область малых докритических чисел Маха, т. е.  $M \ll M_{кр}$ .

При приближении к  $M = M_{кр}$ , при котором местная скорость в какой-либо точке поверхности летательного аппарата становится равной местной скорости звука, и при больших числах  $M$  воздух надо рассматривать как сжимаемый газ.

В зоне, для которой справедлива гипотеза сплошности, обычно различают следующие области скоростей полета: область *докритических скоростей*, соответствующую  $M < M_{кр}$ , области *околозвуковых и сверхзвуковых скоростей* полета, соответствующие числам  $M$  в диапазоне от  $M > M_{кр}$  до  $M = 5 \div 10$ , и область *гиперзвуковых скоростей* полета, соответствующую  $M > 5 \div 10$ .

*Линейная теория сверхзвуковой аэродинамики*, как известно, приводит к линейной зависимости  $c_y$  от  $\alpha$  и квадратичному выражению поляры, такому же, как (6.4) для докритической области, но только в этом случае коэффициенты  $c_{x0}$  и  $B$  надо уже рассматривать как функции числа  $M$ <sup>1</sup>.

Кроме того, при полете в широком диапазоне скоростей и высот необходимо принимать во внимание зависимость поляры от высоты полета вследствие влияния числа  $Re$ , как об этом сказано ниже.

Поскольку в пределах линейной теории и при сверхзвуковых скоростях полета поляра может быть представлена квадратной параболой, остаются в силе выражения (9.4) — (14.4); только значения  $c_{yk}$ ,  $K_{\max}$  и т. д. получаются в виде функций от числа  $M$ .

Так, например, в случае бесконечно длинной пластинки для производной  $c_y^\alpha$  и коэффициента волнового сопротивления  $c_{xв}$  по линейной теории получаем

$$c_y^\alpha = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}}, \quad (15.4)$$

$$c_{xв} = B c_y^2 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{4} c_y^2, \quad (16.4)$$

где  $M = \frac{V_\infty}{a_\infty}$  соответствует невозмущенному потоку.

Напомним, что линейная теория предполагает местные числа Маха на поверхности тела мало отличающимися от числа  $M$  невозмущенного потока и исходит из допущения, что процессы сжатия потока при обтекании происходят по адиабатическому закону.

Более точная теория, которую иногда называют *теорией «скачка — разрежения»*, предполагает, что сжатие потока описывается уравнениями косога скачка давления бесконечной длины и принимает во внимание

<sup>1</sup> В области  $M < M_{кр}$  слагаемое  $B c_y^2$  в (6.4) выражало индуктивное сопротивление; в области же  $M > M_{кр}$  оно учитывает, кроме индуктивного сопротивления, еще и ту часть волнового сопротивления, которая связана с подъемной силой  $Y$ .

отличие местных чисел  $M$  от числа  $M$  невозмущенного потока. По этой теории, например, для плоской пластинки бесконечной длины при больших числах Маха, т. е. для случая  $M \gg 1$ , получаем

$$c_y = \left\{ \frac{\kappa + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^2 + \frac{4}{M^2 a^2}} + \frac{2}{\kappa M^2 a^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \right] \right\} \alpha^2, \quad (17.4)$$

$$c_{x \text{ в}} = \left\{ \frac{\kappa + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^2 + \frac{4}{M^2 a^2}} + \frac{2}{\kappa M^2 a^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \right] \right\} \alpha^3 = c_y \alpha, \quad (18.4)$$

где  $\kappa$  — показатель изоэнтропы (адиабаты),  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ .

Угол атаки  $\alpha$  в (17.4) и (18.4) берется в радианах.

Результаты, близкие к получаемым по формулам (17.4) и (18.4), дают также более простые формулы:

$$c_y = (\kappa + 1) \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\kappa + 1}\right)^2 \frac{1}{M^2 a^2}} \alpha^2, \quad (19.4)$$

$$c_{x \text{ в}} = (\kappa + 1) \sqrt{1 + \left(\frac{4}{\kappa + 1}\right)^2 \frac{1}{M^2 a^2}} \alpha^3. \quad (20.4)$$

Если исходить из теории «скачка — разрежения», то полюзу уже не удастся представить в виде простой аналитической зависимости, например квадратичной, как в линейной теории: как видно из (17.4) —

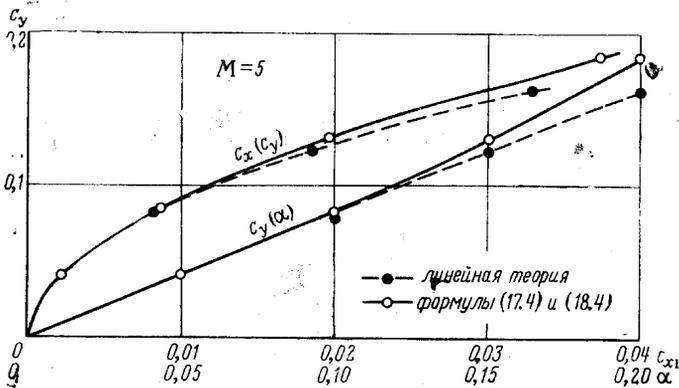


Рис. 5.4. Результаты расчета аэродинамических характеристик плоской пластинки при  $M=5$

(18.4), такая зависимость будет более сложной. Однако если ограничиться сравнительно небольшими углами атаки  $\alpha$ , то даже при больших числах  $M$  результаты расчета по формулам (17.4) и (18.4) несильно отличаются от результатов расчета по формулам (15.4) — (16.4) линейной теории. Для сравнения на рис. 5.4—8.4 приведены результаты таких расчетов для нескольких значений  $M$ , причем для всех чисел  $M$  было принято, что  $\kappa = 1,4 = \text{const}$ .

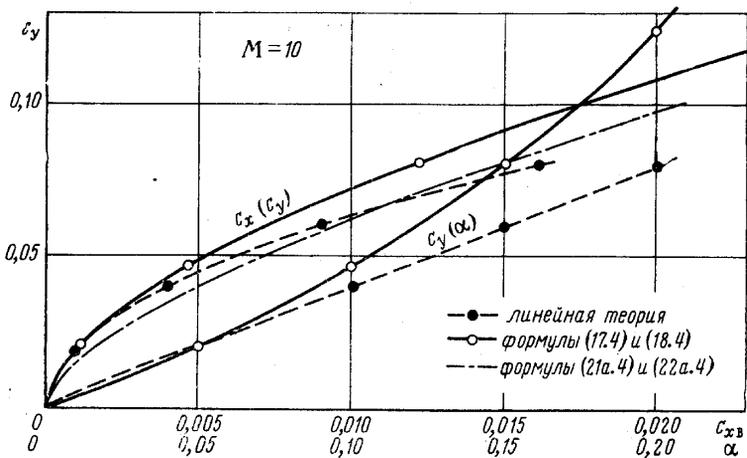


Рис. 6.4. Результаты расчета аэродинамических характеристик плоской пластинки при  $M=10$

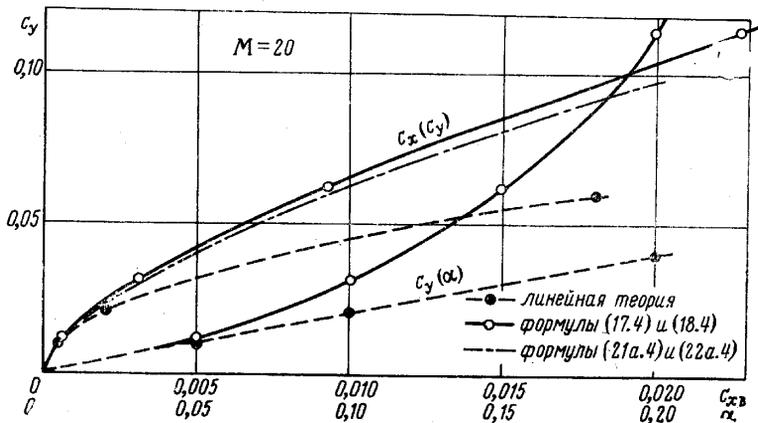


Рис. 7.4. Результаты расчета аэродинамических характеристик плоской пластинки при  $M=20$

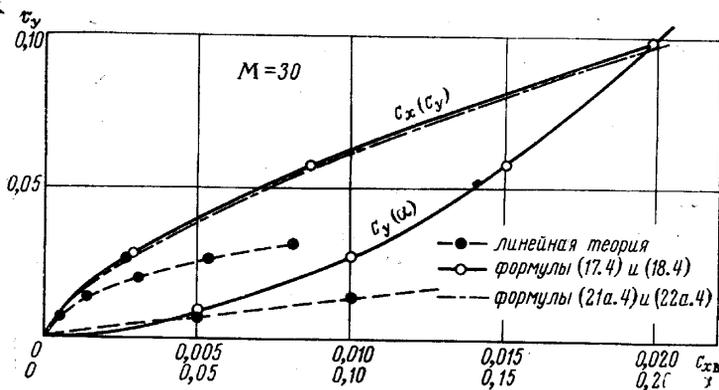


Рис. 8.4. Результаты расчета аэродинамических характеристик плоской пластинки при  $M=30$

Как видно, при  $M=5$  поляра, рассчитанная по линейной теории во всем диапазоне выбранных значений  $c_y$ , практически совпадает с полярой, рассчитанной по формулам (17.4) — (18.4). Расхождение между линейной и более точной теориями становится заметным при больших углах атаки ( $\alpha > 0,1$ ) и при больших числах Маха ( $M > 10$ ).

Таким образом, если числа Маха не превышают  $M=5 \div 10$ , то с достаточной степенью точности можно пользоваться формулами линейной теории, принимая в них показатель изоэнтропы  $\kappa = 1,4 = \text{const}$ .

Как уже упоминалось, при высоких температурах воздуха показатель

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

уже нельзя считать постоянным, так как  $c_p$  и  $c_v$  зависят от температуры воздуха. Кроме того (и это самое главное), при высоких температурах  $c_p$  и  $c_v$  изменяются вследствие диссоциации молекул воздуха. Этим объясняется невозможность применения формулы линейной теории для расчета поляра при числах  $M$ , превышающих  $M=5 \div 10$ .

Наконец, при высоких скоростях и температурах происходит ионизация частиц воздуха; при составлении баланса энергии для больших чисел  $M$  надо принимать во внимание силы, связанные с электростатическими и электродинамическими явлениями.

На основании всех этих соображений принимают, что границей между сверхзвуковыми и гиперзвуковыми скоростями являются скорости, соответствующие  $M$ , равным примерно  $M=5 \div 10$ .

Таким образом, для  $M < 5 \div 10$  в области небольших значений  $c_y$  с достаточной степенью точности поляру можно представить в виде квадратной параболы.

В области гиперзвуковых скоростей полета, т. е. при очень больших значениях чисел  $M$ , в выражениях (17.4) — (18.4) в первом приближении можно пренебречь членами

$$\frac{4}{M^2 a^2}$$

по сравнению с

$$\left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^2$$

и

$$\frac{2}{\gamma M^2 a^2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2} Ma \right) \right]^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}}$$

по сравнению с  $\frac{\kappa + 1}{2}$ .

Тогда вместо (17.4) и (18.4) получим следующие формулы для определения коэффициентов  $c_y$  и  $c_{xв}$  плоской пластинки бесконечно большой длины:

$$c_y = (\kappa + 1) \alpha^2, \quad (21.4)$$

$$c_{xв} = (\kappa + 1) \alpha^3 = \frac{c_y^{1,5}}{(\kappa + 1)^{0,5}} = c_y \alpha. \quad (22.4)$$

Если в этих формулах пренебречь зависимостью  $\kappa$  от температуры воздуха и не принимать во внимание диссоциацию молекул воздуха, то они будут иметь вид

$$c_y \approx 2,4 \alpha^2, \quad (21a.4)$$

$$c_{xв} \approx 2,4 \alpha^3 = 0,646 c_y^{1,5}. \quad (22a.4)$$

Поляры, рассчитанные по формулам (21а.4) — (22а.4), также приведены на графиках рис. 6.4—8.4.

Как видим, при числах  $M=10 \div 15$  формулы гиперзвуковой аэродинамики (21а.4) и (22а.4) дают результат, достаточно близкий к результату, полученному по теории «скачка — разрежения».

Таким образом, в области гиперзвуковых скоростей полета поляра летательного аппарата приближенно может быть представлена в виде полукубической параболы

$$c_x = c_{x0} + B_1 c_y^{1,5}, \quad (23.4)$$

где  $B_1 \approx 0,646$  и  $c_{x0} = c_{xтр} + c_{xв0}$ .

Здесь  $c_{xв0}$  — значение  $c_{xв}$  при  $c_y = 0$ .

Надо заметить, что, как показывает расчет, для небольших углов атаки  $\alpha$ , даже при достаточно больших числах  $M$ , квадратная парабола хорошо аппроксимирует поляру, рассчитанную по формулам (21а.4) — (22а.4). Поэтому для небольших углов атаки  $\alpha$  можно пользоваться приближенными формулами (6.4) и при достаточно больших числах  $M$ .

Коэффициент  $c_{x0}$  в выражении поляры (23.4) при больших числах  $M$  представляет собой сумму коэффициентов сопротивления трения  $c_{xтр}$  и волнового сопротивления  $c_{xв0}$ . Коэффициент трения  $c_{xтр}$  зависит от числа  $Re$ . Если число  $Re$  изменяется в широких пределах, как это бывает при значительном изменении высот и скоростей полета, то коэффициент трения  $c_{xтр}$  может заметно зависеть от режима полета. В таких случаях для каждой высоты полета следовало бы строить свою поляру, что, конечно, усложняет расчет траектории полета.

На рис. 9.4 приведены результаты приближенного расчета коэффициента  $c_x$  плоской пластинки с турбулентным пограничным слоем для значений  $M=1,5$ ,  $c_y=0,1$  и  $M=10$ ,  $c_y=0,05$  соответственно.

Как видно из этого графика, коэффициент  $c_x$  в первом случае при изменении высоты полета от  $H=0$  до  $H=20$  км увеличивается приблизительно на 40%, а во втором случае при изменении от  $H=20$  км до  $H=60$  км — на 50%.

Из рис. 9.4 видно также, что если диапазон изменения высоты полета  $H$  не очень велик, то коэффициент  $c_x$  изменяется незначительно. Так, например, для  $M=10$ ,  $c_y=0,05$  при изменении высоты полета от  $H=30$  км до  $H=40$  км коэффициент  $c_x$  увеличивается приблизительно на 10%. Поэтому, если не требуется высокая точность и диапазон изменения высот не очень велик, допустимо расчет поляры проводить для некоторой средней высоты полета  $H_{ср}$ . Для большей точности расчет поляр можно вести для нескольких средних диапазонов изменения высоты полета.

Имея по испытаниям модели летательного аппарата в аэродинамической трубе семейство поляр  $c_x = c_x(c_y, M, Re)$  и кривые  $c_y = c_y(\alpha, M, Re)$ , для каждой комбинации  $M$  и  $Re$  можно подобрать значения коэффициентов  $c_y^\alpha$ ,  $c_{x0}$  и  $B$ , которые входят в выражения  $c_y = c_y^\alpha \alpha$  и  $c_x = c_{x0} + B c_y^2$ .

Зависимости  $c_y = c_y(\alpha, M)$ ,  $c_y = c_y(c_x, M)$ ,  $c_{x0} = c_{x0}(M_\infty)$  и  $B = B(M_\infty)$ ,

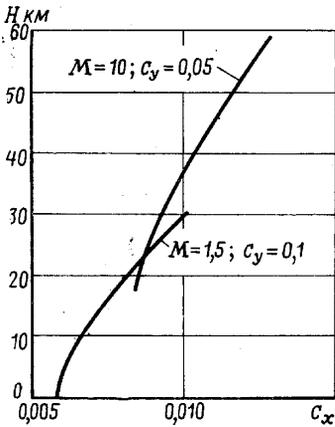


Рис. 9.4. Приближенная зависимость коэффициента  $c_x$  от высоты полета  $H$  для плоской пластинки

которые можно получить в итоге аэродинамического эксперимента, схематически представлены на рис. 10.4—12.4.

Протекание кривой  $c_{x0} = c_{x0}(M)$ , показанное на рис. 12.4, типично для летательных аппаратов со стреловидными крыльями. Как видно, в

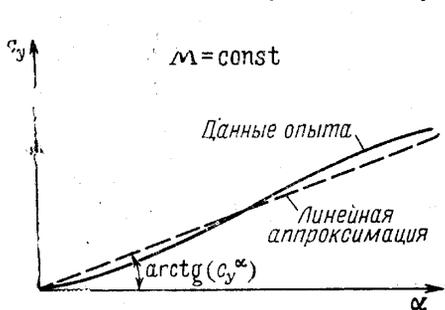


Рис. 10.4. Определение  $c_y^{\alpha}$  по результатам испытаний модели летательного аппарата в аэродинамической трубе

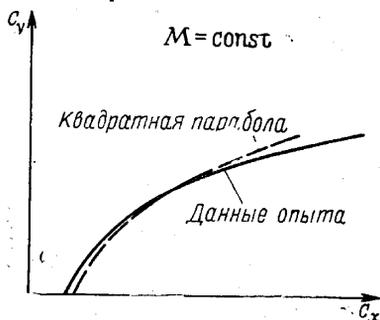


Рис. 11.4. Определение полярной модели летательного аппарата в результате испытаний в аэродинамической трубе

этом случае  $c_{x0}$  имеет два максимума. Первый максимум обычно при числах  $M$ , близких к  $M=1$ , появляется в результате волнового кризиса на фюзеляже и в корневых частях крыльев. Основная часть крыльев при этом обтекается дозвуковым потоком вследствие стреловидности передней кромки крыла. Второй максимум коэффициента  $c_{x0}$  соответствует возникновению и развитию волнового кризиса на основной части крыльев, когда нормальная к передней кромке крыла составляющая скорости потока становится больше скорости звука. Второй максимум  $c_{x0}$ , таким образом, зависит от угла стреловидности передней кромки крыла.

Как видно из дальнейшего, такой специфический характер протекания поляр по числам  $M$  накладывает свой отпечаток и на характеристики оптимальной траектории летательного аппарата (см. гл. VIII): получается несколько относительных экстремумов и соответственно оптималей.

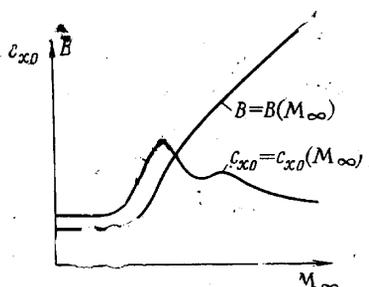


Рис. 12.4. Примерная зависимость  $c_{x0}$  и  $V$  от числа  $M_{\infty}$

### § 3. Кинетический нагрев поверхности летательного аппарата

Выше упоминалось, что при расчете траектории полета в сравнительно плотных слоях атмосферы надо принимать во внимание *нагрев поверхности* летательного аппарата. Мы ограничимся лишь самыми общими соображениями, которые можно положить в основу учета кинетического нагрева при исследовании траекторий полета<sup>1</sup>.

Нагрев летательного аппарата в полете происходит за счет тепла, излучаемого Солнцем и Землей, тепла, выделяемого при работе двигателя и оборудования, установленного на летательном аппарате. Основной причиной нагрева летательного аппарата, однако, является трение воздуха о поверхность обшивки.

Нагрев поверхности тела, движущегося с некоторой скоростью на определенной высоте, возрастает с увеличением скорости полета. Дейст-

<sup>1</sup> Более подробные сведения по вопросам, связанным с кинетическим нагревом, можно найти, например, в [10], [39], [50].

вительно, вследствие затормаживания воздуха вблизи поверхности тела большая часть кинетической энергии частиц воздуха переходит в тепловую энергию, а это и вызывает нагрев поверхности тела. Увеличение температуры воздуха при его адиабатическом торможении (без притока и отвода тепла) можно определить по известной формуле газовой динамики

$$T_T = T_\infty \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) \approx T_\infty (1 + 0,2M^2), \quad (24.4)$$

где  $T_T$  — температура полностью (адиабатически) заторможенного воздуха,  $T_\infty$  — температура невозмущенного потока воздуха;  $\kappa$  — показатель изоэнтропы, принят 1,4.

Температура торможения  $T_T$  быстро увеличивается с увеличением числа  $M$ . Так, например, при  $M=1$  температура  $T_T$  на 20% выше температуры наружного воздуха  $T_\infty$ . При  $M=5$  температура  $T_T$  уже в 6 раз больше температуры  $T_\infty$ , а при  $M=15$  она получается в 46 раз больше температуры наружного воздуха  $T_\infty$ , т. е. превышает  $\sim 5000^\circ \text{K}$ .

В действительности процесс, происходящий в пограничном слое тела, не является адиабатическим, так что температура воздуха вблизи поверхности тела не равна температуре торможения  $T_T$ .

Так как на внешней границе пограничного слоя скорость потока мало отличается от скорости потенциального потока, а на поверхности тела (предполагая существование пограничного слоя) она равна нулю, то температура воздуха  $T_\delta$  на внешней границе пограничного слоя получается значительно меньшей, чем  $T_T$ : в пограничном слое создается перепад температур ( $T_T - T_\delta$ ). Следствием этого перепада является поток тепла, направленный от стенки тела к внешней границе пограничного слоя. По этой причине теплосодержание (энтальпия) воздуха вблизи поверхности тела получается несколько меньшим, чем при адиабатическом процессе.

Температуру воздуха в непосредственной близости к поверхности тела, полученную с учетом этого обстоятельства, называют *температурой восстановления*. Температуру восстановления  $T_*$ , как показывают теоретические и опытные исследования, можно определить по формуле (24.4), если в эту формулу ввести коэффициент восстановления  $r$ :

$$T_* = T_\infty (1 + 0,2r M^2). \quad (25.4)$$

Коэффициент восстановления  $r$  характеризует долю кинетической энергии внешнего потока, переходящую в теплосодержание при полном торможении потока. Для ламинарного пограничного слоя обычно принимают  $r=0,85$ , а для турбулентного  $r=0,88-0,90$ .

В теплообмене на поверхности летательного аппарата участвуют *тепловые потоки*, возникающие как от внешних, так и от внутренних источников тепла. Поверхность летательного аппарата, движущегося с некоторой скоростью, получает определенное количество тепловой энергии из нагретого у стенки пограничного слоя (конвективный поток тепла). Как известно из физики, всякое нагретое тело излучает в окружающее пространство определенное количество энергии в соответствии с законом Стефана — Больцмана. Наконец, существуют тепловые потоки, обусловленные солнечной и земной радиацией, а также наличием источников тепла, размещенных внутри летательного аппарата.

Уравнение для определения теплового потока, подводимого к единице поверхности тела за единицу времени, если тело движется на некоторой высоте  $H$  с некоторой скоростью  $V$ , имеет вид

$$q = q_{\text{конв}} + q_{\text{зем}} + q_{\text{солн}} \pm q_{\text{об}} - q_{\text{луч}}, \quad (26.4)$$

- где  $q_{\text{конв}}$  — удельный конвективный тепловой поток, подводимый к поверхности тела из пограничного слоя;  
 $q_{\text{зем}}$  — удельный тепловой поток излучения, обусловленный радиацией Земли;  
 $q_{\text{солн}}$  — удельный тепловой поток излучения, обусловленный радиацией Солнца;  
 $q_{\text{об}}$  — удельный тепловой (результурующий) поток, подводимый (или отводимый) к поверхности тела от внутренних источников тепла (оборудования);  
 $q_{\text{луч}}$  — удельный тепловой поток от поверхности тела во внешнюю среду, обусловленный излучением поверхности тела.

Если предположить, что температура обшивки летательного аппарата одинакова по всей ее толщине  $\delta$ , и принять, что эта температура устанавливается мгновенно (это справедливо при небольшой толщине  $\delta$  обшивки), то для определения количества тепла на нагрев обшивки можно воспользоваться формулой

$$q = c_{\text{пов}} \gamma_{\text{пов}} \delta \frac{dT_{\text{пов}}}{dt},$$

- где  $c_{\text{пов}}$  — удельная теплоемкость материала обшивки;  
 $\gamma_{\text{пов}}$  — удельный вес материала обшивки;  
 $\delta$  — толщина обшивки;  
 $T_{\text{пов}}$  — температура поверхности обшивки;  
 $t$  — время.

Тогда уравнение (26.4) можно переписать в следующем виде:

$$c_{\text{пов}} \gamma_{\text{пов}} \delta \frac{dT_{\text{пов}}}{dt} = q_{\text{конв}} + q_{\text{зем}} + q_{\text{солн}} \pm q_{\text{об}} - q_{\text{луч}}. \quad (27.4)$$

Уравнение (27.4) описывает нестационарный тепловой процесс, при котором температура поверхности тела изменяется с течением времени. Это уравнение — нелинейное дифференциальное; его решение, вообще говоря, можно получить методами численного интегрирования (см. гл. I).

В зависимости от знака производной  $dT_{\text{пов}}/dt$ , входящей в уравнение (27.4), обшивка летательного аппарата с течением времени будет нагреваться или охлаждаться: при  $dT_{\text{пов}}/dt > 0$  температура обшивки летательного аппарата повышается, при  $dT_{\text{пов}}/dt < 0$  понижается и при  $dT_{\text{пов}}/dt = 0$  остается неизменной. В последнем случае имеет место установившийся теплообмен ( $q=0$ ), которому соответствует *равновесная температура* поверхности  $T_{\text{п.р}}$ . Равновесная температура устанавливается при неограниченно длительном полете в неизменных условиях.

Температуру  $T_{\text{п.р}}$  в первом приближении можно считать равной температуре восстановления  $T^*$  лишь при небольших скоростях и высотах полета. По мере увеличения скорости и высоты полета различие в температурах  $T_{\text{п.р}}$  и  $T^*$  быстро увеличивается. В качестве примера на рис. 13.4 приведены зависимости температуры восстановления  $T^*$  и равновесной температуры  $T_{\text{п.р}}$  пластинки от числа  $M$  полета на высоте  $H=20$  км. Угол атаки пластинки при этом был  $\alpha=0$ , длина пластинки  $b=2$  м, пограничный слой принимался турбулентным.

Из рис. 13.4 видно, что отличие температуры  $T_{\text{п.р}}$  от  $T^*$  увеличивается при увеличении числа  $M$ . При  $M=3$  получаем  $T_{\text{п.р}} \approx 560^\circ \text{K}$ ,

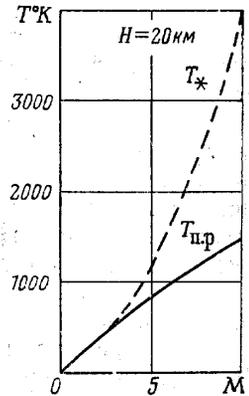


Рис. 13.4. Температура восстановления  $T^*$  и равновесная температура поверхности  $T_{\text{п.р}}$  плоской пластинки

$T_* \approx 580^\circ \text{K}$ ; при  $M=5$  соответственно  $T_{\text{п.р.}}=840^\circ \text{K}$  и  $T_* = 1190^\circ \text{K}$ , а при  $M=10$  имеем  $T_{\text{п.р.}} \approx 1480^\circ \text{K}$  и  $T_* = 4000^\circ \text{K}$ .

В настоящей книге мы не ставим себе целью определять зависимость температуры поверхности летательного аппарата от времени при полете по какой-либо траектории. Это является частью общей задачи проектирования летательного аппарата, и при ее решении надо принимать во внимание индивидуальные особенности конструкции, свойства материала и т. д.

Наша цель — рассчитать траекторию движения летательного аппарата так, чтобы нагрев поверхности не превышал допустимый, например, по условиям прочности конструкции. Такой расчет можно провести, если

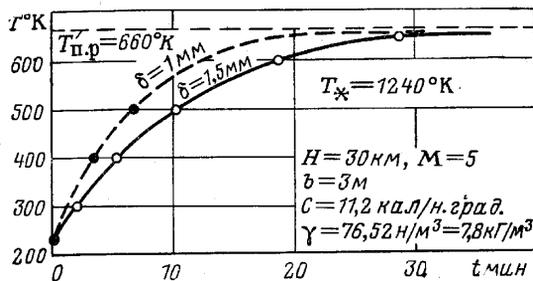


Рис. 14.4. Температура поверхности плоской пластинки в зависимости от времени полета

принять некоторые условные критерии, которые позволили бы на плоскости  $(H, V)$  построить кривую допустимых скоростей в зависимости от высоты полета  $H$ .

Предположим, что в качестве такого критерия для летательных аппаратов, полет которых в течение длительного времени происходит в плотных слоях атмосферы, принимается *равновесная температура* поверхности, взятая в каких-либо характерных точках ее. Равновесная температура поверхности, как уже упоминалось, соответствует установившемуся тепловому процессу, который получился бы, если бы аппарат летел неограниченно долго с данной скоростью и на данной высоте полета. Равновесную температуру (при  $q=0$ ) можно рассматривать как критерий нагрева поверхности (верхний предел нагрева), так как действительные температуры всегда будут меньше равновесной.

На рис. 14.4 в качестве примера приведена зависимость температуры поверхности плоской пластинки длиной  $b=3 \text{ м}$  от времени полета  $t$ . Рассматривался полет со скоростью, соответствующей  $M=5$ , на высоте  $H=30 \text{ км}$ . Как видим, при толщине пластинки  $\delta=1 \text{ мм}$  (в качестве материала поверхности пластинки принята сталь удельного веса  $\gamma=76,52 \text{ н/м}^3=7,8 \text{ кг/м}^3$ ) и удельной теплоемкости  $C_{\text{пов}}=11,2 \text{ кал/н град}$  равновесная температура достигается практически через 20 мин, а при  $\delta=1,5 \text{ мм}$  — через 30 мин после начала полета. При толщине обшивки  $\delta=1 \text{ мм}$  уже через 10 мин после начала полета температура поверхности составляет приблизительно 83% равновесной. Заметим, между прочим, что равновесная температура получается значительно меньшей, чем температура восстановления (во взятом примере  $T_{\text{п.р.}}=660^\circ \text{K}$ , а  $T_* = 1240^\circ \text{K}$ ).

Чтобы избавиться от индивидуальных особенностей той или иной конструкции летательного аппарата, примем  $q_{06}=0$ , т. е. не будем принимать во внимание тепло, выделяемое или поглощаемое оборудованием, размещенным внутри летательного аппарата.

Наконец, будем пренебрегать теплом, обусловленным земной и солнечной радиацией, по сравнению с теплом конвективным и излучаемым телом, так как обычно  $q_{зем}$  и  $q_{солн}$  получаются значительно меньшими, чем  $q_{конв}$  и  $q_{луч}$ . Расчеты показывают, что совершаемая при этом ошибка невелика. Так, например, для плоской пластинки при  $H=60$  км и  $M=10$  ( $T_{п.р}=720^\circ\text{K}$ ) при температуре поверхности  $T_{пов}=600^\circ\text{K}$

$$q_{конв}=3,18 \text{ ккал/м}^2\text{сек}; q_{луч}=1,41 \text{ ккал/м}^2\text{сек}; \\ q_{зем}=0,015 \text{ ккал/м}^2\text{сек}; q_{солн}=0,19 \text{ ккал/м}^2\text{сек}$$

(предполагалось, что пластинка выполнена из легированной стали).

При сделанных предположениях уравнение (27.4) принимает более простой вид:

$$q_{конв}=q_{луч}. \quad (28.4)$$

Градиент давления вдоль большей части поверхности летательного аппарата обычно невелик, так что с целью упрощения расчетных формул на большей части поверхности градиент давления можно считать равным нулю. Тогда в качестве одного из критериев, оценивающих кинетический нагрев, можно рассматривать температуру поверхности плоской пластинки при нулевом угле атаки и заданных скорости и высоте полета.

Наиболее трудные условия нагрева получаются вблизи критической точки носовой части корпуса аппарата, так как толщина пограничного слоя вблизи этой точки очень мала; кроме того, в этой точке получается существенно отличный от нуля градиент давления. Поэтому *наряду с равновесной температурой плоской пластинки*, которая, как было указано, в первом приближении характеризует условия нагрева на большей части поверхности летательного аппарата, будем пользоваться *равновесной температурой в передней критической точке корпуса аппарата*. Носовую часть корпуса условно примем сферической, так как для этого случая расчетные формулы получаются сравнительно простыми.

Выведем приближенные формулы для оценки равновесной температуры поверхности  $T_{п.р}$  для двух указанных случаев.

Конвективный поток тепла на единицу поверхности

$$q_{конв} = \alpha (T_* - T_{п.р}), \quad (29.4)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплопередачи, имеющий различные значения для плоской пластинки и для критической точки сферического тела.

В курсах газовой динамики приводится приближенное выражение коэффициента теплопередачи для плоской пластинки:

$$\alpha \approx 0,5g\rho V c_p c_f \text{Pr}^{-\frac{2}{3}}, \quad (30.4)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;

$\rho$  — плотность окружающего воздуха;

$c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;

$V$  — скорость невозмущенного потока (скорость полета);

$c_f$  — коэффициент трения пластинки;

$\text{Pr}$  — число Прандтля, равное, как известно,

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu g}{\lambda};$$

$\mu$  — коэффициент вязкости воздуха;

$\lambda$  — коэффициент теплопроводности воздуха.

Возникает вопрос: для какой температуры следует брать физические константы воздуха  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $c_f$ , зависящие от температуры воздуха?

Имеются три характерные температуры. На границе пограничного слоя температура воздуха  $T_\delta$  мало отличается от температуры невозмущенного воздуха  $T_\infty$ , так что в первом приближении можно принять  $T_\delta \approx T_\infty$ . Равновесная температура поверхности тела  $T_{п.р}$  значительно превышает температуру невозмущенного воздуха  $T_\infty$ . Наконец, температура восстановления  $T_*$  отличается от температуры поверхности тела  $T_{п.р}$  и от  $T_\delta$ .

Анализ показывает, что если физические константы воздуха брать для так называемой определяющей температуры

$$T_{оп} = 0,5(T_{п.р} + T_\delta) + 0,22(T_* - T_\delta), \quad (31.4)$$

а затем вести расчет по формулам, полученным для несжимаемой жидкости для этой температуры, то результаты расчета оказываются близкими к результатам точного решения, которое имеется для нескольких частных случаев.

Коэффициент трения  $c_f$ , необходимый для определения  $\alpha$ , таким образом, можно рассчитать по формулам, полученным для несжимаемой жидкости, если физические константы газа брать для определяющей температуры  $T_{оп}$ .

В несжимаемой жидкости для плоской пластинки при ламинарном пограничном слое, как известно, коэффициент трения

$$c_{f_{нж}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad (32.4)$$

и при турбулентном пограничном слое

$$c_{f_{нж}} = \frac{0,072}{Re^{0,2}}, \quad (33.4)$$

где

$$Re = \frac{Vb}{\nu} = \frac{Vb\rho}{\mu}$$

Принимая для коэффициента вязкости  $\mu$  формулу

$$\mu = \mu_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{0,76},$$

дающую результаты, близкие к получающимся по более точной формуле Сатерленда,

$$\mu = 1,755 \cdot 10^{-6} \left( \frac{T}{273} \right)^{1,5} \frac{392}{T + 119},$$

полагая  $T = T_{оп}$ , можно получить следующие приближенные выражения: для ламинарного пограничного слоя

$$\frac{c_f}{c_{f_{нж}}} = \left( \frac{T_{оп}}{T_\infty} \right)^{-0,12}, \quad (34.4)$$

для турбулентного

$$\frac{c_f}{c_{f_{нж}}} = \left( \frac{T_{оп}}{T_\infty} \right)^{-0,66}, \quad (35.4)$$

где  $c_f$  — коэффициент трения в сжимаемой жидкости.

Число Прандтля  $Pr$  зависит от температуры воздуха (рис. 15.4). При определении  $Pr$  в соответствии с отмеченным выше надо принимать  $T = T_{оп}$ .

Для коэффициента  $\alpha$  вблизи критической точки при ламинарном пограничном слое теория дает следующее выражение:

$$\alpha = A Pr^{-0,66} g \sqrt{\frac{\beta \rho \mu V}{D}} c_p, \quad (36.4)$$

где приняты обозначения:

$$\beta = 2,82 \sqrt{\frac{p}{p_c} \frac{1}{(1 + 0,2M^2)^{2,5}}};$$

$p$  и  $p_c$  — соответственно давление заторможенного потока перед и за прямым скачком давления. Отношение  $p/p_c$  определяется по известной формуле газовой динамики

$$\frac{p}{p_c} = 11,3 \frac{(1 + 0,2M^2)^{3,5}}{1,167M^2 - 0,167} \left[ \frac{2,43(1 + 0,2M^2) - 2,50}{M^2} \right]^{3,5}; \quad (37.4)$$

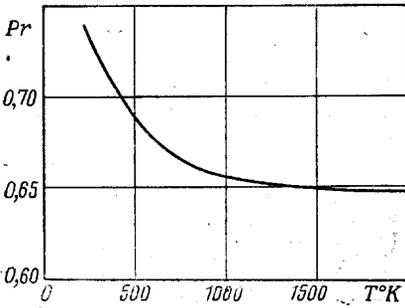


Рис. 15.4. Зависимость числа Прандтля от температуры воздуха

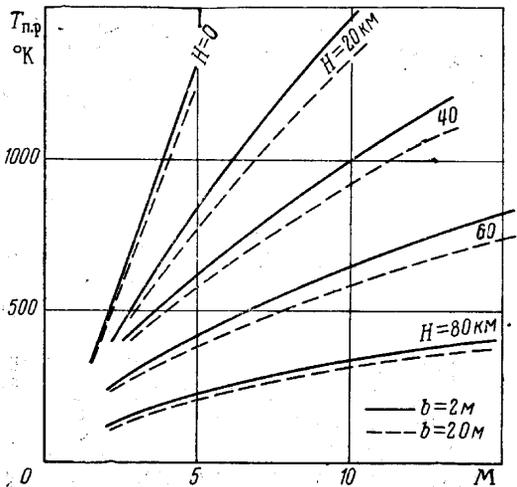


Рис. 16.4. Зависимость равновесной температуры  $T_{п.р.}$  плоской пластинки от числа  $M$  и высоты полета  $H$

$D$  — диаметр сферы или цилиндра, образующих носовую часть тела;  $A$  — некоторый коэффициент, зависящий от формы носовой части тела; значения коэффициента  $A$  приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Ламинарный пограничный слой

| Форма носовой части тела | Сфера | Цилиндр |
|--------------------------|-------|---------|
| Коэффициент $A$          | 0,763 | 0,570   |

Для определения излучаемого телом тепла на единицу поверхности можно воспользоваться формулой

$$q_{луч} = \epsilon \sigma T_{п.р.}^4, \quad (38.4)$$

где коэффициент излучения для абсолютно черного тела  $\sigma = 1,37 \cdot 10^{-11}$  ккал/град<sup>4</sup>·м<sup>2</sup>сек и  $\epsilon$  — так называемый коэффициент черноты, оценивающий излучающую способность тела по сравнению с

абсолютно черным телом. Коэффициент  $\varepsilon$  в сильной степени зависит от материала поверхности тела и его отделки, а также от температуры поверхности тела. Для определенности в дальнейшем будем считать  $\varepsilon=0,8$ .

Пользуясь приведенными выше формулами, по уравнениям (28.4), (29.4) графически или методом последовательных приближений можно рассчитать равновесную температуру  $T_{п.р}$  пластинки, определяя  $\alpha$  по (30.4), а также найти равновесную температуру в критической точке затупленного тела, если  $\alpha$  определять по (36.4). Результаты таких расчетов приведены на рис. 16.4 и 17.4.

График рис. 16.4 построен для пластинки длиной  $b=2$  м при турбулентном пограничном слое; длина пластинки несильно влияет на величину  $T_{п.р}$ . Для сравнения на рис. 16.4 пунктиром проведена кривая для  $b=20$  м.

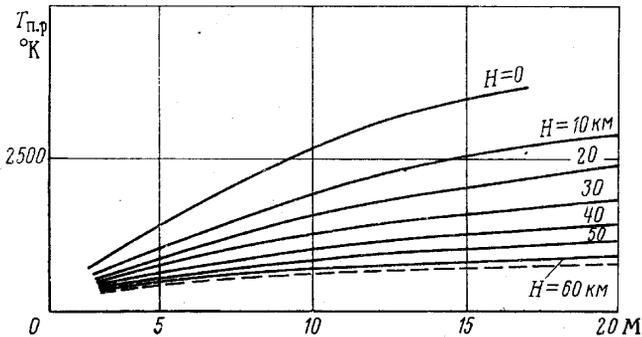


Рис. 17.4. Зависимость равновесной температуры  $T_{п.р}$  в критической точке на сферической части тела вращения от числа  $M$

График рис. 17.4 построен для радиуса закругления носовой части тела вращения  $r=1$  м при ламинарном пограничном слое.

Задавшись допустимой температурой поверхности летательного аппарата на достаточном расстоянии от критической точки и вблизи критической точки, при помощи рис. 16.4 и 17.4 можно определить допустимую скорость в зависимости от высоты полета. Очевидно, скорости, получающиеся при расчете траектории, не должны превышать принятые таким образом предельные величины.

В заключение напомним, что график рис. 16.4 позволяет найти равновесную температуру пластинки  $T_{п.р}$  при нулевом градиенте давления, т. е. при нулевом угле атаки пластинки.

Если угол пластинки отличается от нуля, то, как показывает теория, равновесная температура  $T_{п.р}$  на нижней поверхности при прочих равных условиях получается большей, чем это следует из рис. 16.4. При достаточно больших углах атаки это увеличение может быть значительным; отсюда следует, что на небольших высотах полета, где равновесная температура  $T_{п.р}$  плоской пластинки при больших числах  $M$  и при  $\alpha=0$  получается значительной, сочетание больших углов атаки с большими  $M$  для аппаратов с крыльями нежелательно.

#### § 4. Характеристики двигателей, применяемых на летательных аппаратах

С точки зрения механики в основу всех применяемых на летательных аппаратах двигателей, создающих необходимую для полета силу тяги, положен единый принцип. Этот принцип заключается в создании силы тяги путем отбрасывания рабочего тела в направлении, противоположном полету.

По составу рабочего тела двигателя можно разделить на *реактивные (ракетные), воздушно-реактивные и винтовые*.

Рабочим телом *ракетных* двигателей являются продукты сгорания топлива (горючего и окислителя)<sup>1</sup>, полностью находящегося на борту летательного аппарата.

У *воздушно-реактивных* двигателей рабочее тело состоит из воздуха и продуктов сгорания топлива. Таким образом, в случае воздушно-реактивных двигателей часть рабочего тела (топливо) находится на борту летательного аппарата, а часть отбирается из воздушной среды.

Наконец, у *винтовых* двигателей сила тяги получается вследствие отбрасывания воздуха воздушным винтом, приводимым во вращение двигателем. Рабочее тело в этом случае (если пренебречь сравнительно небольшой реактивной силой выхлопных газов) целиком берется из внешней среды.

Воздушно-реактивные двигатели в свою очередь можно разделить на турбореактивные (ТРД) и прямоточные воздушные (ПВРД).

У ТРД сжатие воздуха, необходимое для эффективного сгорания топлива, осуществляется главным образом при помощи компрессора, приводимого во вращение газовой турбиной. Кроме того, воздух, поступающий на вход в ТРД, испытывает дополнительное газодинамическое сжатие вследствие торможения во входном канале двигателя.

В ПВРД сжатие воздуха осуществляется только благодаря его торможению во входном канале двигателя.

В ряде случаев (на самолетах) находят применение двухконтурные ТРД. В этих двигателях сила тяги получается отчасти, так же как и в обычных ТРД, благодаря воспламенению горючей смеси, предварительно сжатой компрессором, а отчасти — как в случае ПВРД — от воспламенения топливной смеси во втором контуре при чисто газодинамическом сжатии.

Так как рабочее тело воздушно-реактивных двигателей в значительной части состоит из воздуха, поступающего из внешней среды, то эти двигатели применимы на сравнительно небольших высотах полета, где плотность воздуха еще достаточно велика.

Критерием для оценки применимости ВРД на летательном аппарате является не просто плотность окружающего воздуха, а плотность адиабатически заторможенного воздуха, так как скорость движения воздуха внутри двигателя невелика и по сравнению со скоростью полета может быть принята равной нулю, а процесс сжатия можно считать адиабатическим. Поэтому недостаток плотности воздуха на больших высотах, казалось бы, можно компенсировать соответствующим увеличением скорости полета летательного аппарата, так как с ростом  $V$  плотность адиабатически заторможенного воздуха растет. С ростом скорости полета (точнее с ростом числа  $M$ ), однако, быстро увеличивается температура заторможенного воздуха. Так как допустимая по условиям прочности лопаток газовой турбины (ТРД) или стенок камеры сгорания (ПВРД) температура ограничена, то при больших числах  $M$  приходится уменьшать количество топлива, подаваемого в камеру сгорания. В результате сила тяги убывает, несмотря на достаточный скоростной напор. Таким образом, воздушно-реактивные двигатели не удается применить на больших высотах полета.

В ракетных двигателях, как уже было сказано, используют рабочее тело, находящееся на борту летательного аппарата; поэтому сила тяги ракетного двигателя не падает с увеличением высоты полета. Наоборот, вследствие падения внешнего давления в выходном сопле ракетного двигателя при увеличении высоты полета сила тяги его даже несколько увеличивается.

<sup>1</sup> К этой группе относятся и плазменные двигатели.

Винтовые двигатели по тем же причинам, что и ВРД, не могут быть использованы на больших высотах полета. Кроме того, при больших скоростях полета коэффициент полезного действия воздушного винта падает, из-за чего такие двигатели применяются на сравнительно небольших скоростях полета, даже при небольших высотах.

Характеристики *жидкостных ракетных двигателей* (ЖРД) задаются обычно в виде кривой зависимости силы тяги от высоты. Экономичность этих двигателей оценивают величиной удельной тяги  $P_{уд}$ , представляющей собой силу тяги, получающуюся при сжигании единицы веса топлива в течение одной секунды. Величина<sup>1</sup> удельной тяги  $P_{уд}$  связана со скоростью истечения газа  $V_a$  из сопла двигателя, с секундным расходом  $q_c$  горючего и окислителя, с давлением  $p_a$  на срезе выходного сопла и давлением  $p_H$  окружающего воздуха формулой

$$P_{уд} = \frac{V_a}{g} + \frac{S_a}{q_c} (p_a - p_H), \quad (39.4)$$

где  $S_a$  — площадь сечения выходного сопла, а  $g = g_0 = 9,81$  м/сек<sup>2</sup>.

От тяговой характеристики ЖРД легко перейти к характеристике располагаемой мощности по формуле  $N = PV$ . Так как сила тяги ЖРД не зависит от скорости полета, то располагаемая мощность ЖРД прямо пропорциональна скорости полета.

Характеристики *ракетных двигателей, работающих на твердом топливе* (РДТТ), в том числе и на пороховом топливе (ПРД), так же как характеристики ЖРД, задаются в виде зависимости силы тяги и удельной тяги от высоты полета.

В начале работы ракетного двигателя сила тяги постепенно возрастает от нуля до некоторой величины, в конце работы она падает от номинальной величины до нуля в течение некоторого времени. Если время полной работы ракетного двигателя достаточно мало, то может оказаться, что начальный и конечный участки займут почти все время работы двигателя, так что сила тяги двигателя при этом будет явно выраженной функцией времени. В большей степени это замечание относится к пороховым двигателям, время работы которых бывает небольшим.

Ниже рассмотрены главным образом вопросы, связанные с расчетом траекторий летательных аппаратов с ВРД, ЖРД и винтовыми двигателями.

Силу тяги ЖРД в пустоте (в сильно разреженных слоях атмосферы) с достаточной степенью точности можно считать постоянной независимо от скорости полета; это же относится и к удельной тяге.

Часто размеры выходного сопла ЖРД выбираются конструкторами ракетных летательных аппаратов. Остановимся поэтому несколько подробнее на зависимости силы тяги ЖРД от размеров выходного сопла.

Из общего выражения силы тяги ракетного двигателя

$$P = \frac{q_c}{g} V_a + (p_a - p_H) S_a \quad (40.4)$$

видно, что сила тяги зависит от давления окружающего воздуха  $p_H$  и, следовательно, от высоты полета  $H$ .

Скорость истечения газов из выходного сопла  $V_a$  определяется по формуле газовой динамики

$$V_a = \sqrt{gRT_T \frac{2x}{x-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_a}{p_T} \right)^{\frac{x-1}{x}} \right]}, \quad (41.4)$$

где  $R$  — газовая постоянная продуктов сгорания, выбрасываемых из сопла двигателя;

$x$  — показатель изэнтропы;

$p_a$  — давление газа на срезе выходного сопла двигателя;

$T_T, p_T$  — температура и давление газа в камере сгорания.

<sup>1</sup> Иногда вместо термина «удельная тяга» применяют термин «удельный импульс».

Площадь сечения выходного сопла  $S_a$  связана с отношением давлений  $p_a/p_T$  формулой

$$\frac{S_a}{S_{кр}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1} \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p_a}{p_T}\right)^{\frac{2}{x}} - \left(\frac{p_a}{p_T}\right)^{\frac{x+1}{x}}}}, \quad (42.4)$$

где  $S_{кр}$  — площадь критического сечения.

Массовый расход газа в секунду

$$\frac{q_c}{g} = \rho_a V_a S_a = \sqrt{\frac{2x}{x-1} \frac{1}{gRT_T}} p_T \left(\frac{p_a}{p_T}\right)^{\frac{1}{x}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_a}{p_T}\right)^{\frac{x-1}{x}}} S_a, \quad (43.4)$$

Таким образом, для силы тяги  $P$  получаем выражение

$$P = \frac{p_T S_{кр}}{\sqrt{x^2 - 1}} \left(\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}} \left\{ 2x \sqrt{1 - \left(\frac{p_a}{p_T}\right)^{\frac{x-1}{x}}} + \right. \\ \left. + (x-1) \left(\frac{p_a}{p_T} - \frac{p_H}{p_T}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{p_a}{p_T}\right)^{\frac{2}{x}} - \left(\frac{p_a}{p_T}\right)^{\frac{x+1}{x}}}} \right\}. \quad (44.4)$$

Из (42.4) и (44.4) видно, что, изменяя площадь выходного сопла  $S_a$  при прочих неизменных условиях, будем получать различные давления  $p_a$  и различную силу тяги  $P$ . Если давление  $p_a > p_H$ , то тяга будет больше, а если  $p_a < p_H$ , то меньше, чем в случае  $p_a = p_H$ . Максимальная тяга  $P_{max}$  получится при максимальной разности  $(p_a - p_H)$ , как это видно из формулы (44.4). Поэтому площадь выходного сопла выбирают из условия получения максимальной тяги на расчетной высоте полета  $H_p$ , которая определяется назначением летательного аппарата. Например, для баллистической ракеты расчетную высоту можно выбирать достаточно большой, так как для этого летательного аппарата выгодно получать большую тягу на больших высотах полета.

Пусть, например,  $\frac{p_T}{p_0} = 80$ ,  $x = 1,2$ . Тогда по формуле (44.4) для  $p_a = p_0 = 101\,347 \text{ н/м}^2 = 10\,332 \text{ кг/м}^2$  на высоте  $H = 0$  получим

$$\frac{P}{p_0 S_{кр}} = 130$$

и на высоте  $H = 50 \text{ км}$

$$\frac{P}{p_0 S_{кр}} = 140,3.$$

Если бы мы выбрали  $p_a = 0,5 p_0$ , то на высоте  $H = 0$  получили бы

$$\frac{P}{p_0 S_{кр}} = 128,5,$$

т. е. потеряли бы в силе тяги по сравнению с первым случаем около 1,2%, а на высоте  $H = 50 \text{ км}$

$$\frac{P}{p_0 S_{кр}} = 145,5,$$

т. е. выиграли бы по сравнению с первым случаем в величине тяги около 4%.

Так как удельная тяга  $P_{уд} = \frac{P}{q_c}$ , то при неизменном секундном расходе топлива  $q_c^1$  и при изменении высоты полета  $H$  удельная тяга изменяется пропорционально

<sup>1</sup> Обычно секундный расход топлива  $q_c$  подсчитывается для  $H = 0$ , т. е. для  $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ .

тяге  $P$ . Следовательно, на небольших высотах полета, где давление наружного воздуха  $p_H$  достаточно велико, удельная тяга растет с увеличением высоты полета. На больших высотах, где  $p_H$  мало отличается от нуля, удельная тяга практически остается неизменной. В среднем при изменении высоты от  $H=0$  до  $H>60$  км удельная тяга  $P_{уд}$  увеличивается приблизительно на 10—15%.

Типовая характеристика ТРД представляет собой зависимость силы тяги от высоты и от скорости полета или от числа  $M$ . Экономичность ТРД оценивают удельным расходом топлива  $C_e$ , представляющим собой расход топлива на единицу тяги. Таким образом, удельный расход топлива и удельная тяга обратно пропорциональны друг другу.

Удельный расход топлива  $C_e$  турбореактивного двигателя, так же как и сила тяги, является функцией скорости и высоты полета и режима работы двигателя. При неизменных скорости и высоте полета и при изменении режима работы двигателя (при дросселировании)  $C_e$  изменяется. Минимум  $C_e$  обычно получается при режимах, дающих тягу, меньшую номинальной.

Характеристики ТРД можно получить при испытании двигателей или найти расчетным путем.

На рис. 18.4 в качестве примера приведена типичная характеристика одноконтурного двигателя АТАР-9 с форсажной камерой (с конструктивными ограничениями).

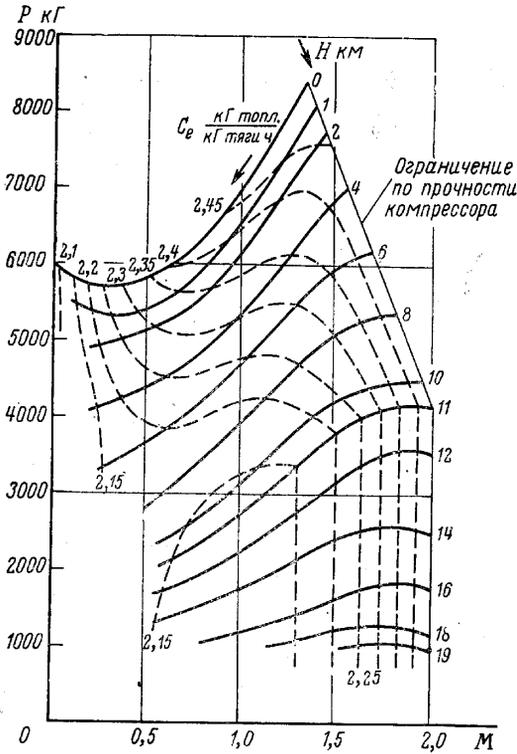


Рис. 18.4. Типичная характеристика одноконтурного ТРД

При малых скоростях полета сила тяги ТРД с увеличением скорости убывает. Это объясняется тем, что при малых скоростях полета скорость истечения газа из сопла ТРД изменяется сравнительно несильно, так что разность  $(V_a - V)$ , входящая в выражение силы тяги

$$P = m_c (V_a - V) + (p_a - p_H) S_a, \quad (45.4)$$

где  $m_c$  — секундная масса продуктов сгорания, выбрасываемая из сопла двигателя, уменьшается.

При дальнейшем увеличении скорости полета скорость истечения  $V_a$  растет быстрее, чем  $V$ , что приводит к увеличению силы тяги.

Наконец, при достаточно больших скоростях полета температура воздуха за компрессором повышается настолько, что количество топлива, подаваемого в камеру сгорания, приходится уменьшать — это приводит к уменьшению силы тяги.

С ростом высоты полета сила тяги убывает, причем в стратосфере (при неизменной температуре  $T$  окружающего воздуха) сила тяги оказывается прямо пропорциональной плотности воздуха  $\rho_H$  или давлению  $p_H = gRT_H$ .

Для кратковременного увеличения тяги при взлете или в условиях полета пользуются форсажем двигателя. Одним из наиболее распространенных способов форсирования ТРД является дополнительное сжигание топлива за турбиной.

В ТРД с форсажной камерой (ТРДФ) последняя устанавливается между турбиной и выходным соплом двигателя. За счет сгорания дополнительного топлива в топливных форсунках форсажной камеры температура газа перед выходным соплом повышается, что приводит к увеличению скорости истечения газов из сопла и возрастанию тяги двигателя. На рис. 19.4 схематически показано протекание при  $H = \text{const}$  кривой

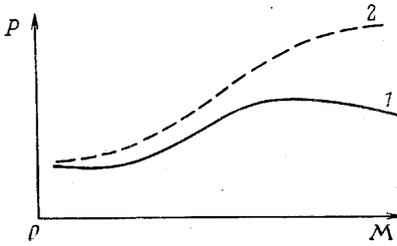


Рис. 19.4. Примерная характеристика ТРД с дожиганием топлива: 1 — без дожигания; 2 — с дожиганием (с форсажем)

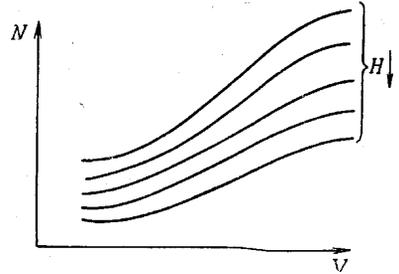


Рис. 20.4. Располагаемая мощность ТРД

силы тяги в зависимости от числа  $M$  для двигателя с дожиганием топлива. Заметим, что удельный расход топлива двигателя, работающего на форсированном режиме, тем больше, чем меньше высота и скорость полета. Поэтому форсированный режим выгодно применять на больших высотах и скоростях полета.

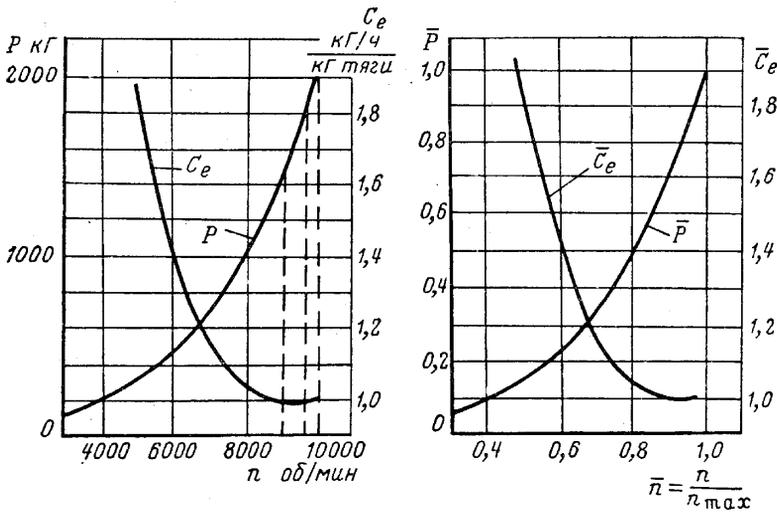


Рис. 21.4. Характеристики ТРД по числу оборотов в абсолютных и относительных координатах (при  $M_0=0$  и  $H_0=0$ )

Имея тяговые характеристики, нетрудно получить и характеристики располагаемой мощности ТРД; для этой цели следует воспользоваться очевидной формулой

$$N = P_p V.$$

Примерный вид характеристик располагаемой мощности ТРД показан на рис. 20.4. Как видим, располагаемая мощность ТРД быстро увеличивается с увеличением скорости полета.

Зависимости тяги и удельного расхода ТРД от числа оборотов турбины, соответствующие заданным режимам полета, называются *дрессельными характеристиками ТРД*. В качестве иллюстрации на рис. 21.4 приведены характеристики ТРД по числу оборотов. Эти характеристики даны как в абсолютных, так и в относительных координатах. В последнем случае число оборотов  $n$ , тяга  $P$  и удельный расход топлива  $C_e$  отнесены к соответствующим значениям этих величин на максимальном режиме работы двигателя, т. е.

$$\bar{n} = \frac{n}{n_{\max}}; \quad \bar{P} = \frac{P}{(P)_{n_{\max}}}; \quad \bar{C}_e = \frac{C_e}{(C_e)_{n_{\max}}}.$$

Характеристики прямооточных воздушно-реактивных двигателей, так же как и характеристики ТРД, можно задать в виде кривых зависимости тяги и удельного расхода топлива от скорости и высоты полета. Примерный вид характеристик  $P_p = P(V, H)$  показан на рис. 22.4.

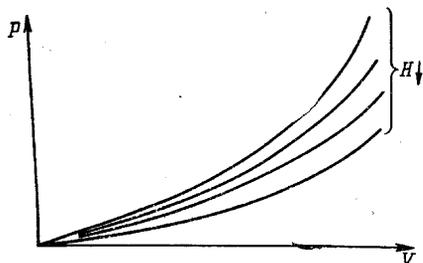


Рис. 22.4. Характеристики ПВРД

Так как ПВРД является бескомпрессорным двигателем, то при небольших скоростях полета, когда газодинамическое сжатие невелико, сила тяги ПВРД получается также небольшой. В частности, на режиме нулевой скорости сила тяги ПВРД равна нулю. Поэтому на летательных аппаратах ПВРД обычно применяют в качестве маршевого двигателя, используемого на режимах сравнительно длительного полета с

достаточно большой скоростью. Для старта таких летательных аппаратов применяют стартовые двигатели другого типа (например ЖРД).

Силу тяги ПВРД по аналогии с аэродинамическими силами можно определить, воспользовавшись формулой

$$P_p = c_p q S_{\text{дв}},$$

где  $c_p$  — безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом тяги;

$S_{\text{дв}}$  — площадь поперечного сечения камеры сгорания;

$q$  — скоростной напор воздуха.

На рис. 23.4 и 24.4 в качестве примера приведены скоростная и высотная характеристики ПВРД.



Рис. 23.4. Скоростная характеристика ПВРД

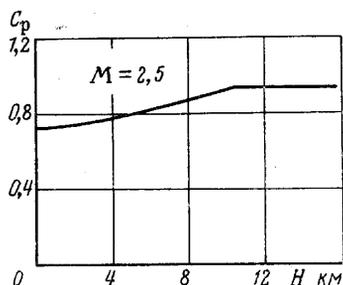


Рис. 24.4. Высотная характеристика ПВРД

**Характеристики воздушного винта.** В отличие от ракетных и воздушно-реактивных двигателей, у которых *двигатель* (источник энергии) и *движитель* (агрегат, создающий силу тяги) представляют одно целое, двигательные установки винтовых и турбовинтовых летательных аппаратов состоят из двигателя и движителя — воздушного винта.

Мы ограничимся здесь самыми общими сведениями о характеристиках воздушного винта (см. подробнее [1]).

Источником энергии, необходимой для вращения винта, является двигатель; энергию, затраченную на вращение, винт преобразует в полезную энергию ( $PV$ ) с некоторыми потерями, так что полезная мощность воздушного винта равна мощности двигателя, умноженной на коэффициент полезного действия винта  $\eta$ . Ясно, что к. п. д. винта  $\eta$  всегда меньше единицы.

Основной рабочей частью винта являются лопасти, на большей части своей длины имеющие сечения, близкие к профилям крыльев. Представим себе некоторое сечение (элемент) лопасти воздушного винта,

расположенное на расстоянии  $r$  от оси вращения винта (рис. 25.4). Этот элемент лопасти совершает сложное движение, перемещаясь вместе с летательным аппаратом со скоростью  $V$  приблизительно вдоль оси винта и вращаясь вокруг оси винта с окружной скоростью  $u = 2\pi r n$ . Кроме того, система свободных спиральных вихрей за диском винта индуцирует в плоскости вращения винта некоторую скорость  $v_i$ . На выделенный элемент лопасти винта действует аэродинамическая сила  $dR$  с составляющими: подъемной силой  $dY$ , перпендикулярной к относительной скорости потока, и лобовым сопротивлением  $dQ$ , направленным по скорости набегающего на элемент потока.

Проектируя эти силы на направленные оси винта и на плоскость вращения, получим элементарную силу тяги  $dP$  и элементарную силу сопротивления вращению  $dX$ :

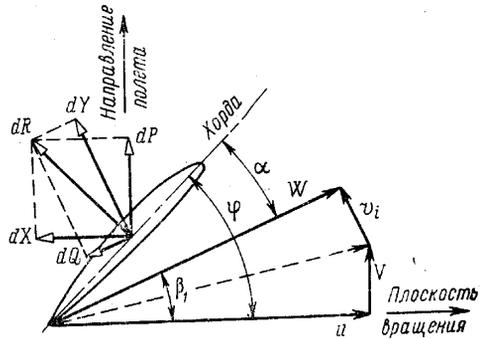


Рис. 25.4. Условия работы элемента лопасти воздушного винта

$$dP = dY \cos \beta_1 - dQ \sin \beta_1 = ib dr \frac{\rho W^2}{2} (c_y \cos \beta_1 - c_x \sin \beta_1); \quad (46.4)$$

$$dX = dQ \cos \beta_1 + dY \sin \beta_1 = ib dr \frac{\rho W^2}{2} (c_x \cos \beta_1 + c_y \sin \beta_1), \quad (47.4)$$

где  $b$  — хорда лопасти на радиусе  $r$ ;

$i$  — число лопастей.

При вычислении полной относительной скорости потока в первом приближении можно не принимать во внимание малую индуктивную скорость  $v_i$ ; тогда

$$W \approx \frac{u}{\cos \beta_1} = \frac{2\pi r n}{\cos \beta_1},$$

а выражения (46.4) и (47.4) принимают вид

$$dP = i2\pi^2 \rho n^2 b r^2 dr \frac{c_y}{\cos \beta_1} \left( 1 - \frac{c_x}{c_y} \operatorname{tg} \beta_1 \right); \quad (46a.4)$$

$$dX = i2\pi^2 \rho n^2 b r^2 dr \frac{c_y}{\cos \beta_1} \left( \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{c_x}{c_y} \right). \quad (47a.4)$$

Мощность, потребную для вращения элемента лопасти, найдем, умножив силу сопротивления вращению  $dX$  на окружную скорость элемента  $u$ :

$$dN = i4\pi^3 \rho n^3 b r^3 dr \frac{c_y}{\cos \beta_1} \left( \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{c_x}{c_y} \right). \quad (48.4)$$

Полезная мощность винта, которая может быть использована для преодоления лобового сопротивления самолета, для его разгона или подъема,

$$N_{\text{пол}} = PV,$$

где  $V$  — скорость полета.

Элементарная полезная мощность

$$dN_{\text{пол}} = dPV = i2\pi^2 \rho n^2 b r^2 dr \frac{c_y}{\cos \beta_1} \left( 1 - \frac{c_x}{c_y} \operatorname{tg} \beta_1 \right) V. \quad (49.4)$$

Разделив (49.4) на (48.4), получим элементарный коэффициент полезного действия

$$\eta_r = \frac{V}{2\pi nr} \frac{1 - \frac{c_x}{c_y} \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_1 + \frac{c_x}{c_y}}. \quad (50.4)$$

Для оценки характеристик винтов пользуются понятием *относительной поступи* или *режима работы винта*  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{V}{nD},$$

где  $D$  — диаметр винта.

Преобразуя выражения (46а.4) и (48.4), получим

$$dP = i \frac{\pi^2}{4} \rho n^2 D^4 \bar{b} \bar{r}^2 d\bar{r} \frac{c_y}{\cos \beta_1} \left( 1 - \frac{c_x}{c_y} \operatorname{tg} \beta_1 \right), \quad (46б.4)$$

$$dN = i \frac{\pi^3}{4} \rho n^3 D^5 \bar{b} \bar{r}^3 d\bar{r} \frac{c_y}{\cos \beta_1} \left( \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{c_x}{c_y} \right), \quad (48а.4)$$

где

$$\bar{b} = \frac{b}{D}, \quad \bar{r} = \frac{2r}{D}.$$

Интегрируя выражения (46б.4) и (48а.4) по длине лопастей винта в предположении, что взаимное влияние лопастей не имеет места, можно получить выражения для силы тяги всего винта и для мощности, потребной для вращения всего винта. Нетрудно видеть, что сила тяги получится пропорциональной квадрату числа оборотов и 4-й степени линейного размера (например диаметра) винта, а мощность — соответственно кубу числа оборотов и 5-й степени диаметра винта.

Таким образом, сила тяги  $P$  и мощность  $N$ , затрачиваемая на вращение винта, равны:

$$P = \alpha \rho n^2 D^4, \quad (51.4)$$

$$N = \beta \rho n^3 D^5, \quad (52.4)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты тяги и мощности винта.

Тогда к. п. д. всего винта можно представить в виде

$$\eta = \frac{PV}{N} = \frac{\alpha}{\beta} \lambda. \quad (53.4)$$

Элементарный к. п. д.  $\eta_r$  (к. п. д. элемента лопасти винта) зависит от соотношения между лобовым сопротивлением и подъемной силой элемента лопасти или от аэродинамического качества  $K = \frac{c_y}{c_x}$ . Чем больше качество, тем выше к. п. д.; однако даже если трение и волновое сопротивление отсутствуют ( $c_{x0} = 0$  — идеальный винт), к. п. д. не получается равным единице, так как, помимо потерь на трение и на волновое сопротивление, имеются индуктивные потери, связанные с образованием подъемной силы элементов лопастей и силы тяги.

На практике характеристики винтов обычно представляют в виде семейства кривых  $\beta = \beta(\lambda)$  для различных углов установки лопасти  $\varphi$

(обычно под углом установки понимают величину угла  $\phi$  на радиусе, равном 0,75 радиуса винта). На этот же график наносят кривые значений равных к. п. д. Примерный вид такого графика показан на рис. 26.4.

Если бы угол установки винта оставался неизменным на всех режимах полета самолета, то мощность, необходимая для вращения винта, на разных режимах полета получалась бы различной. На некоторых режимах необходимая для вращения винта мощность при неизменном числе оборотов получилась бы большей, чем способен развить двигатель: в результате число оборотов винта уменьшилось бы, так как потребная мощность, как мы видели, при прочих равных условиях пропорциональна кубу числа оборотов. Вместе с уменьшением числа оборотов уменьшилась бы и полезная мощность винта. Во избежание этого обычно применяют винты изменяемого в полете шага, т. е. винты с изменяющимся в полете углом  $\phi$  установки лопасти. Угол установки изменяют автоматически из условия сохранения числа оборотов винта неизменным. Такие винты изменяемого в полете шага (ВИШ) выгоднее винтов с неизменным углом установки.

В качестве источника энергии для вращения винта применяют турбовинтовые (ТВД) или поршневые (ПД) двигатели.

Характеристики двигателей задают в виде кривых зависимости мощности на валу двигателя от числа оборотов, высоты и скорости полета. Экономичность двигателя оценивают удельным расходом топлива  $C_e$ , представляющим собой расход топлива на 735,75 вт в час (или 1 л. с. в час).

В случае турбовинтового двигателя сила тяги, помимо винта, частично создается также за счет прямой реакции продуктов сгорания; эта часть силы тяги  $P$  невелика по сравнению с тягой винта. Характеристики ТВД иногда задают в виде условной мощности на валу винта  $N_y$ , равной сумме мощности  $N$  на валу двигателя и мощности  $P_r V$ , приведенной к мощности на валу:

$$N_y = N + \frac{P_r V}{\eta_y}$$

При этом принимают некоторое условное значение к. п. д. винта, например,  $\eta_y = 0,8$ . В этом случае при расчете не следует отдельно учитывать реактивную силу тяги.

Рассмотрим схематически вопрос о выборе винта<sup>1</sup> для летательного аппарата.

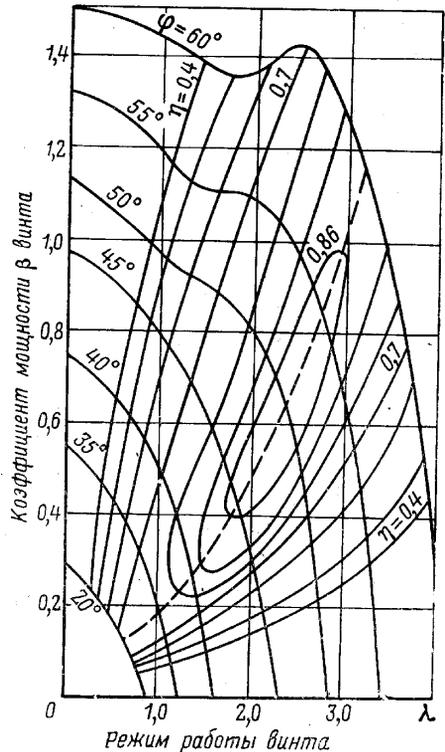


Рис. 26.4. График характеристик винта

<sup>1</sup> При проектировании нового самолета с винтовыми двигателями часто не проектируют новые винты, а подбирают их из существующих, основываясь на характеристиках серий винтов различной геометрической формы.

Винт выбирают для расчетного режима полета, различного для каждого типа летательного аппарата. Например, для пассажирского или транспортного самолета в качестве расчетного выбирают режим полета на крейсерской скорости и на крейсерской высоте при определенной мощности двигателя, составляющей некоторую часть номинальной его мощности.

Для выбора винта должны быть заданы: расчетная высота и скорость полета  $H_p$  и  $V_p$ , мощность  $N$  и число оборотов винта  $n$ . Из выражения поступи винта имеем

$$D = \frac{V}{n\lambda}.$$

Внеся это выражение в (52.4), получим

$$\beta = \frac{Nn^2}{\rho V^5} \lambda^5 = \text{const } \lambda^5. \quad (54.4)$$

На графике характеристик винта по (54.4) строим кривую (рис. 27.4). В каждой точке этой кривой соблюдается условие равенства мощности на валу двигателя и мощности, потребляемой винтом при заданных  $H_p$ ,  $V_p$  и  $n$ . В точках пересечения кривой (54.4) с кривыми  $\eta = \text{const}$  на рис. 27.4 получаем различные значения к. п. д. винта. Наивыгоднейшей будет точка  $m$ , в которой к. п. д. винта получается наибольшим. Если диаметр винта  $D = \frac{V}{n\lambda}$  для точки  $m$  получается больше допустимого по соображениям компоновки самолета или прочности винта, то приходится отступать от наибольшего возможного значения к. п. д. в точке  $m$  и останавливаться на значении к. п. д. винта  $\eta$  при наибольшем допустимом диаметре  $D_{\text{max}}$ .

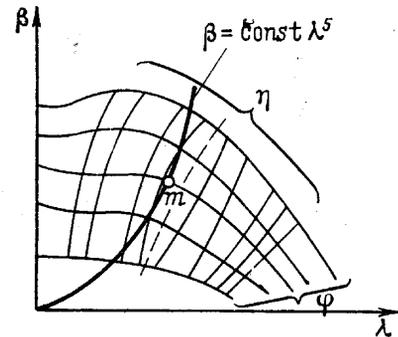


Рис. 27.4. К выбору воздушного винта

Для построения кривой *располагаемой мощности самолета с винтовыми двигателями* поступают следующим образом.

Зная характеристики двигателя и диаметр винта для каждой высоты полета и для ряда скоростей полета, находят значения

$$\lambda = \frac{V}{nD}, \quad \beta = \frac{N}{\rho n^3 D^5}.$$

По этим значениям на графике характеристик винта находят соответствующие значения к. п. д. винта и определяют располагаемую мощность

$$N_p = iN\eta,$$

где  $i$  — число двигателей, установленных на самолете.

Вопросы выбора винта и расчета располагаемой мощности здесь изложены в общих чертах; в действительности при таких расчетах учитывают эффект взаимного влияния винта и самолета, а также влияние сжимаемости воздуха на характеристики винта<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Более подробные сведения о располагаемой мощности см. [43].

В заключение этой главы отметим, что в ней кратко описаны характеристики только основных типов двигателей, широко используемых на летательных аппаратах.

Помимо этих основных типов двигателей, существует ряд их модификаций, а также ведется работа по созданию принципиально новых типов двигателей, работающих на ядерном топливе, плазменных, электрических и т. п.

Сведения по этим вопросам читатель может найти в советской и зарубежной периодической литературе.

---

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

# ДИНАМИКА ПОЛЕТА В АТМОСФЕРЕ

---

Всякий летательный аппарат, стартующий с Земли или осуществляющий посадку на Землю, некоторое время совершает полет в сравнительно плотных слоях атмосферы. Поэтому исследование полета в атмосфере представляет интерес для всех летательных аппаратов, в том числе и для космических кораблей.

Особое место среди задач исследования полета в атмосфере занимают исследования движения тех летательных аппаратов, полет которых на всем протяжении происходит в атмосфере. В дальнейшем мы рассмотрим уравнения движения летательного аппарата в пределах атмосферы и остановимся на частных случаях, в которых возможны более или менее существенные упрощения этих уравнений.

Заметим далее, что при рассмотрении уравнений движения в какой-либо системе координат желательно, чтобы в эти уравнения входили кинематические величины (скорости, угловые скорости) в проекциях только на оси данной системы координат. Кроме того, в эти уравнения должны входить углы ориентации рассматриваемой системы координат по отношению к земной системе отсчета.

### ГЛАВА V

## УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ПРЕДЕЛАХ АТМОСФЕРЫ

### § 1. Уравнения движения летательного аппарата в проекциях на оси земной и скоростной систем координат

В большинстве задач динамики полета приходится рассматривать движение летательного аппарата в плотных слоях атмосферы по отношению к поверхности Земли. Так как Земля представляет собой тело, по форме близкое к сферическому, с одной стороны, и так как вследствие суточного вращения Земли и ее годового обращения вокруг Солнца точки поверхности Земли совершают сложное движение, с другой стороны, то *система отсчета, связанная с поверхностью Земли, есть, как уже отмечалось, неинерциальная система отсчета.*

Уравнения движения тела переменного состава в неинерциальной системе отсчета получены в гл. III. Такие уравнения, записанные в проекциях на оси *земной системы координат* (59.3)—(61.3), имеют вид

$$m\dot{V}_{xg} = X_g - m \frac{V_{xg}}{r_3 + H} (V_{yg} + V_{zg} \operatorname{tg} \sigma) - 2m\omega_3 (V_{yg} \cos \sigma + V_{zg} \sin \sigma), \quad (1.5)$$

$$m\dot{V}_{yg} = Y_g + m \frac{V_{xg}^2 + V_{zg}^2}{r_3 + H} + m(r_3 + H)\omega_3^2 \cos^2 \sigma + 2m\omega_3 V_{xg} \cos \sigma, \quad (2.5)$$

$$m\dot{V}_{zg} = Z_g - m \frac{V_{yg}V_{zg}}{r_3 + H} + m \frac{V_{xg}^2}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma + 2m\omega_3 V_{xg} \sin \sigma + \\ + m(r_3 + H)\omega_3^2 \sin \sigma \cos \sigma. \quad (3.5)$$

Через  $X_g$ ,  $Y_g$ ,  $Z_g$  здесь обозначены проекции равнодействующей всех внешних сил и реактивной силы тяги на оси земной системы координат. Составим выражения для  $X_g$ ,  $Y_g$ ,  $Z_g$ , учтя все силы, которые действуют на летательный аппарат в процессе его движения.

В общем случае на летательный аппарат в полете действуют следующие силы (рис. 1.5).

Аэродинамическая сила<sup>1</sup>  $R$  с составляющими: подъемной силой  $Y$ , действующей в вертикальной плоскости симметрии летательного аппарата перпендикулярно проекции скорости набегающего потока на вертикальную плоскость симметрии, лобовым сопротивлением  $Q$ , направленным по проекции скорости набегающего потока в вертикальной плоскости симметрии, и боковой аэродинамической силой  $Z$ , перпендикулярной плоскости  $x_1Oy_1$  симметрии летательного аппарата.

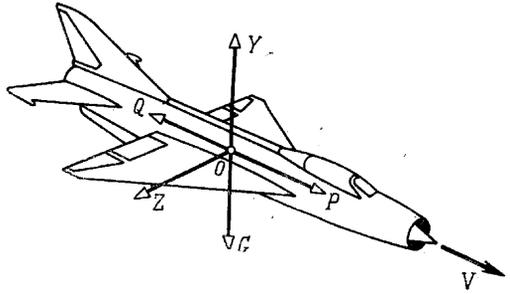


Рис. 1.5. Силы, действующие на летательный аппарат в полете

Сила тяги двигателя  $P$ , действующая по оси двигателя, в общем случае направлена под углом  $\varphi$  к связанной оси  $Ox_1$  (например к хорде крыла).

Сила тяжести  $G = mg$ , действующая по отрицательному направлению оси  $Oy_g$  земной системы координат.

Выражения проекций всех действующих на летательный аппарат сил на оси координат земной системы можно получить, воспользовавшись таблицей направляющих косинусов, приведенной в гл. II.

Силы тяги  $P$  дает следующие три проекции:

$$P_{xg} = P \cos \vartheta \cos \psi,$$

$$P_{yg} = P \sin \vartheta,$$

$$P_{zg} = -P \sin \psi \cos \vartheta.$$

Аэродинамическая сила лобового сопротивления  $Q$  — проекции:

$$Q_{xg} = -Q [\sin \alpha (\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma) + \cos \alpha \cos \vartheta \cos \psi],$$

$$Q_{yg} = Q (\sin \alpha \cos \vartheta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \vartheta),$$

$$Q_{zg} = Q [\sin \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) + \cos \alpha \cos \vartheta \sin \psi].$$

Аэродинамическая подъемная сила  $Y$ :

$$Y_{xg} = Y [\sin \alpha \cos \vartheta \cos \psi - \cos \alpha (\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma)],$$

$$Y_{yg} = Y (\sin \alpha \sin \vartheta + \cos \alpha \cos \vartheta \cos \gamma),$$

$$Y_{zg} = Y [-\sin \alpha \cos \vartheta \sin \psi + \cos \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)].$$

<sup>1</sup> Напомним, что аэродинамическая сила задается в проекциях на оси полусвязанной системы координат (см. гл. II).

Аэродинамическая боковая сила  $Z$ :

$$\begin{aligned} Z_{xg} &= Z (\cos \psi \sin \gamma \sin \vartheta + \sin \psi \cos \gamma), \\ Z_{yg} &= -Z \cos \vartheta \sin \gamma, \\ Z_{zg} &= Z (\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma). \end{aligned}$$

Сила тяжести  $G$ , как только что отмечалось, дает проекцию лишь на ось  $Oy_g$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} G_{xg} &= 0, \\ G_{yg} &= -mg, \\ G_{zg} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, проекции равнодействующей всех внешних сил и реактивной силы тяги будут равны:

$$\begin{aligned} X_g &= P \cos \vartheta \cos \psi - Q [\sin \alpha (\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma) + \cos \alpha \cos \vartheta \cos \psi] + \\ &+ Y [\sin \alpha \cos \vartheta \cos \psi - \cos \alpha (\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma)] + \\ &+ Z (\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} Y_g &= P \sin \vartheta + Q (\sin \alpha \cos \vartheta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \vartheta) + \\ &+ Y (\sin \alpha \sin \vartheta + \cos \alpha \cos \vartheta \cos \gamma) - Z \cos \vartheta \sin \gamma - mg, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} Z_g &= -P \sin \psi \cos \vartheta + Q [\sin \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) + \\ &+ \cos \alpha \cos \vartheta \sin \psi] + Y [-\sin \alpha \cos \vartheta \sin \psi + \cos \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \\ &+ \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)] + Z (\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Уравнения движения (1.5) — (3.5) летательного аппарата в проекциях на оси земной системы координат с учетом (4.5) — (6.5) примут вид

$$\begin{aligned} m\dot{V}_{xg} &= P \cos \vartheta \cos \psi - Q [\sin \alpha (\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma) + \\ &+ \cos \alpha \cos \vartheta \cos \psi] + Y [\sin \alpha \cos \vartheta \cos \psi - \cos \alpha (\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma - \\ &- \sin \psi \sin \gamma)] + Z (\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma) - \\ &- m \frac{V_{xg}}{r_3 + H} (V_{yg} + V_{zg} \operatorname{tg} \sigma) - 2m\omega_3 (V_{yg} \cos \sigma + V_{zg} \sin \sigma), \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} m\dot{V}_{yg} &= P \sin \vartheta + Q (\sin \alpha \cos \vartheta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \vartheta) + \\ &+ Y (\sin \alpha \sin \vartheta + \cos \alpha \cos \vartheta \cos \gamma) - Z \cos \vartheta \sin \gamma - mg + \\ &+ m \frac{V_{xg}^2 + V_{zg}^2}{r_3 + H} + m (r_3 + H) \omega_3^2 \cos^2 \sigma + 2m\omega_3 V_{xg} \cos \sigma, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} m\dot{V}_{zg} &= -P \sin \psi \cos \vartheta + Q [\sin \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) + \\ &+ \cos \alpha \cos \vartheta \sin \psi] + Y [-\sin \alpha \cos \vartheta \sin \psi + \cos \alpha (\cos \psi \sin \gamma + \\ &+ \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)] + Z (\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma) - m \frac{V_{yg} V_{zg}}{r_3 + H} + \\ &+ m \frac{V_{xg}^2}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma + 2m\omega_3 V_{xg} \sin \sigma + m (r_3 + H) \omega_3^2 \sin \sigma \cos \sigma. \end{aligned} \quad (9.5)$$

К уравнениям движения добавляются кинематические уравнения:

$$\dot{x}_g = V_{xg} \frac{r_3}{r_3 + H}, \quad (10.5)$$

$$\dot{y}_g = \dot{H} = V_{yg}, \quad (11.5)$$

$$\dot{z}_g = -V_{zg} \frac{r_3}{r_3 + H}, \quad (12.5)$$

связывающие геометрические координаты  $x_g$ ,  $H$  и  $z_g$  летательного аппарата с соответствующими составляющими скорости полета, и уравнение, связывающее вес летательного аппарата с секундным расходом топлива:

$$\dot{G} = -q_c, \quad (13.5)$$

где  $q_c$  — весовой расход топлива в секунду<sup>1</sup>, имеющий размерность  $n/\text{сек}$  или  $кг/\text{сек}$ .

Кроме того, в соответствии с отмеченным в гл. III должно быть рассмотрено еще кинематическое уравнение

$$\dot{\sigma} = -\frac{V_{zg}}{r_3 + H}, \quad (14.5)$$

связывающее угловую скорость изменения географической широты с соответствующей составляющей скорости полета, и аналогичное уравнение для производной угла долготы

$$\dot{z} = \frac{V_{xg}}{r_3 + H} \sec \sigma. \quad (15.5)$$

Наконец, так как при прочих равных условиях величина аэродинамических сил зависит от угла атаки  $\alpha$  и угла скольжения  $\beta$ , необходимо рассмотреть еще соответствующие кинематические равенства:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{V_{y1}}{V_{x1}}; \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{V_{z1}}{\sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

где в соответствии с таблицами направляющих косинусов

$$V_{x1} = V_{xg} \cos \vartheta \cos \psi + V_{yg} \sin \vartheta - V_{zr} \cos \vartheta \sin \psi, \quad (17.5)$$

$$\begin{aligned} V_{y1} = & V_{xg} (\sin \psi \sin \gamma - \sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma) + V_{yg} \cos \vartheta \cos \gamma + \\ & + V_{zg} (\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma), \end{aligned} \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned} V_{z1} = & V_{xg} (\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma) - V_{yg} \cos \vartheta \sin \gamma + \\ & + V_{zg} (\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (19.5)$$

<sup>1</sup> Отметим, что весовой расход топлива в секунду  $q_c$  связан с часовым расходом топлива  $q_v$  формулой

$$q_c = \frac{q_v}{3600} [n/\text{сек}].$$

или в матричной форме записи

$$\begin{vmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{vmatrix} = B \begin{vmatrix} V_{xg} \\ V_{yg} \\ V_{zg} \end{vmatrix},$$

где  $B$  — матрица перехода от земных осей координат к связанным, равная

$$B = \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \psi; & \sin \vartheta; & -\cos \vartheta \sin \psi \\ \sin \psi \sin \gamma - \sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma; & \cos \vartheta \cos \gamma; & \cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma; & -\cos \vartheta \sin \gamma; & \cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma \end{vmatrix}$$

Уравнения (7.5) — (9.5), (11.5), (13.5) и (14.5), в которые не входят ни координаты  $x_g$  и  $z_g$ , ни угол долготы  $\lambda$ , могут рассматриваться отдельно от остальных уравнений.

Эта система, решение которой и составляет основную задачу, состоит из восьми уравнений: уравнений движения (7.5) — (9.5) и кинематических уравнений (11.5), (13.5) и (14.5). Решив эту систему, далее по уравнениям (10.5), (12.5) и (15.5) можно найти  $x_g$ ,  $z_g$  и  $\lambda$ .

Эти восемь уравнений содержат 12 неизвестных:

- три составляющие скорости  $V_{xg}$ ,  $V_{yg}$ ,  $V_{zg}$ ;
- три угла  $\vartheta$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ;
- угол атаки  $\alpha$  и угол скольжения  $\beta$ ;
- угол географической широты  $\sigma$ ;
- высоту полета  $H$ ;
- вес летательного аппарата  $G$ ;
- силу тяги двигателя  $P$ .

Как видим, система уравнений получается незамкнутой: в ней содержится четыре «лишних» неизвестных. За такие неизвестные целесообразно принимать три угла  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и силу тяги  $P$ .

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Сила тяги есть функция режима работы двигателя (положения дроссельной заслонки), скорости и высоты полета; в частности, для ракетного двигателя силу тяги  $P$  можно считать не зависящей от скорости полета  $V$ , а с некоторой погрешностью — и от высоты полета. Поэтому когда мы в качестве «лишнего» неизвестного отметили величину тяги, то мы подразумевали изменение силы тяги только вследствие изменения режима работы двигателя, так как скорость и высота полета уже были отмечены ранее в числе 12 неизвестных.

Перечисленные выше четыре «лишних» неизвестных называют *управлениями*. Таким образом, мы рассматриваем четыре управления: три угла ориентации летательного аппарата к земной системе координат и величину силы тяги. В общем случае к этим четырем управлениям можно было бы добавить пятое управление — ориентацию вектора тяги в системе координат, связанной с летательным аппаратом; ориентацию вектора  $\vec{P}$  можно изменять путем поворота двигателя. Поскольку летательные аппараты такого рода применяются редко, мы ограничимся в дальнейшем случае четырех управлений.

В ряде задач, с которыми приходится встречаться на практике, приведенные выше уравнения движения могут быть заметно упрощены; на этом остановимся несколько позже.

В том случае, если уравнения движения летательного аппарата записаны в проекциях на оси какой-то определенной системы координат

(например земной системы) и требуется написать их в проекциях на оси другой системы осей (например скоростной или поточной), то переход легко осуществить с помощью матриц (таблиц) направляющих косинусов.

Если принять во внимание кинематическую связь (68.3), то уравнения движения летательного аппарата в проекциях на *скоростные оси координат*, полученные в § 3 гл. III, можно записать в виде

$$m\dot{V} = X_c + m\omega_3^2(r_3 + H) \cos \sigma (\sin \theta \cos \sigma - \cos \theta \sin \sigma \sin \psi_c), \quad (20.5)$$

$$mV\dot{\theta} = Y_c + m\omega_3^2(r_3 + H) \cos \sigma (\cos \theta \cos \sigma + \sin \theta \sin \sigma \sin \psi_c) + \\ + 2mV\omega_3 \cos \sigma \cos \psi_c + m \frac{V^2 \cos \theta}{r_3 + H}, \quad (21.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_{ca} \cos \theta = Z_c + m\omega_3^2(r_3 + H) \sin \sigma \cos \sigma \cos \psi_c + \\ + 2mV\omega_3 (\cos \theta \sin \sigma - \sin \theta \cos \sigma \sin \psi_c). \quad (22.5)$$

По таблице направляющих косинусов, приведенной в гл. II, запишем выражения проекций силы тяги  $P$ , аэродинамических сил  $Q$ ,  $Y$  и  $Z$ , а также силы тяжести  $G$  на оси скоростной системы координат.

Сила тяги  $P$ , направление которой составляет со связанной осью  $Ox_1$  угол  $\varphi$ , даст следующие три проекции:

$$P_x = P \cos(\alpha - \varphi) \cos \beta, \\ P_y = P [\sin(\alpha - \varphi) \cos \gamma_c + \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \sin \gamma_c], \\ P_z = P [\sin(\alpha - \varphi) \sin \gamma_c - \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \cos \gamma_c].$$

Аэродинамическая сила  $Q$  даст проекции:

$$Q_x = -Q \cos \beta, \\ Q_y = -Q \sin \beta \sin \gamma_c, \\ Q_z = Q \sin \beta \cos \gamma_c.$$

Аэродинамическая подъемная сила  $Y$ :

$$Y_x = 0, \\ Y_y = Y \cos \gamma_c, \\ Y_z = Y \sin \gamma_c.$$

Аэродинамическая боковая сила  $Z$ :

$$Z_x = Z \sin \beta, \\ Z_y = -Z \cos \beta \sin \gamma_c, \\ Z_z = Z \cos \beta \cos \gamma_c.$$

Сила тяжести  $G$ :

$$G_x = -mg \sin \theta, \\ G_y = -mg \cos \theta, \\ G_z = 0.$$

Проекции  $X_c$ ,  $Y_c$ ,  $Z_c$  равнодействующей внешних и реактивной сил на оси скоростной системы будут, следовательно, равны:

$$X_c = P \cos(\alpha - \varphi) \cos \beta - Q \cos \beta + Z \sin \beta - mg \sin \theta, \quad (23.5)$$

$$Y_c = P [\sin(\alpha - \varphi) \cos \gamma_c + \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \sin \gamma_c] - Q \sin \beta \sin \gamma_c + \\ + Y \cos \gamma_c - Z \cos \beta \sin \gamma_c - mg \cos \theta, \quad (24.5)$$

$$Z_c = P [\sin(\alpha - \varphi) \sin \gamma_c - \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \cos \gamma_c] + Q \sin \beta \cos \gamma_c + \\ + Y \sin \gamma_c + Z \cos \beta \cos \gamma_c. \quad (25.5)$$

Уравнения движения (20.5) — (22.5) летательного аппарата в проекциях на оси скоростной системы координат с учетом (23.5) — (25.5) примут вид

$$m\dot{V} = P \cos(\alpha - \varphi) \cos \beta - Q \cos \beta + Z \sin \beta - mg \sin \theta + \\ + m\omega_3^2(r_3 + H) \cos \sigma (\sin \theta \cos \sigma - \cos \theta \sin \sigma \sin \psi_c), \quad (26.5)$$

$$mV\dot{\theta} = P [\sin(\alpha - \varphi) \cos \gamma_c + \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \sin \gamma_c] - Q \sin \beta \sin \gamma_c + \\ + Y \cos \gamma_c - Z \cos \beta \sin \gamma_c - mg \cos \theta + m\omega_3^2(r_3 + H) \cos \sigma (\cos \theta \cos \sigma + \\ + \sin \theta \sin \sigma \sin \psi_c) + 2mV\omega_3 \cos \sigma \cos \psi_c + m \frac{V^2 \cos \theta}{r_3 + H}, \quad (27.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_{ca} \cos \theta = P [\sin(\alpha - \varphi) \sin \gamma_c - \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \cos \gamma_c] + \\ + Q \sin \beta \cos \gamma_c + Y \sin \gamma_c + Z \cos \beta \cos \gamma_c + m\omega_3^2(r_3 + H) \sin \sigma \cos \sigma \cos \psi_c + \\ + 2mV\omega_3 (\cos \theta \sin \sigma - \sin \theta \cos \sigma \sin \psi_c). \quad (28.5)$$

К уравнениям движения (26.5) — (28.5) надо добавить кинематические уравнения, связывающие дальность  $L$ , высоту  $H$  и угол курса  $\psi_c$  со скоростью полета  $V$  и углом наклона траектории к местной горизонтальной плоскости  $\theta$ :

$$\dot{L} \equiv \dot{x} = V \cos \theta \frac{r_3}{r_3 + H}, \quad (29.5)$$

$$\dot{H} = V \sin \theta, \quad (30.5)$$

$$\dot{\psi}_c = \dot{\psi}_{ca} - \frac{V \cos \theta}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma \cos \psi_c, \quad (31.5)$$

а также уравнение (13.5), характеризующее изменение веса летательного аппарата с течением времени вследствие выгорания топлива:

$$\dot{G} = -q_c.$$

Уравнения (14.5) и (15.5), учитывающие изменения угловых скоростей, географической широты и долготы для скоростной системы, поскольку

$$V_{xg} = V \cos \theta \cos \psi_c$$

и

$$V_{zg} = -V \cos \theta \sin \psi_c,$$

примут вид

$$\dot{\sigma} = \frac{V}{r_3 + H} \cos \theta \sin \psi_c, \quad (32.5)$$

$$\dot{\chi} = \frac{V}{r_3 + H} \sec \sigma \cos \theta \cos \psi_c. \quad (33.5)$$

Уравнения (26.5) — (28.5), (30.5) — (32.5) и (13.5), как и для земной системы координат, могут рассматриваться отдельно от других уравнений.

Таким образом, основная система состоит из семи уравнений: (26.5) — (28.5), (30.5) — (32.5) и (13.5), в которых содержится 11 неизвестных величин:

- скорость полета  $V$ ;
- углы  $\theta$ ,  $\gamma_c$ ,  $\psi_c$ ,  $\psi_{ca}$ ;
- угол атаки  $\alpha$  и угол скольжения  $\beta$ ;
- угол географической широты  $\sigma$ ;
- вес летательного аппарата  $G$ ;
- сила тяги двигателя  $P$ ;
- высота полета  $H$ .

Поскольку система незамкнута и имеются четыре «лишних» неизвестных, целесообразно в качестве управления выбрать углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_c$ , а также силу тяги  $P$ . Замечание, сделанное по поводу пятого управления — путем поворота двигателя (см. стр. 150), — остается в силе и для данного случая.

## § 2. Упрощение уравнений движения летательного аппарата

В меру точности предположений, сделанных при постановке задачи, уравнения движения, полученные в предыдущем параграфе, можно считать *точными*. При решении многих технических задач эти уравнения можно упростить, пренебрегая некоторыми членами, встречающимися в уравнениях движения. Большинство таких упрощений связано с учетом неинерциальности системы отсчета. С целью получить упрощенные уравнения движения рассмотрим роль факторов, обуславливающих неинерциальность системы отсчета, связанной с земной поверхностью.

Заметим, что при не слишком длительном промежутке времени, в течение которого рассматривается движение, орбитальное движение Земли вокруг Солнца (в «абсолютно неподвижном» пространстве) без большой погрешности можно считать прямолинейным, поступательным и равномерным.

Суточное вращение Земли, с самой общей точки зрения, приводит к следующим особенностям, которые необходимо учитывать при исследовании движения летательных аппаратов относительно поверхности Земли.

Во-первых, суточное вращение Земли оказывает влияние на потенциал тяготения и, следовательно, на силу тяжести, действующую на летательный аппарат<sup>1</sup>. Во-вторых, как показано в предыдущем параграфе, учет угловой скорости  $\omega_z$  вращения Земли в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, приводит к появлению в уравнениях движения летательного аппарата дополнительных членов, представляющих переносное и поворотное ускорения. В-третьих, если рассматривать движение в инерциальной системе отсчета, необходимо учитывать чисто кинематический эффект суточного вращения Земли: при определении времени и дальности полета относительно пункта вылета надо принимать во внимание перемещение в инерциальном пространстве пунктов вылета и назначения, обусловленное суточным вращением Земли.

Последнее из отмеченных трех обстоятельств не связано с уравнениями движения и может быть учтено после получения решения уравнений движения летательного аппарата<sup>2</sup>, так что здесь мы остановимся

<sup>1</sup> На этом вопросе более подробно мы остановимся в третьей части книги.

<sup>2</sup> С необходимостью такого учета мы встретимся в гл. XII при определении дальности полета баллистической ракеты.

подробнее только на оценке величин переносного и поворотного ускорений, обусловленных угловой скоростью вращения Земли  $\omega_3$ .

Расчет показывает, что центростремительное ускорение, обусловленное суточным вращением Земли, невелико по сравнению с ускорением силы тяжести  $g$ . Центростремительное ускорение достигает наибольшей величины на экваторе, и на уровне моря оно

$$j_{с.в.} = 0,0336 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2},$$

а на высоте  $H = 1\,000 \text{ км}$  в плоскости экватора

$$j_{с.в.} = 0,0390 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}.$$

Эти величины существенно меньше ускорения  $g$  силы тяжести, так что с достаточной степенью точности центростремительным ускорением  $j_{с.в.}$ , связанным с суточным вращением Земли, можно пренебрегать.

Кориолисовы (поворотные) ускорения, как показывает расчет, начинают оказывать заметное влияние на движение летательного аппарата при скоростях полета, больших  $V = 2\text{--}3 \text{ км/сек}$ . При таких скоростях кориолисовы ускорения составляют около 2—3% ускорения силы тяжести. При скорости полета, близкой к первой космической скорости (7,5—8,5 км/сек), кориолисовы ускорения составляют уже около 10% ускорения силы тяжести. Надо отметить, что величина кориолисовых ускорений довольно сложным образом зависит от места и направления полета; при навигационных расчетах эти силы необходимо учитывать. Для приближенного анализа характера движения летательного аппарата в целях большей простоты поворотным ускорением можно пренебречь, как мы и будем поступать в дальнейшем. Все следующие отсюда выводы, конечно, будут справедливы лишь для умеренных высот ( $H < 500 \text{ км}$ ) и скоростей полета ( $V < 4\text{--}5 \text{ км/сек}$ ).

Таким образом, пренебрегая силами, обусловленными суточным вращением Земли, приходим к следующей более простой системе уравнений движения летательного аппарата в проекциях на оси скоростной системы координат:

$$m\dot{V} = P \cos(\alpha - \varphi) \cos \beta - Q \cos \beta + Z \sin \beta - mg \sin \theta, \quad (34.5)$$

$$mV\dot{\theta} = P [\sin(\alpha - \varphi) \cos \gamma_c + \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \sin \gamma_c] - Q \sin \beta \sin \gamma_c + \\ + Y \cos \gamma_c - Z \cos \beta \sin \gamma_c - mg \cos \theta + m \frac{V^2 \cos \theta}{r_s + H}, \quad (35.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_{ca} \cos \theta = P [\sin(\alpha - \varphi) \sin \gamma_c - \cos(\alpha - \varphi) \sin \beta \cos \gamma_c] + \\ + Q \sin \beta \cos \gamma_c + Y \sin \gamma_c + Z \cos \beta \cos \gamma_c. \quad (36.5)$$

К этим уравнениям движения добавляются кинематические связи (30.5) — (32.5) и уравнение (13.5).

Как видим, уже одно пренебрежение ускорениями, связанными с суточным вращением Земли, существенно упрощает решение задачи. Следующая группа упрощений связана с оценкой величины углов, входящих в уравнения движения. В правой части уравнений (34.5) — (36.5) в числе других входят аэродинамические силы. При полете в плотных слоях атмосферы угол атаки  $\alpha$  и угол скольжения  $\beta$ , от которых при прочих равных условиях зависит величина аэродинамических сил, невелики, так что без большой погрешности допустимо принимать

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \sin \beta \approx \beta, \quad \cos \beta \approx 1, \\ \sin(\alpha - \varphi) \approx (\alpha - \varphi), \quad \cos(\alpha - \varphi) \approx 1.$$

В таком случае уравнения движения упрощаются далее и принимают вид

$$m\dot{V} = P - Q + Z\beta - mg \sin \theta, \quad (37.5)$$

$$mV\dot{\theta} = P[(\alpha - \varphi) \cos \gamma_c + \beta \sin \gamma_c] - Q\beta \sin \gamma_c + Y \cos \gamma_c - Z \sin \gamma_c - mg \cos \theta + m \frac{V^2 \cos \theta}{r_3 + H}, \quad (38.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_{ca} \cos \theta = P[(\alpha - \varphi) \sin \gamma_c - \beta \cos \gamma_c] + Q\beta \cos \gamma_c + Y \sin \gamma_c + Z \cos \gamma_c. \quad (39.5)$$

### § 3. Уравнения движения летательного аппарата в частных случаях

Рассмотрим некоторые частные случаи движения летательного аппарата в пределах плотных слоев атмосферы.

Если полет происходит без крена и скольжения ( $\gamma_c = 0$ ,  $\beta = 0$ ), то, приняв во внимание, что при  $\beta = 0$  и боковая аэродинамическая сила  $Z = 0$ , замечаем, что правая часть уравнения (36.5) тождественно равна нулю. Это означает, что производная  $\dot{\psi}_{ca} = 0$  и что, следовательно, траектория полета летательного аппарата лежит в неизменной плоскости, проходящей через центр Земли — в плоскости большого круга.

Положив в уравнениях движения (37.5) — (39.5)  $\gamma_c = \beta = 0$ , придем к следующим уравнениям для случая полета без крена и скольжения:

$$m\dot{V} = P - Q - mg \sin \theta, \quad (40.5)$$

$$mV\dot{\theta} = P(\alpha - \varphi) + Y - mg \cos \theta + m \frac{V^2 \cos \theta}{r_3 + H}. \quad (41.5)$$

Третье уравнение отпадает, так как траектория полета, как мы видели, в этом случае плоская.

Уравнение (41.5) можно привести к несколько иному виду, если объединить члены

$$-mg \cos \theta \text{ и } m \frac{V^2 \cos \theta}{r_3 + H}$$

и принять во внимание выражение для круговой скорости на уровне моря

$$V_{\text{кр}0}^2 = g_0 r_3 \text{ и } g = g_0 \frac{r_3^2}{(r_3 + H)^2}.$$

В этом случае уравнение (41.5) принимает вид

$$\begin{aligned} mV\dot{\theta} &= P(\alpha - \varphi) + Y - mg \cos \theta \left[ 1 - \frac{V^2}{g(r_3 + H)} \right] = \\ &= P(\alpha - \varphi) + Y - mg \cos \theta \left[ 1 - \left( \frac{V}{V_{\text{кр}0}} \right)^2 \frac{r_3 + H}{r_3} \right]. \end{aligned} \quad (42.5)$$

Следующее упрощение относится к летательным аппаратам, имеющим сравнительно небольшие скорости полета, в частности к самолетам умеренных скоростей (за исключением орбитальных самолетов).

Центростремительное ускорение, обусловленное кривизной земной поверхности, прямо пропорционально квадрату скорости полета летательного аппарата. При сравнительно небольших скоростях полета центростремительное ускорение получается также сравнительно небольшим; так, например, при полете летательного аппарата со скоростью

$V=1000$  м/сек ( $M \approx 3$ ) центростремительное ускорение, обусловленное кривизной земной поверхности:

$$j_{кр} = 0,16 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2},$$

т. е. составляет около 1,6% от ускорения силы тяжести. Поэтому кривизной земной поверхности при исследовании движения самолетов в большинстве случаев можно пренебрегать.

Кроме того, у самолетов обычно угол  $(\alpha - \varphi)$  невелик, а сила тяги меньше силы тяжести. При исследовании траекторий полета таких летательных аппаратов можно пренебречь также слагаемым  $P(\alpha - \varphi)$  по сравнению с другими слагаемыми в уравнении (41.5). Тогда при расчете можно воспользоваться уравнениями

$$m\dot{V} = P - Q - mg \sin \theta, \quad (42.5)$$

$$mV\dot{\theta} \approx Y - mg \cos \theta. \quad (43.5)$$

Если самолет совершает горизонтальный полет, то

$$\theta = \dot{\theta} = 0$$

и получаем

$$m\dot{V} = P - Q, \quad (44.5)$$

$$Y = mg. \quad (45.5)$$

Наконец, для горизонтального установившегося полета приближенно уравнения движения имеют вид

$$P = Q, \quad (46.5)$$

$$Y = mg = G. \quad (47.5)$$

Отсюда видно, что при горизонтальном установившемся полете самолета, если пренебречь кривизной земной поверхности и считать

$$P(\alpha - \varphi) \ll Y,$$

подъемная сила  $Y$  равна весу самолета  $G$ , а сила тяги  $P$  — силе лобового сопротивления  $Q$ .

**Горизонтальный полет с креном и без скольжения.** В этом случае

$$\theta = \beta = 0$$

и летательный аппарат движется по криволинейной траектории, расположенной на постоянном расстоянии от поверхности Земли. Уравнения движения принимают вид

$$m\dot{V} = P - Q, \quad (48.5)$$

$$[P(\alpha - \varphi) + Y] \cos \gamma_c = mg \left[ 1 - \left( \frac{V}{V_{кр0}} \right)^2 \frac{r_3 + H}{r_3} \right], \quad (49.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_{ca} = [P(\alpha - \varphi) + Y] \sin \gamma_c. \quad (50.5)$$

В случае исследования движения самолета на основании тех же соображений, как и выше, предыдущие уравнения приближенно можно записать в виде

$$m\dot{V} = P - Q, \quad (51.5)$$

$$[P(\alpha - \varphi) + Y] \cos \gamma_c = mg = G, \quad (52.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_c = [P(\alpha - \varphi) + Y] \sin \gamma_c. \quad (53.5)$$

Если скорость полета самолета с течением времени не изменяется при криволинейном установившемся полете, то ускорение  $\dot{V}=0$  и уравнение (51.5) принимает вид алгебраического уравнения

$$P=Q.$$

Сравнивая уравнение (52.5) для полета с креном и (45.5) для прямолинейного горизонтального полета без крена, можно заметить, что для криволинейного полета необходима большая подъемная сила  $Y$ , чем для прямолинейного, так как  $\cos \gamma_c < 1$ . Такое же заключение можно сделать на основании более точных уравнений движения: если не пренебрегать углом  $(\alpha - \varphi)$ , то для криволинейного полета требуется большая сумма сил

$$Y + P(\alpha - \varphi),$$

чем для прямолинейного.

При исследовании динамики полета в плотных слоях атмосферы часто пользуются понятием *коэффициента перегрузки* или просто *перегрузкой*.

Перегрузкой называют отношение вектора равнодействующей аэродинамических сил и силы тяги к весу летательного аппарата.

$$\bar{n} = \frac{\bar{R} + \bar{P}}{G}. \quad (54.5)$$

Напомним, что понятия силы тяжести и веса совпадают между собой только до тех пор, пока можно пренебрегать влиянием кривизны земной поверхности.

«Эффективный» вес, определяемый как сила, направленная по нормали к поверхности земной сферы, вообще равен разности силы притяжения и центробежной силы инерции, обусловленной суточным вращением Земли и кривизной ее поверхности. Если, как мы об этом условились, пренебрегать эффектом суточного вращения Земли, то все же вес будет отличаться от силы притяжения на величину центробежной силы инерции, обусловленной кривизной земной поверхности.

Следовательно, в полете эффективный вес будет зависеть от скорости полета, уменьшаясь при ее увеличении. В частности, если скорость полета равна круговой скорости для данной высоты полета, наступает состояние невесомости, когда эффективный вес равен нулю. При изучении движения летательного аппарата с такими большими скоростями понятие перегрузки становится неудобным, так что сфера применения этого понятия практически ограничивается областью умеренных скоростей, для которых можно пренебрегать эффектом кривизны земной поверхности.

Условившись об этом, условимся также, к какому весу целесообразно относить перегрузку.

Для оценки величины равнодействующей внешних сил (например при расчетах на прочность) удобно в качестве такого веса принимать некоторый инвариантный вес, характерный для данного летательного аппарата; за такой вес обычно принимают его наибольший (стартовый) вес  $^1 G_0 = m_0 g_0$ . В таком случае вектор перегрузки

$$\bar{n} = \frac{\bar{R} + \bar{P}}{G_0}. \quad (55.5)$$

Если относить внешние силы к текущему весу летательного аппарата  $G = mg$ , то вектор перегрузки будет пропорционален вектору уско-

<sup>1</sup> Здесь  $g_0 = 9,81 \text{ м/сек}^2$  — ускорение силы тяжести на уровне моря.

рения, создаваемого внешними силами, кроме силы притяжения:

$$\bar{n} = \frac{\bar{R} + \bar{P}}{G}. \quad (56.5)$$

Вместо вектора перегрузки  $n$  можно рассматривать его скалярные составляющие по осям координат. Так, в поточной системе координат скалярные составляющие перегрузки будут:

по касательной к траектории — *тангенциальная* перегрузка<sup>1</sup>

$$n_x = \frac{R_x + P_x}{G}, \quad (57.5)$$

по нормали к траектории, лежащей в вертикальной плоскости симметрии летательного аппарата, — *нормальная* перегрузка

$$n_y = \frac{R_y + P_y}{G} \quad (58.5)$$

и по нормали к траектории, перпендикулярной к плоскости симметрии летательного аппарата, — *боковая* перегрузка

$$n_z = \frac{R_z + P_z}{G}. \quad (59.5)$$

Здесь  $R_x, R_y, R_z, P_x, P_y, P_z$  — соответствующие проекции векторов  $\bar{R}$  и  $\bar{P}$  на поточные оси координат.

На основании уравнений (34.5) — (36.5), совершая переход от скоростной к поточной системе координат с помощью табл. 2.2, выражения (57.5) — (59.5) можно переписать в виде

$$n_x = \frac{[P \cos(\alpha - \varphi) - Q] \cos \beta + Z \sin \beta}{G}, \quad (60.5)$$

$$n_y = \frac{P \sin(\alpha - \varphi) + Y}{G}, \quad (61.5)$$

$$n_z = \frac{-[P \cos(\alpha - \varphi) - Q] \sin \beta + Z \cos \beta}{G}. \quad (62.5)$$

Если ввести еще большие упрощения и принять углы  $(\alpha - \varphi)$  и  $\beta$  малыми (см. стр. 154), то выражения (60.5) — (62.5) принимают более простой вид

$$n_x = \frac{P - Q + Z\beta}{G}, \quad (63.5)$$

$$n_y = \frac{P(\alpha - \varphi) + Y}{G}, \quad (64.5)$$

$$n_z = \frac{-(P - Q)\beta + Z}{G}. \quad (65.5)$$

Пользуясь понятием составляющих вектора перегрузки, уравнения (37.5) — (39.5) для аппаратов умеренных скоростей запишем короче:

$$\frac{\dot{V}}{g} = n_x - \sin \theta, \quad (66.5)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = n_y \cos \gamma_c - n_z \sin \gamma_c - \cos \theta \left( 1 - \frac{V^2}{V_{кр0}^2} \frac{r_3 + H}{r_3} \right), \quad (67.5)$$

$$-\frac{V}{g} \dot{\psi}_{ca} \cos \theta = n_y \sin \gamma_c + n_z \cos \gamma_c. \quad (68.5)$$

<sup>1</sup> В (57.5) — (59.5) под  $G$  можно понимать стартовый  $G_0$  либо текущий  $G$  вес летательного аппарата, а в (66.5) — (71.5) — текущий вес  $G$ .

Уравнения движения (66.5)—(68.5) для горизонтального полета с креном и без скольжения, записанные через составляющие перегрузки, принимают вид

$$\frac{\dot{V}}{g} = n_x, \quad (69.5)$$

$$n_y \cos \gamma_c = 1 - \frac{V^2}{V_{кр 0}^2} \frac{r_3 + H}{r_3}, \quad (70.5)$$

$$-\frac{V}{g} \dot{\psi}_{ca} = n_y \sin \gamma_c. \quad (71.5)$$

**Горизонтальный полет со скольжением и без крена.** Этот случай наиболее характерен для летательных аппаратов с крестообразным расположением крыльев, например для снарядов типа «воздух — воздух», хотя такие режимы полета могут быть и у самолетов обычной схемы, а также у бескрылых летательных аппаратов.

Положив в уравнениях (37.5)—(39.5)

$$\theta = \gamma_c = 0,$$

получим следующие уравнения движения для рассматриваемого случая:

$$m\dot{V} = P - Q + Z\beta, \quad (72.5)$$

$$P(\alpha - \varphi) + Y = mg \left( 1 - \frac{V^2}{V_{кр 0}^2} \frac{r_3 + H}{r_3} \right), \quad (73.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_{ca} = -P\beta + Q\beta + Z. \quad (74.5)$$

Применительно к самолету эти уравнения принимают вид

$$m\dot{V} = P - Q, \quad (75.5)$$

$$Y = mg = G, \quad (76.5)$$

$$-mV\dot{\psi}_c = Z. \quad (77.5)$$

В случае неизменной скорости полета уравнение (75.5) становится алгебраическим:

$$P = Q.$$

Уравнения (75.5)—(77.5) описывают криволинейное движение аппарата, траектория которого проходит на постоянной высоте, так же как и уравнения (51.5)—(53.5), но только в случае полета с креном и без скольжения необходимая для криволинейного полета центробежная сила получается вследствие крена, а в случае полета без крена — вследствие скольжения.

Уравнения движения (72.5)—(74.5) можно записать также, введя в них выражения перегрузок; в частности, для летательных аппаратов умеренных скоростей уравнения (75.5)—(77.5) принимают вид

$$\frac{\dot{V}}{g} = n_x, \quad (75a.5)$$

$$n_y = 1, \quad (76a.5)$$

$$-\frac{V}{g} \dot{\psi}_c = n_z. \quad (77a.5)$$

## КВАЗИУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ. РАВНОВЕСНЫЕ РЕЖИМЫ ПОЛЕТА

Строго говоря, установившегося движения летательного аппарата, при котором все параметры, характеризующие полет, остаются неизменными, не существует. Всякое движение летательного аппарата является неустановившимся, так как прежде всего сам летательный аппарат надо рассматривать как тело переменного состава. Даже в таком наиболее простом случае движения, как полет по горизонтальной траектории с неизменной скоростью, движение не будет установившимся — полетный вес аппарата из-за выгорания топлива будет непрерывно уменьшаться, и для соблюдения условий горизонтального полета с неизменной скоростью придется постепенно уменьшать угол атаки  $\alpha$ , т. е. угол атаки с течением времени будет изменяться.

Изучение установившихся движений летательного аппарата, однако, представляет интерес с двух точек зрения.

Во-первых, установившиеся движения можно рассматривать для получения *оценки предельных возможностей* летательного аппарата. Характеристики движения на таких установившихся равновесных режимах полета могут служить критериями оценки летных качеств летательного аппарата.

Во-вторых, при исследовании движений летательных аппаратов, при которых с течением времени кинематические параметры движения меняются сравнительно медленно, можно без большой погрешности пользоваться уравнениями установившегося движения. Такие неустановившиеся движения, при исследовании которых можно исходить из уравнений установившегося движения, называют *квазиустановившимися*.

При рассмотрении квазиустановившихся движений летательного аппарата, таким образом, небольшими по величине силами инерции можно пренебрегать.

В дальнейшем для краткости вместо термина «квазиустановившееся движение» будем пользоваться термином «установившееся движение». Под *установившимся* движением будем понимать такое движение летательного аппарата, при котором угол атаки  $\alpha$ , угол скольжения  $\beta$ , угол крена  $\gamma_c$ , высота  $H$  и скорость полета  $V$  остаются с течением времени неизменными.

Определенное таким образом установившееся движение, строго говоря, возможно лишь при полете в горизонтальной плоскости летательного аппарата, вес которого с течением времени не изменяется. В действительности, конечно, как уже было отмечено, вследствие выгорания топлива вес летательного аппарата есть функция времени  $t$ . Если, однако, ограничиться рассмотрением движения летательного аппарата в горизонтальной плоскости в течение сравнительно небольшого промежутка времени, то можно в первом приближении пренебречь изменением полетного веса и считать его равным некоторому среднему за данный промежуток времени весу. В этом случае термин «установившееся движение» приобретает определенный смысл.

При полете летательного аппарата в *вертикальной плоскости* высота полета  $H$ , а следовательно, и все параметры атмосферы — плотность, давление, температура, скорость звука и т. д. — непрерывно изменяются. Поэтому приведенное выше определение установившегося движения теряет смысл. Однако если рассматривать движение летательного аппарата в вертикальной плоскости в течение достаточно малого промежутка

ка времени, за который высота полета не успевает измениться существенным образом, все параметры, характеризующие атмосферу, можно считать неизменными. В таком случае и движение летательного аппарата в вертикальной плоскости с известной степенью приближения можно рассматривать как установившееся.

Таким образом, даже при сделанных выше предположениях движение летательного аппарата можно считать установившимся по отношению не ко всем характеризующим его параметрам, а по отношению к одному такому параметру или к некоторой комбинации кинематических параметров движения. Можно говорить, например, о движении, установившемся по отношению к скорости полета. Такое движение будет происходить с неизменной скоростью полета, но угол атаки при этом вследствие изменения полетного веса будет переменным даже при неизменной высоте полета. Криволинейное движение самолета с постоянной скоростью в горизонтальной плоскости при неизменном угле крена будет установившимся по отношению к скорости полета и углу крена; угол атаки и направление полета при этом будут с течением времени изменяться.

Особый интерес изучение установившихся движений представляет для тех крылатых летательных аппаратов (самолетов), кинематические параметры движения которых в течение значительной части полета изменяются сравнительно медленно. Однако и для других типов летательных аппаратов, обладающих большей по сравнению с самолетами тяговооруженностью, изучение установившегося движения имеет практический смысл. Это объясняется тем, что в соответствии с *гипотезой стационарности* величина аэродинамических сил, действующих на летательный аппарат, полностью определяется кинематическими параметрами движения в данный момент времени. При одинаковых давлении, температуре воздуха и угле атаки согласно этой гипотезе подъемная сила и сила лобового сопротивления получаются одинаковыми при установившемся и неустановившемся движении. Всю величину подъемной силы, например, можно представить как сумму подъемной силы, необходимой для горизонтального полета, и подъемной силы, необходимой для искривления траектории летательного аппарата при данных скорости и высоте полета. То же замечание относится и к силе лобового сопротивления<sup>1</sup>.

Установившиеся движения, определенные так, как это сделано выше, могут быть прямолинейными и криволинейными. В дальнейшем рассмотрим вначале прямолинейные установившиеся движения, а затем криволинейные. Эти вопросы будем рассматривать применительно к самолетам, у которых основной силой, необходимой для поддержания в воздухе, является аэродинамическая подъемная сила. Будем пренебрегать кривизной земной поверхности, а ускорение силы тяжести  $g$  считать постоянным и не зависящим от высоты полета.

## § 1. Прямолинейное установившееся движение самолета. Метод тяг Н. Е. Жуковского

Расчет равновесных режимов установившегося полета часто называют *аэродинамическим расчетом* самолета.

В задачу аэродинамического расчета входит определение в зависимости от действующих на самолет внешних сил кинематических параметров установившегося движения центра тяжести самолета. К таким

<sup>1</sup> Из расчета установившихся движений могут быть определены первые слагаемые подъемной силы и лобового сопротивления, необходимые для расчета неустановившегося движения, что упрощает решение задач неустановившегося движения.

кинематическим параметрам относятся максимальная скорость горизонтального установившегося полета на разных высотах, предельно возможная высота горизонтального установившегося полета, время подъема самолета на различные высоты (если движение при подъеме рассматривать как установившееся), длина пути, проходимого самолетом за определенный промежуток времени, и т. д.

В этой главе рассмотрим все такие задачи, за исключением определения дальности и продолжительности полета самолета, рассматриваемого в гл. VII.

Условием установившегося полета является равновесие всех внешних сил, включая и силу тяги, действующих на самолет. Так как при установившемся прямолинейном движении силы инерции равны нулю, то уравнения установившегося прямолинейного движения превращаются в алгебраические, как это показано в гл. V; это существенно упрощает решение уравнений и их последующий анализ.

Уравнения прямолинейного установившегося движения в вертикальной плоскости без крена и без скольжения имеют вид [см. уравнения (34.5) — (35.5)]

$$P \cos(\alpha - \varphi) = c_x S \frac{\rho V^2}{2} + G \sin \theta, \quad (1.6)$$

$$c_y S \frac{\rho V^2}{2} + P \sin(\alpha - \varphi) = G \cos \theta. \quad (2.6)$$

Заметим, что прямолинейный полет в вертикальной плоскости можно осуществить и придав самолету некоторые углы крена  $\gamma_c$  и скольжения  $\beta$ ; и в этом случае равнодействующая всех внешних сил лежит в вертикальной плоскости: боковая аэродинамическая сила  $Z$ , возникающая вследствие скольжения, при этом компенсируется проекцией подъемной силы  $Y$  на горизонтальную плоскость, появляющейся вследствие крена самолета. Расчет такого движения рассмотрен несколько ниже, а пока будем считать, что

$$\gamma_c = \beta = 0.$$

В основе всех методов аэродинамического расчета лежит сопоставление значения какого-либо параметра, *потребного* для осуществления выбранного режима полета, со значением этого же параметра, которое обеспечивает двигатель, установленный на самолете, — *располагаемой* величиной параметра. Очевидно, равенство потребной и располагаемой величин выбранного параметра является условием установившегося движения. В качестве параметра можно выбрать, например, силу тяги, число оборотов двигателя, расход топлива, полезную мощность, развиваемую двигателем, и т. д.

Проще всего в качестве параметра выбрать величину силы тяги; именно так и поступил Н. Е. Жуковский.

Метод аэродинамического расчета, основанный на сравнении величин потребной и располагаемой тяг, — метод тяг, построенный знаменитым русским ученым Н. Е. Жуковским, является основным методом аэродинамического расчета. Этот метод, получивший широкую известность, называется *методом тяг Жуковского*.

В методе тяг условием установившегося полета является *равенство потребной и располагаемой сил тяги*.

Метод тяг был предложен Н. Е. Жуковским в начале 1900-х годов. В то время скорости полета самолетов были невелики по сравнению со скоростью звука и влияние сжимаемости воздуха на аэродинамические характеристики самолета было совершенно незначительно, так что им с достаточной степенью точности можно было пренебречь. Это позволи-

ло Н. Е. Жуковскому предложить простой и изящный графический прием решения уравнений установившегося движения<sup>1</sup>.

В том случае, когда влияние сжимаемости воздуха на поляру самолета значительно, так что им нельзя пренебрегать, задачу также можно решить графически, продолжая идеи геометрического построения Жуковского. Мы изложим здесь, однако, графо-аналитический прием расчета, сравнительно простой и удобный для практического применения.

Исходными уравнениями этого метода аэродинамического расчета являются (1.6) — (2.6). Сопоставляемыми параметрами, как уже указывалось, служат сила тяги, потребная для прямолинейного установившегося полета под некоторым углом  $\theta$  к горизонту (потребная тяга), и сила тяги, развиваемая двигателем, установленным на самолете (располагаемая тяга).

Определим из уравнения (1.6) потребную силу тяги  $P_{\text{н}} \equiv P$  и подставим ее выражение в (2.6); после несложных преобразований получим

$$[c_y + c_x \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)] S \frac{\rho V^2}{2} = G [\cos \theta - \sin \theta \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)]. \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) при заданных  $H$ ,  $\theta$  и  $V$  (или числе  $M$ ) неизвестными будут угол атаки  $\alpha$  и коэффициенты подъемной силы  $c_y$  и лобового сопротивления  $c_x$ . Для решения задачи вместо недостающих двух уравнений используется поляра самолета, связывающая  $c_y$ ,  $c_x$  и  $M$ , и кривые  $c_y = c_y(\alpha, M)$ , связывающие  $c_y$ ,  $\alpha$  и  $M$ .

Хотя задача допускает точное решение, воспользуемся методом последовательных приближений, которые, как показывает опыт, очень быстро сходятся. Для этого предварительно преобразуем уравнение (3.6), имея в виду, что

$$V = a_{\text{н}} M, \quad a_{\text{н}}^2 = z \frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_H} = 1,4 \frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_H},$$

$$q = \frac{\rho V^2}{2} = 0,7 \rho_{\text{н}} M^2.$$

Тогда получим

$$[c_y + c_x \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)] S \frac{\rho V^2}{2} = [c_y + c_x \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)] S \cdot 0,7 \rho_{\text{н}} M^2.$$

Обозначим произведение

$$[c_y + c_x \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)] M^2$$

через  $c'_y$ . Имея в качестве исходных данных поляру самолета в виде зависимости  $c_y = c_y(c_x, M)$  и кривые  $c_y = c_y(\alpha, M)$ , а также зная угол  $\varphi$  между осью двигателя и хордой крыла самолета, можно построить сетку кривых  $c'_y = c'_y(\alpha)$  и  $c'_y = c'_y(c_y)$  для разных значений числа  $M$ . Примерный вид таких кривых приведен на рис. 1.6.

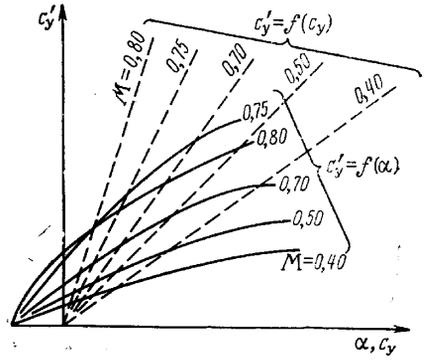


Рис. 1.6. Примерный вид зависимостей  $c'_y = f(\alpha)$  и  $c'_y = f(c_y)$

<sup>1</sup> Изложение метода тяг в форме, данной Н. Е. Жуковским, см. [43].

Теперь уравнение (3.6) можно переписать в следующем виде:

$$c'_y S \cdot 0,7 p_H = G [\cos \theta - \sin \theta \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)]. \quad (4.6)$$

В первом приближении слагаемым  $\sin \theta \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$  можно пренебречь, считая, что оно невелико по сравнению с  $\cos \theta$  при не очень крутых траекториях полета. Тогда получим

$$c'_y S \cdot 0,7 p_H \approx G \cos \theta. \quad (5.6)$$

Расчет по методу последовательных приближений производят в следующем порядке.

Задаются для каждой высоты полета  $H$  несколькими значениями угла наклона траектории к горизонту  $\theta$  и для каждого  $\theta$  задаются в свою очередь рядом значений чисел  $M$ . По уравнению (5.6) для каждой комбинации  $\theta$  и  $H$  находят величину

$$c'_{y1} = \frac{G \cos \theta}{S \cdot 0,7 p_H}$$

в первом приближении.

По найденному значению  $c'_{y1}$  для каждого числа  $M$ , воспользовавшись кривыми зависимости  $c_y = c_y(\alpha, M)$ , определяют величину угла  $(\alpha - \varphi)_1$  первого приближения.

Подставив найденное значение  $(\alpha - \varphi)_1$  в уравнение (4.6), определяют значение  $c'_{y2}$  во втором приближении:

$$c'_{y2} = \frac{G [\cos \theta - \sin \theta \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)_1]}{S \cdot 0,7 p_H}.$$

Повторяя этот процесс, получают  $c'_y$  в третьем и последующих приближениях. Как показывают расчеты, уже первое приближение дает результаты, близкие к окончательным.

Определив с необходимой степенью точности значения  $c'_y$  и  $\alpha$ , по кривым  $c'_y = c'_y(c_y)$  рис. 1.6 для известных значений  $c'_y$  и  $M$  находят соответствующее значение  $c_y$ , а по поляре самолета — соответствующий значениям  $c_y$  и  $M$  коэффициент лобового сопротивления  $c_x$ . Наконец, по формуле

$$P_{\Pi} = \frac{c_x S \cdot 0,7 p_H M^2 + G \sin \theta}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

определяют потребную для полета на данном режиме тягу.

Соответствующая найденной потребной тяге скорость полета

$$V = a_H M,$$

где  $a_H$  — скорость звука на данной высоте.

Проведя подобные вычисления для всех желаемых значений  $M$  и  $H$ , для каждой высоты полета строят сетку потребных тяг (рис. 2.6), дающую зависимость потребной тяги  $P_{\Pi}$  от скорости полета  $V$  на какой-либо высоте полета  $H$  для разных углов  $\theta$ .

После построения сетки потребных тяг на нее наносят кривую располагаемой тяги<sup>1</sup>  $P_p$  для нужного режима работы двигателя (например, для номинального режима, максимального и т. д.), соответствующую той высоте полета, для которой построена сетка потребных тяг.

Установившиеся режимы полета, очевидно, будут соответствовать точкам пересечения кривых располагаемой и потребной тяг. Эти режи-

<sup>1</sup> Если на самолете установлено несколько двигателей, то располагаемая тяга  $P_p = iP$ , где  $i$  — число двигателей,  $P$  — тяга каждого двигателя.

мы будут режимами прямолинейного полета под разными углами наклона траектории  $\theta$  к горизонту. В частности, максимальная скорость горизонтального полета найдется в правой точке пересечения кривых располагаемой и потребной тяги для  $\theta=0$ .

Вертикальная составляющая скорости определится по формуле

$$V_y = V \sin \theta.$$

Определив вертикальную составляющую скорости  $V_y$  для нескольких значений угла  $\theta$  и, следовательно, для нескольких скоростей  $V$  по траектории, можно найти максимальную вертикальную составляющую скорости для каждой высоты полета  $H$ . Для этого надо для каждой высоты полета построить график зависимости  $V_y = V_y(V)$  и по этому графику найти  $V_{y \max}$  и соответствующую ей скорость по траектории  $V_{\text{наб}}$ .

Помимо максимальной скорости горизонтального полета, соответствующей  $\theta=0$ , для каждой высоты полета можно найти минимальную

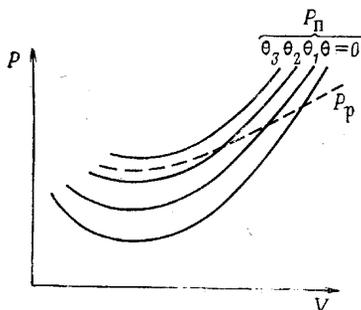


Рис. 2.6. Диаграмма кривых потребной и располагаемой тяги для одной высоты полета

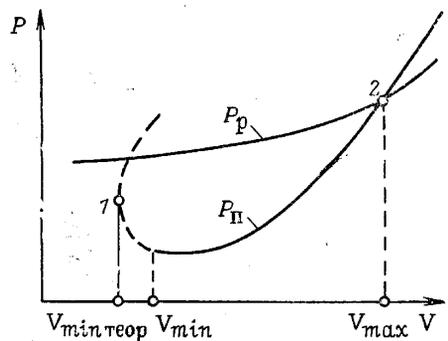


Рис. 3.6. К определению максимальной и минимальной скорости горизонтального полета ( $\theta=0$ ,  $H=\text{const}$ )

скорость этого полета. Эту минимальную скорость можно было бы определить в точке 1 касания вертикальной прямой и кривой потребной тяги при  $\theta=0$  (рис. 3.6). Однако современному самолету, имеющему большую тяговооруженность, пришлось бы лететь в этом случае под очень большим углом атаки, близким к *критическому углу* или даже превышающим его (критическому углу атаки отвечает величина  $c_{y \max}$ ). При таком большом угле атаки крыло работало бы в условиях сорванного потока и самолет не обладал бы необходимой устойчивостью и управляемостью: практически сколько-нибудь длительный полет на таком режиме был бы невозможен.

Минимальную скорость горизонтального полета  $V_{\min}$  определяют поэтому как скорость, соответствующую наибольшему допустимому по условиям безопасности полета углу атаки  $\alpha_{\text{без}}$  и значению  $c_{y \text{ без}}$ . Определенную таким образом минимальную скорость горизонтального полета находят по формуле

$$V_{\min} = \sqrt{\frac{2G}{\rho S [c_{y \text{ без}} + c_{x \text{ без}} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)]}} \approx \sqrt{\frac{2G}{\rho S c_{y \text{ без}}}}. \quad (6.6)$$

Эта формула получается из уравнений (1.6) и (2.6) при  $\theta=0$ .

Допустимые по условиям безопасности полета значения  $c_{y \text{ без}}$  составляют лишь некоторую долю (0,7—0,9) от величины  $c_{y \max}$  и берутся из данных летных испытаний самолетов.

Таким образом, на каждой высоте полета существует определенный диапазон скоростей от  $V_{\min}$  до  $V_{\max}$ , внутри которого возможен установившийся горизонтальный полет.

Зная зависимость  $V_{y \max} = V_y(H)$ , можно определить наибольшую высоту, на которой еще возможен установившийся полет самолета или статический потолок; вместо термина «статический потолок» иногда пользуются термином «теоретический потолок».

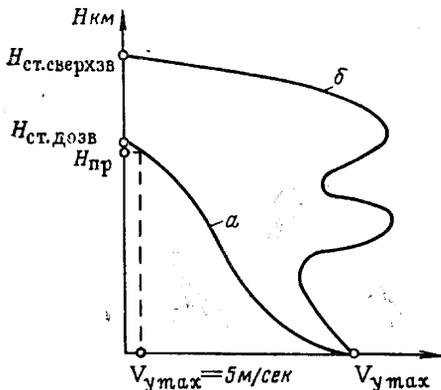


Рис. 4.6. К определению статического потолка:  
а — дозвуковой самолет; б — сверхзвуковой самолет

На статическом (теоретическом) потолке  $H_{\text{ст}}$  вертикальная составляющая скорости  $V_{y \max} = 0$  (рис. 4.6). Отсюда следует, что на высоте статического потолка  $V_{\min} = V_{\max}$ , т. е. диапазон скоростей равен нулю. В гл. VIII показано, что, помимо статического потолка самолета, существует так называемый динамический потолок; на высоте динамического потолка возможен только неустановившийся полет.

Для сверхзвуковых самолетов набор высоты может производиться либо на дозвуковой скорости, либо на сверхзвуковой, либо с переходом от дозвуковой скорости к сверхзвуковой. В последнем случае самолет,

начав подъем на дозвуковой скорости, разгоняется во время подъема и переходит на полет со сверхзвуковыми скоростями. Можно также осуществить переход из подъема на дозвуковой скорости на режим подъема со сверхзвуковой скоростью, разгнав самолет в горизонтальном полете.

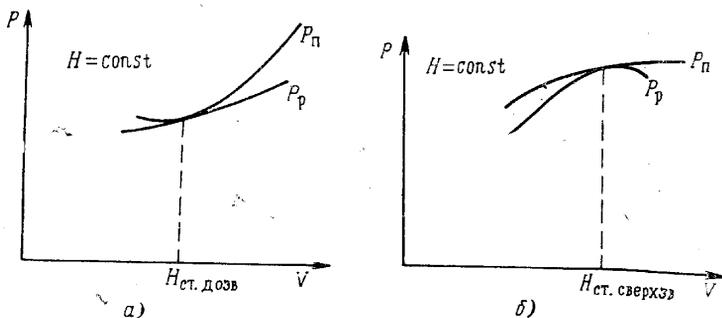


Рис. 5.6. Примерный вид кривых потребной и располагаемой тяг на потолке:  
а — статическом дозвуковом; б — статическом сверхзвуковом

В соответствии с двумя оптимальными режимами набора высоты скоростные самолеты могут иметь соответственно два статических потолка: дозвуковой  $H_{\text{ст. дозв}}$  и сверхзвуковой  $H_{\text{ст. сверхзв}}$ . Кривые потребной и располагаемой тяг на высотах статического потолка будут касаться друг друга (рис. 5.6).

Время подъема самолета на различные высоты  $H$  можно определить на основании следующих соображений.

Пусть в некоторый момент времени  $t$  вертикальная составляющая скорости самолета равна  $V_{y \max}$ ; тогда за малое время  $dt$  самолет поднимается на малую высоту  $dH$ , так что

$$dt = \frac{dH}{V_{y \max}}.$$

Интегрируя это уравнение, получим выражение для наименьшего времени подъема самолета на высоту  $H$ :

$$t = \int_0^H \frac{dH}{V_{y \max}}. \quad (7.6)$$

Интеграл, входящий в формулу (7.6), определяют обычно графически. Для этого строят зависимость

$$\frac{1}{V_{y \max}} = f(H).$$

Планиметрируя площадь, ограниченную осью ординат ( $H$ ), осью абсцисс  $\left(\frac{1}{V_{y \max}}\right)$  и кривой  $\frac{1}{V_{y \max}} = f(H)$ , находят время подъема  $t$ .

Зависимость времени подъема  $t$  от высоты полета  $H$  (рис. 6.6) называют *барограммой подъема*.

Поскольку по мере приближения к статическому потолку вертикальная составляющая скорости  $V_{y \max}$  убывает до нуля, время подъема на статический потолок получается бесконечно большим. Поэтому наряду с понятием «статического» (теоретического) потолка иногда пользуются понятием «практического» потолка (см. рис. 4.6), определяя его как высоту полета, характеризуемую заранее выбранной вертикальной скоростью или углом наклона траектории к горизонту, или другим каким-либо критерием.

Можно, например, для некоторых современных самолетов за практический потолок  $H_{\text{пр}}$  принять высоту полета, на которой максимальная вертикальная скорость  $V_{y \max} = 5 \text{ м/сек}$ .

Осуществляя подъем со скоростями  $V_{\text{наб}}$ , соответствующими  $V_{y \max}$  на каждой высоте полета, как уже было отмечено, достигнуть теоретического потолка невозможно, так как для этого потребовалось бы бесконечно большое время. Для того чтобы достигнуть статического потолка, летчик должен на некоторой меньшей высоте разогнать самолет и затем осуществить горку (см. гл. VIII) с выходом на высоту статического потолка.

**Упрощенный метод тяг.** Изложенный выше метод тяг основан на решении точных уравнений движения. В большом числе случаев, если не требуется очень высокая степень точности, для решения задачи можно применить упрощенный метод тяг, сущность которого заключается в следующем.

Как указано в гл. V, диапазон углов атаки, используемых в обычном полете, сравнительно невелик; тяговооруженность самолетов обычно тоже невелика. Это позволяет в первом приближении принять

$$P \cos(\alpha - \varphi) \approx P; \quad P \sin(\alpha - \varphi) \approx 0.$$

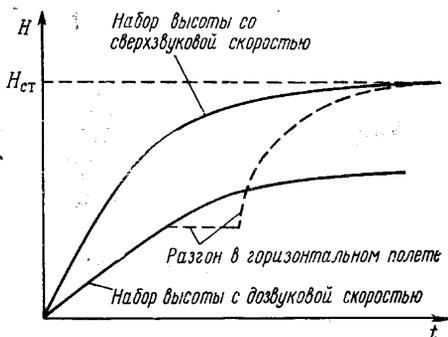


Рис. 6.6. Барограмма подъема

При допущении относительно малости угла  $(\alpha - \varphi)$  уравнение (2.6) принимает вид

$$C_y S \frac{\rho V^2}{2} = G \cos \theta. \quad (8.6)$$

Если в этом уравнении принять  $\cos \theta \approx 1$ , что допустимо при не слишком больших углах  $\theta$ , то оно превращается в следующее:

$$c_y S \frac{\rho V^2}{2} \approx G. \quad (8a.6)$$

Очевидно, что, определяя для некоторых скорости и высоты полета значения  $c_y$  из уравнения (8a.6), мы допускаем ошибку по сравнению со значением  $c_y$ , удовлетворяющим уравнению (8.6). Эта ошибка в определении  $c_y$  приводит к погрешности в оценке той части лобового сопротивления самолета, которая зависит от величины  $c_y$ :

$$Q_a = B c_y^2 S \frac{\rho V^2}{2},$$

если воспользоваться представлением поляры в виде квадратной параболы (см. гл. IV).

Так как значения  $c_y$ , определенное по (8a.6), получается бóльшим его истинного значения, то и величина лобового сопротивления несколько завышается, причем тем больше, чем больше  $c_y$  и угол  $\theta$  наклона траектории к горизонту.

При дозвуковых скоростях полета неточность в определении  $c_y$  приводит к неточному определению индуктивного сопротивления. При не слишком малых скоростях полета индуктивное сопротивление оказывается меньшим, чем та часть лобового сопротивления, которая не зависит от  $c_y$ ; при дозвуковых скоростях полета, таким образом, погрешность от сделанного допущения не должна быть большой.

При околосзвуковых и сверхзвуковых скоростях полета ( $M > M_{кр}$ ), когда в общем балансе лобового сопротивления волновое сопротивление занимает определяющее место, неточность в определении  $c_y$  может привести к заметной погрешности в оценке величины лобового сопротивления.

При сделанном допущении ( $\cos \theta \approx 1$ ) величина лобового сопротивления получается не зависящей от угла  $\theta$  наклона траектории к горизонту. Имея в виду это обстоятельство, а также приняв во внимание, что согласно сделанному предположению  $P \cos(\alpha - \varphi) \approx P$ , из уравнения (1.6) получим

$$P = c_x S \frac{\rho V^2}{2} + G \sin \theta = P_{гор} + G \sin \theta. \quad (9.6)$$

Таким образом, в упрощенном методе тяг потребная тяга для полета под углом  $\theta$  к горизонту равна сумме потребной тяги для горизонтального полета  $P_{гор}$  с теми же  $H$  и  $V$ , что и в полете с  $\theta \neq 0$ , и слагаемого  $G \sin \theta$ .

Тягу, потребную для горизонтального полета:

$$P_{гор} = c_x S \frac{\rho V^2}{2} \quad (10.6)$$

можно представить и в несколько другом виде. С этой целью определим из уравнения (8a.6) величину

$$S \frac{\rho V^2}{2} = \frac{G}{c_y}.$$

и, подставив ее в уравнение (10.6), получим

$$P_{\text{гор}} = \frac{G}{K}, \quad (11.6)$$

где  $K = \frac{c_y}{c_x}$  — аэродинамическое качество самолета.

В силу предположения о возможности при исследовании движения самолета пользоваться уравнениями установившегося движения сила тяги, избыточная по сравнению с силой тяги, необходимой для горизонтального полета, полностью расходуется на подъем самолета. Из уравнения (9.6) найдем синус угла наклона траектории к горизонту:

$$\sin \theta = \frac{P - P_{\text{гор}}}{G} = \frac{\Delta P}{G}. \quad (12.6)$$

Вертикальную составляющую скорости при подъеме найдем по формуле

$$V_y = V \sin \theta = \frac{V \Delta P}{G} = \frac{\Delta N}{G}, \quad (13.6)$$

так как произведение  $V \Delta P$  представляет собой избыточную мощность  $\Delta N$ .

Из выражения (12.6) видно, что при избытке тяги ( $P > P_{\text{гор}}$ ) в установившемся полете самолет будет подниматься, так как угол  $\theta$  получится положительным; при недостатке тяги ( $P < P_{\text{гор}}$ ) самолет в установившемся полете будет снижаться, так как угол  $\theta$  получится отрицательным. При  $P = P_{\text{гор}}$  самолет будет лететь горизонтально; в этом случае  $\theta = 0$ .

При практическом пользовании упрощенным методом тяг вместо сетки потребных тяг, которой мы пользовались выше, удобно построить сетку тяг, потребных для горизонтального полета; при этом число графических построений уменьшается, так как каждой высоте полета будет соответствовать одна кривая тяги, потребной для горизонтального полета. На сетку потребных для горизонтального полета тяг наносят кривые располагаемой тяги  $P = P_p$  для различных высот полета. Диаграмма потребных и располагаемых тяг схематически показана на рис. 7.6.

Последовательность расчета потребной тяги для каждой высоты полета при пользовании упрощенным методом тяг приведена в табл. 1.6.

Максимальные скорости горизонтального полета найдем в точках пересечения кривых потребных и располагаемых тяг. Вертикальная составляющая скорости  $V_y$  определится по формуле (13.6).

Дальнейший расчет производится в той же последовательности, как изложено на стр. 165.

Независимо от того, по какому методу ведется расчет — по упрощенному или по точному методу тяг, — его часто производят для среднего в продолжение полета веса:

$$G_{\text{ср}} = \frac{2G_0 - G_T - G_H}{2}, \quad (14.6)$$

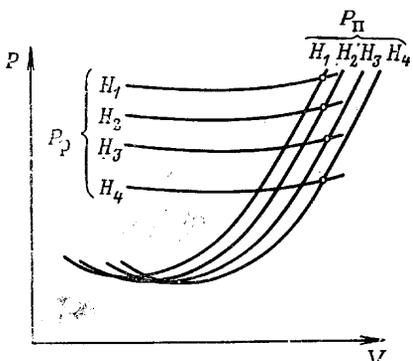


Рис. 7.6. Диаграмма потребных для горизонтального полета и располагаемых тяг (упрощенный метод тяг)

где  $G_0$  — полетный вес самолета при взлете;

$G_T$  — вес топлива;

$G_H$  — вес сбрасываемой нагрузки (если она имеется).

Иногда расчет проводят для нескольких значений веса самолета в интервале между взлетным весом самолета и весом самолета без топлива и без сбрасываемой нагрузки. Как правило, расчет барограммы подъема производят для начального веса  $G_0$ .

Таблица 1.6

( $H = \text{const}$ )

| M                  | M <sub>1</sub> | M <sub>2</sub> | M <sub>3</sub><br>и т. д. | Примечание                                |
|--------------------|----------------|----------------|---------------------------|---|
| $V$ м/сек          |                |                |                           | $V = M a_H$                               |
| $c_y$              |                |                |                           | $c_y = \frac{2G}{S_0 V^2}$                |
| $c_x$              |                |                |                           | По поляре для соответствующих $c_y$ и $M$ |
| $K$                |                |                |                           | $K = \frac{c_y}{c_x}$                     |
| $P_{гор}$ н или кг |                |                |                           | $P_{гор} = \frac{G}{K}$                   |

Вследствие влияния сжимаемости воздуха на поляру самолета (см. гл. IV) в некоторых случаях кривые потребных для горизонтального полета и располагаемых тяг могут иметь несколько точек пересечения, как это показано на рис. 8.6. В таком случае, следовательно, существует

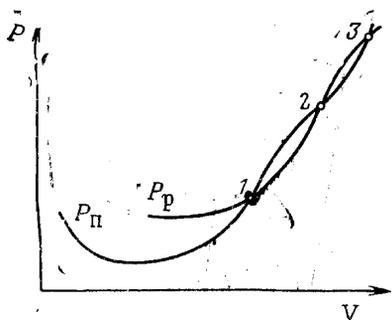


Рис. 8.6. Устойчивый и неустойчивый режимы горизонтального полета

несколько установившихся режимов горизонтального полета. Режим полета, соответствующий точке 1 на рис. 8,6, является *устойчивым* режимом горизонтального полета. Если, например, в силу какой-либо причины скорость полета увеличилась по сравнению со скоростью в точке 1, то возникнет недостаток тяги. Тяга, потребная для горизонтального полета с увеличившейся скоростью, получится больше располагаемой тяги; в результате через некоторое время скорость самолета начнет уменьшаться и самолет вернется в исходное равновесное положение 1. Аналогично при уменьшении

скорости вследствие случайной причины появившийся избыток тяги через некоторое время вернет самолет к его равновесной скорости в точке 1. Путем таких же рассуждений можно убедиться, что режим полета, изображаемый точкой 3 на рис. 8,6, также будет устойчивым режимом горизонтального полета, а режим полета в точке 2 — режимом *неустойчивого* установившегося полета. При случайном отклонении скорости от ее величины в точке 2 самолет не будет возвращаться в исходное равновесное состояние 2: сколько-нибудь длительный режим полета в точке 2 будет затруднителен для летчика.

Во всех предыдущих рассуждениях при расчете подъема самолета не принималось во внимание изменение его кинетической энергии след-

стве изменения скорости по траектории при увеличении высоты полета. Отсюда следует, что полученные выше значения,

$$V_y = \frac{\Delta PV}{G}$$

в действительности не будут представлять собой вертикальные составляющие скорости полета. При более точном подходе к решению задачи величины  $V_y$ , определенные по формуле (13.6), надо рассматривать лишь как меру избыточной мощности по сравнению с мощностью, потребной для горизонтального полета. Расчет вертикальной составляющей скорости  $V_y$  при таком более точном подходе к решению задачи изложен в гл. VIII.

Изложенный в настоящей главе прием расчета  $V_y$  дает близкие к действительности результаты для самолетов, скорости  $V_{\text{наб}}$  которых сравнительно невелики, например, для пассажирских и транспортных. Для самолетов с большими скоростями надо пользоваться более строгими методами расчета, изложенными в гл. VIII.

**Режимы полета на диаграмме потребных и располагаемых тяг.** Рассматривая совместно кривые потребных для горизонтального полета и располагаемых тяг на одной какой-либо высоте полета ( $H = \text{const}$ ), можно определить режимы установившегося полета, которые будут соответствовать различным точкам этой диаграммы.

Скорость, потребная для полета на данной высоте  $H$  при данном значении  $c_y$ , на основании выражения (8а.6)

$$V = \sqrt{\frac{2G}{\rho S c_y}}. \quad (15.6)$$

Как видно из (15.6), потребная скорость  $V$  при заданном значении  $c_y$  в первом приближении [если пренебречь составляющей силы тяги  $P \sin(\alpha - \varphi)$ ] не зависит от тяги двигателя  $P$ .

Необходимым условием установившегося прямолинейного полета является равновесие моментов внешних сил, действующих на самолет. Это условие осуществляют соответствующим отклонением руля высоты<sup>1</sup>. Каждому углу атаки соответствует определенная величина  $\delta_v$  угла отклонения руля высоты<sup>2</sup>.

Поскольку коэффициент подъемной силы  $c_y$  есть функция угла атаки  $\alpha$  и числа<sup>3</sup>  $M = \frac{V}{a_H} = \frac{V}{\text{const}}$ , скорость полета в конечном счете будет зависеть лишь от угла отклонения руля высоты, независимо от того, какую силу тяги при этом будет развивать движитель, установленный на самолете.

Рассмотрим теперь уравнение (9.6). В этом уравнении при данном значении  $c_y$  лобовое сопротивление  $Q = c_x S \frac{\rho V^2}{2}$  для заданной высоты полета имеет совершенно определенную величину, поскольку каждому значению  $c_y$  отвечает определенная величина  $V$ , а следовательно, и  $c_x$ .

Следовательно, для того чтобы осуществить установившийся прямолинейный полет с тем или иным углом  $\theta$  наклона траектории к горизонту, необходимо изменением положения дросселя (сектора газа) обе-

<sup>1</sup> На ряде современных самолетов в качестве руля высоты используют управляемый стабилизатор; поэтому термином «руль высоты» мы обозначаем вообще орган управления положением самолета в вертикальной плоскости симметрии.

<sup>2</sup> При этом предполагается, что момент силы тяги относительно центра масс равен нулю (вектор  $\vec{P}$  проходит через центр масс).

<sup>3</sup> Рассматривается полет на неизменной высоте  $H = \text{const}$ , так что скорость звука  $a_H = \text{const}$ .

спечить потребную для данного установившегося прямолинейного полета силу тяги  $P$ . Скорость полета при этом в первом приближении получается одной и той же независимо от угла  $\theta$ .

Таким образом, в первом приближении при установившемся прямолинейном полете скорость  $V$  на данной высоте  $H$  зависит только от коэффициента подъемной силы  $c_y$ , который в свою очередь зависит от угла отклонения руля высоты  $\delta_B$ .

Угол  $\theta$  наклона траектории прямолинейного установившегося полета к горизонту при данной скорости полета зависит только от силы тяги двигателя  $P$ , которая в свою очередь определяется положением дросселя.

Сделанные выводы справедливы лишь до тех пор, пока справедливо приближенное равенство  $\cos \theta \approx 1$ . Действительно, из выражения (15.6) видно, что при  $c_y = 0$  скорость полета  $V$  получается бесконечно большой; на самом деле и при  $c_y = 0$  скорость полета остается конечной. Этот парадоксальный результат не имел бы места, если бы для определения связи между  $c_y$  и  $V$  мы воспользовались уравнением (8.6): в этом случае при  $c_y = 0$  получился бы  $\cos \theta = 0$ , а скорость полета осталась бы конечной.



Рис. 9.6. Режимы полета на диаграмме потребных и располагаемых тяг (упрощенный метод тяг)

Рассмотрим теперь, какими точками на диаграмме потребных и располагаемых тяг будут изображаться различные режимы прямолинейного установившегося полета. Воспользуемся для этого диаграммой рис. 9.6, построенной по упрощенному методу тяг для одной какой-либо высоты полета  $H$ .

Все точки, лежащие на кривой потребных для горизонтального полета тяг, изображают различные режимы горизонтального установившегося полета. Эти режимы, соответствующие различным углам атаки, можно осуществить, изменяя располагаемую тягу при помощи дросселя так, чтобы она всегда всегда равнялась по величине потребной для горизонтального полета силе тяги. При этом каждому режиму полета будет соответствовать свое положение руля высоты, необходимое для обеспечения нужного угла атаки, соответствующего той или иной скорости установившегося прямолинейного полета  $V$ .

Режиму максимальной скорости горизонтального полета  $V_{\max}$  будет соответствовать точка пересечения кривой потребной тяги с кривой располагаемой тяги, построенной для работы двигателя при полностью открытом дросселе. Если начать дросселировать двигатель, т. е. уменьшать располагаемую тягу, и одновременно увеличивать угол атаки, отклоняя соответствующим образом руль высоты, то получатся также режимы горизонтального полета, но с меньшими скоростями и с большими углами атаки.

В области, расположенной левее вертикальной касательной, проведенной к кривой потребной для горизонтального полета силы тяги, установившийся горизонтальный полет невозможен<sup>1</sup>; горизонтальный установившийся полет невозможен также и в точках, расположенных выше

<sup>1</sup> Эта вертикальная касательная определяет теоретическую минимальную скорость полета, соответствующую  $c_{y \max}$ . Как отмечено выше, действительная минимальная скорость полета, соответствующая допустимому значению  $c_{y \text{ без}}$ , получается большей, чем теоретическая минимальная скорость.

кривой располагаемой тяги. Обе эти области на диаграмме рис. 9.6 не имеют физического смысла.

Между кривой потребной для горизонтального полета тяги, кривой располагаемой тяги и вертикальной касательной к кривой потребной тяги находится область возможных режимов установившегося набора высоты. Для каждой данной скорости полета  $V$  точка, соответствующая наибольшей возможной вертикальной скорости, расположена на кривой располагаемой тяги.

Регулируя при помощи сектора газа положение дросселя, можно получить располагаемую силу тяги, изображаемую любой точкой в указанной области. В таком случае каждой точке этой области будет соответствовать некоторая величина тяги, избыточной по сравнению с потребной для горизонтального полета. Эта избыточная тяга затрачивается на подъем самолета.

Ниже кривой потребной для горизонтального полета тяги находится область возможных установившихся режимов прямолинейного снижения самолета. Если кривая располагаемой тяги проходит через какую-либо точку этой области, то располагаемая тяга будет меньше, чем потребная для горизонтального полета.

Точкам, лежащим между осью абсцисс и кривой потребной тяги, соответствуют режимы установившегося полета со снижением с положительной располагаемой тягой; точкам, лежащим ниже оси абсцисс, — с отрицательной располагаемой тягой. Точки, лежащие на оси абсцисс, соответствуют режимам прямолинейного установившегося снижения с нулевой располагаемой тягой.

Подчеркнем еще раз, что рассматриваемая диаграмма тяг построена для *установившихся* режимов движения. В процессе перехода от одного установившегося прямолинейного режима к другому установившемуся прямолинейному режиму полет самолета будет неустановившимся. В пределе это неустановившееся движение перейдет в установившееся; процесс перехода, естественно, не находит отражения в рассматриваемой диаграмме тяг.

Рассмотрим пример. Пусть самолет летит горизонтально с установившейся скоростью  $V_1$  (рис. 10.6). Это означает, что соответствующим отклонением руля высоты при скорости  $V_1$  обеспечено равенство подъемной силы  $Y$  и веса самолета  $G$ , а соответствующим изменением положения сектора газа располагаемая тяга уменьшена до величины, равной потребной для горизонтального полета тяги при скорости  $V_1$ .

Положим далее, что летчик, не изменяя положения дросселя, увеличил угол атаки  $\alpha$ , отклонив соответствующим образом руль высоты. Каков будет последующий режим установившегося полета самолета?

Поскольку угол атаки  $\alpha$ , а значит, и коэффициент подъемной силы  $c_y$  увеличились, в первый момент после отклонения руля высоты подъемная сила  $Y$  станет больше веса самолета  $G$ . Под действием избыточной силы  $(Y - G)$ , направленной вверх, траектория полета искривится. Так как большему углу атаки  $\alpha$  соответствует и больший коэффициент лобового сопротивления  $c_x$ , т. е. большее лобовое сопротивление  $Q$ , сила тяги двигателя  $P$  будет уже недостаточной для уравнивания силы  $Q$ ; кроме того, появится составляющая силы веса, направленная в сто-

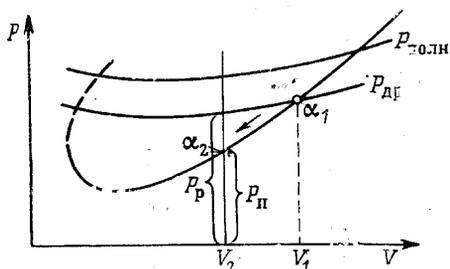


Рис. 10.6. Изменение установившегося режима полета при отклонении руля высоты и при неизменном режиме работы двигателя

рону, обратную скорости полета. В результате скорость полета начнет уменьшаться, стремясь в пределе к некоторой величине  $V_2$ .

Потребная тяга для горизонтального установившегося полета со скоростью  $V_2$  будет меньше, чем для полета со скоростью  $V_1$ ; появится избыточная тяга сверх необходимой для горизонтального полета с уменьшенной скоростью  $V_2$ . Эта избыточная тяга будет затрачиваться на подъем самолета. Новый режим установившегося полета будет режимом набора высоты со скоростью  $V_2$ .

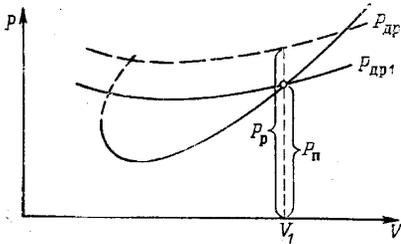


Рис. 11.6. Изменение установившегося режима полета при увеличении силы тяги и при неизменном положении руля высоты

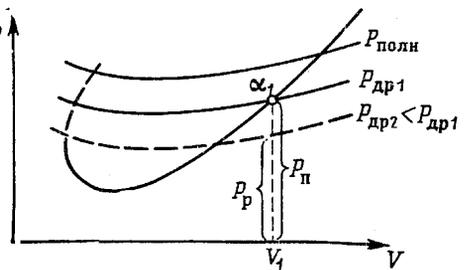


Рис. 12.6. Изменение установившегося режима полета при уменьшении силы тяги и при неизменном положении руля высоты

Пусть теперь летчик в том же исходном режиме полета, не меняя положения руля высоты, увеличил силу тяги двигателей, приоткрыв дроссель при помощи сектора газа (рис. 11.6).

Как и в первом примере, движение самолета после перемещения сектора газа вначале будет неустойчивым; в пределе оно закончится новым режимом установившегося полета. Скорость полета  $V$  в новом установившемся режиме останется прежней, так как, по условию, угол отклонения руля высоты, а следовательно, и значение  $c_y$  остаются неизменными.

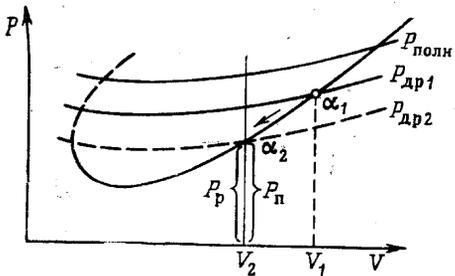


Рис. 13.6. Переход от одного установившегося режима горизонтального полета к другому режиму установившегося горизонтального полета

Благодаря увеличению располагаемой тяги появится избыточная тяга, которая будет затрачиваться на подъем самолета.

В новом установившемся режиме полета самолет будет набирать высоту, имея по траектории скорость  $V_1$  такую же, как в исходном режиме.

Рассмотрим еще один пример. Пусть в том же исходном режиме полета летчик, не изменяя положения руля высоты, уменьшил располагаемую тягу, соответственно изменив положение дросселя (рис. 12.6). В этом случае, как и в предыдущем, скорость полета  $V_1$  останется неизменной, но располагаемая тяга получится уже меньшей, чем потребная для горизонтального установившегося полета.

После переходного неустойчивого движения самолет будет в новом установившемся режиме полета снижаться, имея прежнюю скорость по траектории  $V_1$ .

Если летчик хочет увеличить скорость полета и сохранить траекторию полета горизонтальной, он должен одновременно увеличить силу тяги двигателя и уменьшить угол атаки. Наоборот, чтобы уменьшить

скорость полета и сохранить при этом траекторию полета горизонтальной, необходимо одновременно уменьшить силу тяги и увеличить угол атаки крыльев (рис. 13.6).

## § 2. Метод мощностей. Другие методы аэродинамического расчета

В том случае, когда на самолете установлены винтовые двигатели, характеристики которых даются в виде зависимости мощности от скорости и высоты полета, иногда при расчете летных характеристик самолета пользуются методом мощностей. Этот метод расчета можно применять также и для самолетов с ТРД; в последнем случае следует перейти от располагаемых тяг к располагаемым мощностям при помощи формулы

$$N_p = P_D V.$$

Метод мощностей является видоизменением упрощенного метода тяг. Сопоставляемым параметром в этом методе служит мощность, потребная для горизонтального установившегося полета (потребная мощность), и мощность, развиваемая двигателем, установленным на самолете (располагаемая мощность).

В методе мощностей используются те же допущения, что и в упрощенном методе тяг.

Потребная для горизонтального установившегося полета скорость определяется по формуле (15.6) упрощенного метода тяг.

Мощность, потребная для горизонтального установившегося полета, равна произведению потребной для горизонтального установившегося полета силы тяги на потребную скорость. Так как потребная сила тяги равна лобовому сопротивлению, то получим следующее выражение для потребной мощности:

$$N_{\Pi} = P_{\Pi} V = QV.$$

Принимая во внимание равенство подъемной силы и веса, предыдущее выражение можно переписать в виде

$$N_{\Pi} = \frac{GV}{K}, \quad (16.6)$$

где  $K = c_y/c_x$  — качество самолета.

Подставив в формулу (16.6) выражение потребной скорости по (15.6), получим другое выражение

$$N_{\Pi} = \sqrt{2} \frac{c_x}{c_y^{1.5}} G^{1.5} \rho^{-0.5} S^{-0.5}. \quad (17.6)$$

Из выражения (17.6) видно, что для каждой высоты полета  $H$  наименьшая потребная мощность получается на таком режиме полета, на котором отношение  $c_x/c_y^{1.5}$  будет минимальным. Это отношение называют *коэффициентом мощности*.

В общем случае, когда поляра самолета зависит от числа  $M$ , последовательность расчета потребной мощности для каждой высоты полета может быть такой, как в табл. 2.6.

После выполнения расчета по схеме табл. 2.6 строят диаграмму зависимости потребной мощности  $N_{\Pi}$  от скорости полета для нескольких высот полета  $H$  (рис. 14.6). На эту же диаграмму наносят кривые располагаемой мощности  $N_p$ , рассчитанные для тех же высот полета.

В случае винтовых двигателей располагаемая мощность

$$N_p = iN_{\eta},$$

где  $i$  — число двигателей;  
 $N$  — мощность на валу двигателя,  
 $\eta$  — к. п. д. винта.

В случае турбореактивных двигателей располагаемая мощность

$$N_p = iP V.$$

Таблица 2.6

( $H = \text{const}$ )

| $M$                              | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$<br>и т. д. | Примечание                                |
|----------------------------------|-------|-------|------------------|---|
| $V$ м/сек                        |       |       |                  | $V = M a_H$                               |
| $c_y$                            |       |       |                  | $c_y = \frac{2G}{\rho S V^2}$             |
| $c_x$                            |       |       |                  | По поляре для соответствующих $c_y$ и $M$ |
| $K$                              |       |       |                  | $K = c_y / c_x$                           |
| $N_{II}$ н.м/сек<br>или кг.м/сек |       |       |                  | $N_{II} = \frac{GV}{K}$                   |

Максимальная скорость горизонтального полета для каждой высоты полета  $H$  определится в точке пересечения кривых располагаемой и потребной мощностей для этой высоты полета.

Вертикальная составляющая скорости  $V_y$  по методу мощностей определяется по формуле

$$V_y = \frac{\Delta N}{G}, \quad (18.6)$$

где  $\Delta N$  — избыточная мощность, определяемая по диаграмме рис. 14.6 как разность между располагаемой и потребной мощностями при одинаковых скоростях полета.

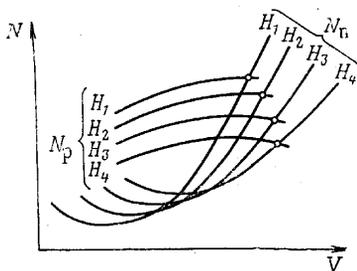


Рис. 14.6. Диаграмма мощностей для разных высот полета

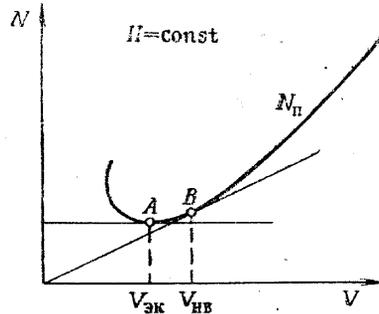


Рис. 15.6. Наивыгоднейший и экономический режимы полета на диаграмме мощностей

Дальнейший расчет ничем не отличается от расчета по методу тяг. Отметим два характерных установившихся режима для самолетов с винтовыми двигателями, которые можно найти по диаграмме мощностей (рис. 15.6).

Проведем горизонтальную касательную к кривой потребной мощности (точка A). Очевидно, мощность, потребная для полета в режиме

А, будет минимальной. Скорость и угол атаки, соответствующие этому режиму, называют *экономической скоростью*  $V_{ЭК}$  и *экономическим углом атаки*  $\alpha_{ЭК}$ .

Экономический режим полета соответствует приблизительно режиму наибольшей продолжительности полета самолета, если принять, что к. п. д. винтов и удельный расход топлива двигателя не зависят от скорости полета.

Как видно из уравнения (17.6), экономический режим достигается при минимальном значении коэффициента мощности  $c_x/c_y^{1.5}$ .

Проведем теперь из начала координат на рис. 15.6 касательную к кривой потребной мощности (точка В). Режиму полета, изображаемому точкой В, соответствует наименьшая потребная сила тяги, так как тангенс угла наклона касательной к кривой потребных мощностей

$$\frac{N_{п}}{V} = \frac{P_{п}V}{V} = P_{п}$$

будет наименьшим.

Скорость и угол атаки, соответствующие этому режиму полета, называют *наивыгоднейшей скоростью*  $V_{НВ}$  и *наивыгоднейшим углом атаки*  $\alpha_{НВ}$ .

Наивыгоднейший режим полета для самолетов с винтовыми двигателями соответствует приблизительно режиму наибольшей дальности полета, если принять к. п. д. винтов  $\eta$  и удельный расход топлива  $C_e$  не зависящими от скорости полета.

Действительно, расход топлива в час

$$q_{ч} = C_e N.$$

Расход топлива на единицу пройденного пути, очевидно,

$$q_{к} = \frac{q_{ч}}{V} = \frac{C_e N}{V} = C_e P.$$

Наименьшему расходу топлива на единицу пройденного пути при данном запасе топлива будет соответствовать наибольшая дальность полета. Этому условию и отвечает при сделанных допущениях полет на наивыгоднейшем режиме.

Для самолетов с ТРД расход топлива в час

$$q_{ч} = C_e P,$$

а расход топлива на единицу пройденного пути

$$q_{к} = \frac{q_{ч}}{V} = \frac{C_e P}{V} = C_e \frac{G}{KV}.$$

Отсюда видно, что для самолетов с ТРД для заданной высоты полета  $H$  наивыгоднейшим будет режим, которому соответствует минимум величины

$$\frac{1}{KV} = \frac{c_x}{c_y} \sqrt{\frac{\rho S c_y}{2G}} = \text{const} \frac{c_x}{\sqrt{c_y}}.$$

На диаграмме рис. 15.6 этот режим можно найти в точке касания кривой, уравнение<sup>1</sup> которой

$$N = cV^2,$$

и кривой потребной мощности.

<sup>1</sup> Так как  $N = c_x \frac{\rho S V^2}{2} V$ ;

$$V^2 = \frac{2G}{\rho S} \frac{1}{c_y} \text{ и } N = \sqrt{G \frac{S \rho}{2} \frac{c_x V^2}{\sqrt{c_y}}} = cV^2.$$

Для самолетов с ТРД экономическим будет (в предположении  $C_e = \text{const}$ ) режим полета с минимальной тягой; определение этого режима на диаграмме рис. 15.6 дано выше.

Таким образом, для самолетов с ТРД экономический и наивыгоднейший режим получаются при больших скоростях, чем для самолетов с винтовыми двигателями.

**Влияние изменения конструктивных параметров самолета на кривую потребной мощности.** Посмотрим, как изменяется протекание кривой потребной мощности на какой-либо высоте полета при небольшом изменении основных конструктивных параметров — веса и площади крыльев, а также основных аэродинамических параметров — коэффициента  $c_{x0}$  крыльев, коэффициента  $c_x$  прочих несущих частей самолета и коэффициента  $B$ , характеризующего зависимость  $c_x$  от  $c_y$ . При этом будем считать, что поляра представлена параболой (см. гл. IV)

$$c_x = c_{x0} + Bc_y^2.$$

Характер изменения кривой потребной мощности при изменении конструктивных и аэродинамических параметров позволит качественно оценить и характер изменения таких летных характеристик самолета, как максимальная скорость горизонтального полета  $V_{\text{max}}$  и максимальная вертикальная скорость  $V_{y \text{max}}$ .

В соответствии с изложенным выше потребная мощность

$$N_{\text{п}} = c_x S \frac{\rho V^3}{2}.$$

Так как при горизонтальном полете вес самолета приблизительно равен подъемной силе, после подстановки принятого выражения  $c_x$  получим

$$N_{\text{п}} = (c_{x0} + Bc_y^2) S \frac{\rho V^3}{2} = c_{x0} S \frac{\rho V^3}{2} + \frac{2BG^2}{S\rho V}. \quad (19.6)$$

В выражении (19.6) коэффициенты  $c_{x0}$  и  $B$  — функции числа  $M$  или при неизменной высоте полета  $H$  (скорость звука  $a_H = \text{const}$ ) — функции скорости полета  $V$ . Заметим, что  $c_{x0}$  — коэффициент лобового сопротивления *всего самолета* при  $c_y = 0$  можно представить в виде

$$c_{x0} = c_{x0 \text{кр}} + c_{x0 \text{нен}} = c_{x0 \text{кр}} + k_H \frac{(c_x S)_{\text{нен}}}{S}, \quad (20.6)$$

где  $c_{x0 \text{кр}}$  — коэффициент сопротивления крыла при  $c_y = 0$ ;  $(c_x S)_{\text{нен}}$  относится к несущим частям самолета (фюзеляж, gondолы двигателей в случае самолета с несколькими двигателями и другие части самолета, находящиеся в потоке, за исключением крыльев);

$k_H$  — коэффициент, учитывающий интерференцию фюзеляжа и крыльев, фюзеляжа и оперения и т. д.

Найдем изменение кривой потребной мощности при небольшом изменении веса самолета. С этой целью продифференцируем выражение (19.6), считая переменными потребную мощность  $N_{\text{п}}$  и вес самолета  $G$ ; перейдя затем от бесконечно малых к конечным малым приращениям, получим

$$\Delta N_{\text{п}} = 4 \frac{BG}{S\rho V} \Delta G.$$

Разделив обе части этого уравнения на величину  $N$ , определяемую по (19.6), получим относительное изменение потребной мощности в зависимости от относительного изменения веса. Заметим, что первое слагаемое выражения (19.6) можно назвать *пассивной мощностью*  $N_{\text{пас}}$ , а

второе слагаемое — *активной мощностью*  $N_a$ . Пассивная мощность не связана с образованием подъемной силы и с этой точки зрения является вредной; активная мощность связана с образованием подъемной силы и затрачивается на поддержание самолета в воздухе.

Имея в виду эти замечания, получим относительное изменение потребной мощности при относительном изменении веса самолета:

$$\frac{\Delta N_{\text{п}}}{N_{\text{п}}} = \frac{\Delta G}{G} \frac{2}{1 + N_{\text{пас}}/N_a}. \quad (21.6)$$

Выражение (21.6) показывает, что при изменении веса изменение потребной мощности получается различным на различных режимах полета, так как при изменении режима полета (скорости полета  $V$ ) соотношение между пассивной и активной мощностями изменяется. Найдем величину этого соотношения при скорости полета, соответствующей минимальной мощности, — на экономическом режиме. Для этого возьмем производную по  $V$  от выражения (19.6) и, приравняв ее нулю, получим

$$\frac{dN_{\text{п}}}{dV} = 3c_{x0}S \frac{\rho V^2}{2} - \frac{2BG^2}{S\rho V^2} + \frac{1}{a} \left( c_{x0}^M S \frac{\rho V^3}{2} + \frac{2G^2}{S\rho V} B^M \right) = 0$$

или

$$3N_{\text{пас}} - N_a + M \left( \frac{c_{x0}^M}{c_{x0}} N_{\text{п}} + \frac{B^M}{B} N_a \right) = 0.$$

Определяя отсюда отношение  $N_{\text{пас}}/N_a$ , найдем

$$\left( \frac{N_{\text{пас}}}{N_a} \right)_{\text{эк}} = \frac{1 - M \frac{B^M}{B}}{3 + M \frac{c_{x0}^M}{c_{x0}}}. \quad (22.6)$$

В частном случае, если сжимаемость воздуха не влияет на поляру самолета, то

$$c_{x0}^M = B^M = 0$$

и

$$\left( \frac{N_{\text{пас}}}{N_a} \right)_{\text{эк}} = \frac{1}{3}. \quad (23.6)$$

При скоростях больших, чем экономическая скорость  $V_{\text{эк}}$ , пассивная мощность увеличивается, а активная — падает, так что отношение  $N_{\text{пас}}/N_a$  растет.

Путем подобных же рассуждений можно убедиться, что на наимыгоднейшем режиме

$$\left( \frac{N_{\text{пас}}}{N_a} \right)_{\text{нв}} = \frac{1 - 0,5 \frac{B^M}{B}}{1 + 0,5 \frac{c_{x0}^M}{c_{x0}}}. \quad (24.6)$$

При отсутствии влияния сжимаемости воздуха на поляру ( $c_{x0}^M = B^M = 0$ ) на наимыгоднейшем режиме пассивная мощность получается равной активной. При еще больших скоростях полета пассивная мощность становится больше активной.

Возвращаясь к выражению (21.6), замечаем, что при больших скоростях полета, близких к  $V_{\text{max}}$  горизонтального полета, когда отношение

$N_{\text{пас}}/N_a$  велико, изменение потребной мощности при изменении веса получается небольшим (рис. 16.6).

Так, например, если отношение  $N_{\text{пас}}/N_a=3$ , при изменении веса самолета на 1%, как это видно из (21.6), потребная мощность изменяется на 0,5%.

При небольших скоростях полета, близких к экономической, изменение потребной мощности при изменении веса получается значительно большим. Так, если

$$\frac{N_{\text{пас}}}{N_a} = \frac{1}{3}$$

(экономическая скорость), по (21.6) получаем, что при изменении веса на 1% потребная мощность изменяется на 1,5%.

Отсюда следует, что при небольшом изменении веса самолета максимальная скорость горизонтального полета  $V_{\text{max}}$  изменяется несильно, а вертикальная скорость  $V_{y \text{max}}$  сильнее. Особенно заметно изменение

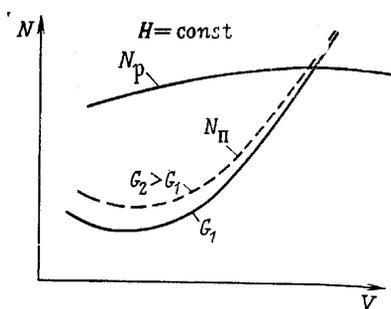


Рис. 16.6. Влияние небольшого изменения веса летательного аппарата на кривую потребной мощности

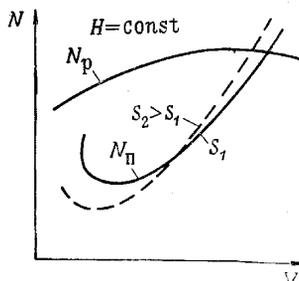


Рис. 17.6. Влияние изменения площади крыльев на кривую потребной мощности

$V_{y \text{max}}$  на тех высотах полета, на которых избыток мощности невелик, т. е. близких к статическому потолку самолета, так что при увеличении веса статический потолок уменьшится, а при уменьшении — увеличится.

Рассмотрим влияние на кривую потребной мощности *изменения площади крыльев S*. Для определенности примем, что лобовое сопротивление крыльев равно лобовому сопротивлению несущих частей самолета, т. е.

$$c_{x0 \text{ кр}} = c_{x0 \text{ нен}} = k_H \frac{(c_x S)_{\text{нен}}}{S}$$

Дифференцируя уравнение (19.6) и, как прежде, переходя к конечным разностям, получим выражение для относительного изменения потребной мощности

$$\frac{\Delta N_{\text{П}}}{N_{\text{П}}} = \frac{\Delta S}{S} \frac{0,5 \frac{N_{\text{пас}}}{N_a} - 1}{1 + N_{\text{пас}}/N_a} \quad (25.6)$$

Как видно из выражения (25.6), например, при увеличении площади крыльев получим уменьшение или увеличение потребной мощности в зависимости от режима полета.

При больших скоростях, близких к максимальной скорости горизонтального полета, т. е. при больших значениях отношения  $N_{\text{пас}}/N_a$ , увеличение площади крыльев приведет к увеличению потребной мощности:

максимальная скорость горизонтального полета при увеличении площади крыльев уменьшится.

Примерный характер кривой  $N_{\text{п}} = N_{\text{п}}(V)$  при увеличении площади крыльев  $S$  приведен на рис. 17.6.

При меньших скоростях полета, близких к невыгоднейшей скорости, отношение  $N_{\text{пас}}/N_a$  становится равным единице, затем меньше единицы. На таких режимах полета, следовательно, увеличение площади крыльев приведет к уменьшению потребной мощности. Это значит, что максимальная вертикальная скорость  $V_{y \text{ max}}$  при увеличении площади крыльев увеличится и тем больше, чем меньше избыточная мощность. Отсюда видно, что при увеличении площади крыльев статический потолок самолета увеличится.

Рассуждая аналогично предыдущему, можно получить выражения для относительного изменения потребной мощности:

$$\frac{\Delta N_{\text{п}}}{N_{\text{п}}} = \frac{\Delta c_{x0 \text{ кр}}}{c_{x0 \text{ кр}}} \frac{0,5 \frac{N_{\text{пас}}}{N_a}}{1 + N_{\text{пас}}/N_a}, \quad (26.6)$$

$$\frac{\Delta N_{\text{п}}}{N_{\text{п}}} = \frac{\Delta (c_x S)_{\text{нен}}}{(c_x S)_{\text{нен}}} \frac{0,5 \frac{N_{\text{пас}}}{N_a}}{1 + N_{\text{пас}}/N_a}, \quad (27.6)$$

$$\frac{\Delta N_{\text{п}}}{N_{\text{п}}} = \frac{\Delta B}{B} \frac{1}{1 + N_{\text{пас}}/N_a}. \quad (28.6)$$

Из этих выражений видно, что уменьшение коэффициента  $c_{x0 \text{ кр}}$  приводит к уменьшению потребной мощности, тем больше, чем больше скорость полета; это же относится и к уменьшению коэффициента лобового сопротивления несущих частей самолета (рис. 18.6).

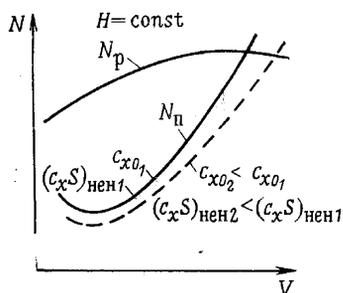


Рис. 18.6. Влияние изменения  $c_{x0 \text{ кр}}$  и коэффициента сопротивления несущих частей

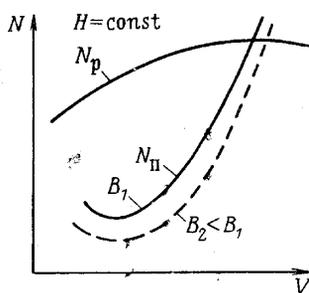


Рис. 19.6. Влияние изменения коэффициента  $B$  на кривую потребной мощности

$$\frac{(c_x S)_{\text{нен}}}{S}$$

при  $c_y = 0$  на кривую потребной мощности

С уменьшением коэффициента  $B$  потребная мощность уменьшается тем сильнее, чем меньше скорость полета (рис. 19.6). Поэтому, например, для увеличения максимальной скорости горизонтального полета снижение коэффициента  $c_{x0}$  будет более эффективным, чем коэффициента  $B$ . Для повышения статического потолка самолета более эффективным средством является уменьшение коэффициента  $B$  и т. д.

**Метод аэродинамического расчета по коэффициентам  $c_x$ .** Вместо сравнения величин потребной и располагаемой тяг можно сравнить значения коэффициентов потребной и располагаемой тяг.

Очевидно, что коэффициент потребной для горизонтального полета тяги равен коэффициенту лобового сопротивления:

$$c_{xп} = \frac{2P_{гор}}{S\rho V^2} = \frac{2Q}{S\rho V^2} = c_x. \quad (29.6)$$

Коэффициент располагаемой тяги

$$c_{xр} = \frac{2P_p}{S\rho V^2}. \quad (30.6)$$

Для каждой высоты полета можно построить график зависимости коэффициентов потребной и располагаемой тяг от скорости полета  $V$ ; практически удобнее построить зависимости  $c_{xп}$  и  $c_{xр}$  не от скорости полета, а от числа  $M$  (рис. 20.6). Максимальной скорости горизонтального полета будет соответствовать точка пересечения кривых  $c_{xп}(M)$  и  $c_{xр}(M)$ .

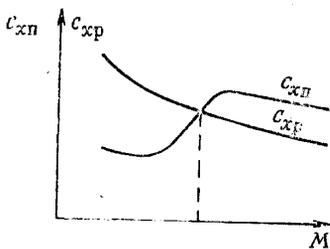


Рис. 20.6. Диаграмма для аэродинамического расчета с использованием коэффициентов  $c_{xп}$  и  $c_{xр}$

Недостатком этого метода является необходимость перехода от коэффициентов  $c_{xп}$  и  $c_{xр}$  к располагаемой и потребной тягам при расчете подъема самолета; это требует дополнительной вычислительной работы.

**Метод оборотов.** Мы рассмотрели методы расчета установившихся режимов полета, в основу которых положено сравнение силы тяги или мощности, потребной для прямолинейного установившегося полета, с располагаемой тягой или мощностью. Помимо

рассмотренных методов аэродинамического расчета, для самолетов с турбореактивными и винтовыми двигателями иногда применяется метод оборотов. Такой метод расчета был впервые предложен в 1931 г. В. С. Пышновым и С. Г. Козловым применительно к самолетам с винтовыми двигателями.

За параметр, который кладется в основу расчета по методу оборотов, берется число оборотов двигателя, т. е. сравнивается число оборотов, потребное для горизонтального полета, с числом оборотов, которое при заданных условиях способен развивать двигатель.

Преимуществом метода оборотов является то, что в этом методе сравниваются величины, которые можно непосредственно наблюдать во время полета по установленным на летательном аппарате приборам. С помощью метода оборотов, в частности, легко решается задача по определению влияния отклонения параметров атмосферы от стандартных на основные летные характеристики самолета с ТРД. Остановимся на этой задаче. Сила тяги ТРД может быть определена по формуле (см. стр. 138)

$$P = m_c(V_a - V) + (p_a - p_H)S_a \approx m_c(V_a - V). \quad (31.6)$$

Последнее выражение получается, если пренебречь небольшой разностью  $(p_a - p_H)$  между давлением на срезе сопла  $p_a$  и атмосферным давлением  $p_H$ .

Анализируя это выражение, можно выяснить, как изменяется сила тяги ТРД при изменении температуры и давления окружающего воздуха; такой анализ проведем в предположении, что выходное сопло двигателя не изменяет своих размеров.

При неизменном положении сопла и при одинаковом количестве топлива, подаваемом в камеру сгорания двигателя, сила тяги  $P$  определяется давлением и температурой газа за турбиной. Эти величины в свою очередь зависят от степени сжатия воздуха компрессором двигателя, а также от газодинамического сжатия при торможении воздуха во входном канале двигателя.

Если для простоты принять давление воздуха перед компрессором равным давлению адиабатически заторможенного воздуха

$$p_T = p_H \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = p_H (1 + 0,2 M^2)^{3,5},$$

то сила тяги определится давлением окружающего воздуха  $p_H$ , числом  $M$  полета и величиной аэродинамических сил, действующих на лопатки компрессора и вызывающих сжатие воздуха за компрессором.

Величина аэродинамической силы, действующей на элемент лопатки компрессора:

$$dR = c_R 0,7 p_T dS M_{\kappa}^2,$$

где  $c_R$  — коэффициент аэродинамической силы, зависящий от числа  $M_{\kappa}$  потока, набегающего на лопатки компрессора, и от местного угла атаки лопатки компрессора;

$p_T$  — давление воздуха перед компрессором, которое, как было сказано, в первом приближении можно принять равным давлению адиабатически заторможенного воздуха.

Скорость звука в потоке, набегающем на компрессор:

$$a_T = 20,1 \sqrt{T_T},$$

где температура воздуха  $T_T$  приближенно может быть принята равной температуре адиабатически заторможенного воздуха:

$$T_T = T_H \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) = T_H (1 + 0,2 M^2).$$

При фиксированном угле установки  $\varphi$  лопаток компрессора угол атаки элемента лопатки (рис. 21.6)

$$\alpha = \varphi - \operatorname{arctg} \frac{V_{\kappa}}{U} = \varphi - \operatorname{arctg} \frac{M_V}{M_U},$$

где  $M_V = \frac{V_{\kappa}}{a_T}$ ;

$V_{\kappa}$  — поступательная скорость потока, набегающего на компрессор, пропорциональная скорости полета  $V$ ;

$$M_U = \frac{U}{a_T};$$

$U$  — окружная скорость элемента лопатки компрессора.

Таким образом, при одинаковом значении отношения  $M_V/M_U$  в двух различных случаях, соответствующих различным  $p_H$  и  $T_H$ , угол атаки элемента лопатки компрессора получается одинаковым.

Далее, число  $M_{\kappa}$  потока, набегающего на компрессор, можно представить в виде

$$M_{\kappa} = \sqrt{M_V^2 + M_U^2}.$$

Из приведенных выражений видно, что если в двух случаях, соответствующих различным  $p_H$  и  $T_H$ , обеспечить одинаковые значения чи-

сел  $M_V$  и  $M_U$ , подсчитанных по скорости полета и по окружной скорости элемента лопатки компрессора, то отношение

$$\frac{dR}{v_T} = 0,7c_R(M_V^2 + M_U^2) dS$$

получится также одинаковым. При этом будет одинаковым и отношение силы тяги ТРД  $P$  к давлению окружающего воздуха  $p_H$ .

Число Маха, подсчитанное по окружной скорости, удобно представить через число оборотов компрессора:

$$M_U = \frac{U}{a_T} = \frac{2\pi r n}{20,1 \sqrt{T_T}} = \text{const} \frac{n}{\sqrt{T_T}}. \quad (32.6)$$

Величину  $\frac{n}{\sqrt{T_T}}$  называют *приведенным числом оборотов* и обозначают через  $n_{пр}$ . Из сказанного следует, что отношение  $P/p_H$  является функцией только числа  $M$  полета и числа оборотов  $n_{пр}$ .

При неизменном числе оборотов двигателя и при повышении температуры окружающего воздуха  $n_{пр}$  уменьшается. Вместе с этим уменьшаются и силы  $dR$ , действующие на лопатки компрессора, а следовательно, при неизменном давлении наружного воздуха уменьшается и сила тяги ТРД.

Это означает, что при одном и том же давлении наружного воздуха и неизменном числе оборотов  $n$  один и тот же ТРД в зимних условиях (малая  $T_H$ ) будет развивать силу тяги большую, чем в летних условиях (большая  $T_H$ ).

Как будет видно из дальнейшего (см. гл. XI), длина разбега самолета при взлете в сильной степени зависит от силы тяги двигателя, уменьшаясь при увеличении силы тяги. Отсюда ясно, что длина разбега самолета с ТРД в зимних условиях получится меньшей, чем летом при высоких температурах окружающего воздуха.

Очевидно, что изменение силы тяги ТРД при изменении температуры окружающего воздуха повлияет на максимальную скорость горизонтального полета. Для выяснения этого вопроса обратимся к рассмотрению влияния температуры и давления окружающего воздуха на величину потребной тяги.

Потребная для горизонтального установившегося полета сила тяги при пользовании упрощенным методом тяг (см. стр. 168)

$$P_{гор} = c_x S \frac{\rho V^2}{2} = c_x \cdot 0,7S p_H M^2. \quad (33.6)$$

Отсюда видно, что отношение  $P_{гор}/p_H$  зависит от числа  $M$  полета и коэффициента лобового сопротивления  $c_x$ . Но  $c_x$  зависит также от числа  $M$  полета и, кроме того, от коэффициента подъемной силы  $c_y$ .

Из условия равенства подъемной силы и веса при горизонтальном полете для коэффициента  $c_y$  получаем

$$c_y = \frac{G}{p_H} \frac{1}{0,7S M^2}.$$

Таким образом, при заданном  $G/p_H$  величина  $c_y$  зависит только от числа  $M$ . Отношение  $G/p_H$  называют *приведенным весом*.

Следовательно, при заданном полетном весе самолета  $G$  и при неизменном давлении окружающего воздуха  $p_H$  коэффициент  $c_x$ , являю-

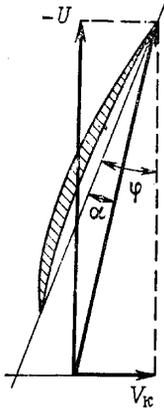


Рис. 21.6. Треугольник скоростей при обтекании лопатки компрессора

щийся функцией  $c_y$  и  $M$ , и соответственно *потребная* для горизонтального полета тяга будут зависеть лишь от числа  $M$ , т. е.

$$P_{\text{гор}} = P(M). \quad (34.6)$$

Ранее было показано, что при заданном давлении окружающего воздуха  $p_H$  *располагаемая* сила тяги двигателя есть функция числа  $M$  и приведенного числа оборотов  $n_{\text{пр}}$ . Приведенное число оборотов зависит в свою очередь только от числа  $M$  и температуры окружающего воздуха  $T_H$ . Поэтому располагаемая тяга при этих условиях есть функция числа  $M$  и температуры окружающего воздуха  $T_H$ .

*Приведенная сила тяги*  $P_{\text{пр}}$  связана с фактической<sup>1</sup> располагаемой тягой  $P_{\text{р. ф}}$  при неизменном числе  $M$  соотношением

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{р. ф}} \frac{p_0}{p_H}. \quad (35.6)$$

При заданных  $p_H$  и  $T_H$  и  $n = \text{const}$  фактическая располагаемая тяга есть функция только  $M$  и  $T_H$ :

$$P_{\text{р. ф}} = P(M, T_H). \quad (35a.6)$$

Очевидно, что число  $M$  и соответствующая ему максимальная скорость горизонтального полета  $V_{\text{max}}$  найдутся в результате совместного решения (34.6) и (35a.6). Результат решения при неизменном  $p_H$  целиком определится температурой окружающего воздуха  $T_H$ , т. е.

$$M_{V_{\text{max}}} = M(T_H),$$

а максимальная скорость горизонтального установившегося полета

$$V_{\text{max}} = M_{V_{\text{max}}} a_H, \quad (36.6)$$

где скорость звука

$$a_H = 20,1 \sqrt{T_H}.$$

Следовательно, максимальная скорость горизонтального установившегося полета при неизменном давлении окружающего воздуха  $p_H$  и при различной температуре  $T_H$  будет различной.

Как показано выше, при увеличении температуры наружного воздуха  $T_H$  располагаемая тяга уменьшается, уменьшается и число  $M_{V_{\text{max}}}$ , соответствующее максимальной скорости горизонтального полета (рис. 22.6). В то же время скорость звука увеличивается при увеличении температуры наружного воздуха  $T_H$ . Таким образом, заранее нельзя сказать, в какую сторону и на какую величину изменится  $V_{\text{max}}$  при изменении температуры наружного воздуха, так как согласно (36.6)  $V_{\text{max}}$  — произведение двух множителей, один из которых растет, а другой падает при увеличении температуры  $T_H$ .

Если число  $M$ , соответствующее горизонтальному полету, при увеличении температуры наружного воздуха изменяется несильно, то увеличение  $a_H$  может перекрыть уменьшение

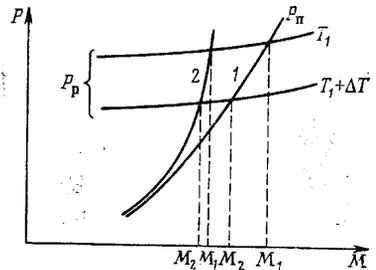


Рис. 22.6. К определению числа  $M$ , соответствующего полету с  $V_{\text{max}}$  при различных температурах наружного воздуха

<sup>1</sup> При фактических давлении  $p_H$  и температуре  $T_H$  наружного воздуха, отличающейся от стандартной при этом давлении.

$M_{V_{\max}}$  и в результате  $V_{\max}$  летом получится больше, чем зимой. Этот случай может иметь место при резком увеличении потребной силы тяги с увеличением числа  $M$ , т. е. при большом волновом сопротивлении, следовательно, при неудовлетворительных аэродинамических характеристиках летательного аппарата (кривая 2 на рис. 22.6).

Если при повышении температуры наружного воздуха значительно уменьшается  $M_{V_{\max}}$ , переключая увеличение скорости звука при повышении температуры, то  $V_{\max}$  получится меньше, чем зимой. Этот случай соответствует пологой кривой потребной мощности  $P_{\text{н}}=P(M)$ , т. е. небольшому волновому сопротивлению и хорошим аэродинамическим характеристикам самолета (кривая 1 на рис. 22.6).

Практически последовательность расчета по определению горизонтального полета в нестандартных условиях получается следующей.

1. Для данной барометрической высоты, взятой по таблицам международной стандартной атмосферы (ГОСТ 4401—64), на которой давление равно заданному давлению окружающего воздуха, на основании произведенного ранее аэродинамического расчета (например по упрощенному методу тяг) строят график зависимости потребной тяги от числа  $M$  полета.

2. На этот же график наносят кривую располагаемой тяги, метод расчета которой рассмотрен ниже.

3. По точке пересечения этих двух кривых определяют фактическое число  $M_{\text{ф}}$  и, найдя соответствующее значение скорости звука  $a_{\text{ф}}$ , вычисляют максимальную скорость установившегося горизонтального полета  $V_{\max \text{ ф}}$  на данной барометрической высоте  $H$  и при фактической температуре окружающего воздуха  $T_{\text{ф}}$ .

Остановимся кратко на построении кривой фактической (располагаемой) тяги. В случае двигателя с нерегулируемым соплом и при полетах на высотах  $H$ , меньших 11 км, для ее определения можно воспользоваться формулой

$$P_{\text{р.ф}} = P_{\text{р.ст}} \left( \frac{T_{\text{ст}}}{T_{\text{ф}}} \right)^{1,55}, \quad (37.6)$$

где  $P_{\text{р.ст}}$  — располагаемая тяга при определенном числе  $M$  полета, взятая по условиям стандартной атмосферы для данной барометрической высоты<sup>1</sup>.

Когда температура наружного воздуха  $T_{\text{н}}$  при изменении давления  $P_{\text{н}}$  меняется по закону стандартной атмосферы, эта располагаемая тяга для ТРД при фиксированном значении числа  $M$  может быть представлена в виде

$$P_{\text{р.ст}} = P_{\text{р0}} \Delta^k,$$

где  $P_{\text{р0}}$  — располагаемая тяга на уровне моря,  $\Delta = \frac{P_0}{P_H}$  и  $k$  — постоянная, зависящая от типа двигателя; для ряда двигателей с нерегулируемым соплом можно принять, например,  $k \approx 0,87$ .

Через  $T_{\text{ст}}$  и  $T_{\text{ф}}$  в формуле (37.6) обозначены соответственно температура в условиях стандартной атмосферы и фактическая, т. е.

$$T_{\text{ф}} = T_{\text{ст}} \pm \Delta T.$$

Предположим, что температура наружного воздуха  $T_{\text{ф}}$  отличается от стандартной на  $+10^\circ$ , т. е.

$$T_{\text{ф}} = T_{\text{ст}} + 10^\circ.$$

<sup>1</sup> Более подробно по этому вопросу см. [43].

Примем также, что барометрическая высота полета самолета, истинную максимальную скорость горизонтального полета которого мы собираемся определить, равна 6000 м. Тогда

$$T_{\phi} = T_{\text{ст}} + 10 \approx 249,13 + 10 = 259,13^{\circ} \text{ К.}$$

Согласно таблице стандартной атмосферы фактической температуре  $T_{\phi} = 259,13^{\circ} \text{ К}$  соответствует высота уже не 6000 м, а  $H'_{\text{ст}} = 4460 \text{ м}$ . Отношение давления на этой высоте к давлению на уровне моря

$$\frac{P_{H'_{\text{ст}}}}{P_0} = 0,5729;$$

отношение давления на высоте  $H_{\text{ст}} = 6000 \text{ м}$  к давлению на уровне моря

$$\frac{P_{H_{\text{ст}}}}{P_0} = 0,4659.$$

Интерполируя по графику зависимости  $P_p = P_p(H, M)$  для стандартной атмосферы, найдем располагаемую тягу на высоте  $H'_{\text{ст}} = 4460 \text{ м}$  в зависимости от скорости полета  $V = M a_H$ . Далее перестроим кривую

$$P_{p,\phi} = \frac{P_{H_{\text{ст}}}}{P_{H'_{\text{ст}}}} P_p$$

в функции числа  $M$  полета, определяя  $M$  по формуле

$$M = \frac{V}{a_{\phi}}.$$

После этого нанесем кривую  $P_{p,\phi} = P(M)$  на график рис. 23.6. В точке пересечения кривых  $P_n = P(M)$  и  $P_{p,\phi} = P(M)$  (кривая 1) определяем величину  $M_{\phi}$  и находим, наконец, максимальную скорость горизонтального установившегося полета на барометрической высоте  $H_{\text{ст}} = 6000 \text{ м}$  при фактической температуре наружного воздуха  $T_{\phi} = 259,13^{\circ} \text{ К}$ .

Как видно из приведенного графика, в данном случае  $V_{\text{max}}$  получилась меньшая по сравнению с  $V_{\text{max}}$ , рассчитанной при стандартной температуре  $249,13^{\circ} \text{ К}$ .

На рис. 23.6 для сравнения приведена также кривая 2, отвечающая случаю, когда фактическая температура наружного воздуха отличается от стандартной на  $-10^{\circ}$ . Как видно, в этом случае отклонение температуры от стандартной привело к увеличению максимальной скорости установившегося горизонтального полета по сравнению с условиями, отвечающими стандартной температуре  $249,13^{\circ} \text{ К}$ .

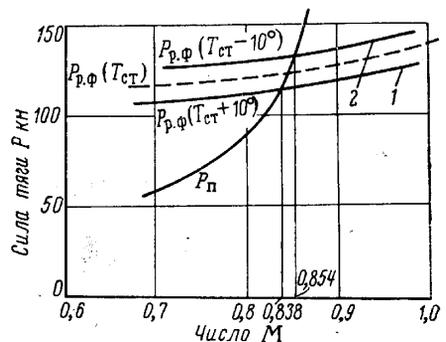


Рис. 23.6. Зависимость располагаемой тяги от числа  $M$  в стандартных условиях на высоте  $H = 6000 \text{ м}$  (пример)

### § 3. Планирование летательного аппарата в однородной среде

Для всех летательных аппаратов, возвращающихся на Землю и осуществляющих приземление, важным участком траектории полета является спуск, или, как его обычно называют, *снижение*.

Снижение летательного аппарата можно рассматривать не только как участок траектории полета, предшествующий посадке, но и как маневр, предназначенный для перемещения летательного аппарата с большей высоты на меньшую.

Снижение летательного аппарата, как и его подъем, строго говоря, являются неустановившимся движением. По мере уменьшения высоты полета  $H$  плотность  $\rho$  растет и, следовательно, при неизменном  $c_y$  скорость полета  $V$  изменяется. В зависимости от закона изменения  $c_y$  траектория полета при снижении летательного аппарата может быть как криволинейной, так и прямолинейной.

Снижение летательного аппарата по прямолинейной траектории с выключенным или работающим на малых оборотах двигателем называют *планированием*.

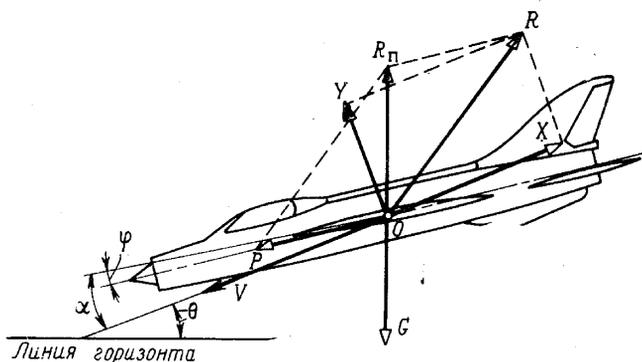


Рис. 24.6. Силы, действующие на самолет при планировании

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением режимов установившегося планирования для крылатых летательных аппаратов, летающих на относительно небольших высотах и со скоростями, соответствующими докритическим числам  $M$ .

Кривизной земной поверхности при рассмотрении движения планирующего крылатого летательного аппарата будем пренебрегать, а ускорение  $g$  силы тяжести считать постоянным. Задача о спуске летательного аппарата с учетом кривизны земной поверхности, представляющая практический интерес для таких летательных аппаратов, как, например, ракетоплан, рассмотрена в гл. XIII.

Если рассматривать планирование крылатого летательного аппарата в небольшом интервале высот полета, то в первом приближении можно не учитывать изменения плотности среды, в которой движется летательный аппарат, т. е. полагать, что полет происходит в *однородной среде*. Тогда планирование летательного аппарата можно рассматривать как установившееся движение: при данном угле атаки  $\alpha$ , т. е. при данном  $c_y$ , скорость полета  $V$  будет постоянной на всех высотах.

В случае установившегося планирования на крылатый летательный аппарат (самолет) будут действовать следующие внешние силы: равнодействующая аэродинамических сил  $R$ , сила тяжести  $G$  и сила тяги  $P$  двигателя, установленного на летательном аппарате. При установившемся планировании все эти силы должны находиться в равновесии (рис. 24.6).

Разложим равнодействующую аэродинамических сил  $R$  на ее составляющие — подъемную силу  $Y$  и силу лобового сопротивления  $X=Q$  и составим уравнения равновесия сил в проекциях на оси скоростной

системы координат. Тогда уравнения движения при установившемся планировании в общем случае, т. е. при ненулевой тяге, будут иметь вид

$$P \cos(\alpha - \varphi) - Q = G \sin \theta, \quad (38.6)$$

$$P \sin(\alpha - \varphi) + Y = G \cos \theta. \quad (39.6)$$

Для небольших углов  $(\alpha - \varphi)$  эти уравнения принимают вид

$$P - Q \approx G \sin \theta, \quad (40.6)$$

$$Y \approx G \cos \theta. \quad (41.6)$$

Из уравнения (40.6) получим

$$\sin \theta = \frac{P - Q}{G},$$

так что

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{P - Q}{G}\right)^2}. \quad (42.6)$$

Подставим последнее выражение в уравнение (41.6) и возведем обе части полученного равенства в квадрат, заменив  $Q$  и  $Y$  их выражениями

$$Q = c_x S q, \quad Y = c_y S q.$$

Тогда получим следующее квадратное уравнение относительно скоростного напора  $q = \rho V^2 / 2$ :

$$q^2 - \frac{2Pc_x}{S(c_y^2 + c_x^2)} q - \frac{G^2 - P^2}{S^2(c_y^2 + c_x^2)} = 0. \quad (43.6)$$

Решая уравнение (43.6), нетрудно определить величину  $q$ , а следовательно, и скорость планирования  $V_{пл}$ :

$$V_{пл} = \sqrt{\frac{2G}{S\rho \sqrt{c_y^2 + c_x^2}}} \sqrt{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{G}\right)^2 \frac{c_y^2}{c_y^2 + c_x^2}} + \frac{P}{G} \frac{c_x}{\sqrt{c_y^2 + c_x^2}}}. \quad (44.6)$$

Но поскольку

$$\sqrt{c_y^2 + c_x^2} = c_y \frac{\sqrt{1 + K^2}}{K},$$

где качество

$$K = \frac{c_y}{c_x},$$

выражение (44.6) можно записать в виде

$$V_{пл} = \sqrt{\frac{2G}{S\rho c_y}} \sqrt{\frac{K}{1 + K^2} (\sqrt{1 + K^2 - \bar{P}^2 K^2} + \bar{P})}, \quad (45.6)$$

где

$$\bar{P} = \frac{P}{G}.$$

В частном случае, когда самолет планирует с выключенным двигателем ( $P=0$ ), формула (45.6) для определения скорости планирования принимает вид

$$V_{\text{пл}} = \sqrt{\frac{2G}{\rho S c_y}} \sqrt{\frac{K}{V \sqrt{1+K^2}}} = \sqrt{\frac{2G}{S \rho}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{c_y^2 + c_x^2}}}. \quad (46.6)$$

Эту формулу можно также получить из условия равновесия сил, т. е. очевидного условия

$$R = c_R S \frac{\rho V_{\text{пл}}^2}{2} = G, \quad (47.6)$$

где коэффициент полной аэродинамической силы

$$c_R = \sqrt{c_y^2 + c_x^2}.$$

В рассматриваемом частном случае, т. е. при  $P=0$ , для определения тангенса угла планирования будет справедлива формула, вытекающая из (40.6) и (41.6):

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{Q}{Y} = -\frac{c_x}{c_y} = -\frac{1}{K}, \quad (48.6)$$

из которой следует, что крутизна траектории при установившемся планировании с выключенным двигателем целиком определяется аэродинамическим качеством крылатого летательного аппарата. Очевидно, чем меньше качество  $K$ , тем круче в данном случае траектория полета при планировании.

Можно также определить расстояние, проходимое по горизонтали самолетом при его планировании с некоторой высоты  $H$ :

$$L_{\text{пл}} = -\frac{H}{\operatorname{tg} \theta} = KH. \quad (49.6)$$

Таким образом, наиболее пологое планирование, обеспечивающее максимальное расстояние  $L_{\text{пл}}$ , можно получить, осуществляя полет на режиме максимального качества, т. е. при  $K=K_{\text{max}}$ . В этом случае тангенс угла планирования будет минимальным, а угол атаки, как уже отмечалось ранее, соответствующий режиму максимального качества, — наивыгоднейшим.

Следовательно, в зависимости от требований, предъявляемых к самолету, можно осуществить тот или иной режим планирования. Если, например, требуется обеспечить наибольшую дальность планирования самолета с заданной высоты [полет самолета на максимальную дальность (гл. VII)], то планировать надо на режиме максимального качества. Наоборот, если желательно осуществить наиболее крутое планирование (случай ограниченных размеров посадочной площадки), то надо лететь на режиме, при котором качество невелико. В последнем случае для обеспечения наибольшей крутизны траектории снижения самолетов применяют также специальные средства — устанавливают реверс тяги (полет на режиме отрицательной тяги). О применении всех этих специальных средств более подробно сказано при рассмотрении посадки самолета (гл. XI).

Планирование летательных аппаратов по сильно наклоненной к горизонту траектории называют *пикированием*. Пикирование летательных аппаратов, в частности самолетов, является распространенным тактиче-

ским маневром, позволяющим быстро потерять высоту и разогнать летательный аппарат до больших скоростей за сравнительно небольшой отрезок времени. Этот вопрос рассмотрен в гл. VIII.

## ГЛАВА VII

### КВАЗИУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА. РАСЧЕТ ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА САМОЛЕТА

#### § 1. Основные определения. Километровый и часовой расход топлива

Дальность и продолжительность полета являются важнейшими характеристиками самолета, в значительной мере определяющими его назначение.

*Дальностью полета* называется расстояние, измеренное по земной поверхности, которое самолет способен пролететь в данном направлении при израсходовании определенного запаса топлива.

*Продолжительностью полета* самолета называют время, затраченное на полет при израсходовании определенного запаса топлива.

Для летательных аппаратов, скорость полета которых невелика по сравнению с круговой скоростью (для самолетов), при расчете дальности и продолжительности полета с вполне достаточной для практики точностью можно пользоваться уравнениями установившегося полета в каждый данный момент времени. Другими словами, движение самолета при расчете дальности и продолжительности полета можно считать *квазиустановившимся*. Кривизну земной поверхности можно также во внимание не принимать.

При установившемся движении самолета запас полной энергии

$$E = GH + \frac{mV^2}{2}$$

должен оставаться неизменным. Возможность использования уравнений установившегося движения при расчете дальности и продолжительности полета можно оценить, определив величину изменения полной энергии самолета  $E$  по сравнению с работой силы тяги во время полета. Чем меньше изменение полной энергии по сравнению с работой силы тяги, тем ближе к действительности представление о движении самолета как о квазиустановившемся.

Пусть, например, начальный полетный вес гипотетического самолета  $G_0 = 1962 \text{ кн} = 200 \text{ т}$ , вес расходуемого за время полета топлива  $G_T = 981 \text{ кн} = 100 \text{ т}$ . Пусть при этом дальность полета  $L = 10\,000 \text{ км}$ , а средняя сила тяги  $P = 98,1 \text{ кн} = 10 \text{ т}$ . Скорость и высоту в начале полета примем  $V_0 = 250 \text{ м/сек}$  и  $H_0 = 10 \text{ км}$  и в конце полета  $V_1 = 300 \text{ м/сек}$  и  $H_1 = 15 \text{ км}$ .

В соответствии с этими цифрами полная энергия самолета в начале полета

$$E_0 = 25,51 \cdot 10^9 \text{ Дж} = 2,6 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{м},$$

а в конце

$$E_1 = 19,62 \cdot 10^9 \text{ Дж} = 2,0 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Изменение полной энергии самолета за время полета

$$\Delta E = E_0 - E_1 = 5,89 \cdot 10^9 \text{ дж} = 0,6 \cdot 10^9 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Работа силы тяги за время полета

$$E_P = PL = 9,81 \cdot 10^{11} \text{ дж} = 10^{11} \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, изменение полной энергии самолета составляет приблизительно  $1/170$  часть работы силы тяги. Подобный же результат получается и в других случаях, представляющих практический интерес.

Задачи по определению дальности и продолжительности полета самолета весьма разнообразны. Как дальность, так и продолжительность полета для каждого конкретного самолета зависят от многих факторов, например от полетного веса, запаса топлива, режима полета, режима работы двигателей и т. п. Кроме того, на дальность и продолжительность полета самолета оказывают влияние как эксплуатационные факторы (например регулировка топливных агрегатов двигателя), так и состояние атмосферы, в которой происходит полет (наличие ветра, температурные градиенты и т. д.).

В дальнейшем будем рассматривать расчет дальности и продолжительности полета самолета как величин, не зависящих от условий эксплуатации и определяемых только его техническими характеристиками. Кроме того, атмосферу, в которой происходит полет, будем считать абсолютно спокойной. Вопрос о влиянии ветра на дальность и продолжительность полета самолета рассмотрен ниже.

При оценке дальности полета самолета пользуются понятиями технической и практической дальности; соответственно им определяют продолжительность полета.

*Технической дальностью полета* называют расстояние по горизонтали, которое самолет проходит при израсходовании всего запаса топлива в условиях полного безветрия. При этом предполагается, что траектория полета все время лежит в одной и той же вертикальной плоскости, т. е. полет происходит все время в неизменном направлении.

*Практической дальностью полета* называют расстояние по горизонтали, которое самолет проходит при израсходовании некоторой части полного запаса топлива (*располагаемого запаса топлива*) в условиях полного безветрия. Траектория полета при этом, как и прежде, предполагается лежащей в неизменной вертикальной плоскости.

Располагаемый запас топлива получают путем вычитания из полного запаса топлива, имеющегося в баках самолета, некоторого количества топлива, предназначенного для обхода метеорологических препятствий, которые могут встретиться на пути самолета (грозы, ураганы и т. п.), для захода на посадку, а также так называемого «невыработаемого остатка топлива» в баках<sup>1</sup>.

Запас «аэронавигационного» топлива не может быть точно определен заранее. Поэтому при его определении основываются на данных опыта. То же замечание относится и к оценке запаса топлива, необходимого для захода на посадку. Располагаемый запас топлива обычно задается техническими требованиями к самолету.

Заметим, что расчет дальности полета самолета остается одинаковым независимо от того, рассчитывается техническая или практическая дальность полета; разница получается только количественная, поскольку запас топлива, принимаемый в расчете, в двух перечисленных случаях оказывается различным.

<sup>1</sup> Этим термином обозначают количество топлива, которое при данных конкретных условиях не может быть перекачено из топливных баков для подачи в камеры сгорания двигателей.

Полная дальность полета, т. е. путь, который пролетает самолет от места взлета до места его посадки, складывается из суммы расстояний, проходимых самолетом на следующих трех участках полета:

1) расстояния по горизонтали, которое самолет проходит за время подъема на ту высоту, на которой начинается собственно полет на дальность, —  $L_{\text{наб}}$ ;

2) расстояния по горизонтали, которое самолет проходит на основном режиме полета на дальность — на крейсерском режиме, —  $L$ ;

3) расстояния по горизонтали, которое самолет проходит при снижении (планировании) в конце полета, —  $L_{\text{пл}}$ .

Таким образом, полная дальность полета самолета может быть представлена в виде следующей суммы:

$$L_{\text{полн}} = L_{\text{наб}} + L + L_{\text{пл}}. \quad (1.7)$$

Роль трех слагаемых, входящих в формулу (1.7), существенно зависит от высоты полета самолета и полной дальности его полета. Для некоторых самолетов с большой дальностью полета слагаемое  $L$  оказывается значительно больше двух других и иногда составляет 90—95% всей дальности полета. Однако для скоростных самолетов, совершающих относительно близкие перелеты на больших высотах, выходящих за пределы тропосферы, все три участка полета могут оказаться соизмеримыми по величине.

Начнем с рассмотрения способов расчета величины  $L$  — дальности за время полета на *крейсерском режиме*.

Как уже было отмечено, при расчете  $L$  можно исходить из уравнений установившегося прямолинейного движения самолета. Кроме того, так как угол  $\theta$  наклона к горизонту реальных траекторий самолетов при полете на дальность невелик, с достаточной степенью точности можно принять  $\cos \theta = 1$ .

Так, в рассмотренном на стр. 191 примере тангенс среднего угла наклона траектории к горизонту

$$\operatorname{tg} \theta = 0,0005,$$

так что угол наклона  $\theta = 0,033^\circ$ , а  $\cos \theta = 0,999\,999 \approx 1,0$ .

За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  самолет переместится по горизонтали на величину

$$dL = 3,6 V dt [\text{км}],$$

где скорость  $V$  измеряется в *м/сек*.

За это время  $dt$  будет израсходовано некоторое количество топлива, так что полетный вес самолета изменится на

$$dG = -dG_{\text{T}}.$$

Пусть расход топлива в час равен  $q_{\text{ч}}$ . Тогда расход топлива за время  $dt$  будет

$$dG_{\text{T}} = -dG = q_{\text{ч}} dt,$$

откуда

$$dt = -\frac{dG}{q_{\text{ч}}}.$$

Таким образом,

$$dL = -3,6 \frac{V}{q_{\text{ч}}} dG = -\frac{dG}{q_{\text{к}}},$$

где  $q_{\text{к}} = \frac{q_{\text{ч}}}{3,6V}$  — расход топлива на километр пройденного пути (километровый расход),  $V$  — в *м/сек*.

На основании изложенного приходим к следующим выражениям для определения дальности и продолжительности полета:

$$L = - \int_{G_1}^{G_2} \frac{dG}{q_k} = \int_{G_2}^{G_1} \frac{dG}{q_k}; \quad (2.7)$$

$$T = \int_{G_2}^{G_1} \frac{dG}{q_{\text{ч}}}, \quad (3.7)$$

где  $G_1$  и  $G_2$  — вес самолета соответственно в начале и в конце полета на крейсерском режиме.

Дальность полета самолета при прочих равных условиях будет при данном запасе топлива тем больше, чем меньше километровый расход топлива  $q_k$ . Соответственно при уменьшении часового расхода топлива  $q_{\text{ч}}$  при данном запасе топлива будет увеличиваться продолжительность полета самолета.

## § 2. Расчет дальности полета самолета с воздушно-реактивными двигателями (ВРД)

Рассмотрим вначале полет на дальность самолета с воздушно-реактивными двигателями (с ТРД или ПВРД). Экономические характеристики таких двигателей оценивают удельным расходом топлива  $C_e$ , т. е. количеством топлива, израсходованным в течение 1 часа для получения единицы силы тяги (например, массового расхода топлива в кг на 1 ньютон силы тяги в 1 час). В этом случае, следовательно, часовой расход топлива

$$q_{\text{ч}} = C_e P_p.$$

Сила тяги, потребная для полета в каждый момент времени, в соответствии с отмеченным выше может быть определена из уравнения установившегося горизонтального полета

$$P_{\text{гор}} = \frac{c_x}{c_y} G = \frac{G}{K}.$$

Поскольку при установившемся горизонтальном полете

$$P_{\text{гор}} = P_p,$$

часовой расход топлива для самолета с ВРД

$$q_{\text{ч}} = \frac{C_e}{K} G. \quad (4.7)$$

Точно так же километровый расход топлива

$$q_k = \frac{C_e}{3,6KV} G. \quad (5.7)$$

Подставив выражения часового и километрового расхода (4.7) и (5.7) в выражения (2.7) и (3.7), получим следующие формулы для определения дальности и продолжительности полета самолета с ВРД:

$$L = -3,6 \int_{G_1}^{G_2} \frac{VK}{C_e} \frac{dG}{G} = 3,6 \int_{G_2}^{G_1} \frac{VK}{C_e} \frac{dG}{G} = 3,6 \int_{G_2}^{G_1} \frac{aMK}{C_e} \frac{dG}{G}, \quad (6.7)$$

$$T = \int_{G_2}^{G_1} \frac{K}{C_e} \frac{dG}{G}. \quad (7.7)$$

Для того чтобы по формулам (6.7) и (7.7) рассчитать дальность и продолжительность полета, необходимо располагать значениями функций

$$f = \frac{VK}{C_e} = \frac{aMK}{C_e}$$

и

$$f_1 = \frac{K}{C_e}$$

для каждой величины веса от  $G_1$  в начале полета до  $G_2$  в конце:

$$G_1 \geq G \geq G_2.$$

В дальнейшем рассмотрим главным образом методику расчета дальности полета; расчет продолжительности полета выполняется аналогично и не представляет особых трудностей.

Для определения зависимости  $f(G)$  надо знать, как изменяется при изменении полетного веса  $G$  скорость полета  $V$ , аэродинамическое качество  $K$  и удельный расход топлива  $C_e$ .

Определим эти зависимости.

Сила тяги ВРД в общем случае для данного режима работы двигателя является функцией высоты полета  $H$  и числа Маха  $M$ .

Условимся<sup>1</sup> режим работы двигателя оценивать углом открытия дроссельной заслонки  $\delta_{др}$ . В таком случае

$$P_p = P(H, M, \delta_{др}).$$

Условие равенства потребной и располагаемой тяг в каждый момент времени можно записать в виде

$$P(H, M, \delta_{др}) = c_x 0,7 S p_H M^2, \quad (8.7)$$

а условие равенства веса и подъемной силы самолета

$$G = c_y 0,7 S p_H M^2. \quad (9.7)$$

Определяя из уравнения (8.7) коэффициент лобового сопротивления  $c_x$ , получим

$$c_x = \frac{P(H, M, \delta_{др})}{0,7 S p_H M^2} = c_x(H, M, \delta_{др}). \quad (10.7)$$

Если режим работы двигателя задан, то  $\delta_{др} = \text{const}$ , и уравнение (10.7) принимает вид

$$c_x = c_x(H, M). \quad (10a.7)$$

Точно так же из уравнения (9.7) найдем

$$c_y = \frac{G}{0,7 S p_H M^2} = c_y\left(\frac{G}{p_H}, M\right). \quad (11.7)$$

Зададимся теперь рядом значений отношения  $G/p_H$  и для каждого такого значения — несколькими значениями числа  $M$ . Тогда для каждого фиксированного значения  $G/p_H$  по формуле (11.7) можно найти

$$c_y = \text{const} \frac{1}{M^2}. \quad (12.7)$$

<sup>1</sup> При этом сопло двигателя предполагается нерегулируемым.

Из семейства поляр самолета, построенных для различных чисел  $M$  (рис. 1.7), по найденным значениям  $c_y$  для каждого  $M$  получим соответствующие значения  $c_x$ .

Таким образом, для каждого  $G/\rho_H$  получим значения аэродинамического качества  $K$  самолета в зависимости от числа  $M$ .

Высоту полета  $H$ , соответствующую каждой паре значений  $G/\rho_H$  и  $M$  при  $\delta_{др} = \text{const}$ , найдем из графика зависимости  $c_x = c_x(H, M)$ , построенной по уравнению (10a.7) (рис. 2.7).

Зная  $H$  для каждой пары значений  $G/\rho_H$  и  $M$ , найдем вес самолета  $G$ , удовлетворяющий уравнениям движения

$$G = \frac{G}{\rho_H} \rho_H,$$

где  $\rho_H$  определяется по таблицам стандартной атмосферы для найденной высоты полета  $H$ .

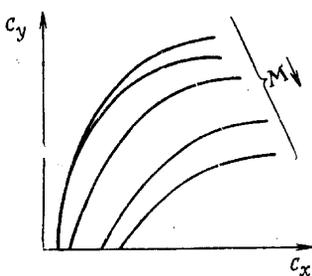


Рис. 1.7. Поляры самолета при различных числах  $M$

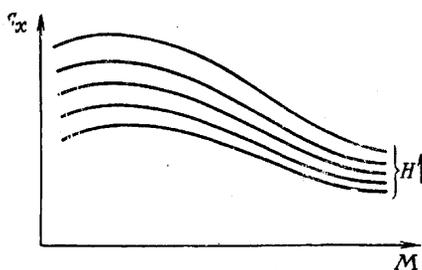


Рис. 2.7. Зависимость коэффициента лобового сопротивления  $c_x$  от высоты полета  $H$  и числа  $M$

По характеристикам двигателя в зависимости от полученных  $H$  и  $M$  определим удельный расход топлива  $C_e$  и вычислим значение функции

$$f = \frac{KV}{C_e} = a \frac{KM}{C_e},$$

где  $a$  — скорость звука для высоты  $H$ .

Задача о расчете дальности полета может решаться в различной постановке. Наибольший практический интерес представляют следующие варианты этой задачи.

1. Найти дальность полета при заданных числе  $M$  и режиме работы двигателя  $\delta_{др} = \text{const}$  и при определенном запасе топлива независимо от того, на какой высоте осуществляется полет.

2. Найти дальность полета при определенном запасе топлива и при условии, что полет осуществляется на заданной высоте  $H = \text{const}$  с заданной скоростью полета  $V$ . Режим работы двигателя подлежит определению. Вариантом этой задачи является определение такой скорости полета, при которой на заданной высоте достигается наибольшая возможная дальность.

3. Найти наибольшую возможную дальность полета при израсходовании определенного запаса топлива и при заданном режиме работы двигателя независимо от того, на какой высоте (но  $H \geq 11$  км) и с какой скоростью происходит полет.

Рассмотрим эти задачи последовательно.

1. **Дальность полета при заданном числе  $M$ .** При решении этой задачи для каждого значения  $G/\rho_H$  необходимо провести расчет при определенном числе  $M$ , фиксированном условиями задачи. Схема расчета представлена в табл. 1.7.

Таблица 1.7

| $G/\rho_H$ |  |  |  |  |  | Примечание   |
|------------|--|--|--|--|--|--|
| $c_y$      |  |  |  |  |  | $c_y = \frac{1}{0,7SM^2} \frac{G}{\rho_H} = \text{const} \frac{G}{\rho_H}$   |
| $c_x$      |  |  |  |  |  | По поляре в зависимости от $c_y$ и $M$                                       |
| $K$        |  |  |  |  |  | $K = \frac{c_y}{c_x}$  |
| $H$        |  |  |  |  |  | По графику рис. 2.7 в зависимости от $M$ и $c_x$                             |
| $\rho_H$   |  |  |  |  |  | По таблице международной стандартной атмосферы                               |
| $C_e$      |  |  |  |  |  | По характеристикам двигателя для заданного режима в зависимости от $H$ и $M$ |
| $f$        |  |  |  |  |  | $f = a \frac{KM}{C_e}$   |
| $G$        |  |  |  |  |  | $G = \frac{G}{\rho_H} \rho_H$  |

Величину интеграла, входящего в формулу (6.7), определяют графически. Для этого надо построить зависимость  $f=f(G)$  и определить площадь, ограниченную кривой  $f(G)$  и заданными пределами интегрирования  $G_1$  и  $G_2$ .

2. **Дальность полета при заданных высоте  $H$  и скорости полета  $V$ .** Решение этой задачи несколько сложнее, чем предыдущей, так как режим работы двигателя (в случае ТРД — число оборотов  $n$  турбины) заранее не задается и подлежит определению.

Поскольку в рассматриваемом случае число  $M$  и давление воздуха  $\rho_H$  заданы, для каждого веса  $G$  в интервале

$$G_1 \geq G \geq G_2$$

можно определить значение  $c_y$ . По поляре самолета в зависимости от заданного  $M$  и найденного  $c_y$  можно найти коэффициент  $c_x$  и затем аэродинамическое качество  $K=c_y/c_x$ .

Каждой паре значений  $G$  и  $K$  соответствует определенная величина потребной тяги

$$P_{\text{гор}} = \frac{G}{K},$$

которая должна быть равна располагаемой силе тяги.

Зная характеристики двигателя, можно построить зависимости силы тяги двигателя  $P$  и удельного расхода топлива  $C_e$  от числа  $M$  и  $\delta_{\text{др}}$  (числа  $n$  оборотов турбины в случае ТРД) для заданной высоты полета  $H$ . Примерный вид таких зависимостей для ТРД показан на рис. 3.7 и 4.7.

По заданному  $M$  и найденной величине потребной тяги по графику рис. 3.7 находим потребное число  $n$  оборотов турбины, а зная  $M$  и  $n$  — по графику рис. 4.7 — удельный расход топлива  $C_e$ .

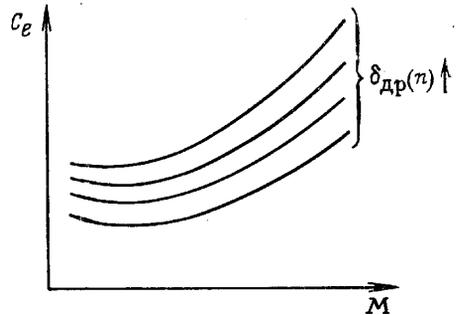
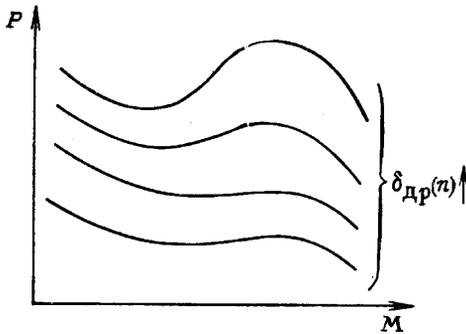


Рис. 3.7. Зависимость силы тяги  $P$  для ТРД от числа  $M$  и от режима работы двигателя

Рис. 4.7. Зависимость удельного расхода топлива  $C_e$  для ТРД от числа  $M$  и режима работы двигателя

Расчет следует вести по схеме табл. 2.7.

Таблица 2.7

| $G$       |  |  |  | Примечание  |
|-----------|--|--|--|---|
| $c_y$     |  |  |  | $c_y = \frac{1}{0,7S\rho_H M^2} G = \text{const } G$ По поляре в зависимости от $c_y$ и $M$ |
| $c_x$     |  |  |  |   |
| $K$       |  |  |  | $K = \frac{c_y}{c_x}$   |
| $P_{гор}$ |  |  |  | $P_{гор} = \frac{G}{K}$   |
| $n$       |  |  |  | По графику рис. 3.7 в зависимости от $P_{гор} = P_p$ и $M$                                  |
| $C_e$     |  |  |  | По графику рис. 4.7 в зависимости от $n$ и $M$  |
| $f$       |  |  |  | $f = a \frac{KM}{C_e}$  |

Интеграл, входящий в формулу (6.7), как и прежде, определяется графически.

Задаваясь для заданной высоты  $H = \text{const}$  несколькими значениями числа  $M$ , получим соответственно несколько величин дальности полета  $L$ . Построив зависимость  $L = L(M)$  (рис. 5.7), по максимуму ординаты этой кривой можно найти наивыгоднейшее значение числа Маха  $M_{нв}$ , а следовательно, и наивыгоднейшую скорость полета  $V_{нв} = a M_{нв}$ , при которой на заданной высоте полета  $H$  получается наибольшая возможная дальность полета.

**3. Наибольшая дальность полета.** Эта задача решается теми же способами, что и задача 1. Необходимо только вместо одного фиксированного значения  $M$  задаться несколькими и построить кривую зависимости дальности полета  $L$  от числа  $M$ . Максимальная ордината этой кривой и будет представлять собой наибольшую возможную дальность полета при израсходовании определенного запаса топлива.

Заметим, что при полете на дальность с заданной крейсерской скоростью (задача 1) или при полете на наибольшую дальность (задача 3), как это следует из приведенных выше выражений, по мере выгорания топлива и облегчения самолета высота полета непрерывно увеличивается. Примерный вид зависимости высоты  $H$  от расстояния по горизонтали  $x$  при полете на дальность показан на рис. 6.7.

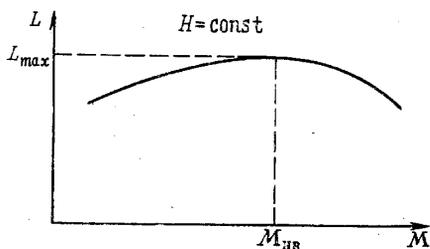


Рис. 5.7. К определению максимальной дальности полета на заданной высоте

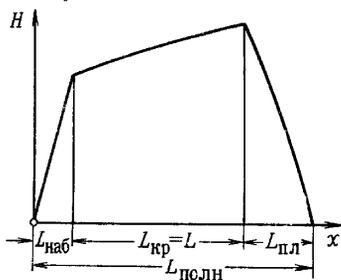


Рис. 6.7. Примерный вид зависимости  $H$  от  $x$  при полете на дальность

Продолжительность полета на крейсерском режиме при крейсерской скорости можно найти по формуле (7.7)

$$T = \int_{G_2}^{G_1} \frac{K}{C_e} \frac{dG}{G} = \int_{G_2}^{G_1} \frac{f}{V} \frac{dG}{G}. \quad (13.7)$$

Расчет продолжительности полета выполняется аналогично расчету дальности полета, поэтому на этом вопросе мы не останавливаемся.

**Возможности упрощения расчета дальности полета самолета с ТРД.** До сих пор предполагалось, что изменение силы тяги  $P_p$  воздушно-реактивного двигателя при изменении числа  $M$  и высоты полета  $H$  задано в виде зависимости

$$P_p = P(H, M, \delta_{др}).$$

В ряде случаев эту зависимость можно представить в более простой форме:

$$P_p = \varphi_1(H) \varphi_2(M, \delta_{др}). \quad (14.7)$$

Приведенный выше ход расчета в этом случае упрощается.

Предположим, что полет на крейсерской скорости осуществляется на высотах  $H \geq 11$  км. При таких высотах полета, когда температуру наружного воздуха можно считать неизменной, функция  $\varphi_1(H)$  принимает вид

$$\varphi_1(H) = \text{const } p_H,$$

где

$$\text{const} = \frac{\varphi_{11}}{p_{11}}.$$

Удельный расход топлива  $C_e$  при  $H \geq 11$  км можно считать функцией только числа  $M$  и  $\delta_{др}$  независимо от высоты полета. Таким образом, для самолетов с ТРД при  $H \geq 11$  км справедливо соотношение

$$P_{pH} = P_H = \varphi_{11} \frac{P_H}{p_{11}} \varphi_2(M, \delta_{др}) = P_{11} \frac{P_H}{p_{11}}. \quad (15.7)$$

Уравнение (8.7) при этих условиях принимает вид

$$\varphi_{11} \frac{P_H}{P_{11}} \psi_1(M, \delta_{др}) = P_{11} \frac{P_H}{P_{11}} = c_x 0,7S p_H M^2$$

или после сокращения на  $P_H$

$$\frac{\varphi_{11}}{P_{11}} \psi_1(M, \delta_{др}) = c_x 0,7S M^2. \quad (16.7)$$

Определяя из уравнения (16.7) коэффициент  $c_x$ , найдем

$$c_x = \frac{1}{0,7S} \frac{\varphi_{11}}{P_{11}} \frac{\psi_1(M, \delta_{др})}{M^2} = \frac{1}{0,7S p_{11}} \frac{P_{11}}{M^2}. \quad (17.7)$$

Как видно из (17.7), коэффициент  $c_x$  является функцией только числа  $M$  и  $\delta_{др}$  и не зависит от веса самолета  $G$ . Следовательно, и качество  $K = c_y/c_x$  в этом случае не будет зависеть от полетного веса самолета  $G$ , так как определенным значениям  $c_x$  и  $M$  на поляре самолета соответствует вполне определенное значение  $c_y$ .

Удельный расход топлива, как уже было упомянуто, при  $H \geq 11$  км также является только функцией числа  $M$  для заданного числа оборотов  $n$  турбины. Скорость звука  $a$  на высотах  $H \geq 11$  км можно считать постоянной.

Задача о дальности полета при заданных высоте и скорости (задача 2) решается следующим образом.

По уравнению (9.7) для  $H = \text{const}$  и  $M = \text{const}$  получаем

$$c_y = \frac{1}{0,7S M^2 p_H} G = c_1 G. \quad (18.7)$$

Значение  $c_x$ , соответствующее этому  $c_y$  и заданному числу  $M$ , найдем по поляре самолета. Подставив найденное таким образом значение  $c_x$  в уравнение (17.7), которое можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной силы тяги  $P_{11}$  на высоте 11 км при заданном числе  $M$ , найдем

$$P_{11} = c_x 0,7S p_{11} M^2. \quad (19.7)$$

Сила тяги на заданной высоте определяется по формуле

$$P_H = P_{11} \frac{P_H}{P_{11}} = c_x 0,7S p_H M^2. \quad (20.7)$$

Зная  $P_H$  и  $M$ , по характеристикам двигателя (см. рис. 3.7) найдем потребное число оборотов турбины  $n$ , а по рис. 4.7 по найденному  $n$  и заданным  $H$  и  $M$  найдем удельный расход топлива  $C_e$  как функцию  $G$ .

Так как  $c_y$  согласно (18.7) зависит только от  $G$ , то  $c_x$  при заданном  $M$  будет зависеть тоже только от  $G$ . Следовательно, аэродинамическое качество

$$K = \frac{c_y}{c_x} = K(G).$$

Функция

$$f = \frac{VK}{C_e} = a \frac{KM}{C_e}$$

теперь будет

$$f = a \frac{K(G)M}{C_e(G)} = a \frac{c_1 G M}{C_e(G) c_x(G)},$$

так что для дальности полета получим выражение

$$L = 3,6a M c_1 \int_{G_2}^{G_1} \frac{dG}{C_e c_x}. \quad (21.7)$$

В частном случае, когда удельный расход топлива  $C_e$  можно считать не зависящим от числа оборотов  $n$  турбины (от степени дросселирования) и поляра самолета представлена аналитической зависимостью

$$c_x = c_{x0} + Bc_y^2,$$

$1/C_e$  в выражении (21.7) можно вынести за знак интеграла:

$$L = \frac{3,6a M c_1}{C_e} \int_{G_2}^{G_1} \frac{dG}{c_{x0} + Bc_y^2} = \\ = \frac{3,6a M}{C_e \sqrt{Bc_{x0}}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{\frac{B}{c_{x0}} (G_1 - G_2)}}{(0,7S M^2 p_H)^2 + \frac{B}{c_{x0}} G_1 G_2} 0,7S M^2 p_H \right]. \quad (22.7)$$

Само собой разумеется, что число оборотов  $n$  турбины, получающееся в результате приведенного расчета, не должно превышать допустимого числа оборотов  $n_{\text{доп}}$ . Если бы оказалось, что  $n > n_{\text{доп}}$ , это означало бы, что полет при заданных  $H$  и  $M$  неосуществим.

Для задачи 1 о дальности полета при заданных скорости полета  $V$  и числе оборотов турбины  $n$  (при  $H \geq 11$  км заданной скорости соответствует и заданное число  $M$ , так как  $a = \text{const}$ ) получим следующее решение.

Поскольку при заданных  $M$  и  $n$  удельный расход топлива  $C_e$  — величина постоянная, а при  $H \geq 11$  км скорость звука  $a = \text{const}$ , функция

$$f = a \frac{KM}{C_e}$$

для заданного числа  $M$ , как видно из формулы (6.7), будет иметь максимальное значение при условии

$$K = K_{\text{max}}.$$

Следовательно, для получения максимальной дальности полета на высотах  $H \geq 11$  км при заданных  $M$  и числе оборотов турбины  $n$  полет должен осуществляться на режиме максимального качества, соответствующего заданному  $M$ . Отношение  $KM/C_e$  на всем протяжении крейсерского полета получается постоянным независимо от веса самолета. Вынося в выражении (6.7) величину  $KM/C_e$  за знак интеграла, получим формулу

$$L = 3,6a \frac{KM}{C_e} \ln \frac{G_1}{G_2}. \quad (23.7)$$

Решение задачи о наибольшей дальности полета (при  $H \geq 11$  км) (задача 3) получается по формуле (23.7), если в нее подставить наибольшее возможное значение

$$\frac{KM}{C_e} = \left( \frac{KM}{C_e} \right)_{\text{max max}}.$$

Для этого надо построить зависимость

$$\frac{KM}{C_e} = f(M)$$

и графически определить максимум искомой функции (рис. 7.7). При этом найдем

$$\left(\frac{KM}{C_e}\right)_{\max \max} \text{ и } M_{\text{нв}}.$$

Этим значениям соответствует определенное значение  $c_y$ , которое можно прочесть по поляре самолета, построенной для найденного значения  $M_{\text{нв}}$  при  $K = K_{\max}$ .

Таким образом, максимальная дальность полета на крейсерском режиме определяется выражением

$$L_{\max} = 3,6a \left(\frac{KM}{C_e}\right)_{\max \max} \ln \frac{G_1}{G_2}. \quad (24.7)$$

На основании уравнения (9.7) соответственно найденным значениям  $c_{yH}$ ,  $M_{\text{нв}}$  получим

$$p_H = \frac{1}{0,7Sc_{yH}M_{\text{нв}}^2} G = \text{const } G. \quad (25.7)$$

Рис. 7.7. К определению наибольшей дальности полета

Из формулы (25.7) следует, что давление наружного воздуха  $p_H$  прямо пропорционально весу самолета  $G$ . С уменьшением  $G$  давление наружного воздуха  $p_H$  убывает и высота полета  $H$  увеличивается.

Задачу об определении наибольшей дальности полета при заданной высоте  $H = \text{const}$  и при произвольной скорости (задача 2) удобно решать следующим образом. На основании уравнения (9.7)

$$M = \sqrt{\frac{G}{0,7Sp_H}} \frac{1}{V c_y},$$

так что произведение

$$KM = \sqrt{\frac{G}{0,7Sp_H}} \frac{V c_y}{c_x}.$$

Подставив это выражение в (6.7), получим формулу для определения дальности полета

$$L = \frac{3,6a}{V 0,7Sp_H} \int_{G_2}^{G_1} \frac{1}{C_e} \frac{V c_y}{c_x} \frac{dG}{V G}. \quad (26.7)$$

Так как в этом случае двигатель работает на дроссельном режиме, то удельный расход топлива  $C_e$  должен быть найден по характеристикам двигателя в зависимости от силы тяги:

$$P_{\text{гор } H} = P_H = c_x 0,7Sp_H M^2$$

и от числа  $M$  полета.

Зададимся рядом значений числа  $M$  и для каждого  $M$  — несколькими значениями  $c_y$ . На поляре самолета для каждого из значений  $M$  и  $c_y$  прочтем соответствующее значение  $c_x$  и по приведенной формуле

найдем силу тяги  $P_H$ , а затем по графикам рис. 3.7 и 4.7 — число оборотов турбины  $n$  и удельный расход топлива  $C_e$ .

Теперь можно вычислить значения функции

$$\frac{1}{C_e} \frac{\sqrt{c_y}}{c_x} = \varphi$$

и построить кривые зависимости этой функции  $\varphi$  от  $M$  и  $c_y$  (рис. 8.7). Наибольшая дальность полета будет соответствовать максимальному значению функции

$$\varphi_{\max \max} = \left( \frac{1}{C_e} \frac{\sqrt{c_y}}{c_x} \right)_{\max \max},$$

которое можно найти графически.

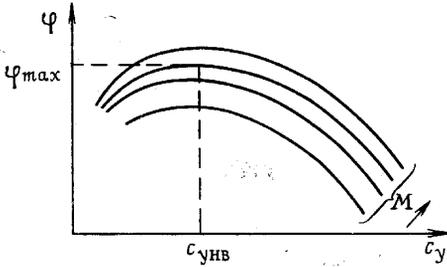


Рис. 8.7. Примерный вид зависимости функции  $\varphi$  от  $c_y$  и  $M$

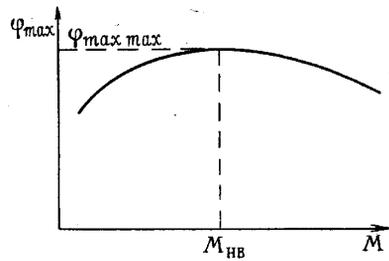


Рис. 9.7. Определение  $\varphi_{\max \max}$

Для этого сначала надо определить  $\varphi_{\max}$  при  $M = \text{const}$  (рис. 8.7), а затем построить зависимость  $\varphi_{\max}$  от  $M$  (рис. 9.7) и графически найти  $\varphi_{\max \max}$ .

В том частном случае, когда удельный расход топлива  $C_e$  можно считать постоянным независимо от режима полета, его можно вынести за знак интеграла в выражении (26.7), так что для определения дальности полета получим

$$L = \frac{3,6a}{C_e \sqrt{0,7Sp_H}} \int_{G_2}^{G_1} \frac{\sqrt{c_y}}{c_x} \frac{dG}{\sqrt{G}}. \quad (27.7)$$

Из выражения (27.7) видно, что наибольшая дальность полета на заданной высоте  $H$  (при условии  $C_e = \text{const}$ ) получается при полете на таком режиме, которому соответствует

$$\frac{\sqrt{c_y}}{c_x} = \left( \frac{\sqrt{c_y}}{c_x} \right)_{\max}$$

В общем случае, когда поляра самолета изменяется при изменении числа  $M$ , каждому значению  $M$  будет соответствовать свое наибольшее значение

$$\left( \frac{\sqrt{c_y}}{c_x} \right)_{\max}$$

получающееся при некотором значении  $c_{y \text{ нв}}$ .

Но при определенном значении  $c_y = c_{y_{нв}}$  и при  $H = \text{const}$  на основании (9.7) каждому значению  $M$  соответствует свой полетный вес самолета  $G$ . Таким образом, найденные значения

$$\left( \frac{V c_y}{c_x} \right)_{\max}$$

будут различными для различных  $G$ . Интеграл, входящий в формулу (27.7), в этом общем случае можно найти графически.

Если влиянием сжимаемости воздуха на поляру самолета можно пренебречь, то получим единственное значение

$$\left( \frac{V c_y}{c_x} \right)_{\max}$$

для всех чисел  $M$  и, следовательно, для всех значений  $G$ . В таком случае

$$\left( \frac{V c_y}{c_x} \right)_{\max}$$

можно вынести в (27.7) за знак интеграла и получить выражение для определения максимальной дальности полета на заданной высоте  $H$ :

$$L_{\max} = \frac{7,2a}{c_e \sqrt{0,7Sp_H}} \left( \frac{V c_y}{c_x} \right)_{\max} (\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}). \quad (28.7)$$

Выше рассмотрены задачи о расчете дальности полета при различных условиях, связывающих скорость и высоту полета. Необходимость поддерживать в полете высоту  $H$  и скорость полета  $V$  неизменными заметно снижает дальность полета по сравнению с наибольшей возможной, определяемой выражением (24.7).

Для иллюстрации этого положения найдем соотношение между дальностью полета при заданных постоянных скорости  $V$  и высоте полета  $H$  и наибольшей дальностью полета самолета. При этом будем считать, что скорость полета  $V$  в обоих случаях равна наивыгоднейшей скорости, соответствующей наибольшей дальности полета.

Разделив почленно выражение (22.7) на (23.7) и приняв во внимание, что в начале полета

$$0,7S M_{нв}^2 p_{H1} = \frac{G_1}{c_{y1}} = G_1 \sqrt{\frac{B}{c_{x0}}}$$

(так как при  $K = K_{\max}$  имеем  $c_{y1} = c_{yk} = \sqrt{\frac{c_{x0}}{B}}$ , где  $B = B(M_{нв})$ , после простых преобразований получим

$$\bar{L} = \frac{L_{M=\text{const}}}{L_{\max}} = \frac{2 \arctg \frac{1 - G_2/G_1}{1 + G_2/G_1}}{\ln G_1/G_2}. \quad (29.7)$$

Как видим, относительное изменение дальности полета  $\bar{L}$  зависит только от отношения  $G_2/G_1$  или, другими словами, от относительного запаса топлива  $\bar{G}_T$ . При  $\bar{G}_T = 0,2$  получаем  $\bar{L} = 0,990$ . При относительном запасе топлива  $\bar{G}_T = 0,5$  относительное изменение дальности  $\bar{L} = 0,934$  и при  $\bar{G}_T = 0,7$  имеем  $\bar{L} = 0,830$ .

Как видим, потеря в дальности при полете на постоянной высоте по сравнению с максимально возможной дальностью увеличивается с увеличением запаса топлива.

**Расчет полной дальности полета самолета с ТРД.** До сих пор рассматривались способы расчета дальности полета на крейсерском режиме. Как было показано, высота полета по мере выгорания топлива и уменьшения полетного веса самолета возрастает.

Для того чтобы начать полет на крейсерском режиме, самолет должен предварительно подняться на крейсерскую высоту. Если полет на дальность происходит на данной высоте  $H = \text{const}$ , то момент начала полета на крейсерском режиме можно определить следующим образом.

Расстояние по горизонтали, которое проходит самолет при наборе высоты за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ ,

$$dL = V_{\text{наб}} \cos \theta dt.$$

Путь за время  $t_1$ , очевидно,

$$L = \int_0^{t_1} V_{\text{наб}} \cos \theta dt. \quad (30.7)$$

Если задана крейсерская высота полета  $H = \text{const}$ , то момент времени  $t_1$ , с которого начинается полет на крейсерском режиме, можно определить по барограмме подъема (см. стр. 167), найдя по ней время  $t_1$ , соответствующее заданной высоте  $H$  полета на дальность.

Зависимости скорости полета  $V$  и угла наклона траектории  $\theta$  от времени берутся из расчета подъема самолета.

В более общем случае, когда высота полета на крейсерском режиме не обусловлена, например при расчете наибольшей дальности, момент времени  $t_1$  уже нельзя найти по барограмме, так как высота  $H_1$  заранее неизвестна. В этом случае высоту начала крейсерского полета  $H_1$  можно найти графически.

Из расчета подъема самолета можно определить зависимость полетного веса  $G$  от высоты полета  $H$ . Если, как это было рекомендовано ранее, расчет подъема самолета произведен для постоянного начального веса  $G = G_0$ , то в зависимости от времени  $t$  вес  $G$  самолета приближенно можно найти по формуле

$$G \approx G_0 - \frac{1}{60} \int_0^t C_e P dt, \quad (31.7)$$

где  $t$  берется в минутах.

Значения  $C_e$  и  $P$ , входящие в это выражение, определяются по характеристикам двигателя для заданного режима его работы при наборе высоты в зависимости от  $H$  и  $M$ .

Имея зависимость  $H = H(t)$  — барограмму подъема, нетрудно построить и зависимость  $H = H(G)$ . Нанесем эту зависимость на график рис. 10.7; на этот же график нанесем кривую зависимости  $H = H(G)$ , полученную из расчета полета на крейсерском участке в табл. 1.7 или по формуле (25.7). Искомая высота полета найдется в точке пересече-

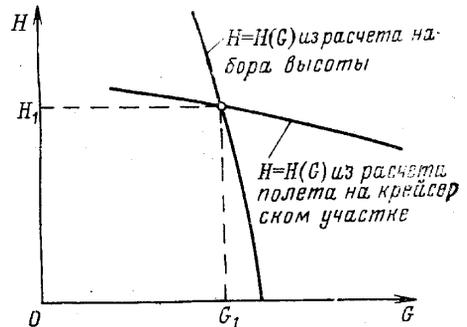


Рис. 10.7. К определению начальной высоты полета на крейсерском участке

ния обеих кривых. В этой же точке прочтется и вес самолета  $G_1$  в начале крейсерского полета<sup>1</sup>.

Не составляет особого труда и расчет третьего этапа полета на дальность — расчет пути, который проходит самолет при *снижении* (планировании).

Будем считать, что высота, на которой самолет начинает планировать, известна; эту высоту можно определить из расчета полета на крейсерском участке. В таком случае дальность планирования, т. е. длину пути, который самолет проходит при планировании по горизонтали, можно приближенно определить по формуле (49.6)

$$L_{пл} = KH.$$

Наибольшая величина этой дальности получается при  $K = K_{max}$ .

Вообще говоря, вследствие изменения плотности воздуха при планировании скорость полета  $V_{пл}$  будет изменяться с течением времени. Кроме того, с изменением высоты  $H$  изменяется скорость звука  $a$ , так что

$$M = \frac{V}{a} = M(H).$$

Максимальное качество самолета  $K_{max}$ , зависящее от числа  $M$ , также будет изменяться в процессе планирования. Однако, если не требуется большая точность расчета, качество можно определить для числа  $M$ , соответствующего крейсерской высоте и скорости полета в момент начала планирования.

Приведенный способ расчета дальности полета необходимо рассматривать как приближенный. При более точной постановке задачи следовало бы отыскивать наивыгоднейший режим двигателя — на подъеме ( $a$  не на режиме полного дросселя, как это принято в тексте) и при снижении ( $a$  не на режиме нулевой тяги, как это принято в тексте). Более точный результат можно получить, если отыскивать закон управления летательным аппаратом на протяжении всего полета от старта до посадки.

### § 3. Расчет дальности полета самолета с винтовыми двигателями

Перейдем к расчету дальности полета самолетов с ТВД или поршневыми двигателями.

*Экономические характеристики* этих двигателей задаются в виде зависимости удельного расхода топлива  $C_e$  — расхода топлива в час на единицу мощности — от режима работы двигателя, скорости и высоты полета.

Часовой и километровый расходы топлива в этом случае

$$q_ч = iC_e N, \quad (32.7)$$

$$q_к = \frac{q_ч}{3,6V} = \frac{iC_e N}{3,6V}, \quad (33.7)$$

где скорость полета  $V$  берется в *м/сек*, мощность  $N$  — в *л. с.*, удельный расход топлива  $C_e$  — в *кг/час* на *1 л. с.*,  $i$  — число двигателей на самолете.

<sup>1</sup> Вообще скорость самолета  $V_{наб}$  и угол наклона траектории к горизонту  $\theta_{наб}$  при наборе высоты не будут равны потребным для крейсерского полета. Для уравнивания  $V$  и  $\theta$  перед переходом на крейсерский полет надо выполнить обратную горку (см. гл. VIII). Так как расход топлива и расстояние по горизонтали на этапе этого переходного маневра невелики, то в первом приближении различием в  $V$  и  $\theta$  в конце набора высоты и начале крейсерского полета можно пренебречь.

Будем предполагать в дальнейшем, что каждому заданному режиму работы двигателя соответствует определенное число оборотов винта.

Как отмечено в гл. IV, если на самолете установлены ТВД, то полезная (располагаемая) мощность получается отчасти от силы тяги винтов, а отчасти от реактивной силы тяги  $P_r$ , возникающей вследствие прямой реакции газовой струи, выходящей из сопла двигателя.

В случае поршневых двигателей величиной дополнительной реактивной тяги  $P_r$  по сравнению с тягой винта  $P$  можно пренебречь.

Все последующие рассуждения будем проводить для самолетов с ТВД. Для того чтобы от этого случая перейти к тому, когда на самолете установлены поршневые двигатели, в полученных далее выражениях надо положить  $P_r = 0$ .

Условие равенства потребной и располагаемой мощностей

$$\frac{G}{K} V = c_x S \frac{\rho V^3}{2} = c_x 0,7 S \rho_H a M^3 = i 75 N \eta + i P_r V. \quad (34.7)$$

Определив из уравнения (34.7) мощность  $N$  на валу винта и подставив это выражение в формулы (32.7) и (33.7), получим

$$q_v = \frac{C_e V}{75 \eta} \left( \frac{G}{K} - i P_r \right), \quad q_k = \frac{C_e}{270 \eta} \left( \frac{G}{K} - i P_r \right).$$

Подставив эти выражения в (2.7) и (3.7), получим дальность и продолжительность полета самолетов с ТВД

$$L = 270 \int_{G_2}^{G_1} \frac{K \eta}{C_e} \frac{1}{1 - \frac{K i P_r}{G}} \frac{dG}{G}, \quad (35.7)$$

$$T = 75 \int_{G_2}^{G_1} \frac{1}{V} \frac{K \eta}{C_e} \frac{1}{1 - \frac{K i P_r}{G}} \frac{dG}{G}. \quad (36.7)$$

Обычно часть полезной мощности, получающаяся от реактивной тяги  $P_r$ , невелика по сравнению с полезной мощностью, создаваемой винтами. Поэтому выражения (35.7) и (36.7) можно несколько упростить, воспользовавшись понятием условной мощности  $N_y$  (см. гл. IV).

Напомним, что условная мощность определяется выражением

$$N_y = N + \Delta N_y,$$

где дополнительная мощность  $\Delta N_y$  от реактивной тяги принимается

$$\Delta N_y = \frac{P_r V}{\eta_y};$$

через  $\eta_y$  здесь обозначено некоторое условное значение к. п. д. винта (обычно при расчетах принимают  $\eta_y = 0,8$ ).

Вместо уравнения (34.7) теперь можно написать приближенное равенство

$$\frac{G}{K} V = c_x S \rho \frac{V^3}{2} = c_x 0,7 S \rho_H a M^3 = i \cdot 75 N_y \eta. \quad (37.7)$$

Относя удельный расход топлива к условной мощности  $N_y$ , получим

$$C_{ey} = \frac{C_e N}{N + \Delta N_y} = C_e \frac{N}{N_y}.$$

Интервал, входящий в (40.7), определяют графически аналогично предыдущему. Последовательность расчета приведена в табл. 3.7.

(42.7)

$$G = c_{\eta} 0,75 p_{\text{н}} M^2$$

входящей в выражение (40.7). Вес самолета  $G$ , соответствующий той высоте полета  $H$ , определяется по формуле

$$\frac{c_{\rho} G}{K_{\eta}}$$

По характеристикам двигателя для заданных высоты  $H$ , скорости полета  $V$  и числа оборотов турбины  $n$  можно найти удельный расход топлива  $C_{\rho}$  и вычислить значение подынтегральной функции

$$K = \frac{c_x}{c_y}$$

Из уравнения (37.7) теперь можно найти коэффициент  $c_x$ , по полету самолета в зависимости от заданного числа  $M$  и найденного  $c_x$  —

и по характеристикам воздушного винта — коэффициент полезного действия  $\eta$ .

$$\gamma = \frac{nD}{V} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{75N}{n^2 D^2}$$

можно найти скорости  $V$ , соответствующие заданному числу  $M$ . По характеристикам двигателя для каждой высоты  $H$  и скорости  $V$  при заданном числе оборотов двигателя  $n$  можно найти условную мощность  $N$  на валу двигателя, затем определить соответствующие коэффициенты

расчете дальности полета, но для самолетов с ТВД.

Рассмотрим ход решения формулированных ранее трех задач о дальности полета при расходе дальности полета

будем пользоваться выражениями (40.7) и (41.7).

$$T = 75 \int_{G_1}^{G_2} \frac{1}{K_{\eta}} \frac{1}{V C_{\rho}} \frac{1}{G} \quad (41.7)$$

$$L = 270 \int_{G_1}^{G_2} \frac{c_x}{K_{\eta}} \frac{c_{\rho}}{dG} \quad (40.7)$$

Дальность и продолжительность полета определяются по формулам:

$$q_{\kappa} = \frac{1}{270} \frac{C_{\rho}}{K_{\eta}} G \quad (39.7)$$

$$q^{\eta} = \frac{75 K_{\eta}}{V C_{\rho}} G \quad (38.7)$$

В дальнейшем для краткости индекс « $\eta$ » опущен. Часовой и километровой расходу топлива

$$N_y = \frac{75 K_{\eta}}{V} G$$

Определяя теперь из уравнения (37.7) условную мощность, найдем

| $H$       |  |  |  |  |  | Примечание  |
|-----------|--|--|--|--|--|---|
| $V$       |  |  |  |  |  | $V = M a$   |
| $N$       |  |  |  |  |  | По характеристикам двигателя для заданного $n$ в зависимости от $H$ и $V$ |
| $\lambda$ |  |  |  |  |  | $\lambda = \frac{V}{nD}$  |
| $\beta$   |  |  |  |  |  | $\beta = \frac{75N}{\rho n^3 D^5}$  |
| $\eta$    |  |  |  |  |  | По графику характеристик винта  |
| $c_x$     |  |  |  |  |  | $c_x = \frac{N\eta}{0,75\rho n a M^3}$                                    |
| $c_y$     |  |  |  |  |  | По поляре для заданного $M$ в зависимости от $c_x$                        |
| $K$       |  |  |  |  |  | $K = \frac{c_y}{c_x}$   |
| $C_e$     |  |  |  |  |  | По характеристикам двигателя для заданного $n$ в зависимости от $H$ и $V$ |
| $G$       |  |  |  |  |  | $G = c_y 0,75\rho n M^2$  |
| $f$       |  |  |  |  |  | $f = \frac{K\eta}{C_e G}$   |

симуму ординаты этой кривой можно найти максимальную дальность и соответствующее ей наиболее выгодное число  $M_{нв}$ .

Высота при полете на дальность с заданной скоростью или на наибольшую дальность по мере выгорания топлива увеличивается, как и в случае самолета с ТРД.

**Задача 2.** Задаваясь различными значениями веса самолета  $G$  в интервале  $G_2 \leq G \leq G_1$ , можно вычислить для заданных высоты и скорости полета значения  $c_y$ , а по поляре найти соответствующие значения  $c_x$  и вычислить аэродинамическое качество  $K = \frac{c_y}{c_x}$ .

Определение к. п. д. винта  $\eta$  и удельного расхода топлива  $C_e$  получается более сложным, чем в предыдущей задаче.

Условная мощность на валу винта может быть принята

$$75N = \beta \rho n^3 D^5.$$

Тогда располагаемую мощность можно записать следующим образом:

$$75N_p = \eta \beta \rho n^3 D^5.$$

Из условия равенства потребной и располагаемой мощности получим

$$i \eta \beta \rho n^3 D^5 = c_x S \frac{\rho V^3}{2}.$$

Но, исходя из общих выражений для поступи винта  $\lambda$  и коэффициента мощности  $\beta$ ,

$$n^3 D^5 = \frac{V^3}{\lambda^3} D^2,$$

так что предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\frac{\eta\beta}{\lambda^3} = c_x \frac{S}{2iD^2}. \quad (43.7)$$

Для каждого значения веса самолета  $G$  по описанным выше правилам можно найти коэффициент  $c_x$ , так что правая часть уравнения (43.7) для каждого  $G$  — величина постоянная.

Зададимся каким-либо значением к. п. д. винта  $\eta$ ; тогда по уравнению (43.7) можно построить кривую, уравнение которой

$$\beta = c_x \frac{S}{2iD^2} \frac{1}{\eta} \lambda^3 = \text{const} \lambda^3.$$

Построив такие кривые на диаграмме характеристик винта (рис. 11.7), в точках пересечения этих кривых с кривыми  $\eta = \text{const}$  прочтем соответствующие заданному значению  $\eta$  значения  $\lambda$ .

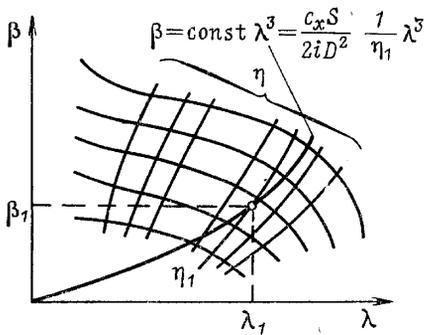


Рис. 11.7. К определению режима работы винта

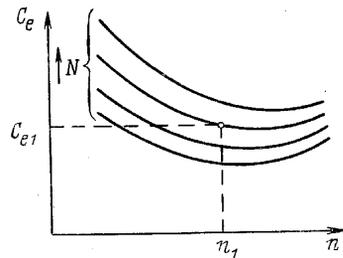


Рис. 12.7. К определению удельного расхода топлива  $C_e$

Так как скорость полета задана по условиям задачи, то каждому значению  $\lambda$  соответствует определенное число оборотов:

$$n = \frac{V}{\lambda D}.$$

Кроме того, каждому заданному  $\eta$  соответствует своя условная мощность

$$N = \frac{GV}{75K} \frac{1}{\eta}.$$

Но каждым двум значениям  $n$  и  $N$  при данных высоте и скорости полета соответствует определенный удельный расход топлива  $C_e$ , который может быть определен по характеристикам двигателя (рис. 12.7). Таким образом, каждому заданному значению  $\eta$  будет соответствовать определенное значение отношения  $\eta/C_e$  и число оборотов  $n$ .

Построив графики зависимости  $\eta/C_e = f(n)$  (рис. 13.7), можно найти максимальное значение  $(\eta/C_e)_{\text{max}}$ , соответствующее принятому значению  $G$ .

Таким образом, для каждого значения  $G$  можно вычислить значение подынтегральной функции  $K\eta/GC_e$  в выражении (40.7), а интеграл вычислить, например, графически. Приведенную последовательность расчета можно несколько упростить, если предположить, что  $C_e$  мало зависит от числа оборотов  $n$ . В таком случае среди кривых рис. 11.7

наивыгоднейшие результаты даст кривая, соприкасающаяся с кривой  $\eta = \text{const}$  (рис. 14.7), так как при этом к. п. д. будет иметь максимальное значение.

Далее можно найти число оборотов  $n$ , соответствующее значению  $\lambda$  в точке касания кривых, и определить величину  $C_e$  по правилам, приведенным выше. При этом объем расчетной работы уменьшается, так как нет необходимости отыскивать оптимальное число оборотов для каждого значения  $\eta$ .

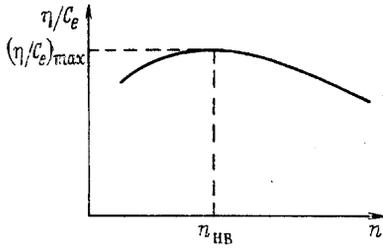


Рис. 13.7. Определение  $(\eta/C_e)_{\max}$

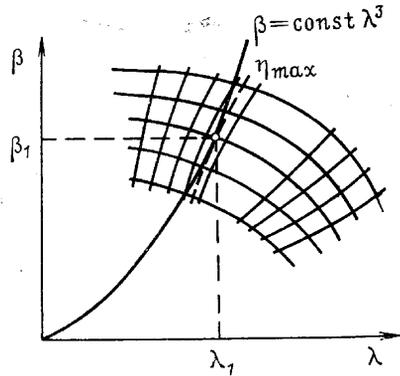


Рис. 14.7. Определение максимального к. п. д. винта

Само собой разумеется, что число оборотов, соответствующее максимальному к. п. д. в точке касания кривых на рис. 14.7, не должно превышать допустимого числа оборотов двигателя.

Последовательность расчета приведена в табл. 4.7.

Таблица 4.7

| $G$                        |  |  |  | Примечание   |
|----------------------------|--|--|--|--|
| $c_y$                      |  |  |  | $c_y = \frac{1}{0,7 S P_H M^2} G = \text{const } G$                            |
| $c_x$                      |  |  |  |  |
| $K$                        |  |  |  | $K = \frac{c_y}{c_x}$  |
| $\frac{\eta^3}{\lambda^3}$ |  |  |  |  |
| $\eta$                     |  |  |  | } По характеристикам винта   |
| $\lambda$                  |  |  |  |  |
| $\beta$                    |  |  |  |  |
| $n$                        |  |  |  | $n = \frac{V}{\lambda D}$  |
| $N$                        |  |  |  | $N = \frac{1}{75} \beta Q n^3 D^5$   |
| $C_e$                      |  |  |  | По характеристикам двигателя для заданных $V$ и $H$ в зависимости от $n$ и $N$ |
| $f$                        |  |  |  | $f = \frac{K\eta}{C_e} \frac{1}{G}$  |

**Упрощение расчета дальности полета для самолета с ТВД.** Если полет происходит на высотах  $H \geq 11$  км, то температуру наружного воздуха можно считать неизменной, как уже указывалось при описании упрощенного метода расчета дальности полета самолета с ТРД. В этом случае справедливо равенство

$$N_H = N_{11} \frac{p_H}{p_{11}}, \quad (44.7)$$

где условная мощность  $N_H$  на высоте  $H$  и условная мощность  $N_{11}$  на высоте  $H=11$  км берутся для одинаковых  $V$  и  $n$ . Подставив это выражение в уравнение (37.7), после сокращения на  $p_H$  получим

$$c_x = \frac{75 N_{11} \eta_{11}}{p_{11} a 0,7 S} \frac{1}{M^3}. \quad (45.7)$$

Коэффициент мощности винта при этих условиях

$$\beta = \frac{75 N_{11} p_H}{p_{11} \rho_H n^3 D^5} = \beta_{11}, \quad (46.7)$$

где  $\beta$  и  $\beta_{11}$  соответствуют одному и тому же режиму работы двигателя.

Поэтому при одинаковых скорости и числе оборотов на высоте  $H$  и  $H=11$  км значение к. п. д., зависящее только от  $\lambda$  и  $\beta$ , получается одинаковым. В таком случае, как видно из (45.7), коэффициент  $c_x$  не зависит от веса самолета  $G$  и является только функцией числа  $M$  и режима работы двигателя (числа оборотов винта).

Ограничимся случаем расчета дальности *при заданной скорости полета и при заданном числе оборотов винта* (задача 1).

Заданным значениям скорости полета и, следовательно, числа  $M$  соответствует определенный коэффициент мощности  $\beta$  по уравнению (46.7). Этому значению  $\beta$  и значению  $\lambda = V/nD$  по графику характеристик винта соответствует определенное значение к. п. д. винта  $\eta$ . При  $H \geq 11$  км удельный расход топлива  $C_e$  зависит только от числа  $M$  и режима работы двигателя, так что при заданном  $n$  расход  $C_e$  имеет определенное значение.

По формуле (45.7) можно найти значение  $c_x$ , соответствующее заданному числу  $M$ , а по поляре самолета —  $c_y$  и аэродинамическое качество  $K = c_y/c_x$ . В таком случае отношение  $K\eta/C_e$  получается не зависящим от веса  $G$ , и в формуле (40.7) его можно вынести за знак интеграла.

Для дальности полета при этих условиях получаем выражение

$$L = 270 \frac{K\eta}{C_e} \ln \frac{G_1}{G_2}. \quad (47.7)$$

Выбрав среди различных значений  $K\eta/C_e$ , соответствующих различным числам  $M$ , наибольшее значение  $\left(\frac{K\eta}{C_e}\right)_{\max}$ , получим наибольшую возможную дальность полета. Последовательность расчета в этом случае простая, и мы ее не приводим.

#### § 4. Радиус действия самолета. Способы увеличения дальности полета и радиуса действия

*Радиусом действия*  $R$  самолета называют расстояние, на которое самолет может удалиться от пункта вылета, с тем чтобы вернуться обратно; практически наибольший интерес представляет определение *максимального радиуса действия* — важной тактико-технической характеристики военных самолетов.

В том случае, когда в момент нахождения самолета над целью с самолета не сбрасывается груз, максимальный радиус действия равен половине наибольшей дальности полета, определенной по методам, изложенным в предыдущих параграфах этой главы. Именно так можно определить, например, максимальный радиус действия самолета-разведчика. Если самолет, находясь над целью, сбрасывает определенный груз (например бомбы), то характер изменения веса  $G$  самолета в зависимости от пути, пройденного по горизонтали, имеет вид, изображенный на рис. 15.7. В этом случае вес самолета изменяется скачком на величину сброшенного груза в момент нахождения самолета над целью и радиус его действия не будет равен половине дальности, рассчитанной без учета сбрасывания груза. В соответствии с таким скачкообразным изменением веса на основании соображений, приведенных в предыдущих параграфах, должна изменяться скачком и наиболее выгодная высота полета. В действительности, конечно, мгновенное увеличение высоты полета неосуществимо; однако, если величина сбрасываемого груза невелика по сравнению с полетным весом самолета, вместо постепенного увеличения высоты (имеющего место в действительности) можно без большой погрешности принять, что после сбрасывания груза высота полета изменяется мгновенно (скачком).

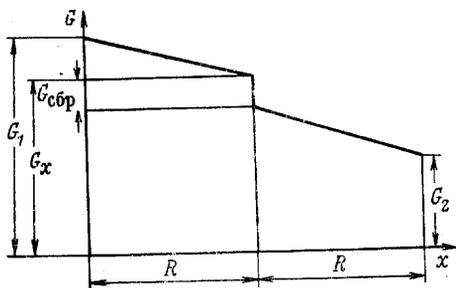


Рис. 15.7. Зависимость изменения полетного веса самолета от пути, пройденного по горизонтали

Выведем выражение для *максимального радиуса действия самолета с ТРД* в предположении, что полет происходит в стратосфере, т. е. при  $H \geq 11$  км.

Обозначим вес сброшенного груза через  $G_{сбр}$  и вес самолета в момент нахождения над целью перед сбрасыванием груза через  $G_x$ ; тогда сразу после сбрасывания груза вес самолета будет  $G_x - G_{сбр}$ . Ограничиваясь для простоты расчетом радиуса действия только на крейсерском участке пути, обозначим начальный вес самолета через  $G_1$  и конечный вес в момент возвращения на базу —  $G_2$ .

На основании формулы (24.7) расстояние от пункта вылета до цели<sup>1</sup>

$$L_1 = 3,6f \ln \frac{G_1}{G_x},$$

а расстояние от цели до пункта посадки

$$L_2 = 3,6f \ln \frac{G_x - G_{сбр}}{G_2},$$

где

$$f = a \left( \frac{KM}{C_e} \right)_{\max \max},$$

во все время полета (к цели и обратно) остается неизменным.

<sup>1</sup> В этих формулах полагаем, что аэродинамическое качество летательного аппарата после сброса нагрузки остается неизменным.

Так как радиус действия, по его определению, должен быть равен любому из этих расстояний, то, приравняв  $L_1$  и  $L_2$ , придем к уравнению

$$3,6f \ln \frac{G_1}{G_x} = 3,6f \ln \frac{G_x - G_{сбр}}{G_2}.$$

После сокращения на общий множитель  $3,6f$  и перехода от логарифмов к числам предыдущее уравнение можно привести к виду

$$G_x^2 - G_{сбр}G_x - G_1G_2 = 0. \quad (48.7)$$

Решая квадратное уравнение (48.7) и ограничиваясь в соответствии с физическим смыслом задачи положительным корнем, найдем

$$G_x = 0,5G_{сбр} + \sqrt{0,25G_{сбр}^2 + G_1G_2}. \quad (49.7)$$

Подставив в общее выражение дальности (24.7)  $G_x$  по (49.7) в качестве конечного веса при полете к цели<sup>1</sup>, получим для максимального радиуса действия самолета с ТРД следующее выражение:

$$R = 3,6a \left( \frac{KM}{C_e} \right)_{\max \max} \ln \frac{G_1}{0,5G_{сбр} + \sqrt{0,25G_{сбр}^2 + G_1G_2}}. \quad (50.7)$$

Выбирая режим полета так, чтобы величина  $KM/C_e$  была максимально возможной, получим максимальный радиус действия самолета с ТРД.

Положив в (50.7)  $G_{сбр} = 0$ , т. е. рассматривая полет без сбрасывания груза, получим

$$R_0 = \frac{1}{2} 3,6a \left( \frac{KM}{C_e} \right)_{\max \max} \ln \frac{G_1}{G_2}. \quad (50a.7)$$

Сравнивая (50a.7) с (24.7), замечаем, что в случае  $G_{сбр} = 0$  радиус действия равен половине наибольшей дальности полета.

На основании аналогичных соображений можно получить выражение (вывод которого опускается) для радиуса действия самолета с винтовыми двигателями

$$R = 270 \frac{K\eta}{C_e} \ln \frac{G_1}{0,5G_{сбр} + \sqrt{0,25G_{сбр}^2 + G_1G_2}}. \quad (51.7)$$

Здесь, как и прежде,  $\eta$  — коэффициент полезного действия винтов.

**Радиус действия сверхзвукового самолета с ТРД.** Ранее в этой главе было показано, что при прочих равных условиях дальность полета определяется значением функции

$$f = a \frac{KM}{C_e},$$

причем она получается тем большей, чем больше  $f$ .

Расчеты показывают, что для сверхзвуковых самолетов с не слишком большой максимальной скоростью горизонтального полета, оцени-

<sup>1</sup> Конечно, тот же результат мы получили бы, если бы подставили  $G_x$  в выражение пути  $L_2$  от цели к пункту посадки.

ваемой значениями числа  $M=2\div 4$ , максимум функции  $f$  получается<sup>1</sup> при сравнительно небольших дозвуковых скоростях полета, приблизительно соответствующих критическому числу  $M_{кр}$ .

В то же время, например, для военных самолетов во многих случаях при выполнении задания возникает необходимость на некоторых участках маршрута повышать скорость полета, но на больших скоростях значения функции  $f$  малы и, следовательно, дальность полета получается небольшой. В результате мы встречаемся с противоречием: с одной стороны, для получения большой дальности выгодно лететь со сравнительно небольшой дозвуковой скоростью (и соответственно на сравнительно небольшой высоте), с другой, — на некоторых участках маршрута полета требуется большая скорость (и соответственно большая высота).

Естественно, что для преодоления такого противоречия рационально маршрут полета разбить на два участка, каждый из которых самолет проходит на различных скоростях и высотах.

При таком «комбинированном» полете, хотя дальность полета и будет меньшей, чем при полете с дозвуковой скоростью на всем пути, уменьшение это получится не таким большим, как в том случае, когда скорость на всем пути сверхзвуковая.

Изложим основы расчета *радиуса действия* при комбинированном полете, предполагая, что в момент сбрасывания груза скачком *изменяются вес самолета и аэродинамическое качество*.

Будем считать известными аэродинамические характеристики самолета и зависимость функции

$$f = a \frac{KM}{C_e}$$

от скорости полета. Высоту полета будем считать большей 11 км. Для радиуса действия самолета имеем

$$R = L_1 + L_{c1} = L_2 + L_{c2}, \quad (52.7)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — пути, которые самолет проходит на дозвуковой скорости на пути к цели и обратно;

$L_{c1}$  и  $L_{c2}$  — соответствующие расстояния, на которых полет происходит со сверхзвуковой скоростью.

На основании выведенных ранее формул имеем

$$L_1 = 3,6 f_{д1} \ln \frac{G_1}{G_1 - G_{T1}}, \quad (53.7)$$

$$L_2 = 3,6 f_{д2} \ln \frac{G_1 - G_{T1} - G_{T,c} - G_{cсп}}{G_2}, \quad (54.7)$$

$$L_{c1} = 3,6 f_{c1} \ln \frac{G_1 - G_{T1}}{G_1 - G_{T1} - G_{T,c1}}, \quad (55.7)$$

$$L_{c2} = 3,6 f_{c2} \ln \frac{G_1 - G_{T1} - G_{T,c1} - G_{cсп}}{G_1 - G_{T1} - G_{T,c} - G_{cсп}}. \quad (56.7)$$

<sup>1</sup> Для самолетов, летающих с большими сверхзвуковыми скоростями, максимум функции  $f$  может получиться и при больших значениях числа Маха ( $M > 1$ ), так как при больших  $M$  аэродинамическое качество  $K$  становится почти постоянным, в то время как  $M$  неуклонно растет.

В выражениях (53.7) — (56.7) приняты обозначения:  
 $f_{д1}$ ,  $f_{д2}$  и  $f_{с1}$ ,  $f_{с2}$  — соответственно значения функции

$$f = a \frac{KM}{C_e}$$

на режимах дозвуковой и сверхзвуковой скорости полета до и после сбрасывания груза;

$G_1$  — вес самолета в начале крейсерского участка полета;

$G_2$  — вес самолета в конце крейсерского участка полета;

$G_{т1}$  — вес топлива, расходуемого на расстоянии  $L_1$ ;

$G_{т}$  — полный вес топлива, расходуемого на полет;

$G_{т.с}$  — вес топлива, расходуемого на полет со сверхзвуковой скоростью;

$G_{т.с1}$  — вес топлива, расходуемого на участке  $L_{с1}$  полета к цели со сверхзвуковой скоростью;

$G_{сбр}$  — вес сбрасываемого груза.

Расходуемые на разных участках полета количества топлива, очевидно, должны удовлетворять равенству

$$G_{т1} + G_{т2} + G_{т.с} = G_{т}. \quad (57.7)$$

Очевидно,  $L_1$  и  $L_2$ ,  $L_{с1}$  и  $L_{с2}$  могут быть приняты равными, т. е.

$$L_1 = L_2, \quad L_{с1} = L_{с2}$$

или

$$f_{д1} \ln \frac{G_1}{G_1 - G_{т1}} = f_{д2} \ln \frac{G_1 - G_{т1} - G_{т.с} - G_{сбр}}{G_2}, \quad (58.7)$$

$$f_{с1} \ln \frac{G_1 - G_{т1}}{G_1 - G_{т1} - G_{т.с1}} = f_{с2} \ln \frac{G_1 - G_{т1} - G_{т.с1} - G_{сбр}}{G_1 - G_{т1} - G_{т.с} - G_{сбр}}. \quad (59.7)$$

Если вместо  $f_{д1}$ ,  $f_{д2}$  и  $f_{с1}$ ,  $f_{с2}$  подставить их выражения, то после преобразований эти уравнения можно привести к виду

$$\frac{G_1}{G_1 - G_{т1}} = \left( \frac{G_1 - G_{т1} - G_{т.с} - G_{сбр}}{G_2} \right) \bar{K}_д, \quad (60.7)$$

$$\frac{G_1 - G_{т1}}{G_1 - G_{т1} - G_{т.с1}} = \left( \frac{G_1 - G_{т1} - G_{т.с1} - G_{сбр}}{G_1 - G_{т1} - G_{т.с} - G_{сбр}} \right) \bar{K}_с, \quad (61.7)$$

где приняты обозначения

$$\bar{K}_д = \frac{K_{д2}}{K_{д1}}, \quad \bar{K}_с = \frac{K_{с2}}{K_{с1}}.$$

Так как полный вес топлива  $G_{т}$ , вес топлива, затрачиваемого на полет со сверхзвуковой скоростью,  $G_{т.с}$ , вес сбрасываемого груза  $G_{сбр}$  и значения аэродинамического качества на дозвуковой  $K_{д1}$ ,  $K_{д2}$  и на сверхзвуковой  $K_{с1}$ ,  $K_{с2}$  скорости предполагаются заданными, то три уравнения (57.7), (60.7) и (61.7) содержат три неизвестные:  $G_{т1}$ ,  $G_{т2}$  и  $G_{т.с1}$ ; задача, следовательно, может быть решена до конца.

Решение затрудняется тем, что уравнения (60.7) и (61.7) трансцендентные; эту трудность можно преодолеть, если принять во внимание, что значения аэродинамического качества  $K_{д1}$ ,  $K_{д2}$  и  $K_{с1}$ ,  $K_{с2}$  до сбрасывания и после сбрасывания груза сравнительно близки, так что  $\bar{K}_д$  и  $\bar{K}_с$  не сильно отличаются от единицы, с одной стороны, и что относительные запасы топлива на разных участках полета составляют небольшую долю от единицы, — с другой.

В относительных величинах (все величины отнесены к начальному весу самолета  $G_1$ ) уравнения (57.7), (60.7) и (61.7) принимают вид

$$\bar{G}_{T1} + \bar{G}_{T2} + \bar{G}_{T.c} = \bar{G}_T, \quad (62.7)$$

$$\frac{1}{1 - \bar{G}_{T1}} = \left( \frac{1 - \bar{G}_{T1} - \bar{G}_{T.c} - \bar{G}_{c6p}}{\bar{G}_2} \right)^{\bar{K}_d}, \quad (63.7)$$

$$\frac{1 - \bar{G}_{T1}}{1 - \bar{G}_{T1} - \bar{G}_{T.c1}} = \left( \frac{1 - \bar{G}_{T1} - \bar{G}_{T.c1} - \bar{G}_{c6p}}{1 - \bar{G}_{T1} - \bar{G}_{T.c} - \bar{G}_{c6p}} \right)^{\bar{K}_c}. \quad (64.7)$$

Основываясь на сделанном замечании и применяя правило бинома Ньютона, ограничившись двумя первыми членами рядов, получим

$$\bar{G}_{T1}^2 - \left[ \frac{1}{\bar{K}_d} + (1 - \bar{G}_{T.c} - \bar{G}_{c6p}) \right] \bar{G}_{T1} + (\bar{G}_T - \bar{G}_{T.c}) = 0, \quad (65.7)$$

$$\bar{G}_{T.c1}^2 - \left[ \frac{1}{\bar{K}_c} + (1 - 2\bar{G}_{T1} - \bar{G}_{c6p}) \right] \bar{G}_{T.c1} + (1 - \bar{G}_{T1}) \bar{G}_{T.c} = 0. \quad (66.7)$$

Решая конечное алгебраическое уравнение (65.7), найдем неизвестную  $\bar{G}_{T1}$ :

$$\bar{G}_{T1} = \frac{P_d}{2} + \sqrt{\frac{P_d^2}{4} - q_d}, \quad (67.7)$$

а решая уравнение (66.7), — неизвестную  $\bar{G}_{T.c1}$ :

$$\bar{G}_{T.c1} = \frac{P_c}{2} - \sqrt{\frac{P_c^2}{4} - q_c}. \quad (68.7)$$

В выражениях (67.7) и (68.7) приняты следующие обозначения:

$$P_d = \frac{1}{\bar{K}_d} + 1 - \bar{G}_{T.c} - \bar{G}_{c6p}, \quad (69.7)$$

$$q_d = \bar{G}_T - \bar{G}_{T.c},$$

$$P_c = \frac{1}{\bar{K}_c} + 1 - 2\bar{G}_{T1} - \bar{G}_{c6p}, \quad (70.7)$$

$$q_c = (1 - \bar{G}_{T1}) \bar{G}_{T.c}.$$

Из уравнения (62.7) определим  $\bar{G}_{T2}$ . После того как найдены значения  $\bar{G}_{T1}$ ,  $\bar{G}_{T2}$ ,  $\bar{G}_{T.c1}$ , дальнейший расчет не представляет трудности. Радиус действия сверхзвукового самолета с ТРД определяется по формуле (52.7)

$$R = L_1 + L_{c1} = 3,6 \left[ f_{d1} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_{T1}} + f_{c1} \ln \frac{1 - \bar{G}_{T1}}{1 - \bar{G}_{T1} - \bar{G}_{T.c1}} \right]. \quad (71.7)$$

Задавая различными значениями  $\bar{G}_{T.c}$  и  $V_c$ , по приведенным формулам можно построить график зависимости радиуса действия  $R$  от длины участка полета со сверхзвуковой скоростью  $L_{c1}$  и от сверхзвуковой скорости  $V_c$ .

Так как дозвуковому и сверхзвуковому режимам полета на дальность соответствуют различные значения  $c_{yh}$  и  $M$  (см. гл. IV), то, как

видно из (25.7), давление  $p_H$  наружного воздуха при полете на этих двух режимах получается различным; различной, следовательно, будет и высота полета на этих двух режимах. В принятой нами постановке задачи высота и скорость полета при переходе от одного режима к другому изменяются скачком. В действительности для перехода от дозвукового режима к сверхзвуковому необходимо осуществить постепенный разгон самолета с одновременным набором высоты; точно так же при торможении для перехода от сверхзвукового режима к дозвуковому необходимо одновременно с уменьшением скорости уменьшать и высоту полета. Расход топлива на таких переходных режимах будет отличаться от расхода на крейсерском режиме. Способы расчета расхода топлива

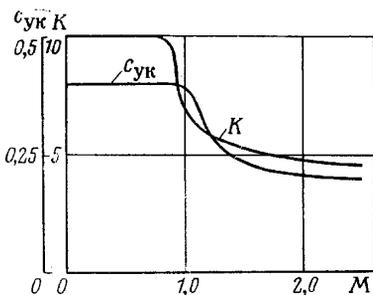


Рис. 16.7. Аэродинамические характеристики самолета (пример)

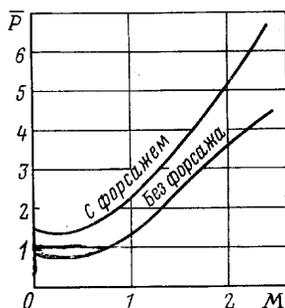


Рис. 17.7. Зависимость относительной тяги  $\bar{P}$  от числа  $M$  для номинального и форсированного режимов работы двигателя для  $H \geq 11$  км (пример)

в процессе разгона и набора высоты изложены в гл. VIII. Аналогично можно было бы определить расход топлива и в процессе торможения и снижения высоты.

При достаточно большой дальности полета поправки, обусловленные наличием переходных режимов, получаются незначительными, так что для расчета первого приближения вполне допустимо пользоваться формулой (71.7).

Проследим ход расчета радиуса действия сверхзвукового самолета с ТРД при комбинированном полете на конкретном примере. Возьмем для расчета следующие основные данные:

- вес самолета в начале крейсерского полета  $G_1 = 784,8 \text{ кн} = 80 \text{ т}$ ;
- вес топлива, расходуемого на крейсерском участке полета,  $G_T = 392,4 \text{ кн} = 40 \text{ т}$ ;
- вес сбрасываемой нагрузки  $G_{сбр} = 39,24 \text{ кн} = 4,0 \text{ т}$ ;
- площадь крыльев  $S = 160 \text{ м}^2$ .

Аэродинамические характеристики самолета и характеристики двигателей, необходимые для расчета, представлены на рис. 16.7—19.7. Предполагается, что на самолете установлены ТРД с возможностью форсажа путем дожигания топлива.

На высотах  $H \geq 11$  км величина *располагаемой* силы тяги  $P_p$  для некоторого значения  $M$  определяется по формуле

$$P_p(H, M) = P_p(11, 0) \frac{\Delta}{\Delta_{11}} \bar{P},$$

где сила тяги  $P_p(11, 0)$ , соответствующая  $H = 11$  км, при  $M = 0$  принята

$$P_p(11, 0) = 78,48 \text{ кн} = 8 \text{ т}.$$

Через  $\bar{P}$  здесь обозначена относительная тяга

$$\bar{P} = \frac{P_p(H, M)}{P_p(H, 0)}$$

и  $\Delta$  и  $\Delta_{11}$  — относительная плотность воздуха на высотах  $H \geq 11$  км и  $H = 11$  км соответственно.

На рис. 19.7 показана принятая зависимость удельного расхода топлива  $\bar{C}_e = \frac{C_{e \text{ др}}}{C_{e \text{ ном}}}$  от степени дросселирования двигателя, определяемая отношением

$$\frac{P_{\text{др}}}{P_{\text{ном}}} = \frac{P_p(11, M)}{P_p(11, 0)}$$

Предполагается, что после сбрасывания груза над целью *аэродинамическое качество* при дозвуковых числах  $M$  увеличивается на 4,5%, а при сверхзвуковых — на 4%.

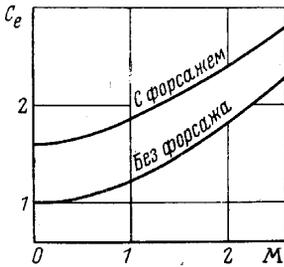


Рис. 18.7. Зависимость удельного расхода топлива  $C_e$  от числа  $M$  для номинального и форсированного режимов работы двигателя для  $H \geq 11$  км (пример)

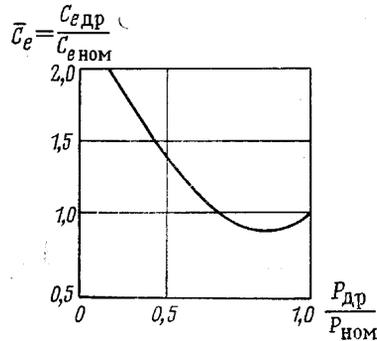


Рис. 19.7. Зависимость удельного расхода топлива от степени дросселирования (пример)

Прежде всего найдем режим полета, соответствующий максимальной дальности полета. В целях простоты предположим, что участок по горизонтали, который самолет проходит при наборе высоты и при планировании,  $L_{\text{поб. пл}} = 200$  км.

В соответствии с правилами, изложенными выше, необходимо отыскать режим полета, обеспечивающий максимум функции  $f_{д1}$  при дозвуковом полете. Входящий в выражение этой функции удельный расход топлива в общем случае соответствует *неполному открытию дросселя*; степень дросселирования можно найти по (17.7). На основании этого выражения сила тяги, потребная<sup>1</sup> для полета при некотором значении  $M$  на высоте  $H = 11$  км:

$$P(11, M) = 0,7 S p_{11} M^2 c_x = c M^2 c_x,$$

где постоянная  $c = 0,7 S p_{11}$ , а  $p_{11}$  — барометрическое давление на высоте  $H = 11$  км.

Перейдя при помощи рис. 17.7 от этой силы тяги, соответствующей  $M \neq 0$ , к силе тяги на той же  $H = 11$  км, но при  $M = 0$ , и сравнив эту

<sup>1</sup> Напомним, что при установившемся полете потребная тяга равна располагаемой тяге, что и определяет потребную степень дросселирования.

величину с принятой по условиям задачи  $P_p(11,0) = 78,48 \text{ кН} = 8 \text{ т}$ , найдем требуемую степень дросселирования.

В табл. 5.7 приведены результаты расчета по определению  $f_{д1}$ . Из этой таблицы видно, что наибольшее значение  $f_{д1}$  получается при  $M_{нв} = 0,85$ :

$$f_{д1} = \left( \frac{K M}{C_{e \text{ др}}} \right)_{\max} = 8,0.$$

Степень дросселирования двигателей при этом

$$\frac{P_{др}}{P_{ном}} = 0,832.$$

Далее надо найти режим полета с максимальной (сверхзвуковой) скоростью, соответствующей работе двигателя на режиме форсажа. Для этого надо, задавшись рядом значений чисел  $M$ , определить, подобно тому, как сделано выше, требуемую степень дросселирования двигателя на высоте  $H = 11 \text{ км}$ . Построив по данным таблицы зависимость  $M = M \left( \frac{P_{др}}{P_{ном}} \right)$ , найти число  $M_{ф}$ , которому соответствует степень дросселирования  $\frac{P_{др}}{P_{ном}} = 1$  (т. е. работа двигателя на полном газе). Результаты такого расчета сведены в табл. 6.7. В этом случае, как показывают расчеты, величины  $M$  и  $f_{с1}$ , соответствующие полету на режиме форсажа, будут следующими:

$$M_{ф} = 1,8; f_{с1} = 3,98.$$

Таблица 5.7  
(Двигатель без форсажа)

| M                                       | 0,80   | 0,85   | 0,88   | 0,90   | Примечание  |
|---|--------|--------|--------|--------|---|
| $K$                                     | 10,00  | 9,85   | 9,60   | 9,35   | По графику рис. 16.7<br>То же                                       |
| $c_{yк}$                                | 0,4    | 0,4    | 0,4    | 0,4    |   |
| $c_{xк}$                                | 0,0400 | 0,0407 | 0,0418 | 0,0429 | $c_{xк} = \frac{c_{yк}}{K}$   |
| $P(11, M) [\text{кН}]$                  | 64,746 | 74,360 | 81,619 | 87,898 | } $P(11, M) = 0,7 p_{11} S M^2 c_{xк}$                              |
| $P(11, M) [\text{кГ}]$                  | 6600   | 7580   | 8320   | 8960   |   |
| $\bar{P}$                               | 1,06   | 1,14   | 1,18   | 1,20   | По графику рис. 17.7  |
| $\frac{P_{др}}{P_{ном}}$                | 0,778  | 0,832  | 0,882  | 0,934  | $\frac{P_{др}}{P_{ном}} = \frac{P(11, M)}{\bar{P} \cdot P_p(11,0)}$ |
| $\bar{C}_e$                             | 0,90   | 0,90   | 0,92   | 0,95   | По графику рис. 19.7  |
| $C_{e \text{ др}}$                      | 1,025  | 1,045  | 1,084  | 1,120  | $C_{e \text{ др}} = \bar{C}_e C_e$<br>( $C_e$ по графику рис. 18,7) |
| $f_{д1} = \frac{K M}{C_{e \text{ др}}}$ | 7,81   | 8,00   | 7,80   | 7,50   | —   |

Зная значения коэффициентов  $f_{д1}$  и  $f_{с1}$  на дозвуковой и сверхзвуковой скорости полета, можно рассчитать радиус действия самолета, если известно количество топлива, расходуемого на сверхзвуковой части полета. Проведем такой расчет, предполагая, что запас топлива, расходуемого при полете на сверхзвуковой скорости,

$$\bar{G}_{т.с} = 0,1.$$

Таблица 6.7  
(Двигатель с форсажем)<sup>1)</sup>

| M                              | 1,0    | 1,2    | 1,4    | 1,6    | 1,8    | 2,0    |
|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $K$                            | 6,7    | 5,9    | 5,5    | 5,2    | 5,0    | 4,9    |
| $c_{yк}$                       | 0,39   | 0,30   | 0,25   | 0,23   | 0,22   | 0,21   |
| $c_{xк}$                       | 0,0582 | 0,0509 | 0,0455 | 0,0442 | 0,0440 | 0,0439 |
| $P$ (11, M) [кН]               | 137,2  | 180,0  | 225,6  | 287,8  | 361,0  | 444,4  |
| $P$ (11, M) [кГ]               | 15000  | 18350  | 23000  | 29400  | 36800  | 45300  |
| $\bar{P}$                      | 2,25   | 2,75   | 3,35   | 3,90   | 4,55   | 5,25   |
| $\frac{P_{дp}}{P_{ном}}$       | 0,835  | 0,835  | 0,860  | 0,944  | 1,00   | 1,08   |
| $\bar{C}_e$                    | 0,90   | 0,90   | 0,91   | 0,96   | 1,00   | —      |
| $C_e$                          | 1,84   | 1,94   | 2,04   | 2,15   | 2,27   | 2,40   |
| $C_{e дp}$                     | 1,655  | 1,745  | 1,855  | 2,060  | 2,270  | —      |
| $f_{c1} = \frac{KM}{C_{e дp}}$ | 4,05   | 4,06   | 4,15   | 4,03   | 3,98   | —      |

1) Расчетные формулы и графики берутся аналогично примечанию табл. 5.7.

На основании табл. 5.7

$$f_{д1} = a \left( \frac{KM}{C_{e дp}} \right)_{\max} = 295,1 \cdot 8,0 = 2360.$$

В соответствии с условиями задачи после сброса груза аэродинамическое качество увеличивается при  $M < 1$  на 4%, так что

$$\bar{K}_д = 1,04.$$

На сверхзвуковом режиме полета

$$f_{c1} = 295,1 \cdot 3,98 = 1170$$

и соответственно

$$\bar{K}_c = 1,045.$$

Коэффициенты уравнения для определения  $\bar{G}_{т1}$  по формулам (69.7):

$$P_d = 1,806; q_d = 0,4.$$

Таким образом, относительный запас топлива, расходуемого на дозвуковой скорости при полете к цели:

$$\bar{G}_{т1} = 0,258.$$

По формулам (70.7)

$$P_c = 1,397; q_c = 0,074$$

и расход топлива на сверхзвуковом режиме полета на пути к цели

$$\bar{G}_{т. c1} = 0,054.$$

Теперь по формуле (71.7) найдем радиус действия

$$R = 3,6 \left( 2360 \ln \frac{1}{0,742} + 1170 \ln \frac{0,742}{0,698} \right) = 2530 + 256 = 2786 \text{ км.}$$

Подобным же образом можно провести расчет и для других относительных запасов топлива, расходуемого на сверхзвуковом режиме полета. Результаты подобных расчетов приведены на графике рис. 20.7.

Как и следовало ожидать, наибольший радиус действия достигается в том случае, когда на всем протяжении режим полета дозвуковой. Увеличение участка пути, соответствующего полету со сверхзвуковой скоростью, заметно уменьшает радиус действия: если весь полет осуществляется со сверхзвуковой скоростью, то радиус действия составляет около 50% его величины при полете с дозвуковой скоростью.

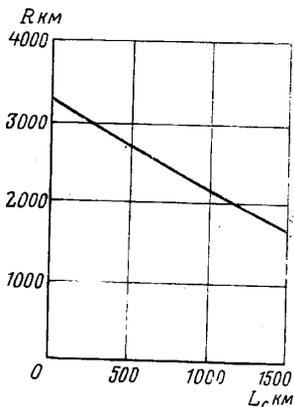


Рис. 20.7. К определению радиуса действия самолета

**Способы увеличения дальности полета и радиуса действия.** Из всего изложенного выше следует, что дальность полета (и радиус действия) в сильной степени зависит от относительного запаса топлива на самолете: чем больше относительный запас топлива, тем больше дальность полета. Запас топлива определяется в зависимости от заданных условий прочности конструкции самолета и емкости топливных баков. Препятствием на пути увеличения запаса топлива (а значит, и полного веса самолета) могут явиться также условия взлета самолета, так как при увеличении по-

летного веса длина взлетной дистанции самолета увеличивается (см. гл. XI).

Задачу об увеличении дальности полета или радиуса действия можно решить, получив предварительно ответ на следующие вопросы.

Возможно ли, пойдя на некоторое уменьшение запаса прочности конструкции самолета в начале его полета и не ухудшая взлетных качеств самолета, увеличить запас топлива?

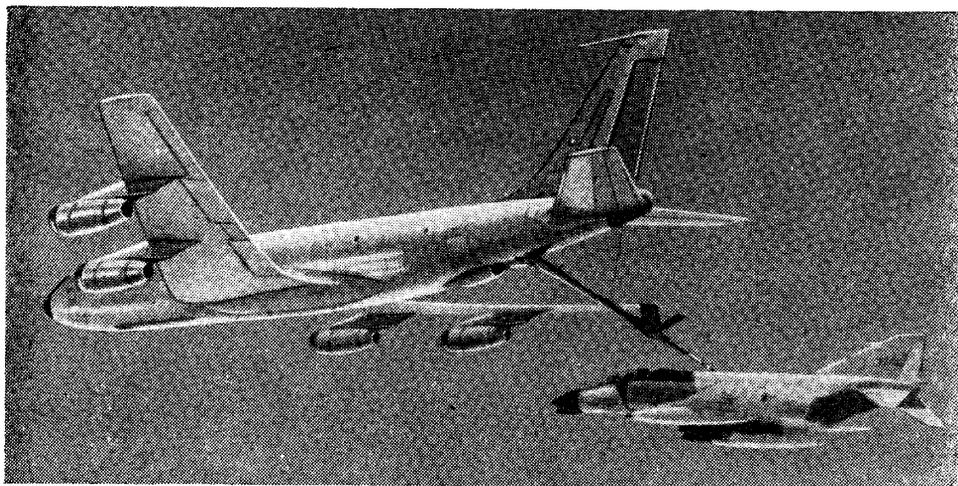


Рис. 21.7. Заправка самолета «Фантом-2» (США) топливом в полете

Возможно ли в процессе полета на дальность восполнять запас выгорающего топлива?

На оба эти вопроса положительный ответ дает система заправки самолета топливом в полете.

Специальный самолет-заправщик, подойдя на достаточное расстояние к заправляемому самолету, при помощи особой системы перекачки передает ему часть своего запаса топлива. На рис. 21.7 показано возможное положение самолетов при заправке топливом в полете.

Пополнять запас топлива можно сразу после взлета самолета, если емкость баков это позволяет; в этом случае добавленное количество топлива приведет к увеличению веса самолета против его стартового веса и, следовательно, к некоторому снижению запаса прочности. Пополнять запас топлива можно и в процессе полета через некоторое время после выгорания определенной части топлива. В этом случае пополнять запас можно неограниченное число раз, вследствие чего и дальность полета принципиально также можно увеличивать неограниченно.

Практический интерес представляет задача о расчете радиуса действия самолета, летящего к определенной цели и дополнительно заправляемого топливом в полете на пути следования к цели и на обратном пути. Таких дополнительных заливок топливом в общем случае может быть несколько.

Для простоты рассуждений примем, что самолет-заправщик и заправляемый (основной) самолет совершенно идентичны по аэродинамическим характеристикам и по начальному (стартовому) весу. При этом самолет-заправщик имеет на борту больший запас топлива  $G_{т.з}$ , чем заправляемый самолет, располагающий топливом  $G_{т.ост}$ , на величину  $G_{сбр}$  сбрасываемого груза, который есть на заправляемом самолете и которого нет на заправщике:

$$G_{т.з} = G_{т.ост} + G_{т.сбр}.$$

Ограничимся рассмотрением только того случая, когда в пути к цели (попутная заправка) происходит только одна заправка и высота полета при этом превышает 11 км; остальные задачи решаются аналогично.

Как показано в данной главе, при полете на наибольшую дальность последняя на высотах  $H \geq 11$  км определяется следующим выражением, общим для самолетов с ТРД и ТВД:

$$L = 3,6f \ln \frac{G_1}{G_2}. \quad (72.7)$$

Коэффициент  $f$  для данного самолета постоянен в течение всего полета; для самолетов с ТРД

$$f = a \left( \frac{K M}{C_e} \right)_{\max},$$

а для самолетов с винтовыми двигателями

$$f = 75 \left( \frac{K \eta}{C_e} \right)_{\max}.$$

Итак, пусть основной самолет и заправщик вылетают одновременно из одного и того же пункта, имея одинаковый начальный вес  $G_1$ , но разное количество топлива на борту. На некотором расстоянии  $R_1$  от пункта вылета заправщик заправляет топливом основной самолет, передавая ему некоторое количество топлива  $\Delta G_t$ . Для наибольшего радиуса действия основного самолета желательно, чтобы заправщик передал ему возможно большее количество топлива. Это получится в том случае, когда после дозаправки в полете вес основного заправляемого самолета вновь станет равным его начальному весу в момент вылета,

т. е.  $G_1$ . Тогда на некотором расстоянии от пункта вылета вес основного самолета после заправки топливом в полете станет

$$G_1 = G + \Delta G_T,$$

где  $G$  — вес самолетов (основного и заправщика) перед началом заправки; относя все веса к начальному весу  $G$  самолетов в момент вылета, получим

$$1 = \bar{G} + \Delta \bar{G}_T,$$

откуда

$$\Delta \bar{G}_T = 1 - \bar{G}, \quad (73.7)$$

где  $\bar{G}$  — относительный вес самолетов в момент времени, непосредственно предшествующий заправке.

На первой фазе совместного полета двух самолетов (до заправки) неизвестными являются: расстояние  $R_1$  от пункта вылета, на котором происходит заправка, вес самолетов  $G$  в этот момент времени и количество топлива  $\Delta G_T$ , которое заправщик отдает основному самолету. Найдем эти неизвестные.

Расстояние  $R_1$  должно быть таким, чтобы оставшийся у заправщика запас топлива обеспечил ему возвращение на исходный пункт вылета; расстояние это, следовательно, есть радиус действия заправщика с учетом не используемого им запаса топлива, которое он должен передать основному самолету.

Согласно формуле (71.7) для радиуса действия мы должны принять отдаваемое заправщиком количество топлива за сбрасываемую нагрузку (предполагается, что заправка происходит в течение короткого времени). Тогда на обратном пути заправщика после заправки на расстоянии  $R_1$  от пункта вылета его начальный вес будет равен  $G - \Delta G_T$ , а конечный вес без топлива, израсходованного на полет, и топлива, отданного основному самолету, будет  $G_2 - G_{сбр}$ . В результате приравнивания логарифмов, сокращения на общий множитель  $3,6f$  и перехода от логарифмов к числам получим

$$\frac{1}{\bar{G}} = \frac{\bar{G} - \Delta \bar{G}_T}{\bar{G}_2 - \bar{G}_{сбр}} = \frac{\bar{G} - \Delta \bar{G}_T}{\bar{G}_{20}},$$

где для краткости введено обозначение

$$\bar{G}_{20} = \bar{G}_2 - \bar{G}_{сбр}.$$

Подставив в найденное выражение  $\Delta \bar{G}_T$  согласно (73.7), придем к квадратному уравнению для определения  $\bar{G}$ :

$$\bar{G}^2 - 0,5\bar{G} - 0,5\bar{G}_{20} = 0. \quad (74.7)$$

Решение этого уравнения дает

$$\bar{G} = 0,25 + \sqrt{0,0625 + 0,25\bar{G}_{20}}. \quad (75.7)$$

Теперь, воспользовавшись (73.7) и (75.7), можно определить относительное количество топлива, отдаваемое заправщиком основному самолету:

$$\Delta \bar{G}_T = 0,75 - \sqrt{0,0625 + 0,5\bar{G}_{20}}. \quad (76.7)$$

Радиус действия заправщика, как уже отмечалось,

$$R_s = 3,6f \ln \frac{1}{\bar{G}}. \quad (77.7)$$

Определим теперь радиус действия *основного самолета* с учетом дополнительной заправки в полете.

До места заправки топливом основной самолет пролетит расстояние, определяемое (77.7); после заправки его вес станет равен начальному весу  $G_1$ . Если обозначить полетный вес основного самолета над целью, где он сбрасывает груз, через  $G_{ц}$ , то полное расстояние от пункта вылета до цели — радиус действия основного самолета с учетом заправки топливом в полете — можно определить по формуле

$$R = 3,6f \left( \ln \frac{1}{\bar{G}} + \ln \frac{1}{\bar{G}_{ц}} \right)$$

или

$$R = 3,6f \ln \frac{1}{\bar{G} \bar{G}_{ц}}. \quad (78.7)$$

С другой стороны, радиус действия  $R$  основного самолета равен расстоянию от цели до пункта вылета, т. е.

$$R = 3,6f \ln \frac{\bar{G}_{ц} - \bar{G}_{сбр}}{\bar{G}_2 - \bar{G}_{сбр}} = 3,6f \ln \frac{\bar{G}_{ц} - \bar{G}_{сбр}}{\bar{G}_{20}}. \quad (79.7)$$

Приравняв (78.7) и (79.7), после сокращения на общий множитель  $3,6f$  получим

$$\ln \frac{1}{\bar{G} \bar{G}_{ц}} = \ln \frac{\bar{G}_{ц} - \bar{G}_{сбр}}{\bar{G}_{20}}$$

или после потенцирования

$$\bar{G}_{ц}^2 - \bar{G}_{сбр} \bar{G}_{ц} - \frac{\bar{G}_{20}}{\bar{G}} = 0. \quad (80.7)$$

Решая это квадратное уравнение и пренебрегая членом  $0,25 \bar{G}_{сбр}^2$  под знаком радикала ввиду его малости, получим

$$\bar{G}_{ц} = 0,5 \bar{G}_{сбр} + 2 \sqrt{\frac{\bar{G}_{20}}{1 + \sqrt{1 + 8 \bar{G}_{20}}}}. \quad (81.7)$$

Подставив (81.7) в (79.7), найдем радиус действия самолета в случае одной попутной заправки

$$R = 3,6f \ln \frac{2 \sqrt{\frac{\bar{G}_{20}}{1 + \sqrt{1 + 8 \bar{G}_{20}}} - 0,5 \bar{G}_{сбр}}{\bar{G}_{20}}}. \quad (82.7)$$

Радиус действия без заправки топливом в полете на основании (51.7), где слагаемым  $0,25 \bar{G}_{сбр}^2$  пренебрегаем,

$$R_0 = 3,6f \ln \frac{2}{\bar{G}_{сбр} + 2 \sqrt{\bar{G}_{20}}}.$$

Следовательно, относительный выигрыш в радиусе действия при одной попутной заправке топливом будет

$$\bar{R} = \frac{R}{R_0} = \ln \frac{2 \sqrt{\frac{\bar{G}_{20}}{1 + \sqrt{1 + 8 \bar{G}_{20}}} - 0,5 \bar{G}_{сбр}}{\bar{G}_{20}}}{\ln \frac{2}{\bar{G}_{сбр} + 2 \sqrt{\bar{G}_{20}}}}. \quad (83.7)$$

Если, например, относительный вес топлива  $\bar{C}_T=0,5$  и относительный вес сбрасываемого груза  $\bar{G}_{сбр}=0,05$ , то расчет по формуле (83.7) дает  $\bar{R}=1,33$ , т. е. радиус действия основного самолета увеличился бы на 33%. Количество топлива, которое заправщик отдает основному самолету, составило бы для этого случая  $\Delta\bar{G}_T=0,215$ .

В реальных условиях увеличение радиуса действия самолета путем заправки топливом в полете будет несколько меньшим, чем по приведенным формулам. Объясняется это тем, что, во-первых, формулы не учитывают время для сцепки и расцепки и заправки самолетов. Во-вторых, во время заправки вес основного самолета и заправщика быстро изменяется, а самолеты летят не на наивыгоднейшей высоте (на одной и той же высоте). Однако поскольку все же по сравнению с пол-

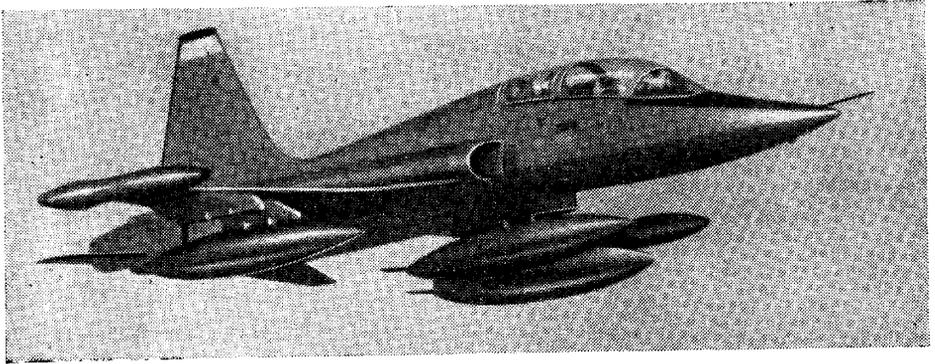


Рис. 22.7. Самолет F-5 (США) с подвесными баками

ным временем полета на заправку тратится весьма небольшое время, можно считать, что погрешности расчетов, проведенных без учета указанных обстоятельств, невелики.

Подчеркнем, что во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что аэродинамическое качество самолетов после заправки не изменялось. Возможен более общий случай, когда на самолете установлены дополнительные подвесные баки для топлива (рис. 22.7), которые после заправки сбрасываются, в результате чего изменяются коэффициент лобового сопротивления  $c_x$  и аэродинамическое качество. Хотя в этом случае расчет несколько усложняется, он не представляет трудностей и выполняется на основе аналогичных рассуждений.

Установка подвесных баков — самостоятельное средство повышения дальности полета самолетов; после выработки топлива в подвесных баках они сбрасываются. Расчет такого полета выполняется способом, подробно рассмотренным выше, и мы на нем останавливаться не будем.

## § 5. Влияние ветра на дальность полета

До сих пор рассматривался расчет дальности полета самолета в условиях безветрия. В реальных условиях полета на пути следования самолета может быть попутный, встречный, боковой, попутно-боковой и попутно-встречный ветер. При этих условиях полета дальность уже будет отличаться от дальности, полученной при отсутствии ветра.

Для расчета дальности полета при ветре вводят понятие технической и путевой скорости.

*Технической, или истинной, скоростью  $V$*  называют скорость полета самолета относительно воздуха, массы которого сами могут перемещаться относительно поверхности Земли. При данных весе самолета  $G$  и коэффициенте подъемной силы  $c_y$  техническая скорость не зависит от ветра.

Путевой скоростью  $V_{зем}$  называют скорость самолета относительно поверхности Земли; путевая скорость зависит от ветра:

при попутном ветре

$$V_{зем} = V + W, \quad (84.7)$$

при встречном ветре

$$V_{зем} = V - W, \quad (85.7)$$

где  $W$  — скорость ветра.

В самом общем случае направление ветра будет составлять некоторый угол с направлением путевой скорости (рис. 23.7). Летящий самолет при этом будет сноситься вбок от заданного направления полета

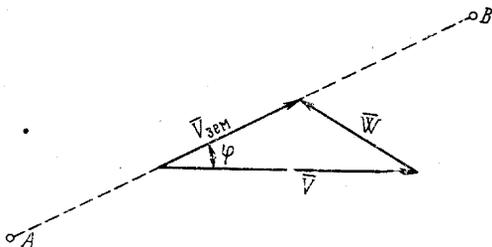


Рис. 23.7. Путевая скорость и скорость ветра

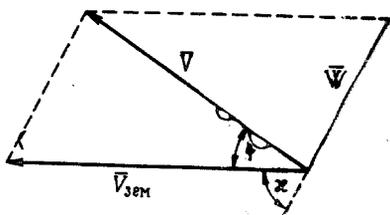


Рис. 24.7. Путевая и техническая скорости

( $AB$  на рис. 23.7). Поэтому, для того чтобы прилететь в намеченный пункт, истинную скорость  $V$  (техническую) надо направить под углом  $\varphi$  к направлению путевой скорости  $V_{зем}$ . Угол  $\varphi$  называют *углом сноса*.

Из рис. 24.7 следует, что

$$\sin \varphi = \frac{W}{V} \sin \alpha, \quad (86.7)$$

а для определения путевой скорости в общем случае справедливо выражение

$$V_{зем} = V \cos \varphi + W \cos \alpha. \quad (87.7)$$

При боковом ветре и угле сноса  $\varphi$  этот боковой ветер, имеющий скорость  $W$ , при расчетах всегда можно заменить *фиктивным* попутным или встречным ветром, изменяющим путевую скорость так, как ее изменяет боковой ветер. Другими словами, при расчете можно воспользоваться понятием эквивалентного ветра, т. е. совпадающего по направлению с путевой скоростью и дающего ту же путевую скорость, что и действительный ветер.

Таким образом, скорость эквивалентного или фиктивного ветра

$$W_э = V_{зем} - V$$

или, принимая во внимание уравнение (87.7),

$$W_э = W \cos \alpha - V(1 - \cos \varphi). \quad (88.7)$$

Для расчета дальности полета при наличии ветра надо знать километровой расход топлива, т. е. расход топлива на один километр пути, измеренного на поверхности Земли:

$$q_{к.зем} = \frac{q_ч}{V_{зем}},$$

или

$$q_{\text{к.зем}} = q_{\text{к}} \frac{V}{V + W_{\text{э}}} \quad (89.7)$$

В том частном случае, когда направление ветра совпадает с направлением полета ( $W_{\text{э}} = W$ ), расчет дальности полета, а также радиуса действия самолета принципиально ничем не отличается от расчета в условиях безветрия. В этом случае только вместо скорости  $V$  в расчет вводится скорость  $V_{\text{зем}}$ , связанная с истинной скоростью полета соотношениями (84.7) или (85.7).

Расчет дальности полета при боковом ветре ведут в такой последовательности. По формуле (86.7) для каждого значения истинной скорости полета  $V$  определяют  $\sin \varphi$  и угол сноса  $\varphi$ . Затем по выражению (88.7) находят скорость эквивалентного ветра  $W_{\text{э}}$ . Наконец, по выражению (89.7) определяют километровый расход топлива относительно Земли  $q_{\text{к.зем}}$  и дальность полета

$$L_{\text{зем}} = \int_{G_2}^{G_1} \frac{dG}{q_{\text{к.зем}}}$$

Очевидно, что дальность полета относительно Земли отличается от технической дальности полета за счет скорости и направления ветра по трассе полета самолета. При попутном ветре по всей трассе дальность полета относительно Земли получится большей, чем техническая дальность, при встречном ветра — меньшей.

Практический интерес представляет расчет радиуса действия самолета с учетом влияния ветра. Рассмотрим эту задачу.

Предположим, что во все время полета к цели и обратно имеется ветер неизменных скорости и направления; пусть скорость ветра равна  $W$ , и вектор скорости лежит в плоскости траектории полета, а направление ветра совпадает с направлением полета самолета от цели к исходному пункту вылета.

Будем считать также, что километровый расход топлива  $q_{\text{к}}$  при безветрии пропорционален полетному весу самолета  $G$ . В этом случае на пути к цели километровый расход топлива относительно Земли

$$q'_{\text{к.зем}} = q_{\text{к}} \frac{V}{V - W} = \frac{q_{\text{к}}}{1 - \frac{W}{V}} = \frac{\text{const}}{1 - \frac{W}{V}} G$$

и на обратном пути

$$q''_{\text{к.зем}} = \frac{q_{\text{к}}}{1 + \frac{W}{V}} = \frac{\text{const}}{1 + \frac{W}{V}} G.$$

При интегрировании постоянный множитель  $(1 \pm \frac{W}{V})$  выйдет за знак интеграла, и, поскольку при расчете радиуса действия самолета путь к цели должен равняться обратному пути, получим равенство (после сокращения на общий множитель  $\frac{1}{\text{const}}$ )

$$\left(1 - \frac{W}{V}\right) \ln \frac{G_1}{G_x} = \left(1 + \frac{W}{V}\right) \ln \frac{G_x}{G_2}.$$

Полученное равенство можно переписать также в следующем виде:

$$\left(\frac{G_1}{G_x}\right)^{1 - \frac{W}{V}} = \left(\frac{G_x}{G_2}\right)^{1 + \frac{W}{V}}$$

Отсюда можно определить вес самолета над целью:

$$G_x = G_1^{0,5(1 - \frac{W}{V})} G_2^{0,5(1 + \frac{W}{V})}$$

Следовательно, отношение  $G_1/G_x$ , величина которого, как показано ранее, определяет радиус действия самолета,

$$\frac{G_1}{G_x} = \left( \frac{G_1}{G_2} \right)^{0,5(1 + \frac{W}{V})}$$

Логарифм этого отношения

$$\ln \frac{G_1}{G_x} = 0,5 \left( 1 + \frac{W}{V} \right) \ln \frac{G_1}{G_2},$$

и радиус действия (если для простоты рассуждений ограничиться случаем полета без сбрасывания нагрузки над целью)

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\text{const}} \left( 1 - \frac{W}{V} \right) \ln \frac{G_1}{G_x} = \\ &= \frac{0,5}{\text{const}} \left( 1 - \frac{W^2}{V^2} \right) \ln \frac{G_1}{G_2} = \left( 1 - \frac{W^2}{V^2} \right) R_{W=0}, \end{aligned} \quad (90.7)$$

где  $R_{W=0}$  — радиус действия в спокойной атмосфере.

Из выражения (90.7) видно, что независимо от направления ветра радиус действия в рассматриваемом случае получится меньшим, чем в условиях спокойной атмосферы, поскольку скорость ветра входит в выражение (90.7) в квадрате. Этот вывод остается в силе и в том случае, когда самолет летит в одном направлении, а ветер на одной половине пути дует в одном направлении, а на другой — с той же скоростью, но в обратном направлении.

## ГЛАВА VIII

### НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

В предыдущей главе рассмотрены квазиустановившиеся режимы полета летательного аппарата.

Перейдем теперь к более общему случаю неустановившегося движения, причем вначале ограничимся классом движений, траектории которых лежат в неизменной вертикальной плоскости. Будем предполагать, что летательные аппараты, движение которых рассмотрено ниже, имеют крылья, в основном и создающие необходимую для полета подъемную силу.

Выше упоминалось, что полетом летательного аппарата, имеющего крылья, можно управлять, изменяя величину угла атаки крыльев  $\alpha$  и силы тяги  $P$  путем изменения режима работы двигателя. В общем случае к этим двум управляющим функциям — изменению угла атаки и силы тяги — надо было бы добавить третью — изменение угла наклона  $\varphi$  вектора силы тяги относительно системы координат, связанной с летательным аппаратом. Крылатые летательные аппараты, однако, обычно имеют фиксированное направление силы тяги относительно связанной сис-

темы координат, поэтому в дальнейшем угол  $\varphi$  между осью двигателя и хордой крыла примем неизменным. В большом числе случаев, встречающихся на практике, представляет интерес исследование движений, которые можно реализовать при неизменном режиме работы двигателя, например на режиме максимальной тяги.

В дальнейшем будем предполагать, что режим работы двигателя неизменный. Тогда сила тяги  $P$  будет функцией только двух переменных: высоты  $H$  и скорости полета  $V$ . Следовательно, остается только одна управляющая функция — изменение угла атаки крыльев  $\alpha$ . Задаваясь различными законами изменения  $\alpha$  в зависимости от времени, будем получать различные траектории полета и соответственно различные зависимости скорости полета, угла наклона траектории к горизонту и т. д. от времени.

Вместо угла атаки  $\alpha$  можно задаться законом изменения скорости полета  $V$ , законом изменения угла  $\theta$  и т. д., вообще законом изменения одной какой-либо кинематической величины в зависимости от времени. При этом в результате решения уравнений движения летательного аппарата все остальные характеристики движения получатся определенными функциями времени, соответствующими реализуемой траектории полета.

## § 1. Движение по прямолинейным траекториям без крена и скольжения. Выход из пикирования. Горка

Простейшей траекторией полета летательного аппарата является прямолинейная траектория, которая может быть реализована при условии, что полет совершается без крена и скольжения. В этом случае уравнения движения удастся проинтегрировать в квадратурах, что существенно уменьшает объем расчетной работы.

**Разгон и торможение самолета в горизонтальном полете.** Этот случай получается особенно простым, так как высота в процессе полета остается неизменной.

Уравнения движения для горизонтального полета с относительно небольшими скоростями, когда можно пренебречь кривизной поверхности Земли, имеют вид

$$m\dot{V} = P \cos(\alpha - \varphi) - Q, \quad (1.8)$$

$$Y + P \sin(\alpha - \varphi) = G. \quad (2.8)$$

Предполагая, что угол  $(\alpha - \varphi)$  между осью двигателя и касательной к траектории невелик (что и имеет место обычно на практике), можно положить

$$\sin(\alpha - \varphi) \approx \alpha - \varphi, \quad \cos(\alpha - \varphi) \approx 1.$$

Тогда уравнения (1.8) — (2.8) можно переписать в виде

$$m\dot{V} = P - Q, \quad (1a.8)$$

$$Y + P(\alpha - \varphi) = G. \quad (2a.8)$$

Если вес летательного аппарата  $G$  в течение полета изменяется не сильно, так что этим изменением можно пренебречь (как обычно и поступают при расчете самолетов с ВРД), то ход решения получается следующим.

Так как при небольших  $\alpha$  коэффициент подъемной силы  $c_y$  есть линейная функция угла атаки

$$c_y = c_y^a (\alpha - \alpha_0),$$

где  $\alpha_0$  — угол нулевой подъемной силы, соответствующий  $c_y=0$ , то

$$\alpha = \frac{c_y}{c_y^{\alpha}} + \alpha_0.$$

Из уравнения (2а.8) при помощи этого выражения, приняв во внимание, что  $Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2}$ , получим

$$c_y = \frac{G - P(\alpha_0 - \varphi)}{S \frac{\rho V^2}{2} + \frac{P}{c_y^{\alpha}}}. \quad (3.8)$$

При сделанных допущениях, как видим, коэффициент подъемной силы  $c_y$  есть функция только скорости полета, так как при горизонтальном полете  $\rho = \text{const}$ . Следовательно, и коэффициент лобового сопротивления  $c_x$ , в общем случае являющийся функцией  $c_y$ , числа Рейнольдса  $Re$  и числа Маха  $M$ , в рассматриваемом случае горизонтального полета есть функция только скорости полета  $V$ . Это означает, что и сила лобового сопротивления

$$Q = c_x S \frac{\rho V^2}{2}$$

есть функция только  $V$ . Сила тяги  $P$  на данной высоте полета при неизменном режиме работы двигателя также зависит только от скорости полета  $V$ .

Таким образом, время полета, которое найдем, интегрируя уравнение (1а.8)

$$t \approx \frac{G}{g} \int_{V_1}^V \frac{dV}{P - Q}, \quad (4.8)$$

можно определить графическим интегрированием, так как подынтегральная функция есть функция только одной переменной  $V$ .

Задаваясь рядом скоростей полета  $V$ , для каждой скорости можно найти значение подынтегральной функции по приведенным выше формулам и построить кривую зависимости этой функции от скорости полета  $V$ . Найдя зависимость  $t=t(V)$ , нетрудно получить и зависимость от времени пути  $x$ , пройденного самолетом:

$$x = \int_{t_1}^t V(t) dt. \quad (5.8)$$

Мы рассмотрели случай разгона самолета. При расчете движения с торможением, когда сила тяги меньше лобового сопротивления (в частности, может быть  $P=0$  или при реверсировании тяги  $P<0$ ), ход расчета остается прежним. Для удобства вычислений формулу (4.8) целесообразно переписать в следующем виде:

$$t = \frac{G}{g} \int_V^{V_1} \frac{dV}{Q - P}. \quad (4a.8)$$

При расчете разгона по горизонтальной траектории крылатых ракет, вес которых в более сильной степени зависит от времени полета  $t$ , если разгон происходит в течение длительного времени, пренебрегать изменением веса в продолжение полета уж нельзя. Однако и в этом слу-

чае приближенное решение задачи может быть найдено квадратурами. Если обозначить секундный расход топлива через  $q_c$ , то, очевидно, справедливо равенство

$$\frac{dG}{dt} = \dot{G} = -q_c, \quad (6.8)$$

где в общем случае  $q_c$  есть функция скорости полета (в частном случае ракетного двигателя  $q_c = \text{const}$ ).

Определив из (6.8)  $dt$  и подставив его в уравнение (1а.8), получим

$$\frac{G}{g} \frac{dV}{dG} = -\frac{P-Q}{q_c}. \quad (7.8)$$

Интегрирование уравнения (7.8) осложняется тем, что сила  $Q$  зависит от коэффициента  $c_y$ , который в свою очередь зависит от веса  $G$ , так что уравнение (7.8) получается нелинейным. Для получения приближенного решения положим в (3.8)  $G \approx G_1 = \text{const}$ . При этом мы совершим ошибку, определяя  $c_y$ , и, следовательно, неточно определим ту часть лобового сопротивления  $Q$ , которая зависит от  $c_y$ . Однако при полете со сравнительно большими скоростями эта часть лобового сопротивления обычно значительно меньше той его части, которая не зависит от  $c_y$ . Ошибка при определении всей силы  $Q$  получится небольшой и не приведет в конечном счете к заметной погрешности при определении  $t$ .

Интегрируя в этом предположении уравнение (7.8), найдем

$$G = G_1 \exp\left(-\frac{1}{g} \int_{V_1}^V \frac{q_c}{P-Q} dV\right). \quad (8.8)$$

Интеграл, входящий в (8.8), можно найти графически так же, как и в предыдущем случае. Таким образом, получим зависимость  $G(V)$ . Далее, зная зависимость  $G(V)$ , можно найти зависимость времени  $t$  от скорости полета  $V$  по формуле, вытекающей из (6.8):

$$t = - \int_{G_1}^G \frac{dG}{q_c}$$

(напомним, что согласно (8.8)  $G$  есть функция  $V$ ).

Дальнейший расчет получается таким же, как в предыдущем случае.

В случае необходимости можно уточнить полученный результат, выполнив расчет второго приближения. Во втором приближении при определении  $c_y$  для каждой скорости полета  $V$  надо брать вес  $G$  по результатам расчета первого приближения, исходя из полученных зависимостей  $G = G(t)$  и  $V = V(t)$ .

**Пикирование летательного аппарата.** *Пикированием* называется снижение летательного аппарата по прямолинейной траектории, наклоненной к горизонту под большим углом  $\theta$ . Таким образом, пикирование есть частный случай планирования, расчет которого рассмотрен в гл. VI. Этот простой метод расчета оказывается неприменимым для расчета пикирования. Скорость пикирования обычно велика, а так как угол наклона  $\theta$  траектории к горизонту также большой, то за сравнительно небольшое время значительно теряется высота полета. Допущение о постоянстве плотности воздуха (см. гл. VI), пригодное при сравнительно небольшом перепаде высоты полета, недопустимо при расчете пикирования; здесь необходимо принимать во внимание изменение плотности воздуха при изменении высоты полета.

Летательный аппарат пикирует при малых углах атаки, так что с большой степенью точности можно принять

$$\alpha - \varphi = 0.$$

Это тем более справедливо, что тяга двигателя при пикировании обычно близка к нулю. Вследствие этого вес летательного аппарата при расчете пикирования можно считать неизменным.

Уравнения движения летательного аппарата при пикировании имеют вид<sup>1</sup>

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{P - Q}{G} + \sin \theta, \quad (9.8)$$

$$Y = G \cos \theta. \quad (10.8)$$

Приведем графический способ решения уравнений движения, предложенный В. С. Пышновым. Имея в виду, что

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dH} \frac{dH}{dt} = - \frac{dV}{dH} V \sin \theta = - \frac{\sin \theta}{2} \frac{dV^2}{dH},$$

уравнение (9.8) перепишем:

$$\frac{dV^2}{dH} = - 2g \left[ 1 + \frac{1}{G \sin \theta} \left( P - \frac{c_x S \rho V^2}{2} \right) \right]. \quad (11.8)$$

Коэффициент  $c_x$ , входящий в уравнение (11.8), надо определять по поляре летательного аппарата для чисел  $M$ , соответствующих взятым скорости и высоты полета, и для значений  $c_y$ , найденных из уравнения (10.8); тягу  $P$  надо брать по характеристикам двигателей.

Если в уравнении (11.8) перейти от бесконечно малых к конечным малым приращениям, то получим

$$\delta V^2 = - 2g \left[ 1 + \frac{1}{G \sin \theta} \left( P - \frac{c_x S \rho V^2}{2} \right) \right] \delta H. \quad (11a.8)$$

Обозначим результирующую силу  $(G \sin \theta + P - Q)$ , действующую по касательной к траектории (напоминаем, что траектория прямолинейная), через  $R$ . Тогда выражение (11a.8) можно записать в следующем виде:

$$\delta V^2 = - 2g \frac{R}{G \sin \theta} \delta H. \quad (12.8)$$

Написав (12.8) для произвольно выбранных значений  $\delta V_0^2$  и  $R_0$  и разделив (12.8) на это выражение, получим

$$\delta V^2 = \delta V_0^2 \frac{R}{R_0}. \quad (13.8)$$

Из выражения (13.8) видно, что величины  $(\delta V^2, R)$  и  $(\delta V_0^2, R_0)$  можно рассматривать как основания и высоты двух подобных треугольников; на этом и основан графический метод расчета.

Построим кривые зависимости

$$\frac{R}{G \sin \theta} = f(V^2)$$

<sup>1</sup> При расчете пикирования удобно в отличие от общего правила знаков считать  $\theta > 0$ .

при параметре  $H$  (рис. 1.8). Зададимся какими-либо значениями  $R_0$  и  $\delta H$ , например,

$$R_0 = G \sin \theta, \quad \delta H = -500 \text{ м.}$$

Тогда по (12.8) получим

$$\delta V_0^2 = -2g\delta H = 9810 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

Построим два треугольника  $aa'b'$  и  $abb'$  с основанием  $\delta V_0^2$  и высотой  $\frac{R_0}{G \sin \theta} = 1$ . Будем считать, что кривые

$$\frac{R}{G \sin \theta} = f(V^2)$$

построены для значений  $H_1 + \delta H$ ,  $H_1 + 3\delta H$ ,  $H_1 + 5\delta H$  и т. д.

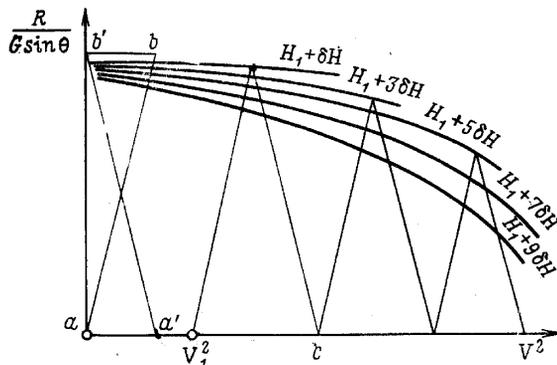


Рис. 1.8. К графо-аналитическому методу расчета пикирования

Из точки, соответствующей начальной скорости  $V_1$ , проведем прямую, параллельную стороне  $ab$  треугольника, до пересечения с кривой, соответствующей высоте  $H_1 + \delta H$ . Из полученной точки пересечения проведем прямую, параллельную  $ab$ , до пересечения с осью абсцисс в точке  $c$ . Из точки  $c$  проведем прямую, параллельную  $ab$ , до пересечения с кривой, соответствующей высоте  $H_1 + 3\delta H$ , и прямую, параллельную  $a'b'$ , до пересечения с осью абсцисс и т. д.

Точки пересечения этих прямых с кривыми

$$\frac{R}{G \sin \theta} = f(V^2),$$

как нетрудно убедиться, дают величину квадрата скорости на соответствующих высотах.

Зная зависимость  $V(H)$ , нетрудно получить зависимости  $H(t)$  и  $V(t)$  при помощи формулы  $\frac{dH}{dt} = -V \sin \theta$ . Отсюда найдем

$$t = \frac{1}{\sin \theta} \int_H^{H_1} \frac{dH}{V},$$

где  $H_1$  — высота полета в начале пикирования.

**Выход из пикирования.** Для вывода летательного аппарата из пикирования необходимо, увеличив угол атаки  $\alpha$ , создать перегрузку

$$n_y = \frac{Y}{G}.$$

При этом траектория полета искривится, как показано на рис. 2.8. В тот момент, когда полет станет горизонтальным, выход из пикирования можно считать законченным. Таким образом, выход из пикирования представляет собой движение по криволинейной траектории, лежащей в вертикальной плоскости.

Положив, как и в предыдущих расчетах,  $(\alpha - \varphi) = 0$ , уравнения движения напишем в виде

$$\frac{1}{g} \dot{V} = \frac{P - Q}{G} + \sin \theta = n_x + \sin \theta. \quad (14.8)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = \frac{Y}{G} - \cos \theta = n_y - \cos \theta. \quad (15.8)$$

Решать эти нелинейные дифференциальные уравнения можно методами численного интегрирования.

Так как выход из пикирования желательно заканчивать возможно скорее, то перегрузка  $n_y$  должна быть возможно большей. Обычно перегрузка при выходе из пикирования близка к постоянной и равна максимально допустимой по соображениям прочности летательного аппарата или выносливости летчика.

Приближенное решение задачи о выходе из пикирования можно получить на основании следующих рассуждений.

Полная энергия летательного аппарата, отнесенная к его весу, в какой-либо точке траектории равна полной энергии, отнесенной к весу, в начальной точке траектории плюс работа внешних сил на пути, пройденном летательным аппаратом от начальной точки. Это условие можно записать в форме

$$H + \frac{V^2}{2g} = H_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \int_{\theta_2}^{\theta_1} n_x r d\theta, \quad (16.8)$$

так как элементарный путь

$$dS = r d\theta,$$

где  $r$  — радиус кривизны траектории полета.

Интеграл

$$\int_{\theta_2}^{\theta_1} n_x r d\theta$$

представляет собой работу внешних сил на пути  $S$ , отнесенную к единице веса летательного аппарата.

Из уравнения (15.8), имея в виду, что  $\dot{\theta} = \frac{V}{r}$ , получим

$$r = \frac{V^2}{g(n_y - \cos \theta)}. \quad (17.8)$$

Расчеты показывают, что траектория полета при выходе из пикирования получается близкой к дуге окружности (рис. 3.8).

В первом приближении можно принять, следовательно, радиус кривизны траектории постоянным и равным некоторому среднему его значению:

$$r_{\text{ср}} = \frac{1}{2g} \left( \frac{V_1^2}{n_y - \cos \theta_1} + \frac{V_2^2}{n_y - 1} \right), \quad (18.8)$$

где  $V_2$  — скорость полета в момент выхода из пикирования (при  $\theta_2 = 0$ ).

Кроме того, возьмем некоторое среднее значение тангенциальной перегрузки  $\bar{n}_x$ . Тогда уравнение (16.8) принимает более простой вид

$$H_2 + \frac{V_2^2}{2g} = H_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \bar{n}_x r_{\text{ср}} \theta_1. \quad (19.8)$$

Из рис. 3.8 получаем

$$\Delta H = H_1 - H_2 = r_{\text{ср}} (1 - \cos \theta_1). \quad (20.8)$$

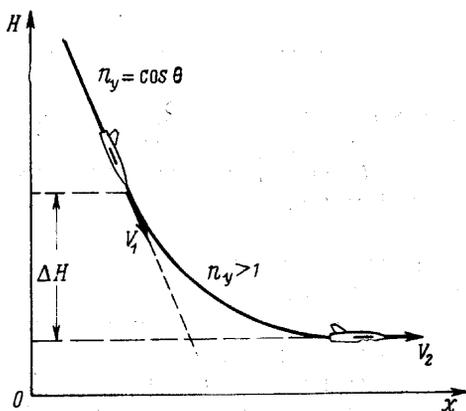


Рис. 2.8. Искривление траектории полета при выходе из пикирования

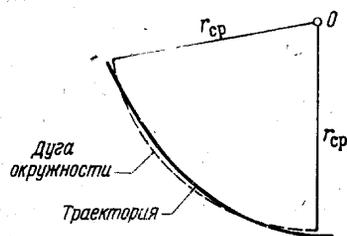


Рис. 3.8. Приближенное представление траектории полета при выходе из пикирования

Подставив в уравнение (19.8) выражения (18.8) и (20.8), после элементарных преобразований найдем

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{(n_y - 1)(n_y + 1 - 2 \cos \theta_1 + \bar{n}_x \theta_1)}{(n_y - \cos \theta_1)(n_y - 2 + \cos \theta_1 - \bar{n}_x \theta_1)}}. \quad (21.8)$$

Из (21.8) и предыдущих формул получим выражения для среднего радиуса кривизны траектории  $r_{\text{ср}}$  и для потери высоты при выходе из пикирования  $\Delta H$ :

$$r_{\text{ср}} = \frac{V_1^2}{2g(n_y - \cos \theta_1)} \frac{2n_y - 1 - \cos \theta_1}{n_y - 2 + \cos \theta_1 - \bar{n}_x \theta_1}, \quad (22.8)$$

$$\Delta H = \frac{V_1^2}{2g} \frac{1 - \cos \theta_1}{n_y - \cos \theta_1} \frac{2n_y - 1 - \cos \theta_1}{n_y - 2 + \cos \theta_1 - \bar{n}_x \theta_1}. \quad (23.8)$$

Наконец, время, затраченное на выход из пикирования, найдем по формуле

$$t \approx \frac{r_{\text{ср}} \theta_1}{V_{\text{ср}}} = \frac{2r_{\text{ср}} \theta_1}{V_1 + V_2}$$

или с учетом полученных ранее выражений

$$t = \frac{V_1 \theta_1}{g (n_y - \cos \theta_1)} \frac{2n_y - 1 - \cos \theta_1}{n_y - 2 + \cos \theta_1 - \bar{n}_x \theta_1} A, \quad (24.8)$$

где

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{(n_y - 1)(n_y + 1 - 2 \cos \theta_1 + \bar{n}_x \theta_1)}{(n_y - \cos \theta_1)(n_y - 2 + \cos \theta_1 - \bar{n}_x \theta_1)}}$$

Полученные формулы, конечно, являются приближенными и не могут использоваться для точных расчетов, однако они годны для анализа выхода из пикирования.

Пусть, например, выход из пикирования начинается с высоты  $H_1 = 12$  км, скорость пикирования  $V_1 = 600$  м/сек, траектория пикирования отвесная ( $\theta = 90^\circ$ ), перегрузка при выходе из пикирования  $n_y = 5$ .

Произведя расчет по приведенным выше формулам, получим при  $\bar{n}_x = 0$

$$V_2 = 760 \text{ м/сек}, \Delta H = 11 \text{ км}, H_2 = 1 \text{ км};$$

при  $\bar{n}_x = -0,5$

$$V_2 = 630 \text{ м/сек}, \Delta H = 8,72 \text{ км}, H_2 = 3,28 \text{ км}.$$

Как видим, потеря высоты при выходе из пикирования получается значительной. Отрицательная тангенциальная перегрузка  $\bar{n}_x$  уменьшает потерю высоты. Отсюда следует, что во время выхода из пикирования желательно иметь возможно меньшую  $\bar{n}_x$ . Тягу  $P$  желательно уменьшать до нуля или даже до отрицательной величины (путем ее реверсирования), а силу лобового сопротивления  $Q$  увеличивать. Поэтому обычно при выходе из пикирования пользуются воздушными тормозами, установленными на крыльях или на фюзеляже самолета, или специальными тормозными парашютами.

**Горка.** Горкой называют маневр летательного аппарата в вертикальной плоскости, имеющий целью быстрое увеличение высоты при неизменном направлении полета (рис. 4.8).

Уравнения движения при горке являются общими уравнениями движения в вертикальной плоскости без крена и скольжения. Если угол ( $\alpha - \varphi$ ) принять равным нулю, то эти уравнения будут иметь вид

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P - Q}{G} - \sin \theta = n_x - \sin \theta, \quad (25.8)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = \frac{Y}{G} - \cos \theta = n_y - \cos \theta. \quad (26.8)$$

Решать нелинейные дифференциальные уравнения (25.8) и (26.8) можно методами численного интегрирования.

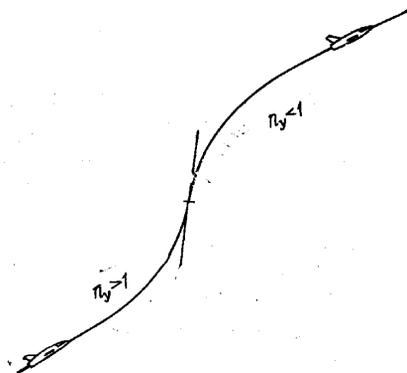


Рис. 4.8. Схематическое изображение траектории полета при выполнении горки

Приближенно оценить характер движения летательного аппарата при выполнении горки можно на основании следующих рассуждений.

Для летательных аппаратов с относительно большими скоростями полета всю траекторию горки приближенно можно разбить на два участка (см. рис. 4.8). Полет на первом участке происходит с перегрузкой  $n_y > 1$ . На втором участке постепенно уменьшается набор высоты и летательный аппарат переходит на режим горизонтального полета. На этом участке перегрузка  $n_y < 1$ .

Исследование траекторий горки представляет особый интерес для летательных аппаратов, пилотируемых летчиком. При этом обычно положительная перегрузка близка к постоянной, а отрицательная — к ну-

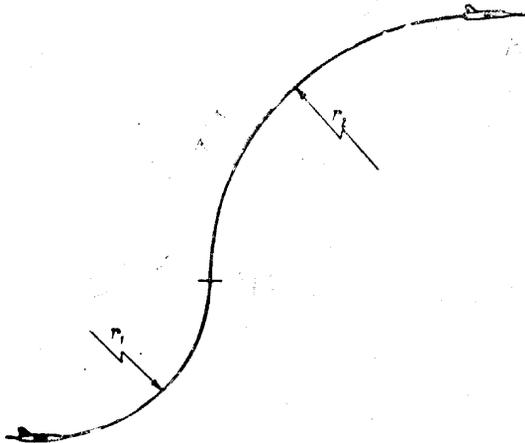


Рис. 5.8. Замена траектории горки двумя дугами окружностей

лю (если  $n_y < 0$ , то летчик повисает на ремнях и испытывает неприятное ощущение). При исследовании горки примем  $n_{y1} = \text{const}$  и  $n_{y2} = 0$ . При таком предположении горку можно представить приближенно в виде двух дуг окружности (рис. 5.8). Кроме того, подобно тому, как при рассмотрении выхода из пикирования, положим, что на каждом из двух участков тангенциальная перегрузка имеет некоторое среднее значение.

Предположим, что горка начинается и кончается горизонтальным полетом. Уравнение энергии, которой обладает самолет в начале и в конце первого участка, где траектория наклонена к горизонту под углом  $\theta$ , можно тогда записать в виде

$$\frac{V_2^2}{2g} + r_{1cp}(1 - \cos \theta) = \frac{V_1^2}{2g} + \bar{n}_x r_{1cp} \theta, \quad (27.8)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — скорость в начале и в конце первого участка горки.

Рассуждая так же, как при расчете траектории выхода из пикирования, получим при  $\bar{n}_x = n_{x1}$

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{n_y - \cos \theta}{n_y - 1} \frac{n_y - 2 + \cos \theta + \bar{n}_{x1} \theta}{n_y + 1 - 2 \cos \theta - \bar{n}_{x1} \theta}}, \quad (28.8)$$

$$r_{1cp} = \frac{V_1^2}{2g(n_y - 1)} \frac{2n_y - 1 - \cos \theta}{n_y + 1 - 2 \cos \theta - \bar{n}_{x1} \theta}, \quad (29.8)$$

$$\Delta H_1 = \frac{V_1^2}{2g(n_y - 1)} \frac{2n_y - 1 - \cos \theta}{n_y + 1 - 2 \cos \theta - \bar{n}_{x1}\theta} (1 - \cos \theta), \quad (30.8)$$

$$t_1 = \frac{2r_{1cp}\theta}{V_1 + V_2}. \quad (31.8)$$

В начале второго участка горки скорость самолета  $V=V_2$ , а угол наклона траектории к горизонту равен  $\theta$ . В конце второго участка ( $V=V_3, \theta=0$ ) по аналогии получим при  $\bar{n}_x = \bar{n}_{x2}$

$$V_3 = V_2 \sqrt{\frac{\bar{n}_{x2}\theta - 1 + 2 \cos \theta}{\cos \theta (2 - \bar{n}_{x2}\theta - \cos \theta)}}, \quad (28a.8)$$

$$r_{2cp} = \frac{V_2^2}{2g \cos \theta} \frac{1 + \cos \theta}{2 - \bar{n}_{x2}\theta - \cos \theta}, \quad (29a.8)$$

$$\Delta H_2 = \frac{V_2^2}{2g \cos \theta} \frac{\sin^2 \theta}{2 - \bar{n}_{x2}\theta - \cos \theta}, \quad (30a.8)$$

$$t_2 = \frac{2r_{2cp}\theta}{V_2 + V_3}. \quad (31a.8)$$

Формулы (28.8)—(31.8) и (28a.8)—(31a.8) позволяют найти параметры движения в конце горки по параметрам, заданным в начале горки.

Пусть, например, начальная скорость полета при выполнении горки  $V_1=500$  м/сек, максимальный угол наклона траектории горки к горизонту  $\theta=45^\circ$ , перегрузка  $n_y=3$ , перегрузка  $\bar{n}_{x1}=-0,12$  и  $\bar{n}_{x2}=0,15$ . При этих данных по формулам (28.8)—(31.8) и (28a.8)—(31a.8) получим  $V_3=332$  м/сек,  $\Delta H=8270$  м,  $t=55,34$  сек.

Если при расчете пренебречь работой внешних сил, т. е. принять  $n_x=0$  как на первом, так и на втором участках горки, то  $V_3=292$  м/сек,  $\Delta H=8400$  м,  $t=56,50$  сек.

Из приведенного примера видно, что хотя результаты расчета и зависят от величины работы внешних сил (от  $n_x$ ), все же роль внешних сил не очень велика. Отсюда следует, что при достаточно большой кинетической энергии летательных аппаратов в начале горки, т. е. при большой скорости  $V_1$ , в первом приближении можно расчет вести, предполагая, что работа внешних сил равна нулю. Чем больше запас кинетической энергии по сравнению с величиной работы внешних сил, тем ближе к действительности такое предположение.

## § 2. Оптимальная траектория подъема летательного аппарата в общем случае

Как отмечено выше, при неизменном режиме работы двигателя, задаваясь различными законами управления углом атаки, можно получить различные траектории полета летательного аппарата и соответственно различные зависимости скорости  $V$ , высоты полета  $H$ , угла  $\theta$  наклона траектории к горизонту, расхода топлива  $G_T$  и т. д. от времени. Таким образом, в этом случае характер движения летательного аппарата целиком определяется принятым законом управления углом атаки крыльев  $\alpha = \alpha(t)$ . Поскольку в выборе закона изменения угла атаки мы имеем относительную свободу (конечно, при соблюдении условий безопасности полета), такое движение летательного аппарата можно назвать свободным. В гл. X мы встретимся со связанным движением лета-

тельного аппарата, при котором угол атаки должен изменяться по определенному закону, вытекающему из того или иного метода наведения летательного аппарата на цель.

В случае свободного движения летательного аппарата представляет интерес выделить среди всех возможных законов управления углом атаки такой закон, который при некоторых условиях обеспечивал бы экстремум какой-либо интегральной характеристики (времени полета, скорости и высоты в конце полета и т. д.). Другими словами, может быть поставлена задача синтеза управления. Рассмотрим простейшую задачу такого рода.

Пусть летательный аппарат перемещается из точки 1 фазового пространства в точку 2, причем в точке 1 известны координаты летательного аппарата  $x_1$  и  $H_1$ , вес  $G_1$ , скорость полета по величине и направлению, т. е.  $V_1$  и  $\theta_1$ . В точке 2 должна быть задана по крайней мере одна координата (например  $H_2$ ). В более общем случае могут быть заданы обе координаты  $x_2$  и  $H_2$ . Вес летательного аппарата  $G_2$ , скорость  $V_2$ , угол наклона траектории  $\theta_2$  в точке 2, а также время полета ( $t_2 - t_1$ ) из точки 1 в точку 2 могут быть заданы или не заданы. Если фазовые координаты на правом конце заданы, мы имеем дело с задачей с закрепленными концами (см. гл. I). Если эти координаты не заданы, то их надо найти из условия достижения экстремума основной интегральной характеристики — получается задача со свободными концами. Значения фазовых координат на правом конце в этом случае должны быть найдены из условий трансверсальности.

В зависимости от поставленной задачи в качестве функционала могут быть приняты различные интегральные характеристики; может возникнуть, например, задача определения закона изменения  $\alpha(t)$ , обеспечивающего набор максимальной высоты за определенное время или при определенном расходе топлива. В этом случае функционалом будет конечная высота полета  $H_2$ . Если в задаче требуется сообщить летательному аппарату наибольшую скорость полета, то функционалом будет  $V_2$  и т. д. На практике чаще всего встречаются задачи о минимизации расхода топлива при перемещении летательного аппарата из точки 1 в точку 2 или о минимизации времени, затрачиваемого на это перемещение. Все подобные задачи являются вариационными. Эти задачи удобно рассматривать в форме Майера (см. гл. I), упрощающей процесс решения задачи.

Итак, в соответствии с отмеченным в начале этого параграфа режим работы двигателя будем считать неизменным. Кроме того, с целью упрощения дальнейших выводов сделаем следующие предположения.

1. Суточным вращением Земли будем пренебрегать, т. е. примем  $\omega_a = 0$ .

2. Ускорение силы тяжести  $g$  будем считать постоянным независимо от высоты полета  $H$ ; такое допущение близко к действительности, если высота полета не превышает 50—100 км, и для полета в плотных слоях атмосферы приемлемо.

3. Угол ( $\alpha - \varphi$ ) между осью двигателя и касательной к траектории полета будем предполагать настолько малым, чтобы считать

$$\sin(\alpha - \varphi) \approx \alpha - \varphi, \quad \cos(\alpha - \varphi) \approx 1.$$

Как отмечено в гл. V, такое допущение для летательных аппаратов, летающих с небольшими углами атаки, не приводит к существенным погрешностям.

Задача, которую нам предстоит решить, относится к задачам на условный экстремум, так как на движение наложены динамические и ки-

нематические связи. Запишем эти связи, пользуясь скоростной системой координат (см. стр. 155 и 152), предполагая движение плоским<sup>1</sup>:

$$U_1^* \equiv \dot{V} - g \frac{P-Q}{G} + g \sin \theta = 0, \quad (32.8)$$

$$U_2 \equiv \dot{\theta} - \frac{g}{V} \left[ \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G} - \left( 1 - \frac{r_3 + H}{r_3} \frac{V^2}{V_{\text{кpo}}^2} \right) \cos \theta \right] = 0, \quad (33.8)$$

$$U_3 \equiv \dot{G} + q_c = 0, \quad (34.8)$$

$$U_4 \equiv \dot{x} - \frac{r_3}{r_3 + H} V \cos \theta = 0, \quad (35.8)$$

$$U_5 \equiv \dot{H} - V \sin \theta = 0. \quad (36.8)$$

В (34.8) через  $q_c$  обозначен секундный расход топлива; в общем случае  $q_c = q_c(V, H)$ , для ракетного двигателя  $q_c = \text{const}$  независимо от скорости и высоты полета.

В качестве управления будем рассматривать угол атаки  $\alpha$ , от которого зависят подъемная сила и сила лобового сопротивления. Условившись отсчитывать  $\alpha$  от направления скорости набегающего потока при  $c_y = 0$  («аэродинамический» угол атаки), для подъемной силы  $Y$  получим выражение

$$Y = c_y^\alpha \alpha S \frac{\rho V^2}{2},$$

а для силы лобового сопротивления, аппроксимируя поляру параболой

$$c_x = c_{x0} + B c_y^2,$$

где коэффициенты  $c_{x0}$  и  $B$  в общем случае — функции числа Маха,

$$Q = c_{x0} S \frac{\rho V^2}{2} + B (c_y^\alpha \alpha)^2 S \frac{\rho V^2}{2} = Q_0 + B \frac{2(Y^\alpha \alpha)^2}{S \rho V^2}.$$

Заметим, что  $\alpha$  входит в уравнения связей линейно и во второй степени; производная  $\dot{\alpha}$  в уравнения не входит, так что задача относится к классу *вырожденных задач*.

Рассмотрим задачу о минимизации расхода топлива, затрачиваемого на полет из точки 1 в точку 2, причем высоту  $H_2$  будем считать заданной. Основным функционалом в этой задаче является полный расход топлива, так что<sup>2</sup>

$$J = -G_2. \quad (37.8)$$

Так как мы не ставим себе задачей отыскание наиболее выгодных значений параметров, от которых зависят динамические свойства (например площади крыльев, удлинения, стреловидности и т. д.), то в соответствии с формулой (68.1) вспомогательный функционал задачи Майера

$$J_b = J + \int_{t_1}^{t_2} F dt, \quad (38.8)$$

<sup>1</sup> Далее индекс «0» при записи круговой скорости у Земли опускается.

<sup>2</sup> Так как  $G_T = G_1 - G_2$ , то задача о минимуме  $G_T$  эквивалентна задаче о максимизации  $G_2$  или о минимизации  $(-G_2)$ .

где

$$\begin{aligned}
 F = & \lambda_1 \left( \dot{V} + g \sin \theta - g \frac{P-Q}{G} \right) + \lambda_2 \left\{ \dot{\theta} - \frac{g}{V} \left[ \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( 1 - \frac{r_3 + H}{r_3} \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) \cos \theta \right] \right\} + \lambda_3 (\dot{G} + q_c) + \\
 & + \lambda_4 \left( \dot{x} - \frac{r_3}{r_3 + H} V \cos \theta \right) + \lambda_5 (\dot{H} - V \sin \theta). \quad (39.8)
 \end{aligned}$$

Неизвестными функциями являются:

$$V(t), H(t), \theta(t), G(t) = G_1 - G_T(t), x(t), \alpha(t),$$

причем последняя функция  $\alpha(t)$  есть управление.

В соответствии с процедурой, описанной в гл. I, необходимо составить уравнения трансверсальности (76а.1), (80.1) и уравнения Эйлера. Из уравнения (76а.1) получаем граничные значения множителей Лагранжа  $\lambda_i$  на правом конце<sup>1</sup>

$$\lambda_{32} = 1, \lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_{42} = 0.$$

Далее, так как  $\frac{\partial J}{\partial t_2} = 0$ , то из уравнения (80.1) получим

$$\lambda_{12} \dot{V}_2 + \lambda_{22} \dot{\theta}_2 + \lambda_{32} \dot{G}_2 + \lambda_{42} \dot{x}_2 + \lambda_{52} \dot{H}_2 = 0 \quad (40.8)$$

или после подстановки найденных значений

$$\lambda_{32} = 1, \lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_{42} = 0.$$

$$\dot{G}_2 + \lambda_{52} \dot{H}_2 = 0. \quad (40a.8)$$

Так как в выражение функционала (38.8) независимое переменное  $t$  в явной форме не входит, то, как нетрудно убедиться, выражение (40.8) есть не что иное, как первый интеграл уравнений Эйлера (см. стр. 51), записанный для точки 2. Первый интеграл есть следствие уравнений Эйлера, поэтому его можно рассматривать вместо какого-либо одного уравнения Эйлера.

Составляя уравнения Эйлера, получим

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 = & -\lambda_1 g \frac{P^V - Q^V}{G} + \lambda_2 \left\{ \frac{g}{V^2} \left[ \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( 1 - \frac{r_3 + H}{r_3} \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) \cos \theta \right] - \frac{g}{V} \frac{Y^V + P^V(\alpha - \varphi)}{G} - \right. \\
 & \left. - 2 \frac{r_3 + H}{r_3} \frac{g}{V_{кр}^2} \cos \theta \right\} + \lambda_3 q_c^V - \lambda_4 \frac{r_3}{r_3 + H} \cos \theta - \lambda_5 \sin \theta, \quad (41.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_2 = & \lambda_1 g \cos \theta - \lambda_2 \frac{g}{V} \left( 1 - \frac{r_3 + H}{r_3} \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) \sin \theta + \\
 & + \lambda_4 \frac{r_3}{r_3 + H} V \sin \theta - \lambda_5 V \cos \theta, \quad (42.8)
 \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 g \frac{P-Q}{G^2} + \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G^2}, \quad (43.8)$$

<sup>1</sup> Заметим, что, так как  $H_2$  задана, значение  $\lambda_{52}$  на правом конце остается неопределенным.

$$\dot{\lambda}_4 = 0, \quad (44.8)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_1 g \frac{P^H - Q^H}{G} + \lambda_2 \frac{g}{V} \left[ -\frac{Y^H + P^H (\alpha - \varphi)}{G} - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \cos \theta + \lambda_3 q_c^H + \lambda_4 \frac{r_3}{(r_3 + H)^2} V \cos \theta \right], \quad (45.8)$$

$$\lambda_1 g \frac{Q^\alpha}{G} - \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y^\alpha + P}{G} = 0. \quad (46.8)$$

Решать уравнения Эйлера (41.8) — (46.8) вместе с уравнениями (32.8) — (36.8) можно при помощи вычислительных машин, причем так как значения  $\lambda_i$  на левом конце интегрирования неизвестны, то приходится решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений (см. гл. I).

В настоящем параграфе мы рассматриваем движение летательных аппаратов в плотных слоях атмосферы; такие движения происходят обычно со скоростями, значительно меньшими, чем круговая скорость. В этом случае, как указывалось ранее, можно пренебречь кривизной земной поверхности. Это позволяет упростить уравнения, положив  $\frac{V}{V_{кр}} \rightarrow 0$

и приняв  $\frac{r_3}{r_3 + H} = 1$ . Далее в ряде задач горизонтальная координата (дальность)  $x_2$  в конце полета не регламентируется. Ввиду того, что никакие силы от  $x$  не зависят, можно в этом случае связь (35.8) при решении вариационной задачи не учитывать, а после ее решения по (35.8) определить величину  $x$ . Это означает, что в общем выражении (39.8) можно положить  $\lambda_4 = 0$ . С учетом сделанных допущений число уравнений Эйлера сокращается до пяти, а сами уравнения упрощаются и принимают вид

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 g \frac{P^V - Q^V}{G} + \lambda_2 \frac{g}{V^2} \left[ \frac{Y + P (\alpha - \varphi)}{G} - \cos \theta - V \frac{Y^V + P^V (\alpha - \varphi)}{G} \right] + \lambda_3 q_c^V - \lambda_5 \sin \theta, \quad (47.8)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 g \cos \theta - \lambda_2 \frac{g}{V} \sin \theta - \lambda_5 V \cos \theta, \quad (48.8)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 g \frac{P - Q}{G^2} + \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y + P (\alpha - \varphi)}{G^2}, \quad (49.8)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_1 g \frac{P^H - Q^H}{G} - \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y^H + P^H (\alpha - \varphi)}{G} + \lambda_3 q_c^H, \quad (50.8)$$

$$\lambda_1 Q^\alpha - \lambda_2 \frac{Y^\alpha + P}{V} = 0. \quad (51.8)$$

Хотя уравнения (47.8) — (51.8) и проще прежних уравнений, все же их решение остается сложным вследствие необходимости решать краевую задачу.

Попытаемся еще далее упростить задачу, с тем чтобы из окончательных уравнений исключить множители Лагранжа  $\lambda_i$ . Такая возможность представится, если допустить, что лобовое сопротивление  $Q$  не зависит от угла атаки  $\alpha$ . Такое допущение обосновывается следующими соображениями.

Полет современных скоростных летательных аппаратов обычно происходит при сравнительно небольших углах атаки, в диапазоне которых

коэффициент лобового сопротивления  $c_x$  изменяется сравнительно не- сильно, как это видно из рис. 6.8. Та часть лобового сопротивления, которая не зависит от  $\alpha$ , получается существенно большей, чем та, кото- рая связана с  $\alpha$ . Поэтому в первом приближении допустимо при отыска- нии оптимальной программы управления лобовое сопротивление опреде- лять для некоторого среднего угла атаки или для некоторой средней подъемной силы, равной стартовому весу летательного аппарата:

$$Y_{cp} = G_0.$$

При таком предположении частная производная  $Q^\alpha = 0$ , так что угол атаки  $\alpha$  будет входить только в уравнение (33.8), которое, таким образом, выделяется из системы остальных уравнений и после решения вариационной задачи может быть использовано для определения зна- чений  $\alpha$ . Это значит, что в выражении вспомогательного функционала можно принять  $\lambda_2 \equiv 0$ . Роль управляющей функции при этом будет играть угол  $\theta$ . Положив в (47.8) — (50.8)  $\lambda_2$  равным нулю, получим следующие уравнения:

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 g \frac{P^V - Q^V}{G} + \lambda_3 q_c^V - \lambda_5 \sin \theta, \quad (52.8)$$

$$\cos \theta \left( \frac{g}{V} \lambda_1 - \lambda_5 \right) = 0, \quad (53.8)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 g \frac{P - Q}{G^2}, \quad (54.8)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_1 g \frac{P^H - Q^H}{G} + \lambda_3 q_c^H. \quad (55.8)$$

Выражение первого интеграла (см. стр. 51) с учетом (34.8) и (36.8) принимает вид

$$\lambda_1 \dot{V} + \lambda_3 \dot{G} + \lambda_5 \dot{H} = 0$$

или 
$$\lambda_1 g \left( \frac{P - Q}{G} - \sin \theta \right) - \lambda_3 q_c + \lambda_5 V \sin \theta = 0. \quad (56.8)$$

Уравнение (53.8) показывает, что возможны два решения:

$$\left. \begin{aligned} 1) \cos \theta = 0 \quad \text{или} \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \\ 2) \frac{g}{V} \lambda_1 - \lambda_5 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (57.8)$$

Таким образом, в предположении  $Q^\alpha = 0$  экстремаль *распадается* на три ветви, две из которых представляют собой полет по восходящей или нисходящей вертикальной траектории, а третья — по некоторой криво- линейной траектории. Эта последняя ветвь описывается вторым уравне- нием (57.8).

Распадение экстремали на три ветви не имеет физического основа- ния и является следствием сделанного допущения  $Q^\alpha = 0$ . При переходе от одной ветви экстремали к другой получаются угловые точки (рис. 7.8), в которых угол  $\theta$  изменяется скачком, так что  $\dot{\theta}$  получается бесконечно большой. Для того чтобы получить большие  $\dot{\theta}$ , необходимо создать большую по величине искривляющую лобовую силу путем увеличения (по абсолютной величине) угла атаки. Но при этом будет увеличиваться и сила лобового сопротивления, в то время как мы приня-

ли эту силу постоянной, не зависящей от угла атаки. Если бы не связывать себя предположением  $Q^\alpha = 0$ , то рост угла атаки до некоторого допустимого значения и, следовательно, силы  $Q$  ограничивал бы увеличение  $\theta$  и в результате угловых точек не появилось бы, так что в действительности экстремаль будет непрерывной кривой без угловых точек. Однако различие между получившейся ломаной линией и кривой без угловых точек будет заметным только в непосредственной близости к угловым точкам, а во всей остальной области  $(H, V)$  приближенное решение даст результаты, близкие к действительности.

Таким образом, в результате решения, полученного в предположении  $Q^\alpha = 0$ , следует внести поправку. К этому вопросу мы вернемся впоследствии.

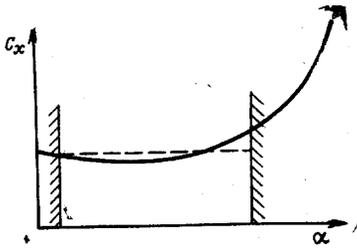


Рис. 6.8. Типичная кривая зависимости коэффициента лобового сопротивления  $c_x$  от угла атаки  $\alpha$

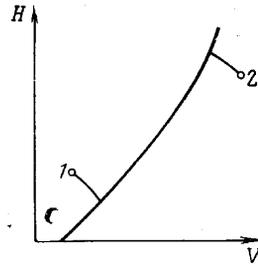


Рис. 7.8. Соединение различных ветвей экстремали

Перейдем теперь к решению уравнений Эйлера, целью которого, как было упомянуто, является исключение множителей Лагранжа  $\lambda_i$ . Из (57.8) следует

$$\lambda_5 = \frac{g}{V} \lambda_1. \quad (58.8)$$

С учетом этого равенства и равенства (56.8) найдем выражение множителя Лагранжа  $\lambda_3$  через  $\lambda_1$ :

$$\lambda_3 = \lambda_1 g \frac{P-Q}{G} \frac{1}{q_c}. \quad (59.8)$$

Взяв производную от обеих частей (58.8), получим

$$\dot{\lambda}_5 = \frac{g}{V} \dot{\lambda}_1 - \frac{g}{V^2} \dot{V} \lambda_1. \quad (60.8)$$

Приравнявая правые части выражений (60.8) и (55.8) и принимая во внимание (59.8), получим уравнение, содержащее только  $\lambda_1$  и  $\dot{\lambda}_1$ :

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 \left( \frac{\dot{V}}{V} - V \frac{P^H - Q^H}{G} + V \frac{q_c^H}{q_c} \frac{P-Q}{G} \right). \quad (61.8)$$

С другой стороны, подставив в (52.8) выражения (58.8) и (59.8), будем иметь

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \left( g \frac{P^V - Q^V}{G} - g \frac{q_c^V}{q_c} \frac{P-Q}{G} + \frac{g}{V} \sin \theta \right). \quad (62.8)$$

Из сравнения выражения (62.8) с выражением (61.8) получим уравнение, не содержащее множителей Лагранжа  $\lambda_i$ :

$$-g \frac{P^V - Q^V}{G} + g \frac{P - Q}{G} \frac{q_c^V}{q_c} - \frac{g}{V} \sin \theta = \frac{\dot{V}}{V} - V \frac{P^H - Q^H}{G} + V \frac{q_c^H}{q_c} \frac{P - Q}{G}.$$

Наконец, подставив сюда  $\dot{V}$  согласно уравнению движения (32.8), приходим к окончательному уравнению

$$\frac{g}{V} \frac{P - Q}{G} - V \frac{P^H - Q^H}{G} - g \frac{P^V - Q^V}{G} = g \frac{P - Q}{G} \frac{q_c^V}{q_c} - V \frac{P - Q}{G} \frac{q_c^H}{q_c}. \quad (63.8)$$

Полученное уравнение (63.8) экстремали задачи удобнее представить в несколько ином виде, введя следующие обозначения:

$$\psi_1 = q_c \frac{g}{(P - Q)V}, \quad (64.8)$$

$$\Phi_1 = q_c \frac{1}{P - Q}. \quad (65.8)$$

С помощью этих обозначений, как нетрудно убедиться, уравнение (63.8) можно переписать в следующем виде:

$$\psi_1^V - \Phi_1^H = 0. \quad (66.8)$$

Так как при сделанном предположении о независимости лобового сопротивления  $Q$  от подъемной силы  $Y$  мы пришли к вырожденной вариационной задаче, то экстремаль (66.8) в общем случае не проходит через заданные граничные точки 1 и 2 (рис. 8.8).

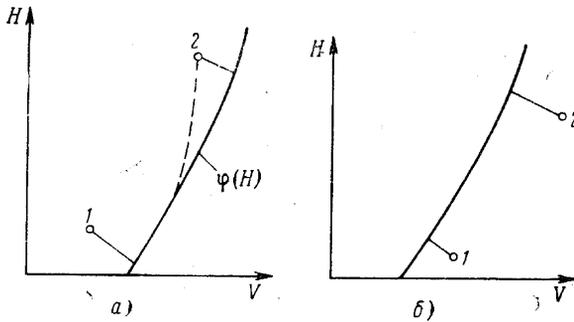


Рис. 8.8. Положение экстремали (66.8) относительно заданных граничных точек: а — обе граничные точки расположены левее экстремали; б — обе граничные точки расположены правее экстремали

Полная траектория полета, таким образом, состоит из отрезков вертикального подъема или снижения ( $\theta = \frac{\pi}{2}$  и  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ) и участка кривой, описываемого уравнением (66.8). Если по условиям задачи полет со снижением не допускается, участки кривых, соответствующих пикированию ( $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ), должны быть заменены участками прямолинейных горизонтальных траекторий (рис. 9.8).

Уравнение экстремали (66.8) решается графическим путем. Можно предложить несколько способов такого графического решения; изложим здесь способ, который представляется наиболее наглядным.

Уравнение (66.8) является уравнением Эйлера для функционала

$$J = \int_{H_1}^{H_2} \left( \psi_1 + \Phi_1 \frac{dV}{dH} \right) dH = \int_{H_1}^{H_2} F_1 dH. \quad (67.8)$$

Действительно, в (67.8) имеется одна неизвестная функция  $V = V(H)$ , так что задача представляет собой простейшую задачу на безусловный экстремум. Составляя выражения частных производных, получим

$$F_1^V = \psi_1^V + \Phi_1^V V', \quad \left( V' \equiv \frac{dV}{dH} \right),$$

$$F_1^{V'} = \Phi_1, \quad \frac{dF_1^{V'}}{dH} = \frac{d\Phi_1}{dH} = \Phi_1^H + \Phi_1^V V',$$

так что уравнение Эйлера

$$\psi_1^V = \Phi_1^H,$$

что соответствует (66.8).

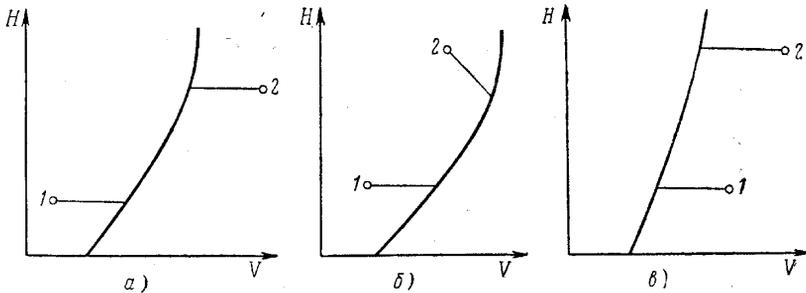


Рис. 9.8. Замена участков полета со снижением участками горизонтального полета: а — характер экстремали при условии, если точка 1 — левее экстремали, точка 2 — правее; б — характер экстремали при условии, если обе точки левее экстремали; в — характер экстремали при условии, если обе точки правее экстремали

Пусть экстремаль, описываемая уравнением (66.8), на рис. 10.8 изображается кривой  $S$ . Составим выражение интеграла типа (67.8) по замкнутому контуру, изображенному на рис. 10.8. Как видно, верхняя горизонтальная линия замкнутого контура соответствует постоянной  $H = H_2$ , так что вдоль этой линии  $dH = 0$ . Точно так же вдоль левой вертикальной линии  $V = V_1$  и  $dV = 0$ .

Представим интеграл (67.8) в виде

$$J = \int_{H_1}^{H_2} \psi_1 dH + \int_{V_1}^{V_2} \Phi_1 dV.$$

Величина этого интеграла вдоль горизонтальной линии  $H = H_2$

$$J_{H_2} = \int_{V_1}^{V_2} \Phi_1(H_2, V) dV,$$

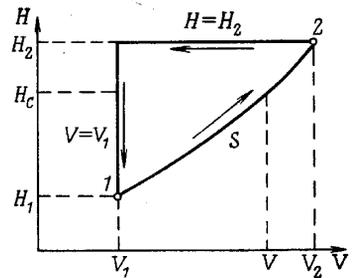


Рис. 10.8. Определение интеграла  $J = \int (\psi_1 + V' \Phi_1) dH$  по замкнутому контуру

а вдоль вертикальной линии  $V = V_1$

$$J_{V_1} = \int_{H_1}^{H_2} \psi_1(H, V_1) dH.$$

Таким образом, совершая обход замкнутого контура против часовой стрелки, получим

$$\oint (\psi_1 dH + \Phi_1 dV) = \int_S (\psi_1 dH + \Phi_1 dV) - \int_{V_1}^{V_2} \Phi_1(H_2, V) dV - \int_{H_1}^{H_2} \psi_1(H, V_1) dH. \quad (68.8)$$

Вспользуемся далее теоремой Грина, утверждающей, что криволинейный интеграл вида (67.8), взятый по замкнутому контуру, равен двойному интегралу, взятому по площади  $D$ , ограниченной этим контуром, от разности частных производных  $\psi_1^V$  и  $\Phi_1^H$ . Получим

$$\begin{aligned} \oint (\psi_1 dH + \Phi_1 dV) &= \iint_D (\psi_1^V - \Phi_1^H) dH dV = \\ &= \int_{H_1}^{H_2} \int_{V_1}^V [\psi_1^V(H, V) - \Phi_1^H(H, V)] dH dV. \end{aligned} \quad (69.8)$$

Напомним, что при вычислении внутреннего интеграла

$$\int_{V_1}^V [\psi_1^V(H, V) - \Phi_1^H(H, V)] dV$$

высота  $H$  должна приниматься постоянной, но тогда

$$\int_{V_1}^V \psi_1^V(H, V) dV = \psi_1(H, V) - \psi_1(H, V_1),$$

так что интеграл по замкнутому контуру (69.8) принимает вид

$$\begin{aligned} \oint (\psi_1 dH + \Phi_1 dV) &= \int_{H_1}^{H_2} \psi_1(H, V) dH - \int_{H_1}^{H_2} \psi_1(H, V_1) dH - \\ &- \int_{H_1}^{H_2} \int_{V_1}^V \Phi_1^H(H, V) dH dV. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (68.8) и определяя из него интересующий нас интеграл

$$J = \int_S (\psi_1 dH + \Phi_1 dV),$$

получим

$$J = \int_{V_1}^{V_2} \Phi_1(H_2, V) dV + \int_{H_1}^{H_2} \left[ \psi_1(H, V) - \int_{V_1}^V \Phi_1^H(H, V) dV \right] dH. \quad (70.8)$$

При фиксированных граничных условиях первое слагаемое (70.8) представляет собой некоторое определенное число  $C$ :

$$\int_{V_1}^{V_2} \Phi_1(H_2, V) dV = \text{const} = C.$$

В таком случае минимуму функционала  $J$  соответствует минимум интеграла

$$\int_{H_1}^{H_2} \left[ \psi_1(H, V) - \int_{V_1}^V \Phi_1^H(H, V) dV \right] dH.$$

Но минимальная величина этого интеграла при фиксированных пределах  $H_1$  и  $H_2$  получится, если для каждой  $H$ , лежащей внутри интервала  $H_1 \leq H \leq H_2$ , подынтегральная функция

$$F = \psi_1(H, V) - \int_{V_1}^V \Phi_1^H(H, V) dV \quad (71.8)$$

будет минимальной.

Таким образом, решение поставленной задачи минимизации расхода топлива на подъем летательного аппарата сводится к отысканию минимального значения функции (71.8) для всех  $H$  внутри заданного интервала ( $H_1 - H_2$ ).

Задача о подъеме летательного аппарата с ВРД за минимальное время оказывается более сложной, чем рассмотренная задача о подъеме с минимальным расходом топлива. Задача усложняется в силу того, что постоянная  $C$  в выражении первого интеграла уравнений Эйлера, которая в задаче о минимуме расхода топлива (см. стр. 244) получалась равной  $C=0$ , теперь становится равной  $C=1$ , как в этом нетрудно убедиться из условия трансверсальности задачи Майера (76a.1) и (80.1). При этом не удастся так просто исключить множители Лагранжа  $\lambda_i$ , как это получалось в рассмотренной задаче.

Приближенное решение задачи о подъеме за минимальное время летательного аппарата с ВРД можно получить, если дополнительно к сделанному выше предположению принять *вес летательного аппарата неизменным* в продолжение подъема. Такое допущение обосновывается тем, что секундный расход топлива  $q_c$  у ВРД сравнительно невелик. Это означает, что, если подъем аппарата занимает небольшое время, полетный вес не успеет измениться значительно.

Результаты расчета, проведенного в предположении  $G = \text{const}$ , можно уточнить, проведя расчет второго приближения, как об этом сказано ниже. Если принять  $G = \text{const}$ , то в уравнениях Эйлера надо положить  $\lambda_3 = 0$ , так как связь (34.8) отпадает.

Уравнения Эйлера (52.8) — (55.8) при этом принимают вид

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 g \frac{P^V - Q^V}{G} - \lambda_5 \sin \theta, \quad (72.8)$$

$$\cos \theta \left( \frac{g}{V} \lambda_1 - \lambda_5 \right) = 0, \quad (73.8)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_1 g \frac{P^H - Q^H}{G}. \quad (74.8)$$

Первый интеграл уравнений Эйлера в этом случае записывается следующим образом:

$$\lambda_1 g \left( \frac{P - Q}{G} - \sin \theta \right) + \lambda_5 V \sin \theta = 1, \quad (75.8)$$

так как основной функционал задачи  $J = t_2$  и частная производная

$$\frac{\partial J}{\partial t_2} = 1.$$

Как и в предыдущей задаче, экстремаль распадается на три ветви, двум из которых соответствует  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , а третья ветвь отвечает уравнению

$$\frac{g}{V} \lambda_1 - \lambda_5 = 0. \quad (76.8)$$

Исключая из уравнений (72.8) — (76.8) множители  $\lambda_1$  и  $\lambda_5$ , получим уравнение экстремали

$$\frac{P-Q}{V} + P^V - Q^V - V \frac{P^H - Q^H}{g} = 0. \quad (77.8)$$

Введя обозначения

$$\psi = \frac{g}{V(P-Q)}, \quad \Phi = \frac{1}{P-Q}, \quad (78.8)$$

после преобразований, аналогичных проведенным в задаче о минимизации запаса топлива  $G_T$ , придем к окончательному уравнению экстремали

$$\psi^V - \Phi^H = 0. \quad (79.8)$$

Таким образом, приближенное решение задачи о минимуме времени формально аналогично решению задачи о минимуме расхода топлива. Разница заключается только в том, что вместо функций  $\psi_1$  и  $\Phi_1$ , с которыми мы встретились в задаче о минимуме расхода топлива, при определении минимума времени следует пользоваться функциями  $\psi$  и  $\Phi$ , определяемыми по формулам (78.8).

Сделаем следующее замечание. Уравнение экстремали (79.8) можно заменить уравнением

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial V} \right|_{H_s = \text{const}} = 0, \quad (79a.8)$$

где

$$H_s = H + \frac{V^2}{2g} \quad (79b.8)$$

— энергетическая высота, определяющая уровень полной энергии летательного аппарата, отнесенной к единице его веса, равная сумме потенциальной энергии  $GH$  и кинетической  $\frac{G}{g} \frac{V^2}{2}$ .

Чтобы убедиться в справедливости (79a.8), заменим на основании (79b.8) высоту  $H$  выражением

$$H = H_s - \frac{V^2}{2g}.$$

Тогда

$$\psi = \psi(H, V) = \psi\left(H_s - \frac{V^2}{2g}, V\right),$$

и частная производная

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial V} \right|_{H_s = \text{const}} = -\frac{\partial \psi}{\partial H} \frac{V}{g} + \frac{\partial \psi}{\partial V}.$$

Так как на основании (78.8)

$$\Phi = \psi \frac{V}{g},$$

то предыдущее выражение легко приводится к виду (79.8).

Это замечание, конечно, полностью относится и к соотношению (66.8), которое может быть заменено выражением

$$\left. \frac{\partial \psi_1}{\partial V} \right|_{H_3 = \text{const}} = 0. \quad (66a.8)$$

Как было отмечено, при решении задачи о минимуме времени подъема летательного аппарата с ВРД в первом приближении вес летательного аппарата был принят постоянным. Этот результат можно уточнить, проведя расчет второго приближения.

В результате расчета первого приближения получим зависимости

$$V = V(H), \quad \theta = \theta(H), \quad t = t(H), \quad G = G(H)$$

и, следовательно, зависимость  $Y/G_0 = f(H)$  по формуле

$$\frac{Y}{G_0} = \left( \cos \theta + \frac{V^2}{g} \sin \theta \frac{d\theta}{dH} \right) \frac{G}{G_0} - \frac{P(\alpha - \varphi)}{G_0}, \quad (80.8)$$

которую можно получить из (33.8), (36.8).

Зависимость (80.8) можно положить в основу второго приближения вместо  $\frac{Y}{G_0} \approx 1$ , принятой в первом приближении.

### § 3. Последовательность расчета оптимальной траектории подъема летательного аппарата с ВРД

Покажем практическое пользование изложенным в § 2 методом расчета на конкретном примере.

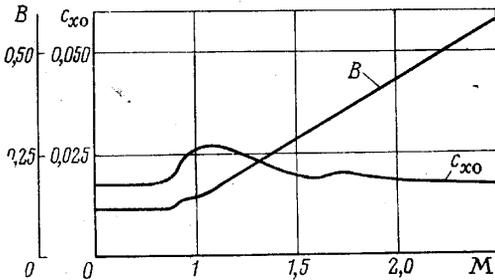


Рис. 11.8. Зависимость коэффициентов  $c_{x0}$  и  $B$  от числа  $M$  (пример)

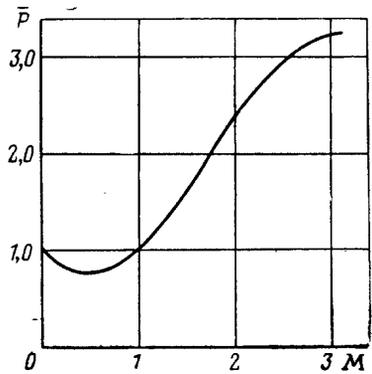


Рис. 12.8. Зависимость безразмерной тяги  $\bar{P}$  от числа  $M$  (пример)

• Пусть гипотетический самолет имеет следующие основные данные: полетный вес в начале подъема  $G_0 = 73\,575 \text{ н} = 7500 \text{ кг}$ ; площадь крыльев  $S = 30 \text{ м}^2$ ; статическая тяга на уровне моря  $P_{p00} = 61\,803 \text{ н} = 6300 \text{ кг}$ ; аэродинамические характеристики самолета в виде зависимости  $c_{x0} = c_{x0}(M)$  и  $B = B(M)$  представлены на рис. 11.8. Пусть изменение силы тяги следует закону: при  $H \leq 11 \text{ км}$

$$P_p = P_{p00} \bar{P}(M) \Delta^{0.9},$$

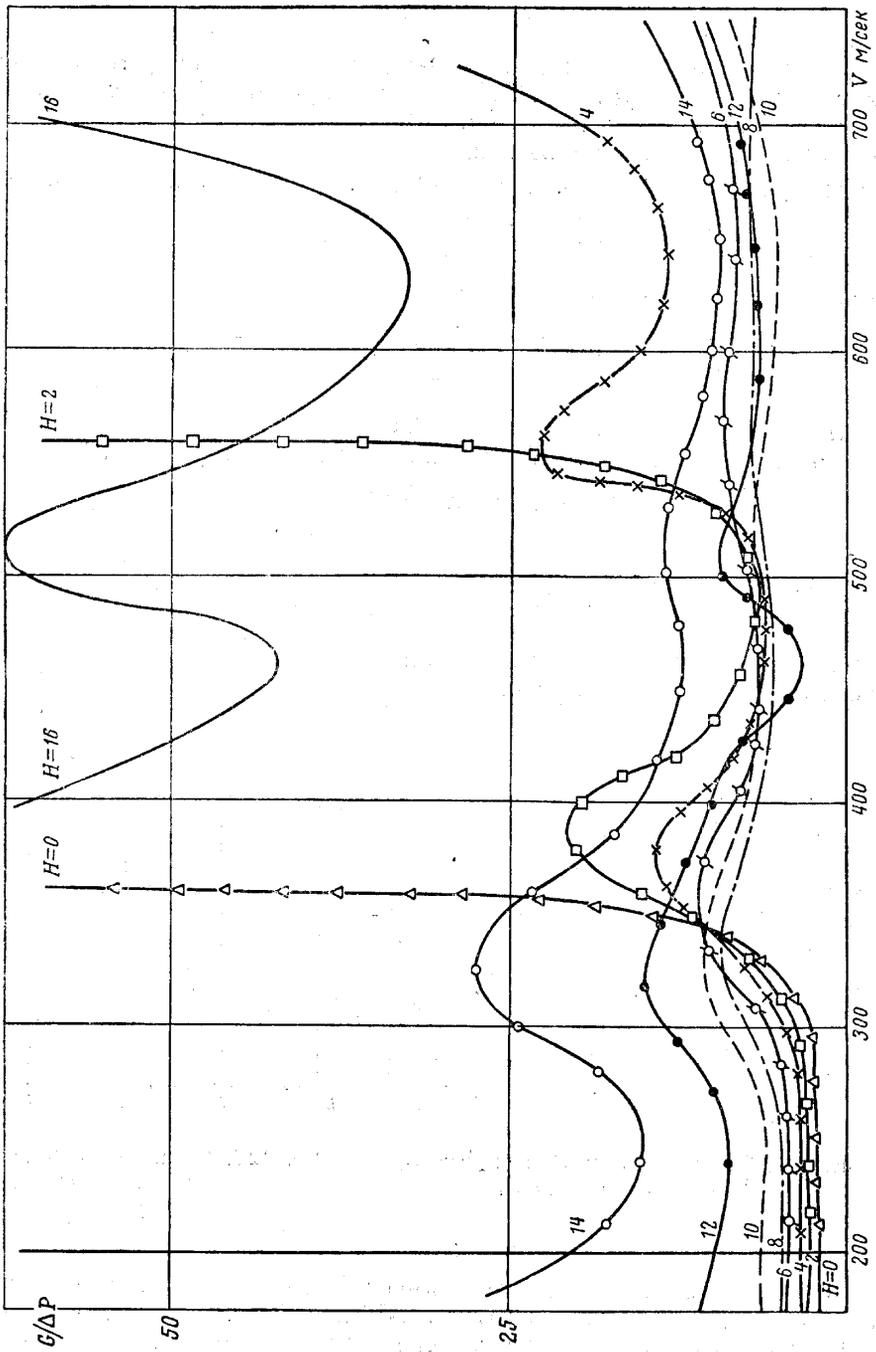


Рис. 13.8. Кривые зависимости  $G/\Delta P$  от  $V$  при различных  $H$

где функция  $\bar{P} = \bar{P}(M)$  представлена на рис. 12.8,  
 $P_{p00}$  — сила тяги на уровне моря при  $V=0$  и при  $H \geq 11$  км

$$P_p = P_{11} \frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \left( \Delta = \frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

Задача состоит в определении программы полета, обеспечивающей минимальное время подъема самолета с высоты  $H_1=0$  на высоту  $H_2=16$  км.

В соответствии с изложенным в § 2 в течение подъема полетный вес считаем неизменным и равным стартовому весу

$$G_0 = 73\,575 \text{ н} = 7500 \text{ кг}.$$

Расчет проводим в такой последовательности.

1. Строим<sup>1</sup> кривые

$$\frac{G}{P_p - P} = \frac{G}{\Delta P}$$

в зависимости от скорости  $V$  для нескольких высот полета  $H$ . Рабочие формулы имеют вид

$$Q = P = \frac{c_x}{c_y} G_0; \quad c_y = \frac{2G}{S \rho V^2}; \quad c_x = c_{x0} + B c_y^2;$$

$$P_p = P_{p00} \bar{P}(M) \Delta^{0.9}; \quad (H \leq 11 \text{ км}); \quad P_p = P_{11} \frac{\Delta}{\Delta_{11}} \quad (H \geq 11 \text{ км}).$$

Результаты расчета по этим формулам приведены в табл. 1.8, кривые  $\frac{G}{\Delta P} = f(V, H)$  — на рис. 13.8.

2. По данным рис. 13.8 находим значения  $G/\Delta P$  при постоянных значениях  $V$  в зависимости от высоты  $H$  и строим графики рис. 14.8.

3. Применяя графическое дифференцирование к кривым рис. 14.8, находим значения частной производной

$$\frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{G}{\Delta P} \right) = G\Phi^H.$$

Далее строим зависимость  $G\Phi^H$  от  $V$  при параметре  $H$  (рис. 15.8).

4. Применяя графическое интегрирование, по графику рис. 15.8 находим значение интеграла

$$\int_{V_1=200}^V G\Phi^H(H, V) dV$$

и вычисляем значения минимизируемой функции

$$GF = \frac{g}{V} \frac{G}{\Delta P} - \int_{V_1=200}^V G\Phi^H(H, V) dV.$$

Вычисления приведены в табл. 2.8, кривые построены на рис. 16.8. На этот же график наносим значения допустимой скорости  $V_{\max}$ , исходя из заданной величины  $q_{\max \max}$ , которую примем

$$q_{\max \max} = 98\,100 \text{ н/м}^2 = 10\,000 \text{ кг/м}^2,$$

<sup>1</sup> Для удобства вычислений здесь и в дальнейшем силы (например  $P_p - P$ ) относим к стартовому весу  $G_0$  самолета. Так же точно вместо функции  $F$  берем функцию  $GF$ .

| <i>H км</i> |   | <i>M</i>                | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9     | 1,0     | 1,1     |
|-------------|---|-------------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
|             |   | <i>c<sub>x0</sub></i>   | 0,0180 | 0,0180 | 0,0180 | 0,0206  | 0,0260  | 0,0263  |
|             |   | <i>B</i>                | 0,115  | 0,115  | 0,115  | 0,119   | 0,144   | 0,164   |
|             |   | $\overline{P}$          | 0,78   | 0,82   | 0,87   | 0,94    | 1,03    | 1,12    |
| 0           | <i>p</i> =10332 <i>κΓ/м<sup>2</sup></i> | <i>V м/сек</i>          | 204    | 238    | 272    | 306     | 340     | 374     |
|             | <i>Δ</i> =1,0                           | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,0961 | 0,0706 | 0,0541 | 0,0427  | 0,0346  | 0,0286  |
|             | <i>a</i> =340 <i>м/сек</i>              | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0190 | 0,0185 | 0,0183 | 0,0208  | 0,0261  | 0,0267  |
|             |   | <i>P κΓ</i>             | 1482   | 1965   | 2536   | 3653    | 5657    | 7001    |
|             |   | <i>P<sub>p</sub> κΓ</i> | 4914   | 5166   | 5481   | 5922    | 6489    | 7060    |
|             |   | <i>G/Δ P</i>            | 2,185  | 2,343  | 2,546  | 3,305   | 9,012   | 127     |
|             |   |                         |        |        |        |         |         |         |
| 2           | <i>p</i> =8106 <i>κΓ/м<sup>2</sup></i>  | <i>V м/сек</i>          | 198,33 | 231,38 | 264,44 | 297,49  | 332,52  | 363,60  |
|             | <i>Δ</i> =0,822                         | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,1234 | 0,0906 | 0,0694 | 0,0548  | 0,0444  | 0,0367  |
|             | <i>a</i> =332,52 <i>м/сек</i>           | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0197 | 0,0189 | 0,0185 | 0,0209  | 0,0263  | 0,0268  |
|             |   | <i>P κΓ</i>             | 1196   | 1564   | 1998   | 2859    | 4441    | 5476    |
|             |   | <i>P<sub>p</sub> κΓ</i> | 4119   | 4331   | 4595   | 4964    | 5439    | 5915    |
|             |   | <i>G/Δ P</i>            | 2,56   | 2,71   | 2,08   | 3,56    | 7,51    | 17,08   |
|             |   |                         |        |        |        |         |         |         |
| 4           | <i>p</i> =6287 <i>κΓ/м<sup>2</sup></i>  | <i>V м/сек</i>          | 194,74 | 227,19 | 259,65 | 292,10  | 324,56  | 357,02  |
|             | <i>Δ</i> =0,669                         | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,158  | 0,116  | 0,089  | 0,0701  | 0,0569  | 0,0469  |
|             | <i>a</i> =324,56 <i>м/сек</i>           | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0209 | 0,0196 | 0,0189 | 0,0212  | 0,0265  | 0,0270  |
|             |   | <i>P κΓ</i>             | 992    | 1267   | 1592   | 2268    | 3492    | 4317    |
|             |   | <i>P<sub>p</sub> κΓ</i> | 3420   | 3598   | 3817   | 4124    | 4520    | 4914    |
|             |   | <i>G/Δ P</i>            | 3,09   | 3,22   | 3,37   | 4,04    | 7,29    | 12,56   |
|             |   |                         |        |        |        |         |         |         |
| 6           | <i>p</i> =4814 <i>κΓ/м<sup>2</sup></i>  | <i>V м/сек</i>          | 189,85 | 221,49 | 253,13 | 284,77  | 316,41  | 348,05  |
|             | <i>Δ</i> =0,5389                        | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,2060 | 0,1513 | 0,1159 | 0,09156 | 0,07417 | 0,06129 |
|             | <i>a</i> =316,41 <i>м/сек</i>           | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0230 | 0,0206 | 0,0195 | 0,0216  | 0,0268  | 0,0272  |
|             |   | <i>P κΓ</i>             | 837,3  | 1021   | 1262   | 1769    | 2710    | 3328    |
|             |   | <i>P<sub>p</sub> κΓ</i> | 2820   | 2960   | 3140   | 3390    | 3720    | 4040    |
|             |   | <i>G/Δ P</i>            | 3,8    | 3,88   | 4      | 4,63    | 7,43    | 10,5    |
|             |   |                         |        |        |        |         |         |         |
| 8           | <i>p</i> =3635 <i>κΓ/м<sup>2</sup></i>  | <i>V м/сек</i>          | 184,83 | 215,63 | 246,44 | 277,24  | 308,05  | 338,85  |
|             | <i>Δ</i> =0,4293                        | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,273  | 0,200  | 0,153  | 0,121   | 0,0982  | 0,0811  |
|             | <i>a</i> =308,05 <i>м/сек</i>           | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0266 | 0,0226 | 0,0207 | 0,0223  | 0,0274  | 0,0277  |
|             |   | <i>P κΓ</i>             | 730,7  | 847,5  | 1015   | 1382    | 2093    | 2562    |
|             |   | <i>P<sub>p</sub> κΓ</i> | 2294   | 2412   | 2559   | 2765    | 3029    | 3294    |
|             |   | <i>G/Δ P</i>            | 4,79   | 4,79   | 4,067  | 5,42    | 8,01    | 10,25   |
|             |   |                         |        |        |        |         |         |         |

Таблица 1,8

| 1,2     | 1,3     | 1,4     | 1,5     | 1,6     | 1,7     | 1,8     | 2,0     | 2,2     | 2,4    |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 0,0250  | 0,0225  | 0,0208  | 0,0196  | 0,0195  | 0,0204  | 0,0200  | 0,0184  | 0,0175  | 0,0174 |
| 0,194   | 0,223   | 0,252   | 0,282   | 0,312   | 0,341   | 0,370   | 0,430   | 0,488   | 0,545  |
| 1,23    | 1,36    | 1,50    | 1,63    | 1,77    | 1,91    | 2,06    | 2,36    | 2,64    | 2,87   |
| 408     | 442     | 476     | 510     | 544     | 578     | 612     | --      | --      | --     |
| 0,0240  | 0,0205  | 0,0176  | 0,0154  | 0,0135  | 0,0119  | 0,0106  | --      | --      | --     |
| 0,0251  | 0,0233  | 0,0208  | 0,0196  | 0,0195  | 0,0204  | 0,0200  | --      | --      | --     |
| 7843    | 8524    | 8863    | 9545    | 10833   | 12857   | 14150   | --      | --      | --     |
| 7749    | 8568    | 9450    | 10269   | 11151   | 12033   | 12978   | --      | --      | --     |
| -79,787 | 170,45  | 12,776  | 10,359  | 23,854  | -9,2137 | -6,3993 | --      | --      | --     |
| 396,66  | 429,71  | 462,77  | 495,82  | 528,88  | 561,93  | 594,99  | --      | --      | --     |
| 0,0308  | 0,0262  | 0,0226  | 0,0197  | 0,0173  | 0,0153  | 0,0137  | --      | --      | --     |
| 0,0252  | 0,0226  | 0,0209  | 0,0197  | 0,0196  | 0,0205  | 0,0201  | --      | --      | --     |
| 6136    | 6469    | 6933    | 7497    | 8497    | 10045   | 10978   | --      | --      | --     |
| 6496    | 7183    | 7922    | 8608    | 9348    | 10087   | 10879   | --      | --      | --     |
| 20,83   | 1050    | 7,58    | 6,75    | 8,81    | 178,5   | -75,7   | --      | --      | --     |
| 389,47  | 421,93  | 454,38  | 486,84  | 519,29  | 551,75  | 584,21  | 649,12  | 714,03  | --     |
| 0,0394  | 0,0336  | 0,0289  | 0,0252  | 0,0222  | 0,0196  | 0,0175  | 0,0142  | 0,0117  | --     |
| 0,0253  | 0,0227  | 0,0210  | 0,0198  | 0,0197  | 0,0205  | 0,0201  | 0,0185  | 0,0176  | --     |
| 4815    | 5066    | 5449    | 5892    | 6655    | 8048    | 8614    | 9771    | 11282   | --     |
| 5397    | 5970    | 6582    | 7152    | 7767    | 8381    | 9039    | 10355   | 11584   | --     |
| 12,88   | 8,3     | 6,62    | 5,95    | 6,74    | 22,52   | 17,65   | 12,84   | 24,83   | --     |
| 379,69  | 411,33  | 442,97  | 474,60  | 506,25  | 537,89  | 569,54  | 632,82  | 696,10  | --     |
| 0,05150 | 0,04388 | 0,03784 | 0,03296 | 0,02897 | 0,02566 | 0,02289 | 0,01854 | 0,01532 | --     |
| 0,0255  | 0,0229  | 0,0212  | 0,0199  | 0,0198  | 0,0206  | 0,0202  | 0,0186  | 0,0176  | --     |
| 3713    | 3914    | 4202    | 4528    | 5126    | 6021    | 6618    | 7524    | 8616    | --     |
| 4440    | 4910    | 5420    | 5880    | 6400    | 6900    | 7440    | 8520    | 9550    | --     |
| 10,3    | 7,55    | 6,18    | 5,55    | 5,90    | 8,55    | 9,14    | 7,55    | 8,05    | --     |
| 369,66  | 400,46  | 431,27  | 462,07  | 492,88  | 523,68  | 554,49  | 616,10  | 677,71  | 739,32 |
| 0,0682  | 0,0581  | 0,050   | 0,0436  | 0,038   | 0,034   | 0,030   | 0,024   | 0,020   | 0,017  |
| 0,0259  | 0,033   | 0,0214  | 0,0201  | 0,0199  | 0,0208  | 0,0203  | 0,0186  | 0,0177  | 0,0176 |
| 2848    | 4260    | 3210    | 3457    | 3927    | 4588    | 5075    | 5812    | 6637    | 7765   |
| 3618    | 4000    | 4412    | 4795    | 5206    | 5618    | 6059    | 6942    | 7765    | 8442   |
| 9,74    | -28,85  | 6,24    | 5,60    | 5,86    | 7,28    | 7,62    | 6,64    | 6,65    | 11,08  |

| <i>H</i> км |  | <i>M</i>                | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0     | 1,1    |
|-------------|--|-------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|
| 10          | $p=2701 \text{ кг/м}^2$<br>$\Delta=0,3376$<br>$a=299,45 \text{ м/сек}$ | <i>V</i> м/сек          | 179,67 | 209,61 | 239,56 | 269,50 | 299,45  | 329,39 |
|             |  | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,3687 | 0,2709 | 0,2074 | 0,1639 | 0,1330  | 0,1097 |
|             |  | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0336 | 0,0264 | 0,0229 | 0,0238 | 0,0285  | 0,0286 |
|             |  | <i>P</i> кг             | 683,4  | 731    | 829    | 1086   | 1607    | 1955   |
|             |  | <i>P<sub>p</sub></i> кг | 1864   | 1941   | 2059   | 2225   | 2438    | 2651   |
|             |  | <i>G/ΔP</i>             | 6,45   | 6,19   | 6,10   | 6,58   | 9,02    | 10,77  |
|             |  |                         |        |        |        |        |         |        |
| 12          | $p=1977 \text{ кг/м}^2$<br>$\Delta=0,2545$<br>$a=295,07 \text{ м/сек}$ | <i>V</i> м/сек          | 177,0  | 206,5  | 236,0  | 265,6  | 295,1   | 324,6  |
|             |  | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,5018 | 0,3705 | 0,2823 | 0,2238 | 0,1807  | 0,1497 |
|             |  | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0469 | 0,0338 | 0,0272 | 0,0265 | 0,0307  | 0,0303 |
|             |  | <i>P</i> кг             | 701    | 689    | 724    | 889    | 1270    | 1520   |
|             |  | <i>P<sub>p</sub></i> кг | 1409   | 1480   | 1571   | 1698   | 1860    | 2022   |
|             |  | <i>G/ΔP</i>             | 10,59  | 9,48   | 8,85   | 9,27   | 12,71   | 14,94  |
|             |  |                         |        |        |        |        |         |        |
| 14          | $p=1444 \text{ кг/м}^2$<br>$\Delta=0,1859$<br>$a=295,07 \text{ м/сек}$ | <i>V</i> м/сек          | 177,0  | 206,5  | 236,0  | 265,6  | 295,1   | 324,6  |
|             |  | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,688  | 0,508  | 0,387  | 0,307  | 0,248   | 0,205  |
|             |  | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,0724 | 0,0477 | 0,0352 | 0,0318 | 0,0348  | 0,0335 |
|             |  | <i>P</i> кг             | 788    | 702    | 680    | 776    | 1051    | 1225   |
|             |  | <i>P<sub>p</sub></i> кг | 1045   | 1095   | 1165   | 1260   | 1380    | 1500   |
|             |  | <i>G/ΔP</i>             | 29,2   | 19,1   | 15,45  | 15,5   | 22,8    | 27,3   |
|             |  |                         |        |        |        |        |         |        |
| 15          | $p=1055 \text{ кг/м}^2$<br>$\Delta=0,1358$<br>$a=295,07 \text{ м/сек}$ | <i>V</i> м/сек          | 177,0  | 206,5  | 236,0  | 265,6  | 295,1   | 324,6  |
|             |  | <i>c<sub>y</sub></i>    | 0,994  | 0,697  | 0,531  | 0,421  | 0,340   | 0,282  |
|             |  | <i>c<sub>x</sub></i>    | 0,1204 | 0,0738 | 0,0504 | 0,0418 | 0,0426  | 0,0396 |
|             |  | <i>P</i> кг             | 956    | 794    | 712    | 745    | 940     | 1053   |
|             |  | <i>P<sub>p</sub></i> кг | 699    | 734    | 779    | 842    | 922     | 1003   |
|             |  | <i>G/ΔP</i>             | -29,18 | -125   | 111,94 | 77,31  | -416,66 | -150   |
|             |  |                         |        |        |        |        |         |        |

| 1,2     | 1,3    | 1,4    | 1,5    | 1,6    | 1,7    | 1,8    | 2,0    | 2,2    | 2,4    |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 359,34  | 389,28 | 419,23 | 449,17 | 479,12 | 509,07 | 539,01 | 598,90 | 658,79 | 718,68 |
| 0,0922  | 0,0785 | 0,0677 | 0,0590 | 0,0518 | 0,0459 | 0,0409 | 0,0332 | 0,0274 | 0,0230 |
| 0,0267  | 0,0239 | 0,0220 | 0,0206 | 0,0203 | 0,0211 | 0,0206 | 0,0189 | 0,0178 | 0,0176 |
| 2169    | 2280   | 2437   | 2610   | 2934   | 3442   | 3765   | 4277   | 4854   | 5739   |
| 2911    | 3219   | 3550   | 3858   | 4189   | 4521   | 4876   | 5586   | 6248   | 6793   |
| 10,11   | 7,98   | 6,74   | 6,00   | 5,97   | 6,95   | 6,75   | 5,73   | 5,38   | 7,12   |
| 354,1   | 383,6  | 413,1  | 442,6  | 472,1  | 501,6  | 531,1  | 590,1  | 649,1  | 708,1  |
| 0,1255  | 0,1072 | 0,0922 | 0,0805 | 0,0706 | 0,0626 | 0,0557 | 0,0452 | 0,0373 | 0,0314 |
| 0,0281  | 0,0251 | 0,0229 | 0,0214 | 0,0110 | 0,0217 | 0,0211 | 0,0192 | 0,0182 | 0,0179 |
| 1449    | 1760   | 1860   | 1990   | 1170   | 2610   | 2836   | 3186   | 3659   | 4267   |
| 2221    | 2455   | 3708   | 2943   | 3196   | 3449   | 3719   | 4261   | 4767   | 5182   |
| 9,71    | 10,79  | 8,85   | 7,87   | 3,70   | 8,94   | 8,49   | 6,98   | 6,77   | 8,19   |
| 354,1   | 383,6  | 413,1  | 442,6  | 472,1  | 501,6  | 531,1  | 590,1  | 649,1  | 708,1  |
| 0,172   | 0,147  | 0,126  | 0,110  | 0,097  | -0,086 | 0,076  | 0,062  | 0,051  | 0,043  |
| 0,0307  | 0,0273 | 0,0248 | 0,0230 | 0,0224 | 0,0229 | 0,0221 | 0,0200 | 0,0188 | 0,0184 |
| 1337    | 1395   | 1475   | 1570   | 1730   | 2000   | 2180   | 2420   | 2760   | 3210   |
| 1645    | 1825   | 2010   | 2180   | 2370   | 2560   | 2760   | 3160   | 3540   | 3840   |
| 24,4    | 17,45  | 14,0   | 12,3   | 11,7   | 13,4   | 12,9   | 10,15  | 9,6    | 11,9   |
| 354,1   | 383,6  | 413,1  | 442,6  | 472,1  | 501,6  | 531,1  | 590,1  | 649,1  | 708,1  |
| 0,236   | 0,202  | 0,173  | 0,151  | 0,133  | 0,118  | 0,105  | 0,050  | 0,070  | 0,059  |
| 0,0358  | 0,0316 | 0,0283 | 0,0260 | 0,0250 | 0,0251 | 0,0240 | 0,0196 | 0,0199 | 0,0193 |
| 1138    | 1173   | 1227   | 1291   | 1409   | 1595   | 1714   | 2940   | 2132   | 2453   |
| 1102    | 1218   | 1344   | 1460   | 1585   | 1711   | 1845   | 2114   | 2365   | 2570   |
| -208,33 | 166,66 | 64,10  | 44,38  | 42,61  | 64,65  | 57,25  | -9,07  | 32,18  | 64,10  |

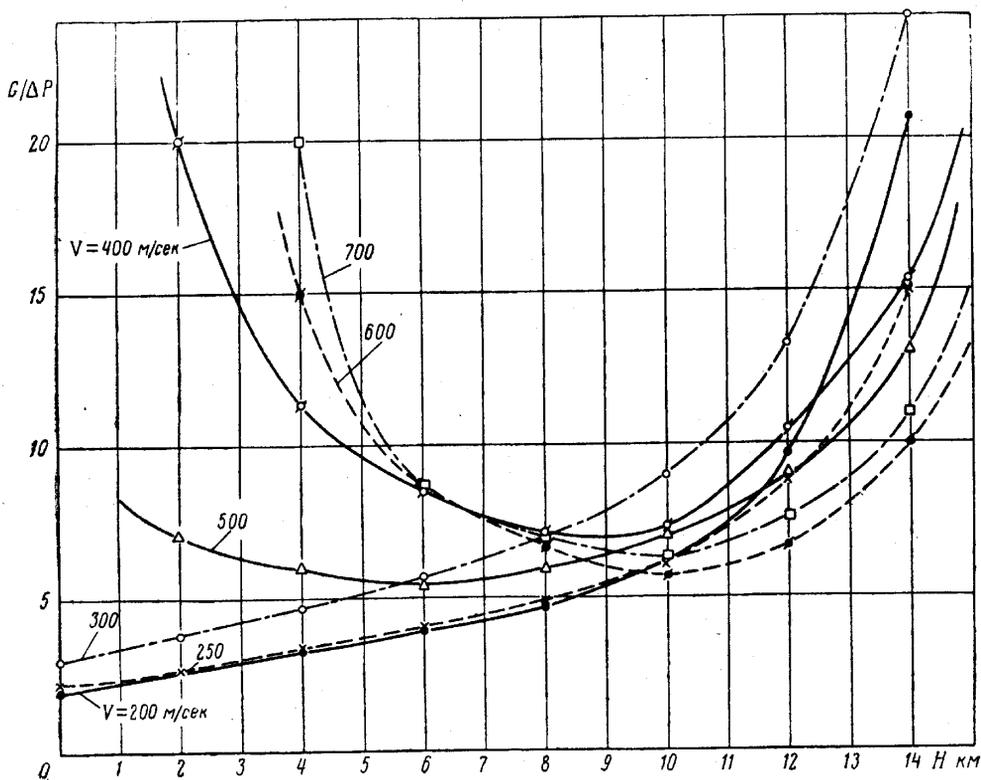


Рис. 14.8. Зависимость  $G/\Delta P$  от  $H$  при различных  $V$

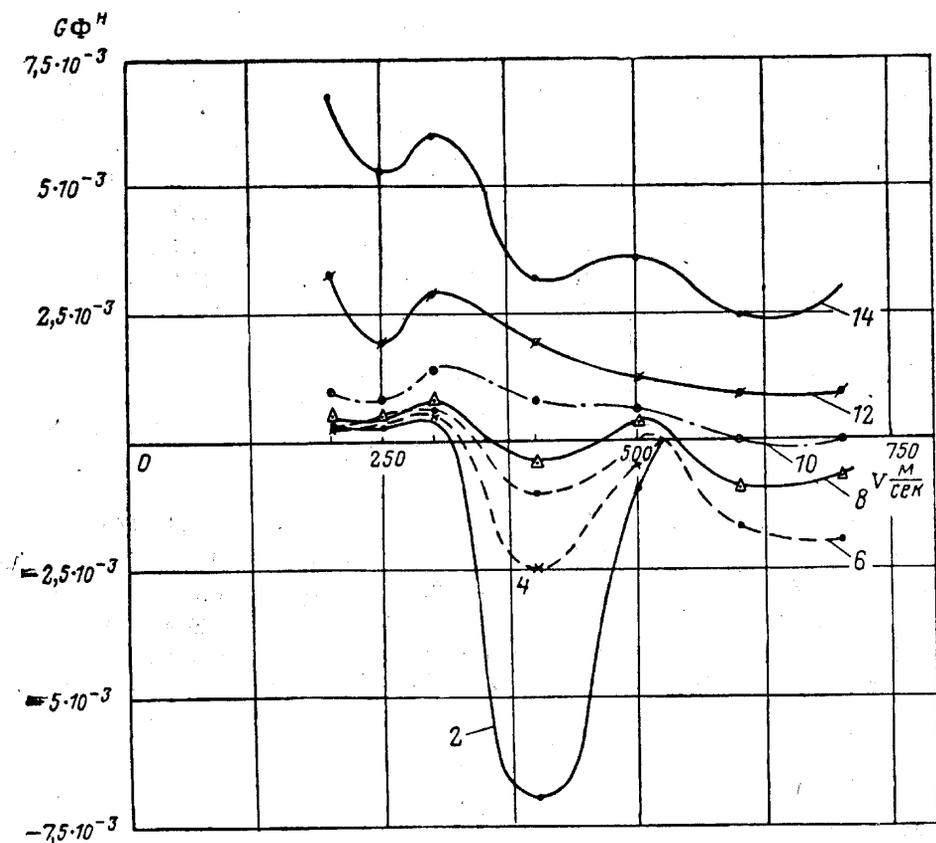


Рис. 15.8. Результаты графического дифференцирования кривых рис. 14.8

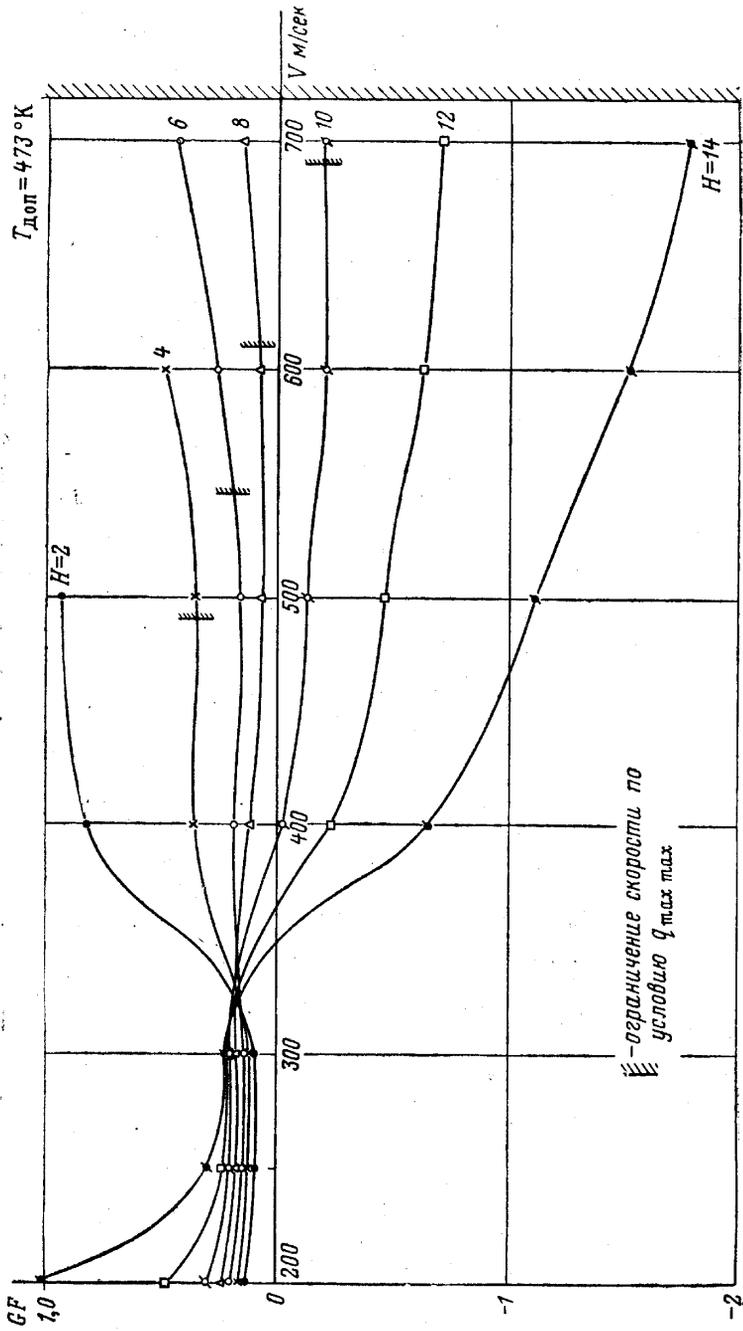


Рис. 16.8. Зависимость GF от V при различных H

Таблица 2.8

| <i>H км</i> | <i>V м/сек</i>    | 200   | 250    | 300    | 400    | 500     | 600    | 700    |
|-------------|-------------------|-------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|
| 2           | <i>G/ΔP</i>       | 2,6   | 2,7    | 3,8    | 20     | 7       | —      | —      |
|             | <i>g/V G/ΔP</i>   | 0,128 | 0,106  | 0,124  | 0,490  | 0,137   | —      | —      |
|             | $\int \Phi^H GdV$ | 0     | 0,015  | 0,033  | -0,343 | -0,801  | —      | —      |
|             | <i>GF</i>         | 0,128 | 0,091  | 0,091  | 0,833  | 0,938   | —      | —      |
| 4           | <i>G/ΔP</i>       | 3,3   | 3,4    | 4,7    | 11,4   | 6       | 15     | —      |
|             | <i>g/V G/ΔP</i>   | 0,162 | 0,133  | 0,154  | 0,280  | 0,118   | 0,245  | —      |
|             | $\int \Phi^H GdV$ | 0     | 0,0125 | 0,0360 | -0,074 | -0,233  | -0,245 | —      |
|             | <i>GF</i>         | 0,162 | 0,120  | 0,118  | 0,354  | 0,351   | 0,490  | —      |
| 6           | <i>G/ΔP</i>       | 4     | 4,1    | 5,7    | 8,5    | 5,5     | 8,7    | 8,7    |
|             | <i>g/V G/ΔP</i>   | 0,196 | 0,161  | 0,186  | 0,208  | 0,108   | 0,142  | 0,122  |
|             | $\int \Phi^H GdV$ | 0     | 0,02   | 0,049  | 0,0245 | -0,0435 | -0,119 | -0,311 |
|             | <i>GF</i>         | 0,196 | 0,141  | 0,137  | 0,184  | 0,151   | 0,261  | 0,433  |
| 8           | <i>G/ΔP</i>       | 4,7   | 4,9    | 7,0    | 7,1    | 6,0     | 6,7    | 7,0    |
|             | <i>g/V G/ΔP</i>   | 0,230 | 0,192  | 0,229  | 0,174  | 0,118   | 0,109  | 0,098  |
|             | $\int \Phi^H GdV$ | 0     | 0,0205 | 0,0505 | 0,063  | 0,056   | 0,038  | -0,052 |
|             | <i>GF</i>         | 0,230 | 0,172  | 0,179  | 0,111  | 0,062   | 0,071  | 0,150  |
| 10          | <i>G/ΔP</i>       | 6,2   | 6,2    | 9,0    | 7,3    | 7,0     | 5,7    | 6,4    |
|             | <i>g/V G/ΔP</i>   | 0,304 | 0,243  | 0,294  | 0,179  | 0,137   | 0,093  | 0,0895 |
|             | $\int \Phi^H GdV$ | 0     | 0,036  | 0,0895 | 0,207  | 0,271   | 0,301  | 0,291  |
|             | <i>GF</i>         | 0,304 | 0,207  | 0,204  | -0,028 | -0,134  | -0,208 | -0,201 |
| 12          | <i>G/ΔP</i>       | 9,8   | 8,9    | 13,3   | 10,5   | 9,0     | 6,7    | 7,7    |
|             | <i>g/V G/ΔP</i>   | 0,480 | 0,349  | 0,435  | 0,257  | 0,176   | 0,109  | 0,108  |
|             | $\int \Phi^H GdV$ | 0     | 0,12   | 0,24   | 0,49   | 0,64    | 0,738  | 0,823  |
|             | <i>GF</i>         | 0,48  | 0,229  | 0,195  | -0,233 | -0,464  | -0,629 | -0,715 |
| 14          | <i>G/ΔP</i>       | 2,07  | 15     | 24     | 15,4   | 13      | 10     | 11     |
|             | <i>g/V G/ΔP</i>   | 1,02  | 0,588  | 0,785  | 0,378  | 0,255   | 0,163  | 0,154  |
|             | $\int \Phi^H GdV$ | 0     | 0,29   | 0,57   | 1,04   | 1,38    | 1,69   | 1,94   |
|             | <i>GF</i>         | 1,02  | 0,298  | 0,215  | -0,662 | -1,125  | -1,527 | -1,768 |

и из заданной температуры поверхности (температуры торможения), которую примем

$$T_{\text{доп}} = 473^\circ \text{ К.}$$

Сделаем попутно следующие замечания.

Обычно из условий прочности известна максимальная величина допустимого скоростного напора  $q_{\text{max max}}$ . Так как скоростной напор, как известно,

$$q = \frac{\rho V^2}{2},$$

то, полагая  $q \equiv q_{\text{max max}}$ , легко построить зависимость допустимой максимальной скорости полета от высоты:

$$V_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2q_{\text{max max}}}{\rho}} = \varphi_1(H).$$

Если кривая, изображающая эту зависимость, проходит правее кривой  $V = \varphi(H)$  экстремали (79.8), то при расчете траектории скорости можно брать по кривой (79.8), так как в этом случае скоростной напор нигде не превышает максимально допустимую величину  $q_{\text{max max}}$ . Если же кривая  $V_{\text{max}} = \varphi_1(H)$  пересекает кривую (79.8), то расчет следует вести по кривой, отмеченной на рис. 17.8 жирной линией.

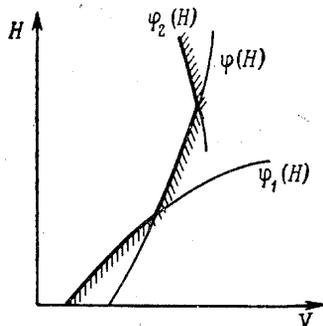


Рис. 17.8. К выбору оптимальной траектории полета

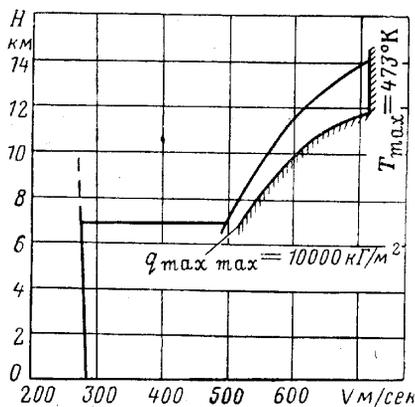


Рис. 18.8. Наивыгоднейший закон изменения  $V = \varphi(H)$

Точно так же, если задана максимально допустимая температура поверхности самолета, то, как указано в гл. IV, можно построить кривую  $V_{\text{max}} = \varphi_2(H)$  зависимости допустимой (по условиям нагрева поверхности) скорости от высоты полета. Если эта кривая (см. рис. 17.8) пересечет кривую (79.8), расчет следует вести по жирной кривой.

5. По графику рис. 16.8 определяем значения  $V$ , соответствующие  $(GF)_{\text{min}}$ . В том случае, когда ограничения по  $q_{\text{max max}}$  или по  $T_{\text{доп}}$  лимитируют достижение минимальных значений  $GF$ , принимаем предельно допустимые значения.

Наивыгоднейшие скорости, определенные таким способом, наносим на рис. 18.8 в зависимости от высоты полета  $H$ . В процессе расчета устанавливаем, что оптимальная высота разгона по горизонтали получается  $H_{\text{разг}} \approx 7 \text{ км}$ .

Следовательно, до высоты  $H_{\text{разг}} = 7 \text{ км}$  самолет должен набирать высоту со скоростями по траектории, несколько меньшими, чем скорость

звука. На высоте  $H_{\text{разг}}=7 \text{ км}$  самолет должен разогнаться от скорости  $V_1=267 \text{ м/сек}$  до скорости  $V_2=500 \text{ м/сек}$ , соответствующей второму минимуму функции  $GF$ . На больших высотах полета подъем осуществляется со скоростями, соответствующими второму минимуму функции  $GF$  или со скоростями, соответствующими  $q_{\text{max max}}$  или  $T_{\text{доп}}^{\circ}=T_{\text{max}}^{\circ}$ .

Это объясняется особенностями протекания кривых потребной и располагаемой тяг в области околосвуковых и сверхзвуковых скоростей полета. На рис. 19.8 показано типичное протекание этих кривых для скоростного самолета. Там же приведена зависимость  $\psi(V)$  для постоянной высоты полета. При приближении к скорости звука коэффициент лобового сопротивления  $c_x$  растет вследствие появления волнового сопротивления (см. гл. IV). Вблизи скорости, соответствующей  $M=1$ , коэффициент  $c_x$  достигает максимума и при дальнейшем увеличении скорости полета уменьшается. Если на самолете установлено

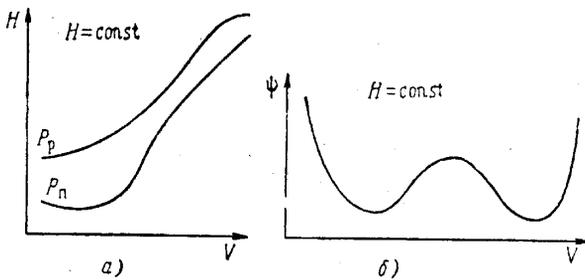


Рис. 19.8. Протекание:

а — кривых потребной и располагаемой тяг; б — кривой  $\psi(V)$  для скоростного самолета

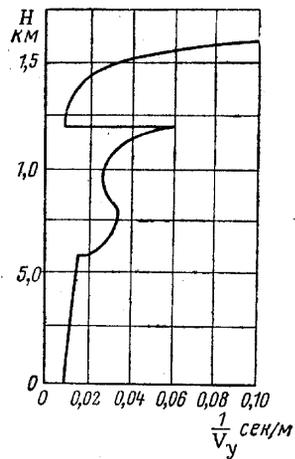


Рис. 20.8. Подынтегральная функция для определения времени полета

треугольное или стреловидное крыло, то при некотором значении  $M > 1$  получается второй максимум  $c_x$ ; этому числу  $M$  соответствует целиком сверхзвуковое обтекание крыла. Вследствие такого своеобразного протекания кривой  $c_x=c_x(M)$  характер кривой потребной тяги получается таким, как показано на рис. 19.8. Описанный выше прием расчета позволяет выяснить, на каком из минимумов кривой  $\psi(V)$  целесообразно осуществлять подъем.

6. Производим расчет времени подъема самолета.

Время, затраченное собственно на подъем, определяем по формуле

$$t = \int_0^H \frac{dH}{V_y} = \int_0^H \frac{dH}{V \sin \theta} = \int_0^H \frac{1}{V} \frac{G}{\Delta P} \left( 1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dH} \right) dH \quad (\text{при } H \leq 7 \text{ км}),$$

$$t = \int_0^{7000} \frac{1}{V} \frac{G}{\Delta P} \left( 1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dH} \right) dH + \int_{7000}^H \frac{1}{V} \frac{G}{\Delta P} \left( 1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dH} \right) dH \quad (\text{при } H \geq 7 \text{ км}).$$

Время, затраченное на разгон на высоте  $H_{\text{разг}}=7 \text{ км}$ , находим по формуле

$$t_{\text{разг}} = \frac{1}{g} \int_{V_1}^{V_2} \frac{G}{\Delta P} dV.$$

Вычисления подынтегральной функции  $1/V_y$  приведены в табл. 3.8, кривая  $1/V_y=f(H)$  построена на графике рис. 20.8.

Таблица 3.8

| $H$ км                | 0       | 2       | 4       | $\leq 7$ | $\geq 7$ | 8      | 10     | 12     | 14     | 16     |
|-----------------------|---------|---------|---------|----------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $V$ м/сек             | 284     | 280     | 278     | 275      | 500      | 545    | 600    | 700    | 718    | 718    |
| $\frac{G}{\Delta P}$  | 27      | 3,3     | 3,7     | 4,6      | 5,3      | 7,3    | 5,3    | 8      | 13     | 74     |
| $\frac{dV}{dH}$ 1/сек | -0,0015 | -0,0015 | -0,0015 | -0,0015  | 0,02     | 0,028  | 0,035  | 0,06   | 0      | 0      |
| $\frac{1}{V_y}$ сек/м | 0,0091  | 0,0110  | 0,0127  | 0,0160   | 0,0212   | 0,0342 | 0,0278 | 0,0604 | 0,0180 | 0,1030 |

Подробности расчета времени подъема и разгона, как не представляющего сложности, опускаем. В результате расчетов получаем время подъема на высоту  $H=16$  км (с учетом разгона на высоте  $H_{\text{разг}}=7$  км)

$$t=9,24 \text{ мин.}$$

Заметим, что если бы самолет до высоты  $H=7$  км так же, как в предыдущем случае, а после разгона на режимах, соответствующих максимальным избыткам мощности, как это принималось в гл. VI, то время полета до  $H=16$  км при скорости  $V=718$  м/сек получилось бы

$$t \approx 13,6 \text{ мин.}$$

Отсюда видно, что проигрыш во времени в случае полета на режимах, определенных без учета изменения с высотой кинетической энергии самолета, получается значительный, в нашем примере  $\sim 46\%$ .

Остановимся кратко на погрешностях, связанных с допущением  $Q^\alpha = 0$ , положенным в основу расчета. Равенство  $Q^\alpha = 0$  предполагает, что при встречающихся на практике угловых скоростях  $\theta$  лобовое сопротивление  $Q$  не сильно отличается от вычисленного для  $\theta=0$ .

Это допущение дает близкие к действительности результаты везде, кроме угловых точек экстремали. Для перехода с одной ветви экстремали на другую при сделанном допущении требуются бесконечно большие угловые скорости  $\dot{\theta}$ , тогда как на самом деле они остаются конечными. Такой результат является прямым следствием допущения о независимости лобового сопротивления  $Q$  от угла атаки и от подъемной силы  $Y$  и, следовательно, от угловой скорости  $\dot{\theta}$ .

Выясним хотя бы качественно, каких погрешностей можно ожидать вследствие этого допущения.

При определении экстремали предполагалось, что летательный аппарат перемещается по траектории с перегрузкой  $n_y \approx 1$  независимо от того, прямолинейная это или криволинейная траектория. В угловых точках траектории поворот вектора скорости при этом осуществляется мгновенно и не требует затраты мощности. В действительности поворот вектора скорости происходит с конечной угловой скоростью и занимает некоторое время. В течение этого времени перегрузка  $n_y \neq 1$ ; следовательно, лобовое сопротивление летательного аппарата в течение этого времени будет больше, чем  $Q_{n_y=1}$ , если  $n_y > 1$ , и меньше  $Q_{n_y=1}$ , если  $n_y < 1$  (здесь  $Q_{n_y=1}$  — лобовое сопротивление при  $n_y=1$ ). Полезная мощность, равная  $V(P - Q)$ , при  $n_y > 1$  получится меньшей, а при  $n_y < 1$  — большей, чем при  $n_y=1$ . Для сообщения летательному аппарату некоторой скорости и высоты полета в первом случае (при  $n_y > 1$ ) потребуется большее время, а

во втором (при  $n_y < 1$ ) — меньшее, чем в результате расчета, приведенного выше.

Расчеты показывают, что в среднем увеличение времени полета при выполнении прямой горки (при  $n_y > 1$ ) и уменьшение его при выполнении обратной горки (при  $n_y < 1$ , в частности, при  $n_y = 0$ ) приблизительно компенсируются.

В первом приближении, следовательно, можно не учитывать изменение времени полета летательного аппарата и расхода топлива вследствие поворота вектора скорости с конечной угловой скоростью  $\dot{\theta}$ , ограничиваясь проведением расчета по методу, изложенному в этом параграфе.

#### § 4. Оптимальная траектория подъема ракеты в атмосфере.

##### Задача о минимуме времени подъема на заданную высоту

Задача об оптимизации подъема ракеты в атмосфере представляет собой частный случай задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Особенности этой частной задачи состоят в следующем.

Как отмечено в гл. IV, секундный расход топлива для ракетных двигателей не зависит от скорости и высоты полета. Это означает, что при неизменном режиме работы двигателя (или при заданном законе изменения режима работы двигателя в зависимости от времени полета) вес ракеты есть заданная функция времени.

Силу тяги ракетного двигателя практически можно считать не зависящей от скорости полета, так как давление наружного воздуха на срезе сопла двигателя в первом приближении не зависит от скорости полета. В таком случае частная производная  $P^V = 0$ . При изменении высоты полета в пределах атмосферы, как отмечено в гл. IV, сила тяги ракетного двигателя изменяется вследствие изменения давления наружного воздуха, так что частная производная  $P^H$ , вообще говоря, не равна нулю. Если не требуется большая точность расчета, зависимостью тяги ракетного двигателя от высоты полета в первом приближении можно пренебречь; это несколько упрощает дальнейший расчет.

Рассматривая задачу о минимизации расхода топлива при подъеме ракеты, основной функционал задачи мы по-прежнему должны брать в форме (38.8).

Имея в виду сделанное выше замечание о том, что в случае ракеты полетный вес  $G$  есть заданная функция времени  $t$ , в выражении (39.8) функции Лагранжа  $F$  мы должны положить  $\lambda_3 \equiv 0$ . Далее, если дальность по горизонтали во время подъема ракеты не регламентирована, то, как и раньше,  $\lambda_4 \equiv 0$ .

Основываясь на допущениях, принятых в § 2, уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи получим из уравнений (47.8) — (51.8), отбросив уравнение (49.8), поскольку вес  $G$  не варьируется.

Таким образом, приходим к следующей системе уравнений Эйлера:

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1 g \frac{Q^V}{G} + \lambda_2 \frac{g}{V^2} \left[ \frac{Y - Y^V V + P(\alpha - \varphi)}{G} - \cos \theta \right] - \lambda_5 \sin \theta, \quad (81.8)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 g \cos \theta - \lambda_2 \frac{g}{V} \sin \theta - \lambda_5 V \cos \theta, \quad (82.8)$$

$$\dot{\lambda}_5 = \lambda_1 g \frac{Q^H}{G} - \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y^H}{G}, \quad (83.8)$$

$$\lambda_1 Q^\alpha - \lambda_2 \frac{Y^\alpha + P}{V} = 0. \quad (84.8)$$

Условие трансверсальности в рассматриваемой задаче, аналогичное (40.8), принимает вид

$$\lambda_{12}\dot{V}_2 + \lambda_{22}\dot{\theta}_2 + \lambda_{52}\dot{H}_2 = 0. \quad (85.8)$$

Из уравнения (76a.1) получим граничные значения множителей Лагранжа на правом конце

$$\lambda_{12} = \lambda_{22} = 0. \quad (86.8)$$

Решение уравнений Эйлера и движения, так же как и в общем случае, осуществляется методами численного интегрирования.

В случае приближенного решения задачи о подъеме ракеты в атмосфере, базирующегося на допущении  $Q^a = 0$ , уравнение экстремали имеет по-прежнему вид (66.8). Это уравнение можно упростить, если принять во внимание, что у ракеты  $q_c = \text{const}$ . Тогда, сокращая члены уравнения (66.8) на общий множитель  $q_c$ , получим следующее уравнение экстремали в задаче о подъеме ракеты, совпадающее с (79.8):

$$\psi^V - \Phi^H = 0,$$

где

$$\psi = \frac{g}{V(P - Q)},$$

$$\Phi = \frac{1}{P - Q}.$$

Эти соображения приводят к важному выводу о том, что оптимальная траектория подъема ракеты, обеспечивающая минимальный расход топлива  $G_T$ , совпадает с оптимальной траекторией подъема ракеты, обеспечивающей минимальное время подъема. Действительно, так как для ракеты

$$G_T = q_c t$$

и  $q_c = \text{const}$ , то  $G_T$  прямо пропорционально  $t$  и, следовательно, минимум  $G_T$  и  $t$  достигается при одном и том же законе управления.

Таким образом, в задаче о наимыгоднейшей программе подъема ракеты оба варианта постановки этой задачи — минимизация расхода топлива и минимизация времени полета — имеют одно и то же решение.

Дальнейший ход расчета аналогичен изложенному в § 2. Функция  $F$ , минимум которой должен обеспечиваться для каждой высоты полета  $H$ , имеет вид

$$F = \psi(H, V) - \int_{V_1}^V \Phi^H(H, V) dV. \quad (87.8)$$

## § 5. Простейшая задача о перехвате воздушной цели в вертикальной плоскости

Пусть воздушная цель движется в вертикальной плоскости по некоторой криволинейной траектории, причем скорость полета воздушной цели  $V_c$  в общем случае может изменяться с течением времени; закон, описывающий движение воздушной цели, будем считать известным. Пусть в некоторый момент времени  $t_1$ , который примем за начальный, в той же вертикальной плоскости, в которой движется цель, находится перехватчик в точке с координатами  $(x_1, H_1)$ . Скорость перехватчика  $V$  в начальный момент времени будем считать заданной по величине и по направлению.

Задача о перехвате заключается в определении таких условий движения перехватчика, при которых в некоторый последующий момент времени  $t_2$  происходит встреча перехватчика и воздушной цели, причем обеспечивается экстремум какой-либо интегральной характеристики движения перехватчика. За такую характеристику можно принять, например, расход топлива, затрачиваемого на перехват, время перехвата, расстояние от пункта вылета перехватчика, на котором осуществляется встреча (рубеж перехвата), и т. д.

Формулированная задача является вариационной задачей, в которой функционалом служит выбранная интегральная характеристика. Одна из наиболее интересных задач о перехвате заключается в определении такого закона управления перехватчиком, при котором рубеж перехвата получается наибольшим возможным.

Для иллюстрации общего хода рассуждений рассмотрим простейшую задачу о перехвате, сделав следующие допущения, существенно упрощающие решение.

1. Систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, примем за инерциальную. Другими словами, будем пренебрегать кривизной поверхности Земли и ее суточным вращением. Ускорение тяготения примем  $g = \text{const}$ .

2. Аэродинамическими силами, действующими на перехватчик, будем пренебрегать, полагая, следовательно, что атмосфера вокруг Земли отсутствует.

3. В качестве управления примем угол наклона вектора тяги к горизонтальной плоскости (к поверхности Земли), а самую величину силы тяги будем считать постоянной, как и секундный расход топлива.

Сделанные допущения, особенно второе, — существенные; только при таких допущениях, однако, удается довести аналитически решение задачи в общем виде до конца. В дальнейшем рассмотрим задачу о перехвате в более близкой к действительности постановке.

Итак, при сделанных упрощающих предположениях будем решать вариационную задачу в форме Майера (см. гл. I).

Геометрическая интерпретация задачи показана на рис. 21.8. В качестве функционала примем

$$J = -x_2$$

[знак минус выбран потому, что задача о нахождении максимума  $x_2$  эквивалентна задаче об отыскании минимума величины  $(-x_2)$ ].

На движение перехватчика наложены связи — уравнения движения и кинематические уравнения, которые в проекциях на оси земной системы координат имеют вид

$$\dot{V}_{xg} - g \frac{P}{G} \cos \varphi = 0, \quad (88.8)$$

$$\dot{V}_{yg} - g \frac{P}{G} \sin \varphi + g = 0, \quad (89.8)$$

$$\dot{x} - V_{xg} = 0, \quad (90.8)$$

$$\dot{y} - V_{yg} = 0. \quad (91.8)$$

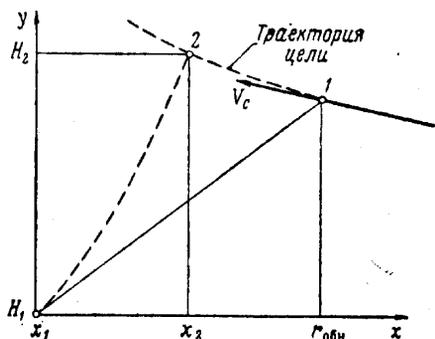


Рис. 21.8. К задаче о перехвате воздушной цели в вертикальной плоскости

Через  $\varphi$  обозначен угол между направлением силы тяги и горизонтальной плоскостью; в частности, если двигатель жестко связан с летательным аппаратом, то угол  $\varphi$  представляет собой угол тангажа  $\theta$ .

В соответствии с данной выше формулировкой задачи вес перехватчика  $G$  есть линейная функция времени<sup>1</sup>  $t$ :

$$G = G_1(1 - kt) \quad (92.8)$$

и

$$k = \frac{P}{G_1 P_{y_d}}.$$

Так как в конечный момент времени  $t = t_2$ , перехватчик и воздушная цель должны находиться в одной и той же точке пространства, то, как можно убедиться с помощью рис. 21.8, на граничные условия правого конца задачи накладываются следующие две связи (условия на левом конце интегрирования предполагаем фиксированными):

$$\int_{t_1}^{t_2} V_{cx} dt + x_2 - r_{обн} = 0, \quad (93.8)$$

$$H_2 - H_{c1} - \int_{t_1}^{t_2} V_{cy} dt = 0. \quad (94.8)$$

Как указано на стр. 47, функция, минимум которой должен быть обеспечен, должна быть записана в виде

$$J_1 = J + \nu_1 \left( \int_{t_1}^{t_2} V_{cx} dt + x_2 - r_{обн} \right) + \nu_2 \left( H_2 - H_{c1} - \int_{t_1}^{t_2} V_{cy} dt \right), \quad (95.8)$$

где  $\nu_1, \nu_2$  — некоторые постоянные, подлежащие определению.

Функция Лагранжа  $F$

$$F = \lambda_1 \left( \dot{V}_{xg} - g \frac{P}{G} \cos \varphi \right) + \lambda_2 \left( \dot{V}_{yg} - g \frac{P}{G} \sin \varphi + g \right) + \lambda_3 (\dot{x} - V_{xg}) + \lambda_4 (\dot{H} - V_{yg}). \quad (96.8)$$

Ввиду того, что на левом конце интегрирования координаты фиксированы, а время можно принять  $t_1 = 0$ , мы должны воспользоваться только уравнениями (74.1) и (76.1):

$$\frac{\partial J_1}{\partial t_2} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} \dot{y}_{i2} = 0; \quad \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} + F y_i = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

В нашем случае координаты  $y_i$  получаются

$$y_1 = V_{xg}, \quad y_2 = V_{yg}, \quad y_3 = x, \quad y_4 = H, \quad y_5 = \varphi,$$

причем управлением является угол  $\varphi$ . Уравнение (74.1) принимает вид

$$\nu_1 V_{cx2} - \nu_2 V_{cy2} (1 - \nu_1) V_{xg2} + \nu_2 V_{yg2} = 0, \quad (97.8)$$

<sup>1</sup> Вес  $G_1$  соответствует моменту времени  $t_1$  в отличие от  $G_0$ , соответствующего стартовому весу летательного аппарата.

а уравнения (76.1):

$$\lambda_{32} = 1 - \nu_1, \quad (98.8)$$

$$\lambda_{42} = -\nu_2, \quad (99.8)$$

$$\lambda_{12} = 0, \quad (100.8)$$

$$\lambda_{22} = 0. \quad (101.8)$$

Составим далее уравнения Эйлера для нашей задачи. Частные производные функции  $F$  получаются:

$$F^{V_{xg}} = -\lambda_3, \quad F^{\dot{V}_{xg}} = \lambda_1, \quad F^{V_{yg}} = -\lambda_4, \quad F^{\dot{V}_{yg}} = \lambda_2,$$

$$F^x = 0, \quad F^{\dot{x}} = \lambda_3, \quad F^H = 0, \quad F^{\dot{H}} = \lambda_4,$$

$$F^\varphi = g \frac{P}{G} (\lambda_1 \sin \varphi - \lambda_2 \cos \varphi), \quad F^{\dot{\varphi}} = 0,$$

так что уравнения Эйлера

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_3, \quad (102.8)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_4, \quad (103.8)$$

$$\dot{\lambda}_3 = 0, \quad (104.8)$$

$$\dot{\lambda}_4 = 0, \quad (105.8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (106.8)$$

Решения этих простых дифференциальных уравнений имеют вид

$$\lambda_3 = c_3 = \text{const}, \quad (107.8)$$

$$\lambda_4 = c_4 = \text{const}, \quad (108.8)$$

$$\lambda_1 = c_1 - c_3 t, \quad (109.8)$$

$$\lambda_2 = c_2 - c_4 t. \quad (110.8)$$

В 11 уравнений (93.8), (94.8), (97.8) — (101.8) и (107.8) — (110.8) входят 11 постоянных:  $\nu_1, \nu_2, c_1, c_2, c_3, c_4, t_2, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32}, \lambda_{42}$ . Проследим ход решения этих уравнений.

Из уравнений (98.8) и (107.8) получим

$$\lambda_3 = \text{const} = 1 - \nu_1,$$

а из (99.8) и (108.8)  $\lambda_4 = \text{const} = -\nu_2$ .

Из (100.8) и (109.8)  $c_1 = c_3 t_2$  и из (101.8) и (110.8)  $c_2 = c_4 t_2$ .

Следовательно, на основании (109.8) и (110.8)

$$\lambda_2 = c_4 (t_2 - t),$$

$$\lambda_1 = c_3 (t_2 - t).$$

Наконец, по уравнению (106.8)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c_4}{c_3} = \text{const}. \quad (111.8)$$

Таким образом, наивыгоднейшим законом управления перехватчиком получается поддержание неизменного угла  $\varphi$ . Нам остается найти две постоянные:  $\varphi$  и время  $t_2$  перехвата, решая графическим путем уравнения (93.8) и (94.8). Для этого надо выразить  $x_2$  и  $H_2$  через  $\varphi$  и  $t_2$ . С этой целью проинтегрируем уравнения (88.8) и (89.8), учитывая, что  $k = \frac{P}{G_1 P_{y_1}}$ ,  $P_{y_1} = \frac{V_a}{g}$ . Поскольку найденный оптимальный закон управления  $\varphi = \text{const}$  крайне прост, интегрирование легко осуществляется и мы получаем

$$V_{xg} = V_{xg1} - V_a \cos \varphi \ln(1 - kt), \quad (112.8)$$

$$V_{yg} = V_{yg1} - V_a \left[ \sin \varphi \ln(1 - kt) + g \frac{t}{V_a} \right]. \quad (113.8)$$

Интегрируя еще раз уравнения (112.8) и (113.8), найдем выражения координат  $x_2$  и  $H_2$ :

$$x_2 = x_1 + V_{xg1} t_2 + \frac{V_a^2}{gP} G_1 \cos \varphi [kt_2 + (1 - kt_2) \ln(1 - kt_2)], \quad (114.8)$$

$$H_2 = H_1 + V_{yg1} t_2 + \frac{V_a^2}{gP} G_1 \left\{ \sin \varphi [kt_2 + (1 - kt_2) \ln(1 - kt_2)] - \frac{P}{2G_1 V_a^2} g^2 t_2^2 \right\}. \quad (115.8)$$

Подставив (114.8) и (115.8) в уравнения (93.8) и (94.8) и определяя из этих уравнений  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , получим

$$\cos \varphi = \frac{gP}{V_a^2 G_1} \frac{1}{kt_2 + (1 - kt_2) \ln(1 - kt_2)} \left[ r_{\text{обн}} - \int_{t_1}^{t_2} V_{cx} dt - x_1 - V_{xg1} t_2 \right], \quad (116.8)$$

$$\sin \varphi = \frac{gP}{V_a^2 G_1} \frac{1}{kt_2 + (1 - kt_2) \ln(1 - kt_2)} \left[ H_{c1} - H_1 + \int_{t_1}^{t_2} V_{cy} dt - V_{yg1} t_2 + \frac{g t_2^2}{2} \right]. \quad (117.8)$$

Построив кривые  $\varphi = \varphi(t_2)$ , описываемые уравнениями (116.8) и (117.8), в точке пересечения этих кривых найдем  $\varphi$  и  $t_2$ .

В рассмотренной нами простой задаче, где пренебрегалось аэродинамическими силами, удалось сравнительно просто исключить из уравнений множители Лагранжа  $\lambda_i$  и получить закон управления (111.8). В более близкой к действительности постановке задачи, когда аэродинамическими силами не пренебрегается, такой простой результат получить уже не удастся, для получения решения приходится пользоваться методами численного интегрирования и рассматривать краевую задачу. Как уже упоминалось, подобные задачи решаются методом, который условно мы назвали методом «пристрелки».

Приведем необходимые расчетные формулы для решения вариационной задачи о перехвате в атмосфере, по-прежнему пренебрегая кривизной земной поверхности и суточным вращением Земли. Кроме того, примем угол  $(\alpha - \varphi)$  малым, а полярю перехватчика представим в виде параболы:

$$c_x = c_{x0}(M) + B(M) c_y^2.$$

Вес перехватчика будем считать известной функцией времени  $t$ , что соответствует, например, ракете с постоянным секундным расходом топлива или самолету с ВРД, для которого на небольших отрезках времени допустимо считать полетный вес постоянным.

Задачу, в которой принимаются во внимание аэродинамические силы, удобнее рассматривать в скоростной системе координат.

При сделанных допущениях уравнения движения перехватчика получаются из уравнений (32.8) — (36.8), если в них пренебречь кривизной земной поверхности, т. е. положить

$$V_{кр} \rightarrow \infty, \quad \frac{r_3}{r_3 + H} = 1.$$

Таким образом, уравнения записываются так:

$$\dot{V} - g \frac{P - Q}{G} + g \sin \theta = 0, \quad (118.8)$$

$$\dot{\theta} - \frac{g}{V} \left[ \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G} - \cos \theta \right] = 0, \quad (119.8)$$

$$\dot{G} + q_c = 0, \quad (120.8)$$

$$\dot{x} - V \cos \theta = 0, \quad (121.8)$$

$$\dot{H} - V \sin \theta = 0. \quad (122.8)$$

Формулируя задачу о перехвате как отыскание такого закона управления, который при заданном рубеже перехвата  $x_2$  и высоте перехвата воздушной цели  $H_2$  обеспечивал бы минимальный расход топлива на перехват, основной функционал задачи запишем в виде

$$J = -G_2.$$

Вспомогательный функционал задачи Майера

$$J_B = -G_2 + \int_{t_1}^{t_2} F dt, \quad (123.8)$$

где

$$F = \lambda_1 \left( \dot{V} - g \frac{P - Q}{G} + g \sin \theta \right) + \lambda_2 \left\{ \dot{\theta} - \frac{g}{V} \left[ \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G} - \cos \theta \right] \right\} + \lambda_3 (\dot{G} + q_c) + \lambda_4 (\dot{x} - V \cos \theta) + \lambda_5 (\dot{H} - V \sin \theta). \quad (124.8)$$

Уравнения Эйлера получают из (41.8) — (46.8), принимая во внимание допущения, в виде

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 g \frac{P^V - Q^V}{G} + \lambda_2 \frac{g}{V^2} \left[ \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G} - \cos \theta - V \frac{Y^V + P^V(\alpha - \varphi)}{G} \right] + \lambda_3 q_c^V - \lambda_4 \cos \theta - \lambda_5 \sin \theta, \quad (125.8)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 g \cos \theta - \lambda_2 \frac{g}{V} \sin \theta + \lambda_4 V \sin \theta - \lambda_5 V \cos \theta, \quad (126.8)$$

$$\dot{\lambda}_3 = \lambda_1 g \frac{P - Q}{G^2} + \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G^2}, \quad (127.8)$$

$$\dot{\lambda}_4 = 0, \quad (128.8)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_1 g \frac{P^H - Q^H}{G} - \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y^H + P^H(\alpha - \varphi)}{G} + \lambda_3 q_c^H, \quad (129.8)$$

$$\lambda_1 g \frac{Q^a}{G} - \lambda_2 \frac{g}{V} \frac{Y^a + P}{G} = 0. \quad (130.8)$$

Так как в рассматриваемой задаче рубеж перехвата (координата  $x_2$ ) считается заданным, то условия трансверсальности задачи Майера отличаются от записанных на стр. 242 тем, что, кроме значения  $\lambda_{52}$ , на конце интегрирования остается неопределенным также значение  $\lambda_{42}$ .

Первый интеграл уравнений Эйлера по-прежнему имеет вид

$$\lambda_1 \dot{V} + \lambda_2 \dot{\theta} + \lambda_3 \dot{G} + \lambda_4 \dot{x} + \lambda_5 \dot{H} = 0. \quad (131.8)$$

Решение приведенной системы дифференциальных уравнений может быть осуществлено методами численного интегрирования. Приближенное решение задачи о перехвате в атмосфере можно получить, если сделать ряд упрощающих допущений.

Первым и наиболее грубым допущением является предположение о неизменности веса перехватчика в процессе полета: только при таком допущении удастся построить сравнительно простой метод расчета. Некоторым оправданием этого допущения является то, что если атака занимает сравнительно небольшое время, то вес перехватчика за время атаки изменяется не очень сильно, так что сделанное допущение может рассматриваться как первое приближение к действительности.

Так, например, в случае перехватчика с комбинированными двигателями (ВРД и ЖРД или РДТТ) перехватчик при помощи ВРД может выйти в исходную зону, из которой начинается перехват, а непосредственно атаку он может осуществить, используя ракетный двигатель на сравнительно небольшой дистанции, на протяжении которой вес перехватчика изменяется сравнительно мало. В случае самолета с ВРД полетный вес можно принимать постоянным, равным некоторому среднему весу, оцениваемому ориентировочно; в этом случае погрешности от сделанного допущения получаются также относительно небольшими.

Следующее допущение состоит в том, что предполагается

$$Q^a = 0.$$

Это допущение делалось и ранее (см. стр. 244) при определении наименьшего расхода топлива при подъеме летательного аппарата на высоту.

Наконец, последнее упрощение состоит в замене длины рубежа перехвата  $x_2$ , измеренной по поверхности Земли, длиной  $S$  кривой линии, соединяющей точку исходного положения перехватчика и точку его встречи с воздушной целью.

Поскольку вес перехватчика принят постоянным, то в общем выражении функции Лагранжа  $F$  мы должны принять

$$\lambda_3 \equiv 0.$$

Точно так же в силу второго допущения  $Q^a = 0$  можно положить

$$\lambda_2 \equiv 0.$$

В результате функция Лагранжа принимает вид

$$F = \lambda_1 \left( \dot{V} - g \frac{P - Q}{G} + g \sin \theta \right) + \lambda_4 (\dot{S} - V) + \lambda_5 (\dot{H} - V \sin \theta). \quad (132.8)$$

В связи с допущением о неизменности веса за основной функционал задачи примем ( $t_1 = 0$ )

$$J = t_2.$$

Следовательно, вспомогательный функционал задачи Майера будет

$$(133.8) \quad J^* = t_2 + \int_{t_1}^0 F dt.$$

Уравнения Эйлера записываются в следующем виде:

$$(134.8) \quad \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 g \frac{D}{P_V - Q_V} - \lambda_4 - \lambda_3 \sin \theta,$$

$$(135.8) \quad g \lambda_1 - V \lambda_3 = 0,$$

$$(136.8) \quad \lambda_4 = 0,$$

$$(137.8) \quad \dot{\lambda}_3 = -g \lambda_1 \frac{D}{P_H - Q_H}.$$

Принимая во внимание условия трансверсальности (76а.1) (80.1), а

$$J = t_2,$$

выражение первого интеграла уравнения Эйлера, используя уравнения движения, запишем в виде

$$(138.8) \quad \lambda_1 g \left( \frac{D}{P - Q} - \sin \theta \right) + \lambda_4 V + \lambda_3 V \sin \theta = 1.$$

Из (136.8) видно, что

$$\lambda_4 = \text{const} = c,$$

как и следовало ожидать, поскольку  $x_2$  — задана и связь (121.8) можно

представить как изопериметрическую.

Исключим из уравнений Эйлера множители Лагранжа  $\lambda_2$ , для чего из (135.8) найдем

$$(139.8) \quad \lambda_3 = \frac{V}{g} \lambda_1.$$

На основании (138.8) и (139.8) получим

$$(140.8) \quad \lambda_1 = G \frac{g(D - Q)}{1 - cV}.$$

Внеся (140.8) в выражение  $\lambda_3$  (139.8), получим

$$(141.8) \quad \lambda_3 = G \frac{V(P - Q)}{1 - cV}.$$

Взяв произвольную по  $t$  от выражения (141.8), будем иметь

$$(142.8) \quad \dot{\lambda}_3 = -\frac{D}{g} \frac{V_2(P - Q)^2}{V(P - Q) + V[(P_V - Q_V) + (P_H - Q_H)H]} + \left\{ \frac{D}{g} \frac{V_2(P - Q)^2}{V(P - Q) + (P_H - Q_H)H} \right\} + cG \frac{D}{1 - cV} [P_V - Q_V + (P_H - Q_H)H].$$

Наконец, приравнявая (137.8) и (142.8), принимая во внимание (140.8), а также уравнения движения, получим уравнение, не содержащее множителей  $\lambda_2$ :

$$(143.8) \quad \frac{g}{V_2} \left( 1 - \frac{D}{g \sin \theta} \right) \left[ 1 + \frac{D}{V(P - Q)} (1 - cV) \right] = \frac{D}{P_H - Q_H} (1 - cV) \left( 1 - \frac{D}{g \sin \theta} \right).$$

Так как в общем случае

$$1 - \frac{G \sin \theta}{P - Q} \neq 0,$$

то все члены уравнения (143.8) можно сократить на этот множитель и получить

$$\frac{g}{V^2} [P - Q + V(P^V - Q^V)(1 - cV)] = (P^H - Q^H)(1 - cV). \quad (144.8)$$

Введя уже употреблявшиеся нами ранее обозначения

$$\psi = \frac{g}{V(P - Q)}, \quad \Phi = \frac{1}{P - Q},$$

уравнение экстремали (144.8) перепишем в окончательной форме

$$\psi^V - \Phi^H = \frac{c}{1 - cV} \psi. \quad (145.8)$$

Если подобно тому, как это делалось ранее, ввести энергетическую высоту

$$H_s = H + \frac{V^2}{2g}.$$

то уравнение экстремали (145.8) можно записать в несколько ином виде:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial V} \right|_{H_s = \text{const}} = \frac{c}{1 - cV} \psi. \quad (145a.8)$$

Значение константы  $c$  определяется изопериметрическим условием — заданной длиной рубежа перехвата.

Сравнивая полученный результат (145.8) с приближенным решением задачи о подъеме летательного аппарата на заданную высоту, полученным в § 2 этой главы, замечаем, что выражение (79.8) является частным случаем (145.8), если в нем положить  $c = 0$ .

Уравнение (145.8) можно решать графически методом, описанным в § 2 этой главы. Практически удобно при решении уравнения задаваться не величиной рубежа перехвата  $x_2$ , а значением постоянной  $c$ , а потом находить соответствующую величину  $x_2$ .

Решение задачи, приведенное выше, предполагает, что в начале и в конце маневра перехватчик находится в точках экстремали, определяемой уравнением (145.8). Когда граничные условия задачи не удовлетворяют этому условию, надо поступать в соответствии с правилом, приведенным на стр. 246.

## § 6. Динамический потолок летательного аппарата

Выше (см. гл. VI) мы ввели понятие *статического потолка* летательного аппарата; статический потолок мы определили как предельную высоту *установившегося* горизонтального полета. Теоретически на высоте статического потолка летательный аппарат может совершать полет в течение длительного времени, причем если пренебречь уменьшением веса аппарата вследствие выгорания топлива, то скорость полета будет сохраняться неизменной. В действительности уменьшение полетного веса летательного аппарата с течением времени будет приводить к постепенному возрастанию высоты полета, причем скорость полета вообще при этом будет изменяться.

Помимо статического потолка, важной характеристикой летных свойств летательного аппарата является *динамический потолок*.

Динамическим потолком летательного аппарата называют предельно достижимую высоту полета, причем на характер полета на этой предельной высоте не накладывают какие-либо требования, регламентирующие движение, за исключением требования безопасности полета.

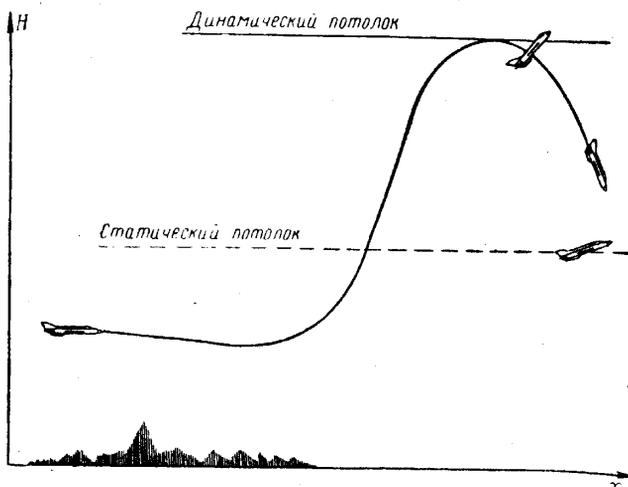


Рис. 22.8. К понятию о статическом и динамическом потолке самолета

Увеличить высоту полета сверх статического потолка, на котором, как мы видели в гл. VI, наступает равенство потребной и располагаемой мощностей при единственном значении скорости полета, можно путем

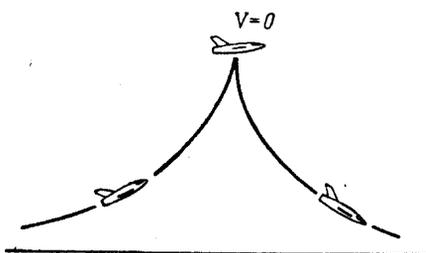


Рис. 23.8. Характер движения самолета при скорости полета, уменьшающейся до нуля

превращения части кинетической энергии летательного аппарата в потенциальную (рис. 22.8). Принципиально в потенциальную энергию можно превратить весь запас кинетической энергии за вычетом той его части, которая переходит в тепловую энергию. На достигнутой при этом высоте полета скорость будет равна нулю. Это означает, что вслед за достижением предельной высоты полета летательный аппарат будет проваливаться (падать) до тех пор, пока он не наберет скорость, достаточную для создания аэродинамической

подъемной силы, при помощи которой можно искривить траекторию полета (рис. 23.8).

Если речь идет о самолете (именно для таких летательных аппаратов определение динамического потолка представляет особый интерес), то в течение некоторого промежутка времени, пока скорость близка к нулю, самолет будет неуправляемым и неустойчивым. Поэтому обычно под *динамическим потолком самолета понимают такую предельную высоту полета, на которой сохраняется минимально допустимая по условиям безопасности полета скорость*. Точнее говоря, необходимо сохранять минимальный скоростной напор  $q = \frac{\rho V^2}{2}$ , от которого зависит величина аэродинамических сил и, следовательно, управляемость самолета. Если

допустимый минимальный скоростной напор обозначить через  $q_{\text{без}}$ , то скорость полета  $V_d$  на динамическом потолке<sup>1</sup> связана с плотностью  $\rho_d$  очевидным соотношением

$$V_d^2 - \frac{2q_{\text{без}}}{\rho_d} = 0. \quad (146.8)$$

Таким образом, приходим к следующей задаче для определения динамического потолка самолета: при заданных начальных условиях определить программу регулирования угла атаки  $\alpha$  (или коэффициента подъемной силы  $c_y$ ), обеспечивающую достижение наибольшей высоты полета, причем на этой высоте скорость полета должна удовлетворять уравнению (146.8).

Формулированная задача представляет собой вариационную задачу со свободным концом, которую будем решать в форме Майера.

Основным функционалом этой задачи будет<sup>2</sup>

$$J = -H_d. \quad (147.8)$$

Считая значения фазовых координат на левом конце интегрирования фиксированными, мы должны на правом конце интегрирования принять во внимание связь (146.8), так что функция  $J_1$  [см. (67.1)] должна быть записана в виде

$$J_1 = -H_d + \nu \left( V_d^2 - \frac{2q_{\text{без}}}{\rho_d} \right). \quad (148.8)$$

Вспомогательный функционал задачи Майера имеет вид

$$J_B = J_1 + \int_0^{t_2} F dt, \quad (149.8)$$

где

$$F = \lambda_1 \left( \dot{V} - g \frac{P-Q}{G} + g \sin \theta \right) + \lambda_2 \left( \dot{\theta} - \frac{g}{V} \frac{Y + P(\alpha - \varphi) - G \cos \theta}{G} \right) + \lambda_3 (\dot{H} - V \sin \theta). \quad (150.8)$$

Пренебрежем малым слагаемым  $P(\alpha - \varphi)$  в выражении (150.8) и в качестве управления, как было упомянуто, пока примем подъемную силу  $Y$ .

Условия трансверсальности для рассматриваемой задачи в форме уравнений (74.1) и (76.1) имеют вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} \dot{y}_{i2} = 0, \quad \frac{\partial J_1}{\partial y_{i2}} + F_2^{y_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Неизвестными функциями  $y_i$  в задаче являются:  $V, H, \theta$ .

Применяя записанные условия трансверсальности к нашей задаче, после сокращения общего множителя  $V_d$  получим

$$2g\nu \left( \frac{P_d - Q_d}{G} - \sin \theta_d \right) + \sin \theta_d \left( -1 + \nu \frac{2q_{\text{без}}}{\rho_d^2} \rho_d^H \right) = 0, \quad (151.8)$$

<sup>1</sup> В дальнейшем индексом «д» обозначены величины, относящиеся к режиму динамического потолка.

<sup>2</sup> Знак минус принят в связи с тем, что в дальнейшем рассматривается задача в минимуме  $J$ .

$$\lambda_{1л} = -2\nu V_{л}, \quad (152.8)$$

$$\lambda_{5л} = 1 - \nu \frac{2q_{6ез}}{\rho_{л}^2} \rho_{л}^H, \quad (153.8)$$

$$\lambda_{2л} = 0. \quad (154.8)$$

Составляя уравнения Эйлера, будем иметь

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 g \frac{P^V - Q^V}{G} - \lambda_5 \sin \theta + \lambda_2 \frac{g}{V^2} \frac{Y - G \cos \theta}{G}, \quad (155.8)$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\lambda_1 g \frac{P^H - Q^H}{G}, \quad (156.8)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 g \cos \theta - \lambda_5 V \cos \theta - \lambda_2 \frac{g}{V} \sin \theta, \quad (157.8)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 V Q^Y. \quad (158.8)$$

Далее, так как функция  $F$  не содержит в явной форме независимой переменной  $t$ , первый интеграл уравнений Эйлера может быть записан в виде (см. гл. I)

$$\lambda_1 \dot{V} + \lambda_2 \dot{\theta} + \lambda_5 \dot{H} = 0. \quad (159.8)$$

Уравнение (159.8) является следствием уравнений Эйлера (155.8) — (158.8) и может быть использовано вместо одного из этих уравнений.

Постараемся исключить все множители Лагранжа  $\lambda_i$  из уравнений (155.8) — (159.8); при этом получим уравнение, содержащее только фазовые координаты, которое и будет представлять собой уравнение экстремали.

Возьмем производную по  $t$  от обеих частей равенства (158.8):

$$\dot{\lambda}_2 = \dot{\lambda}_1 V Q^Y + \lambda_1 (\dot{V} Q^Y + V \dot{Q}^Y). \quad (160.8)$$

Исключая с помощью (158.8) и (160.8)  $\lambda_2$  из уравнения (157.8), получим

$$\dot{Q}^Y = \frac{g}{V} \cos \theta - Q^Y \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} - \left( \frac{\dot{V}}{V} + \frac{g}{V} \sin \theta \right) Q^Y - \frac{\lambda_5}{\lambda_1} \cos \theta. \quad (161.8)$$

Аналогично, исключая  $\lambda_2$  из уравнения (155.8), будем иметь

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} = -g \frac{P^V - Q^V}{G} + \frac{g}{V} Q^Y \frac{Y - G \cos \theta}{G} - \frac{\lambda_5}{\lambda_1} \sin \theta. \quad (162.8)$$

Наконец, из уравнений (161.8) и (162.8), приняв во внимание (118.8), получим

$$\begin{aligned} \dot{Q}^Y + Q^Y \left( \frac{g}{V} \frac{P - Q}{G} - g \frac{P^V - Q^V}{G} + \frac{g}{V} Q^Y \frac{Y - G \cos \theta}{G} - \frac{\lambda_5}{\lambda_1} \sin \theta \right) = \\ = \cos \theta \left( \frac{g}{V} - \frac{\lambda_5}{\lambda_1} \right). \end{aligned} \quad (163.8)$$

Из выражения первого интеграла (159.8) с учетом (158.8) найдем

$$\frac{\lambda_5}{\lambda_1} \sin \theta = - \frac{\dot{V} + V Q^Y \dot{\theta}}{V}$$

или, заменяя  $\dot{V}$  и  $\theta$  их выражениями из уравнений движения,

$$\frac{\lambda_5}{\lambda_1} \sin \theta = -\frac{g}{V} \left( \frac{P-Q}{G} - \sin \theta + Q^Y \frac{Y-G \cos \theta}{G} \right). \quad (164.8)$$

Наконец, подставив найденное выражение (164.8) в уравнение (163.8), после простых преобразований придем к следующему уравнению экстремали:

$$\begin{aligned} Q^Y + Q^Y \frac{g}{V} \left[ 2 \frac{P-Q}{G} - \frac{V(P^V - Q^V)}{G} + 2Q^Y \frac{Y-G \cos \theta}{G} - \sin \theta \right] = \\ = \frac{g}{V} \cos \theta \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{P-Q}{G} - \sin \theta + Q^Y \frac{Y-G \cos \theta}{G} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (165.8)$$

Уравнение (165.8) есть нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, интегрирование которого можно осуществить численными методами. Для этого необходимо задаться значениями фазовых координат и управления  $Y$  на левом конце интегрирования.

Установим прежде всего связь между частной производной  $Q^Y$  и управлением  $Y$ . Представляя полярную скорость параболы второй степени,

$$c_x = c_{x0} + B(M)c_y^2,$$

выражение лобового сопротивления запишем в виде

$$Q = Q_0(V, H) + \frac{B(M)}{Sq} Y^2.$$

Взяв от этого выражения частную производную по  $Y$ , получим

$$Q^Y = \frac{2B}{Sq} Y.$$

Так как

$$Y = c_y Sq,$$

то предыдущее выражение можно переписать в следующем виде:

$$Q^Y = 2Bc_y = 2Bc_y^2 \alpha. \quad (166.8)$$

Из выражения (166.8) видно, что  $Q^Y$  прямо пропорционально углу атаки  $\alpha$ , отсчитываемому от нулевой подъемной силы (рис. 24.8).

Предположим, что в начальный момент времени самолет совершает горизонтальный полет, так что  $\theta_1 = 0$ . В таком случае из уравнения (164.8) следует

$$\left[ \frac{P-Q}{G} + Q^Y \left( \frac{Y}{G} - 1 \right) \right]_{t_1=0} = 0. \quad (167.8)$$

Замечая, что лобовое сопротивление

$$Q = Q_0 + \frac{B}{Sq} Y^2 = Q_0 + \frac{B}{Sq} G^2 n_y^2,$$

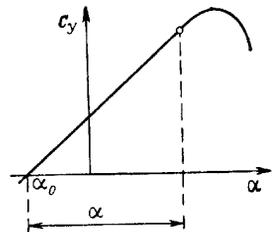


Рис. 24.8. К определению угла атаки  $\alpha$

соотношение (167.8) можно рассматривать как уравнение относительно перегрузки  $n_y = \frac{Y}{G}$ . Решение этого уравнения будет

$$n_{y1} = \left(\frac{Y}{G}\right)_{t_1=0} = 1 + \sqrt{1 - \frac{P_1 - Q_0}{G_1^2} \frac{Sg_1}{B_1}}. \quad (168.8)$$

Выражение (168.8) определяет начальное значение управления  $\alpha$ , так как

$$(Y)_{t_1=0} = (c_y^{\alpha} S g)_{t_1=0}.$$

Начальные значения фазовых координат предполагаются заданными; таким образом, интегрирование уравнения (165.8) может быть проведено численными методами.

## ГЛАВА IX

### ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ. ПОНЯТИЕ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ МАНЕВРЕ

В гл. VI—VIII рассмотрены движения летательного аппарата в вертикальной плоскости. Помимо таких движений, представляет интерес также вторая группа движений, происходящих в горизонтальной плоскости.

С известной степенью приближения криволинейные движения летательного аппарата в горизонтальной плоскости можно рассматривать как *установившиеся*, если такие кинематические величины, как скорость полета, угол атаки, угол скольжения и угол крена с течением времени остаются неизменными.

Для того чтобы искривить траекторию полета летательного аппарата, который до этого совершал прямолинейный полет, необходимо создать *центростремительную силу*, направленную к центру кривизны траектории. Эта центростремительная сила может быть получена путем накренения аппарата либо сообщением ему некоторого угла скольжения, либо тем и другим путями одновременно.

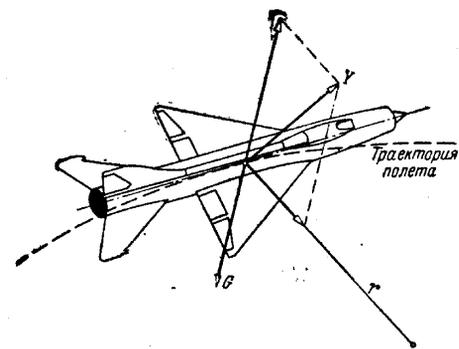


Рис. 1.9. Центростремительная сила при вираже с креном без скольжения

ему некоторого угла скольжения, либо тем и другим путями одновременно.

При крене летательного аппарата (рис. 1.9) вектор аэродинамической подъемной силы  $Y$  также накрывается; проекция  $Y$  на вертикальную

<sup>1</sup> Напомним, что вес  $G$  при полете на динамический потолок не равен стартовому весу  $G_0$ , т. е.  $G_1 < G_0$ .

плоскость уравнивает вес аппарата, как и в прямолинейном полете, а проекция  $Y$  на горизонтальную плоскость представляет собой центробежную силу, искривляющую траекторию полета. Центробежная сила отчасти получается также за счет проекции силы тяги  $P$  на нормаль к траектории, лежащую в горизонтальной плоскости, если угол  $(\alpha - \varphi)$  отличен от нуля; для самолетов с относительно небольшой тяговооруженностью эта составляющая центробежной силы невелика.

Для того чтобы при накрении летательного аппарата вертикальная составляющая подъемной силы уравнивала вес, подъемная сила должна быть *больше веса летательного аппарата*. Другими словами, для осуществления криволинейного полета необходима положительная перегрузка  $n_y > 1$  (в данном случае она относится к текущему весу аппарата).

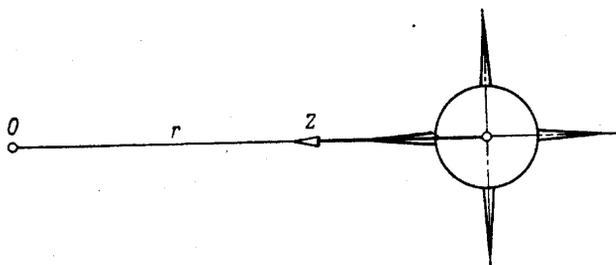


Рис. 2.9. Центробежная сила при вираже со скольжением без крена

Если криволинейный полет совершается без крена (рис. 2.9), центробежной силой является боковая аэродинамическая сила  $Z$ , возникающая при полете со скольжением, которая может быть оценена боковой перегрузкой  $n_z = \frac{Z}{G}$ .

Наконец, в том случае, когда криволинейный полет в горизонтальной плоскости осуществляется одновременно с креном и со скольжением, центробежная сила получается одновременно и от составляющей подъемной силы  $Y$  и от боковой силы  $Z$ .

Криволинейный полет в горизонтальной плоскости называют *виражом*. Вираж, совершаемый путем только накрения самолета без скольжения, называют *правильным виражом*. Правильный вираж широко применяется на самолетах. Это объясняется тем, что, как было замечено, угол атаки крыльев при вираже должен быть больше, чем при прямолинейном полете с той же скоростью, а по условиям безопасности полета при больших углах атаки нельзя допускать скольжение. Боковая аэродинамическая сила  $Z$ , действующая на самолет при полете со скольжением, обычно невелика по сравнению с подъемной силой  $Y$ , так как боковая поверхность обычного самолета невелика. Поэтому если не накрывать самолет, а центробежную силу получать лишь путем скольжения, то эта сила получится *небольшой*, а вираж — «вялым». У самолетов виражи без крена со скольжением применяют обычно только в особых случаях.

Для летательных аппаратов, выполненных по схеме «+» или «X», имеющих значительную боковую поверхность, необходимая для виража центробежная сила может быть получена за счет скольжения: обычно виражи на таких летательных аппаратах осуществляют со скольжением без крена.

## § 1. Установившийся вираж самолета

Рассмотрим вначале *правильный установившийся вираж* самолета. Такой вираж иногда называют серийным, так как практически для осуществления установившегося виража с не изменяющимися по времени кинематическими величинами надо многократно повторить виражи, т. е. выполнить целую серию виражей.

Для *правого* правильного виража, т. е. для поворота направо, необходимо наклонить самолет на правое крыло ( $\gamma_c > 0$ ), для поворота налево — на левое крыло ( $\gamma_c < 0$ ). Полагая угол  $(\alpha - \varphi)$  малым, так что

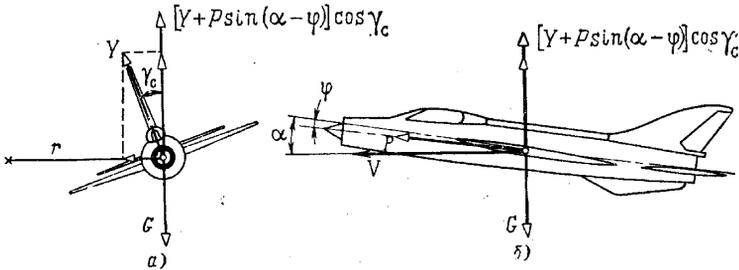


Рис. 3.9. Центробежная сила при правильном вираже

$\cos(\alpha - \varphi) \approx 1$ ,  $\sin(\alpha - \varphi) \approx \alpha - \varphi$ , на основании уравнений (51.5) — (53.5) получим (рис. 3.9, а и б) уравнения движения самолета при правильном установившемся вираже:

$$P = Q, \quad (1.9)$$

$$[Y + P(\alpha - \varphi)] \cos \gamma_c = G, \quad (2.9)$$

$$[Y + P(\alpha - \varphi)] \sin \gamma_c = -mV\dot{\psi}_c. \quad (3.9)$$

Уравнения (1.9) и (2.9) являются алгебраическими, так как скорость полета неизменна и полет происходит в неизменной горизонтальной плоскости. Уравнение<sup>1</sup> (3.9) есть дифференциальное уравнение простейшего типа, в котором переменным является угол курса  $\psi_c$ , изменяющийся с течением времени.

Если использовать очевидное кинематическое равенство<sup>2</sup>

$$V = -r\dot{\psi}_c,$$

где  $r$  — радиус виража, то уравнение (3.9) можно переписать в виде

$$[Y + P(\alpha - \varphi)] \sin \gamma_c = m \frac{V^2}{r} = \frac{G}{g} \frac{V^2}{r}. \quad (4.9)$$

На основании уравнения (2.9) перегрузка  $n_y$  в плоскости симметрии самолета

$$n_y = \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G} = \frac{1}{\cos \gamma_c}. \quad (5.9)$$

Отсюда получаем

$$\sin \gamma_c = \frac{\sqrt{n_y^2 - 1}}{n_y}.$$

<sup>1</sup> Поскольку движение рассматривается относительно плоской Земли в инерциальном пространстве, то  $\dot{\psi}_c = \dot{\psi}_{c.a.}$

<sup>2</sup> Кинематическое равенство написано для правого виража.

Из уравнений (4.9) и (5.9) после несложных преобразований можно получить следующее выражение для радиуса правильного установившегося виража:

$$r = \frac{V^2}{g \operatorname{tg} \gamma_c}. \quad (6.9)$$

Для радиуса виража можно получить и другое выражение. Из уравнения (4.9) имеем

$$r = \frac{G}{g} \frac{V^2}{[Y + P(\alpha - \varphi)] \sin \gamma_c}.$$

Подставив сюда полученное выше выражение  $\sin \gamma_c$ , с учетом (5.9) получим

$$r = \frac{V^2}{g \sqrt{n_y^2 - 1}}. \quad (7.9)$$

Зная радиус правильного установившегося виража, нетрудно найти и время поворота траектории на некоторый угол  $\psi_c$  по формуле<sup>1</sup>  $t = \frac{\psi_c r}{V}$ . Обычно для определенности при расчете виража рассматривают время поворота на угол  $\psi_c = 2\pi = 360^\circ$ . На основании (7.9) время поворота на угол  $2\pi$

$$T = \frac{2\pi V}{g \sqrt{n_y^2 - 1}}. \quad (8.9)$$

Из выражений (7.9) и (8.9) видно, что при прочих равных условиях радиус и время виража тем меньше, чем больше перегрузка  $n_y$  и меньше скорость полета  $V$  при вираже. Напишем развернутое выражение для перегрузки  $n_y$ . Используя равенства

$$Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2} = c_y S q$$

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0),$$

на основании (5.9) получим

$$n_y = \frac{c_y \left( S q + \frac{P}{c_y^\alpha} \right) + P (\alpha_0 - \varphi)}{G}$$

или

$$n_y \approx c_y \frac{S q + \frac{P}{c_y^\alpha}}{G}. \quad (9.9)$$

Последнее выражение (9.9) получается, если пренебречь слагаемым  $P(\alpha_0 - \varphi)$  в соответствии с допущением, сделанным при постановке задачи.

При данных скорости и высоте полета перегрузка  $n_y$  тем больше, чем больше коэффициент подъемной силы  $c_y$ , используемый при вираже.

<sup>1</sup> Принимаем, что при  $t_1 = 0$   $\psi_c(t_1) = \psi_c(0) = 0$ .

Предельно допустимое значение  $c_y = c_{y \text{ без}}$  ограничивается условиями безопасности полета (см. стр. 165), так что предельная перегрузка

$$n_{y \text{ пр}} = c_{y \text{ без}} \frac{Sq + \frac{P}{c_y^\alpha}}{G}. \quad (10.9)$$

С увеличением  $c_y$ , как мы знаем, увеличивается и коэффициент лобового сопротивления  $c_x$ . Может оказаться, что при  $c_y = c_{y \text{ без}}$  сила лобового сопротивления  $Q = c_x Sq$  получится настолько большой, что сила тяги окажется недостаточной для уравнивания силы лобового сопротивления  $Q$ . В таком случае правильный *установившийся* вираж при  $c_y = c_{y \text{ без}}$  осуществить нельзя и придется ограничиться меньшим значением  $c_y$ , при котором еще обеспечивается равенство силы тяги и силы лобового сопротивления.

Найдем силу тяги, потребную для выполнения правильного установившегося виража. Обозначим скорость на вираже при некотором значении  $c_{y \text{ в}}$  через  $V_{\text{в}}$ . Тогда потребная для виража сила тяги, равная силе лобового сопротивления, выражается формулой

$$P_{\text{в}} = c_{x \text{ в}} S \frac{\rho V_{\text{в}}^2}{2}, \quad (11.9)$$

где  $c_{x \text{ в}}$  соответствует  $c_{y \text{ в}}$ .

Установим связь между этой тягой и потребной тягой для горизонтального прямолинейного установившегося полета с тем же значением  $c_y = c_{y \text{ в}}$ , которая, как известно,

$$P_{\text{пр}} = c_{x \text{ пр}} S \frac{\rho V_{\text{пр}}^2}{2}. \quad (12.9)$$

В общем случае при одном и том же  $c_y$  коэффициент лобового сопротивления  $c_{x \text{ в}}$  при вираже не равен коэффициенту  $c_{x \text{ пр}}$  в горизонтальном прямолинейном полете, так как скорости  $V_{\text{в}}$  и  $V_{\text{пр}}$  не равны и, следовательно, не равны и числа Маха, а  $c_x$  зависит от числа Маха. Если для простоты пренебречь влиянием сжимаемости воздуха на поляру самолета, то  $c_{x \text{ в}} = c_{x \text{ пр}}$ , и из сравнения выражений (11.9) и (12.9) получаем

$$P_{\text{в}} = P_{\text{пр}} \left( \frac{V_{\text{в}}}{V_{\text{пр}}} \right)^2, \quad (13.9)$$

но согласно (9.9)

$$n_y = c_y \frac{S \frac{\rho V_{\text{в}}^2}{2} + \frac{P_{\text{в}}}{c_y^\alpha}}{G}, \quad (14.9)$$

а при горизонтальном прямолинейном установившемся полете, так как  $n_y = 1$ ,

$$G = c_y \left( S \frac{\rho V_{\text{пр}}^2}{2} + \frac{P_{\text{пр}}}{c_y^\alpha} \right).$$

Из этих выражений следует, что

$$\left( \frac{V_{\text{в}}}{V_{\text{пр}}} \right)^2 = n_y. \quad (15.9)$$

Таким образом, приходим к уравнению, связывающему потребные силы тяги при вираже и при горизонтальном прямолинейном установившемся полете с тем же значением  $c_y$ :

$$P_{\text{в}} = P_{\text{пр}} n_y. \quad (16.9)$$

Потребная сила тяги при вираже получается большей, чем при горизонтальном прямолинейном установившемся полете с тем же значением  $c_y$ . Выражение (16.9) получено нами в предположении, что влияние сжимаемости воздуха на полярю пренебрежимо мало. Учет влияния сжимаемости изменил бы окончательные выражения (они получились бы гораздо более сложными), но не изменил бы вывод о том, что потребная тяга при вираже больше, чем в прямолинейном горизонтальном установившемся полете, и тем больше, чем больше перегрузка<sup>1</sup>.

Остановимся на последовательности расчетов правильного установившегося виража в том общем случае, когда поляря самолета зависит от числа  $M$ . Расчет будем вести по упрощенным формулам (1.9) — (3.9), пренебрегая слагаемым  $P(\alpha - \varphi)$ .

Из условия равенства располагаемой и потребной тяг при вираже

$$P = c_{x\text{в}} S \frac{\rho V_{\text{в}}^2}{2}$$

определим коэффициент  $c_{x\text{в}}$ :

$$c_{x\text{в}} = \frac{2P}{S \rho V_{\text{в}}^2}, \quad (17.9)$$

где располагаемая тяга  $P$  определяется по характеристикам двигателя, установленного на самолете.

Задавшись высотой  $H$  и скоростью  $V_{\text{в}}$  полета, можно определить соответствующее число  $M = \frac{V_{\text{в}}}{a}$  и по полярю для этого  $M$  и для значения  $c_{x\text{в}}$ , определенного по (17.9), найти соответствующее значение  $c_{y\text{в}}$ .

Далее по формуле (9.9) можно найти соответствующее значение перегрузки  $n_y$ . Наконец, зная перегрузку  $n_y$  в зависимости от скорости  $V_{\text{в}}$  для высоты полета  $H$ , по (7.9) и (8.9) можно найти радиус и время виража, т. е.  $r$  и  $T$ .

Подобный расчет можно провести для ряда высот. В процессе такого расчета при некотором сочетании высоты  $H$  и скорости  $V_{\text{в}}$  полета может оказаться, что значение  $c_y$  получится больше  $c_{y\text{без}}$ , допустимого по условиям безопасности полета. Это означает, что при соответствующих скорости и высоте полета и при данном режиме работы двигателя выполнить правильный вираж невозможно (или по крайней мере недопустимо). Построив кривую зависимости  $c_{y\text{в}}$  от скорости полета при вираже (или в более общем случае — от числа  $M$ ), можно путем интерполяции определить предельную скорость при вираже, которой будет соответствовать предельно допустимое значение  $c_{y\text{без}}$ .

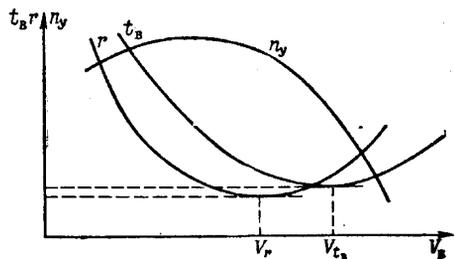


Рис. 4.9. Примерный вид графика виражей

<sup>1</sup> Напомним, что в данном случае перегрузка  $n_y$  отнесена к текущему весу самолета ( $a$  не к стартовому).

Зависимость от скорости полета перегрузки  $n_y$ , радиуса  $r$  и времени  $t_b$  правильного установившегося виража, приведенная на рис. 4.9, называется *графиком виражей*. Каждой высоте полета соответствует свой график виражей. При помощи графика виражей нетрудно определить все параметры правильного установившегося виража для заданной скорости полета  $V_B$ ; в частности, можно найти параметры правильного установившегося виража с минимальным радиусом или с минимальным временем.

Как видно из (7.9) и (8.9), скорость, соответствующая виражу с минимальным временем, всегда *больше* скорости, соответствующей виражу с минимальным радиусом, так как, когда радиус уже перешел свое минимальное значение, а скорость полета продолжает убывать, их отношение некоторое время продолжает возрастать.

*Вираж со скольжением* (без крена) типичен для летательных аппаратов, выполненных по схеме «X» или «+»; однако и для самолетов обычной схемы в некоторых случаях применяется вираж со скольжением и без крена. Так, например, при необходимости изменить направление полета по каким-либо соображениям может оказаться недопустимым создание перегрузки  $n_y$ ; в таком случае для изменения направления полета необходимо применить вираж без крена со скольжением.

Уравнения движения летательного аппарата при вираже без крена при тех же допущениях, что и раньше, имеют вид

$$P = Q = c_{x_B} S \frac{\rho V_B^2}{2}, \quad (18.9)$$

$$Y = G - P(\alpha - \varphi) = c_{y_B} S \frac{\rho V_B^2}{2} - P(\alpha - \varphi), \quad (19.9)$$

$$Z = -G \frac{V_B}{2} \dot{\psi}_c. \quad (20.9)$$

Приняв во внимание кинематическое соотношение, связывающее угловую и линейную скорости

$$V_B = -r \dot{\psi}_c,$$

и подставив в уравнение (20.9) развернутое выражение боковой аэродинамической силы  $Z = c_z S \frac{\rho V_B^2}{2}$ , найдем из этого уравнения радиус правильного виража, выполняемого со скольжением и без крена:

$$r = \frac{2G}{g \rho S c_z}. \quad (21.9)$$

Для времени выполнения такого виража (изменение направления движения на угол  $\psi_c = -2\pi$ ) получаем следующее выражение:

$$T = \frac{2G2\pi}{g \rho S c_z V_B}. \quad (22.9)$$

При полете со скольжением ( $\beta \neq 0$ ) вследствие изменения условий обтекания крыльев при неизменном угле атаки  $\alpha$  подъемная сила  $Y$  изменяется; в общем случае это необходимо учесть при расчете. При умеренных углах скольжения  $\beta$  зависимость подъемной силы  $Y$  от  $\beta$  можно пренебречь; в таком случае углы  $\alpha$  и  $\beta$  можно считать не зависящими один от другого. Вследствие того что при  $\beta \neq 0$  возникает дополнительное лобовое сопротивление, скорость полета при вираже со скольжением получается меньшей, чем в прямолинейном горизонтальном полете с тем же значением  $c_y$ .

Выражения (21.9) и (22.9) можно представить в другом виде, если воспользоваться понятием боковой перегрузки

$$n_z = \frac{Z}{G} = \frac{c_z S \rho V_B^2}{2G};$$

тогда вместо (21.9) и (22.9) получим

$$r = \frac{V_B^2}{g |n_z|}; \quad (21a.9)$$

$$T = \frac{2\pi V_B}{g |n_z|}. \quad (22a.9)$$

Рассмотрим теперь последовательность расчета установившегося виража со скольжением без крена. Будем считать, что в распоряжении инженера, проводящего расчет, имеются графики зависимости коэффициента  $c_x$  от  $c_y$  и  $c_z$  для различных чисел Маха, а также зависимость  $c_z = c_z(\beta, M)$  (рис. 5.9 и 6.9).

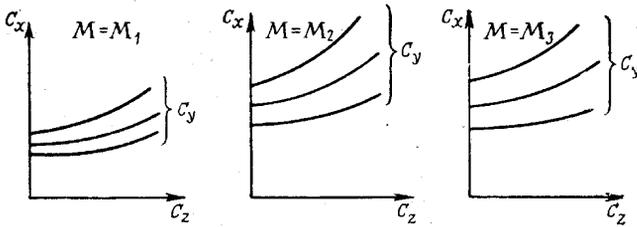


Рис. 5.9. Примерный вид зависимости коэффициента  $c_x$  от  $c_y$  и  $c_z$  для различных чисел Маха

Определяя из (18.9) для заданных высоты и скорости полета коэффициент лобового сопротивления  $c_x$ , получим

$$c_{xв} = \frac{2P}{S \rho V_B^2}. \quad (23.9)$$

На основании уравнения (19.9) для выбранных  $H$  и  $V$  найдем значение  $c_y$ . Это уравнение можно привести к виду

$$c_y S q + P \left( \frac{c_y}{c_y^a} + \alpha_0 - \varphi \right) = G,$$

откуда

$$c_y = \frac{G - P(\alpha_0 - \varphi)}{S q + P/c_y^a} \approx \frac{G}{S q + P/c_y^a}.$$

Затем по имеющимся  $c_{xв}$ ,  $c_y$  и  $M$  определим угол скольжения  $\beta$  и по графику зависимости  $c_z(\beta)$  найдем соответствующее значение коэффициента боковой силы  $c_z$ . Наконец, по формулам (21.9) и (22.9) определим радиус и время виража. В случае когда поляра летательного аппарата может быть представлена в виде параболы

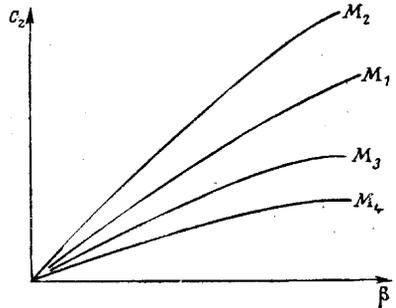


Рис. 6.9. Примерный вид зависимости  $c_z$  от угла скольжения  $\beta$  при различных числах Маха

$$c_x = c_{x0} + B(c_y^2 + c_z^2),$$

коэффициент  $c_z$  при помощи (23.9) найдем аналитически по формуле

$$c_z = \mp \sqrt{\frac{1}{B} \left( \frac{2P}{S_F V_B^2} - c_{x0} \right) - c_y^2} \quad (24.9)$$

(для правого выража следует брать знак минус, для левого — плюс); при этом графические построения, приведенные выше, отпадают.

Для установившегося выража со скольжением без крена можно построить график выражей аналогично тому, как это было в случае правильного установившегося выража.

На летательных аппаратах, выполненных по схеме «+» или «X», выраж получается более простым (крен не обязателен), чем на самолете с одной парой крыльев. Надо иметь в виду, однако, что при прямолинейном горизонтальном полете, например, у аппарата схемы «+» вертикальная пара крыльев дает лобовое сопротивление, не создавая полезной подъемной силы, что ухудшает полезную отдачу такого летательного аппарата.

## § 2. Неустановившийся выраж летательного аппарата

Мы рассмотрели установившийся выраж, при котором все кинематические параметры, кроме угла поворота траектории, с течением времени не изменяются. Как было показано, для получения небольшого радиуса или времени выража требуются небольшие скорости полета при выполнении выража. Таким образом, если до начала выполнения, например, правильного выража самолет совершал полет с максимальной скоростью, то, чтобы реализовать правильный выраж с минимальным радиусом, надо предварительно уменьшить скорость прямолинейного полета до величины, соответствующей выражу с минимальным радиусом. Для торможения самолета потребуется, естественно, некоторое время, в течение которого самолет не совершает разворот, а продолжает лететь прямолинейно. Для более эффективного выполнения маневра желательно, чтобы в процессе торможения самолет одновременно выполнял и разворот. Движение самолета при этом будет *неустановившимся*; выраж, выполняемый таким способом, называют *неустановившимся выражом*.

Вначале рассмотрим **правильный неустановившийся выраж**. Напишем уравнения движения самолета в проекциях на скоростные оси координат, полученные в гл. V. При допущениях, сделанных в предыдущем параграфе, эти уравнения имеют вид

$$\frac{G}{g} \dot{V} = P - Q, \quad (25.9)$$

$$G = R_{yg}, \quad (26.9)$$

$$-\frac{G}{g} V \dot{\psi}_c = R_{zg}. \quad (27.9)$$

В уравнениях (25.9) — (27.9) через  $R_{yg}$  и  $R_{zg}$  обозначены проекции результирующей аэродинамической силы соответственно на вертикальную и горизонтальную плоскости.

Для правильного выража, выполняемого без скольжения, в § 1 для этих проекций получены следующие выражения:

$$R_{yg} = [Y + P(\alpha - \varphi)] \cos \gamma_c, \quad (28.9)$$

$$R_{zg} = [Y + P(\alpha - \varphi)] \sin \gamma_c. \quad (29.9)$$

В случае когда поляра летательного аппарата может быть аппроксимирована параболой

$$c_x = c_{x0} + Bc_y^2,$$

сила лобового сопротивления выражается формулой

$$Q = c_{x0} S q + \frac{B}{S q} Y^2. \quad (30.9)$$

К уравнениям движения летательного аппарата (25.9)–(27.9) добавляется уравнение, связывающее расход топлива в 1 сек  $q_c$  с весом  $G$  летательного аппарата

$$\dot{G} + q_c = 0 \quad (31.9)$$

и кинематические равенства

$$\dot{x} = V \cos \psi_c, \quad (32.9)$$

$$\dot{z} = -V \sin \psi_c, \quad (33.9)$$

где координаты  $x$  и  $z$  определяются в соответствии с рис. 7.9. Обычно криволинейное движение летательного аппарата в горизонтальной плоскости осуществляется в течение сравнительно небольшого промежутка времени по сравнению с общим временем полета, так что вес летательного аппарата изменяется не сильно. В таком случае задачу можно упростить, считая полетный вес в процессе криволинейного движения неизменным. При этом уравнение (31.9) отпадает, а при интегрировании других уравнений можно принимать  $G = \text{const}$ .

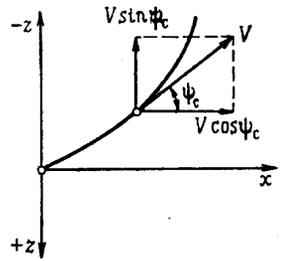


Рис. 7.9. К определению координат  $x$  и  $z$  по траектории

Для решения уравнений движения и кинематических уравнений необходимо задаться программой изменения  $c_y$  и  $\psi_c$ , подобно тому, как при исследовании продольного движения надо было задаться законом изменения  $c_y$  в зависимости от времени  $t$ . Если такая программа задана, то непосредственным интегрированием уравнения (25.9) получим выражение для времени криволинейного полета в горизонтальной плоскости

$$t = \frac{G}{g} \int_{V_1}^V \frac{dV}{P - Q}. \quad (34.9)$$

Если задана зависимость  $c_y = c_y(V)$ , то подынтегральная функция в (34.9) есть функция только скорости полета, так как высота полета неизменна ( $\rho = \text{const}$ ) и  $Q = Q(V, c_y)$ . Интеграл может быть найден графическим путем.

Далее, разделив почленно (27.9) на (25.9), получим

$$-V \frac{d\psi_c}{dV} = \frac{R_{zg}}{P - Q}.$$

Интегрирование этого уравнения дает выражение для угла поворота вектора скорости полета

$$\psi_c = - \int_{V_1}^V \frac{R_{zg}}{V(P - Q)} dV. \quad (35.9)$$

Наконец, подставив в (32.9) и (33.9) выражение  $dt$  из (25.9) и проведя интегрирование, приходим к следующим выражениям координат траектории неустановившегося виража:

$$x = \frac{G}{g} \int_{V_1}^V \frac{V \cos \psi_c}{P - Q} dV, \quad (36.9)$$

$$z = -\frac{G}{g} \int_{V_1}^V \frac{V \sin \psi_c}{P - Q} dV. \quad (37.9)$$

Практический интерес представляет решение задачи о таком программировании  $c_y$  и  $\psi_c$ , которое обеспечивает наиболее быстрое изменение угла  $\psi_c$ . Остановимся на этом вопросе несколько подробнее. Формулированная задача представляет собой вариационную задачу, которую надо решать методами вариационного исчисления; мы, однако, ограничимся более простой трактовкой этой задачи, сведя ее к задаче на экстремум функции одного независимого переменного.

Исключив из уравнения (28.9) и (29.9) угол крена  $\psi_c$  и приняв во внимание (26.9), получим

$$R_{zg} = \sqrt{[Y + P(\alpha - \varphi)]^2 - R_{yg}^2} = \sqrt{[Y + P(\alpha - \varphi)]^2 - G^2}.$$

Воспользуемся понятием нормальной перегрузки в вертикальной плоскости симметрии летательного аппарата:

$$n_y = \frac{Y + P(\alpha - \varphi)}{G}. \quad (38.9)$$

Тогда предыдущее равенство можно переписать в виде

$$R_{zg} = G \sqrt{n_y^2 - 1}. \quad (39.9)$$

Интегрируя уравнение (27.9), получим следующее выражение для угла поворота траектории полета:

$$\psi_c = -\frac{g}{G} \int_{t_1}^t \frac{R_{zg}}{V} dt \quad (40.9)$$

или с учетом (39.9)

$$\psi_c = -g \int_{t_1}^t \frac{\sqrt{n_y^2 - 1}}{V} dt. \quad (40a.9)$$

Выведем теперь выражение для скорости полета  $V$  через перегрузку  $n_y$ . Определяя из (9.9)  $c_y$ , найдем

$$c_y = \frac{n_y G - P(\alpha_0 - \varphi)}{Sq + \frac{P}{c_y^\alpha}}, \quad (41.9)$$

так что подъемная сила

$$Y = \frac{n_y G - P(\alpha_0 - \varphi)}{1 + \frac{P}{c_y^\alpha Sq}}. \quad (42.9)$$

Выражение силы лобового сопротивления  $Q$  через перегрузку получим, подставив (42.9) в (30.9):

$$Q = Q_0 + \frac{B}{Sq} \left[ \frac{n_y G - P(\alpha_0 - \varphi)}{1 + \frac{P}{c_y^a Sq}} \right]^2 \approx Q_0 + \frac{B}{Sq} \left( \frac{n_y G}{1 + P/c_y^a Sq} \right)^2. \quad (43.9)$$

Наконец, подставив (43.9) в уравнение движения (25.9) и интегрируя это уравнение, найдем скорость полета

$$V = V_1 + \frac{g}{G} \int_{t_1}^t \left\{ P - Q_0 - \frac{B}{Sq} \left( \frac{n_y G}{1 + \frac{P}{c_y^a Sq}} \right)^2 \right\} dt. \quad (44.9)$$

Из (40a.9) и (44.9) замечаем, что угол поворота вектора скорости полета  $\psi_c$  получится наибольшим, если в каждый момент времени перегрузка  $n_y$  имеет максимальное значение. Действительно, из (44.9) следует, что в каждый момент времени  $t$  скорость полета  $V$  тем меньше, чем больше  $n_y$ , а по (40a.9) угол  $\psi_c$  тем больше, чем больше  $n_y$  и меньше  $V$ .

Итак, для быстрого изменения направления полета надо осуществлять полет с возможно большими значениями перегрузки  $n_y$ . Максимальная перегрузка ограничивается, с одной стороны, наибольшим допустимым по условиям безопасности полета значением  $c_{y \text{ без}}$ ; с другой стороны, максимально допустимые перегрузки лимитируются физиологическими условиями выносливости летчика (если речь идет о пилотируемом аппарате) или прочностью конструкции летательного аппарата. Для современных летательных аппаратов с большими скоростями полета обычно расчетным оказывается первое условие: ограничение перегрузки определяется допустимым  $c_{y \text{ без}}$ . Эти допустимые значения  $c_{y \text{ без}}$ , вообще говоря, зависят от числа  $M$  полета, от устойчивости и управляемости летательного аппарата и определяются из летной практики.

Из сказанного выше следует, что для наиболее быстрого изменения направления полета надо использовать наибольшие допустимые значения  $n_y$ . Когда необходимо рассмотреть неустановившийся вираж на сравнительно небольшой высоте полета, может оказаться, что предельные значения  $c_{y \text{ без}}$  приводят к перегрузкам, недопустимо большим по условиям прочности конструкции или выносливости летчика. В таких случаях в расчет надо вводить значения перегрузки  $n_{y \text{ доп}}$ , допустимой по этим соображениям. Необходимое из условия  $n_y = n_{y \text{ доп}}$  значение  $c_{y \text{ доп}}$  определяется по уравнению (41.9)

$$c_{y \text{ доп}} = \frac{n_{y \text{ доп}} G - P(\alpha_0 - \varphi)}{Sq + \frac{P}{c_y^a}} \approx \frac{n_{y \text{ доп}} G}{Sq + \frac{P}{c_y^a}}. \quad (45.9)$$

При ограничении перегрузки значения  $c_{y \text{ доп}}$  получатся меньше допустимых  $c_{y \text{ без}}$ . Если в процессе выполнения неустановившегося виража скорость полета убывает, то для поддержания неизменной перегрузки надо увеличивать  $c_y$ , как это схематически показано на рис. 8.9. При не-

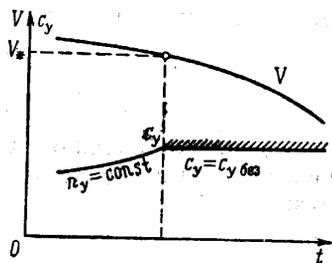


Рис. 8.9. К изменению нормальной перегрузки  $n_y$  при вираже без скольжения

которой скорости полета  $V_*$  значение  $c_y$  окажется равным предельно допустимому  $c_{y \text{ без}}$ . Тогда в дальнейшем вираж следует осуществлять с неизменным  $c_y = c_{y \text{ без}}$ , причем перегрузка будет уменьшаться с убыванием скорости, оставаясь меньше допустимой. Начиная со скорости  $V_*$  расчет следует вести по приведенным выше формулам, принимая в них  $c_y = c_{y \text{ без}}$ .

Расчет **неустановившегося виража со скольжением без крена** основывается на тех же уравнениях движения (25.9) — (27.9), что и расчет правильного виража, только выражения составляющих  $R_{yg}$  и  $R_{zg}$  получаются другими, как это показано в § 1:

$$R_{yg} = Y + P(\alpha - \varphi), \quad (28a.9)$$

$$R_{zg} = Z - \beta(P - Q). \quad (29a.9)$$

Выражение (30.9) для силы лобового сопротивления при полете со скольжением заменяется выражением

$$Q = Q_0 + \frac{B}{Sq} (Y^2 + Z^2), \quad (30a.9)$$

так как аналитическое выражение полярности в этом случае

$$c_x \approx c_{x0} + B(c_y^2 + c_z^2).$$

Приведем, опуская выводы, окончательные выражения кинематических величин в случае виража со скольжением без крена. Боковая перегрузка

$$n_z = \beta \frac{c_z^2 Sq - (P - Q)}{G}. \quad (46.9)$$

Скорость полета при вираже со скольжением

$$V = V_1 + \frac{g}{G} \int_{t_1}^t \left[ P - Q_0 - \frac{B}{Sq} \left( \frac{G}{1 + \frac{P}{c_y^2 Sq}} \right)^2 - \frac{B}{Sq} G^2 \frac{n_z^2}{(1 - P - Q/c_z^2 Sq)^2} \right] dt. \quad (47.9)$$

Угол изменения направления полета

$$\psi_c = - \int_{V_1}^V \frac{n_z G}{V \left[ P - Q_0 - \frac{B}{Sq} \left( \frac{G}{1 + \frac{P}{c_y^2 Sq}} \right)^2 - \frac{B}{Sq} G^2 \frac{n_z^2}{\left( 1 - \frac{P - Q}{c_z^2 Sq} \right)^2} \right]} dV. \quad (48.9)$$

Время выполнения виража со скольжением

$$t = \frac{G}{g} \int_{V_1}^V \frac{dV}{P - Q_0 - \frac{B}{Sq} \left( \frac{G}{1 + \frac{P}{c_y^\alpha Sq}} \right)^2 - \frac{B}{Sq} G^2 \frac{n_z^2}{\left( 1 - \frac{P-Q}{c_z^\beta Sq} \right)^2}}. \quad (49.9)$$

Допустимый коэффициент боковой силы при выраже со скольжением

$$c_{z \text{ доп}} = \frac{n_{z \text{ доп}} G c_z^\beta}{c_z^\beta Sq - (P - Q)}, \quad (50.9)$$

где  $n_{z \text{ доп}}$  — допустимая по условиям выносливости экипажа или прочности конструкции летательного аппарата перегрузка.

### § 3. Задача о перехвате воздушной цели, движущейся в горизонтальной плоскости

Рассмотрим метод расчета горизонтального маневра на примере обычной задачи перехвата воздушной цели, движущейся в горизонтальной плоскости.

Выделим из этого маневра последнюю фазу, когда перехватчик выполняет криволинейный полет в горизонтальной плоскости — неустановившийся вираж, — с тем чтобы сблизиться с противником на дистанцию эффективной стрельбы.

Как показано в § 2 этой главы, быстрота разворота перехватчика и характер его движения ограничиваются предельно допустимыми значениями перегрузки или коэффициента подъемной силы  $c_y$  без. Это означает, что зона атаки представляет собой ограниченную область; выявление размеров этой ограниченной области представляет большой практический интерес. В этом параграфе рассмотрим вторую фазу перехвата в горизонтальной плоскости — атаку воздушной цели.

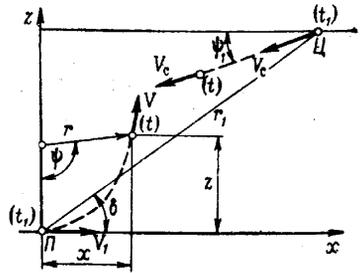


Рис. 9.9. Схематическое изображение траектории перехватчика и воздушной цели

Формулируем следующую задачу о перехвате в горизонтальной плоскости. Пусть в горизонтальной плоскости по прямолинейной траектории движется перехватчик; скорость перехватчика в общем случае может изменяться в зависимости от времени.

Пусть в некоторый момент времени  $t_1$ , который в дальнейшем примем за начало отсчета, перехватчик обнаруживает на расстоянии  $r_1$  под углом  $\delta$  воздушную цель, движущуюся в той же горизонтальной плоскости также по прямолинейной траектории, и пусть угол в начальный момент времени между направлением полета цели и перехватчика равен  $\psi_1$  (рис. 9.9). Скорость полета воздушной цели в общем случае является функцией времени.

Задача перехвата заключается в определении такой программы<sup>1</sup>  $c_y = c_y(t)$ , которая обеспечивала бы в некоторый последующий момент времени встречу обоих летательных аппаратов. В общем случае в качестве перехватчика может рассматриваться составной самолет-носитель, оборудованный снарядами класса «воздух — воздух». В таком случае задача состоит в обеспечении встречи снарядов с воздушной целью.

<sup>1</sup> Для определенности в дальнейшем предполагается вираж с креном и без скольжения; в случае виража со скольжением рассуждения аналогичны.

Начальное расстояние между перехватчиком и воздушной целью обычно невелико, так что рассматриваемая фаза перехвата — атака — занимает непродолжительное время. Это позволяет считать вес перехватчика за время атаки неизменным.

Далее, как и вообще в этой главе, кривизной земной поверхности будем пренебрегать, ускорение силы тяжести  $g$  считать постоянным, угол  $(\alpha - \varphi)$  — малым. Тогда движение перехватчика описывается уравнениями предыдущего параграфа.

В момент встречи перехватчика и воздушной цели их координаты  $x$  и  $z$ , очевидно, должны быть одинаковыми. Если перехватчик начинает атаку сразу вслед за обнаружением цели, то условие встречи может быть записано двумя уравнениями:

$$x = r_1 \cos \delta - \cos \psi_1 \int_0^{t^n} V_c dt, \quad (51.9)$$

$$z = r_1 \sin \delta - \sin \psi_1 \int_0^{t^n} V_c dt. \quad (52.9)$$

В этих уравнениях  $r_1$  — начальное расстояние между перехватчиком и целью (радиус обнаружения). Интеграл  $\int_0^{t^n} V_c dt$  — путь, пройденный воздушной целью с момента начала перехватчиком атаки до момента перехвата. Предполагается, что перехватчик начинает разворот сразу после обнаружения цели, как уже было упомянуто.

С другой стороны, исходя из движения перехватчика, для координат  $x$  и  $z$  получаем следующие выражения:

$$x = \int_0^{\psi} r \cos \psi d\psi, \quad (53.9)$$

$$z = \int_0^{\psi} r \sin \psi d\psi, \quad (54.9)$$

где  $r$  — радиус кривизны траектории.

Исходя из очевидного кинематического соотношения

$$V dt = r d\psi,$$

путь  $\int_0^{t^n} V_c dt$  воздушной цели представим в виде

$$S = \int_0^{t^n} V_c dt = \int_0^{\psi} \frac{V_c}{V} r d\psi. \quad (55.9)$$

Подставив (55.9) в уравнения (51.9) и (52.9) и приравняв (51.9) и (53.9), (52.9) и (54.9), придем к двум уравнениям:

$$r_1 \cos \delta = \int_0^{\psi} r \left( \cos \psi + \frac{V_c}{V} \cos \psi_1 \right) d\psi, \quad (56.9)$$

$$r_1 \sin \delta = \int_0^{\psi} r \left( \sin \psi + \frac{V_c}{V} \sin \psi_1 \right) d\psi. \quad (57.9)$$

Замечая, что между радиусом виража  $r$  и скоростью полета  $V$  существует соотношение (7.9) (это соотношение остается справедливым и в случае неустановившегося виража), и предполагая, что  $r_1$ ,  $\delta$ ,  $\psi_1$  и  $V_c$  известны, по уравнениям (56.9) и (57.9) можем найти неизвестные  $\psi$  и  $r$ . Особенно простые результаты получаются, если принять, что перехватчик совершает установившийся вираж с  $V = \text{const}$ ,  $r = \text{const}$ , а воздушная цель летит с постоянной скоростью  $V_c = \text{const}$ . В этом частном случае

$$S = \frac{V_c}{V} r \psi$$

и интегралы, входящие в (56.9) и (57.9), можно найти аналитически:

$$\int_0^\psi r \left( \cos \psi + \frac{V_c}{V} \cos \psi_1 \right) d\psi = r \left( \sin \psi + \frac{V_c}{V} \psi \cos \psi_1 \right),$$

$$\int_0^\psi r \left( \sin \psi + \frac{V_c}{V} \sin \psi_1 \right) d\psi = r \left( 1 - \cos \psi + \frac{V_c}{V} \psi \sin \psi_1 \right),$$

так что (56.9) и (57.9) принимают вид

$$\frac{r_1}{r} \cos \delta = \sin \psi + \frac{V_c}{V} \psi \cos \psi_1, \quad (56a.9)$$

$$\frac{r_1}{r} \sin \delta = 1 - \cos \psi + \frac{V_c}{V} \psi \sin \psi_1. \quad (57a.9)$$

Исключив из этих уравнений  $r$ , приходим к трансцендентному уравнению для определения угла  $\psi$ :

$$\frac{\psi}{\cos \delta - \cos(\delta - \psi)} = \frac{V}{V_c} \frac{1}{\sin(\delta - \psi)}. \quad (58.9)$$

Решение этого уравнения можно получить графическим путем. На рис. 10.9 показаны результаты проведенного таким путем расчета для следующих исходных данных:

минимальный радиус виража перехватчика  $r_{\min} = 7,2$  км,

скорость полета воздушной цели  $V_c = 1800$  км/час,

скорость полета перехватчика  $V = 2160$  км/час и для нескольких углов  $\delta$  обнаружения.

Из рис. 10.9 видно, что для реализации перехвата противника, обнаруженного под большими углами  $\psi_1$ , требуются значительные радиусы обнаружения, т. е. большие дальности бортовой радиолокационной станции перехватчика.

Приведенный метод расчета, конечно, носит приближенный характер; однако такие расчеты позволяют качественно оценить воз-

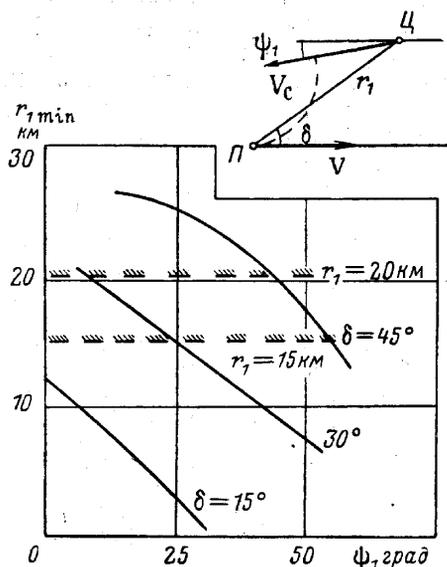


Рис. 10.9. Кинематические параметры перехвата в горизонтальной плоскости (пример):  
П — перехватчик; Ц — цель

возможности перехватчика и наметить количество перехватчиков, необходимое для перехвата воздушных целей, о характере полета которых имеется достаточно надежная информация.

#### § 4. Боевой разворот. Другие пространственные маневры

Выше рассмотрен свободный маневр летательного аппарата в вертикальной и горизонтальной плоскостях, когда на движение не наложены какие-либо дополнительные кинематические условия. На практике часто приходится выполнять маневры, при которых траектория полета не лежит в какой-либо одной плоскости, — пространственные маневры. Особенно часто полет по пространственной траектории имеет место в случае свободного маневра пилотируемых летательных аппаратов — самолетов.

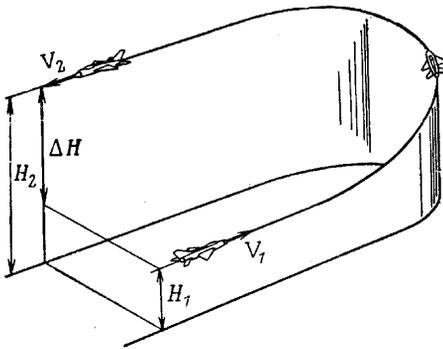


Рис. 11.9. Боевой разворот

В воздушном бою чрезвычайно важно иметь преимущество над противником в высоте полета, так как, имея запас высоты, его всегда можно превратить в преимущество в скорости полета путем снижения с одновременным разгоном. Поэтому перед началом воздушного боя летчик стремится набрать высоту полета, получив желаемое преимущество перед своим противником.

Представляет интерес рассмотреть разворот самолета, выполненный с одновременным набором высоты.

*Боевым разворотом* называется такой маневр, при котором одновременно изменяется направление полета и увеличивается высота (рис. 11.9). Таким образом, боевой разворот является пространственным маневром.

Решение задачи о боевом развороте можно получить только методами численного интегрирования, так как приходится решать систему трех нелинейных дифференциальных уравнений движения, приведенных в гл. V. Приближенное исследование характера движения самолета при выполнении боевого разворота можно провести в предположении, что в каждый момент времени сила тяги уравновешивает силу лобового сопротивления. Такое предположение является частным случаем более общего предположения

$$n_x = \frac{P - Q}{mg} = \frac{P - Q}{G} = \text{const}$$

которое применялось в гл. VIII при исследовании выхода из пикирования и горки.

Если считать угол  $(\alpha - \varphi)$  малым, то при сделанном предположении о  $P = Q$  уравнения движения самолета в проекциях на скоростные оси координат при полете без скольжения и при обычных предположениях относительно кривизны земной поверхности и ускорения тяготения записываются в виде (см. гл. V, стр. 158)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{V}}{g} &= -\sin \theta, & \frac{V}{g} \dot{\theta} &= n_y \cos \gamma_c - \cos \theta, \\ \cos \theta \frac{V}{g} \dot{\psi}_c &= -n_y \sin \gamma_c. \end{aligned} \right\} \quad (59.9)$$

Для упрощения дальнейших выводов будем считать, что боевой разворот выполняется с постоянной перегрузкой  $n_y$  и с неизменным углом крена  $\gamma_c$  и что в конце маневра угол крена  $\gamma_c$  мгновенно уменьшается до нуля, а перегрузка  $n_y$  — до единицы.

Разделив первое и третье уравнения (59.9) почленно на второе, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{dV}{d\theta} &= - \frac{\sin \theta}{n_y \cos \gamma_c - \cos \theta}, \\ \cos \theta \frac{d\psi_c}{d\theta} &= - \frac{n_y \sin \gamma_c}{n_y \cos \gamma_c - \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (60.9)$$

При сделанных предположениях ( $n_y = \text{const}$ ,  $\gamma_c = \text{const}$ ) уравнения (60.9) представляют собой простые дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Интегрируя эти уравнения, а также второе уравнение (59.9), можно прийти к следующим выражениям для скорости полета  $V$ , угла поворота траектории  $\psi_c$  и времени полета  $t$ :

$$V = V_1 \frac{n_y \cos \gamma_c - 1}{n_y \cos \gamma_c - \cos \theta}, \quad (61.9)$$

$$\begin{aligned} \psi_c &= - \operatorname{tg} \gamma_c \left\{ \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{\sqrt{n_y^2 \cos^2 \gamma_c - 1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{n_y \cos \gamma_c + 1}{n_y \cos \gamma_c - 1}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (62.9)$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{V_1}{g} \frac{1}{n_y \cos \gamma_c + 1} \left\{ \frac{\sin \theta}{n_y \cos \gamma_c - \cos \theta} + \right. \\ &+ \left. \frac{2n_y \cos \gamma_c}{\sqrt{n_y^2 \cos^2 \gamma_c - 1}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{n_y \cos \gamma_c + 1}{n_y \cos \gamma_c - 1}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (63.9)$$

В первом приближении для небольших углов наклона траектории к горизонту  $\theta$  можно принять

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$$

и

$$\operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{n_y \cos \gamma_c + 1}{n_y \cos \gamma_c - 1}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \approx \sqrt{\frac{n_y \cos \gamma_c + 1}{n_y \cos \gamma_c - 1}} \frac{\theta}{2}.$$

Так как

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \frac{\theta}{2} + \dots = 1 + \theta + \dots,$$

то при малых  $\theta$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \approx 1 + \theta, \quad \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \ln(1 + \theta) \approx \theta.$$

<sup>1</sup> Напомним, что знак минус в (62.9) означает, что самолет при положительном  $\gamma_c$  поворачивает влево.

Тогда уравнение (62.9) существенно упростится:

$$\psi_c \approx -\theta \frac{n_y \sin \gamma_c}{n_y \cos \gamma_c - 1}. \quad (62a.9)$$

Чтобы оценить величину погрешностей от сделанных упрощений, положим для примера  $\gamma_c = 60^\circ$ ,  $n_y = 3$ ,  $\theta = 30^\circ$ . Тогда по приближенной формуле (62a.9) получим  $\psi_c = -2,73 \text{ рад}$ , в то время как по точной формуле (62.9) в этом случае  $\psi_c = -2,64 \text{ рад}$ . Расхождение между результатами расчета по точной и по приближенной формулам составляет 3,5%.

Из (62a.9) можно найти зависимость угла наклона траектории к горизонту  $\theta$  от угла поворота траектории  $\psi_c$ . Полагая для определенности, что в конце боевого разворота траектория поворачивается на угол  $\psi_c = -180^\circ$ , на основании (62a.9) получим

$$\theta_2 = \pi \frac{n_y \cos \gamma_c - 1}{n_y \sin \gamma_c}. \quad (64.9)$$

Так как мы условились рассматривать боевой разворот при неизменной перегрузке  $n_y = \text{const}$ , а скорость полета в процессе боевого разворота падает, как видно из (61.9), то коэффициент подъемной силы  $c_y$  должен увеличиваться. Наиболее энергичный боевой разворот получится в том случае, когда при выходе на минимальную скорость в конце маневра  $c_y$  достигнет предельно допустимого по условиям безопасности полета значения  $c_{y \text{ без}}$ . Для этого случая из равенства

$$Y = n_y G = c_{y \text{ без}} S \frac{\rho V_2^2}{2}$$

получим

$$V_2^2 = 2 \frac{G}{S c_{y \text{ без}} \rho_2} n_y. \quad (65.9)$$

Если высота  $H_2$  в конце боевого разворота задана, то по (65.9) можно найти скорость  $V_2$  в конце маневра в зависимости от перегрузки:

$$V_2 = \text{const} \sqrt{n_y}, \quad (66.9)$$

где

$$\text{const} = \sqrt{\frac{2G}{S c_{y \text{ без}} \rho_2}}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\sqrt{\frac{2G}{S c_{y \text{ без}} \rho_2}} = V_{\min}$$

где  $V_{\min}$  — минимальная скорость горизонтального прямолинейного полета на высоте  $H_2$  при принятом  $c_y = c_{y \text{ без}}$ .

В таком случае выражение (66.9) можно представить в виде

$$V_2 = V_{\min} \sqrt{n_y}. \quad (67.9)$$

Обозначим

$$\frac{V_1}{V_{\min}} = \bar{V}_1;$$

тогда на основании всех полученных ранее уравнений

$$\bar{V}_1 = \sqrt{n_y} \frac{n_y \cos \gamma_c - \cos \theta_2}{n_y \cos \gamma_c - 1}, \quad (68.9)$$

$$\Delta H = \frac{V_{\min}^2}{i^2 g} f_H, \quad (69.9)$$

где обозначено

$$f_H = \bar{V}_1^2 - n_y. \quad (70.9)$$

Далее

$$t = \frac{V_{\min}}{g} f_t, \quad (71.9)$$

где

$$f_t = \frac{\bar{V}_1}{n_y \cos \gamma_c + 1} \left\{ \frac{\sin \theta_2}{n_y \cos \gamma_c - \cos \theta_2} + \frac{2n_y \cos \gamma_c}{\sqrt{n_y^2 \cos^2 \gamma_c - 1}} \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{\frac{n_y \cos \gamma_c + 1}{n_y \cos \gamma_c - 1}} \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2} \right] \right\}. \quad (72.9)$$

Как видим, функции  $f_H$  и  $f_t$  зависят только от  $\bar{V}_1$  и  $n_y$ . Графики этих зависимостей показаны на рис. 12.9, откуда видно, что для увеличения набора высоты при боевом развороте этот маневр надо выполнять со сравнительно небольшой перегрузкой  $n_y$ ; при этом выполнение маневра потребует относительно большого времени. Скорость полета в начале

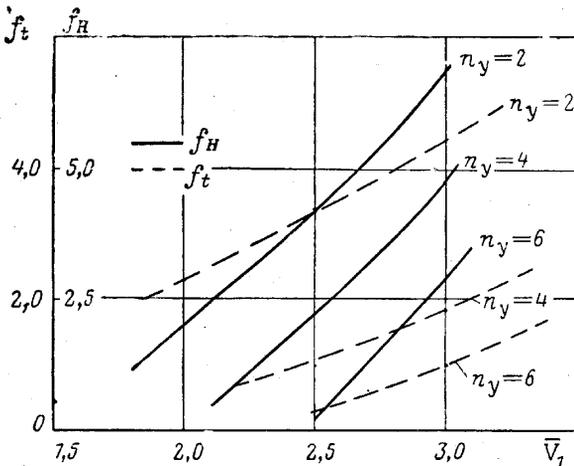


Рис. 12.9. График функций  $f_H$  и  $f_t$  для приближенного расчета боевого разворота

боевого разворота должна быть возможно большей. Для наиболее быстрого выполнения боевого разворота, наоборот, перегрузка должна быть возможно большей; набор высоты в этом случае получится меньшим, чем в предыдущем.

Сделанные выводы относятся к тому случаю, когда сила тяги компенсирует силу лобового сопротивления, т. е.  $n_x = 0$ . При  $n_x \neq 0$  с качественной стороны эти выводы останутся в силе, но в количественную сторону должна быть внесена поправка. Формулы для этого случая можно было бы получить, однако эти формулы имели бы не такой простой вид, как приведенные выше.

**Другие пространственные маневры.** Кроме боевого разворота, самолеты выполняют еще ряд пространственных маневров; выполнение таких маневров в значительной мере зависит от манеры пилотирования самолета, от искусства летчика и знания им особенностей самолета. Ограничимся лишь описанием некоторых из этих маневров, не входя в подробности расчета траектории полета.

*Переворотом через крыло* называется пространственный маневр, в процессе выполнения которого самолет поворачивается вокруг касательной к траектории полета на угол  $180^\circ$  и более.

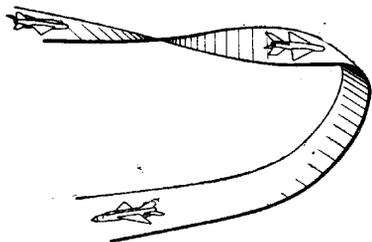


Рис. 13.9. Переворот через крыло

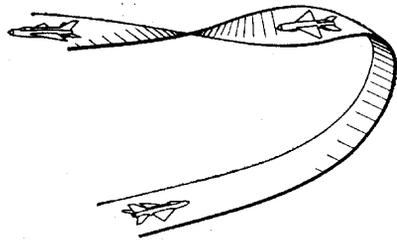


Рис. 14.9. Боевой переворот

*Ординарный переворот через крыло* (рис. 13.9) представляет собой маневр, при котором направление движения изменяется на обратное, а высота полета в конце маневра получается меньшей, чем в начале его. Разогнав самолет до необходимой скорости, летчик увеличивает угол атаки крыльев и одновременно отклонением элеронов сообщает самолету вращение вокруг его продольной оси. При этом высота полета теряется, так как проекция вектора подъемной силы на вертикаль оказывается

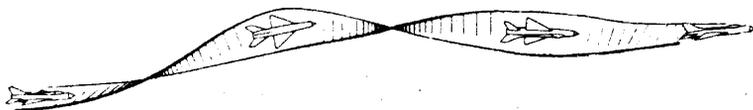


Рис. 15.9. Бочка (двойной переворот через крыло)

меньше веса самолета. Некоторое время самолет летит на спине, а затем описывает траекторию, напоминающую траекторию при выходе из пикирования.

*Боевой переворот* — маневр, имеющий целью изменение направления полета на обратное, как и ординарный переворот через крыло, но совершаемый с набором высоты (рис. 14.9). От боевого разворота этот маневр отличается тем, что он совершается приблизительно в неизменной вертикальной плоскости, а направление движения изменяется в результате переворота через крыло.

*Бочка* представляет собой двойной переворот через крыло; при выполнении бочки высота полета изменяется незначительно, а направление движения остается приблизительно неизменным (рис. 15.9).

Из изложенного в этом параграфе можно сделать следующие выводы.

Во-первых, для выполнения маневра без потери высоты необходим некоторый запас  $c_y$ ; увеличение  $c_y$  позволяет искривить траекторию полета и перевести самолет из прямолинейного в криволинейный режим полета.

Во-вторых, положительные тангенциальные перегрузки  $n_x$  способствуют выполнению маневра и увеличению скорости и высоты полета в конце маневра.

Чем больше располагаемые значения  $n_y$  и  $n_x$ , тем при прочих равных условиях лучше маневренные качества самолета.

---

## ГЛАВА X

### НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЯХ

Среди различных задач динамики полета особое место занимает задача о перехвате воздушной цели летательным аппаратом, стартующим с земли или с самолета-носителя в некоторый момент времени. Задача эта состоит в том, чтобы определить момент вылета перехватчика и установить закон управления перехватчиком, обеспечивающие встречу перехватчика и воздушной цели на определенном *рубеже перехвата*, т. е. на определенном расстоянии от пункта вылета перехватчика.

Простейшим решением этой задачи является, казалось бы, полет перехватчика в упрежденную точку встречи; координаты точки встречи перехватчика и воздушной цели при этом должны быть определены заранее в зависимости от скорости и высоты полета воздушной цели и от характеристик самого перехватчика. Закон управления перехватчиком (например, закон изменения угла атаки) в такой постановке задачи можно выбрать так, чтобы он обеспечивал оптимальную траекторию полета перехватчика. Именно так и была поставлена задача о перехвате в предыдущих главах. Надо сказать, что подобная постановка задачи является идеализированной, так как при этом предполагается, что закон движения воздушной цели на протяжении всего времени полета перехватчика известен с большой степенью точности. Кроме того, считается, что точно известен закон движения перехватчика, а полет происходит в невозмущенной атмосфере.

Если бы в реальных условиях перехватчик двигался по закону, полученному из идеализированной задачи, то это при достаточно большой продолжительности полета могло бы привести к существенным погрешностям в конечном результате и к промаху. Смысл идеализированной постановки задачи о перехвате заключается в выявлении наилучших возможностей перехватчика и дает возможность составить общее суждение о перехвате.

При решении задачи о перехвате на практике необходимо устранить погрешности, заложенные в самой постановке задачи о перехвате. Эти погрешности имеют два основных источника. С одной стороны, упрежденная точка встречи определяется всегда с некоторыми погрешностями, связанными с неточными оценками скорости, высоты и направления полета воздушной цели, с неточным знанием характеристик перехватчика и с неизбежной турбулентностью атмосферы. Эта *неточная информация* об условиях полета перехватчика приводит к тому, что в момент прихода перехватчика в намеченную для встречи с целью точку пространства (в упрежденную точку встречи 2) воздушная цель будет находиться в точке 2' на некотором расстоянии  $\delta$  от этой точки (рис. 1.10).

С другой стороны, в общем случае воздушная цель за время полета перехватчика может совершить маневр, изменив свои первоначальные скорость, высоту и направление полета. Так как такой маневр выпол-

няется воздушной целью уже после вылета перехватчика, он оказывается не предусмотренным первоначальной программой полета перехватчика, а это в свою очередь приведет к промаху  $\delta$  (рис. 2.10).

Полет в упрежденную точку встречи по программе, полученной в момент вылета перехватчика, без ее последующей корректировки на основе последующей дополнительной информации, может оказаться эффективным только при небольшой продолжительности полета перехватчика: в этом случае погрешности и первого, и второго рода получатся сравнительно небольшими и не приведут к значительному промаху.

Полет на перехват воздушной цели в упрежденную точку встречи можно сравнить с выстрелом из ружья по летящей дичи, который приводит к успеху далеко не всегда, особенно на больших дистанциях между

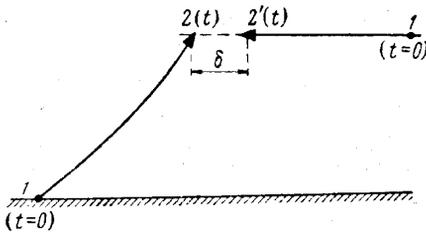


Рис. 1.10. Промах вследствие неточной информации о движении перехватчика и воздушной цели

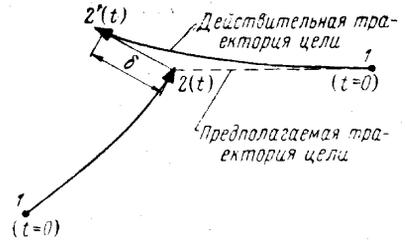


Рис. 2.10. Промах вследствие маневра воздушной цели, не предусмотренного программой полета перехватчика

охотником и дичью. В общем случае программа полета перехватчика должна быть построена так, чтобы в любой момент времени в нее можно было вносить коррективы на основе последующей информации о движении перехватчика и воздушной цели. Эту задачу можно решить, если осуществить полет перехватчика по такому методу *наведения* или *самонаведения*, который позволил бы корректировать программу полета перехватчика в зависимости от выявляющихся ошибок в оценке скорости и координат перехватчика и воздушной цели. Корректировать движение перехватчика следует в течение всего времени его полета непрерывно или дискретно (через небольшие промежутки времени) либо при помощи аппаратуры, установленной на борту перехватчика, либо наземной станцией наведения. В обоих случаях необходима постоянная информация о положении перехватчика и воздушной цели и кинематических характеристиках их относительного движения.

Если такая информация получается и преобразуется в команды, управляющие движением перехватчика, аппаратурой, установленной на борту самого перехватчика, то говорят о *системе самонаведения*.

Если команды осуществляются станцией, не находящейся на борту перехватчика, например наземной станцией, полет перехватчика происходит по *системе наведения*.

Существует множество методов наведения и самонаведения, основанных на различных кинематических схемах. Вопрос о выборе метода наведения или самонаведения выходит за рамки настоящей книги и должен быть предметом специального рассмотрения. При решении этого вопроса должны быть приняты во внимание такие факторы, как вероятность поражения цели, надежность и экономичность той или иной системы, эксплуатационные соображения и т. д.

Мы рассмотрим только вопрос о кинематических соотношениях, которые должны выполняться при различных методах наведения или самонаведения; эти кинематические соотношения определяют закон управления летательным аппаратом.

Выше было отмечено, что число неизвестных функций времени, входящих в уравнения движения перехватчика, превышает число уравнений, так что для реализации движения перехватчика по той или иной траектории необходимо задаться законом изменения в функции времени «лишних» неизвестных — управлений. Если положение двигателя относительно летательного аппарата фиксировано и режим работы двигателя постоянный, то остается одна управляющая функция — изменение угла атаки  $\alpha$  или коэффициента  $c_y$ , если перехват происходит в вертикальной плоскости, и угла скольжения  $\beta$  или коэффициента боковой аэродинамической силы  $c_z$ , если перехват происходит в горизонтальной плоскости. Наложив на характер движения перехватчика одну кинематическую связь, полностью определим соответствующий закон управления, так как теперь число неизвестных будет в точности равно числу уравнений.

Для определенности вначале будем рассматривать перехват в *неизменной вертикальной плоскости* в режиме наведения или самонаведения; в этом случае управлением является изменение угла атаки  $\alpha$ .

Закон управления углом атаки, потребный для реализации кинематических условий того или иного метода наведения, может оказаться неприемлемым по другим соображениям. Так, например, может потребоваться такая большая перегрузка  $n_y$ , реализовать которую невозможно; угловая скорость поворота летательного аппарата может получиться такой большой, что имеющиеся на летательном аппарате органы управления не позволят ее реализовать, и т. д. Отсюда следует, что при рассмотрении движения летательного аппарата в режиме наведения (или самонаведения) уравнения кинематической связи метода наведения (или самонаведения) надо решать совместно с уравнениями движения летательного аппарата.

Уравнения движения перехватчика в вертикальной плоскости в проекциях на оси скоростной системы координат, если пренебречь кривизной земной поверхности и суточным вращением Земли, а также считать ускорение силы тяжести неизменным, имеют вид (см. гл. V) <sup>1</sup>

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P \cos(\alpha - \varphi) - Q}{G} - \sin \theta,$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = \frac{P \sin(\alpha - \varphi) + Y}{G} - \cos \theta$$

или

$$\frac{\dot{V}}{g} = n_x - \sin \theta, \quad (1.10)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = n_y - \cos \theta, \quad (2.10)$$

где тангенциальная перегрузка

$$n_x = \frac{P \cos(\alpha - \varphi) - Q}{G}, \quad (3.10)$$

нормальная перегрузка

$$n_y = \frac{P \sin(\alpha - \varphi) + Y}{G} \quad (4.10)$$

и  $G$  — текущий вес летательного аппарата.

<sup>1</sup> Методы, описываемые в этой главе, предполагают  $P = \cos \pi t$  независимо от скорости и высоты полета.

Координаты траектории летательного аппарата относительно начального его положения при отсчете времени от момента начала наведения определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \int_0^t V \cos \theta dt, \\ H &= H_1 + \int_0^t V \sin \theta dt. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Обычно для ракет  $\alpha_0 = \varphi = 0$ ; если считать углы атаки малыми и положить

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1,$$

то выражения составляющих вектора перегрузки (3.10) и (4.10) можно переписать в следующем виде:

$$n_x = \frac{P - Q}{G} = \frac{P - c_x S q}{G}, \quad (3a.10)$$

$$n_y = \frac{P\alpha + Y}{G} = \frac{P\alpha + c_y S q}{G}. \quad (4a.10)$$

Воспользовавшись известным выражением  $c_y = c_y^a \alpha$ , из (4a.10) получим выражение для коэффициента подъемной силы ракеты через перегрузку  $n_y$ :

$$c_y = \frac{G}{S q + \frac{P}{c_y^a}} n_y. \quad (6.10)$$

Во всех дальнейших рассуждениях будем предполагать, что в режиме наведения перехватчик представляет собой одноступенчатую ракету с крыльями. Станцию наведения будем считать неподвижной; в конце этой главы рассмотрена задача наведения и в том случае, когда станция наведения размещена на самолете-носителе и, следовательно, перемещается в пространстве вместе с самолетом. Само собой разумеется, что если полет перехватчика происходит в режиме самонаведения, то станция наведения, находящаяся на борту перехватчика, непременно перемещается вместе с ним в пространстве.

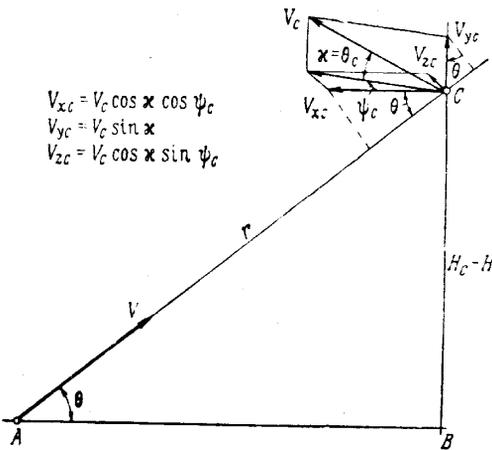


Рис. 3.10. Кинематическая схема наведения по кривой погони

Рассмотрим некоторые основные методы наведения и самонаведения.

### § 1. Наведение по кривой погони в вертикальной плоскости

При наведении по кривой погони вектор скорости перехватчика в каждый момент времени направлен на воздушную цель (рис. 3.10). Этот метод особенно удобен для системы самонаведения при атаке цели из

задней полусферы при удаляющейся от перехватчика воздушной цели, как это будет ясно из дальнейшего.

При *наведении* по кривой погони наземной станцией необходимо фиксировать двумя радиолокаторами положение воздушной цели и перехватчика в каждый момент времени.

Кинематические связи при наведении по кривой погони могут быть получены на основании рис. 3.10, где изображен случай полета воздушной цели навстречу перехватчику. Определим направление полета воздушной цели в общем случае ее движения по пространственной траектории следующими двумя углами:

углом  $\kappa$ , отсчитываемым в вертикальной плоскости, содержащей вектор скорости полета цели  $V$ , от линии пересечения этой вертикальной плоскости с горизонтальной плоскостью, проходящей через точку  $C$ ; угол  $\kappa$  отсчитывается по часовой стрелке;

углом  $\psi_c$ , отсчитываемым в горизонтальной плоскости, проходящей через точку  $C$ , от линии пересечения этой плоскости с вертикальной плоскостью  $ABC$ ; угол  $\psi_c$  отсчитывается по часовой стрелке, если смотреть сверху.

Проектируя скорости воздушной цели и перехватчика на направление радиуса-вектора  $r=AC$ , соединяющего перехватчик и цель, и складывая эти проекции, получим меру скорости изменения радиуса-вектора  $r$  или *относительную скорость сближения* перехватчика и воздушной цели. Очевидно,

$$\dot{r} = -[V + V_c(\cos \kappa \cos \psi_c \cos \theta - \sin \kappa \sin \theta)]. \quad (7.10)$$

Составляющие скорости воздушной цели по двум перпендикулярным к радиусу-вектору направлениям — в вертикальной плоскости  $ABC$  и в наклонной плоскости, содержащей  $AC$  и перпендикулярной плоскости  $ABC$ , поделенные на соответствующие плечи, определяют *относительные угловые скорости* перемещения воздушной цели по отношению к перехватчику; таким образом, получим два уравнения:

$$r\dot{\theta} = V_c(\cos \kappa \cos \psi_c \sin \theta + \sin \kappa \cos \theta), \quad (8.10)$$

$$r\dot{\psi}' = -V_c \cos \kappa \sin \psi_c. \quad (8a.10)$$

В выражениях (7.10) — (8a.10) приняты следующие обозначения:

- $\theta$  — угол наклона траектории перехватчика к горизонту;
- $\psi'$  — угол поворота вектора  $V$  в наклонной плоскости, содержащей  $V$  и перпендикулярной плоскости  $ABC$ ;
- $V$  — скорость полета перехватчика;
- $V_c$  — скорость полета воздушной цели;
- $\psi_c$  — угол курса цели в данный момент времени по отношению к вертикальной плоскости  $ABC$ .

Если  $\theta_c < \frac{\pi}{2}$  и  $\kappa = \theta_c$ , где  $\theta_c$  — угол наклона траектории воздушной цели к горизонту (этот случай изображен на рис. 3.10), то цель летит навстречу перехватчику; в этом случае говорят о перехвате *на встречно-пересекающемся курсе*. Если  $\kappa = \pi - \theta_c$ , то цель удаляется от перехватчика и происходит перехват на *попутно-пересекающемся курсе (вдогон)*.

Для определения траектории полета перехватчика необходимо решить совместно кинематические уравнения (8.10), (8a.10) и уравнения движения перехватчика. Такое решение осуществимо методами численного интегрирования.

В общем случае пространственного движения воздушной цели для управления движением перехватчика имеем три управляющие функции: угол атаки  $\alpha$ , угол скольжения  $\beta$ , угол крена  $\gamma_c$ . В частном случае, когда движение ракеты и цели происходит в одной и той же вертикальной

плоскости (который мы и имеем в виду) и  $\theta_c = \text{const}$ , т. е. воздушная цель движется по прямолинейной траектории, уравнение (8a.10) превращается в тождество, так как  $\psi_c = \psi' = 0$ , и вместо (7.10) — (8a.10) получаем два уравнения:

$$\dot{r} = -[V + V_c (\cos \kappa \cos \theta - \sin \kappa \sin \theta)]$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= -[V + V_c \cos(\theta + \kappa)], \\ r\dot{\theta} &= V_c (\cos \kappa \sin \theta + \sin \kappa \cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

или

$$r\dot{\theta} = V_c \sin(\kappa + \theta). \quad (9a.10)$$

При этом обычно  $\beta = \gamma_c = 0$ . В этом случае вместо трех уравнений пространственного движения перехватчика надо рассматривать только два уравнения, характеризующие его движение в вертикальной плоскости, т. е. уравнения (1.10) — (2.10).

Исключив из (9a.10) переменную  $r$  (как это видно из рис. 3.10,  $r = \frac{H_c - H}{\sin \theta}$ ), получим кинематическую связь метода наведения по кривой погони, содержащую только те переменные, которые входят в уравнения движения перехватчика:

$$\dot{\theta} = \frac{V_c}{H_c - H} \sin \theta \sin(\kappa + \theta). \quad (10.10)$$

С целью дать представление о характере движения перехватчика рассмотрим простой случай, когда воздушная цель движется по горизонтальной траектории с неизменной скоростью, так что  $\kappa = 0$ ,  $V_c = \text{const}$ . Для этого случая уравнения (9.10) — (10.10) принимают более простой вид<sup>1</sup>

$$\dot{r} = -(V + V_c \cos \theta), \quad (11.10)$$

$$r\dot{\theta} = V_c \sin \theta, \quad (12.10)$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_c \sin^2 \theta}{H_c - H}. \quad (12a.10)$$

Интегрируя (11.10) и (12.10), получим следующие выражения для расстояния  $r$  между перехватчиком и целью и для угла  $\theta$  наклона траектории перехватчика к горизонту:

$$r = r_1 - \int_0^t V dt - V_c \int_0^t \cos \theta dt, \quad (13.10)$$

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \text{tg} \frac{\theta_1}{2} \exp \left( V_c \int_0^t \frac{dt}{r} \right). \quad (14.10)$$

Ввиду сложности (13.10) и (14.10) очевидно, что расчет можно производить методами численного интегрирования или использовать какие-либо приближенные методы, например, графо-аналитический метод последовательных приближений; на последнем способе остановимся позднее.

<sup>1</sup> Для определенности рассматривается перехват на встречно-пересекающемся курсе ( $\kappa = 0$ ).

Расчеты показывают, что в начале полета по кривой погони, если движение перехватчика начинается в режиме наведения на достаточно большом расстоянии от воздушной цели, угол наклона его траектории к горизонту  $\theta$  изменяется сравнительно медленно. По мере приближения перехватчика к цели угловая скорость  $\dot{\theta}$  поворота вектора скорости перехватчика  $V$  возрастает и при малых величинах  $r$  изменяется очень быстро; как будет видно из дальнейшего, при некоторых условиях в точке встречи перехватчика с воздушной целью  $\dot{\theta}$  может принимать бесконечно большие значения.

В качестве примера на рис. 4.10 приведены результаты расчета траектории при наведении по кривой погони при следующих условиях:

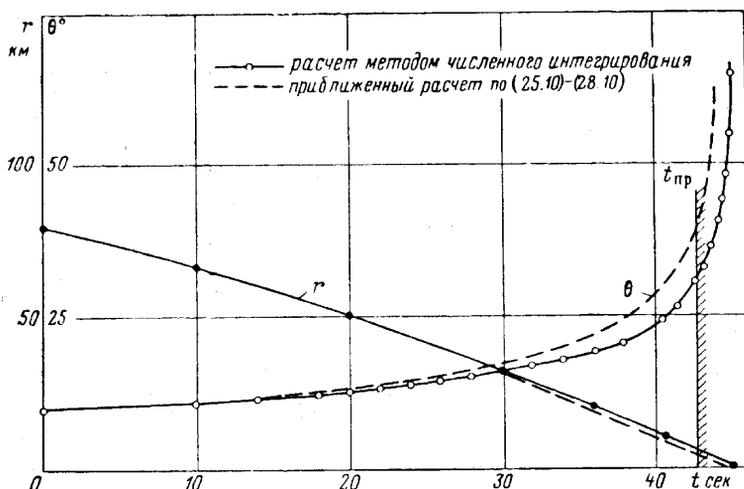


Рис. 4.10. Зависимость  $r$  и  $\theta$  от времени  $t$  при наведении по кривой погони (пример)

$V_c = 1000$  м/сек,  $H_c = 15$  км,  $V_1 = 250$  м/сек,  $H_1 = 0,8$  км, тангенциальное ускорение перехватчика постоянно и равно  $\dot{V} = 25$  м/сек<sup>2</sup>, расстояние между целью и перехватчиком в момент начала полета в режиме наведения  $r_1 = 80$  км. Как видно из рис. 4.10, угол  $\theta$  перехватчика значительно изменяется лишь в течение нескольких последних секунд, а расстояние  $r$  есть монотонная функция времени  $t$ .

Так как за короткое время скорость перехватчика не успевает измениться на значительную величину, то весь полет перехватчика можно разбить на два участка. На первом участке угол  $\theta$  изменяется сравнительно несильно, а скорость перехватчика — переменная. На втором участке полета вблизи точки встречи с целью угол  $\theta$  изменяется быстро, зато скорость полета перехватчика в первом приближении можно считать постоянной.

Рассмотрим вначале движение перехватчика по кривой погони с постоянной скоростью  $V_c = \text{const}$ . Разделив почленно (11.10) на (12.10), получим

$$\frac{dr}{r} = - \left( \frac{\bar{V}}{\sin \theta} + \text{ctg} \theta \right) d\theta,$$

где

$$\bar{V} = \frac{V}{V_c}.$$

При постоянной скорости  $V$  и, следовательно, при  $\bar{V} = \text{const}$  интегрирование этого уравнения не представляет трудностей: получается следующий результат:

$$r = k \frac{(1 + \cos \theta)^{\bar{V}}}{(\sin \theta)^{\bar{V}+1}}, \quad (15.10)$$

где обозначено

$$k = r_1 \frac{(\sin \theta_1)^{\bar{V}+1}}{(1 + \cos \theta_1)^{\bar{V}}} \quad (15a.10)$$

и  $r_1, \theta_1$  — соответственно  $r$  и  $\theta$  в начале полета с постоянной скоростью.

В момент встречи перехватчика и цели, очевидно,  $r=0$ . По уравнению (15.10) при  $r=0$  должно быть  $\cos \theta = -1$ , т. е.  $\theta_k = \pi$ . При этом, как можно убедиться, раскрывая неопределенность вида  $\frac{0}{0}$  в выражении

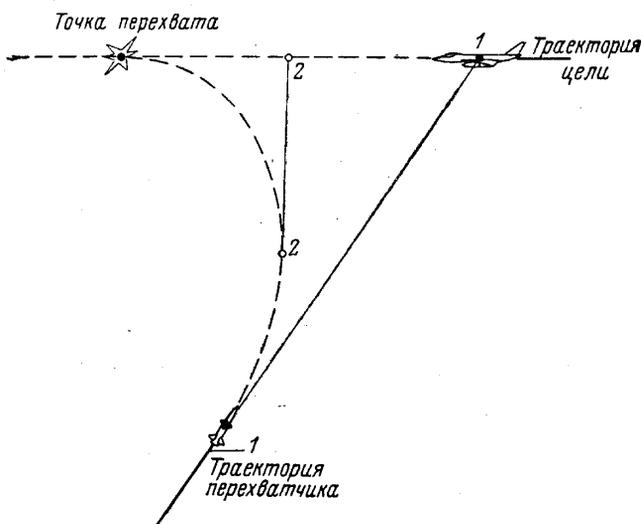


Рис. 5.10. Траектория перехватчика вблизи точки встречи с целью при наведении по кривой погони (схематическое изображение)

(15.10), получающуюся при  $\theta_k = \pi$ , в момент встречи перехватчика и цели действительно получается  $r=0$ . Примерный вид траектории перехватчика вблизи точки встречи показан на рис. 5.10.

Найдем выражение для времени полета перехватчика, отсчитывая время от начала полета и принимая скорость перехватчика постоянной. Для этого умножим (11.10) на  $(\cos \theta - \bar{V})$ , а (12.10) на  $\sin \theta$  и вычтем второе выражение из первого; после несложных преобразований получим

$$-\dot{r} (\bar{V} - \cos \theta) - r\dot{\theta} \sin \theta = V_c (\bar{V}^2 - 1).$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь

$$-\int_{r_1}^r (\bar{V} - \cos \theta) dr - \int_{\theta_1}^{\theta} r \sin \theta d\theta = V_c (\bar{V}^2 - 1) t.$$

Применив формулу интегрирования по частям, придем к следующему выражению для времени полета:

$$t = \frac{r_1(\bar{V} - \cos \theta_1) - r(\bar{V} - \cos \theta)}{V_c(\bar{V}^2 - 1)}. \quad (16.10)$$

В частности, время полета  $t_k$  до встречи получим из (16.10), положив в этом выражении  $r=0$ :

$$t_k = \frac{r_1(\bar{V} - \cos \theta_1)}{V_c(\bar{V}^2 - 1)}. \quad (17.10)$$

Угловую скорость  $\dot{\theta}$  найдем из уравнения (12.10):

$$\dot{\theta} = \frac{V_c \sin \theta}{r}; \quad (18.10)$$

подставив в (18.10) выражение  $r$  из (15.10), получим окончательно

$$\dot{\theta} = \frac{V_c}{k} \frac{(\sin \theta)^{\bar{V}+2}}{(1 + \cos \theta)^{\bar{V}}}. \quad (18a.10)$$

Выше мы видели, что даже при полете на встречном курсе перехватчик подходит к цели под углом  $\theta_k = \pi$ , т. е. сзади. При этом выражение (18a.10) превращается в неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .

Раскрывая эту неопределенность<sup>1</sup>, приходим к следующим выражениям угловой скорости поворота вектора  $\bar{V}$  перехватчика в момент встречи с воздушной целью:

при  $1 < \bar{V} < 2$

$$\dot{\theta}_k = 0, \quad (19.10)$$

при  $\bar{V} = 2$

$$\dot{\theta}_k = \frac{4V_c}{k} \quad (19a.10)$$

и, наконец, при  $\bar{V} > 2$

$$\dot{\theta}_k = \infty. \quad (19b.10)$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что при  $\bar{V} > 2$  угловая скорость  $\dot{\theta}_k$  получается бесконечно большой; впрочем, и при меньших значениях  $\bar{V}$ , как показывают расчеты, на небольшом расстоянии от цели  $\dot{\theta}$  получается очень большая по абсолютной величине, хотя в момент встречи  $\dot{\theta}_k = 0$ . Большие угловые скорости  $\dot{\theta}$  вблизи цели являются слабой

<sup>1</sup> Для этого воспользуемся тригонометрической формулой

$$1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Тогда (18a.10) приводится к виду

$$\dot{\theta} = 4 \frac{V_c}{k} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2+\bar{V}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{2-\bar{V}}.$$

Анализ этого выражения приводит к (19.10)—(19b.10). По этому поводу см. также [44].

стороной наведения по кривой погони, так как, конечно, реализовать большие значения  $\theta$  физически не представляется возможным. Поэтому наведение по кривой погони возможно только до того момента времени, когда  $\theta$  становится максимально возможной по условиям безопасности полета (когда  $c_y = c_{y \text{ без}}$ ). Начиная с этого момента ракета летит уже не по кривой погони, а по некоторой другой кривой с постоянным  $c_y = c_{y \text{ без}}$  и, вообще говоря, не встретится с целью.

Расчетные формулы для того случая, когда воздушная цель удаляется от перехватчика (перехват на попутном курсе), можно получить аналогичными рассуждениями, только вместо  $V_c$  следует брать  $(-V_c)$ ; приведем эти выражения без вывода.

Расстояние между перехватчиком и воздушной целью

$$r = k' \frac{(\sin \theta)^{\bar{V}-1}}{(1 + \cos \theta)^{\bar{V}}}, \quad (20.10)$$

где

$$k' = r_1 \frac{(1 + \cos \theta_1)^{\bar{V}}}{(\sin \theta_1)^{\bar{V}-1}} \quad (20a.10)$$

[в (20a.10), как и раньше,  $r_1$  и  $\theta_1$  обозначают  $r$  и  $\theta$  в начале полета перехватчика с постоянной скоростью].

Время полета, отсчитываемое от начала полета с  $V = \text{const}$ :

$$t = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + \bar{V}) - r (\cos \theta + \bar{V})}{V_c (\bar{V}^2 - 1)} \quad (21.10)$$

Время до встречи перехватчика с целью

$$t_k = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + \bar{V})}{V_c (\bar{V}^2 - 1)}. \quad (22.10)$$

В точке встречи перехватчика с воздушной целью, т. е. при  $r=0$ , как видно из (20.10), угол наклона к горизонту вектора скорости перехватчика  $\theta_k=0$ ; угловая скорость

$$\dot{\theta} = - \frac{V_c}{k'} \frac{(1 + \cos \theta)^{\bar{V}}}{(\sin \theta)^{\bar{V}-2}}. \quad (23.10)$$

В зависимости от соотношения скоростей перехватчика и цели угловая скорость  $\dot{\theta}$  в момент встречи будет:

при  $1 < \bar{V} < 2$

$$\dot{\theta}_k = 0; \quad (24.10)$$

при  $\bar{V} = 2$

$$\dot{\theta}_k = - \frac{4V_c}{k'} \quad (24a.10)$$

и при  $\bar{V} > 2$

$$\dot{\theta}_k = \infty. \quad (24b.10)$$

Заметим, что, хотя при  $\bar{V} > 2$  в этом случае, как и в предыдущем, угловая скорость  $\dot{\theta}_k$  получается бесконечно большой, резкое возрастание  $\dot{\theta}$  происходит только в непосредственной близости от цели, так что при

перехвате на попутных курсах перехватчик может приблизиться к цели на достаточно малое расстояние, не испытывая значительных перегрузок. Отсюда и следует, что наведение по кривой погони особенно удобно при перехвате из задней полусферы, как было отмечено в начале этого параграфа. Конечно, надо иметь в виду, что *рубеж перехвата*, под которым будем понимать расстояние по горизонтали от начального положения перехватчика до точки встречи, при перехвате на попутном курсе получается меньше, чем на встречном курсе.

На рис. 6.10 представлены результаты расчета для случаев приближающейся и удаляющейся цели. Расчет проведен в предположении, что в начальный момент цель находилась на 5 км выше перехватчика. Скорости перехватчика и воздушной цели постоянные:  $V_c = 600$  м/сек,  $V = 1500$  м/сек, расстояние между перехватчиком и целью в начальный момент времени  $r_1 = 20$  км.

Как видно из рис. 6.10, на перехватчик при атаке вдогон на расстоянии 30 м от цели действует перегрузка  $n_y = 9,1$ , а на расстоянии 11 м — 13,3. В то же время при атаке на встречном курсе уже на расстоянии 3 км от цели перегрузка достигает  $n_y = 14,1$  и по мере сближения с целью быстро возрастает (на расстоянии 1,55 км от цели уже  $n_y = 30,6$ ).

При атаке удаляющейся цели малые перегрузки  $n_y$  у перехватчика достигаются ценой уменьшения рубежа перехвата. В рассматриваемом примере рубеж перехвата уменьшается приблизительно на 45 км по сравнению с атакой на встречном курсе. Для того чтобы сохранить тот же рубеж перехвата  $x_{п}$  относительно охраняемого объекта, при атаке вдогон пришлось бы располагать стартовую позицию перехватчика на большем расстоянии от объекта, чем при атаке навстречу.

Мы рассмотрели характер движения перехватчика с постоянной скоростью  $V = \text{const}$ ; такое предположение справедливо, как указывалось в начале этого параграфа, только на заключительном этапе перехвата в течение небольшого промежутка времени.

При расчете начального участка траектории перехватчика скорость перехватчика уже нельзя считать постоянной, так что задача сводится к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений (11.10) и (12.10) совместно с уравнениями движения перехватчика. В общем случае эти уравнения интегрируются только численными методами. Рассмотрим приближенное решение этой задачи для случая  $\theta_c = 0$ ,  $V_c = \text{const}$ .

Как было отмечено, на начальном участке полета перехватчика расстояние между перехватчиком и целью  $r$  является монотонной функцией  $t$ . Представим  $r$  рядом Тейлора по степеням  $t$  и ограничимся тремя первыми членами этого ряда:

$$r \approx r_1 + \dot{r}_1 t + 0,5 \ddot{r}_1 t^2. \quad (25.10)$$

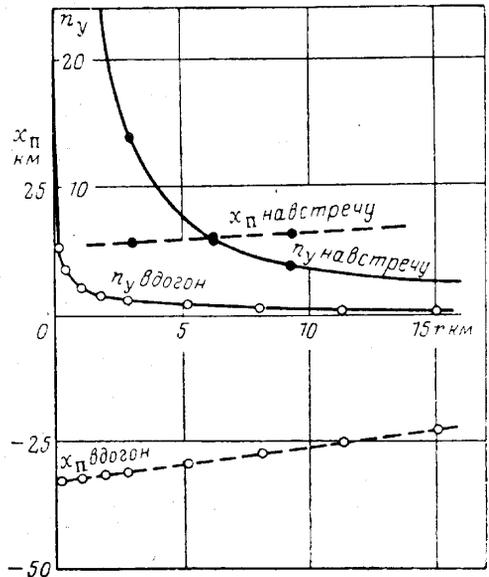


Рис. 6.10. Рубеж перехвата и перегрузка  $n_y$  при атаке воздушной цели на встречном курсе и вдогон

Первую и вторую производные  $\dot{r}_1$  и  $\ddot{r}_1$  при  $t_1=0$  получим по уравнениям (11.10) и (12.10) с учетом (18.10):

$$\dot{r}_1 = -(V_1 + V_c \cos \theta_1), \quad (26.10)$$

$$\ddot{r}_1 = -\left(\dot{V}_1 - \frac{V_c^2}{r_1} \sin^2 \theta_1\right), \quad (26a.10)$$

где  $V_1$ ,  $\dot{V}_1$  и  $\theta_1$  — скорость полета, тангенциальное ускорение и угол наклона траектории перехватчика к горизонту при  $t=0$ .

Зная зависимость  $r(t)$ , можно вычислить интеграл, входящий в (14.10); выполнив интегрирование, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \left[ \frac{1 - \frac{\ddot{r}_1}{\sqrt{\dot{r}_1^2 - 2r_1\ddot{r}_1 - \dot{r}_1}} t}{1 + \frac{\ddot{r}_1}{\sqrt{\dot{r}_1^2 - 2r_1\ddot{r}_1 + \dot{r}_1}} t} \right] \sqrt{\frac{V_c}{\dot{r}_1^2 - 2r_1\ddot{r}_1}}. \quad (27.10)$$

Задав зависимость (25.10) для  $r$ , мы тем самым задали определенную зависимость  $V(t)$ . Действительно, на основании (9.10)

$$\dot{r} = -(V + V_c \cos \theta),$$

а из (25.10), дифференцируя это выражение:

$$\dot{r} = \dot{r}_1 + \ddot{r}_1 t.$$

Сопоставляя оба выражения, приняв во внимание (26.10) и (26a.10), получим

$$V = V_1 + V_c (\cos \theta_1 - \cos \theta) + \left(\dot{V}_1 - \frac{V_c^2}{r_1} \sin^2 \theta_1\right) t, \quad (28.10)$$

так что скорость перехватчика  $V$  есть определенная функция времени  $t$  и задача может быть до конца решена в квадратурах. В самом деле, имея зависимости (27.10) и (28.10), можно рассчитать траекторию перехватчика на начальном участке, на котором угол  $\theta$  изменяется сравнительно медленно, а  $r$  — монотонная функция  $t$ .

Если перехват производить не на встречном курсе, а вдогон, в предыдущих выражениях вместо  $\kappa = \theta_c$  надо принять  $\kappa = \pi - \theta_c$ . При горизонтальном полете цели  $\theta_c = 0$  и  $\cos \kappa = -1$ , поэтому в формулах (25.10) — (28.10) вместо  $V_c$  надо брать  $(-V_c)$ .

В непосредственной близости от цели приближенное выражение (25.10) для  $r$ , принятое выше, становится неточным; при малых  $r$  более близкие к действительности результаты дает предположение  $V \approx \text{const}$ , как это уже отмечалось. Расчет траектории перехватчика в случае  $V = \text{const}$  рассмотрен выше.

Расчет по формулам (25.10) — (28.10) надо вести до такого момента времени  $t_{\text{пр}}$  (см. рис. 4.10), при котором, с одной стороны, погрешность от применения приближенного выражения для  $r$  не была слишком большой, а, с другой стороны, скорость  $V$  перехватчика за остающееся до встречи время  $\Delta t$  не могла существенно измениться.

Приравняв нулю (25.10), найдем время от начала атаки до встречи, которое получилось бы, если бы закон изменения  $r$  (25.10) оставался в силе до самого момента встречи. Вычтя затем из этой величины принятое  $\Delta t$  и подставив получившееся приближенное  $t_{\text{пр}}$  в (25.10), найдем пре-

дельную величину  $r_{\text{пр}}$ . Таким образом, при  $r \leq r_{\text{пр}}$  можно пользоваться выражением (25.10). Так, для  $\Delta t = 2 \text{ сек}$

$$r_{\text{пр}} = 2(\ddot{r}_1 + \sqrt{\dot{r}_1^2 - 2\ddot{r}_1 r_1}),$$

для  $\Delta t = 3 \text{ сек}$

$$r_{\text{пр}} = 3(1,5\ddot{r}_1 + \sqrt{\dot{r}_1^2 - 2\ddot{r}_1 r_1})$$

и т. д.

При  $r < r_{\text{пр}}$  в расчет следует вводить постоянную скорость  $V$ , которая соответствует условию  $r = r_{\text{пр}}$ .

При перехвате вдогон можно определять  $r_{\text{пр}}$  по тем же формулам, если в предыдущих выражениях вместо  $V_c$  брать  $(-V_c)$ . Величину «запаса времени»  $\Delta t$  надо выбирать, учитывая значение  $\theta$ , получающееся при пользовании приближенным выражением  $r$  (25.10). Угловая скорость  $\theta$  не должна быть слишком большой (например, несколько единиц градусов в секунду). Исходя из этой величины можно выбрать необходимую величину  $\Delta t$ .

Для сравнения на рис. 4.10 пунктиром нанесены результаты расчета по приближенным формулам (25.10) — (28.10). Как видно, совпадение результатов приближенного расчета с данными численного интегрирования получается удовлетворительное.

## § 2. Метод наведения по трем точкам в вертикальной плоскости (метод совмещения)

Для наведения по методу трех точек станция наведения непременно должна находиться не на борту перехватчика, так что этот метод не может быть применен в случае системы самонаведения. Кинематическая основа метода трех точек заключается в том, что в каждый момент времени три точки — станция наведения, перехватчик и воздушная цель — совмещаются на одной прямой (радиолуче). При этом вектор скорости перехватчика  $\vec{V}$  уже направлен не на цель, как это было при наведении по кривой погони, а в некоторую упрежденную точку, координаты которой изменяются с течением времени. Станция наведения может находиться на борту самолета-носителя, с которого стартует перехватчик; тогда станция наведения сама перемещается в пространстве. В этом случае перехватчиком является ракета класса «воздух — воздух», так как старт ракеты осуществляется из пункта, перемещающегося в воздухе.

Станция наведения может находиться и на земле вблизи стартовой позиции: в этом случае станция наведения неподвижна и условия наведения

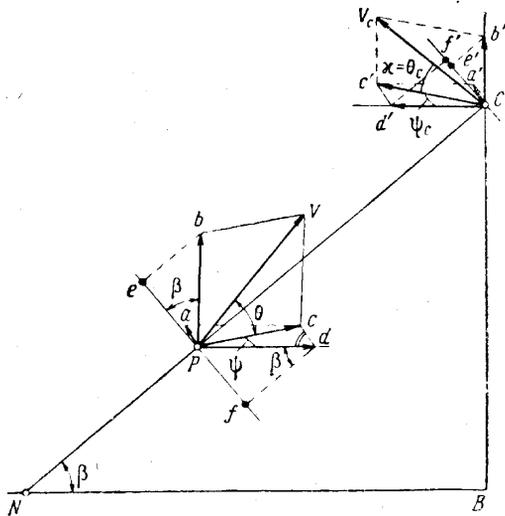


Рис. 7.10. Кинематическая схема наведения по методу трех точек:

$$\begin{aligned} P_c &= V \cos \theta; P_b = V \sin \theta; P_d = V \cos \theta \cos \psi; P_e = \\ &= V \sin \theta \cos \beta; \\ P_f &= V \cos \theta \cos \psi \sin \beta; P_a = V \cos \theta \sin \psi; Cc' = \\ &= V_c \cos \alpha; Cb' = V_c \sin \alpha; Cd' = V_c \cos \alpha \cos \psi_c; \\ Ce' &= V_c \sin \alpha \cos \beta; Cf' = V_c \cos \alpha \cos \psi_c \sin \beta; Ca' = \\ &= V_c \cos \alpha \sin \psi_c \end{aligned}$$

получаются более простыми. Соответствующий перехватчик относится к классу «земля — воздух». В этом параграфе рассматривается главным образом случай неподвижной станции наведения.

Итак, пусть станция наведения помещена в неподвижной точке  $N$ , перехватчик в некоторый момент времени находится в точке  $P$ , а воздушная цель — в точке  $C$  (рис. 7.10). Условие расположения перехватчика и воздушной цели на одной прямой приводит к требованию одинаковых угловых скоростей перехватчика и цели относительно точки  $N$ . Угловая скорость перехватчика (или цели) равна частному от деления составляющей поступательной скорости перехватчика, нормальной к направлению луча  $NC$ , на величину расстояния  $r$  ракеты (или скорости цели на  $r_c$  цели) от полюса  $N$ . Рассматривая составляющие вектора угловой скорости в плоскости  $NCB$  и перпендикулярно этой плоскости, получим кинематические соотношения метода наведения по лучу

$$\begin{aligned} \frac{V}{r} (\cos \beta \sin \theta - \sin \beta \cos \theta \cos \psi) = \\ = \frac{V_c}{r_c} (\sin \beta \cos \alpha \cos \psi_c + \cos \beta \sin \alpha), \end{aligned} \quad (29.10)$$

$$\frac{V}{r} \cos \theta \sin \psi = \frac{V_c}{r_c} \cos \alpha \sin \psi_c. \quad (29a.10)$$

В этих уравнениях  $\theta$  — угол между вектором скорости  $\bar{V}$  перехватчика и горизонтальной плоскостью;  $\psi$  и  $\psi_c$  — соответственно углы между проекциями векторов скорости перехватчика и цели на горизонтальную плоскость и проекцией луча  $NC$  на эту же плоскость;  $r = NP$  и  $r_c = NC$  — расстояния от полюса до ракеты и до цели;  $\beta$  — угол наклона вектора  $r$  к горизонтальной плоскости (угол визирования в вертикальной плоскости).

Для расчета траектории перехватчика при наведении по трем точкам уравнения (29.10) и (29a.10) надо решить совместно с тремя уравнениями, описывающими пространственное движение перехватчика. При этом предполагается, что кинематические характеристики воздушной цели (координаты и скорость) в каждый момент времени известны на основе информации, поступающей в наземную станцию наведения.

В том частном случае, когда движение перехватчика и цели происходит в неизменной вертикальной плоскости (рис. 8.10), кинематические условия метода совмещения упрощаются, а вместо трех уравнений движения перехватчика надо рассматривать только два уравнения движения в вертикальной плоскости. В этом случае, приняв во внимание, что, как видно из рис. 8.10,

$$r = \frac{H}{\sin \beta}, \quad r_c = \frac{H_c}{\sin \beta},$$

вместо (29.10) и (29a.10) получим

$$\frac{V \sin(\theta - \beta)}{H} = \frac{V_c \sin(\beta + \alpha)}{H_c}. \quad (29b.10)$$

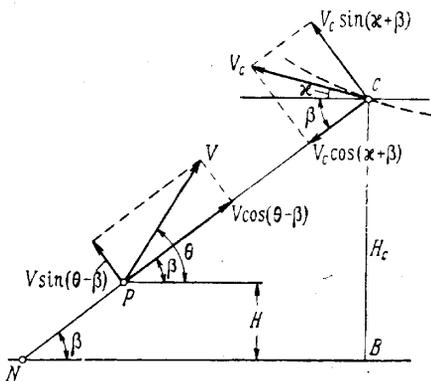


Рис. 8.10. Наведение по трем точкам в вертикальной плоскости:  
 $NP=r$ ;  $NC=r_c$ ;  $NB=x_c$

Заметим, что при перехвате на встречно-пересекающемся курсе  $\kappa = \theta_c$ , а на попутно-пересекающемся  $\kappa = \pi - \theta_c$ , так что в первом случае (29б.10) принимает вид

$$\frac{V \sin(\theta - \beta)}{H} = \frac{V_c \sin(\theta_c + \beta)}{H_c}, \quad (29в.10)$$

а во втором случае

$$\frac{V \sin(\theta - \beta)}{H} = - \frac{V_c \sin(\beta - \theta_c)}{H_c}. \quad (29г.10)$$

Угол визирования  $\beta$  определяется выражением, легко получаемым по рис. 8.10:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H_c}{x_c} = \frac{H_{c1} + \int_0^t V_c \sin \kappa dt}{x_{c1} - \int_0^t V_c \cos \kappa dt}, \quad (30.10)$$

где  $H_{c1}$  и  $x_{c1}$  соответствуют начальному моменту времени  $t_1 = 0$ .

В том частном случае, когда  $V_c = \text{const}$  и  $\kappa = \text{const}$ , выражение (30.10) принимает более простой вид:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{H_{c1} + V_c t \sin \kappa}{x_{c1} - V_c t \cos \kappa}. \quad (30а.10)$$

Так как высота полета  $H$  перехватчика определяется формулой

$$H = H_1 + \int_0^t V \sin \theta dt,$$

то (29б.10) представляет собой интегральное уравнение относительно  $\theta$ . Чтобы преобразовать (29б.10) к более удобному виду дифференциального уравнения, возьмем от обеих частей этого уравнения производные по  $t$ . Предварительно введем обозначение

$$\varepsilon = \theta - \beta. \quad (31.10)$$

Угол  $\varepsilon$  называется *углом упреждения*. Уравнение (29б.10) в новых обозначениях можно переписать в виде

$$\sin \varepsilon = \frac{V_c H}{V H_c} \sin(\beta + \kappa). \quad (32.10)$$

Выполняя дифференцирование (32.10), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left[ \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{V}_c}{V_c} + \frac{V_c \sin \kappa}{H_c} \frac{\dot{\beta} + \dot{\kappa}}{\operatorname{tg}(\beta + \kappa)} - \frac{V_c}{H_c} \sin(\beta + \kappa) \cos \beta \right] - \\ - \frac{V_c}{H_c} \sin(\beta + \kappa) \sin \beta \cos \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (32а.10)$$

Преобразуем (32а.10). Дифференцируя (30.10), получим выражение угловой скорости  $\dot{\beta}$  изменения угла визирования

$$\dot{\beta} = V_c \cos^2 \beta \frac{x_c \sin \kappa + H_c \cos \kappa}{x_c^2}$$

или

$$\dot{\beta} = \frac{V_c}{H_c} \sin(\beta + \kappa) \sin \beta. \quad (33.10)$$

Далее, подставив (33.10) в уравнение (32а.10), после несложных преобразований получим кинематическое условие метода совмещения в дифференциальной форме

$$\dot{\varepsilon} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left[ \frac{\dot{V}}{V} - \frac{\dot{V}_c}{V_c} - \frac{2\dot{\beta}}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)} - \frac{\dot{\alpha}}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)} \right] - \dot{\beta} \cos \varepsilon = 0. \quad (34.10)$$

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим подробнее частный случай, когда воздушная цель летит с неизменной скоростью  $V_c = \text{const}$  по прямолинейной траектории ( $\theta_c = \text{const}$ ) частным случаем такого движения будет горизонтальный полет цели ( $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$ ). В случае прямолинейного полета воздушной цели с  $V_c = \text{const}$  уравнение (34.10) метода совмещения становится более простым:

$$\dot{\varepsilon} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left[ \frac{\dot{V}}{V} - \frac{2\dot{\beta}}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)} \right] - \dot{\beta} \cos \varepsilon = 0. \quad (35.10)$$

Потребная перегрузка  $n_y$  на основании уравнения движения (2.10) определяется формулой

$$n_y = \cos \theta + \frac{V}{g} \dot{\theta}. \quad (36.10)$$

Так как

$$\dot{\theta} = \dot{\beta} + \dot{\varepsilon},$$

то из (35.10) получаем

$$\dot{\theta} = 2\dot{\beta} - \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} \left[ \frac{\dot{V}}{V} - \frac{2\dot{\beta}}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)} \right].$$

Приняв во внимание (32.10) и (33.10), придем к следующему выражению угловой скорости поворота вектора  $\dot{\theta}$  перехватчика:

$$\dot{\theta} = \frac{V_c}{V^2 H_c} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} \left[ 2V^2 \sin(\alpha + \theta) - \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta} H \dot{V} \right]. \quad (37.10)$$

Подставив (37.10) в выражение потребной перегрузки  $n_y$ , найдем

$$n_y = \cos \theta + \frac{V_c}{g V H_c} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} \left[ 2V^2 \sin(\alpha + \theta) - \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta} H \dot{V} \right]. \quad (38.10)$$

Если внести в (38.10) производную  $V$  при помощи уравнения движения (1.10), придем к уравнению, связывающему коэффициенты  $c_y$  и  $c_x$  перехватчика:

$$c_y = A_1 + B_1 c_x, \quad (39.10)$$

где обозначено

$$A_1 = \frac{G}{S q + \frac{P}{c_y^\alpha}} \left\{ \cos \theta + \frac{V_c H}{V H_c} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} \left[ \sin \theta \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\alpha + \theta) \frac{2V^2}{g H} - \frac{P}{G} \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta} \right] \right\}, \quad (40.10)$$

$$B_1 = \frac{S q}{S q + \frac{P}{c_y^\alpha}} \frac{V_c H}{V H_c} \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\cos \varepsilon}. \quad (41.10)$$

С другой стороны, коэффициенты  $c_y$  и  $c_x$  должны удовлетворять уравнению полярных переломов. Если полярная не может быть выражена в аналитической форме, то коэффициенты  $c_y$  и  $c_x$  можно найти графическим построением, приведенным на рис. 9.10. Если полярная может быть представлена параболой второй степени

$$c_x = c_{x0}(M) + B(M)c_y^2, \quad (42.10)$$

то коэффициент  $c_y$  можно найти по аналитической формуле

$$c_y = \frac{1}{2B_1B} [1 - \sqrt{1 - 4B_1B(A_1 + B_1c_{x0})}]. \quad (43.10)$$

Наконец, координаты переломов определяются выражениями:

$$x = x_1 + \int_0^t V \cos \theta dt, \quad (44.10)$$

$$H = H_1 + \int_0^t V \sin \theta dt. \quad (45.10)$$

Дальнейшее решение задачи можно провести только при помощи вычислительных машин методами численного интегрирования.

**Линеаризация кинематического уравнения (35.10).** Приближенное решение уравнения (35.10) можно получить при условии малости угла упреждения  $\varepsilon$ . В ряде задач такое предположение оказывается близким к действительности.

Примем для небольших  $\varepsilon$ <sup>1</sup>

$$\sin \varepsilon \approx \varepsilon, \quad \cos \varepsilon \approx 1;$$

тогда уравнение (35.10) превращается в линейное дифференциальное уравнение относительно  $\varepsilon$ :

$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon f - \dot{\beta} = 0, \quad (46.10)$$

где

$$f = \frac{\dot{V}}{V} - \frac{2\dot{\beta}}{\operatorname{tg}(\beta + \alpha)}. \quad (47.10)$$

Методы решения таких дифференциальных уравнений хорошо известны; осуществляя решение, получим

$$\varepsilon = \exp\left(-\int_0^t f dt\right) \left[ \varepsilon_1 + \int_0^t \dot{\beta} \exp\left(\int_0^t f dt\right) dt \right]. \quad (48.10)$$

Вычисление входящих в (48.10) интегралов приводит к следующим результатам:

$$\int_0^t f dt = \ln \frac{V}{V_1} - 2 \ln \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta_1 + \alpha)} = \ln \left[ \frac{V}{V_1} \frac{\sin^2(\beta_1 + \alpha)}{\sin^2(\beta + \alpha)} \right],$$

<sup>1</sup> Заменяя в (35.10)  $\sin \varepsilon$  на  $\varepsilon$ , а  $\cos \varepsilon$  на единицу, мы несколько завышаем все три члена этого уравнения. Это позволяет предположить, что вносимая погрешность не должна быть значительной даже при больших значениях  $\varepsilon$ ; расчеты хорошо подтверждают это предположение. В выражениях остальных кинематических величин, в которые входит  $\varepsilon$ , нет необходимости принимать приближенные выражения для  $\sin \varepsilon$  и  $\cos \varepsilon$ , так как это не сильно упрощает расчет, а точность уменьшается.

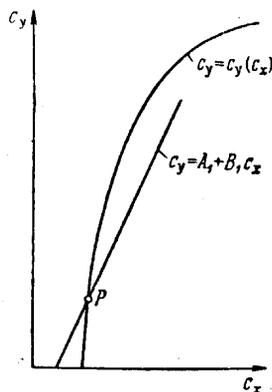


Рис. 9.10. Графическое определение коэффициентов  $c_y$  и  $c_x$

так что

$$\exp\left(-\int_0^t f dt\right) = \frac{V_1}{V} \frac{\sin^2(\beta + \alpha)}{\sin^2(\beta_1 + \alpha)}.$$

Далее

$$\int_0^t \beta \exp\left[\int_0^t f dt\right] dt = \frac{V_c \sin^2(\beta_1 + \alpha)}{V_1} \int_0^t \frac{V \sin \beta}{H_c \sin(\beta_1 + \alpha)} dt.$$

В итоге для угла упреждения получается следующая приближенная формула:

$$\epsilon = \frac{V_c}{V H_{c1}} \sin^2(\beta + \alpha) \left[ r_1 \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \alpha)} + \int_0^t \frac{V}{1 + \frac{t V_c \sin \alpha}{H_{c1}}} \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \alpha)} dt \right]. \quad (49.10)$$

Высоту полета перехватчика в каждый момент времени можно найти из кинематического уравнения (29б.10):

$$H = H_c \frac{V \sin \epsilon}{V_c \sin(\beta + \alpha)}, \quad (50.10)$$

где

$$H_c = H_{c1} + V_c t \sin \alpha.$$

Очевидно, что для того, чтобы получить решение задачи в квадратурах, необходимо знать закон изменения скорости полета перехватчика  $V$  в зависимости от времени  $t$ . Этот закон получается в результате совместного решения кинематического уравнения и уравнений движения перехватчика.

Можно поставить задачу несколько по-иному. Зададимся каким-либо законом  $V = V(t)$ ; в таком случае траекторию полета перехватчика можно получить, рассматривая только кинематические соотношения, а уравнения движения будут служить для определения потребной величины аэродинамических сил. Такой подход к вопросу существенно упрощает решение задачи. Если закон  $V(t)$  задан близким к тому, который получился бы при совместном решении кинематического уравнения и уравнений движения, то полученный результат можно рассматривать как первое приближение к действительному решению; на этом основывается метод последовательных приближений, изложенный ниже.

Положим, что закон изменения скорости перехватчика задан уравнением<sup>1</sup>

$$V = V_1 + \dot{V}_1 t, \quad (51.10)$$

где  $V_1$  и  $\dot{V}_1$  — скорость и ускорение перехватчика при  $t_1 = 0$ .

При этом (49.10) принимает следующий вид:

$$\epsilon = \frac{V_c}{V H_{c1}} \sin^2(\beta + \alpha) \left[ r_1 \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \alpha)} + \int_0^t \frac{V_1 + \dot{V}_1 t}{1 + \frac{V_c t \sin \alpha}{H_{c1}}} \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \alpha)} dt \right]. \quad (52.10)$$

<sup>1</sup> Аналогичное предположение уже было сделано при рассмотрении наведения по кривой погони.

Интеграл, входящий в это выражение, можно найти графически. Выражение (50.10) приводится к виду

$$H = (H_{c1} + V_c t \sin \alpha) \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\beta + \alpha)} \frac{V_1 + \dot{V}_1 t}{V_c}. \quad (53.10)$$

В частном случае горизонтального полета цели навстречу угол  $\alpha = 0$  и предыдущие выражения принимают вид

$$\varepsilon = \frac{V_c \sin^2 \beta}{H_c (V_1 + \dot{V}_1 t)} (r_1 + V_1 t + 0,5 \dot{V}_1 t^2), \quad (52a.10)$$

$$H = \frac{H_c \sin \varepsilon}{V_c \sin \beta} (V_1 + \dot{V}_1 t). \quad (53a.10)$$

Ускорение перехватчика  $\dot{V}_1$  в начальный момент времени определяется по уравнениям движения перехватчика с учетом кинематической связи метода совмещения. Имея в виду, что при малой  $\varepsilon_1$

$$\sin \theta_1 = \sin(\beta_1 + \varepsilon_1) \approx \sin \beta_1 + \varepsilon_1 \cos \beta_1,$$

получим

$$\dot{V}_1 = g \left( \frac{P_1}{G_1} - \frac{Q_1}{G_1} - \sin \beta_1 - \varepsilon_1 \cos \beta_1 \right), \quad (54.10)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{H_{c1}}{x_{c1}},$$

а угол  $\varepsilon_1$  в соответствии с (52.10)

$$\varepsilon_1 = \frac{V_c r_1}{V_1 H_{c1}} \sin^2 \beta_1 = \frac{V_c H_1}{V_1 H_{c1}} \sin \beta_1.$$

В случае горизонтального полета воздушной цели  $H_c = \text{const}$  и предыдущее выражение заменяется следующим:

$$\varepsilon_1 = \frac{V_c H_1}{V_1 H_c} \sin \beta_1.$$

Коэффициент  $c_x$  лобового сопротивления в начальный момент времени определяется приемом, описанным на стр. 315. Коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$  в начальный момент времени и при малых  $\varepsilon$  определяются аналогично предыдущему по формулам

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= \frac{G_1}{S q_1 + P/c_y^a} \left\{ \cos \beta_1 - \varepsilon_1 \sin \beta_1 + \frac{V_c H_1}{V_1 H_{c1}} \sin \beta_1 \left[ (\sin \beta_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon_1 \cos \beta_1) \frac{\sin(\beta_1 + \alpha)}{\sin \beta_1} + \sin(\beta_1 + \alpha + \varepsilon_1) \frac{2V_1^2}{g H_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{P}{G_1} \frac{\sin(\beta_1 + \alpha)}{\sin \beta_1} \right] \right\}, \\ B_{10} &= \frac{S q_1}{S q_1 + P/c_y^a} \frac{V_c H_1}{V_1 H_{c1}} \sin(\beta_1 + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (55.10)$$

Таким путем можно найти ускорение  $\dot{V}_1$  в начальный момент времени и, следовательно, скорость  $V$  в любой последующий момент времени по формуле (51.10).

Чтобы упростить последующие выражения, ограничимся случаем горизонтального полета воздушной цели с  $V_c = \text{const}$ .

Очевидно, что в момент перехвата  $t_n$  высота полета перехвата равна высоте  $H_c$  полета цели. Для этого момента на основании (52a.10) и (53a.10) получим

$$V_c = (V_1 + \dot{V}_1 t_n) \frac{\sin \left[ V_c \sin^2 \beta_n \frac{r_1 + V_1 t_n + 0,5 \dot{V}_1 t_n^2}{H_c (V_1 + \dot{V}_1 t_n)} \right]}{\sin \beta_n}, \quad (56.10)$$

где

$$\sin \beta_n = \frac{H_c}{\sqrt{(r_1 \cos \beta_1 - V_c t_n)^2 + H_c^2}}.$$

Решить уравнение (56.10) можно графически, построив кривую по правой части (56.10) и найдя точку пересечения этой кривой с прямой  $V_c = \text{const}$ , параллельной оси абсцисс — оси  $t$ . Таким путем найдем время перехвата.

Скорость полета перехватчика в момент перехвата

$$V_n = V_1 + \dot{V}_1 t_n. \quad (57.10)$$

Рубеж перехвата (расстояние по горизонтали от станции наведения до точки встречи перехватчика и цели)

$$x_n = r_{c1} \cos \beta_1 - V_c t_n. \quad (58.10)$$

Перегрузку  $n_{yn}$  в момент перехвата получим по (38.10), положив  $H = H_c$ :

$$n_{yn} = \cos \theta_n + \frac{V_c}{g V_n} \frac{\sin \beta_n}{\cos \varepsilon_n} \left( \frac{2V_n^2}{H_c} \sin \theta_n - \dot{V}_1 \right), \quad (59.10)$$

где

$$\theta_n = \beta_n + \varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_n = \frac{V_c}{H_c V_n} \sin^2 \beta_n (r_1 + V_1 t_n + 0,5 \dot{V}_1 t_n^2).$$

### § 3. Метод параллельного и пропорционального сближения. Траектории наведения снарядов класса «воздух — воздух»

В методе параллельного сближения вектор скорости перехватчика в каждый момент времени направлен в мгновенную точку встречи перехватчика и воздушной цели, т. е. в ту точку, в которой произошла бы встреча, если бы скорости ракеты и воздушной цели в течение всего дальнейшего времени оставались неизменными по величине и по направлению.

В действительности скорость перехватчика, а также в общем случае и воздушной цели с течением времени изменяется, так что действительная встреча перехватчика и воздушной цели произойдет в некоторой другой точке пространства. Эту действительную точку встречи можно определить в результате расчетов, излагаемых ниже.

Рассмотрим случай перехвата на встречно-пересекающемся курсе в вертикальной плоскости<sup>1</sup> (рис. 10.10). Отрезки  $AM$  и  $CM$  представляют расстояния до момента встречи, которые прошли бы соответственно пере-

<sup>1</sup> Напомним, что при перехвате на встречно-пересекающемся курсе  $\kappa = \theta_c$ , а на попутно-пересекающемся  $\kappa = \pi - \theta$

хватчик и цель, если бы их скорости в дальнейшем оставались неизменными. Обозначим время до момента встречи при этих условиях через  $t_*$ , тогда

$$AM = Vt_*, \quad CM = V_c t_*$$

Из треугольников  $AMD$  и  $MDC$  на рис. 10.10 получаем

$$MD = AM \sin \varepsilon = CM \sin (\alpha + \beta).$$

Таким образом, приходим к кинематическому равенству, лежащему в основе метода параллельного сближения

$$V \sin \varepsilon = V_c \sin (\alpha + \beta). \quad (60.10)$$

Проектируя скорости перехватчика и цели на направление радиуса-вектора, соединяющего перехватчик и цель, и на перпендикуляр к нему, получим два кинематических уравнения:

$$\dot{r} = -[V \cos \varepsilon + V_c \cos (\alpha + \beta)], \quad (61.10)$$

$$r\dot{\beta} = V_c \sin (\alpha + \beta) - V \sin \varepsilon. \quad (62.10)$$

Сопоставляя (60.10) и (62.10), приходим к выводу, что

$$\dot{\beta} = 0$$

и

$$\beta = \text{const.} \quad (63.10)$$

Таким образом, в процессе перехвата по методу параллельного сближения прямая  $AC$ , соединяющая перехватчик и цель, перемещается *параллельно самой себе*; отсюда и название метода — «параллельное сближение».

Из (60.10) найдем синус угла упреждения:

$$\sin \varepsilon = \frac{V_c}{V} \sin (\alpha + \beta) = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\bar{V}}, \quad (64.10)$$

где обозначено  $\bar{V} = \frac{V}{V_c}$ .

Из выражения (64.10) видно, между прочим, что для заданных скорости перехватчика  $V$  и скорости воздушной цели  $V_c$  наведение по методу параллельного сближения невозможно при произвольном положении перехватчика относительно воздушной цели. Действительно, так как  $(\sin \varepsilon)_{\max} = 1$ , то из (64.10) получаем

$$\sin (\alpha + \beta) \leq \bar{V}.$$

Последнее выражение, ограничивающее угол визирования  $\beta$ , и определяет диапазон возможных положений перехватчика относительно воздушной цели.

Из (61.10) и (64.10) получим выражение для скорости сближения перехватчика и цели:

$$\dot{r} = -V_c [\cos (\alpha + \beta) + \sqrt{\bar{V}^2 - \sin^2 (\alpha + \beta)}]. \quad (65.10)$$

Так как угол упреждения  $\varepsilon = \theta - \beta$ , то для расчета траектории перехватчика при наведении по методу параллельного сближения необходимо уравнение (64.10) решать совместно с уравнениями движения пере-

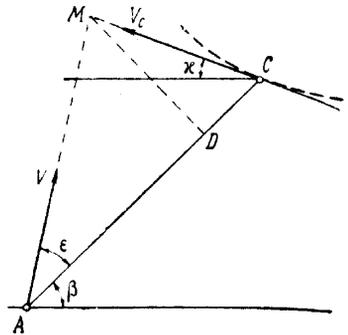


Рис. 10.10. Кинематическая схема наведения по методу параллельного сближения в вертикальной плоскости

хватчика; такое решение может быть получено методами численного интегрирования или при помощи моделирующих машин.

Угловую скорость  $\dot{\theta}$  поворота вектора скорости перехватчика найдем, дифференцируя (60.10). Ограничимся случаем полета воздушной цели по прямолинейной траектории ( $\alpha = \text{const}$ ) с постоянной скоростью ( $V_c = \text{const}$ ). Приняв во внимание, что так как  $\beta = \theta - \varepsilon = \text{const}$  и  $\dot{\theta} = \dot{\varepsilon}$ , получим

$$\dot{\theta} = -\frac{V}{V} \operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{\dot{V}}{V} \frac{V_c \sin(\alpha + \beta)}{\sqrt{V^2 - V_c^2 \sin^2(\alpha + \beta)}}. \quad (66.10)$$

Из (66.10) следует, что при постоянной скорости перехватчика ( $\dot{V} = 0$ ) угловая скорость  $\dot{\theta}$  равна нулю. В общем случае, когда скорость перехватчика  $V = \text{var}$ , получаем  $\dot{\theta} \neq 0$  (траектория перехватчика при перехвате на встречно-пересекающемся курсе обращена выпуклостью вверх), однако перегрузки  $n_y$ , испытываемые перехватчиком, получаются сравнительно небольшими.

Перегрузка  $n_y$ , действующая на перехватчик:

$$n_y = \cos \theta + \frac{V}{g} \dot{\theta} = \cos \theta - \frac{\dot{V}}{g} \frac{V_c \sin(\alpha + \beta)}{\sqrt{V^2 - V_c^2 \sin^2(\alpha + \beta)}}. \quad (67.10)$$

Угол наклона траектории к горизонту  $\theta$  можно определить из (66.10). Так как в методе параллельного сближения  $\beta = \text{const}$ , то это уравнение можно проинтегрировать в аналитической форме

$$\theta = \theta_1 - \arccos \left[ \frac{V_c \sin(\alpha + \beta)}{V} \right] + \arccos \left[ \frac{V_c \sin(\alpha + \beta)}{V_1} \right]. \quad (66a.10)$$

Расстояние точки встречи от начального положения перехватчика, измеренное по горизонтали (рубеж перехвата), как видно из рис. 10.10,

$$x_n = r_1 \cos \beta - V_c t_n \cos \alpha. \quad (68.10)$$

В частном случае изменения скорости перехватчика по линейному закону

$$V = V_1 + \dot{V}_1 t$$

решение задачи может быть получено в квадратурах.

Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательное выражение для определения расстояния между перехватчиком и целью

$$r = r_1 - V_c \left\{ t \cos(\alpha + \beta) + 0,5 \frac{V_c}{\dot{V}_1} \left[ \frac{\dot{V}_1}{V_c} t \sqrt{R} + \frac{V_1}{V_c} (\sqrt{R} - \sqrt{a}) - \sin^2(\alpha + \beta) \ln \frac{V + V_c \sqrt{R}}{V_1 + V_c \sqrt{a}} \right] \right\}, \quad (69.10)$$

где приняты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} R &= a + bt + \left( \frac{\dot{V}_1 t}{V_c} \right)^2, \\ a &= \left( \frac{V_1}{V_c} \right)^2 - \sin^2(\alpha + \beta), \\ b &= 2 \frac{V_1 \dot{V}_1}{V_c^2}, \\ V &= V_1 + \dot{V}_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (70.10)$$

Так как в момент встречи  $r=0$ , то, приравняв (69.10) нулю, получим уравнение, из которого можно определить время перехвата  $t_n$ :

$$r_1 - V_c \left\{ t_n \cos(\alpha + \beta_n) + 0,5 \frac{V_c}{\dot{V}_1} \left[ \frac{\dot{V}_1}{V_c} t_n \sqrt{R_n} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{V_1} (\sqrt{R_n} - \sqrt{a_n}) - \sin^2(\alpha + \beta_n) \ln \frac{V_n + V_c \sqrt{R_n}}{V_1 + V_c \sqrt{a_n}} \right] \right\} = 0. \quad (71.10)$$

Уравнение (71.10) удобно решать графически, строя кривую, описываемую левой частью этого уравнения, и находя  $t_n$  в точке пересечения этой кривой с осью абсцисс.

Высоту  $H$  полета перехватчика в каждый момент времени и расстояние  $x$  от начального положения определяют по уравнениям (5.10) этой главы; интегралы, входящие в эти формулы, находят графически.

Полученные выражения позволяют построить траекторию перехватчика при наведении по методу параллельного сближения и найти зависимость кинематических характеристик от времени полета.

Рассмотренный метод наведения представляет частный случай наведения по методу пропорционального сближения.

При наведении по методу *пропорционального сближения* угловая скорость  $\dot{\theta}$  поворота вектора скорости перехватчика пропорциональна угловой скорости поворота луча, соединяющего перехватчик и воздушную цель. Кинематическое уравнение, лежащее в основе этого метода:

$$\dot{\theta} = a\dot{\beta}, \quad (72.10)$$

где  $\theta$  — угол наклона траектории перехватчика к горизонту;  
 $\beta$  — угол визирования (рис. 11.10).

Интегрируя (72.10), получим связь между углами  $\theta$  и  $\beta$ :

$$\theta = a\beta + c, \quad (73.10)$$

где  $c$  — постоянная интегрирования.

Проектируя скорости перехватчика и воздушной цели на направление радиуса-вектора  $r$ , соединяющего перехватчик и цель, и на перпендикуляр к нему, будем иметь

$$\dot{r} = -(V \cos \varepsilon + V_c \cos \beta); \quad (74.10)$$

$$r\dot{\beta} = V_c \sin \beta - V \sin \varepsilon, \quad (75.10)$$

где  $\varepsilon = \theta - \beta$  — угол упреждения (см. рис. 11.10).

Для построения траектории перехватчика надо решать кинематические равенства (73.10) — (75.10) совместно с уравнениями движения перехватчика.

Разделив почленно (74.10) на (75.10), получим

$$\frac{dr}{r} = - \frac{V \cos \varepsilon + V_c \cos \beta}{V_c \sin \beta - V \sin \varepsilon} d\beta. \quad (76.10)$$

Если скорости  $V$  перехватчика и  $V_c$  воздушной цели постоянны, то интегрирование (76.10) можно осуществить графическим путем. В более

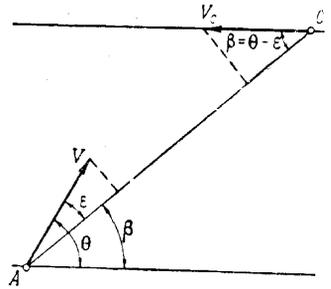


Рис. 11.10. Кинематическая схема метода пропорционального сближения

общем случае интегрировать уравнения (73.10) — (75.10) приходится численными методами.

Варьируя в уравнении наведения (73.10) коэффициенты  $a$  и  $c$ , будем получать различные кинематические картины наведения. Так, при  $a=1$ ,  $c=0$  из (73.10) получаем

$$\theta = \beta,$$

что соответствует наведению по кривой погони, рассмотренному выше (см. § 1 этой главы).

При  $a=1$  и  $c \neq 0$

$$\theta = \beta + c.$$

Соответствующий метод называют методом наведения по кривой погони с упреждением.

При  $a = \infty$  из уравнения (72.10) получаем

$$\beta = 0$$

или

$$\beta = \text{const.}$$

Как мы знаем, при таком условии наведение происходит по методу параллельного сближения.

Помимо рассмотренных в этой главе методов наведения, существует много других [37].

**Траектории наведения снарядов класса «воздух — воздух».** До сих пор предполагалось, что станция наведения, расположенная на земле, неподвижна<sup>1</sup>. В некоторых случаях станция наведения помещается не на земле, а на борту самолета-носителя, с которого стартует перехватчик, имеющий задачу поразить воздушную цель. Такие перехватчики относят к классу снарядов «воздух — воздух». Снаряды этого типа обычно имеют существенно меньший вес и меньшие габариты по сравнению со снарядами класса «земля — воздух», которые рассматривались до сих пор.

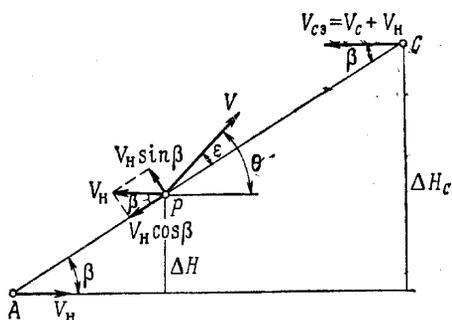


Рис. 12.10. Перехват цели снарядом «воздух — воздух» на встречно-пересекающемся курсе (цель летит горизонтально)

Как нетрудно убедиться, задачу о перехвате в случае перемещающейся в пространстве станции наведения с некоторой скоростью  $V_H$  можно

привести к задаче, в которой станция наведения неподвижна. Для этого надо обратить задачу, приложив к перехватчику и к воздушной цели дополнительно скорость, равную по величине и обратную по направлению скорости  $V_H$  станции наведения.

Ограничимся задачей, в которой наведение осуществляется по методу совмещения, и будем предполагать, что воздушная цель и носитель совершают горизонтальный полет с постоянной скоростью. Кинематическое уравнение метода совмещения при горизонтальном полете воздушной цели вместо (29б.10) имеет теперь вид<sup>2</sup> (рис. 12.10)

<sup>1</sup> Это замечание, конечно, относится к методам наведения. В случае самонаведения станция наведения, расположенная на борту перехватчика, перемещается вместе с ним.

<sup>2</sup> Для случая перехвата на встречно-пересекающемся курсе; в случае попутно-пересекающегося курса надо заменить  $+V_c$  на  $-V_c$ .

$$\frac{V_H \sin \beta + V \sin \varepsilon}{\Delta H} = \frac{V_c + V_H}{\Delta H_c} \sin \beta = \frac{V_{c\varepsilon} \sin \beta}{\Delta H_c}$$

или

$$V_H + V \frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} = V_{c\varepsilon} \frac{\Delta H}{\Delta H_c}, \quad (77.10)$$

где

$$V_{c\varepsilon} = V_c + V_H,$$

$\Delta H$  — превышение снаряда над носителем;

$\Delta H_c$  — превышение цели над носителем.

Взяв производную по  $t$  от обеих частей (77.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{V} \sin \varepsilon + \dot{\varepsilon} \cos \varepsilon - \frac{\dot{\beta}}{\sin \beta} \sin \varepsilon \cos \beta - \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c} \sin^2 \beta \cos \varepsilon - \\ - \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c} \sin \beta \cos \beta \sin \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Так как угловая скорость поворота луча визирования

$$\dot{\beta} = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c} \sin^2 \beta,$$

то предыдущее равенство можно переписать в следующей форме:

$$\dot{\varepsilon} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left( \frac{\dot{V}}{V} - \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c} \sin 2\beta \right) - \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c} \sin^2 \beta \cos \varepsilon = 0. \quad (35a.10)$$

Определим из этого уравнения производную  $\varepsilon$ :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c} \sin^2 \beta - \frac{1}{\cos \varepsilon} \left( \frac{\dot{V}}{V} - \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c} \sin 2\beta \right) \sin \varepsilon.$$

Но на основании (77.10)

$$\sin \varepsilon = \sin \beta \frac{V_{c\varepsilon}}{V} \frac{\Delta H}{\Delta H_c} \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta H_c}{\Delta H} \right),$$

так что после некоторых упрощений приходим к следующему выражению для угловой скорости  $\theta$  вместо (37.10):

$$\dot{\theta} = \dot{\beta} + \dot{\varepsilon} = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c V^2} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} \left[ 2V^2 \sin \theta - \dot{V} \Delta H \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta H_c}{\Delta H} \right) \right]. \quad (37a.10)$$

Выражения (40.10) и (41.10) для коэффициентов  $A_1$  и  $B_1$  уравнения (39.10), связывающего  $c_y$  и  $c_x$ , заменяются следующими:

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{G}{Sq + \frac{P}{c_y^\alpha}} \left\{ \cos \theta + \frac{V_{c\varepsilon} \Delta H}{V \Delta H_c} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} \left[ \sin \theta \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta H_c}{\Delta H} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{2V^2}{g \Delta H} \right) - \frac{P}{G} \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta H_c}{\Delta H} \right) \right] \right\}, \quad (40a.10) \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{Sq}{Sq + \frac{P}{c_y^\alpha}} \frac{V_{c\varepsilon} \Delta H}{V \Delta H_c} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta H_c}{\Delta H} \right). \quad (41a.10)$$

Вместо линеаризованной кинематической связи (49.10) получаем

$$\varepsilon = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c V} \sin^2 \beta \left[ r_1 \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta H_c}{\Delta H_1} \right) + \int_0^t V dt \right], \quad (49a.10)$$

где обозначено  $\frac{\Delta H_1}{\sin \beta_1} = r_1$ ,

а вместо (52.10)

$$\varepsilon = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c V} \sin^2 \beta \left[ r_1 \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta H_c}{\Delta H_1} \right) + V_1 t + 0,5 \dot{V}_1 t^2 \right]. \quad (52b.10)$$

Выражения (50.10) и (53a.10) для случая горизонтального полета цели и перехвата на встречно-пересекающемся курсе заменяются следующими:

$$\Delta H = \frac{\Delta H_c}{V_{c\varepsilon}} \frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} \left( V + V_H \frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \right), \quad (50a.10)$$

$$\Delta H = \frac{\Delta H_c}{V_{c\varepsilon}} \frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} \left( V_1 + \dot{V}_1 t + V_H \frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} \right). \quad (53b.10)$$

Для перегрузки  $n_y$  в момент перехвата вместо (59.10) получим

$$n_{y\pi} = \cos \theta_\pi + \frac{V_{c\varepsilon}}{g V_\pi} \frac{\sin \beta_\pi}{\cos \varepsilon_\pi} \left[ \frac{2V_\pi^2}{\Delta H_c} \sin \theta_\pi - \dot{V}_1 \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \right) \right], \quad (59b.10)$$

где

$$\theta_\pi = \varepsilon_\pi + \beta_\pi,$$

$$\varepsilon_\pi = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta H_c V_\pi} \sin^2 \beta_\pi \left[ r_1 \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \right) + V_1 t_\pi + 0,5 \dot{V}_1 t_\pi^2 \right],$$

$$\sin \beta_\pi = \frac{\Delta H_c}{\sqrt{(r_{c1} \cos \beta_1 - V_{c\varepsilon} t_\pi)^2 + \Delta H_c^2}},$$

$$V_\pi = V_1 + \dot{V}_1 t_\pi.$$

Уравнение (56.10) для определения времени  $t_\pi$  перехвата заменяется следующим:

$$V_{c\varepsilon} = V_H + \frac{\sin \varepsilon_\pi}{\sin \beta_\pi} (V_1 + \dot{V}_1 t_\pi), \quad (56a.10)$$

а для рубежа перехвата относительно начального положения самолета-носителя (58.10) — выражением

$$x_\pi = r_{c1} \cos \beta_1 - V_{c\varepsilon} t_\pi. \quad (58a.10)$$

#### § 4. Графо-аналитический метод расчета траекторий наведения последовательными приближениями

Как показано в этой главе, в общем случае при расчете траекторий наведения приходится пользоваться методами численного интегрирования. При интегрировании «вручную» это требует большой затраты времени и труда, так что практически провести численное интегрирование системы дифференциальных уравнений можно только на вычислительные машины. Представляет интерес поэтому применить графические приемы интегрирования уравнений движения перехватчика и кинематических уравнений. Расчет при этом приходится вести методом после-

довательных приближений, и успех метода зависит от того, насколько удачно выбрано первое приближение и как быстро сходится процесс последовательных приближений.

В качестве первого приближения в этом методе используется линейное представление изменения скорости перехватчика в зависимости от времени.

Уравнения движения перехватчика в проекциях на оси скоростной системы координат (земная поверхностная система отсчета принимается за инерциальную) можно записать в следующем виде:

$$\dot{V} = g \left( \frac{P - c_x S q}{G} - \sin \theta \right), \quad (78.10)$$

$$c_y = \frac{G}{S q + P/c_y} \left( \cos \theta + \frac{V}{g} \dot{\theta} \right), \quad (79.10)$$

$$x = x_1 + \int_0^t V \cos \theta dt, \quad (80.10)$$

$$H = H_1 + \int_0^t V \sin \theta dt. \quad (81.10)$$

Интегрируя уравнение (78.10) и отсчитывая время от начала наведения, получим выражение для скорости перехватчика

$$V = V_1 + g \int_0^t \left( \frac{P - c_x S q}{G} - \sin \theta \right) dt. \quad (82.10)$$

В правую часть этого и других уравнений подставляются результаты, полученные в предыдущем приближении; например, для второго приближения — по данным первого приближения, полученного при линейном представлении скорости перехватчика. Для нахождения зависимости  $\theta(t)$  при этом должно быть использовано кинематическое уравнение метода наведения.

Далее излагается применение этих общих соображений к расчету траекторий при наведении по методу совмещения и по методу параллельного сближения. При пользовании другими методами наведения расчет производится аналогично.

**Метод совмещения.** Ограничимся случаем движения воздушной цели по горизонтальной траектории навстречу перехватчику с  $V_c = \text{const}$ .

Для расчета кинематических величин в  $n$ -м приближении служат формулы, пояснять которые не требуется:

$$\left. \begin{aligned} \theta^{(n)} &= \theta_1 + \int_0^t \dot{\theta}^{(n-1)} dt, \\ H^{(n)} &= \frac{H_c \sin [\epsilon^{(n-1)}]}{V_c \sin \beta} V^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (83.10)$$

Для первого приближения используют линейный закон изменения скорости (51.10). Значения  $\epsilon'$  и  $H'$  в первом приближении находят по формулам (52a.10) и (53a.10). Угол  $\theta'$  в первом приближении определяют по формуле

$$\theta' = \beta + \epsilon',$$

где  $\beta$  определяют по (30.10) или (30a.10).

Во втором приближении скорость  $V''$  находят по (82.10), как об этом сказано выше; интеграл, входящий в эту формулу, находят графическим путем.

Угловая скорость  $\dot{\theta}''$  во втором приближении находится по формуле (37.10), которую можно записать в следующем виде:

$$\dot{\theta}'' = \frac{V_c}{H_c} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon'} \left[ 2 \sin \theta' - \frac{gH'}{V'^2} \left( \frac{P - c_x' S q'}{G_1} - \sin \theta' \right) \right].$$

Угол  $\theta''$  находят графическим интегрированием этого выражения. Угол упреждения  $\varepsilon''$  во втором приближении, знание которого необходимо для определения высоты полета, находят по формуле

$$\varepsilon'' = \theta'' - \beta.$$

Третье и последующие приближения выполняются аналогично второму.

**Метод параллельного сближения.** Как и в предыдущем случае, ограничимся прямолинейным горизонтальным полетом цели с  $V_c = \text{const}$ . В первом приближении для скорости берется линейный закон (51.10). Угол наклона траектории к горизонту определяется по формуле (66a.10):

$$\theta = \theta_1 - \arccos \left( \frac{V_c \sin \beta}{V} \right) + \arccos \left( \frac{V_c \sin \beta}{V_1} \right).$$

Если в это выражение подставить  $V' = V_1 + \dot{V}_1 t$ , то получим зависимость  $\theta'(t)$  в первом приближении. Скорость в  $n$ -м приближении определяется так же, как в методе совмещения. Высоту полета в  $n$ -м приближении находят по формуле

$$H^{(n)} = H_1 + \int_0^t V^{(n)} \sin \theta^{(n)} dt.$$

Необходимые для расчета  $\dot{V}$  значения  $c_y$  определяются по формуле (79.10), где согласно (66.10) угловая скорость  $\dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta} = - \frac{\dot{V}}{V} \frac{V_c \sin \beta}{\sqrt{V^2 - V_c^2 \sin^2 \beta}}.$$

Дальнейший расчет ничем не отличается от расчета при наведении по методу совмещения.

Для иллюстрации степени точности и сходимости метода последовательных приближений приведем результаты расчета перехвата по методу совмещения на встречно-пересекающемся курсе воздушной цели, летящей на высоте  $H_c = 25$  км со скоростью  $V_c = 500$  м/сек.

Начальная высота перехватчика  $H_1 = 1$  км, начальная скорость  $V_1 = 250$  м/сек. Расстояние от станции наведения до цели в начальный момент времени  $r_{c1} = 50$  км.

Начальный вес перехватчика  $G_1 = 49\,050$  н = 5000 кг. Сила тяги двигателей перехватчика  $P = 147,15$  н = 15 000 кг = const на всех высотах полета. Удельная тяга  $P_{уд} = 250$  сек. Площадь крыльев перехватчика  $S = 10$  м<sup>2</sup>. Аэродинамические коэффициенты, взятые для расчета, приведены на рис. 13.10.

Как видно из графиков рис. 14.10—16.10, результаты третьего приближения почти не отличаются от результатов расчета второго приближения, что свидетельствует о достаточной сходимости процесса приближений.

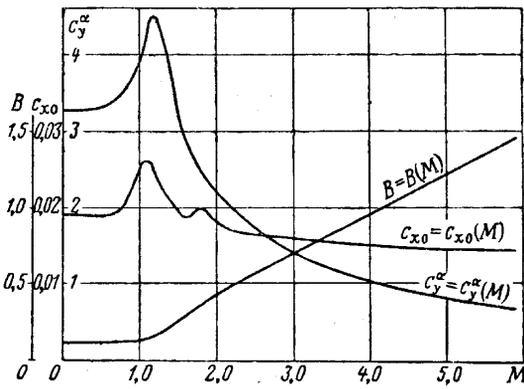


Рис. 13.10. Аэродинамические характеристики перехватчика (пример)

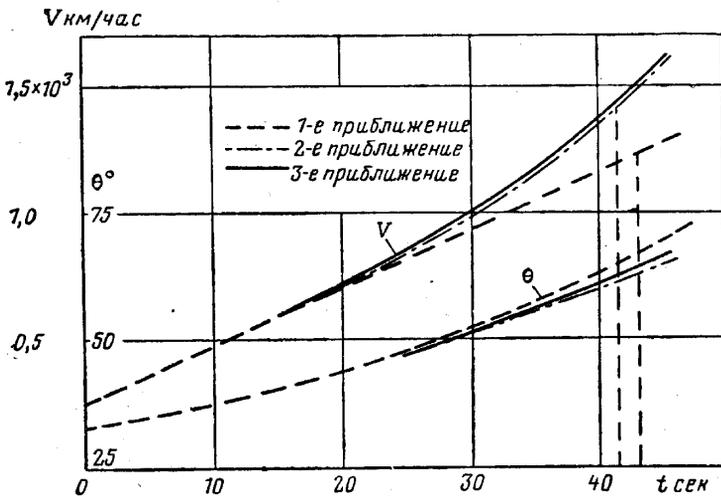


Рис. 14.10. Сходимость последовательных приближений при наведении по методу совмещения. Скорость полета (пример)

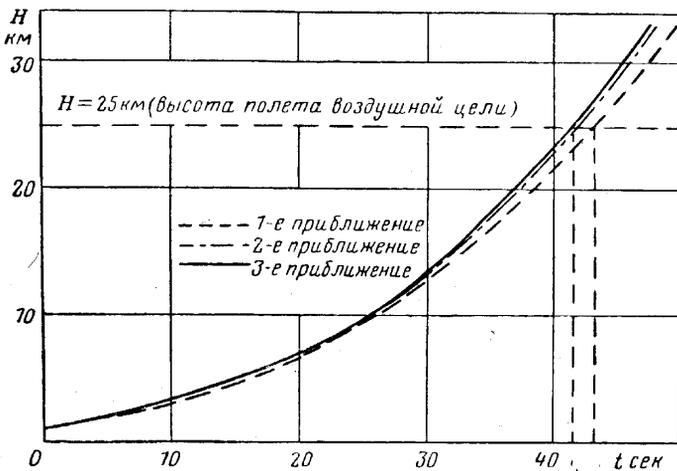


Рис. 15.10. Сходимость последовательных приближений при наведении по методу совмещения. Высота полета (пример)

## § 5. Кинематические основы наведения летательных аппаратов в горизонтальной плоскости

Задача о наведении перехватчика в горизонтальной плоскости по существу ничем не отличается от задачи наведения в вертикальной плоскости, рассмотренной в предыдущих параграфах этой главы. Кинематические связи метода наведения формально остаются такими же, как

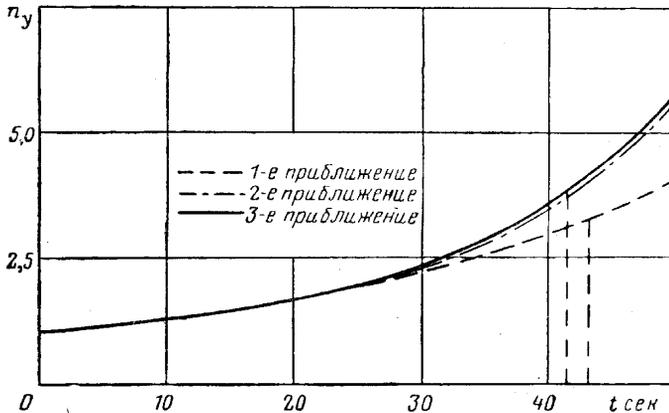


Рис. 16.10. Сходимость последовательных приближений при наведении по методу совмещения. Нормальная перегрузка (пример)

и для вертикальной плоскости, только вместо углов наклона  $\theta$  траектории к горизонту надо брать углы курса перехватчика и воздушной цели  $\psi$ , а вместо высот  $H$  и  $H_c$  — расстояния  $z$  и  $z_c$  от некоторой опорной прямой. Сделанное замечание, конечно, относится только к кинематике наведения; уравнения движения перехватчика в горизонтальной плоскости, как известно, отличаются от уравнений движения в вертикальной плоскости, и это различие должно быть принято во внимание при расчете.

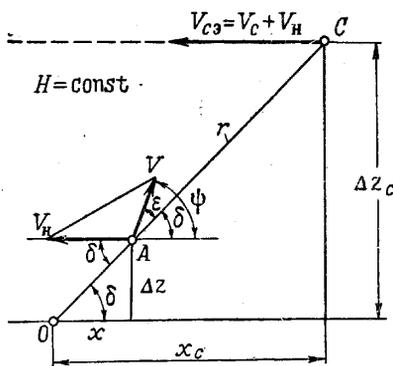


Рис. 17.10. Наведение в горизонтальной плоскости по методу совмещения

Рассмотрим наведение в горизонтальной плоскости по трем основным методам, описанным в этой главе.

**Метод совмещения (метод трех точек).** Пусть в горизонтальной плоскости по прямолинейной траектории с постоянной скоростью движется воздушная цель и пусть в некоторый момент времени положение перехватчика на этой плоскости изображается точкой  $A$  (рис. 17.10). Станция наведения, в общем случае находящаяся на самолете-носителе, перемещается в пространстве по курсу, параллельному курсу цели, с некоторой постоянной скоростью  $V_H$ . Поместим в точке  $O$  положения самолета-носителя в начальный момент времени начало координат и проведем ось  $Ox$  параллельно направлению полета воздушной цели. В этой системе координат, очевидно, координата  $\Delta z_c$  с течением времени остается неизменной. Расчет траектории перехватчика приведем к задаче, в которой станция наведения непо-

движна, а к перехватчику и к воздушной цели приложены скорости, по величине равные  $V_H$  и обратные ей по направлению.

Уравнение кинематической связи метода совмещения получим из уравнения (77.10), заменив в нем  $\Delta H$ ,  $\Delta H_c$  и  $\beta$  соответственно на  $\Delta z$ ,  $\Delta z_c$  и  $\delta$ . Таким образом, кинематическое условие метода совмещения в горизонтальной плоскости запишется в виде

$$V_H + V \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} = V_{c\varepsilon} \frac{\Delta z}{\Delta z_c}, \quad (84.10)$$

где  $V_{c\varepsilon} = V_c + V_H$  — эквивалентная скорость цели и  $\delta$  — угол визирования воздушной цели в горизонтальной плоскости.

Угловая скорость  $\dot{\delta}$  поворота луча визирования (см. стр. 323)

$$\dot{\delta} = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta z_c} \sin^2 \delta, \quad (85.10)$$

причем, как видно из рис. 17.10,

$$\sin \delta = \frac{\Delta z_c}{\sqrt{\Delta z_c^2 + (x_{c1} - V_{c\varepsilon} t)^2}}. \quad (85a.10)$$

Уравнение (35a.10) для угла упреждения  $\varepsilon$  применительно к наведению в горизонтальной плоскости принимает вид

$$\dot{\varepsilon} \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left( \frac{\dot{V}}{V} - \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta z_c} \sin 2\delta \right) - \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta z_c} \sin^2 \delta \cos \varepsilon = 0. \quad (86.10)$$

Как и в случае наведения в вертикальной плоскости, нелинейное дифференциальное уравнение (86.10) вместе с уравнениями движения перехватчика в горизонтальной плоскости, приведенными в гл. IX, могут быть решены методами численного интегрирования на вычислительных машинах. По тем же соображениям, что и в § 2, уравнение (86.10) можно линеаризовать. Решение такого линеаризованного уравнения по аналогии с (49a.10) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta z_c V} \sin^2 \delta \left[ r_1 \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta z_c}{\Delta z_1} \right) + \int_0^t V dt \right], \quad (87.10)$$

где на основании (77.10)

$$\sin \varepsilon_1 \approx \varepsilon_1 = \frac{\sin \delta_1}{V_1} \left( V_{c\varepsilon} \frac{\Delta z_1}{\Delta z_c} - V_H \right). \quad (88.10)$$

Приближенное решение задачи в квадратурах можно получить, задавшись линейным законом изменения скорости перехватчика (51.10). В таком случае выражение (87.10) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta z_c V} \sin^2 \delta \left[ r_1 \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta z_c}{\Delta z_1} \right) + V_1 t + 0,5 \dot{V}_1 t^2 \right]. \quad (89.10)$$

Из рис. 17.10 следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_1 &= \frac{\Delta z_c}{\sqrt{\Delta z_c^2 + x_{c1}^2}} = \frac{\Delta z_c}{r_{c1}}, \\ r_{c1} &= \sqrt{\Delta z_c^2 + x_{c1}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (90.10)$$

Получив по (89.10) с учетом (85a.10) зависимость  $\varepsilon(t)$ , нетрудно найти и координаты траектории перехватчика, воспользовавшись известными кинематическими связями:

$$\dot{x} = V \cos \psi \approx V (\cos \delta - \varepsilon \sin \delta),$$

$$\dot{z} = V \sin \psi \approx V (\sin \delta + \varepsilon \cos \delta).$$

Таким образом,

$$x = x_1 + \int_0^t (V_1 + \dot{V}_1 t) (\cos \delta - \varepsilon \sin \delta) dt, \quad (91.10)$$

$$z = z_1 + \int_0^t (V_1 + \dot{V}_1 t) (\sin \delta + \varepsilon \cos \delta) dt. \quad (92.10)$$

Интегралы, входящие в (91.10) и (92.10), можно было бы представить в аналитической форме; однако практически удобнее найти их графически, построив в зависимости от  $t$  подынтегральные функции этих выражений.

Скорость  $V_1$  перехватчика в начальный момент времени, складывающаяся из скорости перехватчика относительно самолета-носителя и из скорости самолета-носителя, должна быть задана. Ускорение  $\dot{V}_1$  при  $t_1=0$  определяется из уравнения движения перехватчика в горизонтальной плоскости в проекциях на касательную к траектории<sup>1</sup>. Для полета с креном и без скольжения на основании (44.9) имеем<sup>2</sup>

$$\dot{V}_1 = g \left[ \frac{P - Q_1}{G_1} - \frac{BG_1}{Sq_1} \frac{n_{y1}^2}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 Sq_1}\right)^2} \right], \quad (93.10)$$

где перегрузка  $n_{y1}$  при  $t_1=0$  определяется по (40a.9):

$$n_{y1} = \sqrt{1 + \left(\frac{V_1 \dot{\psi}_1}{g}\right)^2}. \quad (94.10)$$

Точно так же при полете со скольжением без крена, пренебрегая небольшим по сравнению с единицей слагаемым  $\frac{P - Q}{c_z^2 Sq}$ , на основании (47.9) получим

$$\dot{V}_1 = g \left[ \frac{P - Q_1}{G_1} - \frac{BG_1}{Sq_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 Sq_1}\right)^2} - \frac{BG_1}{Sq_1} n_{z1}^2 \right], \quad (95.10)$$

где на основании (20.9) боковая перегрузка по оси  $Oz$  скоростной системы координат

$$nz_1 = -\frac{V_1 \dot{\psi}_1}{g}. \quad (96.10)$$

Далее, для наведения по методу совмещения в соответствии с (37a.10) производная  $\dot{\psi}$

$$\dot{\psi} = \frac{V_{c\varepsilon}}{\Delta z_c V^2} \frac{\sin \delta}{\cos \varepsilon} \left[ 2V^2 \sin \psi - \dot{V} \Delta z \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\varepsilon}} \frac{\Delta z_c}{\Delta z} \right) \right]. \quad (97.10)$$

<sup>1</sup> Для ракет (обычно снаряды «воздух — воздух» — ракеты)  $\alpha_0 = \varphi = 0$ .

<sup>2</sup> Здесь введено обозначение  $Q_1 = c_{x0} q_1 S$ .

В частности, в начальный момент времени  $t_1=0$

$$\dot{\psi}_1 = \frac{V_{c\vartheta}}{\Delta z_c V_1^2} \frac{\sin \delta_1}{\cos \varepsilon_1} \left[ 2V_1^2 \sin \psi_1 - \dot{V}_1 \Delta z_1 \left( 1 - \frac{V_H}{V_{c\vartheta}} \frac{\Delta z_c}{\Delta z_1} \right) \right]. \quad (97a.10)$$

Для определения ускорения  $\dot{V}_1$  надо решить совместно уравнения движения (93.10) или (95.10) и кинематические уравнения (94.10) или (96.10) и (97a.10). В результате для малых  $\varepsilon_1$  получается квадратное уравнение относительно  $\left(\frac{\dot{V}_1}{g}\right)$ :

$$a \left(\frac{\dot{V}_1}{g}\right)^2 + b \left(\frac{\dot{V}_1}{g}\right) + c = 0. \quad (98.10)$$

Для случая полета с креном без скольжения коэффициенты этого уравнения получаются следующие:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{BG_1}{Sq_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 Sq_1}\right)^2} \frac{V_{c\vartheta}^2}{V_1^2} \sin^2 \delta_1 \left(\frac{r_1}{r_{c1}} - \bar{V}_H\right)^2, \\ b &= 1 - 4 \frac{BG_1}{Sq_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 Sq_1}\right)^2} \frac{V_{c\vartheta}^2}{gr_{c1}} \sin \delta_1 \sin \psi_1 \left(\frac{r_1}{r_{c1}} - \bar{V}_H\right), \\ c &= -\frac{P - Q_1}{G_1} + \frac{BG_1}{Sq_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 Sq_1}\right)^2} \left[ 1 + \left(\frac{2V_{c\vartheta} V_1}{gr_{c1}}\right)^2 \sin^2 \psi_1 \right], \end{aligned} \right\} \quad (99.10)$$

где  $\bar{V}_H = \frac{V_H}{V_{c\vartheta}}$ ,  $r_1 = \frac{\Delta z_1}{\sin \delta_1}$ ,  $r_{c1} = \frac{\Delta z_c}{\sin \delta_1}$ .

Для полета со скольжением без крена

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{BG_1}{Sq_1} \frac{V_{c\vartheta}^2}{V_1^2} \sin^2 \delta_1 \left(\frac{r_1}{r_{c1}} - \bar{V}_H\right)^2, \\ b &= 1 - 4 \frac{BG_1}{Sq_1} \frac{V_{c\vartheta}^2}{gr_{c1}} \sin \delta_1 \sin \psi_1 \left(\frac{r_1}{r_{c1}} - \bar{V}_H\right), \\ c &= -\frac{P - Q_1}{G_1} + \frac{BG_1}{Sq_1} \left[ \left(\frac{2V_{c\vartheta} V_1}{gr_{c1}}\right)^2 \sin^2 \psi_1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 Sq_1}\right)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (100.10)$$

**Метод параллельного сближения.** Кинематическую связь метода при наведении в горизонтальной плоскости получим из (66.10), заменив в этом выражении  $\theta$  на  $\psi$  и  $\beta$  на  $\delta$  (рис. 18.10):

$$\dot{\psi} = -\frac{V_c \sin \delta}{\sqrt{V^2 - V_c^2 \sin^2 \delta}} \frac{\dot{V}}{V}. \quad (101.10)$$

Точно так же<sup>1</sup> на основании (66a.10) получим уравнение, связывающее угол  $\psi$  со скоростью полета перехватчика и цели и с углом  $\delta$ :

$$\psi = \psi_1 - \arccos \left( \frac{V_c \sin \delta}{V} \right) + \arccos \left( \frac{V_c \sin \delta}{V_1} \right). \quad (102.10)$$

<sup>1</sup> Напомним, что в методе параллельного сближения  $\delta = \text{const}$ .

Если полет перехватчика осуществляется с креном без скольжения, на основании (40а.9) и (44.9) для угловой скорости  $\dot{\psi}$  поворота вектора  $\bar{V}$  перехватчика и для тангенциального ускорения  $\dot{V}$  получим следующие выражения:

$$\dot{\psi} = -g \frac{\sqrt{n_y^2 - 1}}{V}, \quad (103.10)$$

$$\dot{V} = g \left[ \frac{P - Q_1}{G} - \frac{B}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 S q}\right)^2} \frac{G}{S q} n_y^2 \right]. \quad (104.10)$$

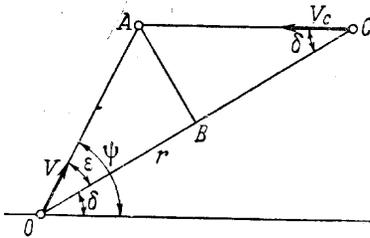


Рис. 18.10. Наведение в горизонтальной плоскости по методу параллельного сближения

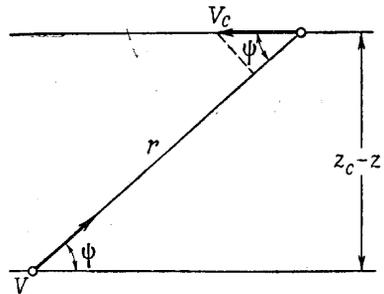


Рис. 19.10. Наведение в горизонтальной плоскости по методу кривой погони

Уравнения (101.10), (103.10) и (104.10) позволяют найти выражение нормальной перегрузки  $n_y$  в зависимости от скорости полета перехватчика  $V$ . Значение  $n_y$  определяется из биквадратного уравнения

$$a n_y^4 + b n_y^2 + c = 0, \quad (105.10)$$

коэффициенты которого даются формулами:

$$a = \left[ \frac{B}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 S q}\right)^2} \frac{G}{S q} \right]^2,$$

$$b = - \left[ \frac{2B}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 S q}\right)^2} \frac{G}{S q} \frac{P - Q_1}{G} + \frac{V^2 - V_c^2 \sin^2 \delta}{V_c^2 \sin^2 \delta} \right], \quad (106.10)$$

$$c = \frac{V^2 - V_c^2 \sin^2 \delta}{V_c^2 \sin^2 \delta} + \left( \frac{P - Q_1}{G} \right)^2.$$

Получив зависимость  $n_y(V)$  по (104.10), найдем зависимость времени полета  $t$  от скорости  $V$ :

$$t = \frac{1}{g} \int_{V_1}^V \frac{dV}{\frac{P - Q_1}{G} - \frac{B}{\left(1 + \frac{P}{c_y^2 S q}\right)^2} \frac{G n_y^2}{S q}}. \quad (107.10)$$

По (102.10) получим зависимость  $\psi(V)$ .

Наконец, координаты траектории перехватчика найдем по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + \int_0^t V \cos \psi dt, \\ z &= z_1 + \int_0^t V \sin \psi dt. \end{aligned} \right\} \quad (108.10)$$

На основании аналогичных рассуждений можно прийти к выводу, что в случае полета со скольжением без крена боковая перегрузка  $n_z$  определяется из квадратного уравнения

$$a_1 n_z^2 + b_1 n_z + c_1 = 0. \quad (109.10)$$

Коэффициенты этого уравнения определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= B \frac{G}{Sq}, \\ b_1 &= \frac{\sqrt{V^2 - V_c^2 \sin^2 \delta}}{V_c \sin \delta}, \\ c_1 &= - \left[ \frac{P - Q_1}{G} - \frac{B}{\left(1 + \frac{P}{c_y^a Sq}\right)^2} \frac{G}{Sq} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (110.10)$$

Дальнейший ход расчета подобен описанному выше.

**Наведение по кривой погони.** Кинематические уравнения этого метода при наведении в горизонтальной плоскости (рис. 19.10) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} r\dot{\psi} &= V_c \sin \psi, \\ \dot{r} &= -(V + V_c \cos \psi), \\ \dot{\psi} &= \frac{V_c \sin^2 \psi}{z_c - z}. \end{aligned} \right\} \quad (111.10)$$

Уравнения (111.10) совместно с уравнениями движения решаются методами численного интегрирования. Для приближенного решения в случае линейного закона изменения скорости полета перехватчика в зависимости от времени

$$V = V_1 + \dot{V}_1 t$$

может быть использован способ, подробно описанный в § 1 этой главы, необходимо только во всех формулах заменить  $\theta$  на  $\psi$ .

## ГЛАВА XI

### СТАРТОВЫЕ И ПОСАДОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Для всякого летательного аппарата многоразового действия старт и посадка являются обязательными этапами полета.

Собственно *старт* представляет собой отделение летательного аппа-

рата от аэродрома<sup>1</sup>; мы, однако, условимся вкладывать в понятие старта более широкое содержание, понимая под стартом фазу движения летательного аппарата от состояния покоя на аэродроме до приобретения летательным аппаратом углового положения, скорости и высоты, необходимых для совершения полета.

Точно так же под посадкой будем понимать фазу движения летательного аппарата начиная от некоторой высоты и скорости полета до момента остановки летательного аппарата на аэродроме.

Отделить летательный аппарат от поверхности аэродрома для дальнейшего совершения полета можно либо с места, если запас тяги (тяговооруженность) достаточен для поддержания аппарата в воздухе, либо в результате предварительного сообщения летательному аппарату такой скорости, при которой аэродинамическая подъемная сила достаточна, чтобы уравновешивать вес летательного аппарата. Таким образом, старт ракет, имеющих тяговооруженность, большую единицы, отличается от старта самолетов, совершающих предварительный разбег по аэродрому, с тем чтобы набрать минимально необходимую для полета скорость.

Рассмотрим последовательно задачи о старте ракет — крылатых и бескрылых — и о старте и посадке самолетов.

## § 1. Расчет старта баллистических ракет

*Баллистической ракетой* называют летательный аппарат, траектория которого состоит из начального (активного) участка полета с работающим двигателем, на протяжении которого ракета приобретает нужный для дальнейшего полета запас кинетической (скорость полета) и потенциальной (высота полета) энергии, и пассивного участка полета с неработающим двигателем. Большая часть полета баллистических ракет дальнего действия проходит практически за пределами атмосферы<sup>2</sup>.

Старт баллистических ракет осуществляется со специальных стартовых устройств — стендов, на которых устанавливают ракету обычно в положении, близком к вертикальному. Вертикальное положение баллистической ракеты при старте, во-первых, обусловливается тем, что поддерживающая сила создается тягой двигателей, установленных на ракете, так как баллистическая ракета обычно не имеет крыльев. При относительно небольшой тяговооруженности баллистических ракет стремятся всю силу тяги использовать для подъема ракеты. Вторым соображением в пользу вертикального старта является удобство эксплуатации: при вертикальном положении баллистической ракеты действие газовой струи, выходящей из сопла двигателя, локализуется вблизи стартовой позиции.

При старте, после отделения от стартового стенда, баллистическая ракета некоторое время движется по прямолинейной траектории, как упомянуто выше, близкой к вертикали ( $\theta \approx 90^\circ$ ). После того как ракета достигнет безопасной высоты (по условиям эксплуатации), начинается ее полет по программе, искривляющей траекторию; в этот момент старт баллистической ракеты можно считать законченным.

Для определенности будем полагать, что при старте баллистическая ракета движется точно по вертикальной траектории. Движение ракеты по такой траектории описывается уравнениями гл. V. Напомним, что при выводе этих уравнений система отсчета, связанная с поверхностью Земли, считалась инерциальной, т. е. кривизной земной поверх-

<sup>1</sup> Исключение представляют летательные аппараты, стартующие с самолета-носителя.

<sup>2</sup> Вопросы динамики баллистической ракеты рассмотрены в третьей части книги.

ности и суточным вращением Земли пренебрегалось.

Уравнения движения имеют вид

$$m\dot{V} = P - Q - G = P - c_x S \frac{\rho V^2}{2} - G, \quad (1.11)$$

$$Y = 0. \quad (2.11)$$

Так как при полете по вертикальной траектории подъемная сила равна нулю, коэффициент лобового сопротивления надо брать для  $c_y = 0$ , т. е.  $c_x = c_{x0}$ ; это упрощает решение задачи.

К уравнениям (1.11) и (2.11) надо добавить кинематическую связь

$$\dot{H} = V, \quad (3.11)$$

устанавливающую соотношение между скоростью и высотой полета, и уравнение, связывающее вес ракеты  $G$  с временем  $t$ :

$$G = G_0(1 - kt), \quad (4.11)$$

где, как и ранее,

$$k = \frac{P}{G_0 P_{уд}} = \frac{\bar{P}_0}{P_{уд}} = \frac{g \bar{P}_0}{V_a}.$$

Уравнения (1.11) — (4.11) в общем случае могут быть решены методами численного интегрирования. Достаточно точное аналитическое решение можно получить на основании следующих соображений.

Участок старта баллистической ракеты занимает сравнительно непродолжительное время по сравнению с полным временем полета ракеты, так что вес ракеты  $G$  за время старта изменяется в сравнительно узких пределах. Высота полета  $H$  за время старта также изменяется несильно. На основании этих соображений можно считать во время старта вес ракеты  $G$ , силу тяги  $P$ , удельную тягу  $P_{уд}$ , плотность воздуха  $\rho$  постоянными и равными соответственно  $G_0$ ,  $P_0$ ,  $P_{уд}$ ,  $\rho_0$ . Скорость полета  $V$  ракеты во время старта невелика, небольшими получаются и числа Маха. Это позволяет в первом приближении принять при расчете старта  $c_{x0} \approx \text{const}$ , т. е. пренебречь влиянием сжимаемости воздуха на аэродинамические характеристики ракеты.

Представив ускорение  $\dot{V}$  ракеты в виде

$$\dot{V} = \frac{dV}{dH} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dH}$$

и подставив это выражение в (1.11), с учетом сделанных допущений получим

$$\frac{G_0}{2g} \frac{dV^2}{dH} + c_{x0} S \frac{\rho_0 V^2}{2} - (P_0 - G_0) = 0. \quad (1a.11)$$

Уравнение (1a.11) есть линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной  $V^2$ , решение которого имеет вид

$$V^2 = \frac{2(P_0 - G_0)}{c_{x0} S \rho_0} + c \exp\left(-g \frac{c_{x0} S \rho_0}{G_0} H\right).$$

Определив постоянную интегрирования  $c$  из того условия, что при  $H=0$  скорость  $V=0$ , придем к следующему выражению зависимости скорости от высоты полета:

$$V^2 = \frac{2(P_0 - G_0)}{c_{x0} S \rho_0} \left[1 - \exp\left(-g \frac{c_{x0} S \rho_0}{G_0} H\right)\right]. \quad (5.11)$$

Взяв производную по  $H$  от (5.11) и приняв во внимание, что

$$2 \frac{dV}{dt} = \frac{dV^2}{dH},$$

придем к следующему выражению для времени  $t_{\text{ст}}$ , затрачиваемого на вертикальный старт:

$$t_{\text{ст}} = \frac{G_0}{2g(P_0 - G_0)} \frac{1}{\sqrt{\frac{c_{x0} S \rho_0}{2(P_0 - G_0)}}} A,$$

где

$$A = \ln \left\{ \frac{1 + \sqrt{\frac{c_{x0} S \rho_0}{2(P_0 - G_0)}} V}{1 - \sqrt{\frac{c_{x0} S \rho_0}{2(P_0 - G_0)}} V} \right\}. \quad (6.11)$$

Расчет старта по приведенным формулам не представляет труда. Результаты такого расчета можно уточнить, проведя расчет второго приближения, хотя надобность в этом невелика. Имея на основании расчета первого приближения зависимости  $t(V)$  и  $V(H)$ , можно построить зависимость  $G(H)$ ; эту зависимость можно принять за исходную для расчета второго приближения. Во втором приближении входящие в уравнения вес ракеты  $G$  и плотность воздуха  $\rho$  будут уже не постоянными, а известными функциями высоты полета  $H$ . Так же точно коэффициент  $c_{x0}$  теперь можно рассматривать как функцию числа Маха, которое определяется в результате расчета первого приближения. Во втором приближении вместо (5.11) и (6.11) получаются следующие формулы:

$$V^2 = 2g \exp\left(-gS \int_0^H \frac{\rho}{G} c_{x0} dH\right) \int_0^H \left(\frac{P}{G} - 1\right) \exp\left(gS \int_0^H \frac{\rho}{G} c_{x0} dH\right) dH, \quad (7.11)$$

$$t_{\text{ст}} = \frac{1}{g} \int_0^V \left[ \frac{P}{G} - 1 - gS c_{x0} \frac{\rho}{G} \exp\left(-gS \int_0^H \frac{\rho}{G} c_{x0} dH\right) \times \right. \\ \left. \times \int_0^H \left(\frac{P}{G} - 1\right) \exp\left(gS \int_0^H \frac{\rho}{G} c_{x0} dH\right) dH \right]^{-1} dV. \quad (8.11)$$

После набора баллистической ракетой некоторой заранее регламентированной высоты полета  $H_*$  начинается ее полет по искривленной траектории. Эта фаза движения ракеты рассмотрена в гл. XIII.

Для приближенной оценки скорости ракеты в конце старта можно воспользоваться приближенной формулой, которая получается из (5.11), если  $\exp\left(-g \frac{c_{x0} S \rho_0}{G_0} H\right)$  представить в виде ряда и ограничиться двумя его членами:

$$V^2 \approx 2g \frac{P_0 - G_0}{G_0} H. \quad (5a.11)$$

## § 2. Расчет старта крылатой ракеты. Ввод ракеты в режим наведения

Для ракет, имеющих крылья, полет которых осуществляется по тому или иному методу наведения, *стартом* будем называть *участок*

движения начиная от отделения от земли до момента ввода в режим наведения.

В гл. X показано, что каждый метод наведения характеризуется определенной кинематической связью, наложенной на характер движения перехватчика в зависимости от движения воздушной цели. Эти связи не могут быть удовлетворены непосредственно в момент вылета перехватчика, так что в течение некоторого времени после старта траектория перехватчика не соответствует принятому методу наведения. Другими словами, движению перехватчика по траектории, определяемой методом наведения, предшествует его движение по некоторой программе, построенной таким образом, чтобы в конце полета по программе кинематические характеристики (скорость  $V$ , угол наклона траектории к горизонту  $\theta$ , высота полета  $H$ ) удовлетворяли связям, обусловленным методом наведения.

Ракеты класса «земля — воздух», динамика которых рассматривается в этом параграфе, имеют обычно значительно большую тяговооруженность, чем баллистические; это позволяет осуществлять старт крылатых ракет не только по вертикальной, но и по наклонной траектории. В последнем случае в течение некоторого небольшого промежутка ракета движется по специальному направляющим, устанавливаемым под требуемым углом к горизонту. Угол наклона выбирают исходя из характеристик перехватчика, а также из скорости и высоты полета воздушной цели.

Рассмотрим последовательно оба возможных варианта старта крылатой ракеты.

**Вертикальный старт крылатой ракеты.** Через некоторое время после старта траектория крылатой ракеты, вначале вертикальная, начинает искривляться, и в конце этой фазы движения ракета приобретает необходимые по условиям метода наведения скорость, высоту полета и угол наклона траектории к горизонту.

Продолжительность полета ракеты по вертикальной траектории обычно устанавливают из эксплуатационных соображений. При этом требуется набрать такую высоту полета, чтобы ракета приобрела достаточную скорость, обеспечивающую нужную устойчивость и управляемость. Желательно далее, чтобы струя газов, выходящих из сопла двигателя, попадала на землю вблизи стартовой позиции во избежание нанесения травм обслуживающему персоналу и повреждения оборудования, находящегося вблизи стартовой позиции. Кроме того, так как при переходе через скорость звука все аэродинамические характеристики ракеты ухудшаются, желательно продолжительность полета по вертикальной траектории с нулевым углом атаки выбирать такой, чтобы искривление траектории начиналось или до достижения звуковой скорости или уже при значительных сверхзвуковых скоростях.

Программа искривления траектории ракеты должна быть подчинена тому условию, чтобы ракета как можно скорее вошла в режим наведения. Перегрузку  $n_y$  в процессе искривления траектории следует выбирать возможно большей, но не превосходящей допустимую; необходимо также учитывать взаимное расположение стартовой позиции и станции наведения (например, при наведении по методу совмещения).

Таким образом, движение ракеты по программе, предшествующее движению в режиме наведения, можно разделить на два этапа: на первом этапе ракета движется по вертикальной траектории, на втором —

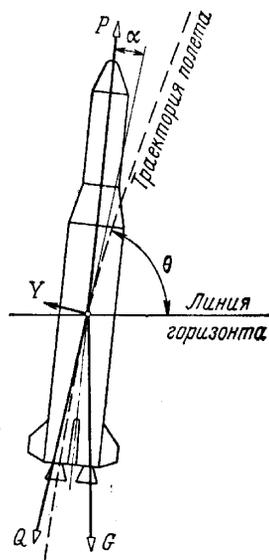


Рис. 1.11. Внешние силы, действующие на ракету

по криволинейной траектории с которой перегрузкой  $n_y < 0$ . Что касается первого этапа движения, то его расчет ничем не отличается от расчета старта баллистической ракеты, рассмотренного выше.

Уравнения движения ракеты по криволинейной траектории<sup>1</sup>, полученные в гл. V без учета кривизны земной поверхности и суточного вращения Земли, имеют вид (рис. 1.11)

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P \cos \alpha - c_x S \frac{\rho V^2}{2}}{G_1(1-kt)} - \sin \theta, \quad (9.11)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = \frac{c_y S \frac{\rho V^2}{2} + P \sin \alpha}{G_1(1-kt)} - \cos \theta, \quad (10.11)$$

где, как и прежде,

$$G = G_1(1-kt), \quad k = \frac{P}{G_1 P_{y\lambda}},$$

а время  $t$  отсчитывается от начала искривления траектории ракеты;  $G_1$  — вес ракеты в момент начала искривления траектории. Если на ракете отсутствуют сбрасываемые ускорители, то вследствие небольшой продолжительности полета по вертикальной траектории без особой погрешности можно принять  $G_1 \approx G_0$ .

К уравнениям (9.11) и (10.11) добавляются кинематические равенства:

$$\dot{H} = V \sin \theta, \quad (11.11)$$

$$\dot{x} = V \cos \theta. \quad (12.11)$$

Решение приведенной системы дифференциальных уравнений может быть получено методами численного интегрирования при заданной программе искривления траектории ракеты. Основываясь на непродолжительном полете ракеты, можно получить приближенное решение, сделав некоторые упрощающие предположения. Рассмотрим получающийся при таких предположениях приближенный метод расчета.

Примем, что искривление траектории происходит с неизменной угловой скоростью поворота  $\theta$ . Расчеты показывают, что при такой программе искривления значения  $c_y$  изменяются в сравнительно нешироких пределах и могут быть реализованы. В таком случае угол  $\theta$  наклона траектории к горизонту в каждый момент времени определяется по формуле

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \dot{\theta}t,$$

где  $t$  отсчитывается от момента начала искривления траектории.

Будем предполагать далее, что  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ; в таком случае (10.11) принимает более простой вид

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = \frac{c_y S \frac{\rho V^2}{2} + P \alpha}{G_0(1-kt)} - \cos \theta = c_y \frac{\frac{S \rho V^2}{2} + \frac{P}{c_y \alpha}}{G_0(1-kt)} - \cos \theta, \quad (10a.11)$$

где принято  $G_1 = G_0$  и  $P = \text{const}$ .

<sup>1</sup> Напомним, что для ракет угол  $\varphi$  между направлением силы тяги и осью корпуса, а также угол нулевой подъемной силы  $\alpha_0$  можно принять равными нулю.

Определяя отсюда  $\dot{\theta}$ , найдем

$$\dot{\theta} = \frac{g}{V} \left[ c_y \left( \frac{S\rho V^2}{2G_0} + \frac{\bar{P}_0}{c_y^2} \right) \frac{1}{1-kt} - \cos \theta \right], \quad (13.11)$$

где обозначено  $\bar{P}_0 = \frac{P}{G_0}$ .

Так как по условию задачи  $\dot{\theta} = \text{const} = \dot{\theta}_1$  и при  $t_1 = 0$  принято  $\theta_1 = 90^\circ$ , то на основании (13.11)

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 = \frac{g}{V_1} c_{y1} \left( \frac{S\rho_1 V_1^2}{2G_0} + \frac{\bar{P}_0}{c_y^2} \right), \quad (13a.11)$$

где  $\rho_1$  соответствует моменту времени  $t_1 = 0$ .

При постоянной угловой скорости поворота вектора скорости и при малых  $\alpha$  уравнение (9.11) запишется в виде  $\left( \bar{P} = \frac{P}{G_0(1-kt)} \right)$

$$\frac{\dot{V}}{g} = \bar{P} - \frac{c_x S\rho}{2G} V^2 - \sin \theta = \bar{P} - \frac{c_x S\rho}{2G} V^2 - \cos(\dot{\theta}t).$$

Сделав простые преобразования правой части этого равенства, перепишем его:

$$\frac{\dot{V}}{g} = \bar{P}_0 - \frac{c_{x1} S\rho_1}{2G_1} V_1^2 - \cos(\dot{\theta}t) + \left[ \bar{P}_0 \frac{kt}{1-kt} + \frac{c_{x1} S\rho_1}{2G_1} V_1^2 - \frac{c_x S\rho}{2G} V^2 \right].$$

Интегрируя это уравнение, придем к следующему выражению для скорости полета ракеты:

$$V = V_1 + g \left( \bar{P}_0 - \frac{c_{x1} S\rho_1}{2G_1} V_1^2 \right) t - \frac{g}{\dot{\theta}} \sin(\dot{\theta}t) + \delta V, \quad (14.11)$$

где

$$\delta V = g \int_0^t \left( \frac{c_{x1} S\rho_1}{2G_1} V_1^2 - \frac{c_x S\rho}{2G} V^2 \right) dt - g \bar{P}_0 \left[ t + \frac{1}{k} \ln(1-kt) \right]. \quad (15.11)$$

По уравнению (11.11) найдем высоту полета ракеты

$$H = H_1 + \frac{V_1}{\dot{\theta}} \sin(\dot{\theta}t) + \frac{g}{\dot{\theta}} \left( \bar{P}_0 - \frac{c_{x1} S\rho_1}{2G_1} V_1^2 \right) \times \\ \times \left[ t \sin(\dot{\theta}t) - \frac{1 - \cos(\dot{\theta}t)}{\dot{\theta}} \right] - \frac{g}{2\dot{\theta}^2} \sin^2(\dot{\theta}t) + \delta H, \quad (16.11)$$

где

$$\delta H = \int_0^t \delta V \cos(\dot{\theta}t) dt. \quad (17.11)$$

Расчет удобно вести последовательными приближениями. В первом приближении, полагая  $\delta V = 0$ , получим следующие выражения для скорости и высоты полета ракеты:

$$V' = V_1 + g \left( \bar{P}_0 - \frac{c_{x1} S\rho_1}{2G_1} V_1^2 \right) t - \frac{g}{\dot{\theta}} \sin(\dot{\theta}t), \quad (18.11)$$

$$H' = H_1 + \frac{V_1}{\dot{\theta}} \sin(\dot{\theta}t) + \frac{g}{\dot{\theta}} \left( \bar{P}_0 - \frac{c_x S\rho_1}{2G_1} V_1^2 \right) \times \\ \times \left[ t \sin(\dot{\theta}t) - \frac{1 - \cos(\dot{\theta}t)}{\dot{\theta}} \right] - \frac{g}{2\dot{\theta}^2} \sin^2(\dot{\theta}t). \quad (19.11)$$

Для определения скорости и высоты полета ракеты во втором и следующих приближениях подынтегральные функции в (15.11) и (17.11) вычисляются по значениям  $V$  и  $H$ , полученным в результате расчета первого приближения (вообще — предыдущего приближения). Коэффициент подъемной силы в первом приближении находят по формуле

$$c'_y = \frac{1}{\frac{\bar{P}'}{c_y^{\alpha'}} + \frac{S_p' V'^2}{2G'}} \left( \frac{V'}{g} \dot{\theta} + \cos \theta \right), \quad (20.11)$$

которая легко получается из (10а.11).

Как показывают расчеты, процесс приближений сходится достаточно быстро, так что практически достаточно ограничиваться вторым приближением, а когда особая точность не требуется, то и первым.

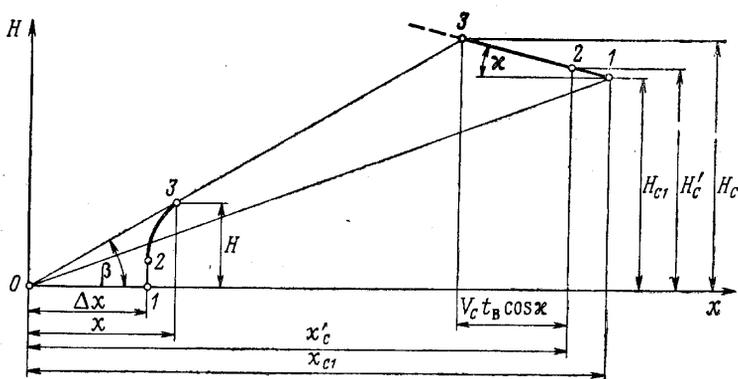


Рис. 2.11. К расчету входа ракеты в режим наведения по методу совмещения:

1, 2, 3 — последовательные положения ракеты и воздушной цели

Конец этапа ввода ракеты в режим наведения определяется условием равенства кинематических характеристик в полете по программе искривления и в режиме наведения. Для наведения в вертикальной плоскости по методу совмещения условие наведения (29б.10) имеет вид

$$\frac{V \sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta + \kappa)} = \frac{V_c}{H_c} H. \quad (21.11)$$

Будем считать угол визирования  $\beta_1$  в начальный момент времени  $t_1 = t_{ct}$  заданным; этот угол определяется дальностью радиолокационной станции наведения и высотой полета воздушной цели. Угол  $\beta$  в некоторый последующий момент времени определяется из выражения (30а.10) (для  $V_c = \text{const}$ ,  $\kappa = \text{const}$ ):

$$\text{tg } \beta = \frac{H'_c + V_c t \sin \kappa}{x'_c - V_c t \cos \kappa}, \quad (22.11)$$

где

$$H'_c = H_{c1} + V_c t_{ct} \sin \kappa,$$

$$x'_c = x_{c1} - V_c t_{ct} \cos \kappa$$

— соответственно высота полета и горизонтальная координата воздушной цели относительно станции наведения в момент начала искривления траектории ракеты, а время  $t$  измеряется с момента начала искривления траектории.

В процессе старта и последующего полета ракеты по искривленной траектории воздушная цель приближается к станции наведения, так что угол  $\beta$  согласно (22.11) возрастает. В момент входа в режим наведения должно удовлетворяться уравнение (21.11). Кроме того, как видно из рис. 2.11, горизонтальная  $x$  и вертикальная  $H$  координаты ракеты должны удовлетворять уравнению

$$x = H \operatorname{ctg} \beta. \quad (23.11)$$

Если через  $\Delta x$  обозначить расстояние между станцией наведения и стартовой позицией, то для координаты  $x$

$$x = \Delta x + \int_0^t V \cos \theta dt,$$

так что условие (23.11) можно переписать в виде

$$\Delta x + \int_0^t V \cos \theta dt = H \operatorname{ctg} \beta. \quad (24.11)$$

Если угловая скорость  $\dot{\theta}$  постоянна, как мы предположили выше, то уравнения (21.11) и (24.11) содержат в неявном виде два неизвестных: момент времени  $t_b$  входа ракеты в режим наведения и угловую скорость  $\dot{\theta}$  поворота вектора скорости ракеты; решая уравнения, можно найти эти неизвестные.

Ограничимся рассмотрением этой задачи для того простого случая, когда скорость и высота полета ракеты могут быть взяты по результатам расчета первого приближения, т. е. когда  $V$  и  $H$  даны выражениями (18.11) и (19.11). В этом случае координата  $x$  ракеты определяется выражением

$$x = \Delta x - \int_0^t \left[ V_1 + g(\bar{P}_0 - \bar{Q}_1)t - \frac{\sin(\dot{\theta}t)}{\dot{\theta}} \right] \sin(\dot{\theta}t) dt,$$

так как  $\cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \dot{\theta}t\right) = -\sin(\dot{\theta}t)$ . После интегрирования это выражение приводится к виду

$$x = \Delta x - V_1 \frac{1 - \cos(\dot{\theta}t_b)}{\dot{\theta}} - g \frac{\bar{P}_0 - \bar{Q}_1}{\dot{\theta}^2} [\sin(\dot{\theta}t_b) - \dot{\theta}t_b \cos(\dot{\theta}t_b)] + \frac{g}{4\dot{\theta}^2} [2\dot{\theta}t_b - \sin(2\dot{\theta}t_b)]. \quad (25.11)$$

Но из (22.11) и (23.11) следует, что

$$x = \frac{H}{H'_c + V_c t_b \sin \alpha} (x'_c - V_c t_b \cos \alpha).$$

Подставив это выражение в (25.11), получим уравнение

$$\Delta x = \frac{H}{H'_c + V_c t_b \sin \alpha} (x'_c - V_c t_b \cos \alpha) + V_1 \frac{1 - \cos(\dot{\theta}t_b)}{\dot{\theta}} + g \frac{\bar{P}_0 - \bar{Q}_1}{\dot{\theta}^2} [\sin(\dot{\theta}t_b) - \dot{\theta}t_b \cos(\dot{\theta}t_b)] - \frac{g}{4\dot{\theta}^2} [2\dot{\theta}t_b - \sin(2\dot{\theta}t_b)]. \quad (25a.11)$$

Уравнения (25a.11) и (21.11) должны быть решены совместно. При заданном расположении стартовой позиции относительно станции наведения (расстояние  $\Delta x$  задано) эти уравнения содержат два неизвестных: угловую скорость  $\dot{\theta}$  поворота вектора скорости ракеты и  $t_{в}$  — время, затраченное на ввод ракеты в режим наведения. Решение осуществляется графическим путем; при этом получается следующая последовательность расчета.

1. Пользуясь (18.11), (19.11) и (22.11), находим зависимости  $V(t)$ ,  $H(t)$  для различных  $\dot{\theta}$  и  $\beta(t)$  на участке полета по искривленной траектории.

2. На основании п. 1 по уравнению (21.11), которое удобнее написать в виде

$$\frac{V \cos(\beta - \dot{\theta}t)}{H \sin(\beta + \alpha)} = \frac{V_c}{H_c} \quad (21a.11)$$

[так как  $\theta = \frac{\pi}{2} + \dot{\theta}t$  и  $\sin(\theta - \beta) = \cos(\dot{\theta}t - \beta) = \cos(\beta - \dot{\theta}t)$ ], для нескольких значений  $\dot{\theta}$  строим кривые

$$\frac{V \cos(\beta - \dot{\theta}t)}{H \sin(\beta + \alpha)} = f(t)$$

и кривую

$$\frac{V_c}{H_c} = \frac{V_c}{H'_c + V_c t \sin \alpha} = \varphi(t).$$

Отмечаем моменты времени  $t_{в}$ , соответствующие точкам пересечения кривых первой группы со второй кривой; эти моменты времени и будут представлять собой время  $t_{в}$ , затраченное на ввод ракеты в режим наведения для каждого значения  $\dot{\theta}$ .

3. По (25a.11) находим соответствующие значения  $\Delta x$ .

4. Строим кривую  $\Delta x(\dot{\theta})$  и по известному значению  $\Delta x_{\phi}$  (по фактическому расстоянию между станцией наведения и стартовой позицией) находим требуемое значение  $\dot{\theta}_{\phi}$ .

5. Построив на основании п. 2 кривую  $\dot{\theta}(t_{в})$ , по найденному в п. 4 значению  $\dot{\theta}_{\phi}$  находим истинное время  $t_{в.и}$ , затраченное на ввод ракеты в режим наведения.

Далее по (18.11), (19.11) и (22.11) находим характеристики движения ракеты в момент времени  $t = t_{ст} + t_{в.и}$ .

Так как приходится встречаться с различными высотами и скоростями полета воздушных целей при неизменном положении стартовой позиции относительно станции наведения, необходимая угловая скорость  $\dot{\theta}$  не во всех случаях будет получаться наибольшей допустимой по условиям безопасности полета ракеты. Поэтому расположение станции наведения относительно стартовой позиции надо выбирать, ориентируясь на такие сочетания  $V_c$  и  $H_c$ , при которых требуется наибольшая угловая скорость  $\dot{\theta}$ .

Мы определили момент входа в режим наведения из того условия, что в этот момент времени  $t = t_{ст} + t_{в.и}$  высота полета ракеты  $H$ , ее скорость  $V$  и угол наклона траектории к горизонту  $\theta$  удовлетворяют кинематическим условиям метода наведения. При этом, однако, угловая скорость  $\dot{\theta}$  поворота вектора скорости ракеты не совпадает в общем случае с потребной по условиям наведения<sup>1</sup> угловой скоростью  $\dot{\theta}_{нав}$ , так

<sup>1</sup> При перехвате на встречно-пересекающемся курсе, в частности, угловые скорости  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\theta}_{нав}$  получают противоположного знака.

как при решении задачи такое требование не ставилось. Отсюда видно, что в следующий момент времени  $t > t_{в.и}$ , если не принять необходимых мер, величина угла  $\theta$  (а значит, и всех других кинематических характеристик траектории ракеты) уже не будет удовлетворять условиям метода наведения (рис. 3.11), и ракета выйдет из режима наведения. Для того чтобы в дальнейшем при  $t > t_{в.и}$  ракета оставалась в режиме наведения, надо быстро изменить угловую скорость  $\dot{\theta}$  так, чтобы она стала равна потребной по условиям наведения; для этого надо изменить угол атаки ракеты, т. е. сообщить ракете определенную перегрузку  $n_y$ . На основании (10.11) перегрузка

$$n_y = \frac{Y + Pa}{G} = \frac{V\dot{\theta}}{g} + \cos \theta.$$

Изменение перегрузки в момент времени  $t = t_{ст} + t_{в.и}$

$$\Delta n_y = n_{y \text{ нав}} - n_{y \text{ в}} = \frac{V}{g} (\dot{\theta}_{\text{нав}} - \dot{\theta}_{\text{в.и}}),$$

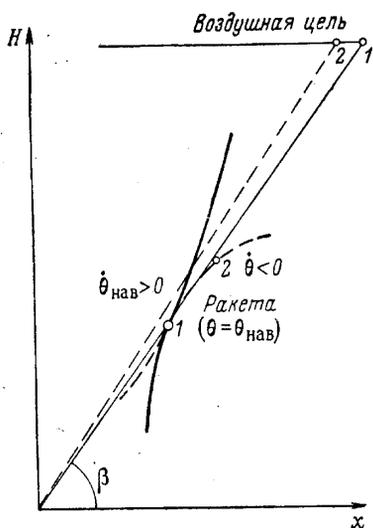


Рис. 3.11. Графическое определение времени входа ракеты в режим наведения по методу совмещения

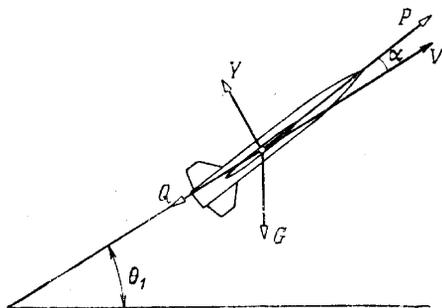


Рис. 4.11. Силы, действующие на ракету при наклонном старте

где  $\dot{\theta}_{\text{нав}}$  — угловая скорость поворота вектора скорости в режиме наведения;  $\dot{\theta}_{\text{в.и}}$  — угловая скорость при входе в режим наведения. Угловая скорость  $\dot{\theta}_{\text{в.и}}$  в режиме ввода определяется на основании изложенных выше соображений, а угловая скорость  $\dot{\theta}_{\text{нав}}$  в режиме наведения — по формуле (37.10):

$$\dot{\theta}_{\text{нав}} = \frac{V_c}{V^2 H_c} \frac{\sin \beta}{\cos \varepsilon} \left[ 2V^2 \sin(\theta + \alpha) - \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta} H \dot{V} \right],$$

где  $H_c = H'_c + Vt \sin \alpha$ .

Здесь угол упреждения  $\varepsilon$  в момент входа в режим наведения определяется по формуле

$$\varepsilon = \theta - \beta,$$

причем углы  $\theta$  и  $\beta$  берутся из расчета ввода в режим наведения.

Дополнительная перегрузка  $\Delta n_y$  при входе в режим наведения может оказаться значительной. Пусть, например, для гипотетической ракеты с тяговооруженностью  $\bar{P}_1 = 6,0$  в конце полета по вертикальной траектории  $H_1 = 700 \text{ м}$ ,  $V_1 = 350 \text{ м/сек}$ ,  $\dot{V}_1 = 50 \text{ м/сек}^2$  и воздушная цель летит горизонтально со скоростью  $V_c = 1000 \text{ м/сек}$  на высоте  $H_c = 20\,000 \text{ м}$ . Пусть расстояние от стартовой позиции до воздушной цели, измеренное по горизонтали,  $x_{c1} = 50\,000 \text{ м}$ .

Предположив, что угловая скорость  $\dot{\theta} = -0,2 \text{ сек}^{-1}$ , и сделав расчет по описанному выше методу<sup>1</sup>, получим время ввода в режим наведения  $t_B = 5,7 \text{ сек}$  при расстоянии  $\Delta x = 8000 \text{ м}$ ,  $H_B = 3000 \text{ м}$ ,  $V_B = 660 \text{ м/сек}$ . При этих условиях дополнительная перегрузка, которую надо сообщить ракете, чтобы она оставалась в режиме наведения, получается  $\Delta n_y \approx 14$ .

**Наклонный старт крылатой ракеты**<sup>2</sup>. Предполагая, что ракета стартует по прямолинейной траектории, наклоненной к горизонту под углом  $\theta = \theta_1 = \text{const}$ , вместо уравнений (9.11) и (10.11) получим (рис. 4.11) следующие:

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P \cos \alpha - Q}{G_1(1-kt)} - \sin \theta_1,$$

$$\frac{Y + P \sin \alpha}{G_1(1-kt)} = \cos \theta_1,$$

или, заменяя для малых  $\alpha$  величину  $\cos \alpha$  на единицу,  $\sin \alpha$  на  $\alpha$  и принимая во внимание, что  $c_y = c_y^\alpha \alpha$ ,

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P - Q}{G_1(1-kt)} - \sin \theta_1, \quad (26.11)$$

$$c_y \frac{Sq + \frac{P}{c_y^\alpha}}{G_1(1-kt)} = \cos \theta_1. \quad (27.11)$$

Интегрируя (26.11), получим

$$V = g(\bar{P}_1 - \sin \theta_1)t + \delta V = \dot{V}_1 t + \delta V, \quad (28.11)$$

где

$$\delta V = -g P_{yx} [kt + \ln(1-kt)] - \frac{g}{G_1} \int_0^t \frac{Q}{1-kt} dt. \quad (29.11)$$

Интегрирование кинематического уравнения

$$\dot{H} = V \sin \theta$$

дает

$$H = \dot{V}_1 \frac{t^2}{2} \sin \theta_1 + \delta H, \quad (30.11)$$

где

$$\delta H = \sin \theta_1 \int_0^t \delta V dt. \quad (31.11)$$

Точно так же на основании кинематического уравнения

$$\dot{x} = V \cos \theta_1$$

получим

$$x = \Delta x + \frac{\dot{V}_1 t^2}{2} \cos \theta_1 + \delta x, \quad (32.11)$$

где

$$\delta x = \cos \theta_1 \int_0^t \delta V dt. \quad (33.11)$$

<sup>1</sup> Ограничиваясь первым приближением, т. е. полагая  $\delta V = \delta H = \delta x = 0$ .

<sup>2</sup> В дальнейшем участок движения ракеты по направляющим не учитывается ввиду его малости.

Расчет по приведенным формулам удобно выполнять последовательными приближениями. В первом приближении полагаем  $\delta V = \delta H = \delta x = 0$ . Во втором приближении значения подинтегральных функций, входящих в выражения  $\delta V$ ,  $\delta H$ ,  $\delta x$ , определяем по результатам расчета первого приближения, причем величина лобового сопротивления  $Q$ , входящая в (29.11), определяется для значения  $c_y$  в соответствии с (27.11). В это последнее выражение подставим скоростной напор  $q$ , найденный по первому приближению, и число Маха  $M = \frac{V}{a}$ , где скорость звука  $a$  берется для высоты, определенной по первому приближению.

В случае наклонного старта (в этом случае  $H_1 = V_1 = 0$ ) с  $\theta = \theta_1 = \text{const}$  уравнение (9.11) принимает вид

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P \cos \alpha - c_x S \frac{\rho V^2}{2}}{G_1 (1 - kt)} - \sin \theta_1 \approx \frac{P - c_x S \frac{\rho V^2}{2}}{G_0 (1 - kt)} - \sin \theta_1,$$

где  $G_1$  — вес ракеты в момент схода с направляющих.

Проведя преобразования, аналогичные сделанным при рассмотрении вертикального старта с последующим искривлением траектории ракеты (см. стр. 338), вместо (14.11) получим

$$V = g \left( \bar{P}_0 - \frac{c_{x1} S \rho_1}{2G_0} V_1^2 - \sin \theta_1 \right) t + \delta V, \quad (14a.11)$$

где  $\delta V$  определяется по (15.11).

Точно так же вместо (16.11) и (17.11) получим

$$H = g \sin \theta_1 \left( \bar{P}_0 - \frac{c_{x1} S \rho_1}{2G_1} V_1^2 - \sin \theta_1 \right) \frac{t^2}{2} + \delta H, \quad (16a.11)$$

$$\delta H = \sin \theta_1 \int_0^t \delta V dt. \quad (17a.11)$$

Приведем последовательность расчета ввода в режим наведения в случае наклонного старта.

1. По (14a.11), (16a.11) и (22.11) находим зависимости

$$V(t), H(t), \beta(t).$$

2. По уравнению (21.11), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{V}{H} \frac{\sin(\theta_1 - \beta)}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{V_c}{H_c},$$

строим кривую

$$\frac{V \sin(\theta_1 - \beta)}{H \sin(\beta + \alpha)} = f(t)$$

и кривую

$$\frac{V_c}{H_c} = \frac{V_c}{H_{c1} + V_c t \sin \alpha} = \varphi(t),$$

где  $t$  с некоторым приближением отсчитывается от момента старта ракеты. В точке пересечения обеих кривых находим время  $t_b$  ввода ракеты в режим наведения.

При наклонном старте дополнительные перегрузки  $\Delta n_y$ , которые необходимо создать в момент входа в режим наведения, получаются значительно меньшими, чем при вертикальном старте. Если, например, ра-

кета стартует под углом к горизонту  $\theta_1 = 28^\circ$ , то при том же времени  $t_B = 5,7$  сек (см. стр. 344) расстояние между стартовой позицией и станцией наведения получается  $\Delta x = 300$  м, а скорость ракеты и ее высота при входе в режим наведения  $V = 350$  м/сек и  $H = 950$  м. Дополнительная перегрузка оказывается всего  $\Delta n_y = 0,4$ . Отсюда видны преимущества наклонного старта перед вертикальным.

Если наведение осуществляется по методу *параллельного сближения*, то, как и в предыдущем случае, старт может быть или *вертикальным* или *наклонным*. Формулы, определяющие кинематические характеристики движения ракеты в процессе ввода в режим наведения, естественно, остаются прежними. Изменяются лишь кинематические условия, которым надо удовлетворить в момент ввода в режим наведения.

В этот момент времени должно удовлетворяться равенство (см. гл. X, стр. 319)

$$V \sin(\theta - \beta) = V_c \sin(\beta + \alpha),$$

где

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \dot{\theta}t,$$

или

$$V \cos(\dot{\theta}t - \beta) = V_c \sin(\beta + \alpha).$$

Определяя из этого уравнения потребную величину угла визирования  $\beta$  в момент входа ракеты в режим наведения при *вертикальном старте*, получим

$$\sin \beta = \frac{V \cos(\dot{\theta}t) - V_c \sin \alpha}{\sqrt{V^2 - 2V V_c \sin(\alpha + \dot{\theta}t) + V_c^2}}. \quad (34.11)$$

По формуле (66.10) угловая скорость  $\dot{\theta}_{\text{нав}}$  поворота вектора скорости ракеты

$$\dot{\theta}_{\text{нав}} = -\frac{\dot{V}}{V} \frac{V_c \sin(\alpha + \beta)}{\sqrt{V^2 - V_c^2 \sin^2(\alpha + \beta)}}.$$

Дополнительная перегрузка в момент входа в режим наведения

$$\Delta n_y = n_{y_{\text{нав}}} - n_{y_B} = \frac{V}{g} (\dot{\theta}_{\text{нав}} - \dot{\theta}),$$

$$\Delta n_y = -\frac{1}{g} \left[ \frac{\dot{V} V_c \sin(\beta + \alpha)}{\sqrt{V^2 - V_c^2 \sin^2(\beta + \alpha)}} + V \dot{\theta} \right]. \quad (35.11)$$

В частности, в случае наклонного старта по прямой линии в этом выражении следует положить  $\dot{\theta} = 0$ .

Из (35.11) видно, что при вертикальном старте ракеты соответствующим выбором угловой скорости  $\dot{\theta}$  можно добиться равенства нулю дополнительной перегрузки  $\Delta n_y$ , так как слагаемые в квадратных скобках (35.11) имеют разные знаки ( $\dot{\theta} < 0$ ). Приравняв нулю выражение (35.11) и решив полученное уравнение относительно  $\dot{\theta}$  при  $n_y = 0$ , после некоторых преобразований получим

$$\dot{\theta}_{n_y=0} = -\frac{\cos(\alpha + \dot{\theta}_{n_y=0} t_B) V_c \dot{V}_B}{V_B [V_B - V_c \sin(\alpha + \dot{\theta}_{n_y=0} t_B)]}. \quad (36.11)$$

Отсюда графическим построением можно найти  $\theta = \dot{\theta}(t_B)$ .

В момент ввода ракеты в режим наведения, как видно из рис. 5.11, должно удовлетворяться равенство

$$x'_c = x + \frac{H_c - H}{\operatorname{tg} \beta} + V_c t_B \cos \alpha. \quad (37.11)$$

Подставив  $x$  по (25.11), предыдущее уравнение можно переписать в виде

$$x'_c = \Delta x - V_1 \frac{1 - \cos(\dot{\theta} t_B)}{\dot{\theta}} - g \frac{\bar{P}_1 - \bar{Q}_1}{\dot{\theta}^2} [\sin(\dot{\theta} t_B) - \dot{\theta} t_B \cos(\dot{\theta} t_B)] + \\ + \frac{g}{462} [2\dot{\theta} t_B - \sin(2\dot{\theta} t_B)] + \frac{H_c - H}{\operatorname{tg} \beta} + V_c t_B \cos \alpha, \quad (37a.11)$$

где  $H'$  определяется по (19.11), в котором  $t = t_B$ , и  $H_c = H'_c + V_c t_B \sin \alpha$

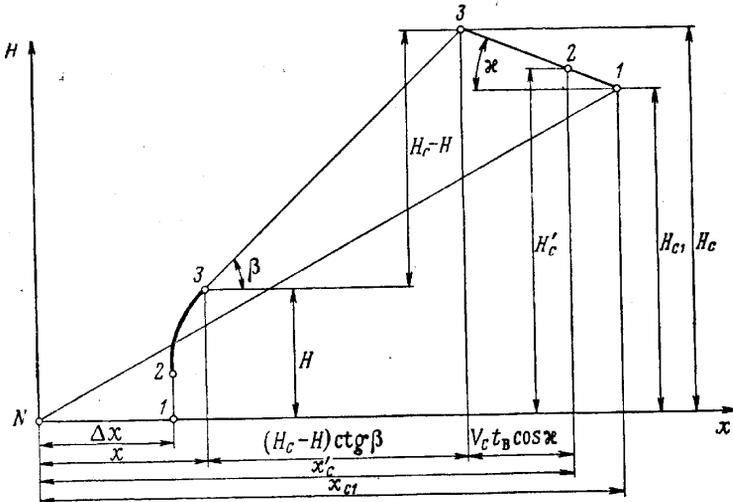


Рис. 5.11. К расчету ввода ракеты в режим наведения по методу параллельного сближения

Уравнение (37a.11) связывает три величины:  $\dot{\theta}$ ,  $\beta$  и  $t_B$ . Значения  $\dot{\theta}$  и  $\beta$  вообще могут быть выбраны произвольно. Если выбор  $\dot{\theta}$  и  $\beta$  подчинить условию равенства нулю перегрузки  $\Delta n_y = 0$  в момент ввода в режим наведения, то последовательность расчета времени, затрачиваемого на ввод в режим наведения, получается такая.

1. По (14.11) и (16.11) находят зависимости

$$V(t), H(t).$$

2. Решая графически уравнение (36.11), строят кривую

$$\dot{\theta}_{\Delta n_y = 0} = f(t_B).$$

3. Подставляя в (34.11) найденные в п. 2 значения  $\dot{\theta}_{\Delta n_y = 0}$ , для каждого  $t_B$  находят значение  $\beta$ , т. е. определяют зависимость  $\beta = \beta(t_B)$ .

4. Для значений  $\dot{\theta}_{\Delta n, y} = 0$ , найденных в п. 2, строят кривую

$$\Delta x = V_1 \frac{1 - \cos(\dot{\theta} t_B)}{\dot{\theta}} - g \frac{\bar{P}_1 - \bar{Q}_1}{\dot{\theta}^2} [\sin(\dot{\theta} t_B) - \dot{\theta} t_B \cos(\dot{\theta} t_B)] + \\ + \frac{g}{4\dot{\theta}^2} [2\dot{\theta} t_B - \sin(2\dot{\theta} t_B)] + \frac{H_c - H}{\operatorname{tg} \beta} + V_c t_B \cos \alpha = \varphi(t_B)$$

и по заданному

$$x_c = x_{c1} - V_c t_{\text{CT}} \cos \alpha$$

определяют время  $t_B$ , затраченное на ввод ракеты в режим наведения.

В случае наклонного старта последовательность расчета остается такой же, как и в случае вертикального старта, только зависимости  $V(t)$  и  $H(t)$  определяются по уравнениям (14a.11) и (16a.11).

Мы рассмотрели задачу о вводе ракеты в режим наведения при двух методах наведения: методе совмещения и параллельного сближения. Подобным же образом решается задача ввода в режим наведения и при других способах наведения.

### § 3. Расчет взлетной дистанции самолета

Старт большинства современных самолетов начинается с разбега по аэродрому; в конце разбега самолет приобретает скорость, достаточную для отрыва и перехода к полету. Размеры аэродрома зависят от длины *взлетной дистанции самолета*, т. е. от расстояния по горизонтали, которое самолет проходит от момента начала разбега до момента, когда он успевает набрать безопасную высоту. Величина безопасной высоты полета регламентируется техническими требованиями, предъявляемыми к самолету<sup>1</sup>.

Величина взлетной дистанции складывается из длины разбега самолета и длины участка, на котором самолет, оторвавшись от поверхности аэродрома, совершает подъем с одновременным разгоном (рис. 6.11).

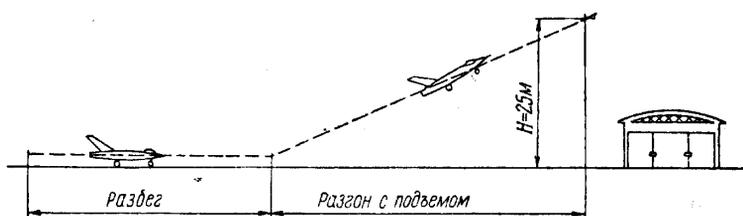


Рис. 6.11. Взлетная дистанция самолета

Рассмотрим последовательно каждый из этих двух участков движения самолета.

На *участке разбега* (первый этап взлета) самолет перемещается по поверхности аэродрома со скоростью, постепенно увеличивающейся от  $V=0$  в начале разбега до некоторой *скорости отрыва*  $V_{\text{отр}}$ , достаточной для создания подъемной силы крыльев, уравновешивающей вес самолета.

<sup>1</sup> У нас до 1968 г. принимали  $H_{\text{без}} = 25$  м; в некоторых зарубежных странах считают  $H_{\text{без}} = 15$  м.

та. При достижении скорости отрыва самолет переходит от движения по поверхности аэродрома к полету в воздухе.

В начале разбега самолет движется на трех точках: на основных (главных) колесах и на вспомогательном носовом или хвостовом колесе (в зависимости от типа шасси). Уже при сравнительно небольшой скорости движения вспомогательное колесо отделяется от земли, и дальнейшее

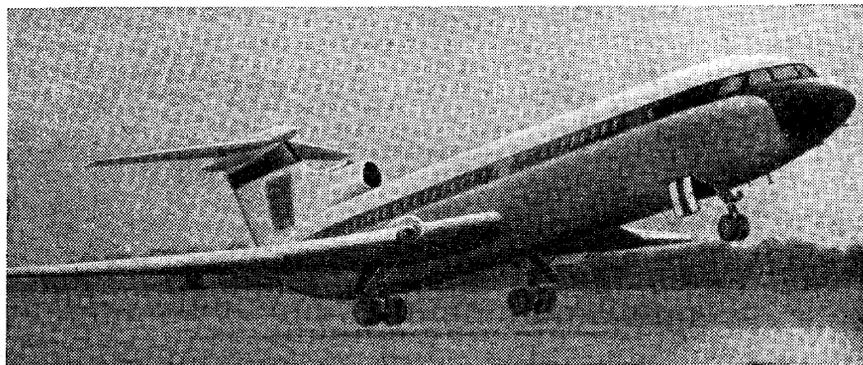


Рис. 7.11. Взлет самолета «Трайидент» (Англия)

движение самолета продолжается на основных колесах вплоть до момента отрыва (рис. 7.11) от поверхности аэродрома. Поэтому при расчете разбега можно принимать, что разбег на всем своем протяжении осуществляется при движении самолета на основных колесах.

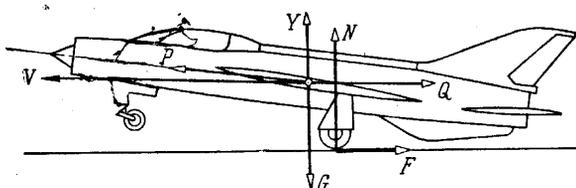


Рис. 8.11. Силы, действующие на самолет при разбеге

Во время разбега на самолет действуют следующие внешние силы (рис. 8.11): сила тяги  $P$ , сила веса  $G$ , аэродинамическая подъемная сила  $Y$ , сила лобового сопротивления  $Q$  и сила трения колес о поверхность аэродрома  $F$ . Предполагая, что сила тяги  $P$  направлена параллельно поверхности аэродрома, которая считается горизонтальной, т. е. пренебрегая малым углом ( $\alpha - \varphi$ ), уравнения движения самолета при разбеге запишем в виде

$$m\dot{V} = P - Q - F, \quad (38.11)$$

$$G - Y = N, \quad (39.11)$$

где  $N$  — сила реакции, действующая на колеса.

Сила трения, действующая на колеса:

$$F = fN,$$

где  $f$  — коэффициент трения колес о поверхность аэродрома.

Подставив это выражение в (38.11), а также раскрыв выражения подъемной силы  $Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2}$  и лобового сопротивления  $Q = c_x S \frac{\rho V^2}{2}$ , вместо (38.11) и (39.11) получим уравнение

$$\frac{1}{g} \dot{V} = \frac{P}{G} - f - \frac{S \rho V^2}{2G} (c_x - f c_y). \quad (40.11)$$

Аэродинамические коэффициенты входят в (40.11) в виде разности  $(c_x - f c_y)$ . Угол атаки крыльев при разбеге, следовательно, должен быть таким, чтобы эта разность принимала наименьшее возможное для данного самолета значение. С другой стороны, коэффициенты  $c_y$  и  $c_x$  связаны между собой полярой самолета. Нанеся на диаграмму поляры самолета<sup>1</sup> семейство прямых (рис. 9.11)

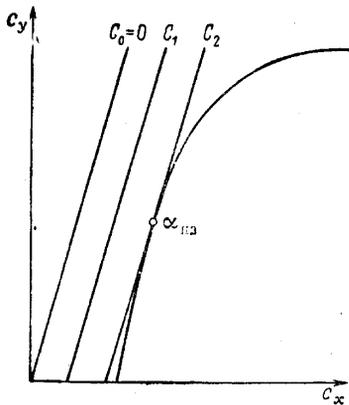


Рис. 9.11. Определение наиболее выгодного угла атаки при разбеге

$$c_x - f c_y = \text{const} = c,$$

замечаем, что *наивыгоднейший угол атаки*  $\alpha_{нв}$  при разбеге определится в точке касания одной из прямых  $c_x - f c_y = c$  и поляры. Для бетонного аэродрома коэффициент трения  $f$  в зависимости от состояния бетона лежит в пределах 0,035—0,05. Для грунтового аэродрома, покрытого травой,  $f = 0,07 \div 0,10$ .

Наивыгоднейший для разбега угол атаки  $\alpha_{нв}$  обычно получается небольшим, так что и значение  $c_y$  при разбеге невелико. Если бы отрыв самолета от поверхности аэродрома происходил при этом небольшом угле атаки, то скорость отрыва получилась бы большой, как это следует из равенства

$$G = c_y S \frac{\rho V_{отр}^2}{2}.$$

Длина разбега при этом получилась бы также большой. Поэтому для уменьшения скорости отрыва (а следовательно, и длины разбега) угол атаки перед самым отрывом увеличивают, так что в момент отрыва угол атаки становится приблизительно равным стояночному углу

$$\alpha \approx \alpha_{ст}.$$

Тогда скорость отрыва

$$V_{отр} = \sqrt{\frac{2G}{c_{уст} S \rho}}, \quad (41.11)$$

где  $c_{уст}$  соответствует стояночному углу атаки  $\alpha = \alpha_{ст}$ .

Произведя очевидную замену

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dL}$$

в уравнении (40.11) и проинтегрировав это уравнение, получим для длины разбега самолета выражение

<sup>1</sup> Следует пользоваться полярой с выпущенным шасси, а если разбег совершается с отклоненными закрылками, то надо брать соответствующую этому случаю поляру.

$$L_p = \frac{1}{2g} \int_0^{V_{\text{отр}}} \frac{dV^2}{\frac{P}{G} - f - \frac{S_p V^2}{2G} (c_x - f c_y)}. \quad (42.11)$$

Интеграл в (42.11) в общем случае находят графическим путем. В случае самолета с винтовыми двигателями, расположенными перед крыльями, необходимо учесть увеличение подъемной силы крыльев, обусловленное большими, чем скорость движения самолета, скоростями в струе винта. В первом приближении для таких самолетов скорость отрыва можно определять по эмпирической формуле

$$V_{\text{отр}} = \sqrt{\frac{2G}{c_{\text{уст}} \rho S \left(1 + 0,8 \frac{P_1}{G}\right)}}, \quad (43.11)$$

где  $P_1$  — сила тяги винтов при  $V=0$  (на месте).

Время разбега получим, интегрируя (40.11):

$$t_p = \frac{1}{g} \int_0^{V_{\text{отр}}} \frac{dV}{\frac{P}{G} - f - \frac{S_p V^2}{2G} (c_x - f c_y)}. \quad (44.11)$$

Для современных самолетов, особенно для тяжелых транспортных и бомбардировщиков с большой нагрузкой на крыло, длина разбега получается значительной. Большая длина разбега требует больших размеров аэродрома, а это усложняет и удорожает эксплуатацию самолетов; поэтому особое значение имеет вопрос об уменьшении длины разбега.

Как видно из (42.11), уменьшить длину разбега (оставаясь в рамках обычной конструктивной схемы самолета) можно двумя способами. С одной стороны, длина разбега  $L_p$  уменьшается при уменьшении скорости отрыва  $V_{\text{отр}}$ ; с другой стороны, длина разбега уменьшается при увеличении силы тяги  $P$ . Уменьшить скорость отрыва можно, увеличив коэффициент подъемной силы  $c_y$  при отрыве. Увеличение  $c_y$  можно получить, отклонив закрылки; правда, при отклонении закрылков, помимо  $c_y$ , увеличивается и коэффициент лобового сопротивления  $c_x$ , однако роль лобового сопротивления при разбеге сравнительно невелика, так что в конечном счете оказывается выгодным отклонять закрылки на угол около  $25-30^\circ$ . В качестве иллюстрации на рис. 10.11 приведены аэродинамические характеристики крыла с отклоненными и неотклоненными закрылками: как видно, отклоняя закрылки, можно существенно увеличить  $c_y$  при отрыве и тем самым уменьшить длину разбега.

Для увеличения силы тяги  $P$  при разбеге, помимо форсирования двигателя, иногда применяют специальные *стартовые ускорители* ракетного типа (часто пороховые), способные на короткое время развивать значительную силу тяги; после взлета стартовые ускорители обычно сбрасываются.

После отрыва самолета от поверхности аэродрома самолет совершает полет, одновременно набирая высоту и увеличивая скорость. Так как угол наклона траектории к горизонту  $\theta$  обычно невелик, можно приближенно принять  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ . Тогда уравнения движения самолета на втором этапе взлета (после отрыва) запишутся в виде

$$\dot{V} = \frac{P - Q}{G} - \sin \theta, \quad (45.11)$$

$$Y = G. \quad (46.11)$$

Заметим, что если не учитывать изменение кинетической энергии самолета при подъеме, то отношение  $\frac{P - Q}{G}$  равно синусу угла  $\theta_{уст}$  наклона траектории к горизонту. Поэтому уравнение (45.11) можно переписать в виде

$$\frac{i}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{11}{2g} \frac{dV^2}{dL} = \sin \theta_{уст} - \sin \theta. \quad (47.11)$$

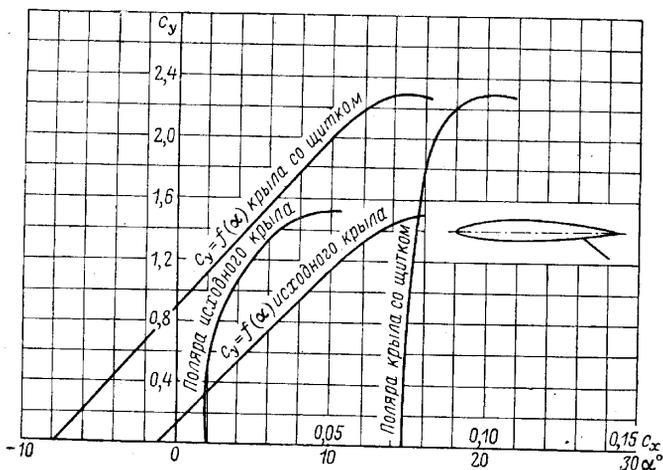
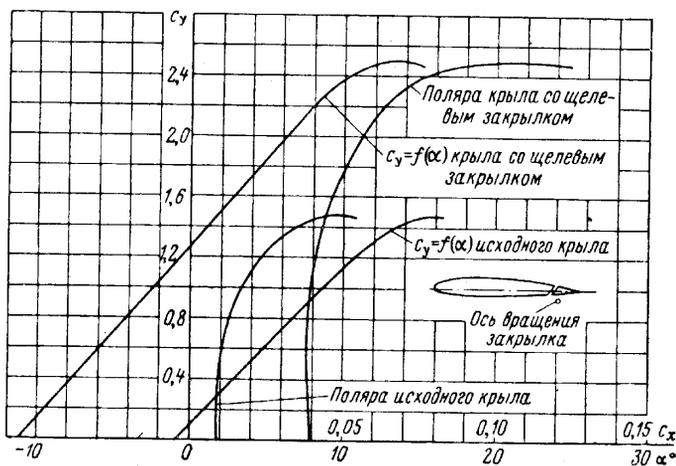


Рис. 10.11. Аэродинамические характеристики крыла с отклоненными и неотклоненными закрылками

Из (47.11) видно, что при неустановившемся наборе высоты (что и имеет место при взлете), при котором самолет одновременно разгоняется, угол  $\theta$  наклона траектории к горизонту получается меньшим, чем при установившемся подъеме с той же скоростью  $V$  по траектории. Объясняется это тем, что часть располагаемой мощности, которая при наборе высоты с постоянной скоростью по траектории затрачивалась бы целиком на подъем самолета, при неустановившемся подъеме тратится на увеличение кинетической энергии самолета — на его разгон.

Интегрируя (47.11) в пределах от квадрата скорости отрыва  $V_{\text{отр}}^2$  до квадрата скорости, соответствующей наиболее крутой траектории подъема  $V_0^2$  (см. гл. VI), получим

$$\frac{V_0^2 - V_{\text{отр}}^2}{2g} \int_0^{L_H} \sin \theta_{\text{уст}} dL - \int_0^{L_H} \sin \theta dL, \quad (48.11)$$

где  $L_H$  — длина участка набора высоты.

В силу сделанного замечания о малости угла  $\theta$  можно принять

$$\int_0^{L_H} \sin \theta dL \approx \int_0^{L_H} \text{tg } \theta dL = H_{\text{без}}.$$

Так как угол  $\theta$  на участке от отрыва до наиболее крутого подъема изменяется сравнительно мало, приближенно

$$\sin \theta_{\text{уст. ср}} \approx \frac{1}{2} (\sin \theta_{\text{уст. отр}} + \sin \theta_{\text{уст. max}}).$$

При таком допущении из (48.11) вытекает следующее выражение для длины участка пути, на котором самолет набирает высоту и разгоняется:

$$L_H = \frac{1}{\sin \theta_{\text{уст. ср}}} \left( \frac{V_0^2 - V_{\text{отр}}^2}{2g} + H_{\text{без}} \right). \quad (49.11)$$

Длина *взлетной дистанции*  $L_{\text{взл}}$  равна сумме длин разбега  $L_p$  и набора высоты  $L_H$ :

$$L_{\text{взл}} = L_p + L_H.$$

#### § 4. Расчет посадочной дистанции самолета

Для осуществления посадки самолет переводят в режим *планирования* (см. гл. VI), в процессе которого высота полета уменьшается. На планировании силу тяги двигателя уменьшают до наименьшей возможной, так что при расчете планирования можно считать силу тяги  $P=0$ .

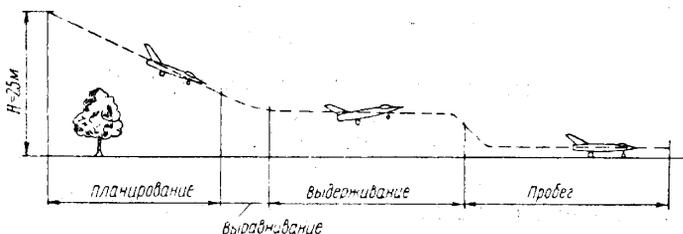


Рис. 11.11. Схема посадки самолета

После приближения самолета к земле траекторию полета *выравнивают*, переводя самолет в горизонтальный полет. Далее в течение некоторого времени самолет летит на небольшой высоте приблизительно параллельно поверхности аэродрома с постепенно уменьшающейся скоростью. Это *выдерживание* самолета необходимо для того, чтобы самолет приземлился с наименьшей возможной скоростью. В конце выдерживания самолет приземляется и совершает *пробег* по аэродрому вплоть до остановки; на этом процесс посадки самолета заканчивается. Схематически этапы посадки самолета показаны на рис. 11.11.

За начальный момент посадки принимают момент времени, соответствующий той высоте  $H_{\text{без}}$ , с которой самолет начинает планировать. На этапе планирования скорость самолета должна несколько превышать минимальную скорость, так как, во-первых, необходимо иметь некоторый запас скорости для создания перегрузки при выравнивании; во-вторых, запас скорости на планировании диктуется соображениями безопасности полета.

Скорость в начале выдерживания, таким образом, получается больше минимальной. По мере уменьшения скорости на участке выдерживания для соблюдения условия горизонтального полета — равенства веса и подъемной силы — приходится постепенно увеличивать угол атаки крыльев; скорость на участке выдерживания уменьшается вследствие торможения силой лобового сопротивления  $Q$ .

Увеличение коэффициента подъемной силы  $c_y$  лимитируется его максимальным значением  $c_{y \text{ max}}$ ; при дальнейшем увеличении угла атаки  $\alpha$  подъемная сила  $Y$  становится меньше веса  $G$  самолета, так как продолжающееся уменьшение скорости уже не компенсируется увеличением  $c_y$  и условие горизонтального полета  $Y = G$  не выдерживается. Возникшая разность  $(G - Y)$  создает ускорение, направленное вниз, и самолет приобретает вертикальную скорость  $V_y$ , проваливается (*параширует*) и, наконец, касается колесами земли.

Горизонтальная составляющая скорости самолета в момент окончания парашютирования — в момент касания колесами земли — называется *посадочной скоростью* самолета.

При дальнейшем движении самолета по поверхности аэродрома скорость уменьшается вследствие работы сил лобового сопротивления и сил трения колес о поверхность аэродрома; скорость самолета становится равной нулю, после того как весь запас кинетической энергии будет поглощен работой сил лобового сопротивления и сил трения.

Таким образом, процесс посадки самолета обычного типа состоит из пяти этапов:

- 1) планирования с заданной безопасной высоты  $H_{\text{без}}$ ;
- 2) выравнивания;
- 3) выдерживания;
- 4) парашютирования;
- 5) пробега по аэродрому.

Длину участка *планирования* можно найти по формуле (49.6):

$$L_{\text{пл}} = KH_{\text{без}}. \quad (50.11)$$

Угол наклона траектории планирования к горизонту<sup>1</sup> по (48.6)

$$\theta = \arctg \left( \frac{1}{K} \right). \quad (51.11)$$

Качество  $K$  при заходе на посадку обычно соответствует значению  $c_{y \text{ пл}} = (0,6 - 0,7) c_{y \text{ max}}$ .

В первом приближении при расчете *выравнивания* можно принять, что радиус кривизны траектории  $R$  постоянный; тогда путь, пройденный самолетом за время выравнивания;

$$S \approx \theta R.$$

Проекцию этого пути  $S$  на горизонтальную плоскость вследствие малости угла  $\theta$  можно принять равной самому пути:

$$L_{\text{выр}} \approx S = \theta R.$$

<sup>1</sup> В формуле (51.11) опущен знак минус, т. е. в отличие от гл. VI углы  $\theta$  при снижении считаются положительными.

Проектируя действующие на самолет силы на нормаль к траектории, получим

$$\frac{mV_{\text{пл}}^2}{R} = Y - G \cos \theta,$$

откуда найдем радиус кривизны траектории выравнивания

$$R = \frac{mV_{\text{пл}}^2}{Y - G \cos \theta}.$$

Полагая  $\cos \theta \approx 1$  и вводя коэффициент перегрузки

$$n_y = \frac{Y}{G} = \frac{c_{y\text{выр}} S q_{\text{пл}}}{c_{y\text{пл}} S q_{\text{пл}}},$$

где  $c_{y\text{пл}}$  — значение  $c_y$  на планировании,  $c_{y\text{выр}}$  — на выравнивании, придем к следующему выражению для длины участка выравнивания:

$$L_{\text{выр}} = \frac{V_{\text{пл}}^2}{gK} \frac{1}{\frac{c_{y\text{выр}}}{c_{y\text{пл}}} - 1}. \quad (52.11)$$

При расчетах можно принимать  $c_{y\text{выр}} = (0,85 - 0,90) c_{y\text{мах}}$ .

Уравнения движения самолета на участке *выдерживания* при  $P=0$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{g}{V} \dot{V} &= -Q, \\ Y &= G. \end{aligned}$$

Разделив почленно первое уравнение на второе и заметив, что

$$\dot{V} \equiv \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dL},$$

получим для длины участка выдерживания

$$L_{\text{выд}} = \frac{1}{2g} \int_{V_{\text{мин}}^2}^{V_{\text{пл}}^2} K dV^2. \quad (53.11)$$

Скорость полета на участке выдерживания приближенно можно принять равной скорости на участке планирования; поэтому интегрирование в (53.11) ведется в пределах  $V_{\text{мин}}^2 - V_{\text{пл}}^2$ .

Если принять во внимание, что в процессе выдерживания при больших углах атаки качество самолета  $K$  изменяется в узких пределах, и взять некоторое среднее значение  $K = \text{const}$ , получим приближенное выражение для участка длины выдерживания

$$L_{\text{выд}} \approx \frac{K}{2g} (V_{\text{пл}}^2 - V_{\text{мин}}^2), \quad (54.11)$$

где, следуя В. С. Пышнову, можно приближенно принимать  $K = K_{\text{мах}}$ .

При расчете *параютирования* будем исходить из следующих предположений, введенных Пышновым.

1. Касательное ускорение  $\dot{V}$  самолета в процессе парашютирования будем считать постоянным и равным  $\dot{V}$  в начальный момент парашютирования:

$$\dot{V} \approx \text{const} = \dot{V}_1 = -\frac{Q_1}{m}.$$

Такое допущение основывается на том, что в процессе парашютирования скорость самолета убывает, но увеличивается коэффициент лобового сопротивления  $c_x$  (так как угол атаки  $\alpha$  растет), так что в первом приближении сила лобового сопротивления  $Q$  остается примерно постоянной.

2. Коэффициент подъемной силы  $c_y$  при парашютировании примем неизменным и равным максимальному  $c_{y \max}$ . Это допущение можно сделать потому, что при парашютировании угол атаки  $\alpha$  изменяется в сравнительно узких пределах, так что и  $c_y$  изменяется не сильно.

3. Вертикальную скорость  $V_y$  самолета при парашютировании будем считать малой по сравнению с горизонтальной составляющей скорости  $V$ . У современных пассажирских самолетов вертикальная составляющая скорости при парашютировании  $V_y \approx 2 \div 4$  м/сек, в то время как горизонтальная составляющая скорости  $V_x \approx V = 60 \div 80$  м/сек, что и оправдывает сделанное допущение.

При принятых допущениях скорость самолета по траектории на этапе парашютирования определяется выражением

$$V = V_{\min} - g \frac{c_x}{c_y} t, \quad (55.11)$$

так как в начале парашютирования

$$Y = G \quad \text{и} \quad Q = \frac{c_x}{c_y} Y = \frac{c_x}{c_y} G.$$

Подъемная сила

$$Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2} = c_y S \frac{\rho}{2} \left( V_{\min} - g \frac{c_x}{c_y} t \right)^2 \approx c_y S \rho \frac{V_{\min}^2}{2} - \rho c_y S g \frac{c_x}{c_y} t V_{\min},$$

а разность

$$G - Y = \rho c_y S g \frac{c_x}{c_y} V_{\min} t. \quad (56.11)$$

Из уравнения движения при парашютировании

$$G - Y = m \frac{dV_y}{dt}$$

с учетом (56.11) найдем ускорение самолета по вертикали при парашютировании

$$\frac{dV_y}{dt} = \rho c_y S g \frac{c_x}{c_y} \frac{g}{G} V_{\min} t = \frac{2g^2}{V_{\min}} \frac{c_x}{c_y} t, \quad (57.11)$$

так как  $\rho S c_y = \frac{2G}{V_{\min}^2}$ .

Интегрируя уравнение (57.11) от  $t_1 = 0$ ,  $V_{y1} = 0$  до  $t$ ,  $V_y$ , найдем вертикальную скорость при парашютировании

$$V_y = \frac{g^2}{V_{\min}} \frac{c_x}{c_y} t^2. \quad (58.11)$$

Интегрируя далее уравнение (58.11), получим приращение высоты полета при парашютировании

$$H = \frac{g^2}{3V_{\min}} \frac{c_x}{c_y} t^3. \quad (59.11)$$

Из (59.11) найдем время парашютирования с заданной высоты  $H$

$$t = \sqrt[3]{\frac{3HV_{\min}c_y}{g^2c_x}}. \quad (60.11)$$

Наконец, по (55.11) с учетом (60.11) найдем величину *посадочной скорости*:

$$V_{\text{пос}} = V_{\min} \left[ 1 - \sqrt{\frac{3Hg}{V_{\min}^2} \left( \frac{c_x}{c_y} \right)^2} \right]. \quad (61.11)$$

Если принять в среднем высоту парашютирования  $H \approx 0,7$  м, качество самолета при посадке  $K \approx 5$ , минимальную скорость  $V_{\min} \approx 60$  м/сек, то по (61.11) получим

$$V_{\text{пос}} = 0,94 V_{\min}.$$

Эту цифру и принимают обычно в расчетах, определяя посадочную скорость по формуле

$$V_{\text{пос}} = 0,94 \sqrt{\frac{2G}{\rho S c_{y\max}}}. \quad (62.11)$$

После посадки самолет совершает пробег по аэродрому. При *пробеге* самолета на него действуют следующие силы:

- подъемная сила  $Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2}$ ,
- сила лобового сопротивления  $Q = c_x S \frac{\rho V^2}{2}$ ,
- сила тяжести (вес)  $G$ ,
- силы реакции колес  $N_1$  и  $N_2$ ,
- силы трения колес о поверхность аэродрома  $F_1$  и  $F_2$ .

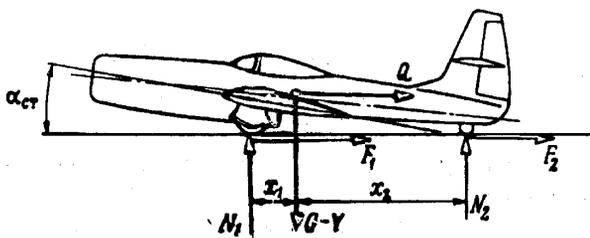


Рис. 12.11. Пробег самолета, у которого основные колеса расположены впереди центра тяжести

Посадка самолетов, имеющих шасси с основными колесами, расположенными впереди центра тяжести, и с вспомогательным колесом позади центра тяжести, осуществляется на три точки (рис. 12.11), так что угол атаки крыльев в течение всего пробега остается неизменным и равным стояночному углу атаки (углу между хордой крыла и горизонтальной плоскостью при стоянке самолета).

Самолеты, шасси которых имеют основные колеса, расположенные позади центра тяжести (в частности шасси велосипедного типа), и носо-

вое вспомогательное колесо, обычно садятся на основные колеса (рис. 13.11) и большую часть пути движутся на основных колесах; лишь в конце пробега летчик опускает нос самолета, так что пробег заканчивается на трех колесах. С некоторым приближением можно считать, что и в этом случае угол атаки при пробеге сохраняется неизменным и равным углу атаки при  $c_y = c_{y \max}$ . Таким образом, при расчете пробега независимо от типа шасси угол атаки можно считать постоянным.

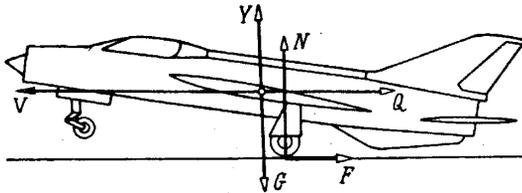


Рис. 13.11. Пробег самолета, у которого основные колеса расположены позади центра тяжести

Приведем уравнения движения самолета при пробеге:

$$m \frac{dV}{dt} = -Q - F_1 - F_2, \quad (63.11)$$

$$G - Y = N_1 + N_2. \quad (64.11)$$

Для самолетов, шасси которых имеет основные колеса позади центра тяжести, в соответствии с отмеченным выше в (63.11) и (64.11) следует положить  $F_1 = N_1 = 0$ . Для самолетов с хвостовым вспомогательным колесом вместо двух сил трения  $F_1$  и  $F_2$  передних и заднего колес удобно ввести одну результирующую *приведенную силу трения*  $F$ , величину которой найдем следующим образом.

Определим силы реакции колес  $N_1$  и  $N_2$ , предполагая для простоты, что момент аэродинамических сил относительно центра тяжести самолета равен нулю; тогда согласно рис. 12.11 получим

$$N_1 x_1 = N_2 x_2.$$

Решая это уравнение совместно с (64.11), найдем величину реакций колес:

$$N_1 = \frac{G - Y}{1 + \frac{x_1}{x_2}}; \quad N_2 = \frac{G - Y}{1 + \frac{x_2}{x_1}}.$$

Обозначив коэффициенты трения передних и заднего колес соответственно через  $f_1$  и  $f_2$ , получим суммарную силу трения

$$F = F_1 + F_2 = f_1 N_1 + f_2 N_2 = (G - Y) f_{\text{пр}}, \quad (65.11)$$

где *приведенный коэффициент трения*

$$f_{\text{пр}} = \frac{f_1}{1 + \frac{x_1}{x_2}} + \frac{f_2}{1 + \frac{x_2}{x_1}}. \quad (66.11)$$

Теперь независимо от типа шасси уравнение (63.11) можно написать в виде

$$m \frac{dV}{dt} = -Q - f_{\text{пр}} (G - Y), \quad (63a.11)$$

где в случае шасси с основными колесами позади центра тяжести самолета

$$f_{\text{пр}} = f_2,$$

а в случае шасси с основными колесами впереди центра тяжести самолета  $f_{\text{пр}}$  определяется выражением (66.11).

Интегрируя (63а.11), получим время пробега самолета

$$t = \frac{G}{g} \int_0^{V_{\text{пoc}}} \frac{dV}{Q + f_{\text{пр}}(G - Y)}$$

или

$$t = \frac{1}{g} \int_0^{V_{\text{пoc}}} \frac{dV}{(c_x - f_{\text{пр}}c_y) \frac{S\rho V^2}{2G} + f_{\text{пр}}} \quad (67.11)$$

Произведя в (63а.11) замену

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dV^2}{dL},$$

после интегрирования получим выражение для длины пробега

$$L_{\text{пр}} = \frac{1}{2g} \int_0^{V_{\text{пoc}}^2} \frac{dV^2}{(c_x - f_{\text{пр}}c_y) \frac{S\rho V^2}{2G} + f_{\text{пр}}} \quad (68.11)$$

Так как во время пробега обычно используют тормоза, то коэффициент трения при пробеге больше, чем при разбеге; при средней интенсивности торможения коэффициент трения можно принимать

$$f_{\text{пр}} = 0,20 \div 0,30.$$

Длину посадочной дистанции самолета получим суммированием выражений (50.11), (52.11), (53.11) и (68.11); при этом небольшой длиной пути, пройденного самолетом при парашютировании, можно пренебречь.

Интеграл, входящий в (68.11), может быть вычислен аналитически; тогда вместо (68.11) можно воспользоваться следующей формулой В. П. Ветчинкина [11]:

$$L_{\text{пр}} = \frac{V_1^2}{2gf_{\text{пр}}} B, \quad (69.11)$$

где  $V_1$  — скорость, с которой самолет мог бы лететь по горизонтали при угле атаки крыльев, равном стояночному углу в случае хвостового вспомогательного колеса и равном углу атаки при  $c_y = c_{y \text{ max}}$  в случае носового вспомогательного колеса.

Коэффициент

$$B = \frac{1}{\frac{1}{f_{\text{пр}}} \frac{c_x}{c_y} - 1} \ln \left[ 1 + \left( \frac{1}{f_{\text{пр}}} \frac{c_x}{c_y} - 1 \right) \frac{V_{\text{пoc}}^2}{V_1^2} \right]$$

определяется по рис. 14.11 в зависимости от параметров  $\frac{V_{\text{пос}}}{V_1}$  и  $\frac{1}{f_{\text{пр}}} \frac{c_x}{c_y}$ .

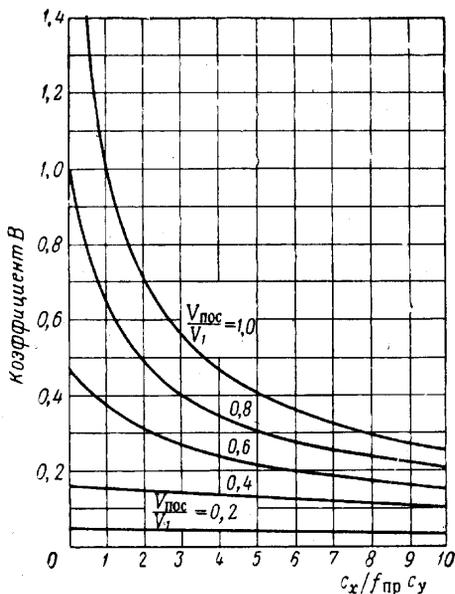


Рис. 14.11. График для расчета длины пробега самолета

## § 5. Способы улучшения взлетно-посадочных данных самолетов

Если проследить за тенденцией развития самолетостроения, то можно заметить, что, в то время как скоростные и высотные характеристики самолетов неуклонно улучшались, стартовые и посадочные характеристики так же неуклонно ухудшались. Объясняется это тем, что нагрузка на крыло  $G/S$  для увеличения максимальной скорости должна быть значительной; конструкторы использовали этот резерв повышения скорости и тем самым ухудшали стартовые и посадочные характеристики самолетов. Далее, чтобы снизить волновое сопротивление, постепенно утоньшали профиль крыльев, а крыльям придавали в плане стреловидную или треугольную форму. Обе эти тенденции снижали максимальный коэффициент подъемной силы  $c_{y \text{ max}}$  и, следовательно, также приводили к ухудшению стартовых и посадочных данных самолетов.

Если вредные с точки зрения стартовых данных тенденции увеличения нагрузки на крыло, уменьшения толщины профилей крыльев и применение стреловидных и треугольных крыльев в известной мере устранялись увеличением тяговооруженности самолетов, то с точки зрения посадочных данных такие противодействующие факторы отсутствовали.

Длина взлетной и посадочной дистанции современных скоростных самолетов, особенно посадочной, получается очень большой. Поэтому аэродромы приходится строить далеко от крупных населенных пунктов, так как в черте города практически невозможно найти свободную площадку длиной 4—6 км. Целесообразно поэтому принимать все возможные меры для уменьшения в первую очередь посадочной, а затем и взлетной дистанции самолетов. Большие потребные размеры аэродромов осложняют использование авиации, так как для создания таких аэродромов требуется значительное время, не говоря уже о стоимости строительства. Таким образом, проблема улучшения стартовых и посадочных данных самолетов — одна из задач, которая решается на современном этапе.

Простейшим средством некоторого сокращения длины посадочной и взлетной дистанции является осуществление посадки и взлета самолетов с отклоненными закрылками. При посадке отклоняют закрылки на наибольший угол (посадочное положение закрылков), а при взлете — на несколько меньший, так как при отклонении закрылков одновременно с ростом  $c_y$  увеличивается и  $c_x$ . При посадке увеличение  $c_x$  полезно, так как это приводит к дополнительному сокращению посадочной дистанции, но при взлете увеличение  $c_x$  вредно и приводит к ухудшению взлетных данных самолета; этим и объясняется меньший угол отклонения закрылков при взлете.

Иногда для сокращения посадочной дистанции применяют специальные воздушные тормоза в виде тормозных щитков на фюзеляже или на крыльях либо в виде тормозных парашютов, выпускаемых при посадке самолета. Этот способ торможения обладает тем недостатком, что по мере уменьшения скорости движения самолета уменьшается и тормозящая сила лобового сопротивления.

Эффективным средством сокращения посадочной дистанции является *реверсирование тяги*, т. е. изменение направления тяги на обратное. Если реверсирование тяги используется только при пробеге самолета, то вместо уравнения (63а.11) будем иметь

$$\frac{G}{2g} \frac{dV^2}{dL} = -P_{\text{рев}} - f_{\text{пр}} G - \frac{S_{\text{р}} V^2}{2} (c_x - f_{\text{пр}} c_y), \quad (63б.11)$$

где  $P_{\text{рев}}$  — реверсивная тяга.

Интегрируя (63б.11), получим

$$L_{\text{пр}} = \frac{1}{2g} \int_0^{V_{\text{пос}}^2} \frac{dV^2}{f_{\text{пр}} + \frac{P_{\text{рев}}}{G} + (c_x - f_{\text{пр}} c_y) \frac{S_{\text{р}} V^2}{2G}}. \quad (69а.11)$$

В общем случае, когда реверсивная тяга есть функция скорости, интеграл в (69а.11) можно определить графическим путем; если принять реверсивную тягу  $P_{\text{рев}}$  постоянной независимо от скорости, то интеграл можно взять аналитически. Выражение (69.11) остается в силе, а для коэффициента  $B$  в этом случае получается

$$B = \frac{1}{\frac{1}{f_{\text{пр}}} \frac{c_x}{c_y} - 1} \ln \left[ 1 + \frac{\frac{1}{f_{\text{пр}}} \frac{c_x}{c_y} - 1}{1 + \frac{1}{f_{\text{пр}}} \frac{P_{\text{рев}}}{G}} \frac{V_{\text{пос}}^2}{V_1^2} \right].$$

Реверсирование тяги позволяет заметно сократить длину пробега самолетов. Пусть, например,

$$\frac{G}{S} = 3924 \text{ н/м}^2 = 400 \text{ кг/м}^2; \quad V_{\text{пос}} = 70 \text{ м/сек} = 250 \text{ км/час};$$

$$c_x - f_{\text{пр}} c_y = -0,1; \quad f_{\text{пр}} = 0,3.$$

Для этих данных по формуле (69.11) получаем

$$L_{\text{пр}} = 980 \text{ м.}$$

Если при тех же данных применяется реверсирование тяги и  $P_{\text{рев}} = 0,5 G$ , то длина пробега снижается до

$$L_{\text{пр}} = 320 \text{ м.}$$

Как видим, получается существенное уменьшение длины пробега.

Описанные способы улучшения взлетных и посадочных данных самолетов не затрагивают принципиальную схему самолета; хотя они и полезны, однако радикально проблема улучшения взлетно-посадочных данных этими средствами не может быть решена. Поэтому в последнее время много внимания уделяется созданию самолетов, способных осуществлять вертикальные взлет и посадку («самолеты ВВП») или укороченные взлет и посадку («самолеты КВП») <sup>1</sup>. Самолеты первого типа в смысле взлетно-посадочных свойств почти не отличаются от вертолетов и в принципе могут висеть в воздухе, как вертолет. Длина разбега и пробега самолетов второго типа составляет несколько десятков метров.

Рассмотрим динамику самолета, *старт которого осуществляется с места* (без разбега по земле). Для того чтобы такой старт с места был

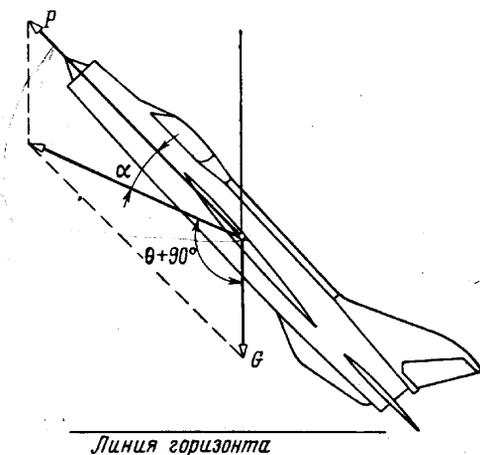


Рис. 15.11. Взлет самолета «с места»

возможен, сила тяги должна быть больше веса самолета. Самолет обычной схемы без поворота силы тяги может осуществить старт с места, если ему придать такое положение в пространстве, чтобы проекция силы тяги на вертикаль получилась больше, чем вес самолета (рис. 15.11). Если при этом равнодействующая сил тяги и веса будет составлять с хордой крыла некоторый угол, то во время движения самолета угол атаки не будет равным нулю. В первый момент угол атаки будет равен углу между направлением равнодействующей и хордой крыла. Угол атаки не должен превышать некоторого предельного значения, назначаемого из условий безопасности полета. В начале старта, в частности, должно удовлетворяться равенство (см. рис. 15.11)

$$P \sin \alpha = G \cos \theta = G \cos (\theta - \alpha),$$

откуда можно найти потребный угол тангажа самолета

$$\theta = \alpha + \arccos \left( \frac{P}{G} \sin \alpha \right). \quad (70.11)$$

Расчеты показывают, что для самолетов с умеренной тяговооруженностью порядка  $\frac{P}{G} = 1,3 \div 1,5$  требуются большие углы тангажа, около  $85-90^\circ$ , что неприемлемо для пассажирских самолетов.

<sup>1</sup> За рубежом такие самолеты называют «vtol» и «stol» по начальным буквам английских названий «вертикальный разбег и пробег» и «укороченный разбег и пробег».

Как видно из (70.11), чем больше  $\frac{P}{G}$ , тем меньший угол тангажа  $\vartheta$  требуется для старта с места. При малых  $\frac{P}{G}$  самолет, стартующий с места, будет набирать скорость и высоту медленно, и потребуется значительное время для набора безопасной скорости, на которой возможен переход к обычному полету. Все это время скорость будет невелика и управление самолетом будет затруднено, так как при малых скоростях полета обычные аэродинамические органы управления (рули) мало эффективны. Для обеспечения нужной устойчивости и управляемости самолета придется принимать специальные меры (например, оборудовать самолет «струйными» или «газовыми» рулями, эффективность которых не зависит от скорости полета).

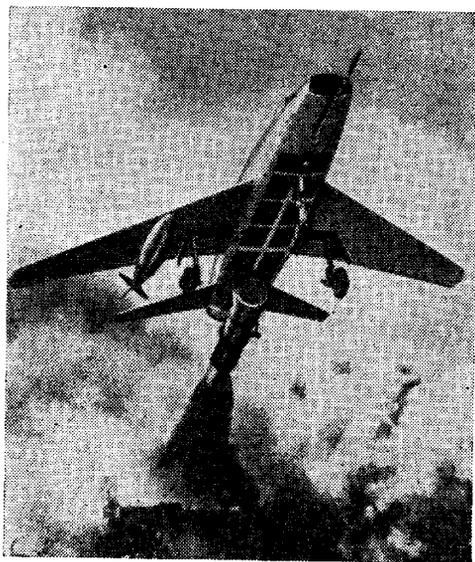


Рис. 16.11. Взлет беспилотного самолета с места с ускорителем (через несколько секунд после старта)

Задача старта с места заметно упрощается, если на самолете с ТРД установлены дополнительные *стартовые ускорители*, соответствующим образом ориентированные относительно оси самолета. На рис. 16.11 показан старт со специальной установки самолета F100 (США), оборудованного стартовым ускорителем. И в этом случае для получения составляющей скорости движения самолета по вертикали самолет должен быть установлен под некоторым углом тангажа, однако значительно меньшим, чем в случае самолета без ускорителя.

Если старт с места самолета с ускорителями осуществляется с нулевым углом атаки, то, полагая для простоты, что угол между осью самолета и хордой крыла  $\varphi=0$ , на основании рис. 17.11 найдем следующее выражение, определяющее потребный угол  $\varphi_y$  установки ускорителей относительно оси самолета:

$$\sin \varphi_y = \frac{G}{P_y} \cos \vartheta.$$

Так как при  $\alpha=0$  подъемная сила  $Y=0$ , то траектория старта с места будет прямолинейной; при выбранном  $\varphi_y$  расчет движения самолета

не представляет труда и выполняется интегрированием уравнения движения

$$m\dot{V} = P_y \cos \varphi_y + P - Q - G \sin \theta,$$

где  $\theta = \text{const}$ . Вес самолета и плотность воздуха при интегрировании этого уравнения можно считать постоянными; интеграл определяют методами графического интегрирования.

Применение стартовых ускорителей позволяет осуществлять вертикальный старт, но не решает проблему вертикальной посадки. Кроме того, этот способ имеет свои неудобства эксплуатационного характера (невозможен старт с неподготовленной площадки, где нет запасных стартовых ускорителей и др.). Можно отметить три главных пути решения проблемы КВП и ВВП.

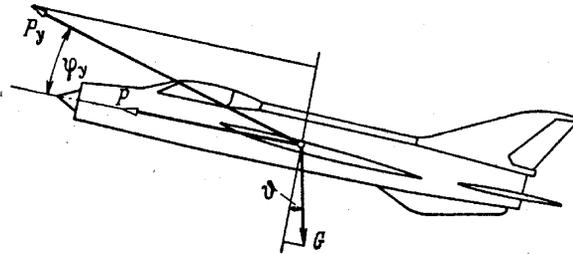


Рис. 17.11. К определению угла установки ускорителей

1. Известно, что при данном угле атаки подъемная сила пропорциональна квадрату скорости потока, набегающего на крыло. Если перед крыльями установлены воздушные винты, то скорость потока в струе винтов превышает скорость движения самолета; квадрат скорости потока в струе винта определяется по формуле

$$V_B^2 = V^2 + \frac{2}{\rho} \frac{P}{F},$$

где  $P$  — сила тяги винта;  
 $F = \frac{\pi D^2}{4}$  — ометаемая винтом площадь;  
 $D$  — диаметр винта;  
 $V$  — скорость движения самолета.

Если пренебречь влиянием на характер обтекания крыла ограниченности струи винтов и считать коэффициент подъемной силы  $c_y$  одинаковым по всей длине крыльев, то подъемная сила крыла с установленными перед ними винтами

$$Y = c_y \frac{S_\rho}{2} \left[ \left( 1 - \frac{S_{об}}{S} \right) V^2 + \frac{S_{об}}{S} \left( V^2 + \frac{2}{\rho} \frac{P}{F} \right) \right]$$

или

$$Y = c_y \frac{S_\rho}{2} \left( V^2 + \frac{S_{об}}{S} \frac{2}{\rho} \frac{P}{F} \right),$$

где  $S_{об}$  — площадь части крыльев, обдуваемой всеми винтами;  
 $S$  — вся площадь крыльев.

Отсюда видно, что если обеспечить достаточно большие значения отношения  $\frac{S_{об}}{S}$  и применить винты с большой нагрузкой  $P/F$  на оме-

таемую площадь, то в принципе можно реализовать большие скорости потока в струе винтов и, следовательно, большую подъемную силу крыльев при небольшой или даже при нулевой скорости  $V$  движения самолета. Если к тому же применить достаточно мощную механизацию крыльев, обеспечивающую высокие значения максимального коэффициента  $c_{y \max}$ , то возможно реализовать короткие и даже вертикальные взлет и посадку. На рис. 18.11 показан самолет, построенный по этой схеме.

Ясно, что описываемый путь укорочения старта и посадки годится только для самолетов с винтовыми двигателями, т. е. для самолетов с умеренными максимальными скоростями полета, так как сила тяги воздушного винта быстро убывает при увеличении скорости полета.

2. Весьма интересно направление, в котором конструкторы стремятся увеличить коэффициент подъемной силы  $c_y$  при неизменном угле атаки. Первым шагом по этому пути является механизация крыльев — устройство на крыльях отклоняющихся закрылков и предкрылков (или передней кромки крыльев). Перспективы увеличения  $c_y$  такими простыми средствами, однако, ограничены. В последние годы внимание конструкторов привлекает устройство, позволяющее в полете изменять угол стреловидности крыльев. На маршевом режиме полета такого самолета пилот устанавливает значительный угол стреловидности крыльев и тем самым снижает волновое сопротивление, а на режимах взлета и посадки уменьшает угол стреловидности до нуля, что повышает коэффициент максимальной подъемной силы. На рис. 19.11 показано такое решение вопроса на одном из советских самолетов.

Весьма интересным средством увеличения коэффициента подъемной силы является так называемый «реактивный закрылок», представляющий собой плоскую струю газа, выходящую из задней кромки крыла на всей ее длине (рис. 20.11): выбрасываемый газ забирается от ТРД, что, правда, несколько снижает силу тяги ТРД. Газовая струя представляет собой преграду потоку, набегающему на крыло; следствием этого является заметное увеличение коэффициента  $c_y$ . Лабораторные исследования, проведенные в зарубежных странах, показали, что таким способом удается получить коэффициент  $c_y$  порядка 10—15. Надо заметить, что энергетическая эффективность такого способа увеличения подъемной силы не вполне ясна, так как вмешательство во внешний поток, обтекающий крыло, требует, по-видимому, значительной затраты мощности.

Очень интересна (но пока еще недостаточно разработана) идея увеличения коэффициента подъемной силы  $c_y$  путем смещения точки схода потока с профиля крыла на его нижнюю поверхность. Расчеты и эксперименты, проводившиеся в аэродинамических лабораториях Англии, США, ФРГ и других стран, показали, что этим путем можно получить весьма высокие значения  $c_y$ .

3. Третье направление улучшения стартовых и посадочных свойств самолетов наиболее просто по своей идее и заключается в непосредственном использовании силы тяги (всей или части) в виде подъемной силы, компенсирующей силу тяжести. Этот способ применим в равной мере для самолетов с винтовыми и реактивными двигателями. На самолете с винтовыми двигателями на режимах взлета и посадки крылья вместе с установленными на них двигателями и воздушными винтами (или только двигателями) поворачиваются, так что винты вращаются приблизительно в горизонтальной плоскости; на режиме маршевого полета крылья занимают обычное (горизонтальное) положение, как видно из рис. 21.11 и 22.11. На самолетах с ТРД либо применяются специальные подъемные двигатели, устанавливаемые вертикально и работающие только при взлете и посадке; кроме того, имеются обычные маршевые двигатели, развивающие горизонтально направленную силу тяги

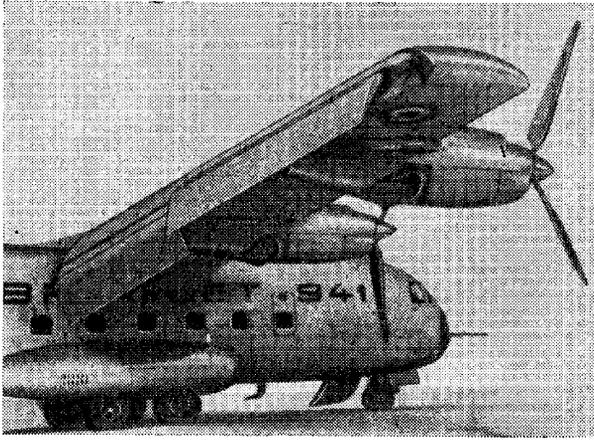


Рис. 18.11. Механизация крыла самолета «Брег-941»  
(Франция)

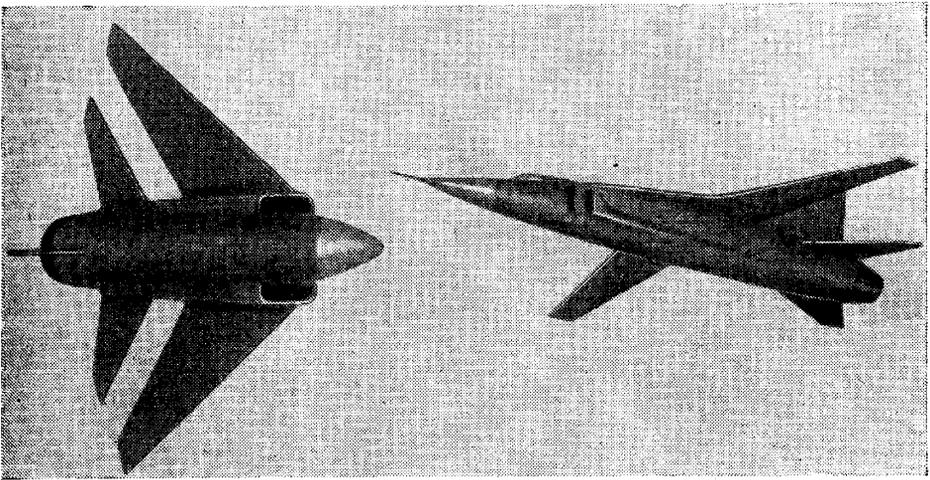


Рис. 19.11. Самолет с переменным в полете углом стреловидности крыльев

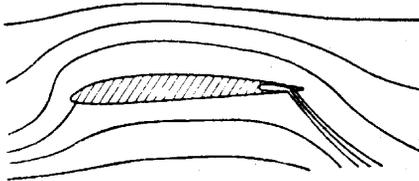


Рис. 20.11. Схема действия «реактивного закрылка»

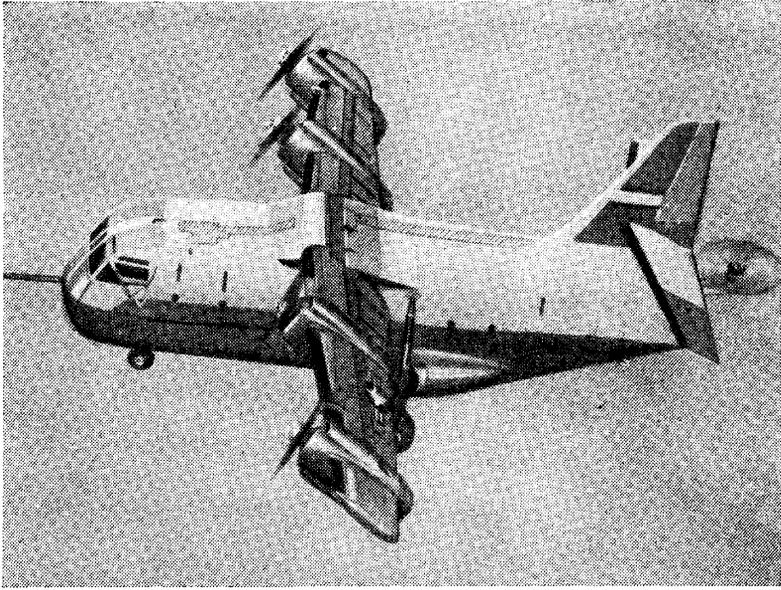


Рис. 21.11. Винтовой самолет с поворачивающимся крылом Воут XE-142 (США) (промежуточное положение крыльев)



Рис. 22.11. Винтовой самолет с поворачивающимися крыльями Воут XE-142 (США). Положение крыльев окончательное — стартовое или посадочное

(рис. 23.11, *a* и *б*), либо двигатели, установленные по оси самолета, но имеющие поворотные сопла, при помощи которых они получают силу тяги, направленную вверх (рис. 24.11).

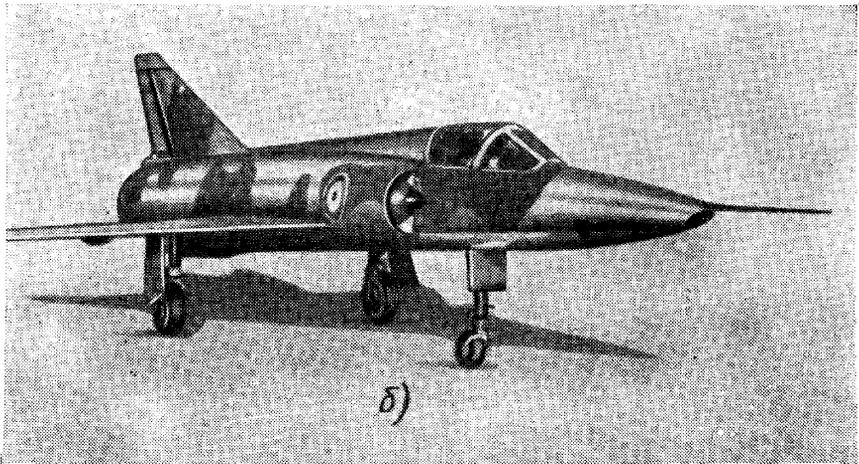
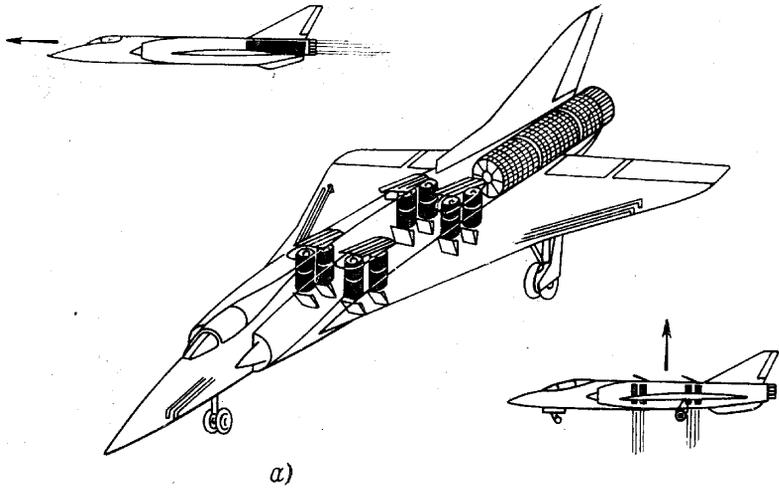


Рис. 23.11. Самолет «Мираж 3V» с подъемными и маршевыми ТРД (Франция)

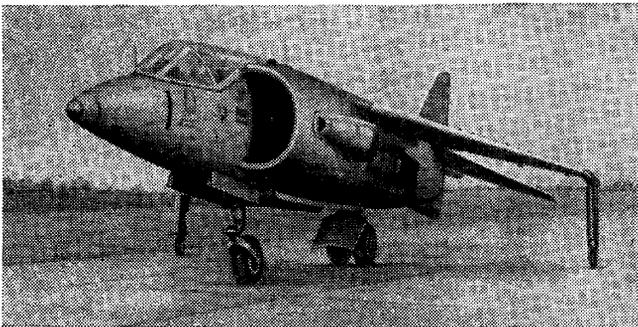


Рис. 24.11. Самолет Хаукер-Сиддли Р-1154 с поворотными соплами ТРД (Англия)

## ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА ОРБИТАЛЬНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

---

В этой части книги рассматриваются основы динамики полета летательных аппаратов, скорости которых соизмеримы с круговой (орбитальной) скоростью или превосходят ее. К числу таких летательных аппаратов относятся космические корабли, искусственные спутники Земли (ИСЗ), баллистические ракеты (БР) и ракетопланы.

### ГЛАВА XII

#### ДИНАМИКА ПАССИВНОГО ПОЛЕТА БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

Ограничимся в дальнейшем изучением плоских траекторий баллистических ракет. В этом случае весь полет баллистической ракеты можно разбить на *три участка*: активный полет, пассивный полет и полет в атмосфере Земли перед приземлением.

Полет на первом участке происходит под действием силы тяги двигателя  $P$ , силы тяжести  $G=mg$  и аэродинамических: подъемной силы  $Y$  и силы лобового сопротивления  $Q$ . В конце такого *активного полета* баллистическая ракета выходит на высоту  $H_1$  и приобретает скорость  $V_1$ , необходимую для дальнейшего пассивного полета по баллистической траектории. Если высота  $H_1$  достаточно велика, то плотность воздуха настолько мала, что аэродинамическими силами на протяжении пассивного полета (до входа в плотные слои атмосферы) можно пренебречь.

Второй участок полета баллистической ракеты — *баллистический* или *пассивный* — является основным: на этом участке полета ракета проходит большую часть своего пути. Единственными силами, практически действующими на ракету на пассивном участке полета, являются силы притяжения. Двигатель на этом участке полета не работает, так что расход топлива равен нулю и масса баллистической ракеты на пассивном участке полета остается постоянной.

Наконец, третий участок полета баллистической ракеты — *полет в атмосфере* — является продолжением пассивного полета вплоть до приземления баллистической ракеты. На этом последнем участке полета на ракету действуют силы притяжения и аэродинамические силы. Вообще говоря, на третьем участке полета на ракету может действовать и сила тяги; направление силы тяги в этом случае должно быть выбрано таким образом, чтобы уменьшить скорость полета ракеты в плотных слоях атмосферы во избежание чрезмерного нагрева и разрушения конструкции ракеты.

Проведенное выше разделение всего полета баллистической ракеты на три участка, конечно, носит условный характер. В действительности аэродинамические силы не равны нулю на всех трех участках полета, но на пассивном участке величина аэродинамических сил весьма мала по сравнению с силой притяжения. В некоторых случаях (например при выполнении маневра) и на втором участке полета на ракету может действовать сила тяги. Мы, однако, примем указанное выше разделение и начнем с исследования движения баллистической ракеты на основном пассивном участке полета.

## § 1. Расчет полета баллистической ракеты на пассивном участке

Будем исходить из следующих предположений, упрощающих решение задачи.

1. Притяжением всех других небесных тел, кроме Земли (Солнца, Луны и т. д.), будем пренебрегать; другими словами, будем рассматривать задачу двух тел.

2. Движение ракеты будем рассматривать происходящим в неизменной плоскости, проходящей через центр земного шара, — в плоскости большого круга.

3. Поверхность Земли будем считать сферической, центр притяжения — расположенным в геометрическом центре земного шара, ускорение силы тяжести — обратно пропорциональным квадрату расстояния  $r$  ракеты от центра притяжения. Другими словами, будем исходить из кеплерова поля тяготения; впоследствии мы оценим погрешности, связанные с этим допущением.

4. Аэродинамическими силами, действующими на ракету на пассивном участке, будем пренебрегать.

5. В качестве инерциальной системы отсчета примем полярную систему координат с полюсом в центре земного шара. За начальное направление  $r_и$  примем направление на точку  $\Pi$  перигея<sup>1</sup>. Угол  $\chi$  истинной аномалии будем отсчитывать против часовой стрелки от направления на перигей (рис. 1.12).

Движение Земли вокруг Солнца, следовательно, будем считать прямолинейным и равномерным. Это вполне допустимо, если принимать во внимание, что полет ракеты исчисляется сотнями секунд, в то время как период обращения Земли вокруг Солнца равен одному году или  $\sim 32 \cdot 10^6$  сек; участок земной орбиты во время полета баллистической ракеты поэтому можно принять прямолинейным.

В принятой системе координат положение ракеты в каждый момент времени определяется радиусом  $r$ , проведенным из полюса к центру масс ракеты  $P$ , и углом  $\chi$  — истинной аномалией (см. рис. 1.12). Как показано в гл. II, в такой инерциальной системе отсчета баллистическая траектория представляет собой дугу эллипса.

Нашей ближайшей задачей является определение дальности полета баллистической ракеты на пассивном участке и времени, затрачиваемого на движение по баллистической траектории. Под *дальностью полета*

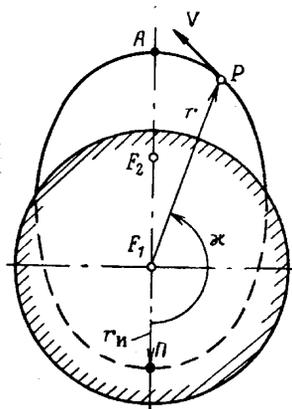


Рис. 1.12. Полярная инерциальная система координат

<sup>1</sup> Точка перигея  $\Pi$  рассматривается чисто формально, так как она расположена внутри земного шара.

условимся понимать длину проекции баллистической траектории на земную поверхность, т. е.

$$L = r_3(\alpha_2 - \alpha_1) = r_3\alpha_k,$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы, соответствующие началу и концу пассивного полета (рис. 2.12), а величина  $\alpha_k$  равна их разности.

Выведенные в § 4 гл. II формулы позволяют непосредственным вычислением найти величины  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ; удобнее, однако, вывести аналитические выражения для дальности и времени полета по баллистической траектории.

Как известно, уравнение эллипса (см. гл. II) в полярных координатах с полюсом в одном из фокусов эллипса имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \alpha}, \quad (1.12)$$

где  $p$  — параметр;  $\alpha$  — истинная аномалия;  $e$  — эксцентриситет орбиты.

Определяя из уравнения (1.12)  $\cos \alpha$ , получим

$$\cos \alpha = \frac{p - r}{re}.$$

Искомая дальность в угловых координатах, очевидно,

$$\alpha_k = \alpha_2 - \alpha_1 = \arccos \frac{p - r_2}{r_2 e} - \arccos \frac{p - r_1}{r_1 e}, \quad (2.12)$$

где  $r_1$  соответствует началу полета по баллистической траектории, а  $r_2$  — концу полета.

Переписав уравнение (2.12) в виде

$$\alpha_k + \arccos \frac{p - r_1}{r_1 e} = \arccos \frac{p - r_2}{r_2 e}$$

и перейдя от углов к косинусам углов, получим

$$\frac{p - r_1}{r_1 e} \cos \alpha_k - \sin \alpha_k \sin \left( \arccos \frac{p - r_1}{r_1 e} \right) = \frac{p - r_2}{r_2 e}.$$

Используя известную тригонометрическую формулу

$$\arccos \alpha = \arcsin \sqrt{1 - \alpha^2},$$

предыдущее выражение можно представить в несколько ином виде:

$$\frac{p - r_1}{r_1} \cos \alpha_k - \frac{\sqrt{r_1^2 e^2 - (p - r_1)^2}}{r_1} \sin \alpha_k = \frac{p - r_2}{r_2}. \quad (3.12)$$

В гл. II получены выражения (73.2) и (74.2) для определения эксцентриситета  $e$  и параметра эллипса  $p$ :

$$\left. \begin{aligned} e &= \sqrt{1 - (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1) \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1}, \\ p &= \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1^2 r_3, \end{aligned} \right\} \quad (3a.12)$$

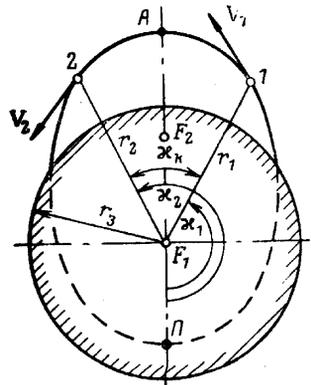


Рис. 2.12. К определению дальности полета баллистической ракеты

где скорость  $V_1$  отнесена к круговой скорости  $V_{кр0}$  на уровне моря, т. е.

$$\bar{V}_1 = \frac{V_1}{V_{кр0}}.$$

Приняв во внимание эти выражения, а также и то, что

$$\bar{r}_1 = \frac{r_1}{r_3} \quad \text{и} \quad \bar{r}_2 = \frac{r_2}{r_3},$$

коэффициенты уравнения (3.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{p-r_1}{r_1} &= \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1 - 1, \\ \frac{p-r_2}{r_2} &= \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}_2} - 1, \\ \frac{\sqrt{r_1^2 e^2 - (p-r_1)^2}}{r_1} &= \bar{V}_1 \bar{r}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1. \end{aligned}$$

Вместо уравнения (3.12) при этом получим следующее:

$$a \sin x_k + b \cos x_k = c, \quad (4.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a &= \bar{V}_1^2 \bar{r}_1 \sin \theta_1 \cos \theta_1, \\ b &= 1 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1 \cos^2 \theta_1, \\ c &= 1 - \bar{V}_1^2 \frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}_2} \cos^2 \theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Решим уравнение (4.12) относительно неизвестной  $x_k$ , воспользовавшись тригонометрическими формулами:

$$\sin x_k = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x_k}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x_k}{2}}; \quad \cos x_k = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x_k}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x_k}{2}}.$$

При помощи этих формул уравнение (4.12) приводится к квадратному уравнению относительно  $\operatorname{tg} \frac{x_k}{2}$ :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x_k}{2} - \frac{2a}{b+c} \operatorname{tg} \frac{x_k}{2} + \frac{c-b}{c+b} = 0. \quad (6.12)$$

Решение этого уравнения:

$$\operatorname{tg} \frac{x_k}{2} = \frac{1}{b+c} (a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2})$$

или после подстановки развернутых выражений (5.12)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x_k}{2} &= \frac{1}{\frac{2}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} - 1 - \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2}} \times \\ &\times \left[ \operatorname{tg} \theta_1 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta_1 + \left( \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2} - 1 \right) \left( \frac{2}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} - 1 - \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2} \right)} \right]. \quad (7.12) \end{aligned}$$

В частности, если в (7.12) положить  $\bar{r}_2=1$ , получим величину угла  $\alpha_k$  в момент приземления ракеты (без учета влияния аэродинамических сил на характер движения на участке приземления, т. е. в плотных слоях атмосферы)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} - 1 - \bar{r}_1} \times \left[ \operatorname{tg} \theta_1 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta_1 + (\bar{r}_1 - 1) \left( \frac{2}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} - 1 - \bar{r}_1 \right)} \right]. \quad (7a.12)$$

Дальность полета по баллистической траектории в км

$$L = r_3 \alpha_k = 6371 \alpha_k, \quad (8.12)$$

где радиус земного шара  $r_3 \approx 6371$  км.

Выражение (7a.12), полученное из точного выражения (7.12), носит приближенный характер, ибо оно не учитывает аэродинамические силы, действующие на участке приземления. Однако так как дальность полета по баллистической кривой значительно больше расстояния, которое ракета проходит на активном участке и на участке приземления, выражением (7a.12) можно пользоваться для приближенной оценки всей дальности полета баллистической ракеты; погрешности при этом должны получаться небольшие. Ниже изложены методы расчета пути, который ракета проходит за время полета на активном участке полета, и пути, проходимого при входе ракеты в плотные слои атмосферы перед приземлением. Дальность полета баллистической ракеты, рассчитанная с учетом особенностей движения на активном участке и на участке перед приземлением, конечно, получается более точной, чем по (7a.12).

Для более точного расчета всей дальности полета баллистической ракеты требуется знать длину пути, который ракета проходит на пассивном участке полета от конца активного участка до начала участка входа в плотные слои атмосферы перед приземлением. Формула (7.12) применима и в этом случае, причем в нее надо подставить значение  $r_2$ , соответствующее началу входа ракеты в плотные слои атмосферы. Если принять высоту полета, на которой надо уже учитывать аэродинамические силы, равной  $H=80$  км, то соответствующее значение  $\bar{r}_2=1,0126$  и (7.12) принимает вид

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{\frac{2}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} - 1 - 0,9874 \bar{r}_1} \times \left[ \operatorname{tg} \theta_1 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta_1 + (0,9874 \bar{r}_1 - 1) \left( \frac{2}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1} - 1 - 0,9874 \bar{r}_1 \right)} \right]. \quad (9.12)$$

Выведем выражение для определения максимальной высоты полета ракеты.

На основании рис. 3.12 максимальный радиус траектории

$$r_{\max} = a + ae = a(1 + e), \quad (10.12)$$

где  $a$  — большая полуось эллипса.

Относя все величины к радиусу Земли  $r_3$ , получим

$$\bar{r}_{\max} = \frac{a}{r_3} (1+e) = \bar{a} (1+e)$$

и  $\bar{a} = \frac{a}{r_3}$ .

Используя формулы (73.2) и (74.2), а также приняв во внимание, что для эллипса

$$p = a(1-e^2),$$

из этих выражений найдем, что

$$\bar{a} = \frac{a}{r_3} = \frac{\bar{r}_1}{2 - \bar{r}_1 \bar{V}_1^2}. \quad (11.12)$$

Выражение (10.12) теперь можно переписать в виде

$$\bar{r}_{\max} = \bar{r}_1 \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1 (2 - \bar{r}_1 \bar{V}_1^2)}}{2 - \bar{r}_1 \bar{V}_1^2}. \quad (12.12)$$

Так как

$$\bar{r}_{\max} = \frac{r_3 + H_{\max}}{r_3} = 1 + \frac{H_{\max}}{r_3},$$

то определение максимальной высоты полета  $H_{\max}$  не представляет труда.

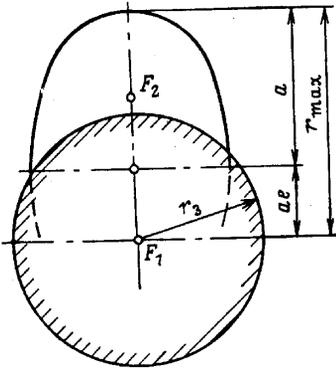


Рис. 3.12. К определению максимальной высоты полета баллистической ракеты

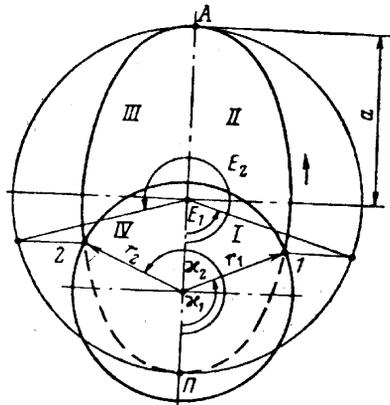


Рис. 4.12. К определению эксцентриситетной аномалии на баллистической траектории

Перейдем к определению *времени полета* ракеты по баллистической траектории, воспользовавшись для этого уравнением Кеплера (82.2):

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} (t - \tau) = E - e \sin E,$$

где  $\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} = M$  — средняя аномалия,  $E$  — эксцентриситетная аномалия,  $e$  — эксцентриситет орбиты. Время  $(t - \tau)$  отсчитывается от момента прохождения через перигей.

Так как время полета из точки 1 в точку 2 (рис. 4.12)

$$(t_2 - \tau) - (t_1 - \tau) = t_2 - t_1 = t_6,$$

время  $t_6$  полета по баллистической траектории найдем по формуле

$$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{a}} t_6 = E_2 - E_1 - e(\sin E_2 - \sin E_1). \quad (13.12)$$

Угол  $E_1$ , соответствующий началу полета по баллистической траектории, лежит в первой<sup>1</sup> четверти, а угол  $E_2$ , соответствующий концу пассивного полета, — в четвертой; следовательно, косинусы обоих углов положительны,  $\sin E_1$  положителен,  $\sin E_2$  отрицателен.

По формуле (79.2)

$$a - r = ae \cos E,$$

откуда

$$\cos E = \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r}{a} \right).$$

Далее:

$$\sin E_2 = \sqrt{1 - \cos^2 E_2} = -\frac{1}{ae} \sqrt{-a^2(1 - e^2) + 2ar_2 - r_2^2} \quad (14.12)$$

и

$$\sin E_1 = \sqrt{1 - \cos^2 E_1} = \frac{1}{ae} \sqrt{-a^2(1 - e^2) + 2ar_1 - r_1^2}. \quad (15.12)$$

Следовательно, вычитаемое в выражении (13.12) получается

$$e(\sin E_2 - \sin E_1) = -\frac{1}{a} \left[ \sqrt{-a^2(1 - e^2) + 2ar_2 - r_2^2} + \sqrt{-a^2(1 - e^2) + 2ar_1 - r_1^2} \right].$$

На основании формул (3а.12) и (11.12)

$$a^2(1 - e^2) = r_3^2 \frac{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1^3}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1},$$

$$2ar_2 = r_3^2 \frac{2\bar{r}_1 \bar{r}_2}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}, \quad 2ar_1 = r_3^2 \frac{2\bar{r}_1^2}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1},$$

так что

$$-a^2(1 - e^2) + 2ar_2 - r_2^2 = \frac{r_3^2 \bar{r}_1}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1} \times$$

$$\times \left[ 2\bar{r}_2 - \frac{\bar{r}_2^2}{\bar{r}_1} (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1) - \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1^2 \right],$$

$$-a^2(1 - e^2) + 2ar_1 - r_1^2 = \bar{V}_1^2 \sin^2 \theta_1 \bar{r}_1^2 \frac{r_3^2 \bar{r}_1}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}$$

<sup>1</sup> Так как углы эксцентрической аномалии  $E$  отсчитываются от направления на перигей.

и предыдущее выражение принимает вид

$$e(\sin E_2 - \sin E_1) = -\frac{r_3}{a} \sqrt{\frac{\bar{r}_1}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}} \times \\ \times \left[ \sqrt{2\bar{r}_2 - \frac{\bar{r}_2^2}{\bar{r}_1} (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1) - \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1^2 + \bar{V}_1 \sin \theta_1 \bar{r}_1} \right].$$

Напишем два следующих тождества:

$$E_1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - E_1 \right) \right] = \frac{\pi}{2} - \arcsin (\cos E_1),$$

$$E_2 = \frac{3}{2} \pi + \arcsin \left[ \sin \left( E_2 - \frac{3}{2} \pi \right) \right] = \frac{3}{2} \pi + \arcsin (\cos E_2).$$

Приняв во внимание приведенные выше выражения для  $\cos E$ , из этих тождеств найдем

$$E_1 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[ \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r_1}{a} \right) \right], \quad (16.12)$$

$$E_2 = \frac{3}{2} \pi + \arcsin \left[ \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r_2}{a} \right) \right]. \quad (17.12)$$

Следовательно, разность

$$E_2 - E_1 = \pi + \arcsin \left[ \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r_2}{a} \right) \right] + \arcsin \left[ \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{r_1}{a} \right) \right].$$

Подставив полученные результаты в уравнение (13.12) и приняв во внимание, что  $\mu = g_0 r_3^2$ ,  $g_0 = 9,81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ ,  $r_3 \approx 6371 \text{ км}$ , после несложных преобразований придем к следующему выражению для времени полета по баллистической траектории (для удобства время дается в минутах):

$$t_6 = 13,45 \frac{\bar{r}_1}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1} \left\{ \sqrt{\frac{\bar{r}_1}{2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}} \times \right. \\ \times \left[ \pi - \arcsin \left( \frac{1 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}{\sqrt{1 - \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1 (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1)}} \right) - \right. \\ \left. - \arcsin \left( \frac{2 \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1} - 1 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1}{\sqrt{1 - \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1 (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1)}} \right) \right] + \\ \left. + \sqrt{2\bar{r}_2 - \frac{\bar{r}_2^2}{\bar{r}_1} (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1) - \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1^2 + \bar{V}_1 \sin \theta_1 \bar{r}_1} \right\}. \quad (18.12)$$

Формула (18.12) для расчета времени полета по баллистической траектории несколько громоздка; для приближенных расчетов можно получить более простую формулу. С этой целью запишем выражение для времени полета в виде

$$t_6 = \int_0^{x_k} \frac{dx}{\dot{x}}$$

и подставим в это выражение производную  $\dot{x}$  согласно формулам (63.2)

$$\dot{x} = \frac{c_1}{r^2} = \frac{r_1 V_1 \cos \theta_1}{r^2} = \frac{V_{\text{кп}0}}{r_3} \frac{\bar{r}_1 \bar{V}_1 \cos \theta_1}{\bar{r}^2}.$$

Тогда

$$t_6 = \frac{r_3}{V_{\text{кп}0} \bar{r}_1 \bar{V}_1 \cos \theta_1} \int_0^{x_k} \bar{r}^2 dx.$$

Расстояние ракеты от центра Земли  $r = r_3 + H$  мало отличается от радиуса Земли  $r_3$ ; поэтому, осреднив величину  $\bar{r}^2$ , можно вынести ее за знак интеграла и получить простую формулу

$$t_6 = \frac{r_3 \bar{r}_{\text{ср}}^2 x_k}{V_{\text{кп}0} \bar{r}_1 \bar{V}_1 \cos \theta_1},$$

где

$$\bar{r}_{\text{ср}}^2 = (\bar{r}_1^2 + \bar{r}_{\text{max}}^2) \xi.$$

Если при определении  $\bar{r}_{\text{ср}}$  взять среднюю арифметическую величину, то  $\xi = 0,5$ . Поскольку  $\bar{r}^2$  не является линейной функцией от  $x$ , то коэффициент  $\xi$  должен получиться несколько иным. Хорошее совпадение с результатами точных расчетов получается, если принять  $\xi = 0,535$ . В итоге для  $t_6$ , выраженного в минутах, приходим к следующей приближенной формуле:

$$t_6 \approx 7,2 \frac{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_{\text{max}}^2}{\bar{V}_1 \cos \theta_1 \bar{r}_1} x_k. \quad (19.12)$$

Как видно из (7.12), величина угла  $x_k$  зависит от скорости полета  $V_1$  в конце активного участка, от угла наклона траектории  $\theta_1$  в конце активного участка полета, а также от высоты полета в конце активного участка.

Для каждой заданной скорости полета  $V_1$  в конце активного участка полета угол  $\theta_1$  и высоту  $H_1$  (или значение  $r_1$ ) можно выбирать независимо друг от друга. Существует, очевидно, такое значение  $\theta_{\text{opt}}$ , которое для каждой заданной  $r_1$  обеспечивает максимум дальности при данной  $V_1$ . Наоборот, для каждой заданной дальности, т. е. для заданных  $x_k$  и  $r_1$ , существует оптимальный угол наклона  $\theta_{\text{opt}}$  траектории к горизонту, при котором получается наименьшая начальная скорость полета  $V_{1\text{min}}$ . Найдем этот оптимальный угол  $\theta_{\text{opt}}$  и соответствующую скорость  $V_{1\text{min}}$ <sup>1</sup>.

Определяя из уравнения (4.12) величину  $\bar{V}_1^2$ , получим квадрат скорости (безразмерной), необходимой для обеспечения заданной дальности полета:

$$\bar{V}_1^2 = \left( \frac{1 - \cos x_k}{\bar{r}_1} \right) \frac{1 + \text{tg}^2 \theta_1}{\frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_2} - \cos x_k + \sin x_k \text{tg} \theta_1}. \quad (20.12)$$

<sup>1</sup> Термин «оптимальный» в действительности условный. Если исходить из минимальной затраты топлива на полет с заданной полной дальностью, то, как показано ниже, получается определенное сочетание оптимальных значений  $r_1$ ,  $V_1$  и  $\theta_1$ .

При определенном значении  $\bar{r}_1$ , взяв производную от (20.12) по  $\text{tg } \theta_1$  и приравняв ее нулю, найдем оптимальное значение  $\text{tg } \theta_{1\text{opt}}$ , обеспечивающее при заданных  $\alpha_k$  и  $r_1$  минимальную начальную скорость полета ракеты  $V_{1\text{min}}$ :

$$\text{tg } \theta_{1\text{opt}} = -\frac{\frac{\bar{r}_1}{r_2} - \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k} + \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{r}_1/\bar{r}_2 - \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k}\right)^2} \quad (21.12)$$

(знак «+» выбран из условия  $\text{tg } \theta_{\text{opt}} > 0$ ).

Минимальную начальную скорость получим, подставив (21.12) в (20.12).

Особенно простой результат получается, если рассматривать движение ракеты на всем участке полета как пассивное, т. е. предполагать,

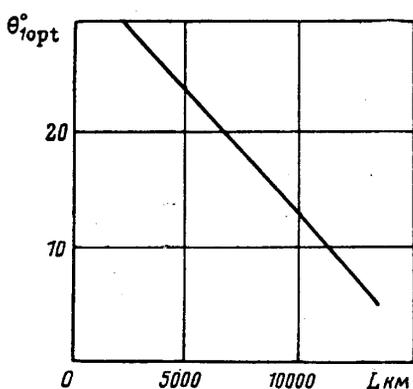


Рис. 5.12. Зависимость угла  $\theta_{1\text{opt}}$  от дальности полета баллистической ракеты

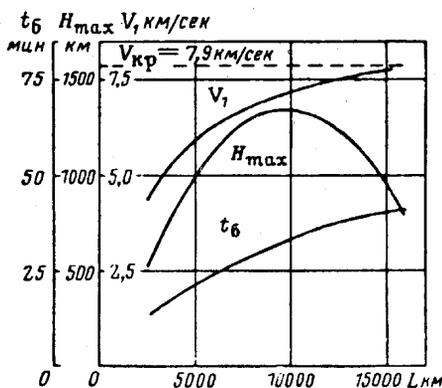


Рис. 6.12. Характеристики баллистической траектории ракеты

что начальные параметры траектории  $V_1$  и  $\theta_1$  ракета получает на высоте  $H_1=0$  в результате приложения мгновенного импульса тяги, и не принимать во внимание аэродинамические силы, действующие на ракету.

Полагая в (21.12)  $\bar{r}_2 = r_1 = 1$ , получим

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta_{1\text{opt}} &= -\frac{1 - \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k} + \sqrt{1 + \left(\frac{1 - \cos \alpha_k}{\sin \alpha_k}\right)^2} = \\ &= \frac{1 - \sin \frac{\alpha_k}{2}}{\cos \frac{\alpha_k}{2}} = \text{tg} \left( \frac{\pi - \alpha_k}{4} \right). \end{aligned}$$

Как видим, оптимальный угол наклона траектории к горизонту  $\theta_{1\text{opt}}$  при сделанном предположении получился

$$\theta_{1\text{opt}} = \frac{\pi - \alpha_k}{4}.$$

Подставив это значение в (20.12) и положив в этом выражении  $r_2 = \bar{r}_1 = 1$ , найдем минимальную начальную скорость

$$\bar{V}_1^2 = \frac{\sin \frac{x_k}{2}}{\cos^2 \left( \frac{\pi - x_k}{4} \right)}. \quad (22.12)$$

Далее по (12.12), положив  $\bar{r}_1 = 1$ , определим максимальную высоту полета (относительный радиус  $\bar{r}_{\max}$ ), а по (19.12) — время полета:

$$\bar{r}_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_{1 \text{opt}} (2 - \bar{V}_1^2)}}{2 - \bar{V}_1^2}, \quad (23.12)$$

$$t = 7,2 \frac{1 + \bar{r}_{\max}^2}{\bar{V}_1 \cos \theta_{1 \text{opt}}} x_k. \quad (24.12)$$

Результаты расчетов, проведенных по формулам (21.12) — (24.12), представлены на рис. 5.12 и 6.12, которые можно использовать для предварительной оценки кинематических характеристик полета баллистической ракеты. Из этих графиков видно, что с увеличением дальности полета угол наклона траектории к горизонту  $\theta_{1 \text{opt}}$  в конце активного участка полета баллистической ракеты убывает, а скорость в конце активного участка, как и следовало ожидать, увеличивается. При небольшой дальности полета траектория баллистической ракеты получается крутой, при больших дальностях — более пологой. Примерный вид траекторий полета баллистических ракет малой и большой дальности показан на рис. 7.12.

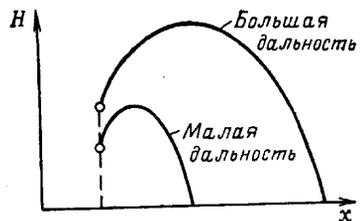


Рис. 7.12. Схематическое изображение траекторий полета баллистических ракет малой и большой дальности

## § 2. Влияние суточного вращения Земли на дальность полета баллистической ракеты [23]

Выражение (7.12) определяет дальность полета баллистической ракеты на пассивном участке полета в угловых единицах в инерциальной системе отсчета; эта формула поэтому справедлива и в том случае, когда необходимо принимать во внимание суточное вращение Земли. Однако начальная скорость баллистической ракеты  $V_1$  относительно поверхности Земли в конце активного участка уже не будет равна начальной скорости в инерциальной системе координат, как это было в том случае, когда суточное вращение Земли не принималось во внимание. В выражение (7.12) надо подставить абсолютную начальную скорость (скорость в инерциальной системе отсчета), равную векторной сумме скорости  $\bar{V}$  ракеты относительно поверхности Земли в конце активного участка полета и скорости  $\bar{W}$  перемещения точки  $A$  сферы с центром в центре Земли, в которой находится ракета в начале пассивного полета, относительно инерциальной системы отсчета (рис. 8.12).

Угловая скорость  $\omega_z$  вращения Земли, как известно, приводит к возникновению переносных и поворотных ускорений, которые войдут в уравнения движения баллистической ракеты, составленные в неинерциальной системе отсчета. Эти ускорения, выводящие ракету из плоскости большого круга, на участке полета в атмосфере могут парироваться соответствующими аэродинамическими силами, так что при учете суточного вращения Земли полет баллистической ракеты в плоскости

большого круга на активном участке надо считать происходящим в общем случае с креном и скольжением. Следовательно, для того чтобы баллистическая траектория лежала в плоскости большого круга, вектор абсолютной скорости на пассивном участке полета должен лежать в той же плоскости.

Составляющая абсолютной скорости, нормальная к плоскости большого круга, в этом случае должна быть равна нулю. Другими словами, необходимо уравновесить нормальную к плоскости большого круга составляющую скорости  $W$  перемещения точки  $A$  в инерциональной системе

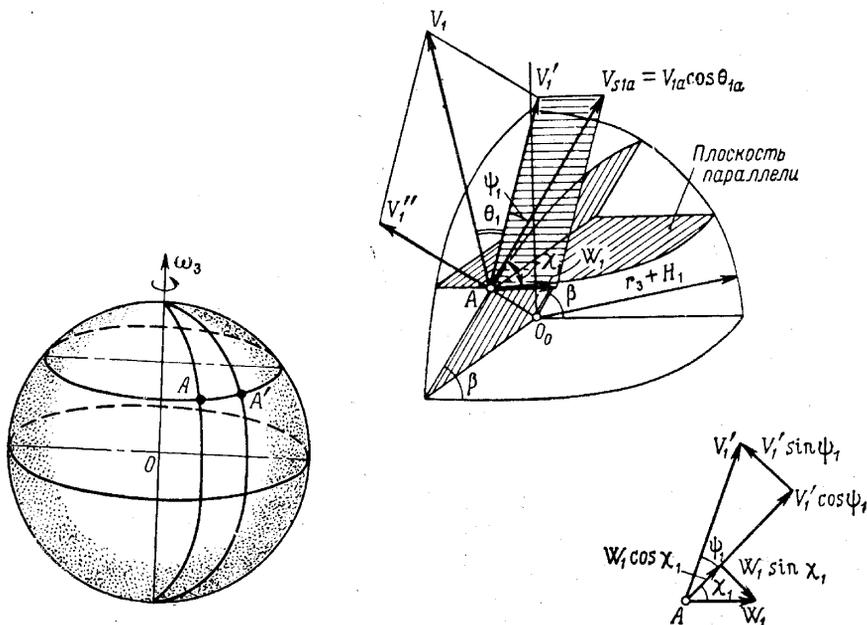


Рис. 8.12. Перемещение пункта вылета  $A$  баллистической ракеты, обусловленное суточным вращением Земли

Рис. 9.12. К определению траектории полета БР с учетом суточного вращения Земли

отсчета. Уравновесить ее можно нормальной составляющей относительной скорости ракеты в конце активного участка полета. Отсюда видно, что плоскость, в которой лежит вектор  $\bar{V}_1$  в конце активного участка полета, должна составлять с плоскостью большого круга, содержащей баллистическую траекторию, некоторый угол  $\psi$  (рис. 9.12).

Проекция скорости ракеты относительно Земли в конце активного участка полета на плоскость, касательную к сфере радиуса

$$r_1 = r_s + H_1,$$

равна

$$V_1' = V_1 \cos \theta_1,$$

а вертикальная составляющая этой скорости

$$V_1'' = V_1 \sin \theta_1.$$

Проектируя  $V_1'$  на плоскость большого круга, содержащую баллистическую траекторию, и на нормаль к этой плоскости, получим

$$V_{1s}' = V_1' \cos \psi_1, \quad V_{1n}' = V_1' \sin \psi_1.$$

Так как проекция вектора скорости на местную горизонтальную плоскость в конце активного участка не совпадает с касательной к параллели в точке  $A$ , а составляет с ней угол  $\chi_1$ <sup>1</sup>, то проекции скорости  $W_1$  перемещения точки  $A$  в инерциальной системе отсчета на плоскость большого круга и на нормаль к ней равны

$$W_{1s} = W_1 \cos \chi_1, \quad W_{1n} = W_1 \sin \chi_1.$$

Приравнивая составляющие скорости  $V_{1n}'$  и  $W_{1n}$ , получим уравнение для определения угла  $\psi_1$

$$V_1' \sin \psi_1 = W_1 \sin \chi_1.$$

Из этого уравнения получаем

$$\sin \psi_1 = \frac{W_1}{V_1'} \sin \chi_1 = \frac{W_1 \sin \chi_1}{V_1 \cos \theta_1}. \quad (25.12)$$

Скорость перемещения точки  $A$  в инерциальной системе отсчета

$$W_1 = \omega_3 r_1 \cos \sigma_1, \quad (26.12)$$

где угловая скорость вращения Земли

$$\omega_3 \approx \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 0,0000728 \text{ 1/сек}, \quad (27.12)$$

$$r_1 = r_3 + H_1$$

и  $\sigma_1$  — угол широты точки  $A$ .

Подставив (26.12) в (25.12), получим вместо (25.12)

$$\sin \psi_1 = \frac{\omega_3 r_1 \sin \chi_1 \cos \sigma_1}{V_1 \cos \theta_1}. \quad (25a.12)$$

Абсолютную скорость ракеты  $\overline{V_{1a}}$  в точке  $A$  найдем как векторную сумму скорости ракеты относительно поверхности Земли  $V_1$  в точке  $A$  и скорости  $W_1$  перемещения точки  $A$  вследствие суточного вращения Земли. Так как нормальные к плоскости большого круга составляющие  $V_1$  и  $W_1$  уравновешиваются, то

$$V_{1a}^2 = V_{s1a}^2 + V_1^2 \sin^2 \theta_1.$$

Проекция абсолютной скорости на касательную к большому кругу в точке  $A$  (см. рис. 9.12)

$$V_{s1a} = V_{1a} \cos \theta_{1a}.$$

С другой стороны, эта же проекция может быть получена как сумма проекций скоростей  $V_1$  и  $W_1$  на касательную к большому кругу:

$$V_{s1a} = V_1 \cos \theta_1 \cos \psi_1 + W_1 \cos \chi_1.$$

Приняв во внимание (25a.12), предыдущее выражение можно переписать в следующем виде:

$$V_{s1a} = \sqrt{V_1^2 \cos^2 \theta_1 - \omega_3^2 r_1^2 \sin^2 \chi_1 \cos^2 \sigma_1} + \omega_3 r_1 \cos \chi_1 \cos \sigma_1. \quad (28.12)$$

Угол наклона  $\theta_{1a}$  вектора абсолютной скорости ракеты в точке  $A$  к плоскости местного горизонта определится из выражения

$$\operatorname{tg} \theta_{1a} = \frac{V_1 \sin \theta_1}{V_{s1a}}$$

или

$$\operatorname{tg} \theta_{1a} = \frac{V_1 \sin \theta_1}{\sqrt{V_1^2 \cos^2 \theta_1 - \omega_3^2 r_1^2 \sin^2 \chi_1 \cos^2 \sigma_1} + \omega_3 r_1 \cos \chi_1 \cos \sigma_1}. \quad (29.12)$$

<sup>1</sup> Ранее (см. стр. 68) этот угол был обозначен через  $\psi_c$ .

Далее

$$V_{1a}^2 = V_{s1a}^2 + V_1^2 \sin^2 \theta_1$$

или с учетом (28.12)

$$V_{1a}^2 = V_1^2 + \omega_3^2 r_1^2 \cos^2 \sigma_1 \cos^2 2\chi_1 + 2\omega_3 r_1 \cos \chi_1 \cos \sigma_1 \sqrt{V_1^2 \cos^2 \theta_1 - \omega_3^2 r_1^2 \sin^2 \chi_1 \cos^2 \sigma_1}. \quad (30.12)$$

При определении дальности полета ракеты с учетом вращения Земли (этот учет, как видим, сводится к чисто кинематическим построениям) в формулу (7.12) следует подставить  $\theta_{1a}$  и  $V_{1a}$  в соответствии с (29.12) и (30.12); при этом получится дальность полета (в угловых единицах) относительно *инерциальной* системы отсчета.

Задавая различные значения угла  $\chi_1$ , т. е. реализуя движение ракеты в различных направлениях относительно плоскости параллели, проходящей через точку  $A$ , вследствие

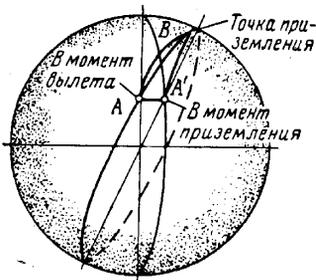


Рис. 10.12. Перемещение пункта вылета в инерциальной системе координат за время полета баллистической ракеты

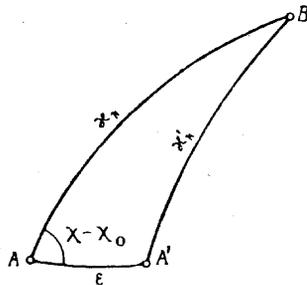


Рис. 11.12. К определению дальности полета БР по ортодромии с учетом суточного вращения Земли

суточного вращения Земли будем получать различную дальность полета, измеренную по дуге большого круга в инерциальной системе отсчета. Заметим, что за время полета баллистической ракеты точка  $A$ , которую условно назовем *пунктом вылета*, переместится в пространстве вследствие суточного вращения Земли в некоторую новую точку  $A'$  (рис. 10.12).

Практический интерес представляет оценка дальности полета баллистической ракеты, измеренной по дуге большого круга (ортодромии) от точки  $A'$  (положение пункта вылета в момент приземления ракеты).

Длину дуги  $\chi_k$ , соединяющей точки  $A'$  и  $B$ , можно найти из сферического треугольника  $ABA'$  (рис. 11.12). Сторона  $AB$  этого треугольника представляет собой дальность полета ракеты  $\chi_k$  в инерциальной системе отсчета, определяемую при помощи (7.12).

Для решения сферического треугольника необходимо знать длину дуги большого круга  $\epsilon$  и величину угла<sup>1</sup>  $(\chi - \chi_0)$  между дугами большого круга  $\chi_k$  и  $\epsilon$ . Долгота точки  $A$  в инерциальной системе отсчета за время полета  $t_6$  баллистической ракеты изменится на величину

$$\delta = \omega_3 t_6.$$

Пусть (рис. 12.12) треугольник  $OAA'$  лежит в плоскости параллели. Тогда величину  $\epsilon$  можно найти из треугольника  $O_0AA'$ , плоскость которого наклонена к плоскости экватора под углом  $\beta$ . Так как треугольники  $OAA'$  и  $O_0AA'$  равнобедренные, то  $AC = CA'$ , и мы получаем

$$AC = r \cos \sigma \sin \frac{\delta}{2} = r \sin \frac{\epsilon}{2}.$$

Отсюда угол

$$\epsilon = 2 \arcsin \left( \cos \sigma \sin \frac{\delta}{2} \right). \quad (31.12)$$

<sup>1</sup> Здесь  $\chi_0$  — угол между касательными к дуге большого круга, соединяющей точки  $A$  и  $A'$ , и к параллели в точке  $A$ .

Далее, как видно из рис. 12.12,

$$CD = AE = r \sin \sigma,$$

$$O_0D = OC = r \cos \sigma \cos \frac{\delta}{2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{CD}{O_0D} = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\cos \delta/2}. \quad (32.12)$$

Выражение (32.12) определяет тангенс угла наклона  $\beta$  плоскости большого круга, проходящей через точки  $A$  и  $A'$ , к плоскости экватора через широту  $\sigma$  пункта вылета и угол  $\delta$ . Выведем выражение  $\operatorname{tg} \beta$  через широту  $\sigma$  и угол  $\chi_0$  между касательной к дуге большого круга, проходящей через  $A$  и  $A'$ , и касательной к параллели в пункте вылета. С этой целью рассмотрим сферический треугольник  $ACD$  (рис. 13.12), сторона которого

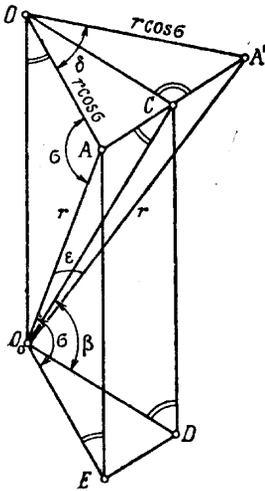


Рис. 12.12. Определение угла  $\epsilon$

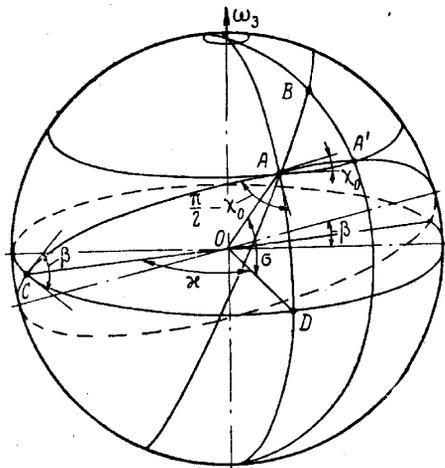


Рис. 13.12. К определению угла  $\beta$  между плоскостью траектории и плоскостью экватора

$AC$  лежит в плоскости большого круга, наклоненной к плоскости экватора под углом  $\beta$ . По известной формуле сферической тригонометрии

$$\cos \beta = \cos \sigma \cos \chi_0$$

или, переходя от  $\cos \beta$  к  $\operatorname{tg} \beta$ ,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \sigma \cos^2 \chi_0}}{\cos \sigma \cos \chi_0}. \quad (33.12)$$

Исключая из (32.12) и (33.12) угол  $\beta$ , после несложных преобразований приходим к выражению, определяющему угол  $\chi_0$  между касательной к дуге большого круга, проходящей через  $A$  и  $A'$ , и касательной к параллели в точке  $A$ :

$$\sin \chi_0 = \frac{\sin \sigma \sin \frac{\delta}{2}}{\sqrt{1 - \cos^2 \sigma \sin^2 \frac{\delta}{2}}}. \quad (34.12)$$

Обращаясь теперь к сферическому треугольнику  $AA'B$ , изображенному на рис. 11.12, по формуле сферической тригонометрии найдем:

$$\cos \chi'_k = \cos \chi_k \cos \epsilon + \sin \chi_k \sin \epsilon \cos (\chi - \chi_0). \quad (35.12)$$

Наконец, исключив из (35.12) углы  $\varepsilon$  и  $\chi_0$  при помощи полученных выше выражений, придем к следующему окончательному выражению:

$$\begin{aligned} \cos \chi_k' &= \cos \chi_k (\sin^2 \sigma_1 + \cos^2 \sigma_1 \cos \delta_1) + \\ &+ \sin \chi_k \cos \sigma_1 [\cos \chi_1 \sin \delta_1 + \sin \sigma_1 \sin \chi_1 (1 - \cos \delta_1)], \end{aligned} \quad (36.12)$$

где  $\delta = \omega_3 t_6$  и  $t_6$  — время полета по баллистической траектории в сек и  $\sigma$  — угол широты пункта вылета.

Угол  $\chi_k'$ , определяемый выражением (36.12), и дает искомую дальность полета баллистической ракеты относительно пункта вылета по ортодромии.

Приведем, опуская выводы, еще одно выражение для дальности полета баллистической ракеты с учетом суточного вращения Земли:

$$\cos \chi_k' = \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 \cos \nu + \sin \sigma_1 \sin \sigma_2. \quad (36a.12)$$

В этом выражении  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — широта пункта вылета и пункта приземления баллистической ракеты, а  $\nu$  — географическая долгота пункта приземления относительно пункта вылета.

Выражение (36a.12) может оказаться удобным при определении дальности полета, потребной для попадания в ту или иную точку земной поверхности.

Напомним, что во всех рассуждениях этой главы мы до сих пор принимали Землю за шарообразное тело, в то время как в действительности Земля есть тело овальной формы с большой полуосью, лежащей в плоскости экватора. Учет этого обстоятельства вносит поправки в предыдущие рассуждения; оценка поправок, связанных с несферичностью Земли, дана в следующем параграфе.

**Рассмотрим теперь порядок расчета дальности полета ракеты с учетом суточного вращения Земли.**

Из предварительного расчета траектории полета баллистической ракеты на активном участке должны быть известны: скорость полета  $V_1$  в конце активного участка, угол наклона траектории к горизонту  $\theta_1$  и высота полета  $H_1$  в этот момент времени. Кроме того, должна быть задана географическая широта пункта вылета ракеты  $\sigma_1$  и указано направление стрельбы, т. е. задан угол  $\chi_1$  между касательной к дуге большого круга, в плоскости которого происходит полет ракеты, и касательной к параллели в пункте вылета.

Расчет можно вести в такой последовательности.

1. Для заданного угла стрельбы  $\chi_1$  при известных  $\sigma_1$ ,  $V_1$ ,  $r_1$ ,  $\theta_1$  по формуле (29.12) определяют величину  $\operatorname{tg} \theta_{1a}$  и находят угол  $\theta_{1a}$  наклона абсолютной скорости ракеты в конце активного участка полета к плоскости местного горизонта.

2. По формуле (30.12) находят абсолютную скорость  $V_{1a}$  в конце активного участка полета.

3. Подставив в формулу (7.12) вместо  $V_1$  и  $\theta_1$  найденные значения  $V_{1a}$  и  $\theta_{1a}$ , определяют  $\operatorname{tg} \frac{\chi_k}{2}$  и соответственно дальность полета по баллистической траектории  $\chi_k$  относительно пункта вылета, положение которого в пространстве предполагается неизменным.

4. Подставив вместо  $V_1$  и  $\theta_1$  в формулу (12.12) найденные значения  $V_{1a}$  и  $\theta_{1a}$ , определяют максимальный радиус  $\bar{r}_{\max}$  и максимальную высоту полета ракеты  $H_{\max}$ .

5. По приближенной формуле (19.12) находят время полета баллистической ракеты  $t_6$  мин [конечно, можно пользоваться и точной формулой (18.12)].

6. Определяют перемещение пункта вылета за время полета ракеты  $t_6$ , обусловленное суточным вращением Земли:

$$\delta = 60 \omega_3 t_6.$$

7. По формуле (36.12) находят искомую дальность полета относительно пункта вылета с учетом вращения Земли (дальность полета в угловых единицах). Дальность полета в км будет

$$L = r_3 \chi'_k = 6371 \chi'_k.$$

В качестве примера на рис. 14.12 представлены результаты расчета дальности полета баллистической ракеты по приведенным выше формулам, для различных углов  $\chi_1$ , т. е. в зависимости от направления стрельбы. При расчете начальная относительная скорость ракеты в конце активного участка полета была  $V_1 = 6050$  м/сек, начальный угол наклона траектории к горизонту  $\theta_1 = 30,6^\circ$ , начальная высота полета  $H_1 = 200$  км. Этому случаю на рис. 14.12 соответствует дальность полета, рассчитанная без учета суточного вращения Земли,  $L_0 = 6000$  км. Широта пункта вылета принималась  $\sigma_1 = 45^\circ$ .

Как видно из рис. 14.12, наибольшая дальность полета баллистической ракеты получается при стрельбе в направлении вращения Земли, т. е. с запада на восток<sup>1</sup>. Выигрыш в дальности по сравнению с дальностью при стрельбе с востока на запад получается значительный. Это объясняется тем, что при стрельбе с запада на восток абсолютная скорость ракеты в конце активного участка полета получается большей, чем при стрельбе в обратном направлении. Изменение долготы пункта вылета в инерциальной системе отсчета за время полета ракеты, неблагоприятное при стрельбе с запада на восток, не перекрывает увеличения дальности, получающегося благодаря росту абсолютной скорости полета в конце активного участка.

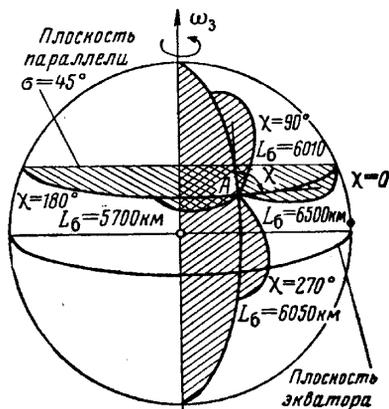


Рис. 14.12. Дальность полета БР с учетом  $\omega_3$  при различном направлении стрельбы

### § 3. Погрешности, к которым приводит кеплерово приближение. Гравитационный потенциал Земли. Уравнение Клеро

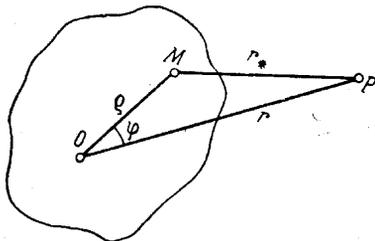
В предыдущем параграфе сила тяготения, действующая на тело, принималась направленной к центру Земли и обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра Земли до тела. Такому закону, строго говоря, подчиняются только притягивающие тела сферической формы, плотность которых постоянна или зависит только от расстояния между данной точкой тела и центром сферы.

В действительности Земля представляет собой тело овальной формы, так что даже независимо от того, что плотность Земли не вполне подчиняется приведенному выше закону, представление о тождественности действительного поля тяготения Земли кеплерову полю тяготения можно рассматривать лишь как первое приближение к действительности. Нашей задачей является выяснение ошибок в конечном результате, к которым приводит замена действительного поля тяготения кеплеровым.

<sup>1</sup> Этот вывод не является общим и справедлив для ракет большой дальности полета; при небольшой дальности стрельба с востока на запад может получаться более выгодной. В этом последнем случае выигрыш в дальности от перемещения пункта вылета, обусловленного суточным вращением Земли, оказывается большим, чем снижение дальности вследствие уменьшения начальной абсолютной скорости ракеты.

Силу притяжения какого-либо тела можно найти, если известен потенциал тяготения этого тела в точках пространства, окружающего тело; выведем поэтому выражение для потенциала тяготения в произвольной точке  $P$  окружающего пространства для тела произвольной формы, чтобы затем перейти к потенциалу Земли, которая представляет собой тело, отличающееся от сфероида.

Пусть (рис. 15.12) точка  $O$  — центр массы притягивающего тела и  $M$  — какая-либо точка этого тела с массой  $dM$ . Обозначим расстояние от центра масс  $O$  до точки  $P$  через  $r$  и до точки  $M$  — через  $\rho$ . Потенциал  $dV$  тяготения элементарной массы  $dM$  можно записать в виде



$$-dV = \frac{G dM}{r_*},$$

где  $r_* = MP$  — расстояние между точками  $P$  и  $M$ ;  $G$  — гравитационная постоянная.

Из треугольника  $OPM$  получаем

$$MP^2 = r_*^2 = r^2 \left( 1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{r^2} \right),$$

так что предыдущее равенство принимает вид

$$-dV = \frac{G dM}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{r^2}}}. \quad (37.12)$$

Разложим в ряд выражение  $\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{r^2}}}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{\rho}{r} \cos \varphi + \frac{\rho^2}{r^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n P_n(\cos \varphi), \quad (38.12)$$

где  $P_n$  — полином Лежандра  $n$ -й степени:

$$P_n(S) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dS^n} (S^2 - 1)^n, \quad (S \equiv \cos \varphi). \quad (39.12)$$

Производя по этой формуле вычисления, получим

$$P_0(S) = 1,$$

$$P_1(S) = \frac{1}{2} \frac{d(S^2 - 1)}{dS} = S,$$

$$P_2(S) = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dS^2} (S^4 - 2S^2 + 1) = \frac{1}{8} (12S^2 - 4) = \frac{3S^2 - 1}{2}$$

и т. д.

Принимая во внимание полученные выражения, уравнение (37.12) можно переписать в более простом приближенном виде:

$$-dV = \frac{G dM}{r} \left[ 1 + \frac{\rho}{r} \cos \varphi + \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} \left( \frac{\rho}{r} \right)^2 + \dots \right]. \quad (40.12)$$

Интегрируя уравнение (40.12), придем к следующему общему выражению потенциала притяжения тела какой-либо формы в некоторой точке  $P$  окружающего пространства:

$$-V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{r^2} \int \rho \cos \varphi dM + \frac{G}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) dM + \dots, \quad (41.12)$$

где интегралы берутся по всему объему тела.

Выберем теперь оси прямоугольной системы координат  $Oxyz$  с началом в точке  $O$  (в центре масс тела) так, чтобы они совпадали с главными осями инерции тела. Следствием выбора начала координат в центре масс тела являются равенства:

$$\int x dM = \int y dM = \int z dM = 0,$$

а следствием того, что оси координат совпадают с главными осями инерции, — равенства

$$\int xy dM = \int xz dM = \int yz dM = 0.$$

Далее, по общим формулам

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dM;$$

$$J_y = \int (x^2 + z^2) dM;$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dM.$$

Решая эти уравнения относительно неизвестных  $\int x^2 dM$ ,  $\int y^2 dM$  и  $\int z^2 dM$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \int x^2 dM &= \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) - J_x, \\ \int y^2 dM &= \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) - J_y, \\ \int z^2 dM &= \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) - J_z. \end{aligned} \right\} \quad (42.12)$$

Найдем выражения интегралов, входящих в (42.12).

Обозначим направляющие косинусы вектора  $\overline{OP}$  (см. рис. 15.12) с осями координат  $Oxyz$  буквами  $l, m, n$ ; тогда проекция вектора  $\overline{OM} = \rho$  на направление  $OP$  запишется в виде

$$\rho \cos \varphi = lx + my + nz.$$

Очевидно, что интеграл

$$\int \rho \cos \varphi dM = l \int x dM + m \int y dM + n \int z dM = 0. \quad (43.12)$$

Далее

$$\begin{aligned} \rho^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) &= 3(lx + my + nz)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= 3(l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2) + 6(lmxy + lnxz + mnyz) - (x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Для интеграла этого выражения, приняв во внимание (42.12), получим

$$\begin{aligned} \int \rho^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) dM &= 3 \left[ \frac{l^2}{2} (J_x + J_y + J_z) - l^2 J_x + \right. \\ &+ \frac{m^2}{2} (J_x + J_y + J_z) - m^2 J_y + \frac{n^2}{2} (J_x + J_y + J_z) - n^2 J_z \left. \right] - \\ &- \frac{3}{2} (J_x + J_y + J_z) + (J_x + J_y + J_z). \end{aligned}$$

Но так как сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, то

$$\frac{l^2}{2} (J_x + J_y + J_z) + \frac{m^2}{2} (J_x + J_y + J_z) + \frac{n^2}{2} (J_x + J_y + J_z) = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z),$$

так что предыдущее выражение принимает вид

$$\int \rho^2 (3 \cos^2 \varphi - 1) dM = J_x + J_y + J_z - 3(l^2 J_x + m^2 J_y + n^2 J_z). \quad (44.12)$$

Подставив (43.12) и (44.12) в уравнение (41.12), приходим к следующему выражению потенциала притяжения тела в некоторой точке пространства  $P$ :

$$-V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} [J_x + J_y + J_z - 3(l^2 J_x + m^2 J_y + n^2 J_z)] + \dots \quad (45.12)$$

Составим теперь выражение для момента инерции  $J$  тела относительно линии  $OP$  (относительно  $r$ ); на основании рис. 15.12 имеем

$$J = \int \rho^2 \sin^2 \varphi \, dM = \int (\rho^2 - \rho^2 \cos^2 \varphi) \, dM, \quad (46.12)$$

где интеграл берется по всему объему тела.

Так как

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

то с учетом (42.12)

$$\int \rho^2 \, dM = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z).$$

Далее

$$\rho \cos \varphi = lx + my + nz,$$

где  $l, m, n$  — по-прежнему направляющие косинусы радиуса  $r$  относительно осей координат, совпадающих с главными осями инерции тела.

Следовательно<sup>1</sup>,

$$\int \rho^2 \cos^2 \varphi \, dM = \int (l^2 x^2 + m^2 y^2 + n^2 z^2) \, dM = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z) - (l^2 J_x + m^2 J_y + n^2 J_z).$$

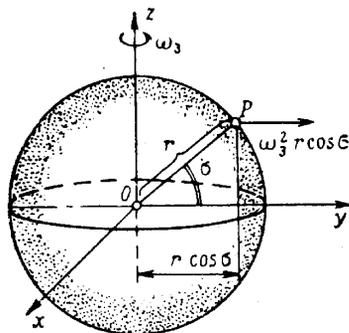


Рис. 16.12. Центробежная сила в точке  $P$ , обусловленная суточным вращением Земли

В результате выражение (46.12) для момента инерции тела относительно линии  $OP$  принимает вид

$$J = l^2 J_x + m^2 J_y + n^2 J_z. \quad (47.12)$$

С помощью (47.12) уравнение (45.12) приводится к виду

$$-V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3} (J_x + J_y + J_z - 3J) + \dots \quad (48.12)$$

Так как Землю можно считать телом, имеющим осевую симметрию, то выражение (48.12) можно несколько преобразовать. Если ось  $Oz$  направить вдоль оси симметрии Земли (оси вращения, рис. 16.12), то в силу симметрии

$$J_x = J_y.$$

При этом многочлен, стоящий в скобках (48.12), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} J_x + J_y + J_z - 3J &= 2J_x + J_z - 3[(l^2 + m^2)J_x + n^2 J_z] = \\ &= 2J_x + J_z - 3[(1 - n^2)J_x + n^2 J_z] = -(3n^2 - 1)(J_z - J_x). \end{aligned}$$

Но, как видно на рис. 16.12, косинус угла, который составляет линия  $OP$  с осью  $Oz$ , равен  $n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right) = \sin \sigma$ , где  $\sigma$  — угол широты точки  $P$ , так что предыдущее выражение принимает вид

$$J_x + J_y + J_z - 3J = -(J_z - J_x)(3 \sin^2 \sigma - 1);$$

при этом уравнение (48.12) переписывается в следующей форме:

$$-V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} (J_z - J_x)(3 \sin^2 \sigma - 1) + \dots \quad (49.12)$$

<sup>1</sup> Напомним, что центробежные моменты инерции равны нулю.

Первое слагаемое в (49.12) соответствует представлению о Земле как о шарообразном теле, последующие слагаемые учитывают тот факт, что в действительности форма Земли не является сферической.

Попытаемся оценить форму Земли, принимая во внимание ее вращение.

Центробежная сила<sup>1</sup>, действующая на единицу массы в какой-либо точке  $P$ , расположенной на поверхности Земли, обусловленная ее суточным вращением, равна

$$\omega_3^2 r \cos \sigma$$

и направлена по перпендикуляру к оси  $Oz$  (см. рис. 16.12).

Этой центробежной силе соответствует потенциал<sup>2</sup>

$$\psi_3 = -\frac{1}{2} \omega_3^2 r^2 \cos^2 \sigma = -\frac{1}{2} \omega_3^2 r^2 (\sin^2 \sigma - 1). \quad (50.12)$$

Таким образом, полный потенциал притяжения Земли с учетом разгрузки центробежной силой, обусловленной ее суточным вращением, получим, суммируя выражения (49.12) и (50.12):

$$U = V + \psi_3. \quad (51.12)$$

Полученные соотношения позволяют оценить форму Земли более точно, чем было принято в гл. II.

Из условий гидростатического равновесия силы, действующие параллельно поверхности океана, должны равняться нулю, так как в противном случае массы воды пришли бы в движение и равновесие не имело бы места. Так как силы притяжения нормальны к поверхности океана, то эта поверхность должна быть эквипотенциальной поверхностью  $U = \text{const}$ . Обозначим через  $r_0$  радиус Земли в экваториальной плоскости (для «международного эллипсоида»  $r_0 = 6378,388$  км) и примем

$$r = r_0 (1 - \varepsilon), \quad (52.12)$$

где  $\varepsilon$  — малая числовая величина порядка 1/300. Уравнение эквипотенциальной поверхности  $U = \text{const}$  на основании (49.12) — (51.12) запишется в виде

$$\begin{aligned} -\frac{GM}{r_0(1-\varepsilon)} + \frac{G}{2r_0^3(1-\varepsilon)^3} (J_z - J_x) (3 \sin^2 \sigma - 1) + \\ + \frac{\omega_3^2 r_0^2}{2} (1-\varepsilon)^2 (\sin^2 \sigma - 1) = \text{const}. \end{aligned} \quad (53.12)$$

Так как заранее можно предполагать, что результаты проводимого здесь расчета не должны существенно отличаться от результатов расчета, проведенного для шарообразной Земли, то в (53.12) можно сохранить только члены первого порядка малости; это выражение при этом преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} -\frac{GM}{r_0} (1 + \varepsilon) + \frac{G}{2r_0^3} (3 \sin^2 \sigma - 1) (1 + 3\varepsilon) (J_z - J_x) + \dots + \\ + \frac{\omega_3^2 r_0^2}{2} (\sin^2 \sigma - 1) (1 - 2\varepsilon) = \text{const}. \end{aligned} \quad (53a.12)$$

Значение постоянной в правой части этого уравнения найдем из условия, что при  $\sigma = 0$  имеем  $r = r_0$  и  $\varepsilon = 0$ .

<sup>1</sup> Эту силу инерции, конечно, надо принимать во внимание только в неинерциальной системе отсчета, связанной с поверхностью Земли.

<sup>2</sup> Напомним, что потенциалом силового поля  $U(x, y, z)$  называется функция, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_x; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = F_y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = F_z,$$

где  $F_x, F_y, F_z$  — составляющие силы по соответствующим осям координат.

Знак минус в (50.12) принят потому, что центробежная сила направлена в другую сторону по отношению к силе тяготения.

Отсюда

$$\text{const} = -\frac{GM}{r_3} - \frac{G}{2r_3^3} (J_z - J_x) - \frac{\omega_3^2 r_3^2}{2}.$$

Подставив это выражение в (53a.12), после приведения подобных членов получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ \frac{GM}{r_3} - \frac{3G}{2r_3^3} (J_z - J_x) (3 \sin^2 \sigma - 1) + \omega_3^2 r_3^2 (\sin^2 \sigma - 1) \right\} = \\ = \frac{\sin^2 \sigma}{2} \left[ \frac{3G}{r_3^3} (J_z - J_x) + \omega_3^2 r_3^2 \right]. \end{aligned}$$

Порядок величины первого слагаемого в фигурных скобках левой части существенно выше порядка величины двух других слагаемых, которыми, следовательно, можно пренебречь. Поэтому без большой погрешности предыдущее уравнение можно заменить следующим:

$$\varepsilon \frac{GM}{r_3} \approx \frac{\sin^2 \sigma}{2} \left[ \frac{3G (J_z - J_x)}{r_3^3} + \omega_3^2 r_3^2 \right],$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\sin^2 \sigma}{2M} \left[ \frac{3 (J_z - J_x)}{r_3^2} + \frac{\omega_3^2 r_3^3}{G} \right]. \quad (54.12)$$

Таким образом, выражение (52.12) можно представить в следующем виде:

$$r = r_3 (1 - f \sin^2 \sigma), \quad (55.12)$$

где на основании (54.12)

$$f = \frac{3 (J_z - J_x)}{2M r_3^2} + \frac{\omega_3^2 r_3^3}{2MG} = \frac{3 (J_z - J_x)}{2M r_3^2} + \frac{\varphi}{2} \quad (56.12)$$

и обозначено

$$\varphi = \frac{\omega_3^2 r_3^2}{MG}. \quad (56a.12)$$

Выражение (55.12) определяет форму так называемого «геоида»; как видим, радиус геоида получается зависящим от широты точки  $\sigma$ .

Выведем теперь выражение для ускорения на поверхности Земли (геоида), обусловленного равнодействующей силы притяжения и центробежной силы, связанной с наличием суточного вращения Земли. Такое выражение может потребоваться при составлении уравнений движения относительно инерциальной системы отсчета.

По определению потенциала

$$g_1 = \frac{\partial U}{\partial r},$$

где  $r$  удовлетворяет уравнению (55.12).

Имея в виду, что  $U = V + \Psi_3$ , выражение для  $g_1$  с учетом (49.12) и (50.12) можно привести к виду

$$g_1 = \frac{GM}{r^2} - \frac{3G}{2r^4} (J_z - J_x) (3 \sin^2 \sigma - 1) + \omega_3^2 r (\sin^2 \sigma - 1) \quad (57.12)$$

или, приняв во внимание (55.12):

$$\begin{aligned} g_1 = \frac{GM}{r_3^2 (1 - f \sin^2 \sigma)^2} - \frac{3G (J_z - J_x)}{2r_3^4 (1 - f \sin^2 \sigma)^4} (3 \sin^2 \sigma - 1) + \\ + \omega_3^2 r_3 (\sin^2 \sigma - 1) (1 - f \sin^2 \sigma). \end{aligned} \quad (57a.12)$$

Первое слагаемое в (57a.12), как отмечено ранее, значительно больше второго и третьего слагаемых. Поэтому отличие  $r$  от  $r_0$  согласно (55.12) в первом приближении достаточно учесть только в первом слагаемом формулы (57a.12). Тогда получим

$$g_1 \approx \frac{GM}{r_0^2 (1 - f \sin^2 \sigma)^2} - \frac{3G(J_z - J_x)}{2r_0^4} (3 \sin^2 \sigma - 1) + \omega_0^2 r_0 (\sin^2 \sigma - 1). \quad (58.12)$$

Исключим из (58.12) моменты инерции  $J_z$  и  $J_x$ ; из (56.12) имеем

$$\frac{3(J_z - J_x)}{2r_0^4} = \frac{M}{r_0^2} \left( f - \frac{\varphi}{2} \right), \quad (59.12)$$

так что, подставив из (56a.12)  $\omega_0^2 r_0^3 = \varphi MG$ , можно преобразовать (58.12), воспользовавшись разложением в ряд

$$\frac{1}{(1 - f \sin^2 \sigma)^2} = 1 + 2f \sin^2 \sigma + \dots,$$

к виду

$$g_1 \approx \frac{GM}{r_0^2} \left[ (1 + 2f \sin^2 \sigma) - \left( f - \frac{\varphi}{2} \right) (3 \sin^2 \sigma - 1) + \varphi (\sin^2 \sigma - 1) \right]. \quad (60.12)$$

Определим значения  $g_0$  по (60.12) в точках на экваторе Земли ( $\sigma=0$ ):

$$g_0 = \frac{GM}{r_0^2} \left[ 1 + \left( f - \frac{\varphi}{2} \right) - \varphi \right] = \frac{GM}{r_0^2} \left( 1 + f - \frac{3}{2} \varphi \right). \quad (61.12)$$

При этом (60.12) преобразуется в выражение

$$g_1 = g_0 \left( 1 + \frac{-f + \frac{5}{2} \varphi}{1 + f - \frac{3}{2} \varphi} \sin^2 \sigma \right)$$

или, сохраняя только члены первого порядка малости:

$$g_1 \approx g_0 \left[ 1 + \left( \frac{5}{2} \varphi - f \right) \sin^2 \sigma \right]. \quad (62.12)$$

Выражение (62.12) носит название *уравнения Клеро*, по имени ученого, впервые получившего его. Уравнение Клеро показывает, что ускорение силы тяжести на поверхности Земли, рассматриваемой как геоид, зависит от широты места.

В США вместо (62.12) принята (см. [56]) зависимость

$$g_1 = 9,780516 (1 + 0,0052850 \sin^2 \sigma). \quad (62a.12)$$

На основании всего изложенного выражение для потенциала притяжения Земли в какой-либо точке  $P$  окружающего пространства получим, подставив в (49.12) выражение для  $(J_z - J_x)$  из (59.12):

$$-V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} (3 \sin^2 \sigma - 1) \frac{2Mr_0^2}{3} \left( f - \frac{\varphi}{2} \right) + \dots$$

или

$$-V = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \frac{f - \frac{\varphi}{2}}{3} \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \sigma - 1) \right] + \dots, \quad (63.12)$$

где

$$f - \frac{\varphi}{2} = 0,0016232.$$

Ускорение силы тяжести, которое получается как частная производная потенциала (63.12) по  $r$ , оказывается довольно сложным образом зависящим от радиуса  $r$  и от широты места  $\sigma$ . Вследствие этого и траектория полета баллистической ракеты, рассчитанная на основе формулы (63.12), будет отличаться от траектории, рассчитанной в предположении кеплерова поля тяготения. Подробное исследование этого вопроса [60] показывает, что поправка к величине дальности полета ракеты, обусловленная несферичностью Земли, при дальности порядка 6000—8000 км может составить 10—12 км. Отсюда ясно, что пренебрегать несферичностью Земли можно только при общем исследовании характера движения ракеты.

Опишем вкратце приближенный прием расчета, которым можно пользоваться для учета поправок, обусловленных нешарообразностью и суточным вращением Земли. Будем считать, что в распоряжении инженера имеются результаты расчета, проведенного без учета этих поправок по правилам, изложенным в § 1 и 2 этой главы.

Взяв частную производную по  $r$  от выражения (63.12), получим ускорение силы тяжести в какой-либо точке  $(r, \sigma)$ :

$$g = \frac{GM}{r^2} \left[ 1 - \left( f - \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{r_3}{r} \right)^2 (3 \sin^2 \sigma - 1) \right]. \quad (64.12)$$

Относя (как это делалось раньше) все линейные величины к среднему радиусу земного шара  $r_3 = 6371$  км и обозначая

$$\bar{r} = \frac{r}{r_3},$$

предыдущее выражение перепишем в виде

$$g = g_h - \Delta g, \quad (64a.12)$$

где  $g_h$  — величина ускорения силы тяжести, найденная без учета поправок, и  $\Delta g$  — поправка, обусловленная отличием формы Земли (геоида) от сферы (в том числе и вследствие суточного вращения Земли)<sup>1</sup>. Эта поправка

$$\Delta g = 0,01592 \frac{3 \sin^2 \sigma - 1}{\bar{r}^4}. \quad (65.12)$$

Числовой коэффициент в этой формуле получен в результате подстановки числовых значений  $f$ ,  $\varphi$ ,  $r_3$  и  $r_3$ .

Принимая во внимание, что и в рассматриваемом случае баллистическая ракета движется по траектории, лежащей в плоскости большого круга (в инерциальном пространстве), заключаем, что уравнения движения баллистической ракеты по-прежнему записываются в виде (30a.3) и (31a.3), только в правой части (31a.3) вместо  $g$  надо подставить его выражение (64.12):

$$r\ddot{x} + 2\dot{x}\dot{r} = 0, \quad (66.12)$$

$$\ddot{r} - \dot{r}^2 = -g(r). \quad (67.12)$$

<sup>1</sup> Напомним, что кинематический эффект суточного вращения Земли учитывается методом, описанным в § 2; здесь речь идет о динамическом эффекте суточного вращения Земли.

Интегрируя первое уравнение, приходим к тому же результату, как и прежде:

$$\dot{x}r^2 = V_s r = c_1, \quad (68.12)$$

где  $c_1 = V_{s1} r_1$ .

Произведя замену

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{dr} V_r = 0,5 \frac{dV_r^2}{dr},$$

уравнение (67.12) перепишем в виде

$$0,5 \frac{dV_r^2}{dr} = -g(r) + \frac{c_1^2}{r^3}.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начальных условий приводит к следующему выражению для радиальной составляющей скорости баллистической ракеты:

$$V_r = \pm \sqrt{V_1^2 - \frac{c_1^2}{r^2} - 2 \int_{r_1}^r g(r) dr}, \quad (69.12)$$

где знак плюс берется для  $r_1 \leq r \leq r_{\max}$ , а минус для  $r_{\max} \geq r \geq r_2$ . Но

$$V_r = \dot{x} \frac{dr}{dx} = \frac{c_1}{r^2} \frac{dr}{dx},$$

так что (69.12) принимает следующий вид:

$$c_1 \frac{dr}{dx} = \pm r \sqrt{\Phi},$$

где обозначено

$$\Phi = V_1^2 r^2 - c_1^2 - 2r^2 \int_{r_1}^r g dr.$$

Имея в виду сделанное выше замечание по поводу знака перед радикалом, интегрируя записанное уравнение, получим:

при  $r_1 \leq r \leq r_{\max}$

$$x = c_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{\Phi}}, \quad (70.12)$$

при  $r_2 \leq r \leq r_{\max}$

$$x = c_1 \left( 2 \int_{r_1}^{r_{\max}} \frac{dr}{r \sqrt{\Phi}} + \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{\Phi}} \right). \quad (70a.12)$$

Так как поправка, обусловленная несферичностью и суточным вращением Земли, невелика, то подынтегральную функцию в (70.12) и (70a.12) приближенно можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{r \sqrt{\Phi}} = \frac{1}{r \sqrt{\Phi_0 - \Delta\Phi}} \approx \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}}{r \sqrt{\Phi_0}},$$

где

$$\Phi_0 = V_1^2 r^2 - c_1^2 - 2r^2 \int_{r_1}^r g_k dr,$$

$$\Delta\Phi = 2r^2 \int_{r_1}^r \Delta g dr.$$

В таком случае (70.12) и (70a.12) можно представить в виде сумм: при  $r_1 \leq r \leq r_{\max}$

$$x = x_0 + \Delta x = c_1 \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{\Phi_0}} + \frac{c_1}{2} \int_{r_1}^r \frac{\Delta\Phi dr}{r \Phi_0^{1,5}},$$

при  $r_2 \leq r \leq r_{\max}$

$$x = x_0 + \Delta x = c_1 \left( 2 \int_r^{r_{\max}} \frac{dr}{r \sqrt{\Phi_0}} + \int_{r_1}^r \frac{dr}{r \sqrt{\Phi_0}} \right) + c_1 \left( \int_r^{r_{\max}} \frac{\Delta\Phi dr}{r \Phi_0^{1,5}} + \frac{1}{2} \int_{r_1}^r \frac{\Delta\Phi dr}{r \Phi_0^{1,5}} \right).$$

Первое слагаемое каждой суммы представляет результаты интегрирования для сферической невращающейся Земли (без учета поправки), а второе представляет собой искомую поправку: для  $r_1 \leq r \leq r_{\max}$

$$\Delta x = c_1 \int_{r_1}^r \frac{r \int_{r_1}^r \Delta g dr}{\left[ V_1^2 r^2 - c_1^2 - 2r^2 \int_{r_1}^r g_k dr \right]^{1,5}} dr, \quad (71.12)$$

для  $r_2 \leq r \leq r_{\max}$

$$\Delta x = 2c_1 \left( \int_r^{r_{\max}} \frac{r \int_{r_1}^r \Delta g dr}{\left[ V_1^2 r^2 - c_1^2 - 2r^2 \int_{r_1}^r g_k dr \right]^{1,5}} dr + \frac{1}{2} \int_{r_1}^r \frac{r \int_{r_1}^r \Delta g dr}{\left[ V_1^2 r^2 - c_1^2 - 2r^2 \int_{r_1}^r g_k dr \right]^{1,5}} dr \right). \quad (71a.12)$$

При вычислении интеграла зависимость угла широты  $\sigma$  от  $r$  можно принимать по результатам расчета, проведенного для сферической формы Земли; интегралы находятся графическим путем. В случае надобности результаты этого расчета можно уточнить, взяв для второго приближения зависимость  $\sigma(r)$  по результатам расчета первого приближения.

Линейная поправка к дальности баллистической ракеты, обусловленная несферичностью и суточным вращением Земли, получается по очевидной формуле

$$\Delta L = 6371 \Delta x. \quad (72.12)$$

## ДИНАМИКА ПОЛЕТА БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ И НА УЧАСТКЕ ВХОДА В АТМОСФЕРУ. ДИНАМИКА ПОЛЕТА РАКЕТОПЛАНА

### § 1. Расчет траектории полета ракеты-носителя

Пассивному полету баллистической ракеты (или космического корабля) предшествует этап вывода летательного аппарата на баллистическую траекторию. На этом этапе полета в атмосфере<sup>1</sup> летательный аппарат должен приобрести необходимые скорость и высоту полета, обеспечивающие желательную баллистическую траекторию; следовательно, пассивному участку предшествует участок *активного полета*.

На участке активного полета летательный аппарат представляет собой сложную конструкцию, состоящую из ракеты-носителя, которая в свою очередь может быть многоступенчатой (состоять из нескольких частей — ступеней), и собственно летательного аппарата (космического корабля, баллистической ракеты и т. д.). Запас потенциальной (высота полета) и кинетической (скорость полета) энергии летательного аппарата, который в дальнейшем совершает полет по баллистической траектории, получается за счет сжигания топлива на ракете-носителе.

Закон управления движением ракеты-носителя должен быть подчинен основному требованию<sup>2</sup> — реализации необходимых скорости, высоты полета и других кинематических характеристик в начале пассивного полета *при минимальном расходе топлива*. Так как расстояние, которое проходит на участке активного полета ракета-носитель (вместе с установленным на ней кораблем), обычно значительно меньше расстояния, проходимого кораблем (или баллистической ракетой) на пассивном участке полета, то небольшие изменения протяженности активного полета мало сказываются на величине полной дальности. Отсюда следует, что максимум полной дальности полета баллистической ракеты приблизительно соответствует максимуму дальности полета по баллистической траектории. Таким образом, при отыскании наивыгоднейшего закона управления баллистической ракетой можно не стремиться к достижению максимальной дальности на участке активного полета. Закон управления должен только обеспечивать такие скорость  $V_h$ , высоту полета  $H_h$ , угол наклона траектории к горизонту  $\theta_h$  в конце активного участка при наименьшем возможном расходе топлива, чтобы дальность полета на пассивном участке была наибольшей. Необходимые для реализации заданной программы баллистического полета  $V_h$ ,  $H_h$  и  $\theta_h$  должны быть определены в результате расчета пассивного участка полета.

То обстоятельство, что протяженность полета на активном участке значительно меньше общей протяженности полета, а также то, что высота в конце активного участка полета мала по сравнению с радиусом земного шара, позволяет существенно упростить в первом приближении задачу отыскания закона управления на активном участке полета, *пренебрегая суточным вращением Земли, кривизной земной поверхности и полагая, что ускорение силы тяжести  $g$  не зависит от высоты полета*.

При полете на активном участке на ракету действуют следующие силы (рис. 1.13).

<sup>1</sup> Активный полет может происходить и при отсутствии атмосферы, например, при старте с поверхности Луны; мы рассматриваем более общий случай полета в атмосфере.

<sup>2</sup> Закон управления должен быть подчинен также требованию минимального рассеивания ракеты относительно цели; такие вопросы здесь не рассматриваются.

Сила тяги  $P$  двигателя, установленного на ракете.

Сила тяжести  $G=mg$ , изменяющаяся с течением времени вследствие выгорания топлива, имеющегося на борту ракеты. При непрерывной работе двигателей в пределах каждой ступени (в случае многоступенчатой ракеты) сила тяжести изменяется непрерывно. В момент отделения ступеней ракеты сила тяжести изменяется скачком.

Аэродинамические силы с составляющими: подъемной силой  $Y$  по нормали к траектории и лобовым сопротивлением  $Q$  по касательной к траектории. Что касается боковой составляющей  $Z$  аэродинамической силы, то, так как мы условились пренебрегать суточным вращением Земли, полет происходит без крена и скольжения, т. е.  $Z=0$ .

В соответствии с изложенным в гл. V уравнения движения ракеты в проекциях на оси земной системы координат имеют вид

$$m\dot{V}_x = P \cos \vartheta - Q \cos \theta - Y \sin \theta, \quad (1.13)$$

$$m\dot{V}_y = P \sin \vartheta - Q \sin \theta + Y \cos \theta - G. \quad (2.13)$$

Те же уравнения в скоростной системе координат<sup>1</sup>

$$m\dot{V} = P \cos \alpha - Q - G \sin \theta, \quad (3.13)$$

$$mV\dot{\theta} = P \sin \alpha + Y - G \cos \theta. \quad (4.13)$$

К уравнениям движения добавляются кинематические равенства

$$\dot{x} = V_x = V \cos \theta, \quad (5.13)$$

$$\dot{H} = V_y = V \sin \theta \quad (6.13)$$

и уравнение, связывающее изменение веса ракеты с секундным расходом топлива:

$$\dot{G} = -\frac{P}{P_{уд}} = -q_c, \quad (7.13)$$

где  $P_{уд}$  — удельная тяга двигателя, связанная с скоростью истечения газов  $V_a$  из сопла двигателя соотношением

$$V_a = gP_{уд}.$$

Как и во всех задачах динамики полета, приведенные уравнения содержат одно «лишнее» неизвестное — управление. Программу полета ракеты на активном участке можно задать в виде зависимости какого-либо кинематического параметра<sup>2</sup> от времени. Наиболее естественным, казалось бы, является задание программы изменения угла тангажа  $\vartheta$ , поскольку в большинстве случаев управление ракетами реализуют, воздействуя отклонением рулей на угол тангажа. При исследованиях траекторий можно, однако, запрограммировать любую другую кинематическую величину: угол атаки  $\alpha$ , угол наклона траектории к горизонту  $\theta$  и т. д. Ясно, что, например, при программировании угла  $\theta$ , проведя рас-

<sup>1</sup> Для  $\varphi=0$ , что имеет место у ракет.

<sup>2</sup> Напоминаем, что в этой книге управление предполагается идеальным, так что изменение  $\alpha$  или  $\vartheta$  следует мгновенно за отклонением руля.

чет движения корабля, найдем, в частности, закон изменения  $\alpha(t)$  и затем по известной формуле

$$\vartheta = \theta + \alpha$$

перейдем к закону изменения угла тангажа  $\vartheta(t)$ .

При выборе программы полета ракеты необходимо учитывать ряд требований, относящихся к устойчивости движения ракеты, минимальному рассеиванию относительно цели полета, реальности обеспечения нужных управляющих воздействий, условиям старта и т. п. Решение подобных вопросов выходит за рамки этой книги и относится к области проектирования ракет. Мы будем рассматривать более узкую задачу, сформулированную выше, — обеспечение заданных кинематических характеристик в конце активного полета при минимальном расходе топлива. В силу принципа взаимности (см. гл. I) приведенную формулировку задачи можно заменить следующей: при заданном расходе топлива обеспечить максимум скорости ( $H_k, \theta_k$  фиксированы) или высоты ( $V_k, \theta_k$  фиксированы) полета в конце активного участка.

Задача выбора закона управления ракетой на активном участке относится к *вариационным задачам*. Если считать баллистическую дальность слабо зависящей от высоты полета в конце активного участка, формулировку рассматриваемой задачи можно несколько упростить, приняв ее в следующем виде: *вывести ракету при минимальном расходе топлива на заданную скорость полета  $V_k$  и заданный угол наклона траектории к горизонту  $\theta_k$  независимо от того, на какой высоте эти значения достигаются*. При этом, конечно, высота полета в конце активного участка не должна быть слишком малой, так как в таком случае аэродинамические силы на пассивном участке полета нельзя было бы считать пренебрежимо малыми.

При выборе оптимальной программы управления ракетой необходимо принять во внимание ряд ограничивающих условий, важнейшими из которых являются следующие два.

1. Угол атаки  $\alpha$  ракеты на всех высотах полета должен лежать в определенных заранее назначенных пределах.

2. Полет ракеты в плотных слоях атмосферы не должен быть продолжительным.

Выполнение первого условия необходимо для того, чтобы, с одной стороны, нормальные перегрузки  $n_{y1}$  в связанных осях координат, обусловленные подъемной силой, не получились очень большими и чтобы, с другой стороны, обтекание ракеты при ее переходе через область трансзвуковых скоростей, характер которого зависит от  $\alpha$ , было удовлетворительным.

Выполнение второго условия предохраняет конструкцию ракеты от чрезмерного нагрева при полете с большими скоростями (см. гл. IV).

Задача выбора оптимальной программы полета ракеты в такой полной ее постановке, когда на управление и фазовые координаты (угол атаки, скорость и высоту полета) наложены ограничения, оказывается сложной, особенно если вспомнить, что в точках отделения ступеней должны удовлетворяться условия Вейерштрасса — Эрдмана. Даже если не вводить ограничения по углу атаки (в расчете на то, что в результате решения угол атаки получится небольшим), задача остается достаточно сложной.

Рассмотрим ход решения задачи в этом последнем частном случае, основываясь на уравнениях движения в проекциях на оси скоростной системы координат. При сделанных выше упрощающих предположениях решение задачи должно удовлетворять уравнениям (3.13), (4.13), (6.13) и (7.13) этого параграфа; поскольку дальность полета на активном участке не регламентируется, а силы, действующие на ракету, не

зависят от дальности, кинематическое уравнение (5.13) можно не включать в задачу (это уравнение после решения задачи можно использовать для определения дальности на активном участке полета). Точно так же, вследствие того что  $q_c = \text{const}$ , вес ракеты  $G$  есть определенная функция времени  $t$  и связь (7.13) отпадает.

В рассматриваемой задаче управлением является угол атаки  $\alpha$ . Силу тяги ракетного двигателя можно считать постоянной независимо от скорости и высоты полета, так что  $P^V = P^H = 0$ .

При заданном времени активного полета, а значит, при заданном расходе топлива за функционал можно принять скорость  $V_k$  в конце активного полета. Составляя вспомогательный функционал задачи, которую будем решать в форме Майера (см. гл. I), получим

$$J_B = -V_k + \int_{t_1}^{t_k} F dt, \quad (8.13)$$

где

$$F = \lambda_1 \left( \frac{\dot{V}}{g} + \sin \theta - \frac{P}{G} \cos \alpha + \frac{Q}{G} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\dot{V}}{g} \dot{\theta} + \cos \theta - \frac{P}{G} \sin \alpha - \frac{Y}{G} \right) + \lambda_5 (\dot{H} - V \sin \theta). \quad (8a.13)$$

Так как время полета, а также начальные условия не варьируются, то из уравнений (73.1) — (76.1) необходимо удовлетворить только уравнению (76.1), которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{\lambda_1}{g} \Big|_{t_k} = 1 \quad (9.13)$$

и определяет значение множителя Лагранжа  $\lambda_1$  на правом конце интегрирования.

Далее переходим к составлению уравнений Эйлера. В рассматриваемой задаче имеем четыре неизвестных: три фазовые координаты  $V$ ,  $H$ ,  $\theta$  и управление  $\alpha$ . Угол атаки  $\alpha$ , содержащийся в явной форме в (8.13) в виде  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , кроме того, входит в выражение подъемной силы  $Y = c_y^\alpha S q$  и лобового сопротивления

$$Q = [c_{x0}(H, V) + B c_y^{\alpha^2} \alpha^2] S q.$$

Формулировка рассматриваемой задачи — более общая по сравнению с формулировкой задачи о подъеме самолета (см. гл. VIII), поскольку в новой задаче не делается априорного предположения о малости угла атаки  $\alpha$  и в уравнение (4.13) входит член с  $\sin \alpha$ .

Составляя уравнения Эйлера, будем иметь

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{g} = \lambda_1 \frac{Q^V}{G} + \lambda_2 \left( \frac{\dot{\theta}}{g} - \frac{Y^V}{G} \right) - \lambda_5 \sin \theta, \quad (10.13)$$

$$\dot{\lambda}_2 \frac{V}{g} = \lambda_1 \cos \theta - \lambda_2 \frac{P \cos \alpha - Q}{G} - \lambda_5 V \cos \theta, \quad (11.13)$$

$$\lambda_1 \left( \frac{P}{G} \sin \alpha + \frac{Q^\alpha}{G} \right) - \lambda_2 \frac{P \cos \alpha + Y^\alpha}{G} = 0, \quad (12.13)$$

$$\dot{\lambda}_5 = \lambda_1 \frac{Q^H}{G} - \lambda_2 \frac{Y^H}{G}. \quad (13.13)$$

Кроме уравнений Эйлера, должны удовлетворяться уравнения Вейерштрасса — Эрдмана (см. гл. I). Так как отделение ступеней ракеты мы считаем происходящим мгновенно, так что скорость, высота полета и угол наклона траектории к горизонту в моменты времени непосредственно перед и после отделения одинаковы, то, как нетрудно убедиться, условия Вейерштрасса — Эрдмана требуют непрерывности  $\lambda_i$  в моменты отделения ступеней ракеты.

Задача определения множителей Лагранжа  $\lambda_i(t)$  относится к крайним задачам и может быть решена с помощью вычислительной техники, например, методом «пристрелки».

Рассматривая уравнения (10.13) — (13.13), можно убедиться, что трудности решения задачи обусловлены тем, что в эти уравнения входят аэродинамические силы, являющиеся сложными функциями фазовых переменных  $V$  и  $H$ . Задача о подъеме ракеты в условиях отсутствия атмосферы существенно упрощается и может быть решена до конца в общем виде. Такая постановка задачи справедлива, например, при подъеме ракеты с поверхности Луны.

При отсутствии атмосферы  $Y=Q=0$ , и уравнения Эйлера (10.13) — (13.13) существенно упрощаются, а уравнение (6.13) выпадает, так как высота  $H$  в правую часть (3.13), (4.13) не входит. Таким образом,  $\lambda_5 \equiv 0$ , и в этой задаче надо решать следующие три уравнения<sup>1</sup> Эйлера:

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \dot{\theta}, \quad (14.13)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{g}{V} \left( \lambda_1 \cos \theta - \lambda_2 \frac{P}{G} \cos \alpha \right), \quad (15.13)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (16.13)$$

Уравнения движения в нашем частном случае имеют вид

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P}{G} \cos \alpha - \sin \theta, \quad (17.13)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = \frac{P}{G} \sin \alpha - \cos \theta. \quad (18.13)$$

Исключим из написанных уравнений множители Лагранжа  $\lambda_i$ ; с этой целью подставим в (14.13) значение  $\theta$  из (18.13):

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \frac{g}{V} \left( \frac{P}{G} \sin \alpha - \cos \theta \right). \quad (19.13)$$

Далее из (15.13)

$$\lambda_2 \frac{P}{G} \cos \alpha = \lambda_1 \cos \theta - \frac{V}{g} \dot{\lambda}_2, \quad (20.13)$$

а из (19.13)

$$\lambda_2 \frac{P}{G} \sin \alpha = \dot{\lambda}_1 \frac{V}{g} + \lambda_2 \cos \theta. \quad (21.13)$$

Разделив почленно (21.13) на (20.13), получим для  $\operatorname{tg} \alpha$  следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{\lambda}_1 \frac{V}{g} + \lambda_2 \cos \theta}{\lambda_1 \cos \theta - \frac{V}{g} \dot{\lambda}_2}. \quad (22.13)$$

<sup>1</sup> При отсутствии атмосферы угол атаки  $\alpha$  теряет смысл управляющей функции и должен рассматриваться лишь как составляющая управляющей функции — угла тангажа  $\Phi = \theta + \alpha$ .

Приравняв (22.13) и (16.13), придем к следующему уравнению, связывающему  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$\frac{d(\lambda_1^2)}{dt} = -\frac{d(\lambda_2^2)}{dt}.$$

Решение этого дифференциального уравнения получается следующее:

$$\lambda_1 = \sqrt{c_1 - \lambda_2^2}, \quad (23.13)$$

где  $c_1$  — постоянная интегрирования, определяемая по граничным условиям.

Далее, дифференцируя (23.13), получим следующее выражение для производной  $\dot{\lambda}_1$ :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\lambda_2 \dot{\lambda}_2}{\sqrt{c_1 - \lambda_2^2}}. \quad (24.13)$$

Из уравнений (24.13) и (14.13) после сокращения на  $\lambda_2$  придем к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\dot{\lambda}_2}{\sqrt{c_1 - \lambda_2^2}} = -\dot{\theta}. \quad (25.13)$$

Решение уравнения (25.13), в котором переменные разделены, имеет вид

$$\arcsin \frac{\lambda_2}{\sqrt{c_1}} = -\theta + c_2$$

или

$$\lambda_2 = \sqrt{c_1} \sin(c_2 - \theta), \quad (26.13)$$

где  $c_2$  — постоянная интегрирования.

Наконец, исключая с помощью (23.13) и (26.13) из (16.13) неизвестные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , придем к следующему выражению:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(c_2 - \theta), \quad (27.13)$$

откуда следует, что при оптимальном управлении в безвоздушном пространстве

$$\alpha + \theta = \vartheta = c_2, \quad (28.13)$$

т. е. угол тангажа при оптимальном управлении остается неизменным в течение всего полета.

К такому же выводу можно прийти, рассматривая уравнения движения (1.13) и (3.13) в земной системе координат, как это сделано в [44].

Если аэродинамические силы равны нулю, то эти уравнения превращаются в следующие:

$$\dot{V}_x = g\bar{P} \frac{\cos \vartheta}{1 - kt}, \quad (29.13)$$

$$\dot{V}_y = -g + g\bar{P} \frac{\sin \vartheta}{1 - kt}, \quad (30.13)$$

где обозначено

$$\bar{P} = \frac{P}{G_0} = \operatorname{const}, \quad k = \frac{\bar{P}}{P_{y\lambda}} = \operatorname{const}.$$

Подынтегральная функция вспомогательного функционала имеет вид<sup>1</sup>

$$F = \lambda_1 \left( \dot{V}_x - g\bar{P} \frac{\cos \vartheta}{1 - kt} \right) + \lambda_2 \left( \dot{V}_y + g - g\bar{P} \frac{\sin \vartheta}{1 - kt} \right). \quad (31.13)$$

<sup>1</sup> Конечно,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в этой задаче не тождественны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  предыдущей задачи.

Неизвестным в (31.13) является управление  $\vartheta$  и фазовые координаты  $V_x$  и  $V_y$ .  
Уравнения Эйлера получаются следующие:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \sin \vartheta - \lambda_2 \cos \vartheta &= 0, \\ \dot{\lambda}_1 &= 0, \\ \dot{\lambda}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Решая эти уравнения, находим

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \text{const} = c_1, \\ \lambda_2 &= \text{const} = c_2, \\ \text{tg } \vartheta &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1},\end{aligned}$$

т. е.

$$\text{tg } \vartheta = \frac{c_2}{c_1} = c = \text{const},$$

что совпадает с (28.13).

Следовательно, если пренебречь аэродинамическими силами, действующими на ракету, не накладывая ограничений на угол атаки и считать баллистическую дальность слабо зависящей от высоты полета в конце активного участка, оптимальная программа управления ракетой получается очень простая: *угол тангажа должен поддерживаться постоянным на всем протяжении активного участка.*

В случае когда активный полет проходит вне атмосферы, при законе управления  $\vartheta = \text{const}$ , удастся получить простые аналитические выражения для скорости, высоты полета и дальности в конце активного участка полета.

Интегрируя уравнения (29.13) и (30.13), приходим к следующим выражениям составляющих скорости:

$$V_x = -V_a \cos \vartheta \ln \frac{1 - \bar{G}_\tau}{1 - \bar{G}_{\tau_0}}, \quad (32.13)$$

$$V_y = V_{y_0} - V_a \left[ \sin \vartheta \ln \frac{1 - \bar{G}_\tau}{1 - \bar{G}_{\tau_0}} + \frac{\bar{G}_\tau - \bar{G}_{\tau_0}}{\bar{P}} \right], \quad (33.13)$$

где  $V_{y_0}$  — вертикальная составляющая скорости ракеты в момент начала полета по программе  $\vartheta = \text{const} \neq \frac{\pi}{2}$ ;

$\bar{G}_{\tau_0}$  — запас топлива, истраченный до начала полета по программе, и обозначено

$$\bar{P} = \frac{P}{G_0}, \quad \bar{G}_\tau = \frac{G_\tau}{G_0}.$$

Высоту полета  $H$  найдем, интегрируя (33.13). Имея в виду, что время  $t$  связано с относительным запасом топлива соотношением

$$t = \frac{V_a}{g\bar{P}} \bar{G}_\tau,$$

получим

$$\begin{aligned}H &= \frac{V_a^2}{g\bar{P}} \left\{ \sin \vartheta [\bar{G}_\tau - \bar{G}_{\tau_0} + (1 - \bar{G}_\tau) \ln(1 - \bar{G}_\tau) - \right. \\ &\left. - (1 - \bar{G}_{\tau_0}) \ln(1 - \bar{G}_{\tau_0})] - \frac{(\bar{G}_\tau - \bar{G}_{\tau_0})^2}{2\bar{P}} \right\} + H_0 + V_{y_0} \frac{V_a}{g\bar{P}} (\bar{G}_\tau - \bar{G}_{\tau_0}). \quad (34.13)\end{aligned}$$

Так же точно для дальности полета на активном участке (расстояния по горизонтали, которое проходит ракета в активном полете) получим

$$x = \frac{V_a^2}{g\bar{P}} \cos \vartheta [\bar{G}_\tau - \bar{G}_{\tau 0} + (1 - \bar{G}_\tau) \ln(1 - \bar{G}_\tau) - (1 - \bar{G}_{\tau 0}) \ln(1 - \bar{G}_{\tau 0})]. \quad (35.13)$$

Интегрируя те же уравнения движения при  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\bar{G}_\tau(0) = 0$ , получим следующие выражения для вертикальной скорости  $V_{y0}$  и для высоты  $H_0$  в начале полета по программе:

$$V_{y0} = -V_a \left[ \ln(1 - \bar{G}_{\tau 0}) + \frac{\bar{G}_{\tau 0}}{\bar{P}} \right], \quad (36.13)$$

$$H_0 = \frac{V_a^2}{g\bar{P}} \left[ \bar{G}_{\tau 0} + (1 - \bar{G}_{\tau 0}) \ln(1 - \bar{G}_{\tau 0}) - \frac{\bar{G}_{\tau 0}^2}{2\bar{P}} \right]. \quad (37.13)$$

Подставив эти выражения в (33.13) — (34.13), после простых преобразований придем к следующим окончательным выражениям:

$$V_y = -V_a \left[ \ln(1 - \bar{G}_{\tau 0}) + \sin \vartheta \ln \frac{1 - \bar{G}_\tau}{1 - \bar{G}_{\tau 0}} + \frac{\bar{G}_\tau}{\bar{P}} \right], \quad (38.13)$$

$$H = \frac{V_a^2}{g\bar{P}} \left\{ \bar{G}_{\tau 0} + (1 - \bar{G}_\tau) \ln(1 - \bar{G}_{\tau 0}) - \frac{\bar{G}_\tau^2}{2\bar{P}} + \right. \\ \left. + \sin \vartheta [(1 - \bar{G}_\tau) \ln(1 - \bar{G}_\tau) - (1 - \bar{G}_{\tau 0}) \ln(1 - \bar{G}_{\tau 0}) + \bar{G}_\tau - \bar{G}_{\tau 0}] \right\}. \quad (39.13)$$

Выражения для скорости  $V_x$  и горизонтальной дальности  $x$  (32.13) и (35.13) приведены выше.

Все полученные выражения относятся к одноступенчатой ракете; нетрудно получить аналогичные выражения и для случая, когда ракета многоступенчатая. Проследим ход такого расчета на примере двухступенчатой ракеты (полезный груз при этом находится на третьей ступени), причем для простоты примем, что характеристики  $\bar{P}$  и  $\bar{G}_\tau$  для обеих ступеней ракеты одинаковы, т. е.

$$\bar{P}^I = \bar{P}^{II} = \bar{P} \quad \text{и} \quad \bar{G}_\tau^I = \bar{G}_\tau^{II} = \bar{G}_\tau.$$

Для нахождения приращения скорости во время полета второй ступени воспользуемся формулами (32.13) и (33.13), в которых надо положить вес топлива, расходуемого на вертикальный полет  $\bar{G}_{\tau 0} = 0$  (так как во время полета второй ступени вертикальный участок полета отсутствует). Очевидно, составляющие скорости в конце активного полета двухступенчатой ракеты будут равны:

$$V_{xk} = -V_a \cos \vartheta \ln \frac{(1 - \bar{G}_{\tau k})^2}{1 - \bar{G}_{\tau 0}}, \quad (40.13)$$

$$V_{yk} = -V_a \left\{ \ln(1 - \bar{G}_{\tau 0}) + \sin \vartheta \ln \frac{(1 - \bar{G}_{\tau k})^2}{1 - \bar{G}_{\tau 0}} + \frac{2\bar{G}_{\tau k}}{\bar{P}} \right\}. \quad (41.13)$$

За время полета второй ступени прирост высоты полета складывается из выражения (34.13), в котором следует вместо  $H_0$  подставить  $H_1$  — высоту в конце полета первой ступени — и положить  $\bar{G}_{\tau 0} = 0$ , и выражения (33.13), характеризующего прирост высоты за счет скорости

$V_{y1}$  в конце работы первой ступени. Аналогично можно найти прирост дальности за время полета второй ступени. В итоге несложных преобразований придем к следующим формулам:

$$H_k = \frac{V_a^2}{g\bar{P}} \left\{ \bar{G}_{\tau_0} + (1 - 2\bar{G}_{\tau_k}) \ln(1 - \bar{G}_{\tau_0}) - \frac{2\bar{G}_{\tau_k}^2}{\bar{P}} + \right. \\ \left. + \sin \vartheta \left[ (1 - \bar{G}_{\tau_k}) \ln \frac{(1 - \bar{G}_{\tau_k})^2}{1 - \bar{G}_{\tau_0}} + 2\bar{G}_{\tau_k} - \bar{G}_{\tau_0} \right] \right\}, \quad (42.13)$$

$$x_k = \frac{V_a^2}{g\bar{P}} \cos \vartheta \left[ (1 - \bar{G}_{\tau_k}) \ln \frac{(1 - \bar{G}_{\tau_k})^2}{1 - \bar{G}_{\tau_0}} + 2\bar{G}_{\tau_k} - \bar{G}_{\tau_0} \right]. \quad (43.13)$$

Аналогично можно получить формулы и для ракеты с  $n$  ступенями. Поскольку угол тангажа в рассмотренной задаче получился постоянным, не равным  $90^\circ$ , причем переход от вертикального в начале полета к полету по искривленной траектории осуществляется скачкообразным изменением угла тангажа  $\vartheta$ , постольку угол атаки в начале полета по программе получится большим по абсолютной величине и отрицательным по знаку. Наоборот, в конце активного участка полета, когда траектория ракеты станет достаточно пологой, угол атаки получится положительным и большим по абсолютной величине (рис. 2.13). По этой причине (широкий диапазон изменения углов атаки) полученная программа  $\vartheta = \text{const}$  не может быть использована при полете в атмосфере; как уже было отмечено, в этом случае получить аналитическое решение не удастся и приходится обращаться к методам численного интегрирования.

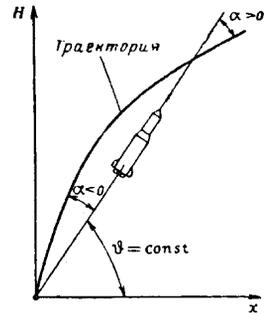


Рис. 2.13. Изменение угла атаки при постоянном угле тангажа

Попробуем несколько упростить задачу полета в атмосфере, воспользовавшись той же идеей, которая была с успехом применена при решении вариационной задачи о подъеме самолета (см. гл. VIII). Эта идея заключается в том, что сила лобового сопротивления  $Q$  предполагается не зависящей от угла атаки и что углы атаки предполагаются малыми, так что можно считать

$$\cos \alpha \approx 1.$$

При таких предположениях задача становится вырожденной, и ее решение получается в конечной (алгебраической) форме, что очень удобно для практических приложений.

Уравнения движения для нашей задачи в проекциях на оси скоростной системы координат при сделанных предположениях получим из (3.13) и (4.13), положив в них  $\cos \alpha = 1$ . Таким образом эти уравнения принимают вид

$$\frac{\dot{V}}{g} + \sin \theta - \frac{P}{G} + \frac{Q}{G} = 0, \quad (44.13)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} + \cos \theta - \frac{P}{G} \alpha - \frac{Y}{G} = 0, \quad (45.13)$$

где  $G = G_0 (1 - kt)$ ,  $k = \frac{\bar{P}}{P_{y1}}$  и считается  $Q = f(\alpha)$ .

Эти уравнения надо решать вместе с кинематическим уравнением (6.13); так как секундный расход топлива  $\bar{G}_\tau = kt$ , то связь (7.13)

отпадает. При сделанных предположениях угол атаки  $\alpha$  входит только в уравнение (45.13), так как сила  $Q$  предполагается не зависящей от  $\alpha$ . Это означает, что уравнения (44.13) и (6.13) можно решать независимо от (45.13); уравнение (45.13) при этом может быть использовано для определения угла атаки  $\alpha$  после решения остальных уравнений. Незвестными в оставшихся уравнениях будут  $V$ ,  $\theta$  и  $H$ , и мы получим следующие три уравнения Эйлера:

$$\frac{\dot{\lambda}_1}{g} = \lambda_1 \frac{Q^V}{G} - \lambda_5 \sin \theta, \quad (46.13)$$

$$\cos \theta (\lambda_1 - \lambda_5 V) = 0, \quad (47.13)$$

$$\dot{\lambda}_5 = \lambda_1 \frac{Q^H}{G}. \quad (48.13)$$

Как видно из (47.13), это равенство удовлетворяется, либо если

$$\cos \theta = 0, \text{ т. е. если } \theta = \pm \frac{\pi}{2},$$

либо

$$\lambda_1 - \lambda_5 V = 0. \quad (49.13)$$

Следовательно, оптимальная траектория полета ракеты в атмосфере может состоять из участков вертикального полета — набора высоты или пикирования — и участков полета с переменным  $\theta$ , определяемым из решения уравнения (49.13).

Рассмотрим подробнее решение уравнения (49.13). Определим из этого уравнения

$$\lambda_5 = \frac{\lambda_1}{V}$$

и, продифференцировав, получим

$$\dot{\lambda}_5 = \frac{\dot{\lambda}_1}{V} - \lambda_1 \frac{\dot{V}}{V^2}. \quad (50.13)$$

Подставив в (46.13) и (48.13) выражения  $\lambda_5$  и  $\dot{\lambda}_5$  согласно (49.13) и (50.13), после несложных преобразований придем к уравнению экстремали

$$\psi^V - \Phi^H = 0, \quad (51.13)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{g}{V(P-Q)}, \\ \Phi &= \frac{1}{P-Q}. \end{aligned} \right\} \quad (52.13)$$

Уравнение (51.13) экстремали определяет в фазовой плоскости некоторую кривую, связывающую фазовые переменные  $V$  и  $H$ . Поскольку управление  $\alpha$  мы из уравнений задачи исключили, роль управления в рассмотренной задаче играет угол  $\theta$  наклона траектории к горизонту; это новое управление в уравнение экстремали (51.13) в явной форме не входит. Необходимые для реализации траектории (51.13) значения  $\theta$  могут быть найдены из уравнения (44.13) по известной зависимости  $V(H)$ ; из этого уравнения получаем

$$\sin \theta = \frac{P-Q}{G} - \frac{\dot{V}}{g} = \frac{P-Q}{G} - \frac{V \sin \theta}{g} \frac{dV}{dH}$$

или

$$\sin \theta = \frac{P-Q}{G} \frac{1}{1 + \frac{1}{2g} dV^2/dH}. \quad (53.13)$$

Если провести расчет по приведенным формулам и найти в результате зависимость угла тангажа  $\theta$  от времени<sup>1</sup> при перемещении вдоль экстремали (51.13), можно убедиться, что угол тангажа  $\theta$  получится переменным, в то время как при оптимальном управлении в безвоздушном пространстве, как мы видели (см. стр. 400), угол тангажа получается постоянным.

Обращаясь к уравнениям задачи о полете в безвоздушном пространстве и задаче о полете в атмосфере, замечаем, что первые можно получить из вторых, устремив к нулю плотность воздуха. Таким образом, решение (28.13), полученное для полета в безвоздушном пространстве, можно рассматривать как предел решения (51.13) при плотности воздуха, стремящейся к нулю.

Итак, (53.13) позволяет найти закон  $\theta(t)$  при известной зависимости  $V(H)$ . Способ определения этой зависимости приведен несколько ниже.

Первому решению уравнения (47.13), как мы видели, соответствует участок вертикального полета; для расчета этого участка траектории должно быть использовано уравнение (44.13), в котором надо положить  $\sin \theta = 1$ :

$$\frac{\dot{V}}{g} = \frac{P-Q}{G} - 1 \quad (44a.13)$$

и аналогично кинематическое равенство (6.13)

$$\dot{H} = V. \quad (6a.13)$$

Решение этих уравнений может быть получено методами численного интегрирования.

Для ракет достаточно большой тяговооруженности можно получить приближенные аналитические выражения, в основу вывода которых кладется предположение о малости силы лобового сопротивления  $Q$  по сравнению с силой тяги  $P$ . Опуская выводы, которые не представляют сложности, приведем лишь окончательные результаты, полученные в предположении, что  $\frac{Q}{G} = 0,03$ :

$$V \approx g \left[ P_{y\lambda} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_\tau} - 1,03 \frac{P_{y\lambda}}{\bar{P}} \bar{G}_\tau \right], \quad (54.13)$$

$$H \approx \frac{g P_{y\lambda}^2}{\bar{P}} \left[ \bar{G}_\tau - (1 - \bar{G}_\tau) \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_\tau} - 1,03 \frac{\bar{G}_\tau^2}{2\bar{P}} \right], \quad (55.13)$$

где  $\bar{G}_\tau = kt = \frac{\bar{P}}{P_{y\lambda}} t$ .

<sup>1</sup> Связь между  $t$  и  $H$  получается из уравнения (6.13)

$$t = \int_{H_1}^H \frac{dH}{V \sin \theta},$$

где  $V(H)$  и  $\theta(H)$  уже определены.

С помощью (54.13) и (55.13) для каждого момента времени можно найти  $V$  и  $H$  и, таким образом, построить зависимость  $V(H)$ .

Вернемся к определению зависимости  $V(H)$  по уравнению (51.13). Так как введенные нами функции  $\psi$  и  $\Phi$  являются функциями только  $V$  и  $H$ , то графическое решение (51.13) сразу дает нам искомую зависимость  $V(H)$ .

Уравнение экстремали, полученное в гл. VIII при решении задачи о подъеме самолета, совпадает с уравнением (51.13), как это и следовало ожидать, поскольку постановка задачи в обоих случаях совершенно одинакова. В гл. VIII показано, что уравнение (51.13) можно заменить другим:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial V} \right|_{H_0 = \text{const}} = 0, \quad (56.13)$$

где

$$H_0 = H + \frac{V^2}{2g} \quad (56a.13)$$

— так называемая «энергетическая высота».

Последняя форма (56.13) уравнения экстремали более удобна, чем (51.13), для решения нашей задачи. Расчет целесообразно проводить в такой последовательности.

1. Задаемся несколькими значениями  $H_0$  и для каждого значения  $H_0$  — несколькими значениями высоты полета  $H$ .

2. По формуле (56a.13) находим соответствующие каждой комбинации  $(H_0, H)$  значения скорости полета  $V$ .

3. Находим значения числа Маха  $M = \frac{V}{a}$ , соответствующие парам значений  $(H, V)$ , и по известным аэродинамическим характеристикам

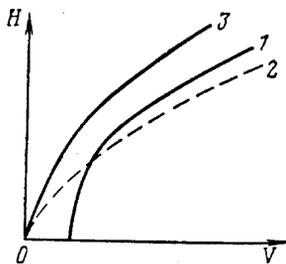


Рис. 3.13. Возможные результаты расчета оптимальной траектории

ракеты — соответствующие значения коэффициента  $c_x$ . Чтобы несколько уменьшить погрешности от предположения о независимости  $c_x$  от  $c_y$ , целесообразно определять  $c_x$  для некоторого ожидаемого среднего значения  $c_y$  (например, для  $c_y = 0,1$ ).

4. Находим значения функции  $\psi$  в зависимости от  $V$  для каждой заданной  $H_0$  и строим кривую  $\psi(V)$  при  $H_0 = \text{const}$ .

5. Графическим дифференцированием находим  $V$ , соответствующую минимуму  $\psi$ , и по (56a.13) — соответствующую высоту полета  $H$ .

6. Зависимость  $V(H)$ , полученная таким путем, имеет вид, изображенный кривой 1 на рис. 3.13. Кривая  $V(H)$ , соответствующая вертикальному участку траектории, в зависимости от тяговооруженности ракеты может пересекаться (кривая 2 на рис. 3.13) или не пересекаться (кривая 3) с кривой 1. Меньшей тяговооруженности соответствует кривая 3, большей — кривая 2.

В начале полета ракета движется по вертикальному участку траектории, а затем переходит на траекторию, определяемую уравнением (56.13). В точках соединения обеих кривых  $\theta$  изменяется скачком от  $\theta = \frac{\pi}{2}$  до некоторого меньшего значения, а затем изменяется плавно. Если точка соединения отсутствует (вертикальному участку полета соответствует кривая 2), то в точке  $A$  на рис. 4.13, ближайшей к кривой 1, теоретически ракету следует перевести в режим вертикального пикирования; этому режиму пусть соответствует кривая  $AB$  на рис. 4.13, которая в точке  $C$  пе-

ресечется с кривой 1. Так как практически отвесное пикирование ракеты недопустимо, то вместо кривой  $AB$  надо принять допустимую кривую, например, соответствующую горизонтальному полету,  $AB'$ .

Таким образом, зависимость оптимального управления  $\theta$  от времени будет иметь несколько разрывов первого рода в точках соединения различных участков экстремали (рис. 5.13): в этих точках производная  $\dot{\theta}$  становится по абсолютной величине бесконечно большой. Реализовать бесконечно большие  $\dot{\theta}$ , а следовательно, и бесконечно большие перегрузки  $n_y$  практически невозможно. Полученный, парадоксальный на первый

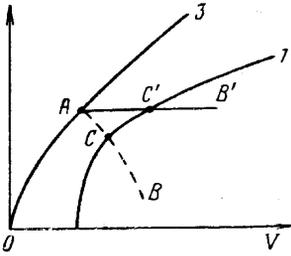


Рис. 4.13. Переход с одной ветви экстремали на другую ветвь

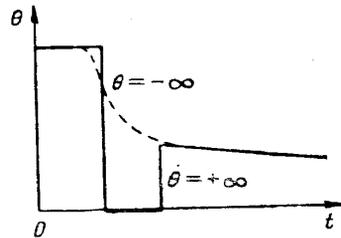


Рис. 5.13. Разрыв в угле  $\theta$  при движении по экстремали, полученной в предположении  $Q \neq Q(\alpha)$

взгляд, результат объясняется тем, что вместо управления  $\alpha$  мы рассматривали управление  $\theta$ . Так как в уравнения задачи производная  $\theta$  не входит (задача вырожденная), решение получилось разрывным. Надо заметить, что если бы мы рассматривали задачу в ее первоначальной постановке и не делали бы допущения о независимости  $Q$  от  $\alpha$ , то для управления  $\alpha$  мы получили бы также разрывной закон, так как в задачу производные  $\alpha$  не входили бы и задача была бы вырожденной относительно  $\alpha$ . Вообще при решении задач динамики полета приходится предполагать изменение какого-либо первоначального управления разрывным; так, если бы мы рассматривали совместно уравнения сил и уравнения моментов, то в уравнения задачи (в уравнения моментов) вошли бы члены, содержащие производную  $\alpha$ , но тогда разрыв получился бы в отклонении рулей  $\delta$  и т. д. Важно то, что при исследовании траекторий полета кинематические характеристики движения центра масс летательного аппарата не должны иметь разрывов.

Приведенное выше решение вариационной задачи по этой причине не может быть прямо использовано для расчета траектории движения ракеты, но оно дает ценные общие указания на характер управления. Вместо разрывной кривой  $\theta(t)$ , изображенной на рис. 5.13, следует принять близкую к ней кривую, не имеющую разрывов; эта новая кривая может иметь угловые точки, как это получилось бы при рассмотрении  $\alpha$  в качестве управления. Практически приемлемая кривая изображена на рис. 5.13 пунктиром.

Примем приближенное к найденному выше вариационному решению в виде некоторой линейной зависимости  $\theta = \theta(\bar{G}_T)$ .

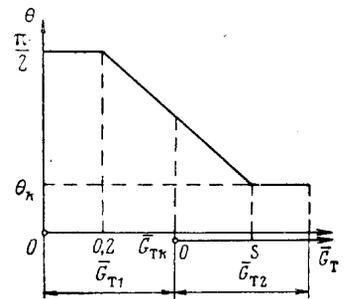


Рис. 6.13. Линейная зависимость угла  $\theta$  от относительного расхода топлива  $\bar{G}_T$

Ограничимся случаем двухступенчатой ракеты с одинаковыми параметрами обеих ступеней ( $\bar{P}^I = P^II$ ,  $G_{T k}^I = \bar{G}_{T k}^{II}$ ); для такой ракеты дальнейшие вычисления получаются наиболее простыми. Излагаемый далее метод расчета можно применить и в более общем случае, только вычисления получаются более громоздкими.

Линейный закон изменения  $\theta(\bar{G}_T)$ , показанный на рис. 6.13, можно интерпретировать следующими формулами:

Первая ступень<sup>1</sup> ( $0 \leq \bar{G}_T \leq 0,2$ )

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Первая ступень ( $0,2 \leq \bar{G}_T \leq \bar{G}_{T k}$ )

$$\theta = \frac{\pi}{2} - A(\bar{G}_T - 0,2)$$

Вторая ступень ( $0 \leq \bar{G}_T \leq S$ )

$$\theta = \frac{\pi}{2} - A(\bar{G}_{T k} - 0,2 + \bar{G}_T)$$

Вторая ступень ( $S \leq \bar{G}_T \leq \bar{G}_{T k}$ )

$$\theta = \theta_k$$

Здесь обозначено

$$A = \frac{\frac{\pi}{2} - \theta_k}{\bar{G}_{T k} + S - 0,2} \quad (57.13)$$

$\bar{G}_{T k}$  — полный запас топлива каждой ступени;

$\theta_k$  — угол наклона траектории к горизонту в конце активного участка полета.

Конечно, принятый закон изменения  $\theta(\bar{G}_T)$  не исчерпывает возможные законы управления. Расчеты показывают, однако, что при надлежащем выборе параметра  $S$  при таком управлении удастся обеспечить в пределах атмосферы небольшие углы атаки и небольшие нормальные перегрузки  $n_y$ . Кроме того, задание зависимости  $\theta(\bar{G}_T)$ , а не какой-либо другой кинематической величины (например  $\phi$ ) сокращает число приближений в том случае, когда расчет проводится графо-аналитическим методом, как это будет ясно из дальнейшего. В самом деле, нормальная перегрузка в скоростных осях (рис. 7.13)  $n_y$  определяется следующим выражением:

$$n_y = \frac{P \sin \alpha + Y}{G_0} = \frac{V}{g} (1 - \bar{G}_T) \dot{\theta} = \frac{\bar{P}}{P_{yд}} \frac{V}{g} (1 - \bar{G}_T) \frac{d\theta}{d\bar{G}_T} \quad (58.13)$$

Если задан закон изменения  $\theta(t)$  или  $\theta(\bar{G}_T)$ , то перегрузка  $n_y$  будет изменяться при переходе от одного приближения к следующему только вследствие изменения скорости полета  $V$ . Скорость полета будет изменяться в различных приближениях вследствие того, что будет уточняться величина силы лобового сопротивления  $Q$ ; но сила  $Q$  обычно значительно меньше силы тяги  $P$ , так что небольшие изменения  $Q$  не сильно будут изменять скорость полета  $V$ .

<sup>1</sup> Из условия безопасности полета принято, что траектория полета баллистической ракеты на первом участке вертикальная.

Если закон изменения  $\theta(t)$  или  $\theta(\bar{G}_T)$  задан, то система уравнений движения вместе с кинематическими уравнениями становится замкнутой и решение может быть найдено. Интегрирование уравнений, однако, вследствие их нелинейности можно провести только численными методами с использованием вычислительной техники. В некоторых случаях (обычно в процессе эскизного проектирования) желательно располагать приближенными аналитическими выражениями. Опишем способ получения таких решений при управлении  $\theta$ , принятом выше. Приближенные аналитические формулы, помимо их самостоятельного значения, можно рассматривать как первое приближение в графо-аналитическом методе последовательных приближений.

Рассмотрим последовательно фазы полета первой и второй ступеней ракеты, с тем, чтобы получить рабочие формулы.

1. **Первая ступень ( $0 \leq \bar{G}_T \leq 0,2$ ).** Так как траектория полета вертикальная, то угол атаки  $\alpha = 0$ . Для этого случая выше были получены выражения (54.13) и (55.13). Эти формулы можно упростить далее, если принять во внимание, что вес ракеты на этой фазе движения изменяется не сильно.

Разлагая  $\ln(1 - \bar{G}_T)$  в ряд, после некоторых преобразований<sup>1</sup> получим окончательно

$$V_1 \approx V_a \left[ \bar{G}_T \left( 1 - \frac{1,03}{P} \right) + 0,56 \bar{G}_T^2 \right], \quad (59.13)$$

$$H = \frac{V_a^2}{gP} \left[ 0,5 \bar{G}_T^2 \left( 1,011 - \frac{1,03}{P} \right) + \frac{\bar{G}_T^3}{6} \right]. \quad (60.13)$$

В случае необходимости результаты расчета первого приближения можно уточнить, выполнив второе приближение.

<sup>1</sup> При этом принято

$\ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} = \bar{G}_T + 0,5 \bar{G}_T^2 + 0,333 \bar{G}_T^3 + \dots \approx \bar{G}_T + 0,5 \bar{G}_T^2 (1 + 0,667 \bar{G}_T)$ . Положив в скобках  $\bar{G}_T \approx 0,2$  (что соответствует средним встречающимся значениям), получим

$$\ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \approx \bar{G}_T + 0,56 \bar{G}_T^2.$$

Аналогично

$$(1 - \bar{G}_T) \ln(1 - \bar{G}_T) = -(1 - \bar{G}_T) (\bar{G}_T + 0,5 \bar{G}_T^2 + 0,333 \bar{G}_T^3 + 0,25 \bar{G}_T^4 + \dots),$$

$$H = \frac{V_a^2}{gP} \left[ 0,5 \bar{G}_T^2 \left( 1 - \frac{1,03}{P} + 0,167 \bar{G}_T^2 + 0,5 \bar{G}_T^3 + \dots \right) + \frac{\bar{G}_T^3}{6} \right] \approx$$

$$\approx \frac{V_a^2}{gP} \left[ 0,5 \bar{G}_T^2 \left( 1,01 - \frac{1,03}{P} \right) + \frac{\bar{G}_T^3}{6} \right].$$

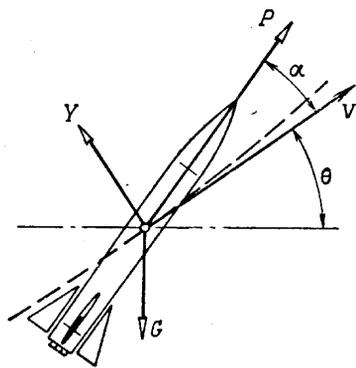


Рис. 7.13. К определению перегрузки  $n_y$  в скоростных осях координат

По найденным значениям  $H(\bar{G}_T)$  и  $V(\bar{G}_T)$  первого приближения можно найти в зависимости от  $\bar{G}_T$  скоростной напор

$$q' = \frac{\rho' V'^2}{2},$$

где плотность воздуха  $\rho'$  соответствует высоте  $H'$  первого приближения, и число Маха

$$M' = \frac{V'}{a'},$$

где скорость звука  $a'$  также соответствует  $H'$ . По данным аэродинамических испытаний или по расчету найденным  $M'$  будут соответствовать определенные значения коэффициента лобового сопротивления  $c_{x0}$ , который будет изменяться с изменением  $\bar{G}_T$ . Далее можно вычислить значения отношения  $Q/G$  во втором приближении:

$$\frac{Q}{G} = \frac{c'_{x0} S q'}{G_0 (1 - \bar{G}_T)}.$$

Поправка к скорости  $V'$  первого приближения будет

$$\Delta V' = V_a \int_0^{\bar{G}_T} \left[ 0,03 - \frac{c'_{x0} S q'}{G_0 (1 - \bar{G}_T)} \right] d\bar{G}_T,$$

а поправка к высоте

$$\Delta H' = \frac{V_a}{gP} \int_0^{\bar{G}_T} \Delta V' d\bar{G}_T.$$

Оба интеграла находят графическим путем.

В случае надобности таким же способом можно осуществить последующие приближения. Надо заметить, что практически можно ограничиться на первой фазе движения формулами (59.13) и (60.13) первого приближения.

**2. Первая ступень** ( $0,2 \leq \bar{G}_T \leq \bar{G}_{Th}$ ). На этой фазе движения высота полета быстро увеличивается, и роль лобового сопротивления, относительно большая на малых высотах, становится исчезающе малой на больших. Это позволяет в первом приближении принять отношение  $\frac{Q}{G}$  в среднем постоянным, равным некоторому числу  $c$  (например,  $c=0,08$ ).

После подстановки в уравнение движения (44.13) выражения

$$\theta = \frac{\pi}{2} - A(\bar{G}_T - 0,2)$$

и интегрирования с учетом сделанного замечания приходим к следующей формуле первого приближения для скорости полета:

$$V'_2 = V'_1 + \frac{V_a}{P} \left\{ \bar{P} \ln \frac{0,8}{1 - \bar{G}_T} - c(\bar{G}_T - 0,2) - \frac{\sin[A(\bar{G}_T - 0,2)]}{A} \right\}. \quad (61.13)$$

Далее, на основании (6.13) можно получить

$$\frac{dH'_2}{d\bar{G}_T} = \frac{P_{yA}}{P} V'_2 \cos [A(\bar{G}_T - 0,2)],$$

где  $V'_2$  определяется выражением (61.13).

Интегрируя приведенное соотношение и приняв во внимание, что в начале движения на втором этапе  $H=H_1$ , придем к следующему выражению для высоты полета:

$$H_2' = H_1 + \frac{V_a V_1'}{g \bar{P} A} \sin[A(\bar{G}_T - 0,2)] + \frac{V_a^2}{g \bar{P}^2} (\bar{P} J_{H2} - K_{H2}), \quad (62.13)$$

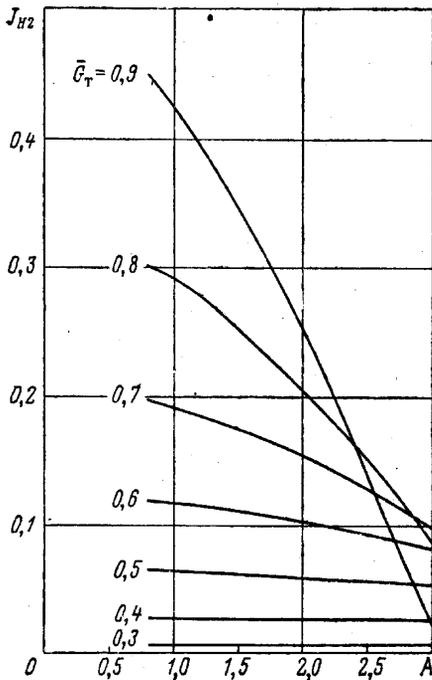


Рис. 8.13. Зависимость функции  $J_{H2}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  (первая ступень БР)

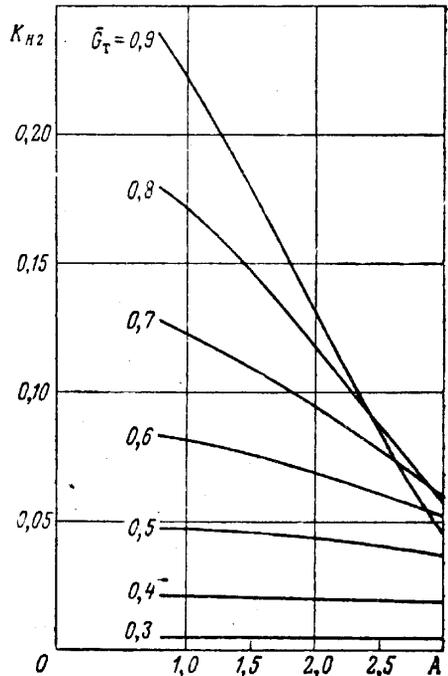


Рис. 9.13. Зависимость функции  $K_{H2}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  (первая ступень БР)

где приняты обозначения:

$$J_{H2} = \int_{0,2}^{\bar{G}_T} \ln \frac{0,8}{1 - \bar{G}_T} \cos[A(\bar{G}_T - 0,2)] d\bar{G}_T; \quad (62a.13)$$

$$K_{H2} = \frac{0,08}{A} \left\{ - \frac{1 - \cos[A(\bar{G}_T - 0,2)]}{A} + \right. \\ \left. + (\bar{G}_T - 0,2) \sin[A(\bar{G}_T - 0,2)] \right\} + \frac{1 - \cos[2A(\bar{G}_T - 0,2)]}{4A^2}. \quad (62б.13)$$

Аналогично выражение для расстояния по горизонтали на второй фазе полета ракеты получается следующее:

$$x_2' = \frac{V_a V_1'}{g \bar{P} A} \{1 - \cos[A(\bar{G}_T - 0,2)]\} + \frac{V_a^2}{g \bar{P}^2} (\bar{P} J_{x2} - K_{x2}), \quad (63.13)$$

где

$$J_{x2} = \int_{0,2}^{\bar{G}_T} \ln \frac{0,8}{1 - \bar{G}_T} \sin[A(\bar{G}_T - 0,2)] d\bar{G}_T, \quad (63a.13)$$

$$K_{x2} = \frac{0,08}{A} \left\{ \frac{\sin [A(\bar{G}_T - 0,2)]}{A} - (\bar{G}_T - 0,2) \cos [A(\bar{G}_T - 0,2)] \right\} - \frac{1}{2A^2} \left\{ A(\bar{G}_T - 0,2) - \frac{\sin [2A(\bar{G}_T - 0,2)]}{2} \right\}. \quad (636.13)$$

Значения функций  $J_{H2}$ ,  $K_{H2}$ ,  $J_{x2}$  и  $K_{x2}$ , вычисленные при произвольно-взятых параметрах, приведены в табл. 1.13—4.13; соответствующие кривые представлены на рис. 8.13—11.13.

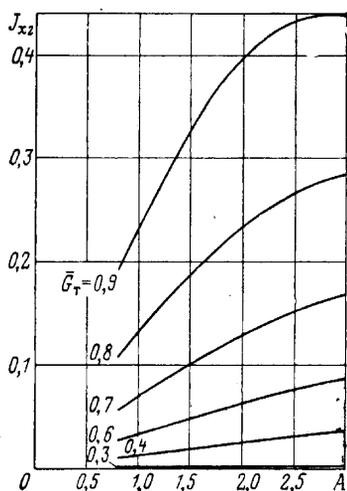


Рис. 10.13. Зависимость функции  $J_{x2}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  (первая ступень БР)

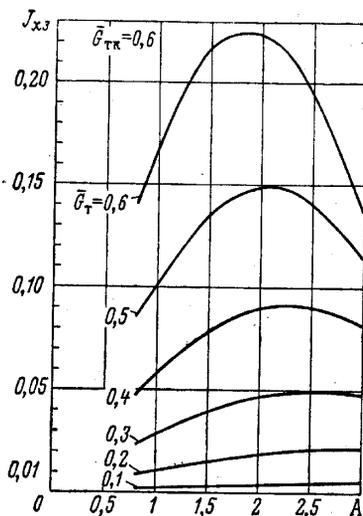


Рис. 11.13. Зависимость функции  $K_{x2}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  (первая ступень БР)

Таблица 1.13

$$J_{H2} = \int_{0,2}^{\bar{G}_T} \ln \frac{0,8}{1 - \bar{G}_T} \cos [A(\bar{G}_T - 0,2)] d\bar{G}_T$$

| A   | $\bar{G}_T$ |        |        |        |        |        |        |
|-----|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 0,3         | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    |
| 0,8 | 0,00652     | 0,0272 | 0,0640 | 0,1190 | 0,1971 | 0,3028 | 0,4494 |
| 1,0 | 0,00651     | 0,0271 | 0,0635 | 0,1176 | 0,1922 | 0,2918 | 0,4250 |
| 1,5 | 0,00649     | 0,0268 | 0,0616 | 0,1114 | 0,1759 | 0,2548 | 0,3491 |
| 2,0 | 0,00646     | 0,0263 | 0,0591 | 0,1029 | 0,1541 | 0,2064 | 0,2505 |
| 2,5 | 0,00642     | 0,0257 | 0,0559 | 0,0924 | 0,1276 | 0,1494 | 0,1389 |
| 3,0 | 0,00638     | 0,0249 | 0,0521 | 0,0802 | 0,0976 | 0,0874 | 0,0233 |

Для осуществления второго и последующих приближений вместо ориентировочного значения  $\frac{Q}{G} = 0,08$ , принятого в первом приближении, надо рассчитать величину лобового сопротивления  $Q$  на основании результатов расчета первого приближения. Во втором приближении скорость полета определяется по формуле

$$V'_2 = V'_2 + \Delta V_2, \quad (64.13)$$

$$K_{H_2} = \frac{0,08}{A} \left\{ -\frac{1 - \cos [A(\bar{G}_T - 0,2)]}{A} + (\bar{G}_T - 0,2) \sin [A(\bar{G}_T - 0,2)] \right\} + \frac{1 - \cos [2A(\bar{G}_T - 0,2)]}{4A^2}$$

Таблица 2.13

| A   | $\bar{G}_T$ |        |        |        |        |        |        |
|-----|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 0,3         | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    |
| 0,8 | 0,00539     | 0,0214 | 0,0477 | 0,0835 | 0,1280 | 0,1802 | 0,2391 |
| 1,0 | 0,00539     | 0,0213 | 0,0472 | 0,0820 | 0,1240 | 0,1730 | 0,2250 |
| 1,5 | 0,00536     | 0,0210 | 0,0455 | 0,0767 | 0,1118 | 0,1481 | 0,1812 |
| 2,0 | 0,00533     | 0,0205 | 0,0431 | 0,0697 | 0,0961 | 0,1180 | 0,1321 |
| 2,5 | 0,00529     | 0,0199 | 0,0403 | 0,0615 | 0,0785 | 0,0869 | 0,0844 |
| 3,0 | 0,00524     | 0,0192 | 0,0369 | 0,0525 | 0,0603 | 0,0574 | 0,0441 |

Таблица 3.13

$$J_{x2} = \int_{0,2}^{\bar{G}_T} \ln \frac{0,8}{1 - \bar{G}_T} \sin [A(\bar{G}_T - 0,2)] d\bar{G}_T$$

| A   | $\bar{G}_T$ |         |        |        |        |        |        |
|-----|-------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 0,3         | 0,4     | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    |
| 0,8 | 0,00035     | 0,00295 | 0,0105 | 0,0266 | 0,0560 | 0,1061 | 0,1906 |
| 1,0 | 0,00044     | 0,00368 | 0,0131 | 0,0331 | 0,0694 | 0,1308 | 0,2336 |
| 1,5 | 0,00065     | 0,00549 | 0,0195 | 0,0486 | 0,1007 | 0,1869 | 0,3274 |
| 2,0 | 0,00087     | 0,00727 | 0,0255 | 0,0629 | 0,1281 | 0,2326 | 0,3957 |
| 2,5 | 0,00109     | 0,00901 | 0,0312 | 0,0757 | 0,1507 | 0,2630 | 0,4338 |
| 3,0 | 0,00130     | 0,01068 | 0,0357 | 0,0867 | 0,1675 | 0,2840 | 0,4397 |

Таблица 4.13

$$K_{x2} = \frac{0,08}{A} \left\{ \frac{\sin [A(\bar{G}_T - 0,2)]}{A} - (\bar{G}_T - 0,2) \cos [A(\bar{G}_T - 0,2)] \right\} - \frac{1}{2A^2} \left[ A(\bar{G}_T - 0,2) - \frac{\sin [2A(\bar{G}_T - 0,2)]}{2} \right]$$

| A   | $\bar{G}_T$ |          |         |         |         |         |         |
|-----|-------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,3         | 0,4      | 0,5     | 0,6     | 0,7     | 0,8     | 0,9     |
| 0,8 | -0,00025    | -0,00195 | -0,0065 | -0,0154 | -0,0297 | -0,0505 | -0,0788 |
| 1,0 | -0,00031    | -0,00243 | -0,0081 | -0,0190 | -0,0364 | -0,0614 | -0,0949 |
| 1,5 | -0,00046    | -0,00361 | -0,0119 | -0,0273 | -0,0511 | -0,0838 | -0,1250 |
| 2,0 | -0,00061    | -0,00475 | -0,0154 | -0,0343 | -0,0621 | -0,0978 | -0,1389 |
| 2,5 | -0,00076    | -0,00582 | -0,0184 | -0,0398 | -0,0690 | -0,1030 | -0,1370 |
| 3,0 | 0,00090     | -0,00683 | -0,0210 | -0,0435 | -0,0715 | -0,1000 | -0,1241 |

где

$$\Delta V_2 = \frac{V_a}{P} \left[ 0,08 (\bar{G}_T - 0,2) - \frac{S}{G_0} \int_{0,2}^{\bar{G}_T} \frac{c'_x q'}{1 - \bar{G}_T} d\bar{G}_T \right]. \quad (65.13)$$

Для высоты полета во втором приближении получается следующая формула:

$$H_2' = H_2' + \frac{V_a}{gP} \int_{0,2}^{\bar{G}_T} \Delta V_2 \cos [A (\bar{G}_T - 0,2)] d\bar{G}_T \quad (66.13)$$

и для расстояния  $x_2''$

$$x_2'' = x_2' + \frac{V_a}{gP} \int_{0,2}^{\bar{G}_T} \Delta V_2 \sin [A (\bar{G}_T - 0,2)] d\bar{G}_T. \quad (67.13)$$

**3. Вторая ступень** ( $0 \leq \bar{G}_T \leq S$ ). На основании аналогичных рассуждений можно прийти к следующему выражению ( $c=0,03$ ) для скорости полета на третьей фазе:

$$V_3' = V_{2k} + \frac{V_a}{P} \left[ \bar{P} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} - 0,03 \bar{G}_T - \frac{\sin(Az) - \sin(Az_0)}{A} \right], \quad (68.13)$$

где обозначено:

$$z = \bar{G}_T k - 0,2 + \bar{G}_T, \quad z_0 = \bar{G}_T k - 0,2$$

и  $V_{2k}$  — скорость в конце второй фазы полета.

Высота полета и расстояние  $x$  на этой фазе полета определяются по формулам

$$H_3' = H_{2k} + \frac{V_a V_{2k}}{gPA} [\sin(Az) - \sin(Az_0)] + \frac{V_a^2}{gP^2} (\bar{P} J_{H3} - K_{H3}), \quad (69.13)$$

$$x_3' = x_{2k} + \frac{V_a V_{2k}}{gPA} [\cos(Az_0) - \cos(Az)] + \frac{V_a^2}{gP^2} (\bar{P} J_{x3} - K_{x3}), \quad (70.13)$$

где

$$J_{H3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \cos(Az) d\bar{G}_T, \quad (69a.13)$$

$$K_{H3} = \frac{1}{A^2} \left\{ 0,03 A \bar{G}_T \sin(Az) + 0,5 \sin(A \bar{G}_T) \sin [A(z + z_0)] - 2 \sin \left( \frac{A \bar{G}_T}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ 0,03 \sin \left( A \frac{z + z_0}{2} \right) + \sin(Az_0) \cos \left( A \frac{z + z_0}{2} \right) \right] \right\}, \quad (69b.13)$$

$$J_{x3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \sin(Az) d\bar{G}_T, \quad (70a.13)$$

$$K_{x3} = \frac{0,03}{A} \left[ \frac{\sin(Az) - \sin(Az_0)}{A} - (z - z_0) \cos(Az) \right] + \frac{1}{A^2} \times \\ \times \left\{ \frac{A \bar{G}_T}{2} - \frac{\sin(2Az) - \sin(2Az_0)}{4} - \sin(Az_0) [\cos(Az_0) - \cos(Az)] \right\}. \quad (70b.13)$$

Значения функций  $J_{H3}$ ,  $K_{H3}$ ,  $J_{x3}$  и  $K_{x3}$ , зависящих от трех параметров, приведены в табл. 5.13—20.13; кривые показаны на рис. 12.13—27.13.

Таблица 5.13

$$J_{H3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \cos [A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$\bar{G}_{Tk} = 0,6$

| A   | $\bar{G}_T$ |         |         |         |         |         |
|-----|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2     | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     |
| 0,8 | 0,00482     | 0,0195  | 0,0455  | 0,0800  | 0,1270  | 0,1840  |
| 1,0 | 0,00462     | 0,0185  | 0,0414  | 0,0728  | 0,1121  | 0,1591  |
| 1,5 | 0,00395     | 0,0149  | 0,0309  | 0,0493  | 0,0666  | 0,0779  |
| 2,0 | 0,00307     | 0,0103  | 0,0177  | 0,0206  | 0,0126  | 0,0136  |
| 2,5 | 0,00203     | 0,0050  | -0,0031 | -0,0101 | -0,0418 | -0,0997 |
| 3,0 | 0,00087     | -0,0007 | -0,0117 | -0,0389 | -0,0887 | -0,1650 |

Таблица 6.13

$$J_{H3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \cos [A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$\bar{G}_{Tk} = 0,7$

| A   | $\bar{G}_T$ |         |         |         |         |         |         |
|-----|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2     | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     | 0,7     |
| 0,8 | 0,00465     | 0,0188  | 0,0425  | 0,0760  | 0,1190  | 0,1730  | 0,2360  |
| 1,0 | 0,00436     | 0,0173  | 0,0383  | 0,0667  | 0,1014  | 0,1410  | 0,1838  |
| 1,5 | 0,00341     | 0,0124  | 0,0247  | 0,0371  | 0,0456  | 0,0449  | 0,0284  |
| 2,0 | 0,00218     | 0,0064  | 0,0082  | 0,0024  | -0,0173 | -0,0579 | -0,1283 |
| 2,5 | 0,00079     | 0,0003  | -0,0092 | -0,0321 | -0,0754 | -0,1451 | -0,2406 |
| 3,0 | -0,00067    | -0,0039 | -0,0252 | -0,0611 | -0,1184 | -0,1982 | -0,2980 |

Таблица 7.13

$$J_{H3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \cos [A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$\bar{G}_{Tk} = 0,8$

| A   | $\bar{G}_T$ |         |         |         |         |         |         |         |
|-----|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2     | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     | 0,7     | 0,8     |
| 0,8 | 0,00445     | 0,0179  | 0,0402  | 0,0715  | 0,1133  | 0,1597  | 0,2164  | 0,2821  |
| 1,0 | 0,00406     | 0,0159  | 0,0349  | 0,0598  | 0,0895  | 0,1220  | 0,1550  | 0,1850  |
| 1,5 | 0,00279     | 0,0097  | 0,0179  | 0,0240  | 0,0235  | 0,0109  | -0,0209 | 0,0824  |
| 2,0 | 0,00121     | 0,0022  | -0,0018 | -0,0159 | -0,0464 | -0,0999 | -0,1844 | -0,3105 |
| 2,5 | -0,00049    | -0,0056 | -0,0209 | -0,0522 | -0,1043 | -0,1810 | -0,2865 | -0,4215 |
| 3,0 | -0,00215    | -0,0125 | -0,0366 | -0,0779 | -0,1376 | -0,2134 | -0,2991 | -0,3836 |

Таблица 8.13

$$J_{H3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \cos [A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$\bar{G}_{Tk} = 0,9$

| A   | $\bar{G}_T$ |         |         |         |         |         |         |         |         |
|-----|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2     | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     | 0,7     | 0,8     | 0,9     |
| 0,8 | 0,00423     | 0,0169  | 0,0377  | 0,0664  | 0,1026  | 0,1457  | 0,1952  | 0,2505  | 0,3123  |
| 1,0 | 0,00372     | 0,0144  | 0,0310  | 0,0525  | 0,0768  | 0,1018  | 0,1246  | 0,1411  | 0,1445  |
| 1,5 | 0,00211     | 0,0067  | 0,0107  | 0,0104  | 0,0095  | 0,0232  | 0,0697  | 0,1492  | 0,2809  |
| 2,0 | 0,00019     | -0,0021 | -0,0116 | -0,0336 | -0,0736 | -0,1379 | -0,2330 | -0,3684 | -0,5596 |
| 2,5 | -0,00175    | -0,0105 | -0,0314 | -0,0690 | -0,1261 | -0,2066 | -0,3080 | -0,4319 | -0,5723 |
| 3,0 | -0,00344    | -0,1709 | -0,0447 | -0,0877 | -0,1440 | -0,2091 | -0,2735 | -0,3218 | -0,3319 |

Таблица 9.13

$$K_{H3} = \frac{1}{A^2} \left\{ 0,03A\bar{G}_T \sin(Az) + 0,5 \sin(A\bar{G}_T) \sin[A(z + z_0)] - \right.$$

$$\left. - 2 \sin\left(\frac{A\bar{G}_T}{2}\right) \left[ 0,03 \sin\left(A \frac{z + z_0}{2}\right) + \sin(Az_0) \cos\left(A \frac{z + z_0}{2}\right) \right] \right\}$$

$$z = 0,4 + \bar{G}_T; \quad z_0 = 0,4; \quad \bar{G}_{Tk} = 0,6$$

| A   | $\bar{G}_T$ |          |           |          |           |          |
|-----|-------------|----------|-----------|----------|-----------|----------|
|     | 0,1         | 0,2      | 0,3       | 0,4      | 0,5       | 0,6      |
| 0,8 | 0,004517    | 0,017477 | 0,037854  | 0,064466 | 0,095999  | 0,131050 |
| 1,0 | 0,004185    | 0,015868 | 0,033573  | 0,055649 | 0,080348  | 0,105900 |
| 1,5 | 0,003156    | 0,011044 | 0,021207  | 0,031279 | 0,039225  | 0,043544 |
| 2,0 | 0,002015    | 0,006049 | 0,00947   | 0,010508 | 0,008598  | 0,004443 |
| 2,5 | 0,000984    | 0,002088 | 0,001718  | 0,000142 | -0,000619 | 0,002594 |
| 3,0 | 0,000263    | 0,000079 | -0,000038 | 0,002690 | 0,012064  | 0,031092 |

Таблица 10.13

$$K_{H3} = \frac{1}{A^2} \left\{ 0,03A\bar{G}_T \sin(Az) + 0,5 \sin(A\bar{G}_T) \sin[A(z + z_0)] - \right.$$

$$\left. - 2 \sin\left(\frac{A\bar{G}_T}{2}\right) \left[ 0,03 \sin\left(A \frac{z + z_0}{2}\right) + \sin(Az_0) \cos\left(A \frac{z + z_0}{2}\right) \right] \right\}$$

$$z = 0,5 + \bar{G}_T; \quad z_0 = 0,5; \quad \bar{G}_{Tk} = 0,7$$

| A   | $\bar{G}_T$ |          |           |          |          |           |          |
|-----|-------------|----------|-----------|----------|----------|-----------|----------|
|     | 0,1         | 0,2      | 0,3       | 0,4      | 0,5      | 0,6       | 0,7      |
| 0,8 | 0,004225    | 0,016226 | 0,034869  | 0,058896 | 0,086952 | 0,117630  | 0,149510 |
| 1,0 | 0,003758    | 0,014061 | 0,029335  | 0,047899 | 0,068042 | 0,088105  | 0,106550 |
| 1,5 | 0,002397    | 0,008018 | 0,014602  | 0,020189 | 0,023332 | 0,023233  | 0,019823 |
| 2,0 | 0,001088    | 0,002770 | 0,003351  | 0,002277 | 0,000221 | -0,001053 | 0,000954 |
| 2,5 | 0,000211    | 0,000090 | -0,000116 | 0,001543 | 0,008060 | 0,022546  | 0,047131 |
| 3,0 | 0,000012    | 0,000809 | 0,005094  | 0,016517 | 0,037913 | 0,069669  | 0,108880 |

Таблица 11.13

$$K_{H3} = \frac{1}{A^2} \left\{ 0,03 A \bar{G}_T \sin(Az) + 0,5 \sin(A \bar{G}_T) \sin[A(z + z_0)] - \right. \\ \left. - 2 \sin\left(\frac{A \bar{G}_T}{2}\right) \left[ 0,03 \sin\left(A \frac{z + z_0}{2}\right) + \sin(Az_0) \cos\left(A \frac{z + z_0}{2}\right) \right] \right\}$$

$$z = 0,6 + \bar{G}_T; \quad z_0 = 0,6; \quad \bar{G}_{Tk} = 0,8$$

| A   | $\bar{G}_T$ |          |          |           |          |          |          |          |
|-----|-------------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|
|     | 0,1         | 0,2      | 0,3      | 0,4       | 0,5      | 0,6      | 0,7      | 0,8      |
| 0,8 | 0,003893    | 0,014826 | 0,031587 | 0,052871  | 0,077315 | 0,103540 | 0,130180 | 0,157000 |
| 1,0 | 0,003284    | 0,012106 | 0,024849 | 0,039864  | 0,055538 | 0,070377 | 0,083066 | 0,092650 |
| 1,5 | 0,001653    | 0,005186 | 0,008712 | 0,010828  | 0,010759 | 0,008435 | 0,004494 | 0,000178 |
| 2,0 | 0,000392    | 0,000632 | 0,000179 | -0,000318 | 0,000840 | 0,006059 | 0,017956 | 0,038500 |
| 2,5 | 0,0000002   | 0,000468 | 0,003298 | 0,011425  | 0,027854 | 0,054595 | 0,091784 | 0,139000 |
| 3,0 | 0,000618    | 0,004596 | 0,015616 | 0,036546  | 0,067816 | 0,106560 | 0,146900 | 0,181500 |

Таблица 12.13

$$K_{H3} = \frac{1}{A^2} \left\{ 0,03 A \bar{G}_T \sin(Az) + 0,5 \sin(A \bar{G}_T) \sin[A(z + z_0)] - \right. \\ \left. - 2 \sin\left(\frac{A \bar{G}_T}{2}\right) \left[ 0,03 \sin\left[A \frac{z + z_0}{2}\right] + \sin(Az_0) \cos\left(A \frac{z + z_0}{2}\right) \right] \right\}$$

$$z = 0,7 + \bar{G}_T; \quad z_0 = 0,7; \quad \bar{G}_{Tk} = 0,9$$

| A   | $\bar{G}_T$ |           |          |          |          |          |           |           |          |
|-----|-------------|-----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|
|     | 0,1         | 0,2       | 0,3      | 0,4      | 0,5      | 0,6      | 0,7       | 0,8       | 0,9      |
| 0,8 | 0,003527    | 0,013310  | 0,028090 | 0,046545 | 0,067331 | 0,089125 | 0,110660  | 0,130770  | 0,148390 |
| 1,0 | 0,002783    | 0,010079  | 0,020291 | 0,031859 | 0,043327 | 0,053413 | 0,061068  | 0,065519  | 0,066306 |
| 1,5 | 0,000939    | 0,002795  | 0,004054 | 0,004009 | 0,002592 | 0,000419 | -0,001277 | -0,000787 | 0,003880 |
| 2,0 | 0,000031    | -0,000040 | 0,000421 | 0,003077 | 0,010270 | 0,024540 | 0,048060  | 0,082100  | 0,12664  |
| 2,5 | 0,000395    | 0,003099  | 0,011050 | 0,027270 | 0,053780 | 0,090730 | 0,135940  | 0,185000  | 0,232000 |
| 3,0 | 0,001858    | 0,010070  | 0,027770 | 0,055670 | 0,091200 | 0,128800 | 0,161140  | 0,181400  | 0,185000 |

Таблица 13.13

$$J_{x3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \sin[A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$$\bar{G}_{Tk} = 0,6$$

| A   | $\bar{G}_T$ |        |        |         |        |        |
|-----|-------------|--------|--------|---------|--------|--------|
|     | 0,1         | 0,2    | 0,3    | 0,4     | 0,5    | 0,6    |
| 0,8 | 0,00188     | 0,0089 | 0,0233 | 0,0478  | 0,0855 | 0,1410 |
| 1,0 | 0,00233     | 0,0109 | 0,0285 | 0,0580  | 0,1030 | 0,1680 |
| 1,5 | 0,00333     | 0,0154 | 0,0393 | 0,0784  | 0,1356 | 0,2148 |
| 2,0 | 0,00416     | 0,0188 | 0,0466 | 0,0896  | 0,1488 | 0,2240 |
| 2,5 | 0,00475     | 0,0207 | 0,0495 | 0,09045 | 0,1410 | 0,1961 |
| 3,0 | 0,00509     | 0,0213 | 0,0478 | 0,0810  | 0,1139 | 0,1360 |

Таблица 14.13

$$J_{x3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \sin [A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$$\bar{G}_{Tk} = 0,7$$

| A   | $\bar{G}_T$ |        |        |        |        |        |        |
|-----|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 0,1         | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    |
| 0,8 | 0,00227     | 0,0104 | 0,0268 | 0,0540 | 0,0953 | 0,1550 | 0,2390 |
| 1,0 | 0,00278     | 0,0127 | 0,0324 | 0,0650 | 0,1140 | 0,1830 | 0,2790 |
| 1,5 | 0,00389     | 0,0174 | 0,0435 | 0,0848 | 0,1441 | 0,2240 | 0,3281 |
| 2,0 | 0,00468     | 0,0204 | 0,0492 | 0,0919 | 0,1483 | 0,2171 | 0,2952 |
| 2,5 | 0,00510     | 0,0213 | 0,0487 | 0,0851 | 0,1263 | 0,1653 | 0,1924 |
| 3,0 | 0,00511     | 0,0201 | 0,0423 | 0,0659 | 0,0826 | 0,0814 | 0,0488 |

Таблица 15.13

$$J_{x3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \sin [A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$$\bar{G}_{Tk} = 0,8$$

| A   | $\bar{G}_T$ |        |        |        |        |        |         |         |
|-----|-------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7     | 0,8     |
| 0,8 | 0,00263     | 0,0119 | 0,0301 | 0,0599 | 0,1046 | 0,1684 | 0,2571  | 0,3800  |
| 1,0 | 0,00320     | 0,0143 | 0,0361 | 0,0713 | 0,1230 | 0,1960 | 0,2964  | 0,4324  |
| 1,5 | 0,00435     | 0,0191 | 0,0467 | 0,0894 | 0,1491 | 0,2281 | 0,3285  | 0,4534  |
| 2,0 | 0,00503     | 0,0213 | 0,0492 | 0,0905 | 0,1419 | 0,2013 | 0,2638  | 0,3227  |
| 2,5 | 0,00514     | 0,0206 | 0,0449 | 0,0745 | 0,1037 | 0,1243 | 0,1254  | 0,0925  |
| 3,0 | 0,00469     | 0,0178 | 0,0329 | 0,0449 | 0,0439 | 0,0192 | -0,0414 | -0,1510 |

Таблица 16.13

$$J_{x3} = \int_0^{\bar{G}_T} \ln \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \sin [A(\bar{G}_{Tk} - 0,2 + \bar{G}_T)] d\bar{G}_T$$

$$\bar{G}_{Tk} = 0,9$$

| A   | $\bar{G}_T$ |        |        |        |        |         |         |         |         |
|-----|-------------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6     | 0,7     | 0,8     | 0,9     |
| 0,8 | 0,00298     | 0,0133 | 0,0322 | 0,0654 | 0,1131 | 0,1811  | 0,2735  | 0,4013  | 0,5827  |
| 1,0 | 0,00359     | 0,0159 | 0,0394 | 0,0769 | 0,1316 | 0,2076  | 0,3104  | 0,4480  | 0,6402  |
| 1,5 | 0,00472     | 0,0204 | 0,0488 | 0,0920 | 0,1511 | 0,2273  | 0,3217  | 0,4361  | 0,5749  |
| 2,0 | 0,00517     | 0,0213 | 0,0485 | 0,0855 | 0,1299 | 0,1771  | 0,2219  | 0,2546  | 0,2614  |
| 2,5 | 0,00486     | 0,0185 | 0,0383 | 0,0593 | 0,0746 | 0,0755  | 0,0506  | 0,0146  | 0,1436  |
| 3,0 | 0,00385     | 0,0126 | 0,0206 | 0,0198 | 0,0013 | -0,0477 | -0,1279 | -0,2580 | -0,4487 |

$$K_{x3} = \frac{0,03}{A} \left[ \frac{\sin(Az) - \sin(Az_0)}{A} - (z - z_0) \cos(Az) \right] +$$

$$+ \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{A\bar{G}_T}{2} - \frac{\sin(2Az) - \sin(2Az_0)}{4} - \sin(Az_0) [\cos(Az_0) - \cos(Az)] \right\}$$

$$z = 0,4 + \bar{G}_T \quad z_0 = 0,4$$

$$\bar{G}_{T_k} = 0,6$$

| A   | $\bar{G}_T$ |        |        |        |         |         |
|-----|-------------|--------|--------|--------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5     | 0,6     |
| 0,8 | 0,00177     | 0,0079 | 0,0197 | 0,0380 | 0,0635  | 0,0969  |
| 1,0 | 0,00211     | 0,0094 | 0,0229 | 0,0436 | 0,0718  | 0,1076  |
| 1,5 | 0,00266     | 0,0113 | 0,0264 | 0,0477 | 0,0739  | 0,1034  |
| 2,0 | 0,00271     | 0,0108 | 0,0233 | 0,0382 | 0,0531  | 0,0654  |
| 2,5 | 0,00228     | 0,0080 | 0,0150 | 0,0202 | 0,0216  | 0,0187  |
| 3,0 | 0,00146     | 0,0039 | 0,0044 | 0,0013 | -0,0047 | -0,0102 |

Таблица 18.13

$$K_{x3} = \frac{0,03}{A} \left[ \frac{\sin(Az) - \sin(Az_0)}{A} - (z - z_0) \cos(Az) \right] +$$

$$+ \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{A\bar{G}_T}{2} - \frac{\sin(2Az) - \sin(2Az_0)}{4} - \sin(Az_0) [\cos(Az_0) - \cos(Az)] \right\}$$

$$z = 0,5 + \bar{G}_T \quad z_0 = 0,5$$

$$\bar{G}_{T_k} = 0,7$$

| A   | $\bar{G}_T$ |        |         |         |         |         |         |
|-----|-------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2    | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     | 0,7     |
| 0,8 | 0,00206     | 0,0090 | 0,0218  | 0,0413  | 0,0681  | 0,1023  | 0,1442  |
| 1,0 | 0,00239     | 0,0103 | 0,0246  | 0,0458  | 0,0741  | 0,1090  | 0,1500  |
| 1,5 | 0,00272     | 0,0112 | 0,0251  | 0,0435  | 0,0651  | 0,0879  | 0,1099  |
| 2,0 | 0,00231     | 0,0086 | 0,0170  | 0,0254  | 0,0316  | 0,0339  | 0,0318  |
| 2,5 | 0,00130     | 0,0036 | 0,0045  | 0,0020  | 0,0041  | 0,0340  | -0,0186 |
| 3,0 | 0,00001     | 0,0018 | -0,0068 | -0,0142 | -0,0204 | -0,0199 | -0,0072 |

Второе и последующие приближения выполняются тем же путем, что и в предыдущем пункте.

4. **Вторая ступень** ( $S \leq \bar{G}_T \leq \bar{G}_{T_k}$ ). На этой последней фазе полет происходит с постоянным углом наклона траектории к горизонту  $\theta_k$ . Расчетные формулы первого приближения следующие ( $c=0$ ):

$$V'_4 = V_{3k} + \frac{V_a}{P} \left[ \bar{P} \ln \frac{1-S}{1-\bar{G}_T} - (\bar{G}_T - S) \sin \theta_k \right], \quad (71.13)$$

Таблица 19.13

$$K_{x3} = \frac{0,03}{A} \left[ \frac{\sin(Az) - \sin(Az_0)}{A} - (z - z_0) \cos(Az) \right] +$$

$$+ \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{A\bar{G}_T}{2} - \frac{\sin(2Az) - \sin(2Az_0)}{4} - \sin(Az_0) [\cos(Az_0) - \cos(Az)] \right\}$$

$$z = 0,6 + \bar{G}_T; \quad z_0 = 0,6;$$

$$\bar{G}_{T_k} = 0,8$$

| A   | $\bar{G}_T$ |         |         |         |         |         |         |         |
|-----|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|     | 0,1         | 0,2     | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     | 0,7     | 0,8     |
| 0,8 | 0,00230     | 0,0098  | 0,0235  | 0,0438  | 0,0711  | 0,1056  | 0,1471  | 0,1955  |
| 1,0 | 0,00258     | 0,0109  | 0,0255  | 0,0466  | 0,0740  | 0,1072  | 0,1460  | 0,1880  |
| 1,5 | 0,00260     | 0,0101  | 0,0218  | 0,0364  | 0,0521  | 0,0671  | 0,0798  | 0,0887  |
| 2,0 | 0,00160     | 0,0052  | 0,0088  | 0,0104  | 0,0086  | 0,0029  | 0,0058  | -0,0155 |
| 2,5 | 0,00009     | -0,0012 | -0,0056 | -0,0139 | -0,0223 | -0,0295 | -0,0298 | -0,0188 |
| 3,0 | -0,00132    | -0,0060 | -0,0131 | -0,0192 | -0,0187 | -0,0061 | -0,0222 | -0,0066 |

Таблица 20.13

$$K_{x3} = \frac{0,03}{A} \left[ \frac{\sin(Az) - \sin(Az_0)}{A} - (z - z_0) \cos(Az) \right] +$$

$$+ \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{A\bar{G}_T}{2} - \frac{\sin(2Az) - \sin(2Az_0)}{4} - \sin(Az_0) [\cos(Az_0) - \cos(Az)] \right\}$$

$$z = 0,7 + \bar{G}_T; \quad z_0 = 0,7$$

$$\bar{G}_{T_k} = 0,9$$

| A   | $\bar{G}_T$ |         |         |         |         |         |         |          |         |
|-----|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|---------|
|     | 0,1         | 0,2     | 0,3     | 0,4     | 0,5     | 0,6     | 0,7     | 0,8      | 0,9     |
| 0,8 | 0,00248     | 0,0104  | 0,0246  | 0,0452  | 0,0726  | 0,1066  | 0,1470  | 0,1932   | 0,2446  |
| 1,0 | 0,00268     | 0,0111  | 0,0254  | 0,0457  | 0,0714  | 0,1020  | 0,1360  | 0,1728   | 0,2108  |
| 1,5 | 0,00220     | 0,0083  | 0,0170  | 0,0268  | 0,0360  | 0,0431  | 0,0466  | 0,0461   | 0,0412  |
| 2,0 | 0,00067     | 0,0013  | 0,0001  | -0,0042 | -0,0121 | -0,0226 | -0,0336 | -0,0418  | -0,0435 |
| 2,5 | -0,00107    | -0,0052 | -0,0127 | -0,0217 | -0,0287 | -0,0291 | -0,0182 | -0,00077 | 0,0502  |
| 3,0 | -0,00206    | -0,0073 | -0,0124 | -0,0119 | -0,0004 | 0,0260  | 0,0678  | 0,1214   | 0,1804  |

$$H'_4 = H_{3k} + \frac{V_a V_{3k}}{g\bar{P}} (\bar{G}_T - S) \sin \theta_k + \frac{V_a^2}{g\bar{P}^2} \sin \theta_k \times$$

$$\times \left\{ \bar{P} \left[ (1 - \bar{G}_T) \ln \frac{1 - \bar{G}_T}{1 - S} + (\bar{G}_T - S) \ln(1 - S) - \frac{(\bar{G}_T - S)^2}{2} \sin \theta_k \right] \right\}, \quad (72.13)$$

$$x'_4 = x_{3k} + \frac{V_a V_{3k}}{g\bar{P}} (\bar{G}_T - S) \cos \theta_k + \frac{V_a^2}{g\bar{P}^2} \cos \theta_k \times$$

$$\times \left\{ \bar{P} \left[ (1 - \bar{G}_T) \ln \frac{1 - \bar{G}_T}{1 - S} + (\bar{G}_T - S) \ln(1 - S) - \frac{(\bar{G}_T - S)^2}{2} \sin \theta_k \right] \right\}. \quad (73.13)$$

Последующие приближения выполняются аналогично предыдущему.

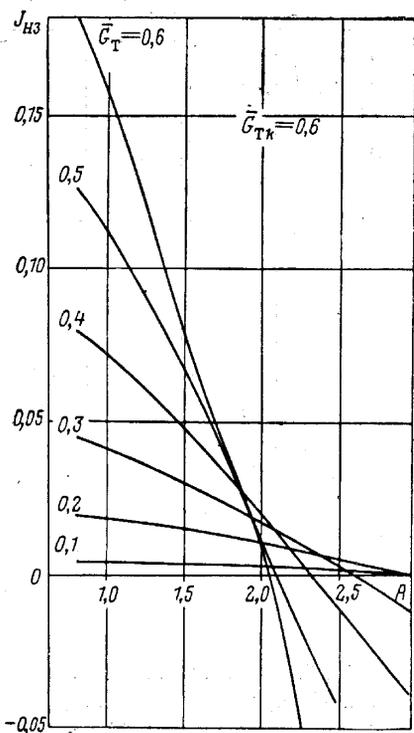


Рис. 12.13. Зависимость функции  $J_{Hz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}_{Tk}=0,6$  (вторая ступень БР)

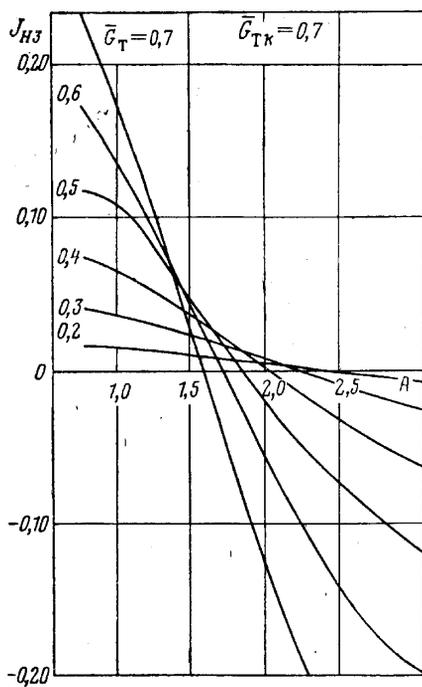


Рис. 13.13. Зависимость функции  $J_{Hz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}'_{Tk}=0,7$  (вторая ступень БР)

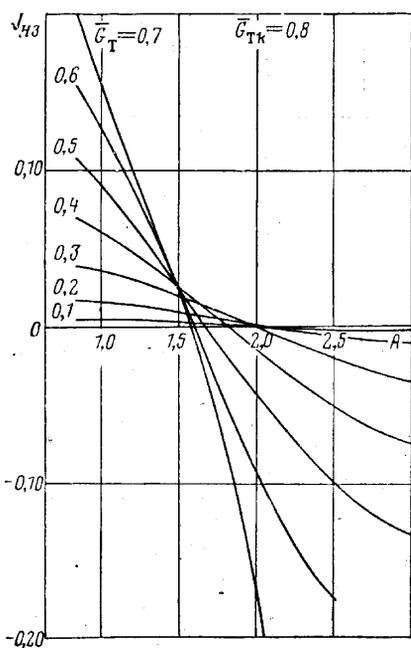


Рис. 14.13. Зависимость функции  $J_{Hz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}_{Tk}=0,8$  (вторая ступень БР)

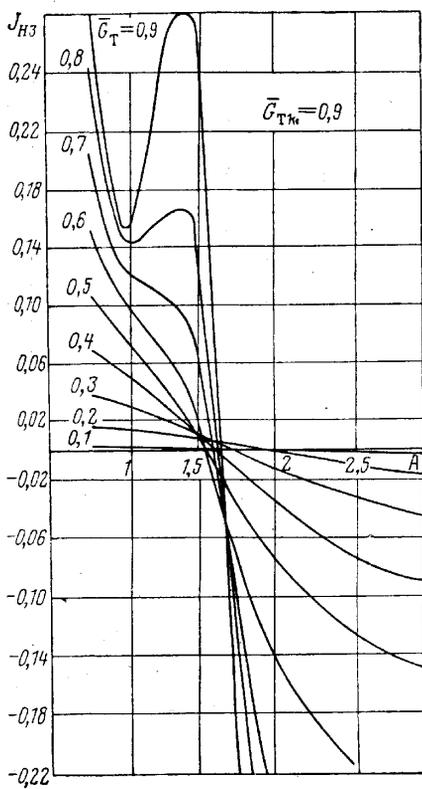


Рис. 15.13. Зависимость функции  $J_{Hz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}_{Tk}=0,9$  (вторая ступень БР)

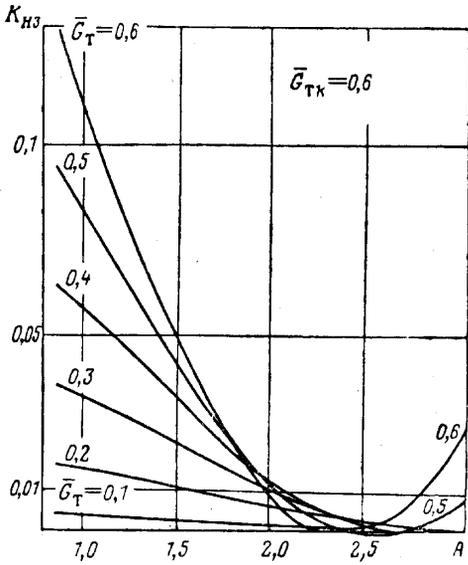


Рис. 16.13. Зависимость функции  $K_{H3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}_{T\kappa} = 0,6$  (вторая ступень БР)

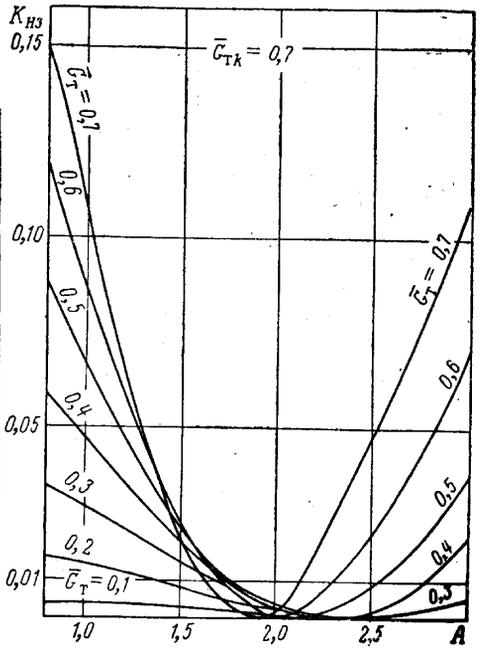


Рис. 17.13. Зависимость функции  $K_{H3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}_{T\kappa} = 0,7$  (вторая ступень БР)

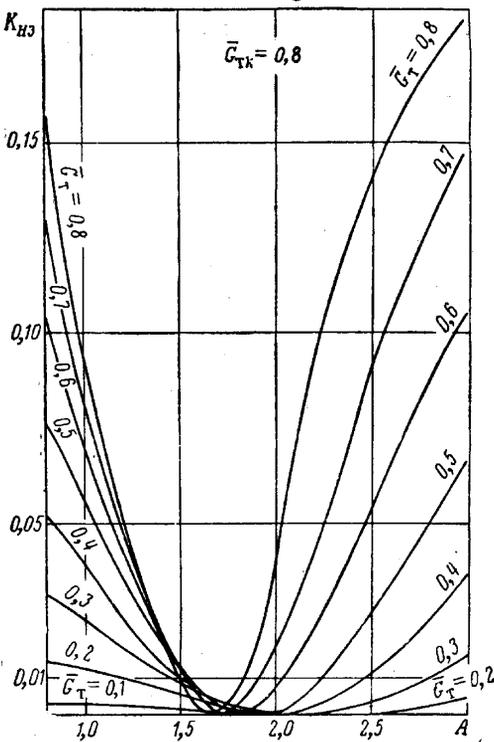


Рис. 18.13. Зависимость функции  $K_{H3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}_{T\kappa} = 0,8$  (вторая ступень БР)

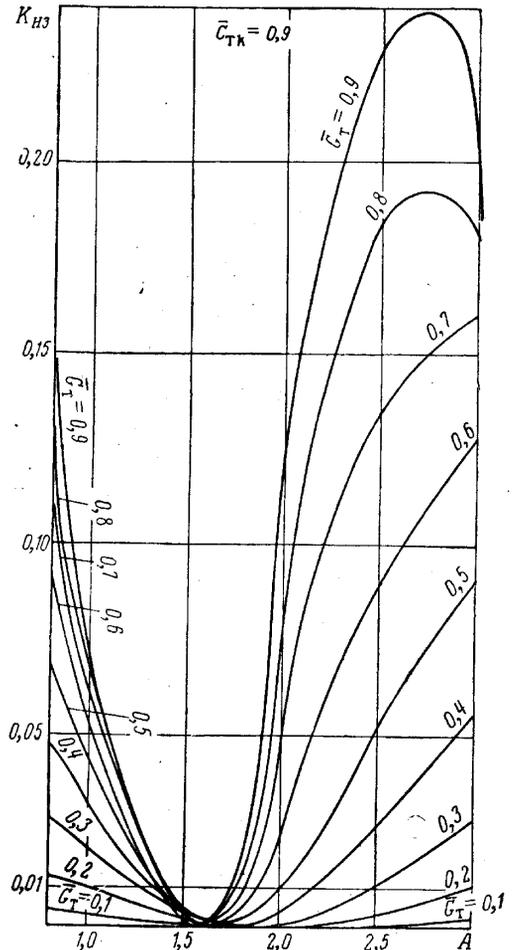


Рис. 19.13. Зависимость функции  $K_{H3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_T$  при  $\bar{G}_{T\kappa} = 0,9$  (вторая ступень БР)

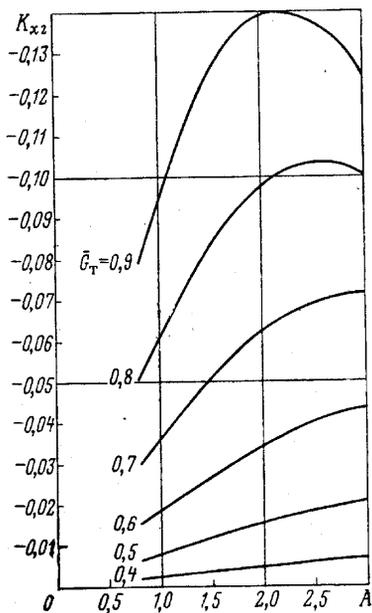


Рис. 20.13. Зависимость функции  $J_{x3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,6$  (вторая ступень БР)

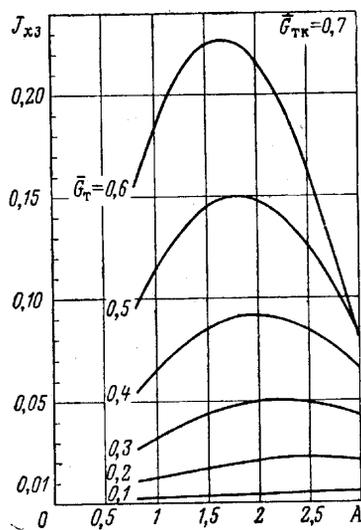


Рис. 21.13. Зависимость функции  $J_{x3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,7$  (вторая ступень БР)

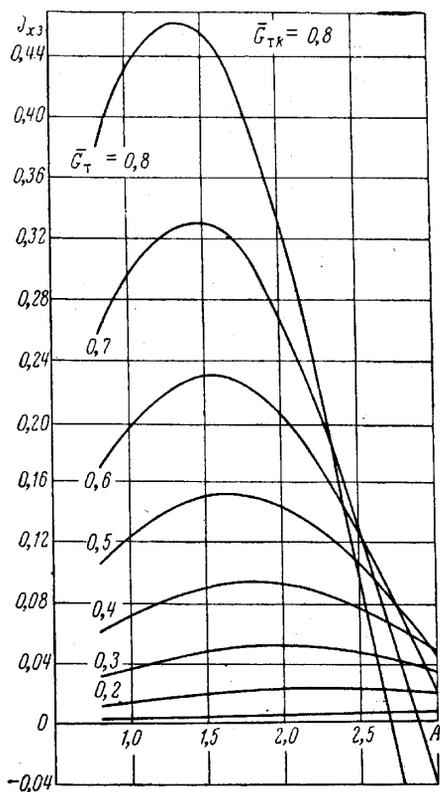


Рис. 22.13. Зависимость функции  $J_{x3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,8$  (вторая ступень БР)

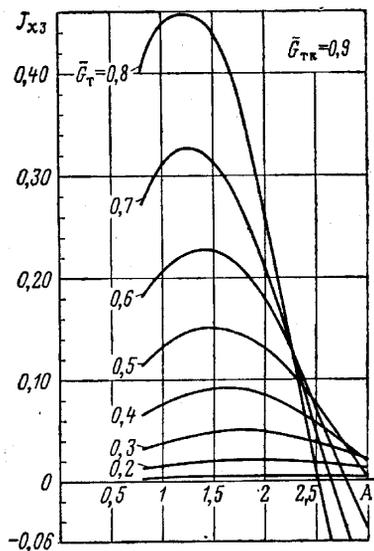


Рис. 23.13. Зависимость функции  $J_{x3}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,9$  (вторая ступень БР)

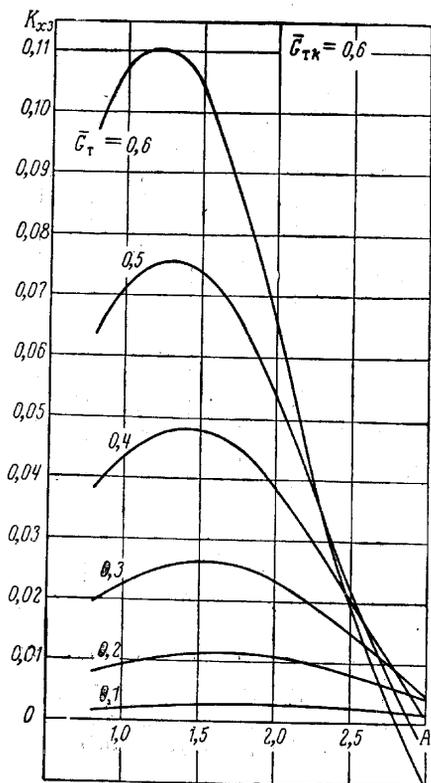


Рис. 24.13. Зависимость функции  $K_{xz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,6$  (вторая ступень БР)

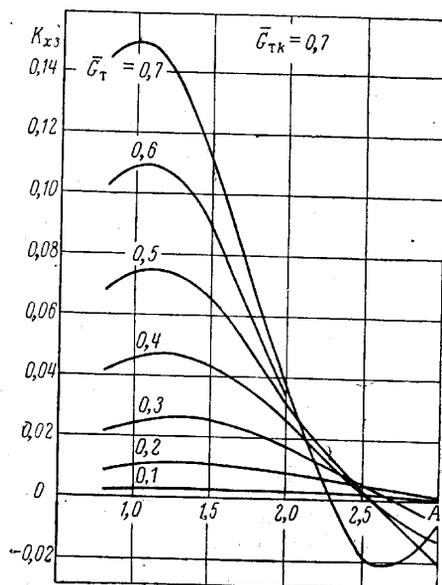


Рис. 25.13. Зависимость функции  $K_{xz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,7$  (вторая ступень БР)

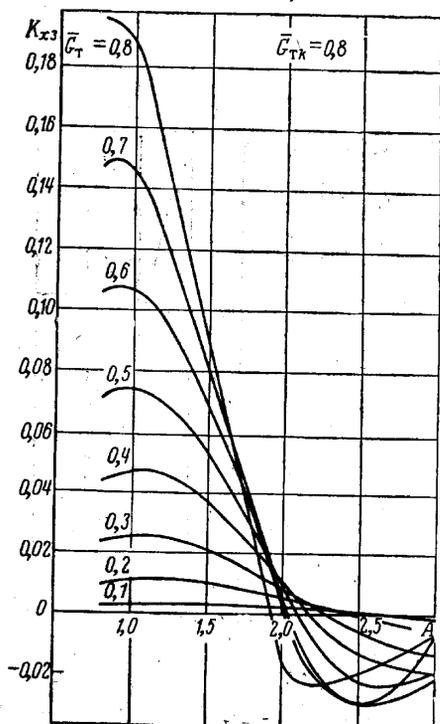


Рис. 26.13. Зависимость функции  $K_{xz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,8$  (вторая ступень БР)

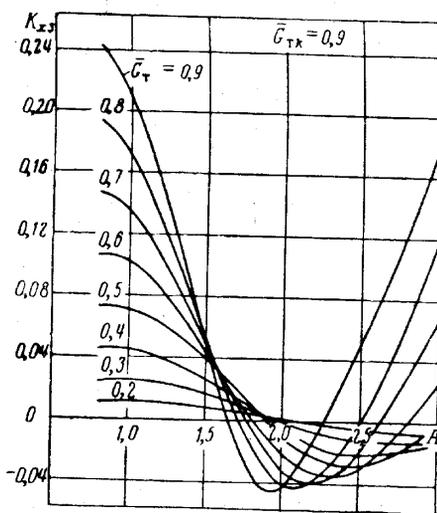


Рис. 27.13. Зависимость функции  $K_{xz}$  от  $A$  и  $\bar{G}_\tau$  при  $\bar{G}_{\tau k} = 0,9$  (вторая ступень БР)

Выше рассмотрен пример решения простой задачи применительно к двухступенчатой ракете, обе ступени которой имеют одинаковые относительные характеристики — тяговооруженность и запас топлива; подобным же образом можно решать задачу и для ракеты с другим числом ступеней или с неодинаковыми относительными характеристиками ступеней.

## § 2. Последовательность расчета траектории полета ракеты-носителя на активном участке

Как показано в предыдущем параграфе, задание программы полета ракеты в виде определенной зависимости угла наклона траектории к горизонту  $\theta$  от относительного расхода топлива  $\bar{G}_T$  существенно упрощает решение задачи о движении ракеты на активном участке полета, хотя и делает результаты такого расчета приближенными. Остановимся несколько подробнее на последовательности расчета графо-аналитическим методом.

Расчет начинается с выбора параметров программы управления: коэффициента  $S$ , представляющего собой относительный расход топлива в момент перехода к полету с постоянным углом  $\theta_h$  наклона траектории к горизонту, и самого угла  $\theta_h$ . Эти параметры можно определить по расчету первого приближения, в котором аэродинамические силы учитываются просто поправочными коэффициентами в уравнениях движения. Значения  $S$  и  $\theta_h$ , выбранные в результате расчета, должны быть подчинены требованию максимизации некоторой интегральной характеристики движения, например, для баллистических ракет — дальности полета, для космического корабля — достижению заданной скорости на наибольшей высоте полета и т. д. С этой целью надо задаться тремя значениями конечного угла  $\theta_h$  и тремя значениями параметра  $S$ ; таким образом, получится девять комбинаций  $S$  и  $\theta_h$ , для каждой из которых надо провести описанный выше расчет в первом приближении.

На основании этих данных выбирают оптимальную комбинацию  $S$  и  $\theta_h$ , обеспечивающую экстремум какого-либо критерия (например максимум конечной скорости полета).

После того как выбраны параметры программы полета  $S$  и  $\theta_h$ , надо провести расчет для нескольких следующих приближений по способу, описанному в предыдущем параграфе.

Пусть требуется найти *оптимальную программу полета и наибольшую дальность* двухступенчатой баллистической ракеты со следующими данными:

— начальная тяговооруженность (одинаковая для обеих ступеней ракеты)  $\bar{P} = \bar{P}_I = \bar{P}_{II} = 2$ ;

— удельная тяга двигателей (одинаковая для обеих ступеней)  $P_{уд} = 300$  сек, так что скорость истечения газов из сопла двигателя  $V_a = 300 \cdot 9,81 = 2943$  м/сек;

— запас топлива в долях начального веса (одинаковый для обеих ступеней)  $\bar{G}_T = 0,7$ ;

— отношение миделевого сечения к начальному весу ракеты

$$\frac{S}{G_0} = \frac{1}{166770} \text{ м}^2/\text{н} = \frac{1}{17000} \text{ м}^2/\text{кг}.$$

Аэродинамические характеристики ракеты<sup>1</sup> приведены на рис. 28.13 и 29.13.

Расчеты, проведенные для нескольких значений  $S$  (вычисления здесь не приводятся), позволяют заключить, что наиболее выгодное значение па-

<sup>1</sup> Заимствованы из [53].

раметра  $S$  равно  $S_{\text{нв}}=0$ . Для выбранного значения  $S_{\text{нв}}$  задаемся тремя значениями угла наклона траектории к горизонту  $\theta_k=20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$  и для каждого  $\theta_k$  определяем полную дальность полета.

Рабочие формулы получаются следующие<sup>1</sup>:

$$0 \leq \bar{G}_T \leq 0,2$$

По (59.13) и (60.13)

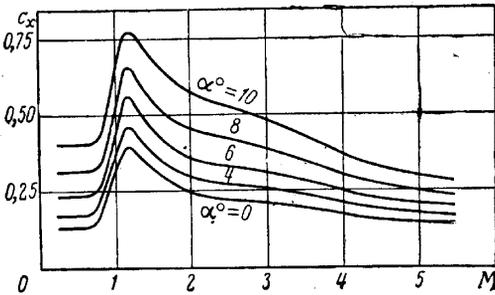


Рис. 28.13. Аэродинамические характеристики баллистической ракеты (пример)

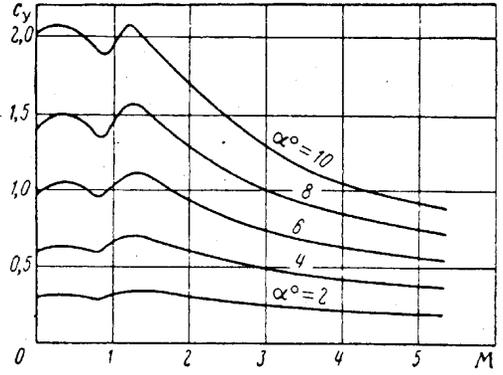


Рис. 29.13. Аэродинамические характеристики баллистической ракеты (пример)

$$V = 2943\bar{G}_T(0,485 + 0,56\bar{G}_T) \text{ [м/сек]},$$

$$\text{при } \bar{G}_T=0,2: V_1=352 \text{ [м/сек]};$$

$$H = 442\bar{G}_T^2(0,25 + 0,167\bar{G}_T) \text{ [км]},$$

$$\text{при } \bar{G}_T=0,2: H_1=5,0 \text{ [км]}.$$

$$0,2 \leq \bar{G}_T \leq 0,7$$

По (61.13), (62.13) и (63.13)

$$V = 352 + 2943 \left[ \ln \left( \frac{0,8}{1 - \bar{G}_T} \right) - 0,04(\bar{G}_T - 0,2) - \frac{\sin 130(\bar{G}_T - 0,2)}{4,54} \right] \text{ [м/сек]};$$

$$H = 5,0 + 23,2 \sin 130(\bar{G}_T - 0,2) + 442 \left( J_{H2} - \frac{K_{H2}}{2} \right) \text{ [км]};$$

$$x = 23,2 \left[ 1 - \cos 130(\bar{G}_T - 0,2) + 442 \left( J_{x2} - \frac{K_{x2}}{2} \right) \right] \text{ [км]},$$

где

$$\frac{K_{H2}}{2} = 0,0176 [(\bar{G}_T - 0,2) \sin 130(\bar{G}_T - 0,2) - \frac{1 - \cos 130(\bar{G}_T - 0,2)}{2,27}] + \frac{\sin^2 130(\bar{G}_T - 0,2)}{20,6},$$

<sup>1</sup> Формулы приведены только для  $\theta_k=25^\circ$ , для других  $\theta_k$  формулы имеют аналогичный вид.

$$\frac{K_{x2}}{2} = 0,0176 \left[ \frac{\sin 130 (\bar{G}_T - 0,2)}{2,27} - (\bar{G}_T - 0,2) \cos 130 (\bar{G}_T - 0,2) \right] +$$

$$+ \frac{1}{9,08} \left[ \bar{G}_T - 0,2 - \frac{\sin 260 (\bar{G}_T - 0,2)}{4,54} \right].$$

При  $\bar{G}_T = 0,7$

$$V_2 = 2592 \text{ [м/сек]},$$

$$H_2 = 68,8 \text{ [км]},$$

$$x_2 = 58,1 \text{ [км]}.$$

2-я ступень ( $0 \leq \bar{G}_T \leq 0,7$ )

По (71.13), (72.13), (73.13)

$$V = 2592 + 2943 \left[ \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \right) - 0,212 \bar{G}_T \right] \text{ [м/сек]},$$

$$H = 68,8 + 164 \bar{G}_T + 93,5 \left\{ 2 \left[ \bar{G}_T - (1 - \bar{G}_T) \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \right) \right] - 0,212 \bar{G}_T^2 \right\} \text{ [км]},$$

$$x = 58,1 + 352 \bar{G}_T + 201 \left\{ 2 \left[ \bar{G}_T - (1 - \bar{G}_T) \ln \left( \frac{1}{1 - \bar{G}_T} \right) \right] - 0,212 \bar{G}_T^2 \right\} \text{ [км]}.$$

Результаты расчета по этим формулам приведены в табл. 21.13, из которой видно, что наилучший результат получается при  $\theta_k = 25^\circ$ .

Таблица 21.13

| $\theta_k^\circ$ | 20°  | 25°  | 30°  | $\theta_k^\circ$   | 20°  | 25°  | 30°  |
|------------------|------|------|------|--------------------|------|------|------|
| $A^\circ$        | 140  | 130  | 120  | $x_k$ [км]         | 462  | 420  | 395  |
| $V_2$ [м/сек]    | 2615 | 2592 | 2570 | $L_6$ [км]         | 4890 | 4970 | 4980 |
| $V_k$ [м/сек]    | 5785 | 5695 | 5585 | $(x_k + L_6)$ [км] | 5352 | 5390 | 5375 |
| $H_k$ [км]       | 205  | 233  | 272  |                    |      |      |      |

Для выбранного значения  $\theta_k = 25^\circ$  проводим расчет второго приближения, результаты которого приведены в табл. 22.13 и 23.13.

Таблица 22.13

1-я ступень ракеты

| $\bar{G}_T$              | 0 | 0,2   | 0,4   | 0,6   | 0,7   |
|--------------------------|---|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha^\circ$           | 0 | -5,8  | -9,6  | -23,8 | -27,6 |
| $q$ [кг/м <sup>2</sup> ] | 0 | 4500  | 2550  | 159   | 48    |
| $n_y$                    | 0 | -0,45 | -0,58 | -0,83 | -0,97 |
| $V'$ [м/сек]             | 0 | 352   | 891   | 1837  | 2592  |
| $V''$ [м/сек]            | 0 | 351   | 866   | 1810  | 2575  |
| $H'$ [км]                | 0 | 5,0   | 22,2  | 51,8  | 68,8  |
| $H''$ [км]               | 0 | 5,0   | 21,9  | 50,6  | 67,2  |
| $x'$ [км]                | 0 | 0     | 4,4   | 29,8  | 58,1  |
| $x''$ [км]               | 0 | 0     | 4,3   | 29,1  | 57,1  |

## 2-я ступень ракеты

| $\bar{G}_T$              | 0    | 0,2   | 0,4   | 0,6   | 0,7   |
|--------------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| $\alpha^\circ$           | 26,3 | 21,0  | 15,5  | 10,4  | 7,7   |
| $q$ [кг/м <sup>2</sup> ] | 48   | 0,2   | 0     | 0     | 0     |
| $n_y$                    | 0,91 | 0,73  | 0,54  | 0,36  | 0,27  |
| $V'$ [м/сек]             | 2592 | 3115  | 3850  | 4910  | 5695  |
| $V''$ [м/сек]            | 2576 | 3099  | 3834  | 4894  | 5679  |
| $H'$ [км]                | 68,5 | 104,7 | 148,4 | 203,5 | 237,2 |
| $H''$ [км]               | 67,2 | 103,3 | 146,8 | 201,7 | 235,3 |
| $x'$ [км]                | 58,1 | 136,1 | 229,3 | 347,4 | 420,1 |
| $x''$ [км]               | 57,1 | 134,8 | 227,4 | 345,1 | 417,6 |

Согласно данным, приведенным в таблицах, наибольшие поправки к результатам первого приближения получаются на сравнительно небольших высотах полета, которым соответствуют большие скоростные напоры. Окончательный результат по второму приближению (на конечной высоте активного полета) не очень заметно отличается от результата расчета первого приближения, что подтверждает высказанное выше предположение о сравнительно небольшой роли этих сил при расчете полной дальности баллистической ракеты. Значительно большее снижение дальности полета баллистической ракеты получается вследствие того, что не удастся применить оптимальную программу ( $\Phi = \text{const}$ ) из-за ограничений, наложенных на угол атаки, и приходится ограничиться программой линейного изменения  $\theta(\bar{G}_T)$  с вертикальным участком в начале полета (см. выше). Для иллюстрации в табл. 24.13 приведены результаты расчетов, проведенных в различных предположениях; эта таблица подтверждает только что сделанное замечание по поводу основных источников потерь в дальности полета.

Таблица 24.13

| Программа управления   | $H_k$<br>км | $V_k$<br>м/сек | $\theta_k^\circ$ | $L_6$<br>км | $x_k$<br>км | $L_6 + x_k$<br>км |
|--|-------------|----------------|------------------|-------------|-------------|-------------------|
| $\vartheta = 35^\circ = \text{const}$  | 169         | 6100           | 19,1             | 5510        | 548         | 6058              |
| $\vartheta = 90^\circ$ ( $\bar{G}_T \leq 0,2$ ) и далее $\vartheta = 35^\circ$ | 228         | 5790           | 21,2             | 4975        | 490         | 5465              |
| Линейное изменение $\theta$ (1-е приближение)                                  | 237         | 5695           | 25,0             | 4970        | 420         | 5426              |
| То же (2-е приближение)  | 235         | 5679           | 25,0             | 4950        | 418         | 5404              |

Напомним в заключение этого параграфа, что в приведенных расчетах предполагалось, что влиянием аэродинамических сил на характер движения на участке входа в плотные слои атмосферы можно пренебречь; ошибки, связанные с этим, оценены в следующем параграфе.

## § 3. Движение ракеты на участке входа в атмосферу

После того как ракета, двигаясь по баллистической траектории, снизится до сравнительно небольших высот полета, на которых плотность воздуха уже нельзя считать равной нулю, в уравнениях движения ракеты надо принять во внимание аэродинамические силы. Аэродинамическая

сила лобового сопротивления, действующая на ракету, постепенно уменьшает скорость полета ракеты и как следствие уменьшает дальность полета ракеты, рассчитанную без учета аэродинамических сил. Можно ожидать, однако, что это уменьшение дальности полета не будет значительным, так как длина участка траектории при движении ракеты в плотных слоях атмосферы перед приземлением получается небольшой по сравнению с длиной всей траектории.

Расчеты показывают, что длина участка траектории ракет значительной дальности (5000—7000 км) при движении в атмосфере перед приземлением составляет около 3—5% длины всей траектории. Это соотношение позволяет упростить расчет движения ракеты на участке перед приземлением.

Примем, что сила тяги и аэродинамическая подъемная сила равны нулю. Первое предположение, как правило, имеет место в действительности. Второе предположение справедливо, например, в том случае, когда последняя ступень ракеты (головная часть) имеет шарообразную форму или когда в случае асимметричной формы головной части приняты меры для стабилизации положения ракеты по отношению к траектории полета с таким расчетом, чтобы подъемная сила равнялась нулю.

С учетом сделанных предположений уравнения движения головной части ракеты в проекциях на оси скоростной системы координат можно записать в следующем виде:

$$\frac{\dot{V}}{g} = -\frac{Q}{G} - \sin \theta, \quad (74.13)$$

$$\frac{V}{g} \dot{\theta} = -\cos \theta \left( 1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \frac{r_3 + H}{r_3} \right), \quad (75.13)$$

$$\dot{H} = V \sin \theta, \quad (76.13)$$

$$\dot{x} = \frac{r_3}{r_3 + H} V \cos \theta, \quad (77.13)$$

где  $V_{кр}^2 \equiv V_{кр0}^2 = g_0 r_3$ .

Эту систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях интегрируют численными методами. За начальные условия принимают условия движения ракеты по баллистической траектории на той высоте, на которой роль аэродинамических сил становится заметной, например, на высоте  $H_0 = 80$  км.

Вместо численного интегрирования можно применить графо-аналитический метод последовательных приближений, основанный на некоторых допущениях.

В силу тех же причин, как и при расчете активного участка полета баллистической ракеты, ускорение силы тяготения примем постоянным независимо от высоты полета:

$$g = g_0 = \text{const},$$

а отношение  $\frac{r_3}{r_3 + H} = 1$ .

Кроме того, массу головной части ракеты будем считать неизменной. Уравнения движения (74.13) и (75.13) при этом принимают более простой вид

$$\frac{\dot{V}}{g_0} = -\left( \sin \theta + \frac{Q}{G} \right), \quad (78.13)$$

$$\frac{1}{1 - V^2/V_{кр}^2} \frac{V}{g_0} \dot{\theta} = -\cos \theta. \quad (79.13)$$

Кинематические равенства (76.13) и (77.13) сохраняют прежний вид. Исключив при помощи (76.13) переменную  $t$  из уравнений (78.13) и (79.13), получим

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dH} = -g_0 \left( 1 + \frac{\bar{Q}}{\sin \theta} \right), \quad (80.13)$$

$$\frac{1}{1 - V^2/V_{кр}^2} V^2 \frac{d\theta}{dH} = -g_0 \operatorname{ctg} \theta, \quad (81.13)$$

где введено обозначение

$$\frac{Q}{G} = \bar{Q}.$$

Последняя ступень ракеты (головная часть) обычно представляет собой плохо обтекаемое тело, а числа Маха на участке входа в атмосферу получаются очень большими (порядка  $M = 20 \div 25$ ); в первом приближении коэффициент лобового сопротивления головки баллистической ракеты можно принять постоянным, например, равным  $c_x = 0,5$ .

Угол  $\theta$  наклона траектории к горизонту на участке входа в атмосферу изменяется в сравнительно узких пределах, так что при определении скорости полета в первом приближении его можно принять неизменным и равным  $\theta_0$  в начальный момент, соответствующий определенной высоте, на которой влияние аэродинамических сил становится заметным; за такую начальную высоту примем  $H_0 = 80$  км.

Подставив в (80.13) обычное выражение

$$Q = c_x s q,$$

получим уравнение, правая часть которого при сделанных допущениях есть функция только  $q$ :

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dH} = -g_0 \left( 1 + \frac{c_x S}{\sin \theta_0 G} q \right). \quad (82.13)$$

Так как  $\frac{V^2}{2} = \frac{q}{\rho}$ , то левую часть уравнения (82.13) можно привести к следующему виду:

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dH} = \frac{1}{\rho} \frac{dq}{dH} - q \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dH} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{dq}{dH} - q \frac{d \ln \rho}{dH} \right).$$

Если принять во внимание это выражение, то (82.13) можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $q$ :

$$\frac{dq}{dH} - f q + g_0 \rho = 0, \quad (83.13)$$

где для краткости введено обозначение

$$f = \frac{d \ln \rho}{dH} - \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} g_0 \rho.$$

Решение этого простого дифференциального уравнения будет

$$q = \exp \left( - \int_H^{H_0} f dH \right) \left[ q_0 + g_0 \int_H^{H_0} \rho \exp \left( \int_H^{H_0} f dH \right) dH \right].$$

Вычисление интеграла  $\int_H^{H_0} f dH$  дает:

$$\int_H^{H_0} f dH = \ln \left( \frac{\rho_{H_0}}{\rho_H} \right) - \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} g_0 \int_H^{H_0} \rho dH,$$

так что полученное выражение для  $q$  можно преобразовать к следующему виду:

$$q = q_0 F_1 \left( H, -\frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \right) + F_2 \left( H, -\frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \right), \quad (84.13)$$

где введены следующие обозначения:

$$F_1 = \frac{\rho_H}{\rho_{H_0}} \exp \left( g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \int_H^{H_0} \rho dH \right), \quad (84a.13)$$

$$F_2 = g_0 \rho_H \exp \left( g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \int_H^{H_0} \rho dH \right) \int_H^{H_0} \exp \left( -g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \int_H^{H_0} \rho dH \right) dH. \quad (84b.13)$$

Функции  $F_1 \left( H, -\frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \right)$  и  $F_2 \left( H, -\frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \right)$  могут быть заранее вычислены и затабулированы; таблицы этих функций приводятся (табл. 25.13 и 26.13).

Таблица 25.13

$$F_1 = \frac{\rho_H}{\rho_{H=80000}} \exp \left( g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \int_H^{80000} \rho dH \right)$$

| $g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0}$ | H км |      |       |       |      |         |           |               |
|-------------------------------------|------|------|-------|-------|------|---------|-----------|---------------|
|                                     | 80   | 60   | 40    | 30    | 20   | 10      | 5         | 0             |
| 0,003                               | 1    | 15,8 | 192,5 | 885,9 | 5040 | 45 237  | 190 669   | 1 387 545     |
| 0,004                               | 1    | 15,8 | 193,1 | 896,9 | 5340 | 59 667  | 335 148   | 3 989 110     |
| 0,005                               | 1    | 15,8 | 193,7 | 908,2 | 5659 | 78 701  | 589 104   | 11 468 458    |
| 0,006                               | 1    | 15,8 | 194,3 | 919,6 | 5997 | 103 806 | 1 035 494 | 32 971 141    |
| 0,007                               | 1    | 15,8 | 194,9 | 931,1 | 6354 | 136 919 | 1 820 132 | 94 790 090    |
| 0,008                               | 1    | 15,8 | 195,5 | 942,7 | 6734 | 180 595 | 3 199 325 | 272 515 927   |
| 0,009                               | 1    | 15,8 | 196,1 | 954,6 | 7135 | 238 202 | 5 623 591 | 783 467 241   |
| 0,010                               | 1    | 15,8 | 196,7 | 966,5 | 7561 | 314 186 | 9 884 828 | 2 252 422 170 |

Таким образом, учет аэродинамических сил, действующих на головную часть ракеты, в первом приближении осуществляется просто.

Дальнейший расчет не представляет сложности. Определив по формуле (84.13) скоростной напор  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  в зависимости от высоты полета  $H$ , нетрудно построить зависимость  $V^2(H)$  и  $V(H)$ . Имея такую зависимость, на основании уравнения (81.13) получаем

$$-\operatorname{tg} \theta d\theta = g_0 \left( 1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) \frac{dH}{V^2}.$$

$$F_2 = g_0 Q_H \exp \left( g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \int_H^{80000} Q_H dH \right) \int_H^{80000} \exp \left( -g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0} \int_H^{80000} Q_H dH \right) dH$$

| $g_0 \frac{c_x S}{G \sin \theta_0}$ | H км |     |       |       |        |        |         |            |
|-------------------------------------|------|-----|-------|-------|--------|--------|---------|------------|
|                                     | 80   | 60  | 40    | 30    | 20     | 10     | 5       | 0          |
| 0,003                               | 0    | 6,6 | 160,3 | 900,1 | 5438,7 | 31 720 | 69 363  | 186 991    |
| 0,004                               | 0    | 6,6 | 160,4 | 901,7 | 5476,4 | 32 966 | 78 515  | 299 728    |
| 0,005                               | 0    | 6,6 | 160,5 | 903,4 | 5515,3 | 34 431 | 92 007  | 559 822    |
| 0,006                               | 0    | 6,6 | 160,6 | 905,1 | 5555,3 | 36 166 | 112 277 | 1 181 809  |
| 0,007                               | 0    | 6,6 | 160,7 | 906,7 | 5596,6 | 38 234 | 143 242 | 2 710 024  |
| 0,008                               | 0    | 6,6 | 160,8 | 908,4 | 5639,1 | 40 709 | 191 228 | 6 543 240  |
| 0,009                               | 0    | 6,6 | 160,9 | 910,6 | 5682,9 | 43 691 | 266 514 | 16 314 094 |
| 0,010                               | 0    | 6,6 | 161,0 | 911,9 | 5728,1 | 47 299 | 385 877 | 41 540 839 |

Так как  $V^2 = V^2(H)$ , то переменные в этом дифференциальном уравнении разделены; решая уравнение, найдем

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \exp \left( -g_0 \int_H^{H_0} \frac{1}{V^2} \left( 1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right) dH \right). \quad (85.13)$$

Интеграл, входящий в (85.13), можно определить графическим путем. Дальность полета на участке входа в атмосферу найдем по формуле

$$x = - \int_H^{H_0} \frac{dH}{\operatorname{tg} \theta}, \quad (86.13)$$

в которой интеграл также определяют графическим путем.

Наконец, время полета определяется по (76.13):

$$t = - \int_H^{H_0} \frac{dH}{V \sin \theta}. \quad (87.13)$$

Для проведения расчета по описанному методу необходимо знать угол наклона траектории к горизонту  $\theta_0$  на начальной высоте полета  $H_0$ , начиная с которой аэродинамические силы принимаются во внимание (эту начальную высоту мы приняли равной  $H_0 = 80$  км). Для тангенса угла  $\theta_0$  получается следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = - \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_0} \sqrt{-1 + \frac{\bar{r}_0}{\bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1 \bar{r}_1^2} \left[ 2 - \left( \frac{2}{\bar{r}_1} - \bar{V}_1^2 \right) \bar{r}_0 \right]}, \quad (88.13)$$

где знаком «1» отмечены величины, относящиеся к началу полета по баллистической траектории, и  $\bar{r}_0$ , как мы условились, соответствует высоте  $H_0 = 80$  км, т. е.

$$\bar{r}_0 = 1,0126.$$

Действительно, уравнение равновесия сил в проекциях на направление радиуса  $r$  в принятой нами инерциальной полярной системе координат имеет следующий вид:

$$\dot{V}_r - V_s \dot{\alpha} = -g = -g_0 \frac{r_3^2}{r^2}. \quad (89.13)$$

Так как тангенциальная составляющая скорости связана с угловой скоростью  $\dot{\alpha}$  соотношением

$$V_s = r \dot{\alpha}$$

и так как в силу постоянства момента количества движения

$$V_s = V_{s1} \frac{r_1}{r},$$

то произведение  $V_s \dot{\alpha}$  можно представить в виде

$$V_s \dot{\alpha} = V_s \frac{V_s}{r} = \frac{V_{s1}^2 r_1^2}{r^3}.$$

Далее

$$\dot{V}_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{dr} \frac{dr}{dt} = 0,5 \frac{dV_r^2}{dr}.$$

Таким образом, уравнение движения (89.13) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dV_r^2}{dr} = 2 \left[ \frac{V_{s1}^2 r_1^2}{r^3} - g_0 \frac{r_3^2}{r^2} \right]. \quad (90.13)$$

Имея в виду, что

$$V_{кр0}^2 = g_0 r_3,$$

и переходя к относительным обозначениям, (90.13) приведем к виду

$$\frac{d\bar{V}_r^2}{d\bar{r}} = \frac{1}{\bar{r}^2} \left( 2 \bar{r}_1^2 \frac{\bar{V}_{s1}^2}{\bar{r}} - 2 \right). \quad (91.13)$$

Интегрируя уравнение (91.13), для радиальной составляющей скорости получим следующее выражение:

$$\bar{V}_r = \pm \sqrt{\bar{V}_1^2 + \frac{1}{\bar{r}} \left[ 2 - \frac{2\bar{r}}{\bar{r}_1} - \bar{V}_{s1}^2 \frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}} \right]}, \quad (92.13)$$

где знак плюс соответствует восходящей ветви траектории, а минус — нисходящей, которая нас и интересует.

Так как

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_r}{V_s},$$

то, используя полученные выражения, после несложных преобразований придем к формуле (88.13).

Расчет показывает, что хотя аэродинамические силы заметно снижают конечную скорость полета головной части баллистической ракеты, это снижение получается в основном на малых высотах в конце полета; поэтому расстояние по горизонтали, которое ракета проходит во время входа в атмосферу, из-за действия аэродинамических сил изменяется несильно. Для иллюстрации на рис. 30.13 показана зависимость скорости полета  $V$  от высоты  $H$ , построенная по результатам расчета первого приближения, описанного выше. Там же для сравнения приведена кривая, полученная без учета аэродинамических сил. Как видно, лобовое

сопротивление головной части баллистической ракеты существенно снижает конечную ее скорость. Несмотря на такое заметное изменение скорости, расстояние  $x$  вследствие влияния аэродинамических сил изменяется несильно, уменьшаясь всего на 10 км (по расчету получается  $x = 140$  км вместо 150 км — без учета аэродинамических сил).

Итак, в первом приближении при расчете дальности полета баллистической ракеты на участке входа в атмосферу можно не принимать во внимание аэродинамические силы, действующие на ракету.

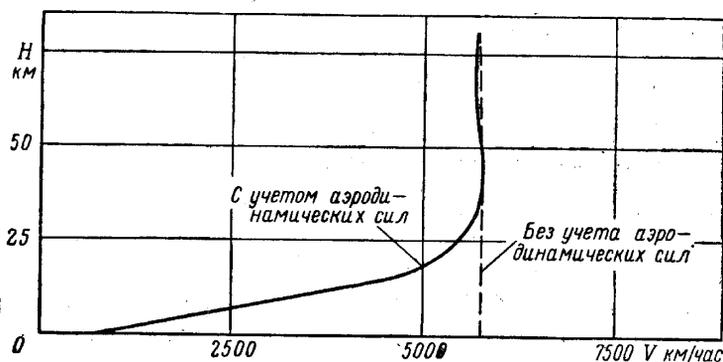


Рис. 30.13. Зависимость высоты полета от скорости баллистической ракеты на участке входа в атмосферу с учетом и без учета аэродинамических сил

#### § 4. Расчет траектории полета ракетоплана

Как показано в предыдущих параграфах этой главы, если баллистической ракете сообщены достаточная скорость и достаточно большая высота полета, такие, что силой лобового сопротивления можно пренебречь, то в дальнейшем ракета совершает полет по баллистической кривой под действием только силы тяготения. При достаточно большой начальной скорости полета оказывается возможным реализовать большую дальность полета баллистической ракеты.

Большую дальность полета можно получить и иным путем, используя аэродинамическую подъемную силу. Предположим, что летательный аппарат, имеющий крылья — самолет (*ракетоплан*) — при помощи ракетносителя, как и баллистическая ракета, поднят на определенную высоту и на этой высоте имеет достаточно большую скорость полета. Если начальная высота полета не слишком велика (40—60 км), то аэродинамические силы на этой высоте не настолько малы, чтобы ими можно было пренебрегать. В частности, на крылья такого ракетоплана будет действовать аэродинамическая подъемная сила, которая будет уравновешивать часть силы тяготения. Поэтому для получения той же дальности полета, что и у баллистической ракеты, потребуется меньший запас топлива на борту носителя (по сравнению с баллистической ракетой) для сообщения *ракетоплану* необходимой начальной скорости полета.

Высказанные соображения — не единственные, обосновывающие перспективность аппаратов типа ракетоплана. По сравнению с баллистической ракетой ракетоплан обладает тем огромным преимуществом, что в продолжение полета он может выполнять маневры, в то время как баллистическая ракета осуществляет полет по одной, определенной начальными условиями, траектории. На заимствованном из [39] рис. 31.13 показаны возможности изменения направления полета ракетоплана, обладающего различным по величине аэродинамическим качеством. Как

видно, возможности эти достаточно велики и дают ракетоплану огромное качественное преимущество по сравнению с баллистической ракетой.

Из всего сказанного вытекает целесообразность исследования полета летательного аппарата с крыльями в верхних слоях атмосферы при скоростях, соизмеримых с круговой скоростью (см. гл. II).

Приступая к рассмотрению этого вопроса, сделаем прежде всего следующее замечание.

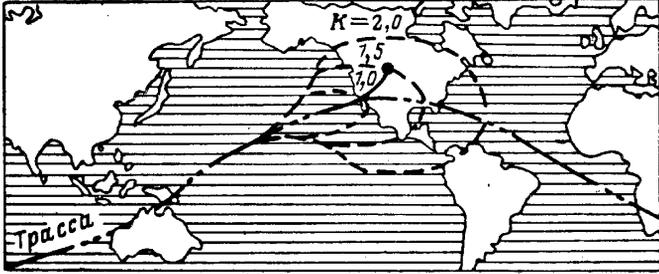


Рис. 31.13. Маневренные возможности ракетоплана

В процессе суточного вращения вместе с Землей вращаются и прилегающие к Земле слои атмосферы. Поэтому в общем случае скорость потока воздуха, набегающего на летательный аппарат, не лежит в плоскости траектории полета. Отсюда следует, что полет происходит с некоторым углом скольжения, и поэтому на летательный аппарат действует боковая аэродинамическая сила, которая стремится вывести его из плоскости, например, из плоскости большого круга, проходящей через центр земного шара. Для того чтобы обеспечить плоскую траекторию полета, при этом необходимо парировать тенденцию к сносу соответствующим отклонением элеронов и руля направления.

Более подробное исследование этого вопроса (см. [39]) приводит к выводу, что при изучении общих динамических свойств ракетоплана в первом приближении допустимо пренебрегать неколлинеарностью векторов скорости полета и скорости набегающего потока. При этом эффект суточного вращения Земли может учитываться чисто кинематически, а в уравнениях движения можно положить  $\omega_3 = 0$ .

Имея в виду это упрощающее предположение, запишем уравнения движения летательного аппарата в проекциях на скоростные оси координат (40.5) — (41.5)

$$\dot{V} = - \left( g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right), \quad (93.13)$$

$$\dot{\theta} = \frac{Y}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta + \frac{V \cos \theta}{r_3 + H}. \quad (94.13)$$

При составлении уравнений (93.13) — (94.13) сила тяги движителя принята равной нулю ( $P=0$ ), так как именно этот случай представляет технический интерес.

К уравнениям движения (93.13) — (94.13) добавляются кинематические уравнения:

$$\dot{H} - V \sin \theta = 0, \quad (95.13)$$

$$\dot{x} - \frac{r_3}{r_3 + H} V \cos \theta = 0. \quad (96.13)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (93.13) — (96.13) в общем случае можно осуществить только численными методами с привлечением машинной техники, даже при значительных упрощениях в постановке задачи, как, например, допущение о постоянном аэродинамическом качестве в процессе полета. Однако, не ставя себе целью получить аналитическое решение уравнений, можно провести качественный анализ, который даст некоторую информацию о целесообразном характере управления ракетопланом.

Предположим, что вход ракетоплана в плотные слои атмосферы совершается с некоторым положительным углом атаки  $\alpha > 0$ , т. е. с некоторым положительным значением коэффициента подъемной силы  $c_y > 0$ .

Если угол  $\theta$  траектории к горизонту на начальной высоте (на высоте, где начинает сказываться плотность воздуха — около 60—80 км) достаточно велик, то ракетоплан сравнительно быстро снижается и проникает в плотные слои атмосферы. Аэродинамическая подъемная сила при этом быстро увеличивается, так что правая часть уравнения (94.13), вначале имевшая отрицательный знак, проходит через нуль и становится положительной. Наклон траектории к горизонту уменьшается, проходит через нуль и изменяет свой знак, как схема-

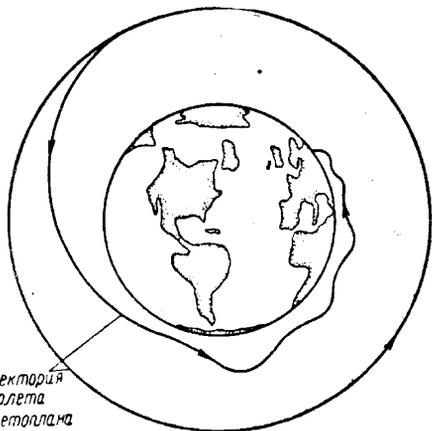


Рис. 32.13. Характер движения ракетоплана при больших углах атаки и больших углах входа в атмосферу

тически показано на рис. 32.13. Ракетоплан начинает вновь набирать высоту, двигаясь с положительными углами  $\theta$ . Плотность воздуха при этом убывает, подъемная сила уменьшается и угловая скорость  $\dot{\theta}$  убывает и становится отрицательной. Через некоторое время ракетоплан снова начинает полет со снижением и описанный процесс повторяется. Траектория полета ракетоплана при достаточно больших  $\alpha$  и  $|\theta|$  получается волнообразной. Рассматривая второе уравнение движения (93.13), можно прийти к выводу, что вследствие работы силы лобового сопротивления  $Q$  скорость полета ракетоплана  $V$  на каждой следующей волне получается меньшей, чем на предыдущей. Угол  $\theta$  наклона траектории к горизонту, равный нулю на вершине каждой волны, по мере снижения ракетоплана убывает, достигает минимума на некоторой высоте  $H_*$  (эту высоту иногда называют «равновесной»), опять возрастает, проходит через нуль во впадине волны, достигает максимума на высоте  $H_*$  и т. д. Угловая скорость  $\dot{\theta}$ , отрицательная в первой фазе волны, проходит через нуль в точках  $H_*$ . Положив в (94.13)  $\dot{\theta} = 0$ , получим связь между скоростью  $V_*$ , соответствующей высоте  $H_*$ , этой высотой и углом  $\theta_*$ :

$$\bar{V}_*^2 = \frac{\cos \theta_*}{\cos \theta_* (1 + H_*/r_3) + (c_y S \rho_*/2G) V_{кр}^2}$$

Полагая угол  $\theta_*$  небольшим и принимая  $\cos \theta_* = 1$ , это выражение перепишем в следующем виде:

$$\bar{V}_*^2 = \frac{1}{1 + \frac{H_*}{r_3} + \frac{c_y S \rho_*}{2G} V_{кр}^2} \quad (97.13)$$

Здесь обозначено  $\bar{V}_* = \frac{V_*}{V_{кр}}$ , где  $V_{кр}$  — круговая скорость на уровне моря.

Так как при переходе от одной волны к следующей скорость уменьшается, то из (97.13) следует, что высота полета  $H_*$  при этом уменьшается, так как  $\rho_*$  должно увеличиваться. Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что средняя высота волнообразной траектории полета ракетоплана с течением времени будет убывать и в конце концов ракетоплан приземлится. Примерный вид волнообразной траектории полета показан на рис. 33.13.

Если аэродинамическое качество ракетоплана достаточно мало (подъемная сила мала по сравнению с силой лобового сопротивления), то вместо волнообразной траектории полета может реализоваться траектория плавного снижения с медленно увеличивающимися по абсолютной

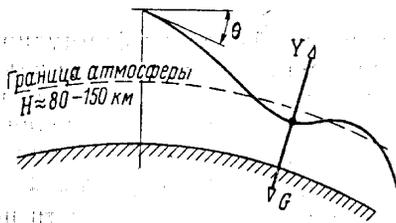


Рис. 33.13. Схематическое изображение волнообразной траектории полета ракетоплана

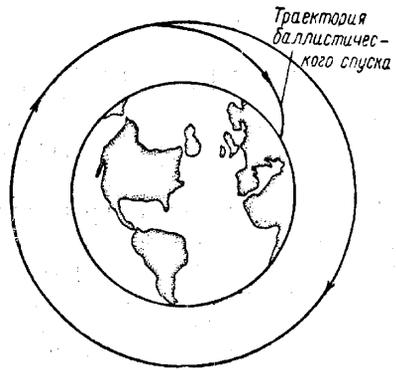


Рис. 34.13. Схематическое изображение траектории баллистического спуска ракетоплана

величине углами  $\theta$ , так как при малой подъемной силе  $Y$  знак правой части уравнения (94.13) все время будет отрицательным. Приблизительно такой же характер траектории получится и в случае баллистического спуска летательного аппарата с нулевой подъемной силой. Траектория баллистического спуска схематически изображена на рис. 34.13.

Ограничившись приведенными качественными изображениями, дающими некоторую информацию о программировании полета корабля до его входа в плотные слои атмосферы, рассмотрим задачу об оптимальном управлении ракетопланом в упрощенной ее постановке. Формулируем эту задачу.

*Найти закон изменения угла атаки крыльев ракетоплана, обеспечивающий достижение наибольшей возможной дальности полета при снижении с заданной высоты и при заданной начальной скорости полета.*

При решении этой задачи, как уже упоминалось, не будем принимать во внимание суточное вращение Земли, т. е. примем  $\omega_3 = 0$ . Кроме того, имея в виду, что диапазон изменения высоты полета ракетоплана при его движении в плотных слоях атмосферы невелик по сравнению с радиусом земного шара, будем считать ускорение тяготения  $g = \text{const}$  независимо от высоты полета. Наконец, в уравнениях (94.13) и (96.13) отношение  $\frac{r_3}{r_3 + H}$  примем равным единице<sup>1</sup>, заменив, следовательно (94.13), равенством

<sup>1</sup> Это допущение не является принципиально необходимым, оно лишь упрощает формулы, получающиеся в результате решения.

$$\dot{\theta} = \frac{Y}{mV} - \frac{g}{V} \cos \theta + \frac{V \cos \theta}{r_3}, \quad (94a.13)$$

а (96.13)

$$\dot{x} - V \cos \theta = 0. \quad (96a.13)$$

Основным функционалом рассматриваемой вариационной задачи, которую будем решать в форме Майера, является

$$J = -x_k.$$

В соответствии с правилами, изложенными в гл. I, вспомогательный функционал

$$J_a = -x_k + \int_{t_1}^{t_2} F dt, \quad (98.13)$$

где обозначено:

$$F = \lambda_1 \left( \dot{V} + g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right) + \lambda_2 \left( \dot{\theta} - \frac{Y}{mV} + \frac{g}{V} \cos \theta - \frac{V \cos \theta}{r_3} \right) + \lambda_3 (\dot{x} - V \cos \theta) + \lambda_4 (\dot{H} - V \sin \theta). \quad (99.13)$$

Не останавливаясь на решении вариационной задачи в формулированной «точной» ее постановке (это решение аналогично решению задачи о подъеме летательного аппарата, рассмотренной в гл. VIII), внесем в постановку задачи упрощение, основанное на следующих соображениях.

При значительной дальности полета (а именно значительная дальность и представляет практический интерес) углы наклона  $\theta$  траектории к горизонту малы, а угловая скорость  $\dot{\theta}$  поворота вектора скорости полета также невелика. Без большой погрешности можно положить поэтому

$$\dot{\theta} \approx 0, \quad \cos \theta \approx 1.$$

Определив таким образом предположения, упрощающие решение задачи, приступим к самому решению.

Уравнение (94.13) при сделанных допущениях принимает вид

$$Y = G \left( 1 - \frac{V^2}{gr_3} \right) = G \left( 1 - \frac{V^2}{V_{кр}^2} \right). \quad (100.13)$$

Так как в остальные уравнения подъемная сила  $Y$  входит только через силу лобового сопротивления

$$Q = Q(H, V, Y), \quad (101.13)$$

которая, в свою очередь, входит только в уравнение (93.13), исключим из функции  $F$  связь (94a.13), а при составлении уравнений Эйлера будем иметь в виду выражение (101.13) и связь (100.13). Таким образом, например, частную производную  $\frac{\partial Q}{\partial V}$  запишем в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial V} = Q^V + Q^Y Y^V = Q^V - Q^Y \frac{2GV}{V_{кр}^2},$$

где согласно (100.13)

$$Y^V = - \frac{2GV}{V_{кр}^2}.$$

Неизвестными функциями в задаче являются

$$V(t), H(t), x(t), \theta(t).$$

Составляя уравнения Эйлера, будем иметь

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{m} \left( Q^V - Q^Y \frac{2GV}{V_{кр}^2} \right) - \lambda_3 - \lambda_4 \sin \theta, \quad (102.13)$$

$$\dot{\lambda}_4 = \frac{\lambda_1}{m} Q^H, \quad (103.13)$$

$$\lambda_4 = \lambda_1 \frac{g}{V}, \quad (104.13)$$

$$\lambda_3 = \text{const.} \quad (105.13)$$

Так как независимое переменное  $t$  в выражение функции  $F$  в явном виде не входит, можно записать выражение первого интеграла

$$\lambda_1 \dot{V} + \lambda_3 \dot{x} + \lambda_4 \dot{H} = c. \quad (106.13)$$

Далее, применяя условия трансверсальности (76а.1) и (80.1), найдем

$$\lambda_3 = 1, \quad c = 0,$$

так что (106.13) можно переписать в виде

$$\lambda_1 \dot{V} + \lambda_4 \dot{H} = -\dot{x}. \quad (106а.13)$$

Из соотношений (104.13), (106а.13) и уравнений движения летательного аппарата, исключив  $\lambda_4$ , получим

$$\lambda_1 = \frac{mV}{Q}. \quad (107.13)$$

Взяв производную по  $t$  от обеих частей (107.13), найдем

$$\dot{\lambda}_1 = \frac{m}{Q^2} (Q\dot{V} - V\dot{Q}). \quad (108.13)$$

Приняв во внимание уравнения (93.13) и (95.13), а также выражение

$$\dot{Q} = Q^H \dot{H} + Q^V \dot{V} + Q^Y V \dot{V},$$

равенство (108.13) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 = \frac{m}{Q^2} \left[ -Q \left( g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right) - Q^H V^2 \sin \theta + Q^V V \left( g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right) - \right. \\ \left. - V Q^Y \frac{2GV}{V_{кр}^2} \left( g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right) \right]. \quad (109.13) \end{aligned}$$

Теперь при помощи (104.13), (107.13) и (109.13), исключив множители Лагранжа  $\lambda_j$  из уравнения (102.13), получим

$$\begin{aligned} \frac{m}{Q^2} \left[ -Q \left( g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right) - Q^H V^2 \sin \theta + Q^V V \left( g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2GV^2}{V_{кр}^2} Q^Y \left( g \sin \theta + \frac{Q}{m} \right) \right] = \frac{V}{Q} \left( Q^V - Q^Y \frac{2GV}{V_{кр}^2} \right) - 1 - \frac{g}{V} \sin \theta \frac{mV}{Q}. \quad (110.13) \end{aligned}$$

Сократив в (110.13) подобные члены и приняв во внимание равенство (100.13), приходим к следующему уравнению экстремали:

$$\frac{\partial Q}{\partial V} - \frac{V}{g} \frac{\partial Q}{\partial H} = 0. \quad (111.13)$$

Введя энергетическую высоту

$$H_g = H + \frac{V^2}{2g},$$

вместо (111.13) можем написать

$$\frac{\partial Q}{\partial V} \Big|_{H_g = \text{const}} = 0. \quad (112.13)$$

Уравнение экстремали (111.13) есть конечное (алгебраическое) уравнение, определяющее на плоскости  $(H, V)$  кривую, которая в общем случае не проходит через заданную начальную точку  $(H_1, V_1)$ . Такой результат является следствием того, что рассмотренная вариационная задача относится к числу вырожденных задач, для которых экстремали не удовлетворяют граничным условиям. С подобным вопросом мы встречались в гл. VIII при рассмотрении задачи о подъеме летательного аппарата, а также в § 2 этой главы.

В первом приближении поляру летательного аппарата можно выразить в аналитической форме:

$$c_x = c_{x0} + Bc_y^2, \quad (113.13)$$

где в общем случае  $c_{x0}$  и  $B$  — некоторые функции чисел Маха и Рейнольдса:

$$c_{x0} = c_{x0}(M, R), \quad B = B(M, R).$$

Выражение для силы лобового сопротивления  $Q$  с учетом (113.13) получается следующее:

$$Q = \frac{c_{x0} S V_{кр}^2}{2} \rho \bar{V}^2 + 2B \frac{Y^2}{S \rho V_{кр}^2 \bar{V}^2}. \quad (114.13)$$

На больших высотах полета, свойственных ракетоплану, атмосферу в первом приближении можно принять изотермической ввиду того, что температура воздуха на этих высотах изменяется сравнительно слабо. Кроме того, в первом приближении можно пренебречь зависимостью коэффициента лобового сопротивления  $c_x$  от числа Рейнольдса. Из первого предположения вытекает экспоненциальный закон изменения плотности воздуха (см. гл. IV)

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta H),$$

где в качестве среднего значения  $\beta$  можно принять

$$\beta = \frac{1}{6318} [m^{-1}].$$

Из второго предположения следует, что коэффициент  $c_{x0}$  есть функция только числа Маха, так же как и коэффициент  $B$ . Из допущения изотермичности атмосферы получается следующее выражение для  $M$ :

$$M = \frac{V}{a} = \frac{V_{кр}}{a} \bar{V} = M_{кр} \bar{V},$$

где, если принять скорость звука на больших высотах

$$a \approx 300 \text{ м/сек},$$

число Маха

$$M_{кр} = 26,33.$$

Имея в виду сделанные допущения и взяв производные по  $H$  и по  $V$  от выражения (114.13), получим с учетом (100.13)

$$\frac{\partial Q}{\partial H} = \left[ -\frac{SV_{кр}^2}{2} c_{x0} \rho \bar{V}^2 + \frac{2G^2}{SV_{кр}^2} \frac{(1-\bar{V}^2)^2}{\bar{V}^2} B \frac{1}{\rho} \right] \beta$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \bar{V}} = & \frac{SV_{кр}^2}{2} \rho \bar{V} (2c_{x0} + 26,33c_{x0}^M \bar{V}) + \\ & + \frac{2G^2}{SV_{кр}^2} \frac{1-\bar{V}^2}{\bar{V}^2} \frac{1}{\rho} \left[ 26,33B^M (1-\bar{V}^2) - 2B \frac{1+\bar{V}^2}{\bar{V}} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение экстремали (111.13) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{SV_{кр}^2}{2} \rho \bar{V} \left[ 2c_{x0} + 26,33c_{x0}^M \bar{V} + \frac{V_{кр}^2}{g} c_{x0} \bar{V}^2 \beta \right] - \\ & - \frac{2G^2}{SV_{кр}^2} \frac{1-\bar{V}^2}{\rho \bar{V}^2} \left[ -26,33B^M (1-\bar{V}^2) + \frac{2B}{\bar{V}} (1+\bar{V}^2) + \right. \\ & \left. + \frac{BV_{кр}^2}{g} \beta \bar{V} (1-\bar{V}^2) \right] = 0, \end{aligned} \quad (115.13)$$

где

$$\frac{\beta V_{кр}^2}{g} = 1010.$$

Соотношение (115.13) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной  $\rho$ ; определяя эту неизвестную, получим

$$\begin{aligned} \rho = & 0,32 \cdot 10^{-7} \frac{G}{S} \frac{1}{\bar{V}} \sqrt{\frac{1-\bar{V}^2}{\bar{V}}} \times \\ & \times \sqrt{\frac{B \left[ 1010\bar{V} (1-\bar{V}^2) + 2 \frac{1+\bar{V}^2}{\bar{V}} \right] - 26,33B^M (1-\bar{V}^2)}{c_{x0} (2 + 1010\bar{V}^2) + 26,33c_{x0}^M \bar{V}}}. \end{aligned} \quad (116.13)$$

Так как плотность воздуха  $\rho$  есть функция высоты полета  $H$ , то уравнение (116.13) связывает высоту полета  $H$  с безразмерной скоростью полета  $\bar{V}$ . Задаваясь рядом скоростей  $\bar{V}$  по формуле (116.13), найдем соответствующие значения  $\rho$  и, следовательно, высоту  $H$ .

После того как определена зависимость  $\bar{V} = \bar{V}(H)$ , нетрудно найти углы наклона траектории к горизонту  $\theta$  в зависимости от высоты полета  $H$ . Действительно, так как

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dH} \frac{dH}{dt} = V \sin \theta \frac{dV}{dH},$$

из уравнения (93.13) получаем

$$\sin \theta = -\frac{Q}{G} \frac{1}{1 + \frac{V}{g} \frac{dV}{dH}} = -\frac{Q}{G} \frac{1}{1 + 6,371 \cdot 10^6 \bar{V} \frac{d\bar{V}}{dH}},$$

а приняв во внимание (100.13),

$$\sin \theta = -\frac{1}{K} \frac{1 - \bar{V}^2}{1 + 6,371 \cdot 10^6 \bar{V} \frac{d\bar{V}}{dH}}. \quad (117.13)$$

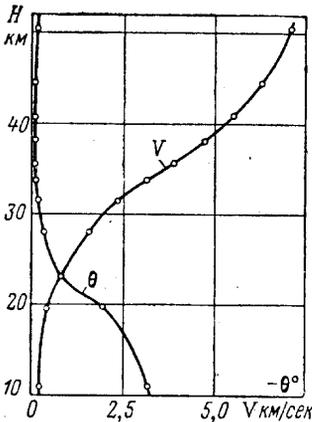


Рис. 35.13. Зависимость угла наклона траектории  $\theta$  и скорости  $V$  ракетоплана от высоты полета  $H$  (пример)

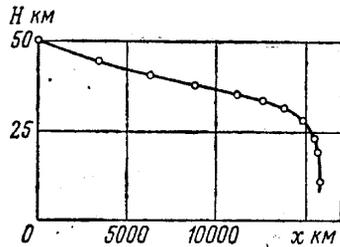


Рис. 36.13. Зависимость высоты полета ракетоплана  $H$  от расстояния по горизонтали  $x$  (пример)

Дальность полета ракетоплана определяется как интеграл уравнения

$$dx = \operatorname{ctg} \theta dH$$

или при сделанных выше допущениях

$$dx \approx \frac{dH}{\sin \theta}.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$x = \int_{H_1}^H \frac{dH}{\sin \theta}. \quad (118.13)$$

Наконец время полета ракетоплана найдем по формуле, получающейся из (95.13):

$$t = \int_{H_1}^H \frac{dH}{V \sin \theta}. \quad (119.13)$$

На рис. 35.13—37.13 показаны результаты проведенного таким способом расчета для следующих основных данных гипотетического ракетоплана: полетный вес  $G=117\,720 \text{ н}=12\,000 \text{ кг}$  и площадь крыльев  $S=60 \text{ м}^2$ . Аэродинамические характеристики ракетоплана, выбранные для примерного расчета, представлены на рис. 38.13.

Как видно из рис. 35.13—37.13, траектория полета ракетоплана получается пологой; только в самом конце полета угол наклона траектории к горизонту  $\theta$  начинает возрастать сравнительно интенсивно. На всем протяжении полета угол  $\theta$  не превышает  $3,5^\circ$ , так что сделанные выше предположения о том, что  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\theta \approx 0$ , близки к действительности.

Как видно из приведенного примера, большие дальности могут быть реализованы и при помощи ракетоплана. Значительную часть времени, однако, полет ракетоплана протекает на сравнительно небольших высотах с относительно большими скоростями (см. рис. 35.13 и 36.13). Такие режимы полета приводят к высоким температурам поверхности летательного аппарата. Для суждения о степени нагрева на рис. 37.13 нанесена кривая равновесной температуры  $T_{п.р}$  (см. гл. III), рассчитанная для плоской пластинки при турбулентном пограничном слое. Из рис. 37.13 видно, что температура поверхности пластинки в течение почти часа превышает  $800^\circ \text{К}$ .

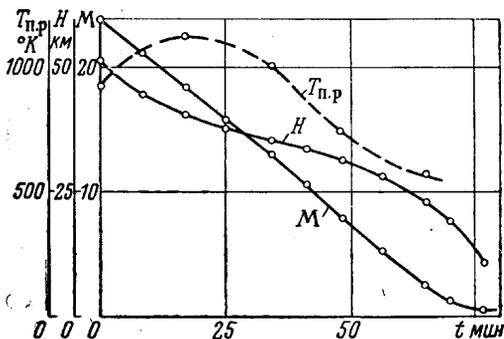


Рис. 37.13. Зависимость высоты полета  $H$  и числа  $M$  ракетоплана от времени  $t$  (пример). Пунктиром нанесена кривая равновесной температуры плоской пластинки

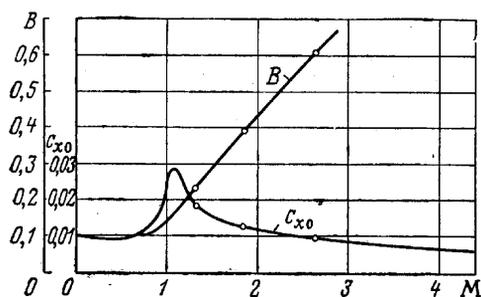


Рис. 38.13. Аэродинамические характеристики ракетоплана

Сделаем еще одно замечание. Полученная выше экстремаль определяет требуемые скорости полета  $V$  и углы наклона траектории к местной горизонтальной плоскости  $\theta'$  в зависимости от высоты полета. Таким образом, если задаться начальной высотой полета  $H_1$ , то требуемая скорость  $V_1$  и угол наклона траектории  $\theta_1$  определяются однозначно. Следовательно, активный участок полета ракетоплана должен программироваться таким образом, чтобы в его конце были обеспечены определенные угол наклона  $\theta_1$  и скорость полета  $V_1$ . Задачи такого типа рассмотрены в § 2 этой главы.

Анализ результатов расчетов показывает, что оптимальные режимы полета ракетопланов получаются близкими к режимам максимального качества для каждого числа  $M$ . Только на очень больших и очень малых высотах полета оптимальный режим не вполне совпадает с режимом максимального качества. Это позволяет упростить задачу, предположив с самого начала, что полет происходит на режиме максимального качества; при этом отпадает часть расчетов, посвященная определению оптимальных режимов, что является существенным упрощением.

Мы рассмотрели вариационную задачу об оптимальной программе полета ракетоплана в ее простейшей постановке. Можно было бы рассмотреть более сложные, но и более интересные задачи, в которых ограничивается температура поверхности летательного аппарата и вводятся другие ограничения на управление и на фазовые координаты; здесь имеется обширное поле деятельности для исследователя.

## ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА КОСМИЧЕСКИХ КОРАБЛЕЙ

### § 1. Характер движения искусственных спутников Земли

#### Вывод искусственного спутника Земли на орбиту

Орбита, на которую выведен искусственный спутник Земли (ИСЗ), с течением времени не остается неизменной. Это объясняется рядом причин, среди которых главными являются существование хотя и небольших, но постоянно действующих на спутник аэродинамических сил, которые за большой промежуток времени могут привести к значительным изменениям траектории, и переменность с течением времени гравитационного

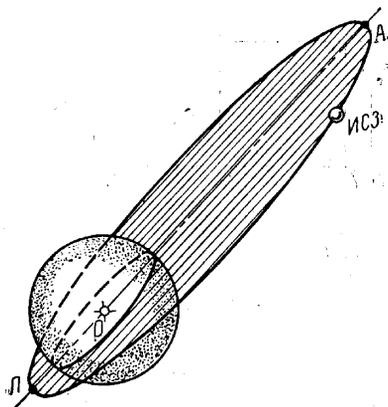


Рис. 1.14. Эллиптическая орбита искусственного спутника Земли

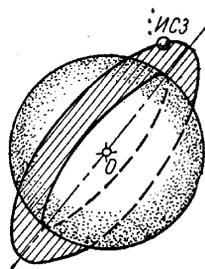


Рис. 2.14. Частный случай орбиты ИСЗ

поля, обусловленная влиянием других небесных тел и прежде всего Луны. Кроме того, на характер движения искусственного спутника Земли влияют и менее существенные факторы. Эти обстоятельства, безусловно, надо принимать во внимание при определении, например, времени существования спутника, его географического положения (по отношению к поверхности Земли) в каждый момент времени и в других подобных случаях.

Соответствующие таким задачам расчеты оказываются сложными и кропотливыми и выходят за пределы объема этой книги. Однако если ограничиться исследованием движения спутников на небольшом интервале времени вслед за запуском, то действительное движение спутника можно заменить более простым, сведя задачу к сравнительно простой задаче двух тел. Решение задачи еще более упрощается, если исходить из кеплерова центрального поля тяготения и не принимать во внимание сплюснутость Земли и ее суточное вращение при определении силы притяжения. В дальнейшем будем основываться именно на этих, упрощающих решение задачи, предположениях.

Траектория полета искусственного спутника Земли при этих допущениях, как показано в гл. II, представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого помещается центр земного шара (рис. 1.14). На траектории можно отметить точки *A* апогея (наибольшего удаления) и *П* перигея (наибольшего приближения спутника к поверхности Земли). Частным случаем эллиптической траектории спутника является окружность с центром в центре земного шара (рис. 2.14). Время обращения искус-

ственного спутника Земли, скорость в различных точках траектории, высота в перигее и апогее и т. п. определяются по методам, изложенным в гл. II. В настоящем параграфе основное внимание уделено задачам, связанным с выводом искусственного спутника Земли на ту или иную орбиту. Ясно, что главный интерес представляют такие законы управления ракетой-носителем с размещенным на ней ИСЗ, которые обеспечивают наименьшие энергетические затраты, например, наименьший расход топлива, потребного для вывода ИСЗ на орбиту. Рассмотрим некоторые задачи такого рода, относящиеся к классу вариационных.

**Вывод ИСЗ на орбиту без учета сопротивления атмосферы.** Решение уравнений движения получается особенно простым, если не принимать во внимание аэродинамические силы, действующие на ракету-носитель во время ее полета в плотных слоях атмосферы. Для спутника, запускаемого с поверхности Земли, такое решение, конечно, будет иметь приближенный характер. Для спутника, запускаемого с Луны, на которой атмосфера отсутствует, это решение становится очень близким к действительности. Однако и для ИСЗ подобная постановка задачи имеет определенный смысл, так как позволяет сделать некоторые общие заключения.

Пренебрегая аэродинамическими силами, будем считать, что единственными силами, действующими на ракету-носитель, являются сила тяги двигателя и сила тяжести. Кривизной Земли<sup>1</sup> и ее суточным вращением будем пренебрегать, а ускорение силы тяжести считать неизменным для всех высот полета. Задача заключается в отыскании такого закона изменения силы тяги в функции времени (по величине и направлению), чтобы по заданной конечной высоте полета  $H_k$  вертикальная составляющая скорости ИСЗ  $V_{yk}$  была равна нулю, а горизонтальная составляющая  $V_{xk}$  имела наибольшее возможное значение<sup>2</sup>.

Уравнения движения ИСЗ в проекциях на оси земной системы координат (см. гл. III) имеют вид

$$\Phi_1 \equiv \dot{V}_{xg} - \frac{P}{m} \cos \varphi = 0, \quad (1.14)$$

$$\Phi_2 \equiv \dot{V}_{yg} - \frac{P}{m} \sin \varphi + g = 0, \quad (2.14)$$

где через  $\varphi$  обозначен угол между осью двигателя и земной осью  $Ox_g$  (если двигатель неподвижно соединен с ракетой, то угол  $\varphi$  тождественен углу тангажа  $\phi$ ).

Кинематические связи, наложенные на движение, следующие:

$$\Phi_3 \equiv \dot{x} - V_{xg} = 0, \quad (3.14)$$

$$\Phi_4 \equiv \dot{H} - V_{yg} = 0. \quad (4.14)$$

Введем вместо силы тяги  $P$  новую переменную

$$v = \int_0^t \frac{P}{m} dt. \quad (5.14)$$

<sup>1</sup> Такой подход (поле тяготения — плоскопараллельное), конечно, возможен только до момента сообщения ИСЗ необходимой орбитальной скорости. Очевидно, дальнейшее движение ИСЗ по орбите необходимо рассматривать с учетом кривизны Земли (поле тяготения — центральное). Мы должны предположить, что, следовательно, в момент вывода ИСЗ на орбиту поле тяготения мгновенно превращается из плоскопараллельного в центральное.

<sup>2</sup> Такая задача была решена в [47].

Очевидно, скорость  $v$  есть идеальная или характеристическая скорость (см. стр. 11).

Если (5.14) подставить в уравнения движения (1.14) и (2.14), то эти уравнения примут вид

$$\dot{V}_{xg} - \dot{v} \cos \varphi = 0; \quad (1a.14)$$

$$\dot{V}_{yg} - \dot{v} \sin \varphi + g = 0, \quad (2a.14)$$

где

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{P}{m}.$$

Как показано в гл. II, полная энергия тела (например, ИСЗ) на эллиптической орбите увеличивается с увеличением высоты перигея<sup>1</sup>, так как согласно формулам (76.2) и (79.2)

$$h = -\frac{\mu}{a} = -\mu \frac{1-e}{r_{\Pi}}.$$

Целесообразно поэтому программу управления на активном участке полета ИСЗ подчинить достижению наибольшей возможной энергии, выбрав в качестве функционала вариационной задачи именно высоту перигея  $H_{\Pi}$  или радиус  $r_{\Pi}$ .

Из аналитической геометрии известна связь между параметром эллипса  $p$ , радиусом перигея  $r_{\Pi}$  и эксцентриситетом  $e$ :

$$p = r_{\Pi}(1+e). \quad (6.14)$$

С другой стороны, в гл. II были получены следующие выражения, связывающие  $p$  и  $e$  со скоростью  $V_1$ , радиусом  $r_1$  и углом наклона траектории к горизонту  $\theta_1$  в начале движения по эллиптической орбите [см. формулы (74.2) и (73.2)]:

$$p = r_3 \bar{r}_1 \bar{V}_1^2 \cos^2 \theta_1, \quad (7.14)$$

$$e^2 = 1 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1 \cos^2 \theta_1 (2 - \bar{V}_1^2 \bar{r}_1), \quad (8.14)$$

где скорость  $V_1$  отнесена к круговой скорости на уровне моря<sup>2</sup> ( $V_{\text{кpo}} = 7,9 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$ ), а радиус  $r_1$  — к радиусу земного шара ( $r_3 = 6371 \text{ км}$ ).

Исключив из (6.14) — (8.14) скорость  $\bar{V}_1$  и параметр  $p$ , получим

$$\bar{V}_1^2 = \frac{1}{\bar{r}_1} (1 + \sqrt{1 - (1 - e^2) \sec^2 \theta_1}), \quad (9.14)$$

$$\bar{r}_{\Pi} = \bar{r}_1 \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - e^2) \sec^2 \theta_1}}{(1 + e) \sec^2 \theta_1}, \quad (10.14)$$

причем

$$\text{tg } \theta_1 = \frac{V_{yg1}}{V_{xg1}}.$$

Как видно из (10.14), функционал задачи получился зависящим от характера орбиты (от эксцентриситета  $e$ ) и, следовательно, для каждой орбиты должен определяться отдельно. Удобнее поэтому воспользоваться

<sup>1</sup> Напомним, что  $r_{\Pi} = r_3 + H_{\Pi}$ , где  $r_3$  — радиус земного шара;  $H_{\Pi}$  — высота перигея, и что на основании (79.2)

$$r_{\Pi} = a(1 - e).$$

<sup>2</sup> В дальнейшем для простоты индекс «0» в выражениях  $V_{\text{кpo}}$  опускается.

ся общим выражением, не связанным с формой орбиты; за такое выражение можно принять полную энергию ИСЗ, отнесенную к квадрату круговой скорости  $V_{кр}^2$ . На основании выражения (61.2) эта безразмерная энергия<sup>1</sup>

$$\frac{h}{2V_{кр}^2} = \frac{V_1^2}{2V_{кр}^2} - \frac{\mu}{r_1 V_{кр}^2} = -\frac{V_{xgk}^2 + V_{ygz}^2}{2V_{кр}^2} - \frac{r_3}{r_3 + H_k} = -J. \quad (11.14)$$

Будем решать *вариационную задачу в форме Майера*. В данном случае связи вида (66.1), наложенные на граничные условия, отсутствуют. Кроме того, так как координата  $x_k$  не регламентируется, а в уравнения движения  $x$  не входит, связь (3.14) выделяется из общей системы уравнений и при решении вариационной задачи может не приниматься во внимание. Таким образом, вспомогательный функционал задачи

$$J_B = J + \int_0^{t_k} F dt, \quad (12.14)$$

где<sup>2</sup>

$$F = \lambda_1(\dot{V}_x - \dot{v} \cos \varphi) + \lambda_2(\dot{V}_y - \dot{v} \sin \varphi + g) + \lambda_3(\dot{H} - V_y). \quad (13.14)$$

Будем считать все начальные условия заданными, а время отсчитывать от нуля на левом конце интегрирования. Так как функция  $F$  не содержит  $t_1=0$  и  $t_k$ , а вариации фазовых переменных на правом конце интегрирования считаются независимыми, то мы должны воспользоваться условием (76а.1), которое имеет вид

$$\frac{\partial J}{\partial y_i} + F \dot{y}_i \Big|_{t=t_k} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Определяя члены этого уравнения для рассматриваемой задачи, получим

$$\frac{\partial J}{\partial V_{xk}} = -\frac{V_{xk}}{V_{кр}^2}, \quad \frac{\partial J}{\partial V_{yk}} = -\frac{V_{yk}}{V_{кр}^2}, \quad \frac{\partial J}{\partial H_k} = -\frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2},$$

$$F \dot{V}_x = \lambda_{1k}, \quad F \dot{V}_y = \lambda_{2k}, \quad F \dot{H} = \lambda_{3k}.$$

Таким образом, конечные значения множителей Лагранжа должны удовлетворять уравнениям:

$$\lambda_{1k} = \frac{V_{xk}}{V_{кр}^2}, \quad (14.14)$$

$$\lambda_{2k} = \frac{V_{yk}}{V_{кр}^2}, \quad (14a.14)$$

$$\lambda_{3k} = \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2}. \quad (14б.14)$$

Оставляя пока открытым вопрос о выборе управления величиной силы тяги  $P$  или закона изменения  $v(t)$ , составим четыре уравнения Эйлера соответственно четырем неизвестным функциям  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $H$ ,  $\varphi$ .

<sup>1</sup> Так как  $\mu = g_0 r_3^2 = V_{кр}^2 r_3$  и  $r_1 = r_3 + H_k$ .

<sup>2</sup> В дальнейшем для простоты индекс «g» в выражениях  $V_{yg}$ ,  $V_{xg}$  опускается.

Уравнения Эйлера получаются следующие:

$$\lambda_1 = 0, \quad (15.14)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_3, \quad (15a.14)$$

$$\dot{\lambda}_3 = 0, \quad (15b.14)$$

$$\dot{\nu} (\lambda_1 \sin \varphi - \lambda_2 \cos \varphi) = 0. \quad (16.14)$$

Из уравнения (15.14) найдем

$$\lambda_1 = \text{const} = c_1 > 0 \quad (17.14)$$

в силу (14.14).

Из (15b.14), принимая во внимание (14b.14):

$$\lambda_3 = \text{const} = \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2}. \quad (17a.14)$$

Из уравнения (15a.14) с учетом (17a.14)

$$\lambda_2 = c_2 - \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2} t. \quad (17b.14)$$

Наконец, из уравнения (16.14), имея в виду, что в общем случае  $\dot{\nu} \neq 0$ , найдем закон управления углом  $\varphi$ :

$$\text{tg} \varphi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{tg} \varphi_0 - \frac{1}{c_1} \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2} t, \quad (18.14)$$

где  $\text{tg} \varphi_0 = \frac{c_2}{c_1}$ .

Таким образом, наивыгоднейшим оказывается закон линейного изменения  $\text{tg} \varphi$ .

Перейдем теперь к определению наивыгоднейшего закона изменения величины силы тяги  $P$ . Часть функционала, зависящая от тяги (или от  $\nu$ ), имеет вид

$$J_B = - \int_0^{t_k} \dot{\nu} (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) dt.$$

Интегрируя по частям, преобразуем это выражение в следующее:

$$J_B = - \nu (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) \Big|_{t=t_k} + \int_0^{t_k} \nu \frac{d}{dt} (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) dt. \quad (19.14)$$

Основываясь на выражениях (17.14) и (18.14), проведем следующее преобразование:

$$\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi = \lambda_1 \left( \cos \varphi + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \varphi \right) = \frac{c_1}{\cos \varphi}.$$

Следовательно, производная

$$\frac{d}{dt} (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) = \frac{c_1}{\cos^2 \varphi} \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

но согласно (18.14)

$$\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = - \frac{1}{c_1} \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2},$$

и мы получаем

$$\frac{d}{dt}(\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) = -\sin \varphi \frac{\dot{r}_3}{(r_3 + H_k)^2}. \quad (20.14)$$

Подставив полученное выражение в (19.14), придем к соотношению

$$J_B = -v_k c_1 \sec \varphi_k - \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2} \int_0^{t_k} v \sin \varphi dt. \quad (19a.14)$$

Далее, приравнявая выражения (17б.14) и (14a.14) для момента времени  $t = t_k$ , получим

$$c_2 - \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2} t_k = \frac{V_{yk}}{V_{кр}^2}.$$

Так как в конце активного участка полета  $V_{yk} > 0$ , то отсюда

$$c_2 > \frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2} t_k > 0.$$

Из (18.14) видно, что

$$\sin^2 \varphi > 0.$$

Взяв вариацию по  $v$  функционала (19a.14), получим

$$\delta J_B = -\frac{r_3}{(r_3 + H_k)^2} \int_0^{t_k} \delta v \sin \varphi dt. \quad (21.14)$$

На основании приведенных выше соображений относительно неизменности знака  $\sin \varphi$  в интервале  $0 \leq t \leq t_k$  приходим к заключению, что удовлетворить равенству  $\delta J_B = 0$ , являющемуся необходимым условием экстремума функционала  $J_B$ , можно, только положив  $\delta v = 0$ . Это означает, что на всем протяжении активного полета  $v = v_k = \text{const}$ , где  $v_k$  — конечная максимальная величина в конце активного полета. Другими словами, наивыгоднейшим законом расходования заданного запаса топлива оказывается его *мгновенное сжигание* в начале полета ракеты. Сила тяги  $P$  при этом получается бесконечно большой, а время работы двигателя  $t_a$  — бесконечно малым.

Конечно, такой результат нереален: он свидетельствует только о выгоды больших тяговооруженностей ракет, причем предел увеличения  $P$  определяется конструктивными особенностями и возможностями (при увеличении силы тяги вес силовой установки растет и, следовательно, весовая отдача ракеты уменьшается). Заметим, что закон управления углом  $\varphi$ , определяемый уравнением (18.14), справедлив при любом законе изменения величины силы тяги  $P$ . Подставив (18.14) в уравнения движения ракеты (1.14) и (2.14) при выбранной зависимости  $P(t)$ , после интегрирования этих уравнений найдем составляющие скорости в конце активного полета  $V_{xk}$  и  $V_{yk}$ . Далее, используя кинематическое равенство (4.14), найдем высоту в конце полета по программе (в начале пассивного полета)  $H_k$ .

В полученные таким способом выражения  $V_{xk}$ ,  $V_{yk}$ ,  $H_k$  будут входить две, пока еще не определенные постоянные:

$$\frac{c_2}{c_1} = \text{tg } \varphi_0 \quad \text{и} \quad \frac{r_3}{c_1 (r_3 + H_k)^2} = B.$$

Первое уравнение, которое должно быть использовано для определения постоянных  $\varphi_0$  и  $B$ , получается из следующих соображений. Как было показано, в конце активного полета

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \operatorname{tg} \varphi_0 - B t_k = \frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{1k}}.$$

В то же время на основании (14.14) и (14a.14) в конце активного полета

$$\frac{\lambda_{2k}}{\lambda_{1k}} = \frac{V_{yk}}{V_{xk}} = \operatorname{tg} \theta_k,$$

откуда следует, что в конце активного полета

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \operatorname{tg} \theta_k. \quad (22.14)$$

Это и есть первое уравнение для определения произвольных постоянных  $\varphi_0$  и  $B$ , так как  $\operatorname{tg} \varphi_k$  и  $\operatorname{tg} \theta_k$  зависят от этих параметров.

Второе уравнение имеет следующий вид:

$$H_k = V_{кр} \sqrt{\frac{r_3}{V_{xk} B} - r_3}. \quad (23.14)$$

Действительно, так как согласно (17.14) и (14.14) постоянная  $c_1$  выражается через скорость  $V_{xk}$  в конце активного полета, то из (14б.14) получаем

$$H_k = \sqrt{\frac{r_3}{\lambda_{3k}} - r_3} = \sqrt{\frac{r_3}{c_3} - r_3}$$

или, так как  $c_1 = \frac{V_{xk}}{V_{кр}^2}$  и  $B = \frac{c_3}{c_1}$ ,

$$H_k = \sqrt{\frac{r_3}{c_1 B} - r_3} = V_{кр} \sqrt{\frac{r_3}{V_{xk} B} - r_3}. \quad (24.14)$$

Так как, с другой стороны, конечная высота полета  $H_k$ , полученная в результате интегрирования уравнения (4.14), будет функцией параметров  $\varphi_0$  и  $B$ , мы и приходим к уравнению (23.14).

Таков общий ход решения вариационной задачи о запуске ИСЗ без учета аэродинамических сил. Как уже упоминалось, такое решение может оказаться неприемлемым, в частности, в силу тех же причин, что и в случае запуска баллистической ракеты (угол атаки  $\alpha$  может выходить за допустимые пределы). Желательно, поэтому располагать методом расчета, принимающим во внимание аэродинамические силы, действующие на ракету, и ограничения, накладываемые на угол атаки. Идея такого метода изложена в предыдущей главе при изложении приближенного метода расчета траектории ракеты-носителя. В данном случае изменится только критерий

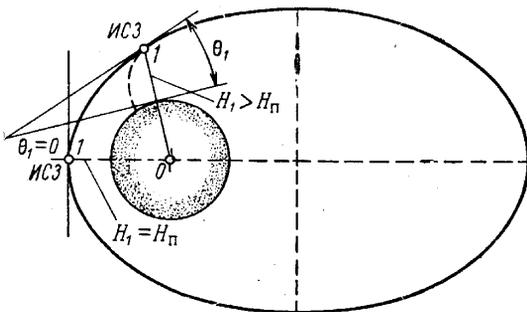


Рис. 3.14. Возможные варианты вывода ИСЗ на орбиту

действия, накладываемые на угол атаки. Идея такого метода изложена в предыдущей главе при изложении приближенного метода расчета траектории ракеты-носителя. В данном случае изменится только критерий

для выбора окончательного варианта управления углом наклона траектории ракеты к горизонту на активном участке полета.

Расчеты показывают, что при выводе ИСЗ на орбиту, не сильно отличающуюся от круговой, можно выбирать программу управления ракетой таким образом, чтобы в конце активного участка полета получать угол наклона траектории к горизонту  $\theta_1=0$  (рис. 3.14), т. е. выводить ракету в точку перигея орбиты. Далее, при заданном  $\theta_1=0$  и при увеличении значений параметра  $S$  (см. рис. 6.13), как показывают расчеты, высота перигея, равная высоте в конце активного полета, увеличивается, а произведение  $V_1^2 r_1$  уменьшается вследствие более быстрого убывания скорости полета  $V_1$ . Так как из (4.14) следует, что при  $\theta_1=0$

$$e = \sqrt{V_1^2 r_1} - 1,$$

то при увеличении параметра  $S$  эксцентриситет орбиты  $e$  уменьшается. Задаваясь различными значениями параметра  $S$ , будем получать разные высоты перигея и апогея и разные эксцентриситеты. Можно построить графики зависимости высоты апогея  $H_a$  от высоты перигея  $H_n$  и отметить на таких графиках значения  $S$ .

При помощи графиков вида, приведенного на рис. 4.14, можно оценить диапазон орбит, который позволяет реализовать данная ракета-носитель, в первом приближении. В случае необходимости этот результат может быть уточнен последовательными приближениями.

В заключение этого параграфа подчеркнем еще раз, что изложенные в нем методы расчета можно применять только для общей оценки динамических свойств объекта и его возможностей, но не для точных расчетов траекторий запуска ИСЗ. Более точные расчеты должны проводиться на базе точных уравнений движения с учетом таких факторов, как несферичность Земли, ее суточное вращение, притяжение Луны и т. п.

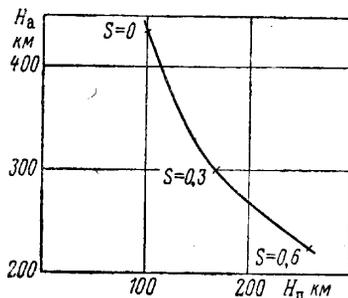


Рис. 4.14. Высота перигея и апогея для гипотетического ИСЗ при различном управлении полетом

## § 2. Траектории полета космических кораблей. Общие замечания

*Космическим кораблем* условимся называть летательный аппарат, способный совершать перелеты с одной планеты на другую<sup>1</sup>. Весь процесс перелета можно разбить на три этапа: полет вблизи планеты отправления, движение в космическом пространстве и полет вблизи планеты назначения. В общем случае движение космического корабля на первом и третьем участках полностью или частично (в начале первого и в конце последнего этапов) происходит в атмосфере; поскольку вопросы динамики полета в атмосфере рассмотрены во второй части этой книги, мы их здесь касаться не будем и обратимся к изучению динамики полета в космическом пространстве.

То обстоятельство, что в космическом пространстве аэродинамические силы равны нулю, упрощает решение задач динамики полета. В то же время задача о движении космического корабля оказывается более сложной по сравнению с рассмотренной ранее задачей о движении искусствен-

<sup>1</sup> К этой категории летательных аппаратов можно было бы отнести и искусственные спутники планет; однако в целях большей дифференциации мы примем приведенное определение.

ного спутника Земли. Стоящая перед нами задача относится к числу задач « $n$  тел», в которых гравитационное поле изменяется со временем, так как взаимное расположение корабля и притягивающих небесных тел (планеты отправления, Солнца, планеты назначения и других небесных тел) непрерывно изменяется. В такой *точной постановке* этой задачи, когда учитывается притяжение многих небесных тел, ее решение может быть получено только методами численного интегрирования с использованием машинной техники.

Как уже упоминалось, обычно сложную задачу  $n$  тел заменяют *гораздо более простой задачей двух тел*, в которой всю траекторию разбивают на участки и рассматривают движение космического корабля на каждом участке в поле тяготения одного какого-либо тела. Из всего бесконечного числа небесных тел, оказывающих теоретически влияние на характер движения космического корабля, выбирают тело, влияние которого является определяющим, а влиянием остальных небесных тел пренебрегают. Другими словами, все пространство разделяют на зоны влияния (см. гл. II) различных небесных тел (например, при полете к Марсу — на зоны влияния Земли, Солнца и Марса) и в пределах каждой зоны решают задачу двух тел.

В результате такого подхода к задаче получают сравнительно простое решение первого приближения, которое обычно довольно близко к точному решению. Решение первого приближения в принципе может быть уточнено расчетом второго приближения. Для выполнения второго приближения дифференциальные уравнения задачи надо линеаризовать относительно отклонений действительных кинематических величин (скорости, координат) от их значений, полученных в результате расчета первого приближения. Решение этих дифференциальных уравнений, представляющее гораздо более сложную задачу по сравнению с первым приближением, осуществляют лишь методами численного интегрирования с привлечением машинной техники (уравнения получаются с переменными коэффициентами). В этой книге мы ограничимся рассмотрением движения космического корабля только в первом приближении (в рамках задачи двух тел).

Так как межпланетный корабль должен покрывать огромные расстояния, реализовать движение с непрерывно работающим двигателем<sup>1</sup> практически невозможно: потребный для такого полета запас топлива и стартовый вес космического корабля получились бы нереально большими. Поэтому в основном межпланетный корабль совершает пассивный (баллистический) полет под влиянием только сил поля тяготения без затраты собственной энергии. На некоторых участках полета, однако, работа двигателя необходима. Это относится прежде всего к начальному участку полета, на котором корабль за счет энергии сгорающего топлива приобретает необходимую начальную скорость и высоту полета. На конечном участке полета вблизи планеты назначения, если требуется осуществить мягкую посадку, энергия топлива затрачивается на уменьшение скорости корабля до пределов, обеспечивающих безопасную посадку. Работа двигателя необходима также при переходе с одной орбиты на другую, как об этом подробнее сказано дальше. Наконец, на трассе полета космического корабля может потребоваться осуществление корректирующих маневров, имеющих целью погасить накопившиеся ошибки в координатах космического корабля. Реализация таких коррекций производится также за счет энергии топлива, имеющегося на борту космического корабля.

Продолжительность полета космического корабля с работающим двигателем измеряется минутами или даже секундами, тогда как общая

<sup>1</sup> Здесь речь идет о двигателях, работающих на химическом топливе и имеющих относительно большой расход топлива.

продолжительность пассивного межпланетного полета составляет месяцы и даже годы. Это позволяет внести в постановку задачи существенное упрощение, которое строится на возможности замены *распределенного по времени  $t$*  действия силы тяги на участках полета с работающим двигателем *мгновенным* сообщением космическому кораблю соответствующего импульса тяги

$$W = \int_0^t P dt. \quad (25.14)$$

Результатом приложения импульса тяги является мгновенное изменение скорости полета корабля при неизменных его координатах.

В соответствии с этим упрощающим предположением траектория полета космического корабля состоит из отрезков кеплеровых дуг (отрезков баллистических кривых, получаемых в результате решения задачи двух тел). В точках соединения кеплеровых дуг приложены соответствующие импульсы тяги (рис. 5.14); эти точки вообще являются угловыми, так как

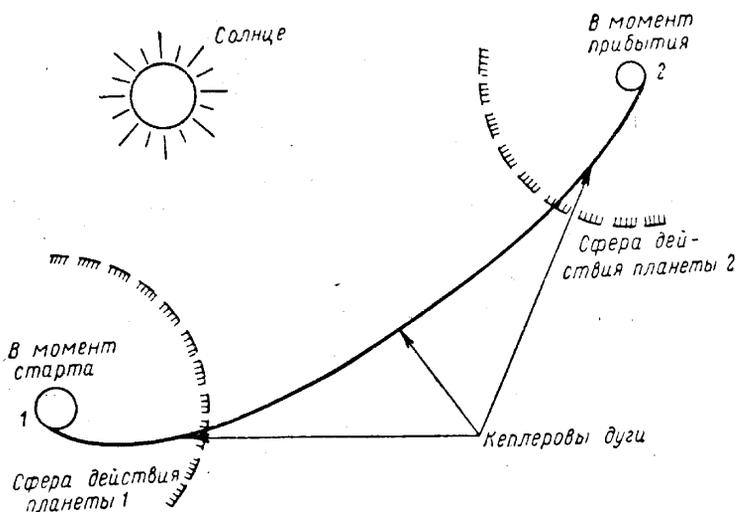


Рис. 5.14. Схематическое представление межпланетной траектории:  
1 — планета отправления; 2 — планета назначения

в результате действия импульса направление движения может изменяться.

Предметом нашего дальнейшего исследования является определение потребной величины импульса тяги, момента времени, в который этот импульс должен быть приложен, и в итоге определение всей траектории полета космического корабля. Ясно, что при исследовании движения космического корабля особенно большую роль должны играть вариационные методы, оптимизирующие управление и обеспечивающие минимальные затраты топлива на реализацию заданного межпланетного перелета. Действительно, запас топлива на борту космического корабля не может быть большим (большой запас топлива привел бы к резкому увеличению стартового веса космического корабля); с другой стороны, продолжительность межпланетного перелета велика, и может требоваться значительное число маневров, что и приведет к значительным затратам топлива в продолжение пассивного полета.

В дальнейшем мы остановимся на некоторых сравнительно простых вариационных задачах, возникающих при исследовании межпланетного полета.

### § 3. Оптимальное управление космическим кораблем<sup>1</sup>

Для того чтобы космический корабль мог выйти из зоны притяжения планеты отправления, ему надо сообщить скорость, равную или большую, чем скорость ухода (параболическая скорость). По мере удаления космического корабля от планеты отправления его скорость становится меньше начальной, так как запас полной энергии, сообщенной кораблю в конце активного участка полета, в дальнейшем сохраняется неизменным, а потенциальная энергия (энергия высоты) увеличивается. Абсолютная скорость  $\bar{V}_{аб}$  (скорость относительно Солнца) космического корабля в некоторый момент времени равна векторной сумме скорости  $\bar{V}$  корабля относительно планеты отправления и орбитальной скорости  $\bar{V}_{орб}$  планеты отправления (скорости планеты относительно Солнца):

$$\bar{V}_{аб} = \bar{V} + \bar{V}_{орб}. \quad (26.14)$$

Если этот момент времени выбрать так, что расстояния космического корабля от планет отправления и назначения достаточно велики, т. е. когда корабль находится на границе сферы действия Солнца, то силы притяжения корабля планетами отправления и назначения будут малы по сравнению с притяжением Солнца, которое теперь начнет играть основную роль. При этом в соответствии с отмеченным выше можно считать, что космический корабль будет двигаться по некоторой кеплеровой орбите, в фокусе которой находится Солнце, до тех пор, пока превалирующую роль не приобретет притяжение планеты назначения. Начиная с этого момента движение корабля можно считать происходящим по другой кеплеровой орбите, в фокусе которой помещается планета назначения.

Можно предполагать, что старт космических кораблей будет осуществляться с орбиты вокруг планеты отправления, на которую космический корабль выведен предварительно. Будем считать, что межпланетный перелет начинается с *круговой орбиты* вокруг планеты отправления.

Возникает вопрос, по какой траектории должен двигаться корабль, находящийся в начальный момент времени на круговой орбите, чтобы затраты топлива для сообщения ему скорости ухода были *наименьшими*?

Прежде чем ответить на этот вопрос, формулируем следующую общую вариационную задачу: осуществить перемещение космического корабля из некоторой точки *A* пространства в другую точку пространства *B* с минимальной затратой топлива.

Эта задача относится к задачам на условный экстремум, так как на характер перемещения корабля наложены связи — уравнения движения.

Движение космического корабля за пределами атмосферы при работающем двигателе происходит под действием силы тяги  $P = -mV_a$  и силы притяжения  $G = mg$ . Так как траектория движения в общем случае — пространственная кривая, то движение корабля описывается тремя уравнениями, которые для сокращения записи можно представить в виде

$$\varphi_i = \dot{V}_i - \frac{V_a}{m} \beta l_i - g_i = 0, \quad (27.14)$$

где  $i = 1, 2, 3$  соответственно трем осям координат, на которые проектируются силы, действующие на космический корабль. В уравнении (27.14) приняты следующие обозначения:

$V_i$  — составляющая скорости полета корабля вдоль  $i$ -й оси координат;

<sup>1</sup> Более подробно этот вопрос рассмотрен в [29].

$V_a$  — скорость истечения продуктов сгорания из сопла двигателя;  
 $m$  — масса корабля;  
 $\beta = -\dot{m}$  — секундный расход топлива в единицах массы;  
 $l_i$  — направляющие косинусы вектора силы тяги относительно осей координат;  
 $g_i$  — составляющие силы притяжения (на единицу массы корабля) вдоль осей координат. В общем случае эти составляющие  $g_i$  будут зависеть от координат точки  $A(x_1, x_2, x_3)$ , которые можно считать некоторыми параметрами  $K_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) (см. гл. I).

Помимо уравнений движения, должны удовлетворяться три следующих очевидных кинематических равенства<sup>1</sup>:

$$\varphi_{i+3} = \dot{x}_i - V_i = 0, \quad (28.14)$$

где  $x_i$  — координаты корабля,  $i = 1, 2, 3$ , а также равенство

$$\varphi_7 = \dot{m} + \beta(\alpha) = 0 \quad (29.14)$$

(смысл параметра  $\alpha$ , определяющего режим работы двигателя, будет ясен из дальнейшего).

Так как сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, то они должны удовлетворять равенству

$$\varphi_8 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 1 = 0. \quad (30.14)$$

При сверхкритической скорости истечения  $V_a$  (как мы и будем считать в дальнейшем) изменить силу тяги можно путем изменения секундного расхода топлива от  $\beta = 0$  до  $\beta = \beta_{\max}$ , так что получается замкнутая область (см. гл. I), в которой должны лежать возможные величины управления (сила тяги).

А. Миеле [41] предложил расход топлива  $\beta$  представить как функцию параметра<sup>2</sup>  $\alpha$  (не имеющего определенного физического смысла) такую, что когда  $\alpha$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,  $\beta$  изменяется от нуля до  $\beta_{\max}$  (рис. 6.14):

$$\beta = \beta(\alpha), \quad (0 \leq \beta \leq \beta_{\max}).$$

Пусть в точках  $A$  и  $B$  заданы координаты  $a_i$  и  $b_i$  корабля и составляющие скорости  $V_{ai}$  и  $V_{bi}$ ; тогда в соответствии с изложенным в гл. I (см. стр. 46) имеем крайние условия (связи):

$$\psi_1 = x_{i0} - a_i = 0, \quad (31.14)$$

$$\psi_{i+3} = x_{i1} - b_i = 0, \quad (32.14)$$

$$\psi_{i+6} = V_{i0} - V_{ai} = 0, \quad (33.14)$$

$$\psi_{i+9} = V_{i1} - V_{bi} = 0 \quad (34.14)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

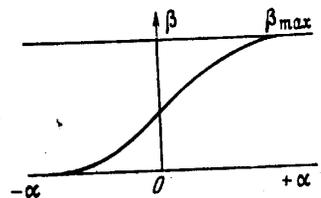


Рис. 6.14. Зависимость секундного расхода топлива  $\beta$  от параметра  $\alpha$

<sup>1</sup> Очевидно, что  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ , где  $x, y, z$  — координаты декартовой системы.  
<sup>2</sup> Смысл введения параметра  $\alpha$  в том, что, в то время как область изменения  $\beta$  была закрытая, область изменения  $\alpha$  — открытая ( $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$ ), что позволяет пользоваться классическими методами вариационного исчисления.

Время начала и конца полета будем считать нефиксированным. Поскольку ракета движется только под действием силы тяжести и скорость истечения  $V_a$  постоянна по величине и направлению (см. стр. 80), то приращение скорости полета за счет расхода топлива (и уменьшения массы ракеты от  $m_0$  до  $m_1$ ) будет

$$V_1 - V_0 = V_a \ln \frac{m_0}{m_1}.$$

Так как задача состоит в минимизации расхода топлива, то основным функционалом задачи будет

$$J = V_a \ln \frac{m_0}{m_1}. \quad (35.14)$$

Составляем функцию Лагранжа  $F$  (см. гл. I):

$$F = \lambda_1 \left( \dot{V}_1 - \frac{V_a}{m} \beta l_1 - g_1 \right) + \lambda_2 \left( \dot{V}_2 - \frac{V_a}{m} \beta l_2 - g_2 \right) + \lambda_3 \left( \dot{V}_3 - \frac{V_a}{m} \beta l_3 - g_3 \right) + \\ + \lambda_4 (\dot{x}_1 - V_1) + \lambda_5 (\dot{x}_2 - V_2) + \lambda_6 (\dot{x}_3 - V_3) + \lambda_7 (\dot{m} + \beta) + \\ + \lambda_8 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 1). \quad (36.14)$$

Мы имеем в задаче 11 неизвестных функций времени, подлежащих определению: 3 составляющие скорости  $V_i$  по осям координат, 3 направляющих косинуса  $l_i$ , 3 координаты  $x_i$ , массу  $m$  и переменную  $\alpha$ . Следовательно, мы должны составить 11 уравнений Эйлера.

Взяв частные производные от (36.14) по  $V_i$  и  $\dot{V}_i$ , получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_5, \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_6 \end{aligned} \right\} \quad (37.14)$$

или

$$\dot{\lambda}_i = -\lambda_{i+3} \quad (i=1, 2, 3). \quad (37a.14)$$

Для функций  $x_i$ , имея в виду, что составляющие силы притяжения зависят от координат  $x_i$ , т. е. что  $g_i = g_i(x_i)$ , получим еще три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_4 &= - \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \\ \dot{\lambda}_5 &= - \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, \\ \dot{\lambda}_6 &= - \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (38.14)$$

Для функций  $l_i$ , поскольку производные этих функций в выражение (36.14) не входят, получаются три следующих уравнения:

$$0 = - \frac{V_a}{m} \beta \lambda_i + 2\lambda_8 l_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (39.14)$$

Для функции  $m$  получается одно уравнение

$$\lambda_7 = \frac{V_a}{m^2} \beta \sum_{i=1}^3 l_i \lambda_i. \quad (40.14)$$

Наконец, для переменной  $\alpha$  — одно уравнение

$$0 = \left( -\frac{V_a}{m} \sum_{i=1}^3 \lambda_i l_i + \lambda_7 \right) \frac{d\beta}{d\alpha}. \quad (41.14)$$

Одиннадцать уравнений Эйлера (37.14) — (41.14) содержат восемь дополнительных неизвестных — множителей Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_8$ . Всего, таким образом, получается система из трех уравнений движения (27.14), трех кинематических уравнений (28.14), уравнения (29.14), связывающего массу с режимом работы двигателя (переменной  $\alpha$ ), уравнения (30.14), имеющего геометрический смысл, и 11 уравнений Эйлера. Следовательно, получаем систему, состоящую из 19 уравнений. В этих уравнениях имеется 19 неизвестных, так что задача — *замкнутая* и может быть решена до конца.

Дифференцируя уравнение (37.14) и принимая во внимание (38.14), получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\lambda}_1 = -\dot{\lambda}_4 &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}, \\ \ddot{\lambda}_2 = -\dot{\lambda}_5 &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_2}, \\ \ddot{\lambda}_3 = -\dot{\lambda}_6 &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_3}. \end{aligned} \right\} \quad (42.14)$$

Так как  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) можно рассматривать как компоненты некоторого вектора  $\bar{\lambda}$ , то уравнения (42.14) можно представить как одно векторное уравнение.

Далее из (39.14) найдем

$$\lambda_i = \frac{2m}{V_a \beta} \lambda_8 l_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (43.14)$$

Равенство (43.14) показывает, что составляющие по осям координат вектора  $\bar{\lambda}$  пропорциональны направляющим косинусам  $l_i$  силы тяги; следовательно, *вектор  $\bar{\lambda}$  параллелен вектору  $\bar{P}$  силы тяги.*

Так как произведение двух сомножителей может быть равно нулю только в том случае, когда по крайней мере один из сомножителей равен нулю, то из уравнения (41.14) получаем два решения:

$$1) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

т. е. либо  $\beta = 0$ , либо  $\beta = \beta_{\max}$ ,

$$2) \quad \lambda_7 = \frac{V_a}{m} \sum_{i=1}^3 \lambda_i l_i, \quad (44.14)$$

причем  $\beta$  — функция времени  $t$ .

Первый случай соответствует или полету с максимальной силой тяги ( $\beta = \beta_{\max}$ ) или баллистическому полету ( $\beta = 0$ ). Во втором случае сила тяги изменяется со временем.

Из (40.14) и (44.14) видно, что в последнем случае

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{\beta}{m} \lambda_7$$

или, так как  $\beta = -m$ ,

$$\dot{\lambda}_7 = -\frac{m}{m} \lambda_7.$$

Интегрирование последнего равенства дает

$$\lambda_7 = \frac{\text{const}_1}{m}. \quad (45.14)$$

Из сравнения (44.14) и (45.14) получаем

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i l_i = \frac{\text{const}_1}{V_a}.$$

Таким образом, в случае полета с переменной силой тяги должно<sup>1</sup>

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i l_i = \text{const}. \quad (46.14)$$

Выше было отмечено, что векторы  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{P}$  параллельны; в таком случае направляющие косинусы равны

$$l_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (47.14)$$

Используя (47.14), найдем

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i l_i = \frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \quad (47a.14)$$

так что из (46.14) следует

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \text{const}. \quad (48.14)$$

Из (48.14) видно, что в случае полета с переменной тягой ( $\beta = \text{var}$ ) вектор  $\bar{\lambda}$  имеет постоянный модуль.

Более подробное исследование вопроса, проведенное Д. Лоуденом (см. [38]), привело к выводу, что выражение (48.14) не есть интеграл уравнений (42.14) и что, следовательно,  $\beta = \text{var}$  не есть решение задачи. Остаются только решения  $\beta = \beta_{\max}$  и  $\beta = 0$ , так что космический полет осуществляется по траектории, состоящей из участков полета с максимальной тягой ( $\beta = \beta_{\max}$ ) и участков полета по кеплеровым дугам ( $\beta = 0$ ).

На участках активного полета с  $\beta = \beta_{\max}$  из (43.14) следует

$$\lambda_8 = \frac{V_a \beta_{\max}}{2m} \frac{\lambda_i}{l_i} \quad (49.14)$$

<sup>1</sup> Истечение из сопла двигателя предполагается сверхкритическим, так что  $V_a = \text{const}$ .

или с учетом (47.14)

$$\lambda_8 = \frac{Va\beta_{\max}}{2m} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}. \quad (49a.14)$$

Далее из (40.14) и (47a.14) получаем

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{Va\beta_{\max}}{m^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}. \quad (50.14)$$

На участках пассивного полета с выключенными двигателями ( $\beta=0$ ) по (39.14) получаем  $\lambda_8=0$ , причем направляющие косинусы  $l_i$  оказываются неопределенными, как это и следовало ожидать.

В точках соединения дуг  $\beta=\beta_{\max}$  и  $\beta=0$  должны удовлетворяться условия Вейерштрасса — Эрдмана (см. гл. I)

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \text{ и } F - \dot{y}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} \quad (i=1, 2, \dots, 7) \text{ — непрерывны.}$$

Для выполнения первого условия все  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ ) в точках соединения должны быть непрерывными, а на основании (37.14) и производные  $\dot{\lambda}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) также должны быть непрерывными.

Второе условие Вейерштрасса — Эрдмана удовлетворяется, как в этом нетрудно убедиться, при помощи (36.14), если обеспечивается непрерывность выражения

$$\sum_{i=1}^3 \left[ -\lambda_i \left( \frac{Va}{m} \beta l_i + g_i \right) \right] - \sum_{i=1}^3 (\lambda_{i+3} V_i) + \lambda_7 \beta.$$

Но так как составляющие силы притяжения  $g_i$  и составляющие скорости  $V_i$  непрерывны, а по доказанному ранее и  $\lambda_i$  непрерывны, то требуется обеспечить непрерывность лишь выражения

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{Va}{m} \beta l_i - \lambda_7 \beta = \beta \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{Va}{m} l_i - \lambda_7 \right). \quad (51.14)$$

В момент времени, непосредственно предшествующий выходу на режим максимальной тяги, очевидно,  $\beta=0$ ; при этом равно нулю и все выражение (51.14). Отсюда видно, что в момент времени, следующий за выходом на режим максимальной тяги, должно быть

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{Va}{m} l_i - \lambda_7 = 0, \quad (52.14)$$

откуда [см. (47a.14)]

$$\lambda_7 = \frac{Va}{m} \sum_{i=1}^3 \lambda_i l_i = \frac{Va}{m} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}. \quad (53.14)$$

Полученные условия справедливы для всех точек соединения дуг активного и пассивного полета, за исключением точек старта и прибытия.

Так как гравитационное поле принято нами в каждой зоне влияния инвариантным по времени (рассматривается задача двух тел), то существует первый интеграл уравнений Эйлера

$$F - \sum_{i=1}^7 \dot{y}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = \text{const}$$

или на основании (36.14)

$$-\sum_{i=1}^3 \lambda_i \left( g_i + \frac{V_a}{m} \beta I_i \right) - \sum_{i=1}^3 \lambda_{i+3} V_i + \lambda_7 \beta + \lambda_8 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 1) = \text{const.} \quad (54.14)$$

С учетом уравнений Эйлера (37.14) выражение (54.14) можно переписать в виде<sup>1</sup>

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \lambda_i g_i - \lambda_i V_i + \beta \left( \frac{V_a}{m} \lambda_i I_i - \lambda_i \right) \right] = \text{const.} \quad (55.14)$$

Но по доказанному ранее

$$\beta \left( \frac{V_a}{m} \sum_{i=1}^3 \lambda_i I_i - \lambda_7 \right)$$

непрерывна в точках соединения; непрерывны и все  $\lambda_i$ ,  $\dot{\lambda}_i$ ,  $V_i$  и  $g_i$ . Это означает, что константа в правой части (55.14) неизменна вдоль всей оптимальной траектории.

Составляя для нашей задачи, записываемой в форме Майера, функцию  $J_1$  (см. гл. I), получим

$$J_1 = V_a \ln \frac{m_0}{m_1} + \sum_{i=1}^{12} v_i \psi_i \quad (56.14)$$

или, если подставить развернутые выражения (31.14) — (34.14) связей,

$$J_1 = V_a \ln \frac{m_0}{m_1} + \sum_{i=1}^3 [v_i (x_{i0} - a_i) + v_{i+3} (x_{i1} - b_i)] + v_{i+6} (V_{i0} - V_{ai}) + v_{i+9} (V_{i1} - V_{bi}). \quad (57.14)$$

Условия достижения экстремума (трансверсальности) (73.1) — (76.1) для момента времени  $t = t_0$  имеют вид

$$\frac{\partial J_1}{\partial t_0} + \frac{\partial J_1}{\partial y_{i0}} \dot{y}_{i0} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial t_0} dt = 0,$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial y_{i0}} - F_{0i}^{\dot{y}} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Аналогичный вид имеют условия экстремума и для момента времени  $t = t_1$ .

На основании (36.14) и (57.14) имеем

$$\frac{\partial J_1}{\partial t_0} = 0.$$

Для координаты  $x_{i0}$

$$\frac{\partial J_1}{\partial x_{i0}} = v_i \quad (i=1, 2, 3).$$

<sup>1</sup>) Здесь  $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 1 \equiv 0$ .

Для координаты  $V_{i0}$

$$\frac{\partial J_1}{\partial V_{i0}} = v_{i+6} \quad (i=1, 2, 3).$$

В выражении  $F$  (36.14) от  $t_0$  зависит только  $g_i$ , так что

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial t_0} dt = - \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_0} dt.$$

Таким образом, для рассматриваемой конкретной задачи условия достижения экстремума принимают вид

$$\frac{V_a}{m_0} \dot{m}_0 + \sum_{i=1}^3 \left[ v_i \dot{x}_{i0} + v_{i+6} \dot{V}_{i0} - \int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_0} dt \right] = 0, \quad (58.14)$$

$$v_i - \lambda_{i+3,0} = 0, \quad (59.14)$$

$$v_{i+6} - \lambda_{i,0} = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (60.14)$$

Далее для координаты  $m_0$

$$\frac{\partial J_1}{\partial m_0} = \frac{V_a}{m_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial m_0} = \lambda_{70},$$

так что должно удовлетворяться равенство

$$\frac{V_a}{m_0} - \lambda_{70} = 0. \quad (61.14)$$

Аналогично для момента времени  $t=t_1$

$$-\frac{V_a}{m_1} \dot{m}_1 + \sum_{i=1}^3 \left[ v_{i+3} \dot{x}_{i1} + v_{i+9} \dot{V}_{i1} - \int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_1} dt \right] = 0, \quad (58a.14)$$

$$v_{i+3} + \lambda_{i+3,1} = 0, \quad (59a.14)$$

$$v_{i+9} + \lambda_{i,1} = 0, \quad (60a.14)$$

$$-\frac{V_a}{m_1} + \lambda_{71} = 0 \quad (i=1, 2, 3). \quad (61a.14)$$

Наконец, условие (78.1), определяющее оптимальные значения параметров  $K_k^1$ , в нашей задаче принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial K_k} dt = 0 \quad (k=1, 2, 3). \quad (62.14)$$

Заменяя на основании (59.14) и (60.14)  $v_i$  и  $v_{i+6}$  на  $\lambda_{i+3,0}$ ,  $\lambda_{i,0}$  в уравнении (58.14), приходим к следующему граничному условию в точке старта:

$$\frac{V_a}{m_0} \dot{m}_0 + \sum_{i=1}^3 [\lambda_{i0} \dot{V}_{i0} + \lambda_{i+3,0} \dot{x}_{i0}] = \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_0} dt. \quad (63.14)$$

<sup>1</sup> Здесь под  $K_k$  понимаются геометрические координаты, определяющие величину компонентов  $g_i$  в начальный момент времени, а следовательно, и во все последующие моменты.

Аналогичное условие для точки прибытия

$$\frac{V_a}{m_1} \dot{m}_1 + \sum_{i=1}^3 [\lambda_{i1} \dot{V}_{i1} + \lambda_{i+3,1} \dot{x}_{i1}] = - \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_1} dt. \quad (64.14)$$

При помощи (28.14), (29.14) и (37.14) выражения (63.14) и (64.14) можно привести к следующему виду:

$$\sum_{i=1}^3 [\lambda_{i0} \dot{V}_{i0} - \dot{\lambda}_{i0} V_{i0}] - \frac{V_a}{m_0} \beta = \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_0} dt, \quad (65.14)$$

$$\sum_{i=1}^3 [\lambda_{i1} \dot{V}_{i1} - \dot{\lambda}_{i1} V_{i1}] - \frac{V_a}{m_1} \beta = - \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_1} dt. \quad (66.14)$$

Уравнения (65.14) и (66.14), содержащие  $t_0$  и  $t_1$ , можно использовать для нахождения оптимальных значений  $t_0$  и  $t_1$  — времени старта и прибытия.

Во всех приведенных выше рассуждениях предполагалось, что двигатель на активном участке полета работает в течение некоторого конечного отрезка времени. Как уже упоминалось, время работы двигателя значительно меньше времени пассивного полета космического корабля, что позволяет распределенное по времени действие силы тяги заменить мгновенным импульсом; перемещением корабля за время действия импульса можно пренебречь.

Пусть сила тяги приложена к космическому кораблю в течение небольшого интервала времени  $t_H \leq t \leq t_K$ . Осуществляя<sup>1</sup> в (50.14) интегрирование по частям, получим выражение для приращения  $\lambda_7$  за время  $(t_K - t_H)$ :

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_7 = & -V_a \int_{t_H}^{t_K} \frac{\dot{m}}{m^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} dt = \Delta \left[ \frac{V_a}{m} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \right] - \\ & - V_a \int_{t_H}^{t_K} \frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i \dot{\lambda}_i}{m \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} dt, \end{aligned} \quad (67.14)$$

где

$$\left[ \frac{V_a}{m} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \right] = \left[ \frac{V_a}{m} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \right]_{t_K} - \left[ \frac{V_a}{m} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \right]_{t_H}.$$

<sup>1</sup> Напомним, что  $\beta = -\dot{m}$  и что

$$\frac{d}{dt} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \frac{\lambda_1 \dot{\lambda}_1 + \lambda_2 \dot{\lambda}_2 + \lambda_3 \dot{\lambda}_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} = \frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i \dot{\lambda}_i}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}.$$

Но на каждом конце взятого интервала времени должно выполняться условие (53.14); сравнивая записанное выражение с выражением (53.14), приходим к заключению, что

$$\int_{t_H}^{t_K} \frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i \dot{\lambda}_i}{m \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} dt = 0. \quad (68.14)$$

Так как масса корабля  $m$  и  $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$  одного знака, то равенство нулю интеграла в (68.14) возможно только при условии, что на участке полета с работающим двигателем (или, если пользоваться представлением об импульсе тяги, — в точках соединения двух кеплеровых дуг) удовлетворяется равенство

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \dot{\lambda}_i = 0. \quad (69.14)$$

Далее, умножив все члены уравнений движения (27.14) на  $\lambda_i$  и просуммировав их, будем иметь

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \dot{V}_i = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{V_a}{m} \beta \lambda_i l_i + \lambda_i g_i \right]. \quad (70.14)$$

Это уравнение можно преобразовать, если принять во внимание, что (50.14) можно представить<sup>1</sup> в виде

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{V_a \beta}{m^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V_a}{m} \right) \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}.$$

Интегрируя это уравнение на участке полета с тягой, найдем

$$\Delta \lambda_7 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \Delta \left( \frac{V_a}{m} \right).$$

Но согласно (61.14) и (61a.14) в начале и в конце полета с тягой

$$(\lambda_7)_{t_0, t_1} = \left( \frac{V_a}{m} \right)_{t_0, t_1},$$

так что приращение

$$\Delta \lambda_7 = \Delta \left( \frac{V_a}{m} \right).$$

Сопоставляя оба записанных выражения, приходим к заключению, что

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = 1.$$

Отсюда следует, что составляющие  $\lambda_i$  вектора  $\bar{\lambda}$  суть направляющие косинусы вектора тяги (так,  $\bar{\lambda}$  параллелен  $\bar{P}$  по доказанному ранее).

<sup>1</sup> Так как на основании (48.14)

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \text{const}, \text{ а } \beta = - \frac{dm}{dt}.$$

Таким образом, уравнение (70.14) можно переписать в следующем виде (приняв во внимание, что  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i l_i = \sum_{i=1}^3 l_i^2 = 1$ ):

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \dot{V}_i = \frac{V_a}{m} \beta + \sum_{i=1}^3 \lambda_i g_i. \quad (70a.14)$$

При помощи (70a.14) уравнения (65.14) и (66.14) для определения моментов старта и прибытия можно свести к виду

$$\sum_{i=1}^3 [\lambda_{i0} g_{i0} - \dot{\lambda}_{i0} V_{i0}] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_0} dt, \quad (71.14)$$

$$\sum_{i=1}^3 [\lambda_{i1} g_{i1} - \dot{\lambda}_{i1} V_{i1}] = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial t_1} dt. \quad (72.14)$$

При пассивном полете ( $\beta=0$ ) по кеплеровой дуге после приложения импульса тяги вследствие инвариантности гравитационного поля первый интеграл уравнений Эйлера на основании (52.14) и (55.14)

$$\sum_{i=1}^3 (\lambda_i g_i - \dot{\lambda}_i V_i) = \text{const} \quad (73.14)$$

или в векторной форме

$$\bar{\lambda} \bar{g} - \dot{\bar{\lambda}} \bar{V} = \text{const}. \quad (73a.14)$$

Рассмотрим более подробно вопрос о движении космического корабля на пассивном участке.

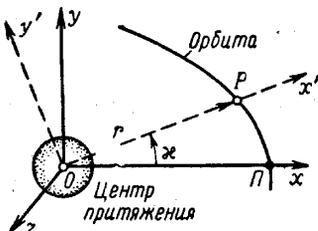


Рис. 7.14. Неподвижные и вращающиеся оси координат

#### § 4. Движение космического корабля по кеплеровой дуге

Траектория полета космического корабля, как отмечалось, состоит из участков кеплеровых дуг, в точках соединения которых приложены соответствующие импульсы тяги. Выведем выражения для составляющих вектора  $\bar{\lambda}$  (см. стр. 457) на участке пассивного полета (на кеплеровой дуге), на котором траектория полета, как известно, представляет дугу конического сечения.

Пусть дуга конического сечения лежит в плоскости  $xOy$  невращающейся системы координат  $Oxyz$ , начало которой помещено в центре притяжения  $O$  (рис. 7.14). Положение корабля на орбите изображается точкой  $P$ . Полярными координатами точки  $P$  будут радиус  $r$  и угол  $\kappa$ . Введем еще вторую систему координат, которая вращается вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\dot{\kappa}$ , так что точка  $P$  все время остается на оси  $Ox'$  этой системы  $Ox'y'z$ . В какой-либо точке  $(r, y', z)$  второй системы координат составляющие силы притяжения на единицу массы корабля будут:

$$g_r = - \frac{\mu r}{(r^2 + y'^2 + z^2)^{1,5}},$$

$$g_{y'} = - \frac{\mu y'}{(r^2 + y'^2 + z^2)^{1,5}},$$

$$g_z = - \frac{\mu z}{(r^2 + y'^2 + z^2)^{1,5}}$$

Взяв от этих выражений частные производные по  $r$ ,  $y'$  и  $z$  и положив в них  $y' = z = 0$ , найдем, что в точке  $P$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g_r}{\partial r} &= \frac{2\mu}{r^3}, \quad \frac{\partial g_r}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial g_r}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial g_{y'}}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial g_{y'}}{\partial y'} = -\frac{\mu}{r^3}, \quad \frac{\partial g_{y'}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial g_z}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial g_z}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial g_z}{\partial z} = -\frac{\mu}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (74.14)$$

Определим составляющие вектора  $\bar{\lambda}$  по осям координат  $Ox'y'z$  через координаты корабля на траектории и через параметры траектории полета. В случае плоской траектории, которым мы и ограничимся, анализ приводит к следующим выражениям этих составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= A \cos \kappa + B e \sin \kappa, \\ \lambda_2 &= -A \sin \kappa + B(1 + e \cos \kappa) + \frac{D - A \sin \kappa}{1 + e \cos \kappa}, \end{aligned} \right\} \quad (75.14)$$

где  $\kappa$  — истинная аномалия;  $A$ ,  $B$  и  $D$  — произвольные постоянные, которые должны быть определены по заданным граничным условиям.

Составляющие вектора производной  $\frac{d\bar{\lambda}}{dt}$ , которые для краткости обозначим через  $\xi$ ,  $\eta$  (эти составляющие понадобятся нам в дальнейшем), оказываются равными:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left( \frac{A \sin \kappa - D}{1 + e \cos \kappa} - B \right), \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} [-A(e + \cos \kappa) + D e \sin \kappa]. \end{aligned} \right\} \quad (76.14)$$

Приведем вывод выражений (75.14) — (76.14). В случае плоской траектории, который мы рассматриваем, правые части скалярных уравнений (42.14) на основании (74.14)

$$\frac{2\mu}{r^3} \lambda_1, \quad -\frac{\mu}{r^3} \lambda_2. \quad (77.14)$$

Левую часть векторного уравнения (42.14) в соответствии с правилом дифференцирования векторов (см. гл. I) преобразуем следующим образом<sup>1</sup>:

$$\ddot{\bar{\lambda}} \equiv \frac{d^2 \bar{\lambda}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\bar{\lambda}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{\bar{\lambda}} + \dot{\kappa} \bar{k} \times \bar{\lambda}), \quad \text{где } \dot{\bar{\lambda}} = \frac{\delta \bar{\lambda}}{\delta t}.$$

Далее

$$\frac{d \dot{\bar{\lambda}}}{dt} = \ddot{\bar{\lambda}} + \dot{\kappa} \bar{k} \times \bar{\lambda}; \quad \frac{d}{dt} (\dot{\kappa} \bar{k} \times \bar{\lambda}) = \ddot{\kappa} \bar{k} \times \bar{\lambda} + \dot{\kappa} \bar{k} \times \dot{\bar{\lambda}} + \dot{\kappa}^2 \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{\lambda}),$$

так что

$$\frac{d^2 \bar{\lambda}}{dt^2} = \ddot{\bar{\lambda}} + 2\dot{\kappa} \bar{k} \times \bar{\lambda} + \ddot{\kappa} \bar{k} \times \bar{\lambda} + \dot{\kappa}^2 \bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{\lambda}). \quad (77a.14)$$

<sup>1</sup>  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — орты вдоль осей  $Ox', Oy', Oz$ .

Раскрывая векторное произведение, получим

$$\bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{\lambda}) = -(\lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j})$$

или, приняв во внимание общее выражение вектора  $\bar{\lambda}$  через составляющие по осям координат  $\bar{\lambda} = \lambda_1 \bar{i} + \lambda_2 \bar{j}$ ,

$$\bar{k} \times (\bar{k} \times \bar{\lambda}) = -\bar{\lambda}.$$

При помощи этого выражения (77а.14) принимает вид

$$\frac{d^2 \bar{\lambda}}{dt^2} = \ddot{\bar{\lambda}} + 2\dot{\lambda}_1 \bar{k} \times \bar{\lambda} + \dot{\lambda}_2 \bar{k} \times \bar{\lambda} - \lambda_1 \ddot{\bar{\lambda}}. \quad (77б.14)$$

Введем теперь новый вектор

$$\bar{q} = q_x \bar{i} + q_y \bar{j},$$

связанный с вектором  $\bar{\lambda}$  соотношением

$$\bar{\lambda} = r \bar{q}, \quad (78.14)$$

причем  $r$  — расстояние точки  $P$  от начала координат.

Дифференцируя (78.14), будем иметь

$$\dot{\bar{\lambda}} = r \dot{\bar{q}} + \dot{r} \bar{q}, \quad \ddot{\bar{\lambda}} = r \ddot{\bar{q}} + 2\dot{r} \dot{\bar{q}} + \ddot{r} \bar{q}.$$

Внося эти выражения в (77б.14), получим

$$\frac{d^2 \bar{\lambda}}{dt^2} = r \ddot{\bar{q}} + 2\dot{r} \dot{\bar{q}} + (\ddot{r} - r\dot{\lambda}^2) \bar{q} + (r\ddot{\lambda}_1 + 2\dot{\lambda}_1 \dot{r}) \bar{k} \times \bar{q} + 2r\dot{\lambda}_2 \bar{k} \times \dot{\bar{q}}. \quad (79.14)$$

Запишем теперь уравнения движения космического корабля по плоской орбите в полярной системе координат с полюсом в точке  $O$ . Эти уравнения, полученные в гл. III, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\lambda}^2 &= -\frac{\mu}{r^2}, \\ r\ddot{\lambda} + 2\dot{r}\dot{\lambda} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (80.14)$$

где для данного поля тяготения  $\mu = GM$  ( $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса притягивающего тела).

С учетом (80.14) выражение (79.14) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2 \bar{\lambda}}{dt^2} = r \ddot{\bar{q}} + 2\dot{r} \dot{\bar{q}} + 2r\dot{\lambda}_1 \bar{k} \times \dot{\bar{q}} - \frac{\mu}{r^2} \bar{q}. \quad (81.14)$$

Обозначим

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \lambda} = \bar{q}', \quad \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \lambda^2} = \bar{q}'' ,$$

тогда

$$\dot{\bar{q}} = \dot{\lambda} \bar{q}', \quad \ddot{\bar{q}} = \dot{\lambda}^2 \bar{q}'' + \ddot{\lambda} \bar{q}'$$

и вместо (81.14) получим

$$\frac{d^2 \bar{\lambda}}{dt^2} = r \dot{\lambda}^2 \bar{q}'' + (r\ddot{\lambda} + 2\dot{r}\dot{\lambda}) \bar{q}' + 2r\dot{\lambda}_1 \bar{k} \times \bar{q}' - \frac{\mu}{r^2} \bar{q}. \quad (81а.14)$$

На основании второго закона Кеплера (см. гл. II) имеем

$$r^2 \dot{\lambda} = \sqrt{\mu p}, \quad (82.14)$$

где параметр эллиптической орбиты

$$p = a(1 - e^2),$$

$a$  — большая полуось;  $e$  — эксцентриситет орбиты.

При помощи записанных выражений исключим угловую скорость  $\dot{\lambda}$  и угловое ускорение  $\ddot{\lambda}$  из (81a.14), получим

$$\frac{d^2 \bar{\lambda}}{dt^2} = \frac{\mu p}{r^3} \left( \bar{q}'' + 2\bar{k} \times \bar{q}' - \frac{r}{p} \bar{q} \right). \quad (83.14)$$

В соответствии с (78.14) для составляющих вектора  $\bar{\lambda}$  по осям координат  $Ox'y'z$  имеем следующие выражения:

$$\lambda_1 = r q_x, \quad \lambda_2 = r q_y,$$

так что по (77.14) правые части скалярных уравнений (42.14) получаются равными:

$$\frac{2\mu}{r^2} q_x, \quad - \frac{\mu}{r^2} q_y.$$

Далее, спроектировав вектор (83.14) на оси координат, получим левые части этих уравнений в виде<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\mu p}{r^3} \left( q_x'' - 2q_y' - \frac{r}{p} q_x \right), \\ \frac{\mu p}{r^3} \left( q_y'' + 2q_x' - \frac{r}{p} q_y \right). \end{aligned}$$

Таким образом, скалярные уравнения (42.14) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\mu p}{r^3} \left( q_x'' - 2q_y' - \frac{r}{p} q_x \right) &= \frac{2\mu}{r^2} q_x, \\ \frac{\mu p}{r^3} \left( q_y'' + 2q_x' - \frac{r}{p} q_y \right) &= - \frac{\mu}{r^2} q_y \end{aligned}$$

или после сокращения на  $\mu/r^2$  и приведения подобных членов

$$\left. \begin{aligned} q_x'' - 2q_y' - \frac{3r}{p} q_x &= 0, \\ q_y'' + 2q_x' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (84.14)$$

Так как гравитационное поле инвариантно (не зависит от времени  $t$ ), то уравнения (84.14) не содержат  $t$  в явном виде, так что можно сразу написать выражение первого интеграла, имеющее вид (73.14).

Мы имеем следующее выражение для вектора  $\bar{\lambda}$ :

$$\bar{\lambda} = r\bar{q} = r q_x \bar{i} + r q_y \bar{j}.$$

Производная этого вектора

$$\dot{\bar{\lambda}} = \frac{d\bar{\lambda}}{dt} = r\dot{\bar{q}} + \dot{r}\bar{q} + r\dot{\bar{k}} \times \bar{q}.$$

Векторы  $\bar{g}$  (направленный вдоль  $r$ ) и  $\bar{V}$

$$\bar{g} = - \frac{\mu}{r^2} \bar{i}, \quad \bar{V} = \dot{r}\bar{i} + r\dot{\bar{k}}\bar{j}.$$

При помощи этих выражений находим слагаемые (73a.14):

$$\bar{\lambda}\bar{g} = - (r q_x \bar{i} + r q_y \bar{j}) \frac{\mu}{r^2} \bar{i} = - \frac{\mu}{r} q_x,$$

$$\dot{\bar{\lambda}}\bar{V} = (r\dot{\bar{q}} + \dot{r}\bar{q} + r\dot{\bar{k}} \times \bar{q}) (\dot{r}\bar{i} + r\dot{\bar{k}}\bar{j}) = [r\dot{\bar{q}} + \dot{r}\bar{q} +$$

<sup>1</sup>) Так как  $q'' = q_x'' \bar{i} + q_y'' \bar{j}$ ,  $2\bar{k} \times \bar{q}' = -2q_y' \bar{j} + 2q_x' \bar{i}$  и

$$\frac{r}{p} \bar{q} = \frac{r}{p} q_x \bar{i} + \frac{r}{p} q_y \bar{j}.$$

$$\begin{aligned}
 & + r\dot{x}(q_x\bar{j} - q_y\bar{i}) \cdot [\dot{r}\bar{i} + r\dot{x}\bar{j}] = [(r\dot{q}_x + \dot{r}q_x - r\dot{x}q_y)\bar{i} + \\
 & + (r\dot{q}_y + \dot{r}q_y + r\dot{x}q_x)\bar{j}] (\dot{r}\bar{i} + r\dot{x}\bar{j}) = \dot{r}(r\dot{q}_x + \dot{r}q_x - r\dot{x}q_y) + \\
 & + r\dot{x}(r\dot{q}_y + \dot{r}q_y + r\dot{x}q_x).
 \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в (73а.14) и приняв во внимание, что

$$\bar{q} = \dot{x}\bar{q}', \quad \dot{q}_x = \dot{x}q'_x, \quad \dot{q}_y = \dot{x}q'_y,$$

имеем

$$r\dot{x}q'_x + r^2\dot{x}^2q'_y + \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{x}^2 + \frac{\mu}{r}\right)q_x = \text{const}. \quad (85.14)$$

Преобразуем коэффициенты этого уравнения. Взяв производные от обеих частей уравнения эллиптической орбиты (см. гл. II)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \chi},$$

получим

$$\dot{r} = e \frac{r^2}{p} \dot{\chi} \sin \chi, \quad (86.14)$$

где  $p$  — параметр кривой,  $e$  — эксцентриситет и  $\chi$  — истинная аномалия.

При помощи этих выражений и (82.14) находим

$$r\dot{r}\dot{\chi} = \frac{\mu}{p} e \sin \chi (1 + e \cos \chi),$$

$$r^2\dot{\chi}^2 = \frac{\mu}{p} (1 + e \cos \chi)^2,$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\chi}^2 + \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{p} (e^2 + 2 + 3e \cos \chi).$$

Теперь (85.14) можно переписать в следующем виде:

$$q'_x e \sin \chi (1 + e \cos \chi) + q'_y (1 + e \cos \chi)^2 + (2 + e^2 + 3e \cos \chi) q_x = \text{const} \frac{p}{\mu} = c', \quad (87.14)$$

где обозначено

$$c' = \text{const} \frac{p}{\mu}.$$

Так как (87.14) есть следствие уравнений (84.14), то какое-либо одно из этих уравнений можно заменить уравнением (87.14); мы отбросим первое уравнение. Интегрируя второе уравнение (84.14), найдем

$$q'_y = c_1 - 2q_x = A'e - 2q_x, \quad (88.14)$$

где постоянная интегрирования принята  $c_1 = A'e$  ( $A'$  — новая постоянная).

Подставив (88.14) в (87.14), после некоторых преобразований придем к следующему уравнению:

$$q'_x \sin \chi (1 + e \cos \chi) + q_x (e - \cos \chi - 2e \cos^2 \chi) = \frac{c'}{e} - A' (1 + e \cos \chi)^2.$$

Будем предполагать, что моменты отправления и прибытия корабля заранее не заданы; тогда (см. гл. I) в (73.14) постоянная равна нулю и, следовательно, постоянная  $c' = 0$ , так что написанное уравнение упрощается:

$$q'_x \sin \chi (1 + e \cos \chi) + q_x (e - \cos \chi - 2e \cos^2 \chi) = -A' (1 + e \cos \chi)^2. \quad (89.14)$$

Как нетрудно проверить, общее решение дифференциального уравнения (89.14) будет

$$q_x = (1 + e \cos \kappa)(A' \cos \kappa + B' e \sin \kappa), \quad (90.14)$$

где  $B'$  — постоянная интегрирования.

Внося (90.14) в (88.14), после интегрирования придем к следующему выражению для второй составляющей вектора  $q_y$ :

$$q_y = (1 + e \cos \kappa) \left[ -A' \sin \kappa + B' (1 + e \cos \kappa) + \frac{D' - A' \sin \kappa}{1 + e \cos \kappa} \right] \quad (91.14)$$

( $D'$  — постоянная интегрирования).

Из (90.14) и (91.14) легко получаются выражения (75.14); выражения (76.14) получаются по общим правилам дифференцирования вектора из (75.14).

Действительно, так как  $\bar{\lambda} = r\bar{q}$ , то из (90.14) следует

$$\lambda_1 = r(1 + e \cos \kappa)(A' \cos \kappa + B' e \sin \kappa),$$

но в соответствии с уравнением эллипса

$$r(1 + e \cos \kappa) = \rho,$$

так что предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\lambda_1 = A' \rho \cos \kappa + B' \rho e \sin \kappa.$$

Наконец, обозначив

$$A' \rho = A, \quad B' \rho = B,$$

придем к первому уравнению (75.14). Аналогичным образом получается и второе уравнение (75.14).

Далее, раскрывая векторное произведение в выражении производной вектора  $\bar{\lambda}$ :

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} = \dot{\bar{\lambda}} + \dot{\kappa} \bar{k} \times \bar{\lambda},$$

для составляющей этой производной по осям координат получаем следующие выражения:

$$\xi = \dot{\lambda}_x - \dot{\kappa} \lambda_y,$$

$$\eta = \dot{\lambda}_y + \dot{\kappa} \lambda_x,$$

которые на основании равенств

$$\dot{\lambda}_x = \lambda'_x \dot{\kappa}, \quad \dot{\lambda}_y = \lambda'_y \dot{\kappa}$$

принимают вид

$$\xi = (\lambda'_x - \lambda_y) \dot{\kappa},$$

$$\eta = (\lambda'_y + \lambda_x) \dot{\kappa}.$$

Взяв производные по  $\kappa$  от выражений (75.14), будем иметь

$$\lambda'_1 \equiv \lambda'_x = -A \sin \kappa + B e \cos \kappa,$$

$$\lambda'_2 \equiv \lambda'_y = -A \left[ \cos \kappa \frac{2 + e \cos \kappa}{1 + e \cos \kappa} + \frac{e \sin^2 \kappa}{(1 + e \cos \kappa)^2} \right] - B e \sin \kappa + D \frac{e \sin \kappa}{(1 + e \cos \kappa)^2}.$$

Подставив эти выражения в выражения производных  $\xi$  и  $\eta$ , получим

$$\xi = -\dot{\kappa} \left( B + \frac{D - A \sin \kappa}{1 + e \cos \kappa} \right),$$

$$\eta = \frac{\dot{\kappa}}{(1 + e \cos \kappa)^2} [-A(\cos \kappa + e) + D e \sin \kappa].$$

Наконец, приняв во внимание, что по формуле (82.14)

$$\dot{\kappa} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}, \quad (92.14)$$

придем к выражениям (76.14).

## § 5. Оптимальное перемещение космического корабля с одной круговой орбиты на другую

Существенным этапом расчета траекторий межпланетных перелетов является расчет оптимальной траектории перехода с одной орбиты на другую, например, с орбиты Земли на орбиту Марса. Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют получить решение этой важной задачи.

Заметим предварительно, что эксцентриситет орбит планет солнечной системы невелик, так что в исследованиях первого приближения без большой погрешности вместо эллиптических орбит планет можно рассматривать круговые орбиты. Такую упрощенную задачу мы и будем впоследствии рассматривать в этом параграфе. Обе орбиты — начальную и конечную — и траекторию перехода с одной орбиты на другую будем предполагать лежащими в одной плоскости; время, затрачиваемое на переход, будем считать заранее не заданным.

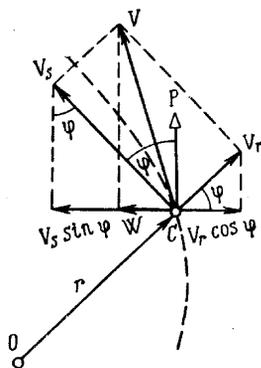


Рис. 8.14. К определению угла  $\varphi$  между направлением силы тяги и перпендикуляром к радиусу-вектору

Весь процесс перехода с одной орбиты на другую можно разбить на две фазы: на первой фазе в результате приложения импульса космический корабль, до этого двигавшийся по круговой орбите старта, начинает полет по эллиптической<sup>1</sup> орбите перехода до того момента времени<sup>2</sup>, когда орбита пересечется с орбитой назначения, которую мы опять примем круговой. В точке пересечения эллиптической орбиты перехода и круговой орбиты назначения прикладывается второй импульс тяги, в результате чего корабль начинает двигаться по орбите назначения. Таким образом, будем рассматривать *двухимпульсный маневр перехода*, хотя вообще мыслимы маневры перехода с большим числом импульсов.

Рассмотрим в общем случае (не делая пока предположения о том, что орбиты старта и назначения — круговые) переход с орбиты на орбиту. Числа, характеризующие положение космического корабля на первой орбите — параметр орбиты, ее эксцентриситет и долготу корабля, — будем обозначать буквами  $p'$ ,  $e'$ ,  $\kappa'$  соответственно. Аналогичные числа для второй орбиты обозначим соответственно  $p$ ,  $e$ ,  $\kappa$ <sup>3</sup>.

По доказанному ранее составяющие вектора  $\bar{\lambda}$  (как было показано, на участке активного полета эти составляющие  $\lambda_i$  являются направляющими косинусами вектора тяги) и их производные в точках соединения участков траектории должны изменяться непрерывно. Поэтому на основании (75.14) и (76.14) получим следующую систему уравнений:

<sup>1</sup> Доказательство того, что орбита перехода — эллиптическая, см. ниже.

<sup>2</sup> При более точной постановке задачи начальная и конечная орбиты некомпланарны; момент начала полета по орбите перехода надо выбирать так, чтобы ее пересечение с конечной орбитой получилось вблизи линии узлов.

<sup>3</sup> Очевидно, справедливы равенства  $\frac{p'}{r} = 1 + e' \cos \kappa'_i$ ,  $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \kappa_i$ ; это принято во внимание при составлении (93.14). Кроме того, истинная аномалия здесь обозначена  $\kappa_i$ ; в отличие от принятого ранее обозначения  $\kappa$ .

$$\begin{aligned}
A' \cos \alpha_i + B's' &= \sin \varphi, \\
A \cos \alpha_i + Bs &= \sin \varphi, \\
-\left(1 + \frac{r}{p'}\right) A' \sin \alpha_i + B' \frac{p'}{r} + D' \frac{r}{p'} &= \cos \varphi, \\
-\left(1 + \frac{r}{p}\right) A \sin \alpha_i + B \frac{p}{r} + D \frac{r}{p} &= \cos \varphi, \\
\left(\frac{p'}{p}\right)^{0,5} \left(A' \sin \alpha_i \frac{r}{p'} - B' - D' \frac{r}{p'}\right) &= A \sin \alpha_i \frac{r}{p} - B - D \frac{r}{p}, \\
\left(\frac{p}{p'}\right)^{1,5} [-A'(e' + \cos \alpha_i) + D's'] &= -A(e + \cos \alpha_i) + Ds, \\
s &= \frac{p}{r} \operatorname{tg} \varphi - W \left(\frac{p}{\mu}\right)^{0,5} \sec \varphi, \\
s' &= \frac{p'}{p} \operatorname{tg} \varphi - W \left(\frac{p'}{\mu}\right)^{0,5} \sec \varphi.
\end{aligned} \tag{93.14}$$

В (93.14) приняты следующие обозначения:

$\varphi$  — угол между вектором силы тяги и перпендикуляром к радиусу-вектору, определяющему положение корабля на орбите (рис. 8.14);

$\alpha_i$  и  $\alpha_i'$  — истинные аномалии первой и второй орбит в точке их соединения;

$W$  — составляющая скорости корабля (после его прибытия в точку соединения) по направлению, перпендикулярному силе тяги.

Наконец,  $s' = e' \sin \alpha_i$ ,  $s = e \sin \alpha_i$ .

В самом деле, согласно (75.14) на кеплеровой дуге составляющие по осям координат вектора  $\lambda$  равны:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= A \cos \alpha_i + Be \sin \alpha_i, \\
\lambda_2 &= -A \sin \alpha_i + B(1 + e \cos \alpha_i) + \frac{D - A \sin \alpha_i}{1 + e \cos \alpha_i}.
\end{aligned}$$

Далее, как известно, радиальная и тангенциальная составляющие скорости корабля

$$V_r' = \dot{r}, \quad V_s = r\dot{\alpha}.$$

Приняв во внимание (82.14) и (86.14), эти выражения перепишем в следующем виде:

$$V_r = e \frac{r^2}{p} \dot{\alpha} \sin \alpha_i, \tag{94.14}$$

$$V_s = \frac{\sqrt{\mu p}}{r}. \tag{95.14}$$

Из рис. 8.14, проектируя радиальную и тангенциальную составляющие скорости корабля на направление, перпендикулярное силе тяги, находим

$$W = -V_r \cos \varphi + V_s \sin \varphi. \tag{96.14}$$

После подстановки (94.14) и (95.14) выражение (96.14) принимает вид<sup>1</sup>

$$W = -e \frac{\sin \alpha_i}{p} r^2 \dot{\alpha} \cos \varphi + \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \sin \varphi = -e \frac{\sin \alpha_i}{p} \sqrt{\mu p} \cos \varphi + \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \sin \varphi$$

<sup>1</sup>) Так как  $r^2 \dot{\alpha} = r \cdot r\dot{\alpha} = r \cdot V_s = \sqrt{\mu p}$ .

или

$$W = -e \sin \alpha_i \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos \varphi + \frac{\sqrt{\mu p}}{r} \sin \varphi.$$

Определяя из этого уравнения произведение  $e \sin \alpha_i$ , которое мы обозначили через  $s$ , получим для какой-либо орбиты из рассматриваемых

$$s = \frac{p}{r} \operatorname{tg} \varphi - W \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sec \varphi. \quad (97.14)$$

В точке соединения двух орбит нормальная к направлению силы тяги составляющая скорости  $W$  корабля остается неизменной; отсюда получаются два последних уравнения (93.14).

Истинные аномалии первой и второй орбит в точке соединения получаются разными; их мы обозначали через  $\alpha'_i$  и  $\alpha_i$ . Так как составляющие  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , как уже отмечено, являются направляющими косинусами вектора силы тяги, т. е. равны соответственно  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ , то из (75.14) получаются четыре первых уравнения (93.14).

Наконец, пятое и шестое уравнения (93.14) легко получаются из (75.14) после подстановки в них

$$s' = e' \sin \alpha'_i, \quad s = e \sin \alpha_i \quad \text{и} \quad 1 + e \cos \alpha_i = \frac{p}{r}.$$

Система (93.14) состоит из шести<sup>1</sup> уравнений с шестью неизвестными  $A, B, D, A', B', D'$ . Определяя из этой системы уравнений  $A, B$  и  $D$ , найдем

$$A = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1}{e} \left( W - \frac{\mu}{Wr} \sin^2 \varphi \right), \quad (98.14)$$

$$e^2 B = \left( \frac{p}{r} - 1 \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi \frac{1}{W} \right) \cos \varphi + \left( \frac{p}{r} \sin \varphi - \sqrt{\frac{p}{\mu}} W \right) \operatorname{tg} \varphi, \quad (99.14)$$

$$B + D = - \left[ 1 + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left( 1 + \frac{p}{r} \right) \frac{1}{W} \sin \varphi \right] \cos \varphi. \quad (100.14)$$

Действительно, исключая из третьего и пятого уравнений системы (93.14) неизвестную  $D'$ , приходим к уравнению

$$-s'A' + \left( \frac{p'}{r} - 1 \right) B'e' = c_0, \quad (101.14)$$

где обозначено

$$c_0 = e' \cos \varphi + \frac{e'}{e} \sqrt{\frac{p}{p'}} \left( \frac{r}{p} sA - \frac{r}{p} De - Be \right).$$

После исключения  $D'$  из пятого и шестого уравнений (93.14) получим

$$- \left( \frac{p'}{r} - 1 \right) A' - s' B' e' = c, \quad (102.14)$$

где обозначено

$$c = \frac{e'}{e} \sqrt{\frac{p}{p'}} (-a_1 A - s' B e + d_1 D e),$$

<sup>1</sup> Параметры орбит, а следовательно,  $s'$  и  $s$  предполагаются известными (заданными), так же как  $W$  и  $\varphi$ .

$$a_1 = \frac{r}{p} \left[ \frac{p'}{p} \left( e^2 + \frac{p}{r} - 1 \right) - ss' \right],$$

$$d_1 = \frac{r}{p} \left[ \frac{p'}{p} s - s' \right].$$

Сравнивая (102.14) с первым уравнением (93.14), получим уравнение относительно  $A$ ,  $B$  и  $D$ :

$$e' \sin \varphi = -c,$$

которое можно переписать в виде

$$a_1 A + s' B e - d_1 D e = \sqrt{\frac{p'}{p}} e \sin \varphi. \quad (103.14)$$

Исключая  $D$  из этого уравнения и четвертого уравнения (93.14), получим

$$a_2 A + b_2 B e = c_2, \quad (104.14)$$

где обозначено

$$a_2 = \frac{p'}{p} \left( \frac{p}{r} - 1 \right) + s \left( s' - \frac{p'}{p} s \right),$$

$$b_2 = s' - \frac{p}{r} \left( s' - \frac{p'}{p} s \right),$$

$$c_2 = e \left[ \sqrt{\frac{p'}{p}} \sin \varphi - \left( s' - \frac{p'}{p} s \right) \cos \varphi \right].$$

Наконец, решая совместно (104.14) и второе уравнение (93.14), найдем

$$A = \frac{c_2 s - b_2 e \sin \varphi}{a_2 s - b_2 \left( \frac{p}{r} - 1 \right)}. \quad (105.14)$$

После подстановки в (105.14) развернутых выражений коэффициентов  $a_2$ ,  $b_2$  и  $c_2$ , а также приняв во внимание, что на основании двух последних уравнений (93.14)

$$s' - \frac{p'}{p} s = \sqrt{\frac{p'}{\mu}} \left( \sqrt{\frac{p'}{p}} - 1 \right) W \sec \varphi,$$

придем к выражению (98.14).

Выражение (99.14) получается из второго уравнения (93.14). Перепишем это уравнение в несколько иной форме:

$$s B e^2 = e^2 \sin \varphi - A e^2 \cos \chi.$$

Используя равенства

$$e \sin \chi = s, \quad e \cos \chi = \frac{p}{r} - 1,$$

получим

$$e^2 = s^2 + \left( \frac{p}{r} - 1 \right)^2.$$

При помощи этих соотношений предыдущее уравнение можно привести к следующему виду:

$$s B e^2 = s^2 \sin \varphi + \left( \frac{p}{r} - 1 \right) \left[ \left( \frac{p}{r} - 1 \right) \sin \varphi - A e \right].$$

Подставив сюда  $A$  по (98.14) и воспользовавшись выражением  $s$  по (93.14), проведем простые преобразования записанного уравнения:

$$\begin{aligned} sBe^2 &= s^2 \sin \varphi + \left(\frac{p}{r} - 1\right) \left[ \left(\frac{p}{r} - 1\right) \sin \varphi - \sqrt{\frac{p}{\mu}} W + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\mu}{Wr} \sin^2 \varphi \right] = \\ &= s^2 \sin \varphi + \left(\frac{p}{r} - 1\right) \left[ s \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left( \frac{p}{r} \sin \varphi - \sqrt{\frac{p}{\mu}} W \right) \right] = \\ &= s \left[ s \sin \varphi + \left(\frac{p}{r} - 1\right) \cos \varphi \left( 1 + \frac{\sin \varphi}{W} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \right) \right]. \end{aligned}$$

После сокращения на общий множитель  $s$ , подставив развернутое выражение  $s$ , приходим к (99.14). Далее перепишем четвертое уравнение (93.14) в виде

$$B + D = \frac{p}{r} \cos \varphi + \left(\frac{p}{r} + 1\right) \left[ A \sin \varphi - B \left(\frac{p}{r} - 1\right) \right]$$

и подставим в правую часть  $A$  по (98.14) и  $B$  из второго уравнения (93.14). После простых преобразований приходим к (100.14).

Введем вместо параметров  $r$ ,  $W$  и  $p$  другие параметры  $k$ ,  $z$  и  $l$ , связанные соотношениями:

$$r = \frac{1}{k}, \quad W = \sqrt{\mu z} \sin \varphi, \quad l = \frac{1}{p}, \quad (106.14)$$

где по-прежнему  $\mu = GM$ .

В новых обозначениях выражения (98.14) — (100.14) принимают вид

$$A = \frac{1}{e} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{l}} \left( z - \frac{k}{z} \right), \quad (106a.14)$$

$$e^2 B = \frac{1}{l} \left[ (k - l) \left( 1 + \frac{\sqrt{l}}{z} \right) \cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi (k - z \sqrt{l}) \right], \quad (106б.14)$$

$$B + D = -\cos \varphi \left( 1 + \frac{k + l}{z \sqrt{l}} \right). \quad (106в.14)$$

В рассматриваемой нами задаче перехода с одной орбиты (орбиты старта) на другую (орбиту назначения) будут две точки соединения: точка соединения орбиты старта с орбитой перехода и точка соединения орбиты перехода с орбитой назначения. Условимся все величины для орбиты старта отмечать индексом «1», для орбиты назначения — индексом «2» и для орбиты перехода — буквами без индекса. Заметим, что в обеих точках соединения эксцентриситет  $e$ , параметр  $p$  орбиты перехода, а также постоянные  $A$ ,  $B$  и  $D$  на этой орбите неизменны.

Из условия неизменности  $A$  в точках соединения при неизменных  $e$  и  $l$ , принимая во внимание (106a.14), получим

$$\left( z_1 - \frac{k_1}{z_1} \right) \sin \varphi_1 = \left( z_2 - \frac{k_2}{z_2} \right) \sin \varphi_2. \quad (107.14)$$

Аналогично на основании (106б.14) и (106в.14) будем иметь

$$\begin{aligned} (k_1 - l) \left( 1 + \frac{\sqrt{l}}{z_1} \right) \cos \varphi_1 + (k_1 - z_1 \sqrt{l}) \sin \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \\ = (k_2 - l) \left( 1 + \frac{\sqrt{l}}{z_2} \right) \cos \varphi_2 + (k_2 - z_2 \sqrt{l}) \sin \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (108.14) \end{aligned}$$

$$\cos \varphi_1 \left( 1 + \frac{k_1 + l}{z_1 \sqrt{l}} \right) = \cos \varphi_2 \left( 1 + \frac{k_2 + l}{z_2 \sqrt{l}} \right). \quad (109.14)$$

Обозначим долготу первой и второй точек соединения соответственно  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , а долготу перигелиев на орбите старта  $\tilde{\kappa}_1$ , на орбите перехода  $\tilde{\kappa}$  и на орбите назначения  $\tilde{\kappa}_2$ . Тогда истинные аномалии в точках соединения на орбите старта, на переходной орбите и на орбите назначения соответственно будут

$$\kappa_{i1} = \kappa_1 - \tilde{\kappa}_1, \quad \kappa_i = \kappa_1 - \tilde{\kappa}, \quad \kappa_{i2} = \kappa_2 - \tilde{\kappa}_2.$$

Из уравнения эллипса в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \kappa_i}$$

найдем

$$\frac{e}{p} \cos \kappa_i = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} = k - l.$$

Введя еще одно обозначение

$$q = \frac{e}{p} = el,$$

предыдущее равенство перепишем в виде

$$q \cos \kappa_i = k - l. \quad (110.14)$$

Применим теперь полученные выражения к задаче о переходе с одной орбиты на другую, имея в виду, что, как уже было отмечено, орбиты старта и назначения с достаточной для наших целей точностью можно считать круговыми. Для круговой орбиты, как известно,  $e=0$  и, следовательно,  $q=0$ . Таким образом, в первой точке соединения получим для орбиты старта

$$0 = k_1 - l_1. \quad (111.14)$$

В той же точке для орбиты перехода

$$q \cos \kappa_{i1} = k_1 - l, \quad (112.14)$$

где по-прежнему  $k_1 = \frac{1}{r_1}$ .

Для второй точки соединения на орбите перехода

$$q \cos \kappa_{i2} = k_2 - l \quad (113.14)$$

и на круговой орбите назначения

$$0 = k_2 - l_2.$$

В новых обозначениях введенное в (93.14) выражение

$$s = \frac{p}{r} \operatorname{tg} \varphi = W \left( \frac{p}{\mu} \right)^{0,5} \sec \varphi \quad (114.14)$$

принимает вид

$$q \sin \kappa_i = \operatorname{tg} \varphi (k - z \sqrt{l}).$$

Применяя это равенство последовательно к обеим точкам соединения орбит, получим равенства для круговой орбиты старта:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 (k_1 - z_1 \sqrt{l_1}) = 0. \quad (115.14)$$

В первой точке соединения на эллиптической орбите

$$q \sin \kappa_{i1} = \operatorname{tg} \varphi_1 (k_1 - z_1 \sqrt{l}). \quad (116.14)$$

Для круговой орбиты назначения

$$\operatorname{tg} \varphi_2 (k_2 - z_2 \sqrt{l_2}) = 0. \quad (117.14)$$

Во второй точке соединения на эллиптической орбите

$$q \sin \kappa_{i2} = \operatorname{tg} \varphi_2 (k_2 - z_2 \sqrt{l}). \quad (118.14)$$

Мы пришли к системе 11 уравнений (107.14) — (109.14), (111.14) — (118.14), содержащей 11 неизвестных: четыре координаты точек соединения  $r_1, r_2, \kappa_{i1}, \kappa_{i2}$  (напомним, что  $k = \frac{1}{r}$ ); две величины импульсов тяги в точках соединения и два их направления  $z_1, z_2, \varphi_1, \varphi_2$  [ $z$  связана с импульсом соотношением (106.14)]; параметр  $p = \frac{1}{l}$  орбиты перехода и ее расположение  $q$  и  $\tilde{\kappa}$  относительно орбит старта и назначения.

Рассмотрим уравнения (115.14) и (117.14). Ясно, что решениями этих уравнений могут быть либо

$$k_1 = z_1 \sqrt{l_1}, \quad k_2 = z_2 \sqrt{l_2},$$

либо

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = 0, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 0.$$

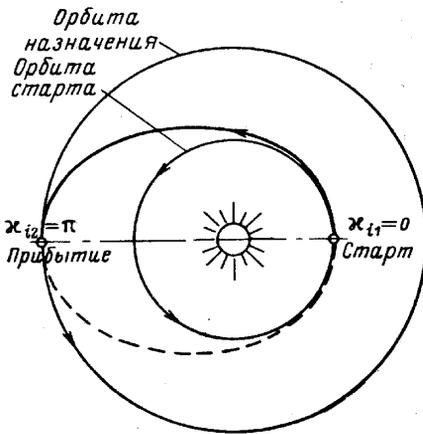


Рис. 9.14. Орбита перехода в случае, когда орбита старта лежит внутри орбиты назначения

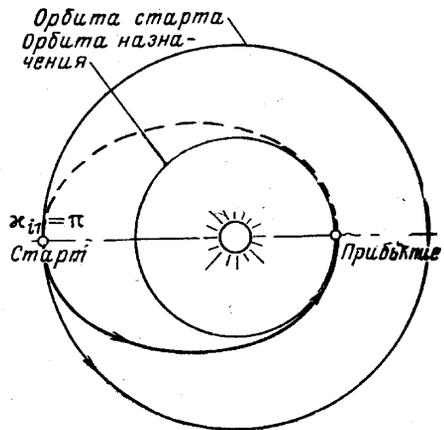


Рис. 10.14. Орбиты перехода в случае, когда орбита назначения лежит внутри орбиты старта

Первое решение не имеет практического смысла, так как при заданных координатах точек соединения и величинах импульса тяги оно приводит к единственной орбите старта и назначения (значениям  $p_1$  и  $p_2$ ), в то время как они произвольны по существу. Остается, таким образом, только второе решение

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 = 0.$$

При этом по (116.14) и (118.14) должно быть  $\kappa_{i1} = 0, \kappa_{i2} = \pi$  либо  $\kappa_{i1} = \pi, \kappa_{i2} = 0$ .

Если эти углы одновременно равны нулю или  $\pi$ , то уравнения (112.14) и (113.14) не удовлетворяются, так как решение этих уравнений в этом случае получается равным  $k_1 = k_2$ , что не имеет смысла.

Следовательно, практически возможные решения имеют вид <sup>1</sup>

$$\kappa_{i1} = \kappa_1 - \tilde{\kappa} = 0,$$

$$\kappa_{i2} = \kappa_2 - \tilde{\kappa} = \pi$$

или

$$\kappa_{i1} = \kappa_1 - \tilde{\kappa} = \pi,$$

$$\kappa_{i2} = \kappa_2 - \tilde{\kappa} = 0.$$

Первое решение справедливо для того случая, когда орбита старта лежит внутри орбиты назначения (рис. 9.14), второе решение — для орбиты назначения, лежащей внутри орбиты старта (рис. 10.14).

Из уравнений (112.14) и (113.14) для найденных выше решений  $\kappa_{i1} = \kappa_1 - \tilde{\kappa} = 0$ ;  $\kappa_{i2} = \kappa_2 - \tilde{\kappa} = \pi$  получаем <sup>2</sup>

$$l = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}, \quad (119.14)$$

$$q = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{l_1 - l_2}{2}, \quad (120.14)$$

откуда видно, что должно  $l_1 > l_2$ , так как всегда

$$q = \frac{e}{p} > 0,$$

и, как уже отмечено, орбита старта лежит внутри орбиты назначения. Наоборот, в случае  $\kappa_1 - \tilde{\kappa} = \pi$ ,  $\kappa_2 - \tilde{\kappa} = 0$  орбита назначения лежит внутри орбиты старта.

Итак, мы пришли к весьма важному выводу: оптимальной орбитой перехода с одной круговой орбиты на другую круговую орбиту является эллиптическая орбита, касающаяся орбит старта и назначения в апсидальных точках. Эта эллиптическая орбита, по имени немецкого ученого, впервые ее открывшего, носит название *эллипса Гоманна*.

Можно показать [29], что эллипс Гоманна является оптимальной орбитой перехода и в том случае, когда орбита старта и назначения являются эллиптическими и непересекающимися.

Найдем теперь характеристическую скорость рассматриваемого двухимпульсного оптимального маневра.

На рис. 11.14 видно, что тангенциальная скорость

$$V_{s1} = U_1 \cos \varphi_1 + W_1 \sin \varphi_1, \quad (121.14)$$

где  $U_1$  — составляющая скорости корабля по направлению тяги непосредственно перед приложением тяги.

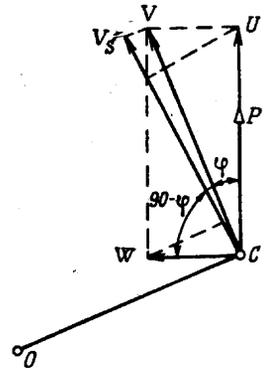


Рис. 11.14. К определению тангенциальной скорости космического корабля

<sup>1</sup> Здесь принято  $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_2 = \tilde{\kappa}$ , так как орбиты старта и назначения круговые и выбор для них  $\tilde{\kappa}_1$  и  $\tilde{\kappa}_2$  совершенно произволен.

<sup>2</sup> Так как для круговой орбиты

$$p = \frac{1}{l} = r \quad \text{и} \quad k = \frac{1}{r} = l.$$

Но по (95.14) тангенциальная составляющая скорости

$$V_{s1} = \frac{\sqrt{\mu p_1}}{r_1} = \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{l_1}}.$$

Подставив это выражение в (121.14) и определяя из этого уравнения скорость  $U_1$ , которой обладал корабль непосредственно перед приложением импульса, найдем

$$U_1 = \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{l_1}} \sec \varphi_1 - W_1 \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (122.14)$$

Аналогично для скорости корабля в направлении силы тяги непосредственно после приложения импульса тяги приходим к следующему выражению:

$$U'_1 = \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{\mu}{l_1}} \sec \varphi_1 - W_1 \operatorname{tg} \varphi_1. \quad (122a.14)$$

Вычитая (122.14) из (122a.14), найдем величину импульса (приращение скорости) в момент старта:

$$\Delta U_1 = U'_1 - U_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1} \left( \frac{1}{\sqrt{l_1}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}} \right) \sec \varphi_1 = \sqrt{\mu} k_1 \left( \frac{1}{\sqrt{l_1}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}} \right) \sec \varphi_1. \quad (123.14)$$

Аналогичным путем находится импульс тяги в момент прибытия:

$$\Delta U_2 = U_2 - U'_2 = \sqrt{\mu} k_2 \left( \frac{1}{\sqrt{l_2}} - \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right) \sec \varphi_2. \quad (123a.14)$$

Полная характеристическая скорость двухимпульсного маневра

$$\begin{aligned} \Delta U &= (U - U_1) + (U_2 - U) \\ &= \sqrt{\mu} k_1 \left( \frac{1}{\sqrt{l_1}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}} \right) \sec \varphi_1 + \sqrt{\mu} k_2 \left( \frac{1}{\sqrt{l_2}} - \frac{1}{\sqrt{l_2}} \right) \sec \varphi_2. \end{aligned} \quad (124.14)$$

В рассматриваемом нами частном случае круговых орбит старта и назначения

$$l_1 = \frac{1}{a_1}, \quad l_2 = \frac{1}{a_2}, \quad \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2a_1 a_2}$$

( $a_1, a_2$  — радиусы орбит старта и назначения).

Кроме того, по доказанному выше,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  (для случая, когда орбита лежит внутри орбиты назначения), и выражение (124.14) принимает вид

$$\Delta U = \sqrt{\frac{\mu}{a_1}} \left( \sqrt{\frac{2}{1+\beta}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{\mu}{a_2}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} \right), \quad (125.14)$$

где введено обозначение

$$\beta = \frac{a_1}{a_2}.$$

## § 6. Применение полученных результатов к расчету межпланетного перелета в первом приближении

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют рассчитать траекторию полета космического корабля, совершающего межпланетный перелет, и найти требуемую величину импульсов тяги, а так-

же моменты времени, в которые импульсы должны быть приложены. Напомним, что получаемые таким образом выводы носят приближенный характер, поскольку рассматривается задача двух тел вместо более точно соответствующей действительности задачи  $n$  тел. Тем не менее эти результаты весьма полезны при общем исследовании динамики космического полета.

Рассмотрим задачи старта космического корабля с круговой орбиты вокруг планеты старта (например, с орбитальной станции, находящейся на круговой орбите) и перехода на аналогичную круговую орбиту вокруг планеты назначения.

Весь процесс движения космического корабля (в первой задаче старта) можно разделить на две фазы. На первой фазе движения космический корабль должен выйти из сферы притяжения планеты старта, для чего ему надо сообщить скорость, равную или большую, чем скорость ухода. В тот момент времени, когда притяжением планеты старта можно пренебречь по сравнению с притяжением Солнца, начинается вторая фаза движения — по некоторой эллиптической орбите вокруг Солнца. В гелиоцентрической системе координат скорость корабля  $\vec{V}_r$  в начале второй фазы движения представляет собой векторную сумму скорости ухода  $\vec{V}$  (скорости относительно планеты старта) в этот момент времени и орбитальной скорости  $\vec{V}_{орб}$  планеты старта относительно Солнца:

$$\vec{V}_r = \vec{V} + \vec{V}_{орб},$$

откуда

$$\vec{V} = \vec{V}_r - \vec{V}_{орб}.$$

Если во время ухода космического корабля из сферы притяжения планеты старта пренебречь влиянием притяжения Солнца и других не-

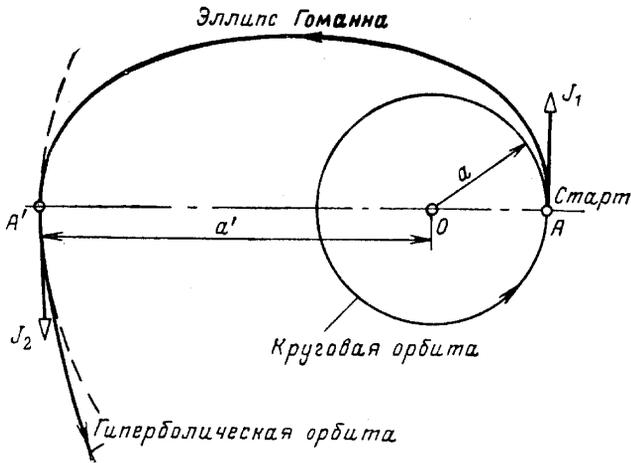


Рис. 12.14. Переход космического корабля с орбиты на орбиту по эллипсу Гоманна

бесных тел, т. е. ограничиться рассмотрением задачи двух тел — корабля и планеты старта, — то дело сводится к перемещению корабля с круговой орбиты вокруг планеты старта на гиперболическую, по которой в итоге корабль будет удаляться от планеты старта. После схода с круговой орбиты космический корабль должен двигаться по эллипсу Гоманна, соприкасающемуся в точке A (рис. 12.14) с круговой орбитой. В другой апсидальной точке A' эллипса в направлении движения должен быть прило-

жен второй импульс  $J_2$  (первый импульс  $J_1$ , необходимый для схода с круговой орбиты, сообщается в направлении движения в точке  $A$ ), переводящий корабль с эллиптической на гиперболическую орбиту.

Обозначим скорость корабля на круговой орбите старта через  $V_0$ , скорость в точке  $A$  схода с круговой орбиты после приложения первого импульса —  $V_1$ , скорость движения корабля по эллипсу Гоманна в апсидальной точке  $A'$  до приложения второго импульса —  $V_2$  и скорость в этой же точке после приложения второго импульса —  $V_3$  (после приложения второго импульса точка  $A'$  принадлежит гиперболической орбите).

Поместим начало координат в центре планеты старта (точка  $O$ ) и обозначим радиус круговой орбиты старта через  $a$ , координату апогея  $A'$  через  $a'$ .

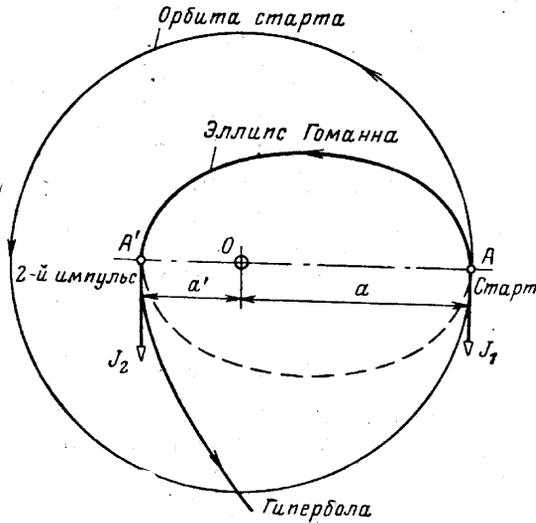


Рис. 13.14. Схема приложения импульсов в случае  $a' < a$

Запишем уравнение энергии космического корабля на гиперболической орбите; в соответствии с уравнением орбитального движения (см. гл. II) имеем

$$V_{\infty}^2 = V_3^2 - \frac{2\mu}{a'}, \quad (126.14)$$

где  $V_{\infty}$  — скорость корабля на бесконечно большом расстоянии от планеты старта.

Уравнение энергии для движения корабля по эллипсу Гоманна (также в поле тяготения планеты старта) имеет вид

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a_3}, \quad (127.14)$$

где большая полуось эллипса

$$a_3 = \frac{1}{2} (a + a').$$

Подставив это выражение в (127.14), получим

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{2\mu}{a + a'}. \quad (127a.14)$$

Таким образом, в точке  $A$  схода с круговой орбиты старта ( $r=a$ ) на основании (127а.14) будем иметь

$$V_1^2 = 2\mu \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+a'} \right) = \frac{2\mu a'}{a(a+a')}, \quad (128.14)$$

а в точке  $A'$  перехода с эллипса Гоманна на гиперболическую орбиту

$$V_2^2 = 2\mu \left( \frac{1}{a'} - \frac{1}{a+a'} \right) = \frac{2\mu a}{a'(a+a')}. \quad (128а.14)$$

Круговая скорость на орбите старта, очевидно,

$$V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a}}.$$

Пусть  $a' < a$  (рис. 13.14), тогда в точке  $A$  импульс должен быть направлен против движения, а в точке  $A'$  — по движению. Характеристическая скорость всего маневра, очевидно,

$$V_i = (V_0 - V_1) + (V_3 - V_2).$$

Подставив сюда (126.14), (128.14) и (128а.14), после простых преобразований придем к следующей формуле:

$$V_i = V_0 [V\sqrt{2}(x + \tilde{V}^2)^{0.5} - V\sqrt{2}(x+1)^{0.5} + 1], \quad (129.14)$$

где приняты обозначения:

$$x = \frac{a}{a'}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_0}.$$

Смысл отношения  $x$  ясен: это отношение расстояния от центра притяжения до космического корабля в начале маневра к такому же расстоянию в момент конца маневра. Отношение  $\tilde{V}$  есть отношение скорости корабля на бесконечно большом удалении от центра притяжения к скорости ухода в точку старта корабля.

Если  $\tilde{V} \leq 1$ , то минимум отношения  $V/V_0$  получается при  $x=1$ , как это видно из рис. 14.14, так что  $a=a'$ . В этом случае оптимальная орбита перехода превращается в окружность и требуется только один импульс в точке  $A'$  для перехода с круговой на гиперболическую орбиту. При  $\tilde{V} > 1$ , как видно из рис. 14.14, отношение  $V/V_0$  монотонно убывает при увеличении  $x$ . Наиболее выгодный результат получается при наименьшем<sup>1</sup> возможном значении  $a'$ . Это наименьшее значение  $a'$  должно выбираться из соображений, не связанных с оптимизацией полета космического корабля, например, из условия непопадания корабля в плотные слои атмосферы в точке перигея во избежание нагрева и обгорания поверхности корабля.

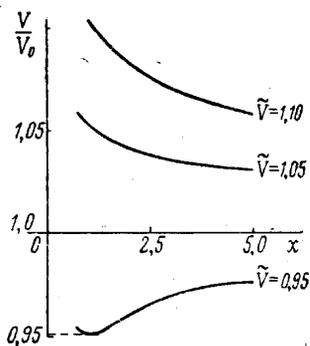


Рис. 14.14. Влияние параметров  $\tilde{V}$  и  $x$  на величину изменения скорости космического корабля в результате импульса тяги

<sup>1</sup> Это вытекает из анализа выражения (129.14).

На основании аналогичных рассуждений для случая  $a' > a$  можно прийти к следующему выражению:

$$V = V_0 \left[ \sqrt{2(x + \tilde{V}^2)} + \sqrt{\frac{2}{1+x}(1-x) - 1} \right]. \quad (129a.14)$$

По (129.14) и (129a.14) можно рассчитать величину требуемого для перелета импульса тяги.

Рассмотрим теперь в общих чертах задачу о спуске космического корабля на круговую орбиту вокруг планеты назначения. В этой задаче скорость приближения корабля из бесконечности есть векторная разность скорости космического корабля в гелиоцентрической системе отсчета (относительно Солнца) в конце траектории перехода и орбитальной скоро-

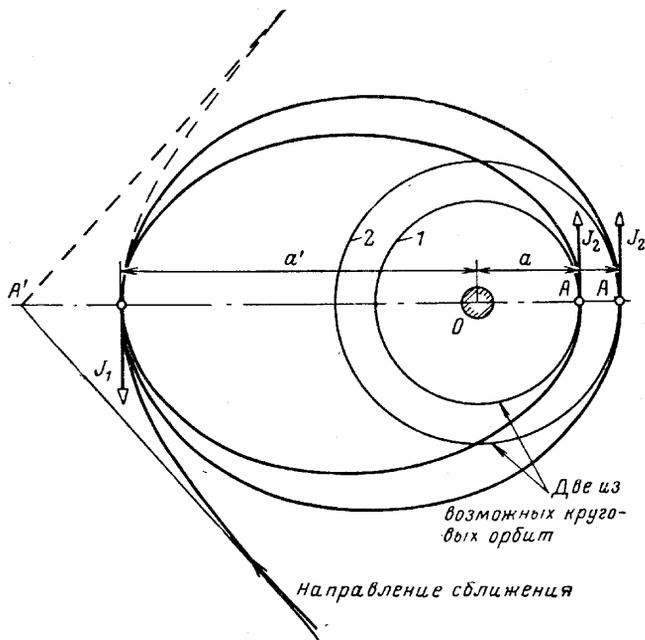


Рис. 15.14. Характер траектории космического корабля при заданном направлении сближения с планетой назначения

сти планеты назначения. Так как эти скорости близки по величине, то мы имеем дело с малой разностью двух больших величин. Отсюда следует, что даже небольшие изменения в условиях выхода на орбиту перехода будут приводить к значительным изменениям линии приближения корабля к планете назначения.

Представляют интерес следующие четыре формулировки задачи сближения:

1. Вход на круговую орбиту заданного радиуса при заданном направлении сближения.

2. Вход на круговую орбиту заданного радиуса при произвольном направлении сближения.

3. Вход на круговую орбиту произвольного радиуса при заданном направлении сближения.

4. Вход на круговую орбиту произвольного радиуса при произвольном направлении сближения.

Так как направление сближения есть асимптота гиперболической орбиты, то первую задачу можно формулировать также как переход с за-

данной гиперболической орбиты на заданную круговую орбиту. Оптимальное движение будет аналогичным движению в такой же задаче об уходе с круговой орбиты, рассмотренной выше (см. рис. 13.14); очевидно, что все фазы движения при спуске надо рассматривать в обратном порядке по сравнению с движением ухода.

Вторая задача формально аналогична задаче об уходе с круговой орбиты при нерегламентированной конечной скорости удаления. На основании изложенного ранее можно заключить, что если скорость сближения не превышает скорость ухода с круговой орбиты, то гиперболическая орбита должна касаться круговой орбиты. При этом необходим только один импульс тяги, уменьшающий скорость корабля до величины, равной круговой скорости. Если скорость сближения больше скорости ухода, то направление сближения должно быть таким, чтобы точка касания гиперболической орбиты и эллипса перехода была возможно ближе к центру планеты (например, на верхней границе атмосферы). Для такого маневра требуются два импульса — для перехода с гиперболической орбиты на эллиптическую и для перехода с эллиптической орбиты (с эллипса Гоманна) на круговую.

В третьей задаче задано направление сближения, т. е. форма гиперболической траектории и ее положение относительно планеты назначения определены. Следовательно, расстояние  $a'$  задано, а величина радиуса круговой орбиты  $a$  остается свободной (рис. 15.14); выбор этой величины должен быть подчинен минимизации расхода топлива на выполнение маневра сближения.

Введя по аналогии с отношением  $x$  еще одно отношение

$$y = \frac{a'}{a},$$

уравнения (129.14) и (129a.14) перепишем в виде

$$V = V_c [V\sqrt{y} - \sqrt{2(1+y)} + k] \quad (y \leq 1), \quad (130.14)$$

$$V = V_c \left[ \sqrt{\frac{2}{1+y}}(y-1) - V\sqrt{y} + k \right] \quad (y \geq 1), \quad (130a.14)$$

где

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{a'}}$$

— круговая скорость в точке касания гиперболы и эллипса Гоманна и

$$k = \sqrt{2 + \frac{V_\infty^2}{V_c^2}}$$

(по-прежнему  $V_\infty$  — скорость движения космического корабля на бесконечности).

Анализ выражений (130.14) и (130a.14) показывает, что при  $y \geq 0$  непрерывно возрастает  $V$  вместе с  $y$ . Следовательно, выгодно выбирать  $y$  возможно меньшим и, значит, радиус  $a$  возможно большим. Минимальное значение скорости  $V$  получается при  $y=0$  ( $a = \infty$ ).

$$V = V_{\min} = V_c(k - \sqrt{2}) = \sqrt{2V_c^2 + V_\infty^2} - \sqrt{2}V_c. \quad (131.14)$$

Наконец, в последней четвертой задаче произвольны  $a$ , и  $a'$ . Как мы установили при рассмотрении предыдущей задачи, для каждого заданного  $a'$  целесообразно выбрать возможно большее  $a$ , причем для

достаточно больших  $a$  характеристическая скорость определяется по формуле (131.14). Так как в рассматриваемой задаче направление сближения произвольно, то круговая скорость  $V_c$  остается неопределенной и ее выбор должен быть подчинен минимизации расхода топлива. Из (131.14) видно, что  $V$  есть убывающая функция  $V_c$ , стремящаяся к нулю при  $V_c \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $V$  надо выбрать таким, чтобы  $V_c$  получилась возможно большей, так что  $a'$  должно быть возможно меньшей. Конкретная минимальная величина  $a'$  должна быть назначена из других соображений, не связанных с оптимизацией полета (например, по условиям нагрева поверхности космического корабля). Итак, оптимальная траектория спуска должна быть в одной апсидальной точке возможно ближе к поверхности планеты назначения, а в другой апсидальной точке — возможно дальше от планеты назначения (рис. 16.14).

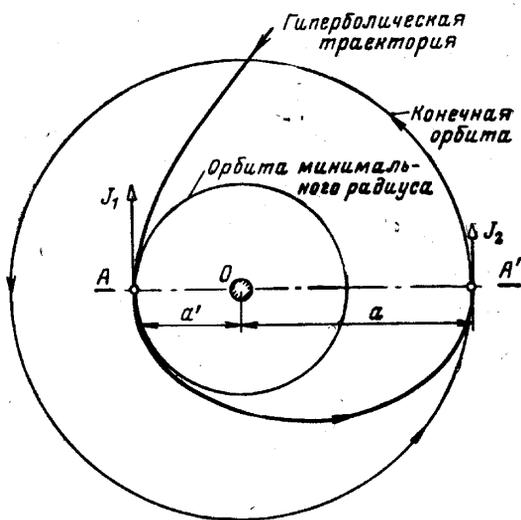


Рис. 16.14. Оптимальная траектория космического корабля при произвольном сближении с планетой назначения

Мы рассмотрели задачу оптимизации межпланетного полета в ее упрощенной постановке — как задачу двух тел. В то же время в некоторых полученных решениях оптимальная траектория должна проходить весьма близко от поверхности планеты. Это указывает на необходимость учета поля тяготения планеты при вычислении оптимальной орбиты перехода, если желательно уточнить результаты расчета; интересующихся этими вопросами мы отсылаем к специальной литературе (например [29], [53]), а здесь ограничимся приведенными выше материалами.

В качестве иллюстрации применения приведенных выше методов расчета траекторий межпланетных полетов рассмотрим две задачи (см. [56]).

1. **Искусственная планета** запущена по касательной к орбите Земли, которая считается круговой, со скоростью  $V_0 = 11,5$  км/сек.

Определить параметры орбиты этой планеты (большую полуось  $a$  и эксцентриситет орбиты  $e$ ), а также период обращения ее вокруг Солнца, пренебрегая притяжением Луны.

Так как начальная скорость искусственной планеты (геоцентрическая) больше скорости ухода ( $V_{\text{пар}} = 11,18$  км/сек), то через некоторое время искусственная планета выйдет из сферы притяжения Земли и будет двигаться по эллиптической орбите, в фокусе которой помещается

Солнце. Из уравнения энергии на этой эллиптической орбите (см. стр. 480) найдем большую полуось эллиптической орбиты. Уравнение энергии имеет вид

$$V^2 = \frac{2\mu_c}{r} - \frac{\mu_c}{a}, \quad (132.14)$$

где  $r = 1,495 \cdot 10^8$  км — среднее расстояние Земли от Солнца;  
 $a$  — большая полуось эллиптической орбиты искусственной планеты;  
 $\mu_c = GM_c = \text{const}$  и  $G$  — гравитационная постоянная,  $M_c$  — масса Солнца.

Так как сила притяжения Земли Солнцем

$$g_c = \frac{\mu_c}{r^2}$$

и, по предположению, Земля движется по круговой орбите радиуса  $r$ , можно записать равенство

$$\frac{\mu_c}{r^2} = \frac{V_{\text{орб}}^2}{r},$$

откуда

$$\mu_c = rV_{\text{орб}}^2.$$

Здесь  $V_{\text{орб}}$  — орбитальная скорость Земли; принимая период обращения Земли равным 365,3 суток, найдем

$$V_{\text{орб}} = \omega r = \frac{2\pi}{365,3 \cdot 24 \cdot 3600} 1,495 \cdot 10^8 = 29,75 \text{ км/сек.}$$

Определяя из (132.14) величину  $a$ , получим

$$\frac{a}{r} = \frac{0,5}{1 - 0,5 \frac{V^2 r}{\mu}} = \frac{0,5}{1 - 0,5 \left( \frac{V}{29,75} \right)^2}. \quad (133.14)$$

Скорость искусственной планеты в гелиоцентрической системе отсчета будет

$$V = 29,75 + V_{\infty},$$

где  $V_{\infty}$  — геоцентрическая скорость искусственной планеты, движущейся по гиперболической траектории, на бесконечно большом расстоянии от Земли; величину этой скорости найдем из уравнения энергии на гиперболической траектории (см. стр. 83)

$$V^2 = V_0^2 - \frac{2\mu}{r},$$

причем  $V_0$  — геоцентрическая скорость искусственной планеты в начале полета по гиперболической траектории.

Так как  $\frac{2\mu}{r}$  есть квадрат скорости ухода для Земли (параболической скорости), то предыдущее равенство можно переписать в виде

$$V_{\infty}^2 = V_0^2 - V_{\text{пар}}^2.$$

Приняв во внимание, что скорость ухода равна  $V_{\text{пар}} = 11,18$  км/сек, найдем

$$V_{\infty}^2 = 11,5^2 - 11,18^2,$$

откуда

$$V_{\infty} = 2,7 \text{ км/сек.}$$

Следовательно, скорость искусственной планеты в гелиоцентрической системе отсчета

$$V = 29,75 + 2,7 = 32,45 \text{ км/сек.}$$

Большая полуось эллиптической орбиты искусственной планеты по (133.14)

$$\bar{a} = \frac{a}{r} = \frac{0,5}{1 - 0,5948} = 1,233.$$

Постоянная уравнения энергии на этой эллиптической орбите

$$h_c = -\frac{\mu_c}{a} = -\frac{\mu_c}{r} \frac{r}{a} = -V_{\text{орб}}^2 \frac{1}{a} = -0,811 V_{\text{орб}}^2$$

<sup>1</sup> (см. стр. 84)

$$e^2 = 1 + h_c \frac{a^2}{\mu_c^2} = 1 + h_c \frac{V_{\text{орб}}^2 r^2}{V_{\text{орб}}^4 r^2} = 1 + h_c \frac{1}{V_{\text{орб}}^2} = 0,189.$$

Таким образом, параметры орбиты искусственной планеты найдены. Определим теперь период обращения искусственной планеты, для чего воспользуемся законом площадей. За бесконечно малый промежуток времени  $dt$  радиус-вектор  $r$  ометает площадь

$$dS = \frac{1}{2} r V_s dt,$$

откуда секториальная скорость, постоянная в соответствии с законом площадей:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{r V_s}{2}.$$

Так как площадь эллипса

$$S_3 = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

то период обращения

$$T = S_3 : \frac{dS}{dt} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{r V_s} = \frac{2\pi \bar{a}^2 \sqrt{1 - e^2}}{V_s} r. \quad (134.14)$$

Подставив сюда цифровые значения, найдем

$$T = 0,432 \cdot 10^8 \text{ сек} \cong 1,37 \text{ года.}$$

**2. Космический корабль** запущен с круговой орбиты Земли в направлении к Венере таким образом, что когда начинается свободный полет, его скорость направлена по касательной к орбите Земли и эта точка является афелием. Запуск рассчитан так, чтобы при прохождении через перигелий космический корабль оказался в непосредственной близости к Венере (рис. 17.14).

Орбиты Земли и Венеры принимаются круговыми и лежащими в одной плоскости, среднее расстояние  $r_V$  Венеры от Солнца берется равным 0,723 среднего расстояния  $r$  Земли от Солнца.

<sup>1</sup> Напомним, что (см. гл. II, стр. 83)  $c_1 = \mu_3 r^2 = V_{\text{орб}} r$ .

Найти параметры орбиты корабля  $a$  и  $e$ , период обращения космического корабля  $T$  и период  $T_B$  обращения планеты Венера. Выяснить, через сколько дней произойдет сближение космического корабля и Венеры и какой должна быть разность долгот Земли и Венеры в момент запуска космического корабля.

Очевидно, траектория космического корабля будет эллиптической.

Углы эксцентрической аномалии в точке афелия (начальная точка полета по условиям задачи) будут  $\varepsilon_a = \pi$  при  $r = 1,0$  и в точке перигелия (конечная точка полета)  $\varepsilon_n = 0$  при  $r = 0,723$ .

По уравнению эллипса

$$r = a(1 - e \cos \varepsilon).$$

Запишем это уравнение для начальной и конечной точек полета:

$$1 = (1 + e) \frac{a}{r},$$

$$0,723 = (1 - e) \frac{a}{r},$$

откуда найдем

$$e = 0,1608, \quad \frac{a}{r} = 0,862.$$

Таким образом, космический корабль будет двигаться по эллиптической орбите с эксцентриситетом  $e = 0,1608$  и с большой полуосью, равной  $0,862$  среднего расстояния Земли от Солнца.

Найдем далее период обращения космического корабля по орбите. По формуле (132.14), которая, конечно, остается в силе и для этой задачи, находим

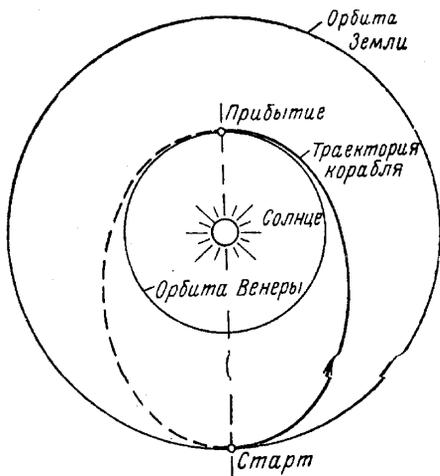


Рис. 17.14. Траектория перелета Земля — Венера (пример)

$$\left(\frac{V}{29,75}\right)^2 = 2 - \frac{r}{a} = 2 - \frac{1}{0,862} = 0,839,$$

откуда

$$\frac{V_a}{29,75} = \sqrt{0,839} = 0,915.$$

По формуле (134.14)

$$T = \frac{2\pi \cdot 0,862^2 \sqrt{1 - 0,1608^2} \cdot 1,495 \cdot 10^8}{0,915 \cdot 29,75 \cdot 24 \cdot 3600} = 292 \text{ суток.}$$

Так как орбита Венеры в рассматриваемой задаче принята круговой, то  $\mu = rV_{орб}^2 = r_B V_{В.орб}^2$  и орбитальная скорость Венеры

$$V_{В.орб} = \frac{29,75}{\sqrt{0,723}} = 35,0 \text{ км/сек.}$$

Период обращения Венеры вокруг Солнца получается

$$T_B = \frac{2 \cdot 0,723 \cdot 1,495 \cdot 10^8}{35 \cdot 24 \cdot 3600} = 224,5 \text{ земных суток.}$$

Так как по условию задачи полет космического корабля начинается в афелии, а кончается в перигелии, то время, затрачиваемое на полет, равно половине периода обращения корабля, т. е.

$$t = \frac{T}{2} = 146 \text{ суток.}$$

Наконец, разность долгот Венеры и Земли в момент запуска космического корабля найдем из следующих соображений.

За время полета космического корабля центральный угол, на который переместится Венера,

$$\Delta\alpha_{\text{В}} = \frac{146}{224,5} 360 = 234^\circ.$$

По отношению к Земле, которая, по условию задачи, находится в момент запуска космического корабля в афелии, Венера в этот момент времени должна отстоять на угол

$$\Delta\alpha = 234 - 180 = 54^\circ.$$

Таким образом, получены ответы на все вопросы, поставленные в задаче.

Как видно из приведенных примеров, упрощение задачи, сводящее ее к задаче двух тел, позволяет весьма просто и быстро решать интересные задачи, хотя, конечно, решения носят приближенный характер.

---

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦА СТАНДАРТНОЙ АТМОСФЕРЫ<sup>1</sup> (ГОСТ 4401—64)

Основные соотношения для перевода единиц:

давление

$$1 \text{ кг/м}^2 = 9,807 \text{ н/м}^2 = 735 \times 10^4 \text{ мм. рт. ст.}$$

плотность

$$1 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4 = 9,807 \text{ кг/м}^3$$

| Геометрическая высота $h$<br>м | Температура $T_h$<br>°К | Барометрическое давление $P_h$<br>кг/м <sup>2</sup> | Плотность $\rho_h$<br>кг·сек <sup>2</sup> /м <sup>4</sup> | $\Delta = \frac{\rho_h}{\rho_0}$ | Скорость звука $a$<br>м/сек | Вязкость кинематическая $\nu$<br>м <sup>2</sup> /сек | Ускорение свободного падения тела $g$<br>м/сек <sup>2</sup> |
|--------------------------------|-------------------------|---|---|----------------------------------|-----------------------------|--|---|
| —2000                          | 301,19                  | 13031,0   | 1,5072·10 <sup>-1</sup>                                   | 1,2066                           | 347,90                      | 1,2528·10 <sup>-5</sup>                              | 9,81281   |
| —1500                          | 297,93                  | 12307,7   | 1,4392  | 1,1522                           | 346,01                      | 1,3010   | 9,81127   |
| —1000                          | 294,67                  | 11617,4   | 1,3735  | 1,0995                           | 344,11                      | 1,3517   | 9,80973   |
| — 500                          | 291,42                  | 10960,6   | 1,3103  | 1,0490                           | 342,21                      | 1,4048   | 9,80819   |
| 0                              | 288,15                  | 10332,3   | 1,2492·10 <sup>-1</sup>                                   | 1,0000                           | 340,28                      | 1,4607·10 <sup>-5</sup>                              | 9,80665   |
| 500                            | 284,90                  | 9733,5  | 1,1902·10 <sup>-1</sup>                                   | 9,5282·10 <sup>-1</sup>          | 338,36                      | 1,5196·10 <sup>-5</sup>                              | 9,80511   |
| 1000                           | 281,65                  | 9164,8  | 1,1336  | 9,0751                           | 336,43                      | 1,5812   | 9,80357   |
| 1500                           | 278,40                  | 8623,3  | 1,0791  | 8,6384                           | 334,48                      | 1,6461   | 9,80203   |
| 2000                           | 275,14                  | 8106,5  | 1,0265·10 <sup>-1</sup>                                   | 8,2171                           | 332,52                      | 1,7146   | 9,80049   |
| 2500                           | 271,89                  | 7616,6  | 9,7593·10 <sup>-2</sup>                                   | 7,8127                           | 330,55                      | 1,7866   | 9,79896   |
| 3000                           | 268,64                  | 7150,8  | 9,2734  | 7,2437                           | 328,56                      | 1,8624   | 9,79742   |
| 3500                           | 265,38                  | 6707,1  | 8,8048  | 7,0845                           | 326,56                      | 1,9426   | 9,79588   |
| 4000                           | 262,13                  | 6287,2  | 8,3558  | 6,6891                           | 324,56                      | 2,0271   | 9,79435   |
| 4500                           | 258,88                  | 5888,8  | 7,9246  | 6,3440                           | 322,54                      | 2,1162   | 9,79281   |
| 5000                           | 255,63                  | 5511,1  | 7,5106·10 <sup>-2</sup>                                   | 6,0125·10 <sup>-1</sup>          | 320,51                      | 2,2103·10 <sup>-5</sup>                              | 9,79128   |
| 5500                           | 252,38                  | 5153,1  | 7,1134·10 <sup>-2</sup>                                   | 5,6945·10 <sup>-1</sup>          | 318,47                      | 2,3100·10 <sup>-5</sup>                              | 9,78974   |
| 6000                           | 249,13                  | 4814,4  | 6,7324  | 5,3895                           | 316,41                      | 2,4153   | 9,78820   |
| 6500                           | 245,88                  | 4493,8  | 6,3672  | 5,0972                           | 314,34                      | 2,5268   | 9,78667   |
| 7000                           | 242,63                  | 4190,8  | 6,0174  | 4,8171                           | 312,25                      | 2,6452   | 9,78514   |
| 7500                           | 239,38                  | 3904,5  | 5,6824·10   | 4,5489·10 <sup>-1</sup>          | 310,15                      | 2,7705·10 <sup>-5</sup>                              | 9,78360   |
| 8000                           | 236,14                  | 3635,1  | 5,3628·10 <sup>-2</sup>                                   | 4,2931·10 <sup>-1</sup>          | 308,05                      | 2,9030·10 <sup>-5</sup>                              | 9,78207   |
| 8500                           | 232,89                  | 3380,1  | 5,0563  | 4,0477                           | 305,92                      | 3,0443   | 9,78053   |
| 9000                           | 229,64                  | 3139,8  | 4,7633  | 3,8132                           | 303,78                      | 3,1942   | 9,77900   |
| 9500                           | 226,40                  | 2914,2  | 4,4844  | 3,5900                           | 301,63                      | 3,3534   | 9,77747   |
| 10 000                         | 223,15                  | 2701,3  | 4,2172·10 <sup>-2</sup>                                   | 3,3761·10 <sup>-1</sup>          | 299,45                      | 3,5232·10 <sup>-5</sup>                              | 9,77594   |

<sup>1</sup> Таблица стандартной атмосферы приводится в сокращенном виде.

| Геометрическая высота $h$<br>м | Температура<br>$T_h$<br>°K | Барометрическое давление<br>$p_h$<br>кг/м <sup>2</sup> | Плотность<br>$\rho_h$<br>кг·сек <sup>2</sup> /м <sup>4</sup> | $\Delta = \frac{\rho_h}{\rho_0}$ | Скорость звука $a$<br>м/сек | Вязкость кинематическая $\nu$<br>м <sup>2</sup> /сек | Ускорение свободного падения тела $g$<br>м/сек <sup>2</sup> |
|--------------------------------|----------------------------|--|--|----------------------------------|-----------------------------|--|---|
| 10 000                         | 219,90                     | 2501,2   | 3,9625·10 <sup>-2</sup>                                      | 3,1721·10 <sup>-1</sup>          | 297,27                      | 3,7040·10 <sup>-5</sup>                              | 9,77440   |
| 11 000                         | 216,66                     | 2313,7   | 3,7204   | 2,9784                           | 295,07                      | 3,8966   | 9,77287   |
| 11 500                         | 213,66                     | 2139,0   | 3,4393   | 2,7533                           | 295,07                      | 4,2151   | 9,77134   |
| 12 000                         | 216,66                     | 1977,3   | 3,1795   | 2,5453                           | 295,07                      | 4,5595   | 9,76981   |
| 12 500                         | 216,66                     | 1827,9   | 2,9393·10 <sup>-2</sup>                                      | 2,3531·10 <sup>-1</sup>          | 295,07                      | 4,9321·10 <sup>-5</sup>                              | 9,76820   |
| 13 000                         | 216,66                     | 1689,9   | 2,7173·10 <sup>-2</sup>                                      | 2,1753·10 <sup>-1</sup>          | 295,07                      | 5,3351·10 <sup>-5</sup>                              | 9,76675   |
| 13 500                         | 216,66                     | 1562,3   | 2,5122   | 2,0111                           | 295,07                      | 5,7706   | 9,76552   |
| 14 000                         | 216,66                     | 1444,3   | 2,3225   | 1,8593                           | 295,07                      | 6,2420   | 9,76369   |
| 14 500                         | 216,66                     | 1335,3   | 2,1471   | 1,7189                           | 295,07                      | 6,7519   | 9,76217   |
| 15 000                         | 216,66                     | 1234,6   | 1,9851·10 <sup>-2</sup>                                      | 1,5891·10 <sup>-1</sup>          | 295,07                      | 7,3029·10 <sup>-5</sup>                              | 9,76063   |
| 15 500                         | 216,66                     | 1141,4   | 1,8353·10 <sup>-2</sup>                                      | 1,4692·10 <sup>-1</sup>          | 295,07                      | 7,8990·10 <sup>-5</sup>                              | 9,75911   |
| 16 000                         | 216,66                     | 1055,2   | 1,6968   | 1,3584                           | 295,07                      | 8,5437   | 9,75758   |
| 16 500                         | 216,66                     | 975,62   | 1,5687   | 1,2588                           | 295,07                      | 9,2414   | 9,75605   |
| 17 000                         | 216,66                     | 902,03   | 1,4504   | 1,1611                           | 295,07                      | 9,9952·10 <sup>-5</sup>                              | 9,75452   |
| 17 500                         | 216,66                     | 834,00   | 1,3410·10 <sup>-2</sup>                                      | 1,0736·10 <sup>-1</sup>          | 295,07                      | 1,0810·10 <sup>-4</sup>                              | 9,75300   |
| 18 000                         | 216,66                     | 771,10   | 1,2399·10 <sup>-2</sup>                                      | 9,9257·10 <sup>-2</sup>          | 295,07                      | 1,1692·10 <sup>-4</sup>                              | 9,75146   |
| 18 500                         | 216,66                     | 712,96   | 1,1464   | 9,1771                           | 295,07                      | 1,2646   | 9,74995   |
| 19 000                         | 216,66                     | 659,22   | 1,0600·10 <sup>-2</sup>                                      | 8,4857                           | 295,07                      | 1,3676   | 9,74842   |
| 19 500                         | 216,66                     | 609,52   | 9,8009·10 <sup>-3</sup>                                      | 7,8460                           | 295,07                      | 1,4791   | 9,74689   |
| 20 000                         | 216,66                     | 563,59   | 9,0623·10 <sup>-3</sup>                                      | 7,2547·10 <sup>-2</sup>          | 295,07                      | 1,5997·10 <sup>-4</sup>                              | 9,74537   |
| 21 000                         | 216,66                     | 481,86   | 7,7481·10 <sup>-3</sup>                                      | 6,2027·10 <sup>-2</sup>          | 295,07                      | 1,8710·10 <sup>-4</sup>                              | 9,74232   |
| 22 000                         | 216,66                     | 412,00   | 6,6247   | 5,3033                           | 295,07                      | 2,1883   | 9,73927   |
| 23 000                         | 216,66                     | 352,28   | 5,6645   | 4,5347                           | 295,07                      | 2,5593   | 9,73623   |
| 24 000                         | 216,66                     | 301,23   | 4,8438   | 3,8776                           | 295,07                      | 2,9929   | 9,73318   |
| 25 000                         | 216,66                     | 257,60   | 4,1422·10 <sup>-3</sup>                                      | 3,3160·10 <sup>-2</sup>          | 295,07                      | 3,4998·10 <sup>-4</sup>                              | 9,73014   |
| 26 000                         | 219,40                     | 220,50   | 3,5013·10 <sup>-3</sup>                                      | 2,8030·10 <sup>-2</sup>          | 296,93                      | 4,1842·10 <sup>-4</sup>                              | 9,72710   |
| 27 000                         | 222,14                     | 189,11   | 2,9659   | 2,3743                           | 298,78                      | 4,9911   | 9,72406   |
| 28 000                         | 224,87                     | 162,58   | 2,5188   | 2,0164                           | 300,61                      | 5,9370   | 9,72102   |
| 29 000                         | 227,61                     | 139,96   | 2,1421   | 1,7149                           | 302,43                      | 7,0510   | 9,71798   |
| 30 000                         | 230,35                     | 120,69   | 1,8254·10 <sup>-3</sup>                                      | 1,4613·10 <sup>-2</sup>          | 304,25                      | 8,3565·10 <sup>-4</sup>                              | 9,71494   |
| 31 000                         | 233,08                     | 104,32   | 1,5592·10 <sup>-3</sup>                                      | 1,2482·10 <sup>-2</sup>          | 306,05                      | 9,8788·10 <sup>-4</sup>                              | 9,71191   |
| 32 000                         | 235,82                     | 90,724   | 1,3336   | 1,0676·10 <sup>-2</sup>          | 307,84                      | 1,1661·10 <sup>-3</sup>                              | 9,70888   |
| 33 000                         | 238,55                     | 78,289   | 1,1433·10 <sup>-3</sup>                                      | 9,1527·10 <sup>-3</sup>          | 309,62                      | 1,3730   | 9,70585   |
| 34 000                         | 241,28                     | 68,007   | 9,8194·10 <sup>-4</sup>                                      | 7,8608                           | 311,38                      | 1,6135   | 9,70282   |
| 35 000                         | 244,01                     | 59,168   | 8,4475·10 <sup>-4</sup>                                      | 6,7626·10 <sup>-3</sup>          | 313,14                      | 1,8929·10 <sup>-3</sup>                              | 9,69978   |
| 36 000                         | 246,74                     | 51,558   | 7,2796·10 <sup>-4</sup>                                      | 5,8276·10 <sup>-3</sup>          | 314,89                      | 2,2165·10 <sup>-3</sup>                              | 9,69676   |
| 37 000                         | 249,47                     | 44,995   | 6,2834   | 5,0301                           | 316,62                      | 2,5908   | 9,69373   |
| 38 000                         | 252,20                     | 39,306   | 5,4294   | 4,3465                           | 318,36                      | 3,0248   | 9,69071   |
| 39 000                         | 254,93                     | 34,421   | 4,7038   | 3,7656                           | 320,07                      | 3,5216   | 9,68768   |
| 40 000                         | 257,66                     | 30,169   | 4,0792·10 <sup>-4</sup>                                      | 3,2656·10 <sup>-3</sup>          | 321,78                      | 4,0956·10 <sup>-3</sup>                              | 9,68466   |
| 41 000                         | 260,38                     | 26,493   | 3,5448·10 <sup>-4</sup>                                      | 2,8377·10 <sup>-3</sup>          | 323,47                      | 4,7529·10 <sup>-3</sup>                              | 9,68164   |
| 42 000                         | 263,11                     | 23,285   | 3,0832   | 2,4682                           | 325,16                      | 5,5099   | 9,67862   |
| 43 000                         | 265,83                     | 20,502   | 2,6870   | 2,1510                           | 326,84                      | 6,3784   | 9,67560   |
| 44 000                         | 268,56                     | 18,067   | 2,3437   | 1,8762                           | 328,51                      | 7,3674   | 9,67259   |
| 45 000                         | 271,28                     | 15,949   | 2,0482·10 <sup>-4</sup>                                      | 1,6397·10 <sup>-3</sup>          | 330,17                      | 8,4977·10 <sup>-3</sup>                              | 9,66957   |
| 46 000                         | 274,00                     | 14,098   | 1,7924·10 <sup>-4</sup>                                      | 1,4349·10 <sup>-3</sup>          | 331,82                      | 9,7869·10 <sup>-3</sup>                              | 9,66656   |
| 47 000                         | 274,00                     | 12,467   | 1,5851   | 1,2690                           | 331,82                      | 1,1067·10 <sup>-2</sup>                              | 9,66355   |
| 48 000                         | 274,00                     | 11,026   | 1,4019   | 1,1223·10 <sup>-3</sup>          | 331,82                      | 1,2513   | 9,66054   |
| 49 000                         | 274,00                     | 9,7515   | 1,2399   | 9,9258·10 <sup>-4</sup>          | 331,82                      | 1,4148   | 9,65753   |
| 50 000                         | 274,00                     | 8,6249   | 1,0966·10 <sup>-4</sup>                                      | 8,7788·10 <sup>-4</sup>          | 331,82                      | 1,5997·10 <sup>-2</sup>                              | 9,65452   |

| Геометрическая высота $h$<br>м | Температура $T_h$<br>°K | Барометрическое давление $p_h$<br>кг/м <sup>2</sup> | Плотность $\rho_h$<br>кг·сек <sup>2</sup> /м <sup>4</sup> | $\Delta = \frac{\rho_h}{\rho_0}$ | Скорость звука $a$<br>м/сек | Вязкость кинематическая $\nu$<br>м <sup>2</sup> /сек | Ускорение свободного падения тела $g$<br>м/сек <sup>2</sup> |
|--------------------------------|-------------------------|---|---|----------------------------------|-----------------------------|--|---|
| 51 000                         | 274,00                  | 7,6287  | 9,6996·10 <sup>-5</sup>                                   | 7,7649·10 <sup>-4</sup>          | 331,82                      | 1,8085·10 <sup>-2</sup>                              | 9,65148   |
| 52 000                         | 274,00                  | 6,7479  | 8,5795  | 6,8683                           | 331,82                      | 2,0446   | 9,64851   |
| 53 000                         | 274,00                  | 5,9689  | 7,5893  | 6,0755                           | 331,82                      | 2,3114   | 9,64551   |
| 54 000                         | 274,00                  | 5,2801  | 6,7134  | 5,3744                           | 331,82                      | 2,6130   | 9,64250   |
| 55 000                         | 270,56                  | 4,6667  | 6,0090·10 <sup>-5</sup>                                   | 4,8105·10 <sup>-4</sup>          | 329,74                      | 2,8903·10 <sup>-2</sup>                              | 9,63950   |
| 56 000                         | 267,13                  | 4,1196  | 5,3726·10 <sup>-5</sup>                                   | 4,3010·10 <sup>-4</sup>          | 327,64                      | 3,2003·10 <sup>-2</sup>                              | 9,63650   |
| 57 000                         | 263,69                  | 3,6294  | 4,7951  | 3,8387                           | 325,52                      | 3,5490   | 9,63351   |
| 58 000                         | 260,26                  | 3,1934  | 4,2747  | 3,4220                           | 323,40                      | 3,9397   | 9,63051   |
| 59 000                         | 256,83                  | 2,8050  | 3,8050  | 3,0460                           | 321,26                      | 4,3795   | 9,62751   |
| 60 000                         | 253,40                  | 2,4597  | 3,3816·10 <sup>-5</sup>                                   | 2,7071·10 <sup>-4</sup>          | 319,11                      | 4,8749·10 <sup>-2</sup>                              | 9,62452   |
| 61 000                         | 249,97                  | 2,1529  | 3,0005·10 <sup>-5</sup>                                   | 2,4020·10 <sup>-4</sup>          | 316,94                      | 5,4343·10 <sup>-2</sup>                              | 9,62153   |
| 62 000                         | 246,54                  | 1,8810  | 2,6579  | 2,1270                           | 314,76                      | 6,0664   | 9,61854   |
| 63 000                         | 243,11                  | 1,6402  | 2,3504  | 1,8816                           | 312,56                      | 6,7827   | 9,61555   |
| 64 000                         | 239,68                  | 1,4275  | 2,0749  | 1,6611                           | 310,35                      | 7,5951   | 9,61256   |
| 65 000                         | 236,26                  | 1,2405  | 1,8291·10 <sup>-5</sup>                                   | 1,4642·10 <sup>-4</sup>          | 308,13                      | 8,5151·10 <sup>-2</sup>                              | 9,60957   |
| 66 000                         | 232,83                  | 1,0752  | 1,6088·10 <sup>-5</sup>                                   | 1,2879·10 <sup>-4</sup>          | 305,88                      | 9,5655·10 <sup>-2</sup>                              | 9,60659   |
| 67 000                         | 229,41                  | 9,3043·10 <sup>-1</sup>                             | 1,4129  | 1,1311·10 <sup>-4</sup>          | 303,63                      | 1,0760·10 <sup>-1</sup>                              | 9,60360   |
| 68 000                         | 225,99                  | 8,0339  | 1,2385  | 9,9151·10 <sup>-5</sup>          | 301,36                      | 1,2124   | 9,60062   |
| 69 000                         | 222,57                  | 6,9214  | 1,0834·10 <sup>-5</sup>                                   | 8,6727                           | 299,07                      | 1,3686   | 9,59764   |
| 70 000                         | 219,15                  | 5,9494·10 <sup>-1</sup>                             | 9,4576·10 <sup>-6</sup>                                   | 7,5712·10 <sup>-5</sup>          | 296,76                      | 1,5475·10 <sup>-1</sup>                              | 9,59466   |
| 71 000                         | 215,73                  | 5,1016·10 <sup>-1</sup>                             | 8,2384·10 <sup>-6</sup>                                   | 6,5952·10 <sup>-5</sup>          | 294,44                      | 1,7534·10 <sup>-1</sup>                              | 9,59168   |
| 72 000                         | 212,31                  | 4,3638  | 7,1606  | 5,7324                           | 292,09                      | 1,9903   | 9,58870   |
| 73 000                         | 208,89                  | 3,7233  | 6,2097  | 4,9711                           | 289,73                      | 2,2671   | 9,58573   |
| 74 000                         | 205,48                  | 3,1701  | 5,3746  | 4,3026                           | 287,36                      | 2,5795   | 9,58275   |
| 75 000                         | 202,06                  | 2,6904·10 <sup>-1</sup>                             | 4,6387·10 <sup>-6</sup>                                   | 3,7135·10 <sup>-5</sup>          | 284,95                      | 2,9463·10 <sup>-1</sup>                              | 9,57978   |
| 76 000                         | 189,65                  | 2,2780·10 <sup>-1</sup>                             | 3,9952·10 <sup>-6</sup>                                   | 3,1983·10 <sup>-5</sup>          | 282,54                      | 3,3713·10 <sup>-1</sup>                              | 9,57681   |
| 77 000                         | 195,23                  | 1,9225  | 3,4305  | 2,7463                           | 280,10                      | 3,8682   | 9,57384   |
| 78 000                         | 191,82                  | 1,6183  | 2,9391  | 2,3529                           | 277,64                      | 4,4469   | 9,57087   |
| 79 000                         | 188,41                  | 1,3581  | 2,5112  | 2,0103                           | 275,16                      | 5,1242   | 9,56790   |
| 80 000                         | 185,00                  | 1,1361·10 <sup>-1</sup>                             | 2,1393·10 <sup>-6</sup>                                   | 1,7126·10 <sup>-5</sup>          | 272,66                      | 5,9202·10 <sup>-1</sup>                              | 9,56494   |
| 85 000                         | 185,00                  | 4,6196·10 <sup>-2</sup>                             | 8,6985·10 <sup>-7</sup>                                   | 6,9635·10 <sup>-6</sup>          | 272,66                      | 1,4560·10 <sup>-2</sup>                              | 9,55013   |
| 90 000                         | 185,00                  | 1,8808·10 <sup>-2</sup>                             | 3,5418·10 <sup>-7</sup>                                   | 2,8354·10 <sup>-6</sup>          | 272,66                      | 3,5759·10 <sup>-2</sup>                              | 9,53536   |
| 95 000                         | 185,00                  | 7,6687·10 <sup>-3</sup>                             | 1,4450·10 <sup>-7</sup>                                   | 1,1567·10 <sup>-6</sup>          |                             |  | 9,52061   |
| 100 000                        | 209,22                  | 3,3050·10 <sup>-3</sup>                             | 5,5088·10 <sup>-8</sup>                                   | 4,4075·10 <sup>-7</sup>          |                             |  | 9,50591   |
| 105 000                        | 233,36                  | 1,5639·10 <sup>-3</sup>                             | 2,3352·10 <sup>-8</sup>                                   | 1,8694·10 <sup>-7</sup>          |                             |  | 9,49124   |
| 110 000                        | 257,36                  | 7,9765·10 <sup>-4</sup>                             | 1,0792·10 <sup>-8</sup>                                   | 8,6391·10 <sup>-8</sup>          |                             |  | 9,47660   |
| 115 000                        | 294,97                  | 4,3932  | 5,1673·10 <sup>-9</sup>                                   | 4,1367                           |                             |  | 9,46199   |
| 120 000                        | 332,24                  | 2,6055  | 2,7110  | 2,1703                           |                             |  | 9,44741   |
| 125 000                        | 442,64                  | 1,7068·10 <sup>-4</sup>                             | 1,3282·10 <sup>-9</sup>                                   | 1,0633·10 <sup>-8</sup>          |                             |  | 9,43288   |
| 130 000                        | 552,04                  | 1,2309·10 <sup>-4</sup>                             | 7,6525·10 <sup>-10</sup>                                  | 6,1261·10 <sup>-9</sup>          |                             |  | 9,41839   |
| 135 000                        | 660,51                  | 9,4291·10 <sup>-5</sup>                             | 4,8817  | 3,9080                           |                             |  | 9,40390   |
| 140 000                        | 768,00                  | 7,5309  | 3,3412  | 2,6748                           |                             |  | 9,38948   |
| 145 000                        | 874,48                  | 6,0010  | 2,4070  | 1,9269                           |                             |  | 9,37507   |
| 150 000                        | 980,05                  | 5,0563·10 <sup>-5</sup>                             | 1,8031·10 <sup>-10</sup>                                  | 1,4434·10 <sup>-9</sup>          |                             |  | 9,36069   |

Продолжение

| Геометрическая высота $h$<br>м | Температура $T_h$<br>°K | Барометрическое давление $p_h$<br>кг/м <sup>2</sup> | Плотность $\rho_h$<br>кг·сек <sup>2</sup> /м <sup>4</sup> | $\Delta = \frac{\rho_h}{\rho_0}$ | Скорость звука $a$<br>м/сек | Вязкость кинематическая $\nu$<br>м <sup>2</sup> /сек | Ускорение свободного падения тела $g$<br>м/сек <sup>2</sup> |
|--------------------------------|-------------------------|---|---|----------------------------------|-----------------------------|--|---|
| 155 000                        | 1068,1                  | $4,4778 \cdot 10^{-5}$                              | $1,4128 \cdot 10^{-10}$                                   | $1,1310 \cdot 10^{-9}$           |                             |  | 9,34637   |
| 160 000                        | 1155,3                  | 3,8879  | $1,1300 \cdot 10^{-10}$                                   | $9,0457 \cdot 10^{-10}$          |                             |  | 9,33205   |
| 165 000                        | 1165,6                  | 3,3982  | $9,7569 \cdot 10^{-11}$                                   | 7,8108                           |                             |  | 9,31671   |
| 170 000                        | 1175,0                  | 2,9756  | 8,4419  | 6,7581                           |                             |  | 9,30240   |
| 175 000                        | 1184,2                  | $2,6102 \cdot 10^{-5}$                              | $7,3182 \cdot 10^{-11}$                                   | $5,8585 \cdot 10^{-10}$          |                             |  | 9,28821   |
| 180 000                        | 1193,2                  | $2,2937 \cdot 10^{-5}$                              | $6,3561 \cdot 10^{-11}$                                   | $5,0883 \cdot 10^{-10}$          |                             |  | 9,27400   |
| 185 000                        | 1202,0                  | 2,0189  | 5,5305  | 4,4274                           |                             |  | 9,25983   |
| 190 000                        | 1210,6                  | 1,7800  | 4,8209  | 3,8593                           |                             |  | 9,24570   |
| 195 000                        | 1218,9                  | 1,5718  | 4,2096  | 3,3700                           |                             |  | 9,23159   |
| 200 000                        | 1226,8                  | $1,3902 \cdot 10^{-5}$                              | $3,6821 \cdot 10^{-11}$                                   | $2,9477 \cdot 10^{-10}$          |                             |  | 9,21750   |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. Л. Воздушные винты. Оборонгиз, 1951.
2. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. Наука, 1966.
3. Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И. Курс общей астрономии. Наука, 1966.
4. Балк М. Б. Элементы динамики космического полета. Наука, 1965.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, 1960.
6. Блисс Г. Л. Лекции по вариационному исчислению. ИЛ, 1955.
7. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. Наука, 1966.
8. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. Изд. «Мир», 1964.
9. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика пространственного движения самолета. Машиностроение, 1967.
10. Ван-Драйст. Проблема аэродинамического нагрева. «Вопросы ракетной техники», 1957, № 5.
11. Ветчинкин В. П. Динамика полета. Госмашметиздат, 1933.
12. Воздухоплавание и авиация в России до 1907 г. Оборонгиз, 1956.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Наука, 1967.
14. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М. Теория полета неуправляемых ракет. Физматгиз, 1959.
15. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, 1961.
16. Доброгурский С. О., Титов В. Н. Счетно-решающие устройства. Оборонгиз, 1963.
17. Доновэн А. Ф., Лоуренс Г. Р. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях. ИЛ, 1959.
18. Доу Р. Б. Основы теории современных снарядов. Наука, 1964.
19. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. Физматгиз, 1961.
20. Дэвис Л., Фоллин Дж., Блитцер Л. Внешняя баллистика ракет. Воениздат, 1961.
21. Зенгер Б. Техника ракетного полета. Оборонгиз, 1947.
22. Исследование оптимальных режимов движения ракет (Сб. переводов иностранных статей). Под ред. И. Н. Садовского. Оборонгиз, 1959.
23. Исследования по динамике полета. Сборник статей под ред. И. В. Остославского. Машиностроение, 1965.
24. Каган Б. М., Тер-Микэлян Т. М. Решение инженерных задач на автоматических цифровых вычислительных машинах. Госэнергоиздат, 1958.
25. Калачев Г. С. Показатели маневренности, управляемости и устойчивости. Оборонгиз, 1958.
26. Карагодин В. М. Теоретические основы механики тела переменного состава. Оборонгиз, 1963.
27. Кислик М. Д. Сферы влияния больших планет и Луны. «Космические исследования». Т. 2, вып. 6, Наука, 1964.
28. Корн Г. и Корн Т. Электронные моделирующие устройства. ИЛ, 1955.
29. Космические траектории. Пер. с англ. ИЛ, 1963.
30. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. Учпедгиз, 1955.
31. Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения. Оборонгиз, 1958.
32. Кротов В. Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. «Автоматика и телемеханика», ч. I, 1962, № 12; ч. II, 1963, № 5; ч. III, 1964, № 7.
33. Крылов А. Н. Собрание трудов. Изд. АН СССР, 1955.
34. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Физматгиз, 1962.
35. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. ГИИТД, 1950.
36. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета. Оборонгиз, 1962.

37. Локк А. С. Управление снарядами. ГИТТЛ, 1957.
  38. Лоуден Д. Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Изд. «Мир», 1966.
  39. Лох У. Динамика и термодинамика спуска в атмосфере планет. Изд. «Мир», 1966.
  40. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. Наука, 1965.
  41. Миеле Анджело. Механика полета, т. I. Теория траекторий полета. Наука, 1965.
  42. Научные проблемы искусственных спутников. Сборник статей. ИЛ, 1959.
  43. Остославский И. В. Аэродинамика самолета. Оборонгиз, 1957.
  44. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. Оборонгиз, 1963.
  45. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Устойчивость и управляемость летательных аппаратов. Машиностроение, 1965.
  46. Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет. «Прикладная механика и математика», т. X, вып. 2, 1946.
  47. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. «Успехи физических наук», т. LXIII, вып. 1а, 1957.
  48. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
  49. Рабинович Б. И. Вариационные режимы полета крылатых летательных аппаратов. Машиностроение, 1966.
  50. Сахаров Г. И., Андреевский В. В., Букреев В. З. Нагрев тел при движении с большими сверхзвуковыми скоростями. Оборонгиз, 1961.
  51. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГИТТЛ, 1957.
  52. Современная математика для инженеров. Под ред. Э. Ф. Беккенбаха. ИЛ, 1958.
  53. Феодосьев В. И., Синярев Г. Б. Введение в ракетную технику. Оборонгиз, 1961.
  54. Циолковский К. Э. Собрание сочинений, т. 2, АН СССР, 1954.
  55. Циолковский К. Э. Труды по ракетной технике. Оборонгиз, 1957.
  56. Штерн Т. Введение в небесную механику. Изд. «Мир», 1964.
  57. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Наука, 1965.
  58. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Наука, 1965.
  59. Эрике Крафт. Космический полет. т. I. Окружающие условия и небесная механика. Физматгиз, 1963.
  60. Journal of the British Interplanetary Society, 17, No. 3-4, 1959. „Дальность действия и точность попадания ракет дальнего действия“.
  61. NASA Report. No. 925, 1036, 1041, 1048, 1052, 1056, 1071, 1088, 1119, 1160, 1227, 1253, 1273, 1238. NASA T. N., No. 1761, 3819, 4094.
  62. Schilling G. „Engineering Model Atmosphere of Mars“. Wegener P. „Flight Regimes in the Atmospheres of Venus and Mars“. Symposium on Dynamic of Manned Lifting Planetary Entry.
-

## ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

- Абсолютный экстремум, 34
- Абсолютно неподвижное пространство, 96
- Активный участок полета ракеты, 369, 395
- Алгебраическое дополнение, 28
- Аналог уравнения Кеплера для параболической орбиты, 93
  - — — для гиперболической орбиты, 94
- Аномалия эксцентрисическая, 91
  - истинная, 91
  - средняя, 91
- Апогей, 444
- Афелий, 89
- Аэростат, 6
- Аэродинамическое качество, 169
- Аэродинамика, 9

### Б

- Барометрическое давление воздуха на уровне моря, 114
- Барограмма подъема, 167
- Боевой разворот, 294, 298
- Бочка, 298

### В

- Вариационная задача в форме Майера, 46
  - — в форме Лагранжа, 41
- Векторная величина, 23
- Вектор коллинеарный, 23
  - компланарный, 23
- Векторное произведение, 24
  - пространство  $n$ -мерное, 31
- Весовой расход топлива, 149
- Вейерштрасса — Эрдмана условие для ломаных экстремалей, 45
- Взлетная дистанция самолета, 348, 353
- Винты изменяемого в полете шага, 143
- Вираз, 279
- Выдерживание, 353
- Выравнивание, 353

### Г

- Гагарин Ю. А., 5
- Газовая постоянная сухого воздуха (удельная), 114
- Галилея принцип, 98
- Гипотеза быстрого действия, 75
  - свободно-молекулярного потока, 114
  - сплошности, 118, 119
  - стационарности, 161
- Горка, 237
- Граничные условия, 14
- График виражей, 283

### Д

- Дальность полета, 191
  - — баллистической ракеты, 370
- Двигатель, 141
- Двигатель воздушно-реактивный (ВРД), 135
  - жидкостный (ЖРД), 136
  - пороховой (ПРД), 136
  - прямоточный воздушный (ПВРД), 135
  - реактивный (ракетный) (РД), 135
  - твердотопливный (РДТТ), 136
  - турбореактивный (ТРД), 135, 138
- Движение квазиустановившееся, 160
  - тела, 96
  - установившееся, 160
- Движитель, 141
- Двухимпульсный маневр перехода, 470
- Динамика полета, 5
- Динамический потолок, 273, 274
- Дифференциальное уравнение обыкновенное, 13
  - — — линейное, 14
- Длина посадочной дистанции, 359
  - пробега, 348, 359
  - свободного пробега молекул, 117

### Е

- Естественные граничные условия, 142

### Ж

- Жуковский Н. Е., 9
- Жуковского метод тяг (см. метод тяг Жуковского)

### З

- Задача двух тел, 82, 87, 452
  - $n$ -тел, 82
  - Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, 14
  - краевая, 14
  - на условный экстремум, 41
  - синтеза управления, 240
- Законы Кеплера, 82

### И

- Изопериметрическая задача, 41
- Интегральная кривая, 13
- Истинная скорость (см. техническая скорость), 226

### К

- Качество (см. аэродинамическое качество)
- Кеплер, 82

Кеплерово поле тяготения (центральное), 58, 82

Кинематическая вязкость воздуха, 116

Кнудсена число, 119

Косвенные методы вариационного исчисления, 32

Космический корабль, 451

Коэффициент восстановления, 128

— мощности, 175

— винта, 142

— перегрузки (см. перегрузка)

— полезного действия винта, 141

— тяги винта, 142

Критический угол атаки, 165

Крылов А. Н., 20

## Л

Летательные аппараты активного полета, 8

— — пассивного полета, 8

Линейная зависимость векторов, 31

— теория сверхзвуковой аэродинамики, 122

Ломаные экстремали, 45

## М

Матрица, 27

Матрица вырожденная (особенная), 28

— диагональная, 28

— единичная, 28

— обратная, 30

— квадратная, 28

— прямоугольная, 27

— транспонированная, 28

Маха число, 119

Метод наведения по трем точкам (совмещения), 311, 325, 328

— по кривой погони, 302, 333

Метод оборотов, 182

Метод параллельного сближения, 318, 326, 331

— пропорционального сближения, 321

Метод тяг Жуковского, 162

Мешерский И. В., 11

Моделирующие установки, 21

Монгольфье, 5

Можайский А. Ф., 6

Мощность активная, 179

— пассивная, 178

— потребная, 175

— располагаемая, 175, 176

## Н

Наивыгоднейший угол атаки, 350

Необходимые условия экстремума функционала, 36

Неустойчивый режим горизонтального полета, 170

Ньютон, 82

Ньютона закон, 99

## О

Область скоростей докритических, 122

— — околозвуковых и сверхзвуковых, 122

— — гиперзвуковых, 122

Орбитальное движение, 82

Ординарный переворот через крыло, 298

Орнитоптер, 5

Относительная поступь винта, 142

Относительный экстремум, 34

## П

Пассивный участок полета баллистической ракеты, 369

Параметр кривой, 85

Парашютирование при посадке, 354

Первая задача Циолковского, 79

Первая вариация функционала, 36

Первый интеграл уравнений Эйлера, 51

Перегрузка боковая, 158

— нормальная, 158

— полная, 157

— тангенциальная, 158

Переворот через крыло, 298

Перехват на встречно-пересекающемся курсе, 303

— на попутно-пересекающемся курсе (вдогон), 303

Перигей, 444

Перигелий, 89

Перицентр, 89

Пикирование, 190, 232

Планирование, 188

Плоскость большого круга, 111

— орбиты, 63

— эклиптики, 63

Показатель изотропии, 123

Поляра, 116

Посадочная скорость, 354, 357

Правильный вираж, 279

Практическая дальность полета, 192

Прандтль Л., 9

Приведенное число оборотов, 184

Приведенный коэффициент трения, 358

Приведенная сила тяги (см. сила тяги приведенная)

— — трения, 358

Пробег при посадке, 353, 357

Продолжительность полета, 191

Произведение матриц, 29

Производная по времени вектора, 25

— вектора во вращающейся системе координат, 25

Прямые методы вариационного исчисления, 32

Путевая скорость, 227

## Р

Радиус действия самолета, 212

— Земли (средний), 7

— кривизны траектории, 7

— сферы действия планеты, 57

— сферы притяжения, 57

Разность двух прямоугольных матриц, 29

Ранг матрицы, 28

Ракетоплан, 434

Располагаемая сила тяги (см. сила тяги располагаемая)

Райт, 6

Реактивный закрылок, 365

Реверсирование тяги, 361

Режим работы винта (см. относительная поступь винта)

## С

Самолет, 3, 6

Сила аэродинамическая, 116, 147

— боковая, 116

— инерции — кориолисова, 81, 195

— лобового сопротивления, 116

— массовая, 55

- подъемная, 116
- тяги движителя, 7, 60, 61, 147
- тяги приведенная, 185
- тяги располагаемая, 185
- центробежная, 7
- Система линейных дифференциальных уравнений, 14
- Система координат геоцентрическая, 62, 63
  - — гелиоцентрическая, 62, 63
  - — географическая, 63
  - — земная, 64
  - — земная, поверхностная, 62
  - — инерциальная, 97
  - — — полярная, 83
  - — неинерциальная, 97
  - — орбитальная, 62
  - — полусвязанная, 69
  - — поточная, 68
  - — связанная, 64, 65
  - — стартовая, 65
  - — скоростная, 68
  - — топоцентрическая, 61
- Система наведения, 300, 303
  - самонаведения, 300, 302
- Скалярная величина, 23
- Скалярное произведение векторов, 23
- Скалярно-векторное произведение, 25
- Скорость движения тела, 7
  - идеальная (характеристическая), 11, 80
  - круговая (первая космическая), 8, 85, 86
  - отрыва, 348
  - параболическая (вторая космическая), 8, 86
  - посадочная (см. посадочная скорость)
  - радиальная, 83
  - тангенциальная, 83
  - характеристическая двухимпульсного оптического маневра, 477, 478
  - экономическая (см. экономическая скорость)
- Среднее движение, 91
- Стандартная атмосфера Земли (ГОСТ 4401—64), 114, 489
- Старт ракеты, 336
- Стартовые ускорители, 351, 363
- Статический потолок, 166
- Стокса течение, 199
- Сумма двух прямоугольных матриц, 29
- Сфера притяжения, 56
- Сфера действия планеты, 57, 58

## Т

- Температура воздуха кинетическая на уровне моря, 114
  - молекулярная, 114
  - восстановления, 128, 132
  - определяющая, 132
  - поверхности равновесная, 130, 131
- Теорема Грина, 248
- Теоретический потолок, 166
- Теория скачка-разрежения, 122
  - полностью (адиабатически) заторможенного потока, 128
- Техническая дальность полета, 192
  - скорость (истинная), 226
- Титов Г. С., 5

- Траектория гиперболическая, 93
  - круговая, 85, 86
  - параболическая, 95
  - эллиптическая, 89
- Угол атаки, 69
  - — безопасный, 165
  - — экономический (см. экономический угол атаки)
  - — наиболее выгодный, 177
  - крена  $\gamma_c$ , 68
  - $\gamma$ , 66
  - пути  $\psi_c$ , 68
  - рысканья  $\psi$ , 66
  - скольжения  $\beta$ , 69
  - сноса, 227
  - тангажа  $\phi$ , 66
  - предупреждения, 313
- Удельный расход топлива, 138
  - тепловой поток конвективный, 128
  - — — излучения, 128
- Управление (управляющая функция), 46
- Упрощенный метод тяг, 167
- Уравнение Кеплера для эллиптической орбиты, 91, 374
  - Клеро, 391
  - Мещерского, 75
  - — обобщенное, 78
  - Эйлера, 36, 38, 42
- Ускорение силы тяготения, 8, 59, 131
  - абсолютное, 26
  - переносное, 26
  - кориолисово, 26
  - центростремительное, обусловленное вращением Земли, 154
  - относительное, 26

## Ф

- Фазовые координаты, 46
- Фиктивный ветер, 227
- Формула Циолковского, 11, 80
- Форсаж двигателя, 138

## Х

- Характеристика дроссельная ТРД, 144
  - ПВРД, 144
  - воздушного винта, 141

## Ц

- Циолковский К. Э., 10
- Циолковского задача первая (см. первая задача Циолковского)
- Цифровые машины дискретного счета, 21

## Ч

- Чаплыгин С. А.
- Численное интегрирование
  - — по методу Эйлера
  - — — Рунге — Кутты
  - — — средней ординаты (модифицированный метод Эйлера), 18

## Э

- Экономический угол атаки, 177
- Экономическая скорость, 177
- Эксцентриситет кривой, 85
  - орбиты перехода, 474
- Эллипс Гоманна, 477
- Эйлера уравнение (см. уравнение Эйлера)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  | Стр. |
|--|------|
| Из предисловия к первому изданию . . . . . | 3    |
| Предисловие ко второму изданию . . . . .   | 4    |
| Введение . . . . .                         | 5    |

### Часть первая

#### ОБЩИЕ ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

|   |     |
|---|-----|
| <b>Глава I. Математические основы исследования траекторий летательных аппаратов</b>                                   | 13  |
| § 1. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений   | 13  |
| § 2. Краткие сведения из векторной алгебры. Производная вектора во вращающейся системе координат . . . . .            | 23  |
| § 3. Некоторые приложения матричного исчисления . . . . .   | 27  |
| § 4. Основные положения вариационного исчисления . . . . .  | 32  |
| § 5. Различные вариационные задачи. Вариационная задача в форме Майера . . . . .                                      | 40  |
| <b>Глава II. Основные положения механики, используемые в динамике полета</b>  | 55  |
| § 1. О силах, действующих на летательный аппарат в полете . . . . .   | 55  |
| § 2. Системы координат, применяемые в динамике полета . . . . .   | 61  |
| § 3. Уравнения движения точки и тела переменного состава . . . . .  | 75  |
| § 4. Орбитальные движения тел. Законы Кеплера . . . . .   | 81  |
| <b>Глава III. Общий вид уравнений движения летательного аппарата</b>  | 94  |
| § 1. О взаимодействии уравнений сил и моментов при исследовании траекторий полета . . . . .                           | 94  |
| § 2. Уравнения движения в инерциальной системе отсчета . . . . .  | 96  |
| § 3. Уравнения движения в неинерциальной системе отсчета . . . . .  | 104 |
| <b>Глава IV. Исходные данные для расчета траекторий полета летательных аппаратов</b>                                  | 112 |
| § 1. Характеристики среды, в которой происходит движение летательного аппарата. Стандартная атмосфера Земли . . . . . | 112 |
| § 2. Аэродинамические силы, действующие на летательный аппарат . . . . .  | 116 |
| § 3. Кинетический нагрев поверхности летательного аппарата . . . . .  | 127 |
| § 4. Характеристики двигателей, применяемых на летательных аппаратах  | 134 |

### Часть вторая

#### ДИНАМИКА ПОЛЕТА В АТМОСФЕРЕ

|   |     |
|---|-----|
| <b>Глава V. Уравнения движения летательного аппарата в пределах атмосферы</b>   | 146 |
| § 1. Уравнения движения летательного аппарата в проекциях на оси земной и скоростной систем координат . . . . .         | 146 |
| § 2. Упрощение уравнений движения летательного аппарата . . . . .   | 153 |
| § 3. Уравнения движения летательного аппарата в частных случаях . . . . .   | 155 |
| <b>Глава VI. Квазиустановившееся движение летательного аппарата в вертикальной плоскости. Равновесные режимы полета</b> | 160 |
| § 1*. Прямолинейное установившееся движение самолета. Метод тяг Н. Е. Жуковского . . . . .                              | 161 |
| § 2*. Метод мощностей. Другие методы аэродинамического расчета . . . . .  | 175 |
| § 3*. Планирование летательного аппарата в однородной среде . . . . .   | 187 |
| <b>Глава VII. Квазиустановившееся движение летательного аппарата. Расчет дальности полета самолета</b>                  | 191 |
| § 1*. Основные определения. Километровый и часовой расход топлива . . . . .   | 191 |
| § 2*. Расчет дальности полета самолета с воздушно-реактивными двигателями (ВРД) . . . . .                               | 194 |
| § 3*. Расчет дальности полета самолета с винтовыми двигателями . . . . .  | 206 |
| § 4*. Радиус действия самолета. Способы увеличения дальности полета и радиуса действия . . . . .                        | 212 |
| § 5*. Влияние ветра на дальность полета . . . . .   | 226 |

ALL

|  |     |
|--|-----|
| <b>Глава VIII. Неустановившееся движение летательного аппарата в вертикальной плоскости</b>                    | 229 |
| § 1. Движение по прямолинейным траекториям без крена и скольжения. Выход из пикирования. Горка                 | 230 |
| § 2. Оптимальная траектория подъема летательного аппарата в общем случае                                       | 239 |
| § 3. Последовательность расчета оптимальной траектории подъема летательного аппарата с ВРД                     | 251 |
| § 4**. Оптимальная траектория подъема ракеты в атмосфере. Задача о минимуме времени подъема на заданную высоту | 264 |
| § 5. Простейшая задача о перехвате воздушной цели в вертикальной плоскости                                     | 265 |
| § 6*. Динамический потолок летательного аппарата   | 273 |
| <b>Глава IX. Движение летательного аппарата в горизонтальной плоскости. Понятие о пространственном маневре</b> | 278 |
| § 1*. Установившийся вираж самолета  | 280 |
| § 2*. Неустановившийся вираж летательного аппарата   | 286 |
| § 3. Задача о перехвате воздушной цели, движущейся в горизонтальной плоскости                                  | 291 |
| § 4*. Боевой разворот. Другие пространственные маневры   | 294 |
| <b>Глава X. Неустановившееся движение летательного аппарата при дополнительных кинематических связях</b>       | 299 |
| § 1**. Наведение по кривой погони в вертикальной плоскости   | 302 |
| § 2**. Метод наведения по трем точкам в вертикальной плоскости (метод совмещения)                              | 311 |
| § 3**. Метод параллельного и пропорционального сближения. Траектории наведения снарядов класса «воздух—воздух» | 318 |
| § 4**. Графо-аналитический метод расчета траекторий наведения последовательными приближениями                  | 324 |
| § 5**. Кинематические основы наведения летательных аппаратов в горизонтальной плоскости                        | 328 |
| <b>Глава XI. Стартовые и посадочные характеристики летательного аппарата</b>                                   | 333 |
| § 1**. Расчет старта баллистических ракет  | 334 |
| § 2**. Расчет старта крылатой ракеты. Ввод ракеты в режим наведения  | 336 |
| § 3*. Расчет взлетной дистанции самолета   | 348 |
| § 4*. Расчет посадочной дистанции самолета   | 353 |
| § 5. Способы улучшения взлетно-посадочных данных самолетов   | 360 |

Часть третья

**ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА ОРБИТАЛЬНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

|  |     |
|--|-----|
| <b>Глава XII. Динамика пассивного полета баллистической ракеты**</b>   | 369 |
| § 1*. Расчет полета баллистической ракеты на пассивном участке   | 370 |
| § 2. Влияние суточного вращения Земли на дальность полета баллистической ракеты  | 379 |
| § 3. Погрешности, к которым приводит кеплерово приближение. Гравитационный потенциал Земли. Уравнение Клеро                              | 385 |
| <b>Глава XIII. Динамика полета баллистической ракеты на активном участке и на участке входа в атмосферу. Динамика полета ракетоплана</b> | 395 |
| § 1. Расчет траектории полета ракеты-носителя  | 395 |
| § 2. Последовательность расчета траектории полета ракеты-носителя на активном участке  | 425 |
| § 3. Движение ракеты на участке входа в атмосферу  | 428 |
| § 4. Расчет траектории полета ракетоплана  | 434 |
| <b>Глава XIV. Траектории полета космических кораблей**</b>   | 444 |
| § 1. Характер движения искусственных спутников Земли. Вывод искусственного спутника Земли на орбиту                                      | 444 |
| § 2. Траектории полета космических кораблей. Общие замечания   | 451 |
| § 3. Оптимальное управление космическим кораблем   | 454 |
| § 4. Движение космического корабля по кеплеровой дуге  | 464 |
| § 5. Оптимальное перемещение космического корабля с одной круговой орбиты на другую  | 470 |
| § 6. Применение полученных результатов к расчету межпланетного перелета в первом приближении   | 478 |
| <b>Приложение. Таблица стандартной атмосферы (ГОСТ 4401—64)</b>  | 489 |
| Литература   | 493 |
| Предметно-именной указатель  | 495 |

*Иван Васильевич Остославский и Ирина Викторовна Стражева*

**ДИНАМИКА ПОЛЕТА  
ТРАЕКТОРИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Издательский редактор *М. Ф. Богомолова*  
Техн. редактор *А. Я. Дубинская*

Художник *Н. Т. Дворников*  
Корректор *А. И. Карамышкина*

Г-60560

Сдано в набор 21/X 1968 г.

Подписано в печать 15/V 1969 г.

Формат 70×108/16

Печ. л. 31,25

Усл. печ. л. 43,75

Уч.-изд. л. 34,80

Бум. л. 15,63

Бумага № 1

Тираж 16 500 экз.

Зак. 2326

Цена 1 р. 41 к.

Тем. план 1968 г. № 12

Издательство «Машиностроение», Москва, К-51, Петровка, 24  
Московская типография № 8 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР,  
Хохловский пер., 7. Тип. зак. 2417.

| Стр.      | Строка                | Напечатано   | Должно быть  |
|-----------|-----------------------|--|--|
| 110       | 16 сверху             | $m \frac{V^2 \cos \theta}{u_3 + H} \operatorname{tg} \sigma \cos \psi_c$   | $m \frac{V^2 \cos^2 \theta}{r_3 + H} \operatorname{tg} \sigma \cos \psi_c$   |
| 123 и 125 | Формулы (17.4)–(20.4) | $Ma, M^2 a^2$  | $Ma, M^2 a^2$  |
| 346       | 3 снизу               | $n_y = 0$  | $\Delta n_y = 0$   |
| 408       | Формула (58.13)       | $= \frac{V}{g} (1 - \bar{G}_T) \dot{\theta} = \frac{\bar{P}}{P_{y\lambda}} \frac{V}{g} (1 - \bar{G}_T) \frac{d\theta}{d\bar{G}_T}$ | $= \frac{V}{g} (1 - \bar{G}_T) \dot{\theta} + (1 - \bar{G}_T) \cos \theta =$ $= \frac{\bar{P}}{P_{y\lambda}} \frac{V}{g} (1 - \bar{G}_T) \frac{d\theta}{d\bar{G}_T} + (1 - \bar{G}_T) \cos \theta$ |