Государственный комитет СССР по народному образованию

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Пособие для поступающих в МВТУ им. Н. Э. Баумана

Под редакцией С. В. Белова

ИЗДАТЕЛЬСТВО МВТУ
1989

ББК 22.1
К 64

К 64 Конкурсные задачи по математике и физике: Пособие для поступающих в МВТУ им. Н. Э. Баумана/Л. П. Паршев, А. Г. Андреев, Н. А. Гладков, Ю. А. Струков. Под ред. Белова С. В.— М.: Изд-во МВТУ, 1989
ISBN 5—7038—0001—3

В пособии приведены конкурсные задачи, предлагавшиеся на вступительных экзаменах по математике и физике в 1987—88 г. Наличие кратких пояснений и решений наиболее сложных задач способствует самостоятельной подготовке к вступительным экзаменам.

Рекомендуется учащимся старших классов средних школ и ПТУ, слушателям подготовительных курсов и отделений при подготовке к поступлению в МВТУ.

184 с., ил. 136 Библ. 3 назв.

Рецензенты: *Е. В. Шикин, Л. А. Муравей, А. И. Светличный*

ББК 22.1
К 64

ISBN 5—7038—0001—3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начиная с 1986 г. Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана приступило к подготовке инженеров-разработчиков в области машиностроения и приборостроения. Подготовка инженеров, способных вести исследования и разработку новой техники, материалов и технологий на уровне, превышающем мировые стандарты, основана на глубоком овладении студентами комплекса физико-математических знаний, на которых базируются все фундаментальные и инженерные дисциплины всех специальностей училища. Это требует от поступающих на первый курс МВТУ им. Н. Э. Баумана достаточно высокого уровня теоретических знаний физики и математики в объеме программ средней школы, склонности к их творческому использованию, развитых навыков решения практических задач.

С целью отбора для обучения в МВТУ им. Н. Э. Баумана наиболее подготовленных по физике и математике абитуриентов в последние два года на конкурсных вступительных экзаменах непрерывно повышаются требования к практической подготовке по этим дисциплинам.

Опыт проведения конкурсных экзаменов в 1988 г. показал, что уровень подготовки выпускников средней школы по физике и математике не всегда отвечает программным требованиям, причем наибольшие трудности у абитуриентов возникают при практическом применении знаний. Даже незначительные отклонения от общепринятой постановки задач часто вызывают у абитуриентов непреодолимые трудности. На наш взгляд, это происходит из-за недостатка опыта и навыков в решении типовых задач и примеров, а также из-за отсутствия практики решения задач по ряду разделов физики и математики. К ним относятся: волновые свойства света; тепловые явления, газовые законы и термодинамика; графическое представление движения; геометрическая оптика; атомная физика; уравнения и системы, сводящиеся к квадратным уравнениям; задачи на составление уравнений (текстовые задачи); тригонометрические уравнения; задачи по стереометрии.

Настоящий сборник задач публикуется впервые и ставит своей целью широкое ознакомление абитуриентов училища с уровнем требований на вступительных экзаменах по физике и математике, а также создает условия для плодотворной самостоятельной подготовки к конкурсным экзаменам.

Сборник задач знакомит будущих абитуриентов училища с конкурсными задачами и примерами по физике и математике, предлагавшимися на вступительных экзаменах в основном в 1987—88 г., а также с объемом заданий на вступительных экзаменах по физике и математике.

Наличие в сборнике задач подробных решений наиболее сложных примеров и задач, кратких методических указаний по решению типовых задач, а также задач для самоподготовки позволяет использовать его как пособие для самостоятельного совершенствования навыков в решении задач и примеров по физике и математике перед вступительными экзаменами в МВТУ им. Н. Э. Баумана.

Сборник задач можно использовать при обучении слушателей подготовительного отделения и подготовительных курсов училища.

Первый раздел сборника задач подготовлен доцентом Паршевым Л. П., второй — доцентами Андреевым А. Г., Гладковым Н. А. и Струковым Ю. А.

Раздел 1
МАТЕМАТИКА

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ПРИМЕРОВ

Иррациональные уравнения и неравенства. Напомним, что обозначение $\sqrt{a}$ принято для арифметического квадратного корня из числа a, т. е. для неотрицательного числа, квадрат которого равен a. Известно, что для неотрицательного числа a существует единственное значение арифметического квадратного корня; для отрицательных a квадратный корень не существует. Из определения арифметического квадратного корня следует, что значение $\sqrt{a}$ неотрицательно.

Таким образом, мы должны учитывать ограничения $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $a \geqslant 0$, каждое из которых придает свои особенности решению иррационального уравнения.

Решая уравнение, содержащее неизвестное под знаком квадратного корня, приходится, иногда неоднократно, возводить в квадрат обе части уравнения. Полученное при этом уравнение часто оказывается неравносильным данному. Возникающие в процессе решения трудности можно разобрать на примере простейших уравнений двух основных типов. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{f(x)} = g(x). \tag{1}$$

Важно отметить, что если x_0 — корень уравнения, то $g(x_0) \geqslant 0$.

Возводя в квадрат левую и правую части уравнения, получаем

$$f(x) = (g(x))^2. \tag{2}$$

Легко заметить, что к этому же уравнению сводится уравнение

$$-\sqrt{f(x)} = g(x). \tag{1'}$$

Уравнение (2) оказалось следствием и уравнения (1), и уравнения (1′), среди его корней могут быть как корни уравнения (1), так и корни уравнения (1′). Поэтому каждый корень x_k уравнения (2) требует проверки, которая сводится по существу к определению знака $g(x_k)$. Если $g(x_k) \geqslant 0$, то x_k — корень данного уравнения; если $g(x_k) < 0$, то x_k — корень уравнения (1′), а корнем данного уравнения не является (обычно его называют посторонним корнем уравнения (1)). В этом примере нет необходимости искать область определения функции $\sqrt{f(x)}$. Если x_0 — корень заданного уравнения, то $f(x_0)=(g(x_0))^2$ и условие $f(x_0)\geqslant 0$ выполняется автоматически.

В уравнении

$$\sqrt{u(x)}=\sqrt{v(x)} \tag{3}$$

или в аналогичном ему $\sqrt{u(x)}\cdot\sqrt{v(x)}=1$ надо учитывать ограничения $u(x)\geqslant 0$ и $v(x)\geqslant 0$.

Освобождаясь от знаков корня, мы получаем уравнения

$$u(x)=v(x) \quad \text{и} \quad u(x)\cdot v(x)=1, \tag{4}$$

в которых этих ограничений нет, т. е. происходит расширение области допустимых значений x. Следовательно, каждый корень x_k уравнений (4) требует проверки по исходному уравнению. Если $u(x_k)\geqslant 0$ (знак $v(x_k)$, очевидно, такой же), то x_k — корень данного уравнения; если $u(x_k)<0$, то x_k корнем данного уравнения не является.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+1}=x-1$.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем уравнение $x^2-3x=0$, имеющее корни $x_1=3$ и $x_2=0$.

При $x=3$ правая часть данного уравнения положительна, следовательно, $x=3$ — его решение. При $x=0$ правая часть уравнения отрицательна, т. е. $x=0$ — посторонний корень (он является корнем уравнения $-\sqrt{x+1}=x-1$).

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{x}$.

Освобождаясь от радикалов, приходим к квадратному уравнению $x^2+x-2=0$ с корнями $x_1=1$ и $x_2=-2$.

При $x=1$ подкоренные выражения исходного уравнения положительны, следовательно $x=1$ — его решение. При $x=-2$ обе части исходного уравнения не имеют смысла.

На рис. 1 и 2 показано графическое решение этих примеров. Пунктиром показаны части графиков, появившиеся в результате переходов к неравносильным уравнениям.

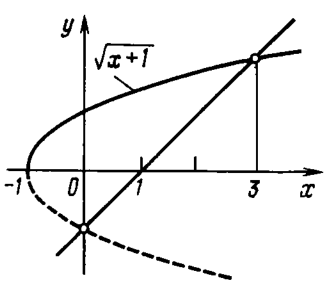


Рис. 1

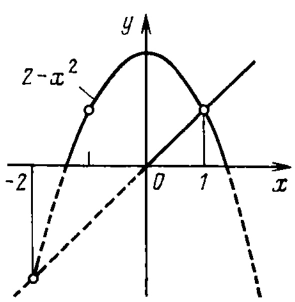


Рис. 2

Особенности решения неравенств, содержащих неизвестное под знаком квадратного корня, рассмотрим на двух типичных примерах.

Решая неравенство $\sqrt{f(x)}<g(x)$, учитываем, что правая часть должна быть положительной, а подкоренное выражение — неотрицательным. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^2(x). \end{cases}$$

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x}<2-x$.

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ 2-x>0, \\ x<(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x<2, \\ \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\leqslant x<1.$$

Неравенство можно решить другим способом, представив его в виде $(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}-2<0$, или $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)<0$. Условие $\sqrt{x}\geqslant 0$ позволит перейти к равносильному неравенству $\sqrt{x}<1$, отсюда $0\leqslant x<1$.

При решении неравенства вида $\sqrt{f(x)}>g(x)$ выделяем два случая: если $g(x)<0$ и $f(x)\geqslant 0$, неравенство, очевидно, выполняется; в случае $g(x)\geqslant 0$ приходим к равносильному неравенству $f(x)>g^2(x)$. Таким образом, неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)>g^2(x). \end{cases}$$

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x}>x-2$. Система $\begin{cases} x-2<0, \\ x\geqslant 0 \end{cases}$ равносильна неравенству $0\leqslant x<2$. Если $x-2\geqslant 0$, возводим в квадрат левую и правую части неравенства. Решая неравенство $x>(x-2)^2$, получим (с учетом $x\geqslant 2$) $2\leqslant x<4$. Объединяя найденные промежутки, получаем решение неравенства $0\leqslant x<4$.

Логарифмические уравнения. Для логарифмических уравнений наиболее характерная операция — переход от равенства логарифмов выражений

$$\log_a f(x)=\log_a g(x) \tag{5}$$

к равенству самих выражений (потенцирование уравнения)

$$f(x)=g(x). \tag{6}$$

В исходном уравнении (5) обязательны ограничения

$$f(x)>0 \text{ и } g(x)>0;$$

в уравнении (6) этих ограничений уже нет, т. е. при переходе от уравнения (5) к уравнению (6) происходит расширение области допустимых значений x. Следовательно, для каждого корня x_k уравнения (6) требуется проверка по исходному уравнению. Проверка заключается, по сути дела, в определении знака $f(x_k)$ или, что то же самое, знака $g(x_k)$. Если $f(x_k)>0$, x_k является корнем исходного уравнения, если же $f(x_k)\leqslant 0$, то x_k не может быть решением уравнения (5), так как обе его части при $x=x_k$ смысла не имеют.

Пример 5. Решить уравнение $\log_2(2-x^2)=\log_2 x$.

Потенцируя, получаем $2-x^2=x$, или $x^2+x-2=0$.

Корень полученного квадратного уравнения $x_1=1$ является корнем исходного уравнения. Второй корень $x_2=-2$ корнем исходного уравнения быть не может, так как выражения, стоящие под знаками логарифмов, при $x=-2$ отрицательны.

Такая же причина появления посторонних корней при решении уравнения вида

$$\log_a f(x)+\log_a g(x)=b. \tag{7}$$

В примерах такого типа мы вынуждены применять формулы

$$\log_a M+\log_a N=\log_a MN, \quad \log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N},$$

в которых левая часть определена при $M>0$ и $N>0$, тогда как правая существует при $MN>0$.

Переходя к уравнению

$$\log_a(f(x)\,g(x))=b, \tag{8}$$

мы снимаем ограничения $f(x)>0$ и $g(x)>0$.

Если x_k — корень уравнения (8), то произведение $f(x_k)\cdot g(x_k)$ получается положительным, но сами сомножители или оба положительны, или оба отрицательны. В случае $f(x_k)<0$ и $g(x_k)<0$ x_k не может быть корнем исходного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=1$.

Преобразовав сумму логарифмов в логарифм произведения, получим следствие данного уравнения

$$\log_3(x^2-1)=\log_3 3.$$

Это уравнение равносильно уравнению $x^2-1=3$, откуда $x=\pm 2$. Значение $x=-2$ не может служить корнем исходного уравнения, так как выражения, стоящие под знаками логарифмов, при этом значении x отрицательны. Второй корень $x=2$ является решением данного уравнения.

Тригонометрические уравнения. Решение тригонометрического уравнения состоит, как правило, из двух этапов: приведения заданного уравнения к простейшим уравнениям $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$ с помощью известных формул тригонометрии и решения простейших уравнений.

В силу периодичности и немонотонности тригонометрических функций тригонометрические уравнения обычно имеют бесчисленное множество решений, поэтому надо научиться без ошибок записывать все решения простейших уравнений.

По той же причине проверка решений тригонометрических уравнений превращается в довольно трудную задачу; чтобы избежать ее, желательно выбирать такие приемы решения, которые приводили бы данное уравнение к равносильным уравнениям.

К сожалению, некоторые формулы тригонометрии, например

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x},$$

имеют разные области определения левой и правой частей; их применение может привести к нарушению равносильности исходного и полученного уравнений. При использовании этих формул следует проверить, не являются ли решениями исходного уравнения значения переменной, которые входят в область определения функций, стоящих слева, но не входят в область определения функций, стоящих справа в этих формулах. Поясним сказанное простым примером.

Пример 7. Решить уравнение $\sin x - \cos x = 1$.

Это уравнение можно решить несколькими способами.

1) Умножая на $\sqrt{2}/2$ левую и правую части уравнения, получаем

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x = \frac{\pi}{4}(1 + (-1)^k) + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Все полученные в процессе решения уравнения равносильны исходному уравнению, проверка ответов не нужна. Отметим полученные решения на тригонометрическом круге (рис. 3, *а*).

2) Решим уравнение, воспользовавшись формулами двойного аргумента:

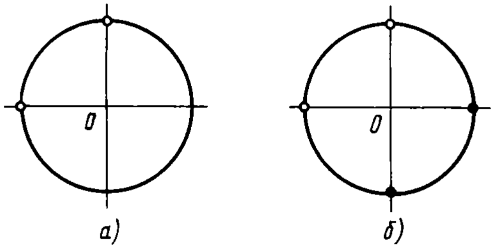


Рис. 3

$$\sin x - (1+\cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1. \end{array}\right.$$

Уравнение свелось к равносильной совокупности уравнений, т. е. решение данного уравнения есть объединение решений уравнений $\cos\frac{x}{2} = 0$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$.

Ответ: $x_1 = \pi(1+2k)$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; k, $n \in \mathbf{Z}$.

3) Можно быстро решить данное уравнение, возводя в квадрат его левую и правую части.

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1,$$

$\sin 2x = 0$, отсюда $x = \frac{k\pi}{2}$. Отметив найденные решения на тригонометрическом круге (рис. 3, *б*), убеждаемся в присутствии посторонних корней в полученном ответе (отмечены темными точками). Возводя в квадрат обе части данного уравнения, мы попутно начали решать и уравнение

$$\sin x - \cos x = -1;$$

в полученном множестве значений x содержатся также решения и этого уравнения. Отделить посторонние решения можно только проверкой, что нелегко сделать даже в этом простом примере. Очевидно, что такого метода решения тригонометрических уравнений надо избегать.

К таким же трудностям приводит использование формул типа $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, часто применяемых абитуриентами.

Так как здесь заранее не ясно, какой из знаков перед корнем надо брать, фактически опять приходится решать одновременно два уравнения. Так, в данном примере $\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sin x - 1 = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 1 - \sin^2 x$, $\sin x(\sin x - 1) = 0$, $x_1 = k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

В найденном здесь решении присутствуют посторонние корни, соответствующие четным значениям k.

4) Выражая $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получаем

$$\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{2}=1,\quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

При этом способе решения среди найденных корней нет решений исходного уравнения $x=\pi+2k\pi$, которые были потеряны при переходе к неравносильному уравнению. Так как функция $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ не определена при $x=\pi+2k\pi$, надо было проверить, не являются ли эти значения решениями исходного уравнения.

Решая тригонометрические уравнения, не следует забывать и свойство ограниченности функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

Пример 8. Решить уравнение $\sin x+\sin 9x=2$.

Так как синус любого аргумента не может быть больше единицы, левая часть уравнения равна двум тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно единице. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x=1,\\ \sin 9x=1.\end{cases}$$

Из первого уравнения $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in \boldsymbol{Z}$; эти значения x удовлетворяют и второму уравнению системы.

Пример 9. Решить уравнение $2\cos^2 x+3\cos x-2=0$.

Применив подстановку $y=\cos x$, получаем квадратное уравнение относительно новой переменной y: $2y^2+3y-2=0$. Так как $|\cos x|\leqslant 1$, то принимаем во внимание только корень $y_1=1/2$ квадратного уравнения. Второй корень $y_2=-2$ не удовлетворяет условию $|y|\leqslant 1$. Итак, $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

Исследование уравнений и систем уравнений первой и второй степени. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ при $a\neq 0$ является квадратным уравнением, оно имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=b^2-4ac\geqslant 0.$$

Отдельно надо рассмотреть случай $a=0$, когда уравнение превращается в линейное $bx+c=0$, которое, как известно, может иметь одно решение, бесчисленное множество решений, а может и не иметь решений. Заметим, что при $a=0$ $b^2-4ac\geqslant 0$, но это не означает, что уравнение имеет решение.

Иногда заданное уравнение подстановкой $z=f(x)$ может быть приведено к виду $az^2+bz+c=0$. Если полученное уравнение имеет корень z_0, входящий в область значений функции $z=f(x)$, исходное уравнение имеет решение. Например, если $z=\sqrt{x}$, то требуется, чтобы $z_0 \geqslant 0$; если $z=2^x$, то $z_0>0$; при $z=\cos x$ $|z_0| \leqslant 1$ и т. п.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10. Найти все значения параметра p, при которых уравнение $p(p-1)x^2+2px+1=0$ имеет решение.

Считая, что $p \neq 0$ и $p \neq 1$, решим неравенство

$$D/4=p^2-p(p-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant 0.$$

Следовательно, при $0<p<1$ или $1<p<+\infty$ уравнение имеет решение.

Когда $p=1$, получаем уравнение $2x+1=0$, имеющее решение $x=-1/2$; при $p=0$ исходное уравнение решения не имеет. Итак, уравнение имеет решение при $p>0$.

Пример 11. При каких значениях p уравнение

$$(p-3) \cdot 4^x - 4 \cdot 2^x + p = 0$$

имеет решение?

У данного уравнения есть решение, если уравнение

$$(p-3)z^2-4z+p=0$$

имеет хотя бы один положительный корень.

При $p=3$ получаем уравнение $-4z+3=0$ и решение $z=3/4>0$.

Пусть $p \neq 3$. Неравенство $D/4=4-p(p-3) \geqslant 0$ дает условие $-1 \leqslant p \leqslant 4$, при выполнении которого квадратное уравнение имеет корни. Оба корня z_1 и z_2 будут положительными, если

$$\begin{cases} 4/(p-3)>0, \\ p/(p-3)>0, \end{cases}$$

откуда получаем $p>3$ (мы воспользовались теоремой Виета).

Один из корней будет положительным (другой отрицательным), если $p/(p-3)<0$, отсюда $0<p<3$.

При $p=0$ один корень равен нулю, второй корень $z_2=-4/3<0$, следовательно, исходное уравнение при $p=0$ решения не имеет.

Итак, мы установили, что значения p, при которых данное уравнение имеет решение, заполняют промежуток $0<p \leqslant 4$ (рис. 4).

Пример 12. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y+x=a \end{cases}$$

имеет решение.

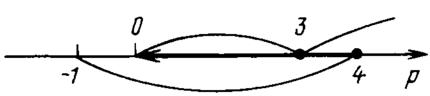


Рис. 4

Исключая из уравнений системы y, придем к равносильной системе

$$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ \sqrt{x}+x=a. \end{cases}$$

Уравнение $x+\sqrt{x}-a=0$ подстановкой $z=\sqrt{x}$ приводится к виду $z^2+z-a=0$. Полученное квадратное уравнение имеет неотрицательное решение, если $(-1+\sqrt{1+4a})/2\geqslant 0$ (достаточно взять бо́льший корень). Отсюда получаем условие $\sqrt{1+4a}\geqslant 1$, или $a\geqslant 0$. Зная неотрицательный корень $z_0\geqslant 0$, можно найти x и из первого уравнения системы — y.

Пример 13. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+a, \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

имеет решение.

Исключая из уравнений x, получим равносильную систему

$$\begin{cases} y=x^2+a, \\ y^2+y-a-2=0. \end{cases}$$

При исследовании второго уравнения этой системы, содержащего только неизвестное y, важно не упустить из виду, что первое уравнение дает ограничение на y: $y-a=x^2\geqslant 0$. Следовательно, у исходной системы есть решение, если уравнение

$$y^2+y-a-2=0$$

имеет решение, удовлетворяющее условию $y\geqslant a$.

Дискриминант уравнения $D=9+4a$ неотрицателен при $a\geqslant -9/4$. Достаточно потребовать, чтобы условию $y\geqslant a$ удовлетворял бо́льший корень уравнения, т. е.

$$\frac{-1+\sqrt{9+4a}}{2}\geqslant a.$$

Получаем неравенство $\sqrt{9+4a}\geqslant 2a+1$; решая его, находим промежуток $-9/4\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ значений параметра a, при которых данная система совместна.

Можно дать геометрическую иллюстрацию задачи. На плоскости xy второе уравнение системы описывает окружность радиуса $\sqrt{2}$; первое уравнение — параболу с вершиной в точке $A(0;\ a)$. С увеличением a парабола смещается вверх, при уменьшении a — вниз (рис. 5). При $a=\sqrt{2}$ парабола касается окружности сверху, при $a=-9/4$ — снизу. При всех промежуточных значениях a парабола и окружность пересекаются.

Задачи по стереометрии. Одним из распространенных типов стереометрических задач являются задачи на комбинации геометрических тел, в частности тел вращения с многогранниками. Чтобы успешно решать эти задачи, надо четко представлять взаимное расположение простейших пространственных фигур и связь между их элементами.

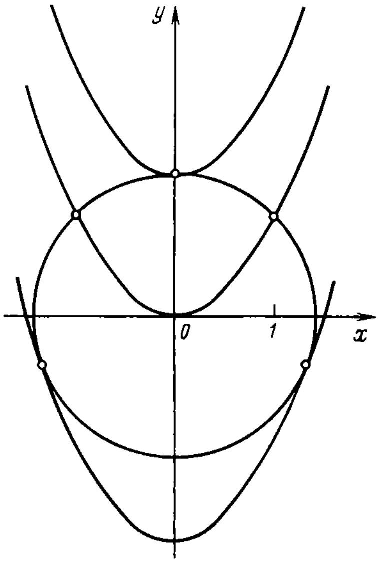


Рис. 5

Важным моментом при решении задачи является построение чертежа. Всякий чертеж к задаче по стереометрии есть проекция данной пространственной фигуры на некоторую плоскость. От выбора этой плоскости в огромной степени зависит наглядность чертежа. Например, если в какой-то задаче шар касается граней двугранного угла, бессмысленно давать чертеж в виде проекции на плоскость, параллельную ребру угла. На таком чертеже, кроме контура шара и ребра, ничего нельзя увидеть (рис. 6, *а*). Если же плоскость чертежа взять перпендикулярной ребру двугранного угла, будут отлично видны точки касания и легко определить расстояние от центра шара до ребра (в частности, видно, что шар никак не может касаться ребра); задача просто превратилась в планиметрическую (рис. 6, *б*).

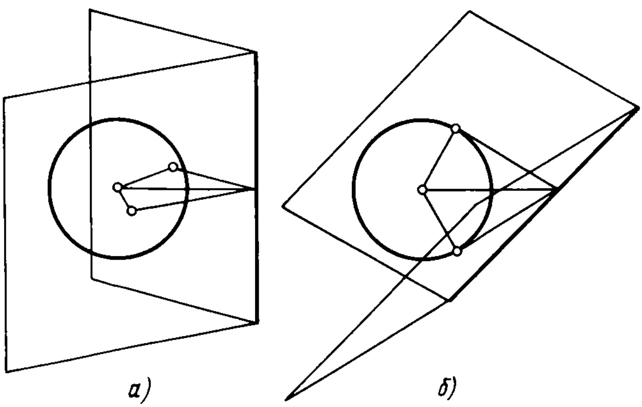


Рис. 6

Иногда целесообразно дать несколько чертежей, на которых выделить детали, наиболее существенные на том или ином этапе решения задачи (посмотреть на фигуру сверху, сбоку, выделить сечение). Если приходится определять соотношения между элементами плоской фигуры, которая на основном чертеже изображена с большими искажениями, то, чтобы избежать ошибок, надо дать отдельный рисунок этой фигуры. Очень часто чертеж какого-либо характерного сечения, например осевого или плоскостью симметрии, может полностью заменить пространственный чертеж.

Однако необходимо помнить, что плоский чертеж пространственной фигуры теряет некоторые свойства оригинала, в нем изменены длины отрезков, величины углов. Ссылаться при решении задач на какие-либо особенности, подмеченные в чертеже, нельзя. Чертеж не заменяет доказательства геометрического факта, а является лишь иллюстрацией к доказательству.

Рассмотрим основные комбинации геометрических тел, используемые в задачах.

1) Шар называется вписанным в цилиндр, если основания и каждая образующая цилиндра касаются шара. В этом случае цилиндр называют описанным около шара. Центр шара лежит на оси цилиндра, диаметр основания цилиндра равен диаметру шара и равен высоте цилиндра. Шар касается боковой поверхности цилиндра по большой окружности, плоскость которой параллельна основаниям. Касание шара оснований цилиндра происходит в их центрах.

Шар называют описанным около цилиндра, если основаниями цилиндра служат сечения шара. В этом случае цилиндр называют вписанным в шар (сферу). Центр шара совпадает с центром симметрии цилиндра. Окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара (сфере). Из ΔOAO_1 на рис. 7 видно, что радиус шара $R=OA$, радиус основания цилиндра $r=O_1A$ и высота цилиндра $H=O_1O_2$ связаны зависимостью

$$R^2=r^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2,$$

которая будет также использоваться для призм, вписанных в сферу.

2) Шар называют вписанным в конус, если основание и каждая образующая конуса касаются шара. В этом случае конус называют описанным около шара (рис. 8). Центр шара лежит на высоте конуса. Шар касается боковой поверхности конуса по окружности, плоскость которой параллельна основанию. Точкой касания шара и плоскости основания является центр основания. Из подобия треугольников ATO_1 и OTB вытекает, что радиус шара $r=OB$, радиус основания $R=O_1A$ и высота конуса $H=O_1T$ связаны зависимостью

$$\frac{H-r}{r}=\frac{\sqrt{H^2+R^2}}{R}.$$

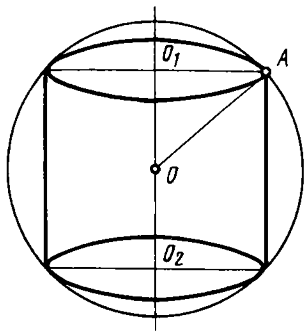


Рис. 7

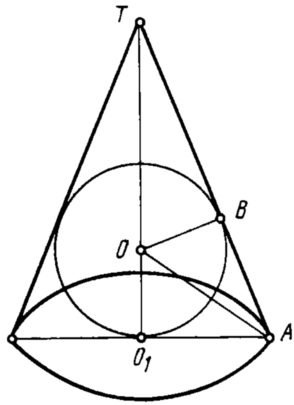


Рис. 8

Шар называют описанным около конуса, если основанием конуса служит сечение шара, а вершина конуса принадлежит поверхности шара (рис. 9). В этом случае конус называют вписанным в шар (сферу). Центр шара лежит на высоте конуса или на ее продолжении. Высота конуса принадлежит одному из диаметров шара. Радиус шара $R=OA$, высота $H=O_1T$ и радиус основания $r=O_1A$ конуса связаны зависимостью

$$H(2R-H)=r^2.$$

Эта формула получена из рассмотрения прямоугольного треугольника BTA, в котором

$$AO_1^2=TO_1\cdot O_1B,$$

или из прямоугольного треугольника AOO_1, в котором $AO=R$, $AO_1=r$ и $OO_1=|H-R|$. Так как $AO^2=AO_1^2+OO_1^2$, то $R^2=r^2+$ $+(H-R)^2$ и $H(2R-H)=r^2$.

3) Призма называется вписанной в цилиндр, если ее основания — многоугольники, вписанные в окружности оснований цилиндра. Призма прямая и ее высота равна высоте цилиндра. Основанием призмы должен быть многоугольник, вокруг которого можно описать окружность.

4) Пирамида называется вписанной в конус, если ее вершина совпадает с вершиной конуса, а основанием пирамиды является многоугольник, вписанный в окружность основания конуса. Высоты пирамиды и конуса совпадают, боковые ребра пирамиды являются образующими конуса и одинаково наклонены к основанию.

5) Шар называется вписанным в призму, если он касается оснований и всех боковых граней призмы.

Если в призму (не обязательно прямую) вписан шар, то высота призмы равна диаметру шара, а точки касания шара с боковыми гранями принадлежат плоскости, проходящей через центр шара

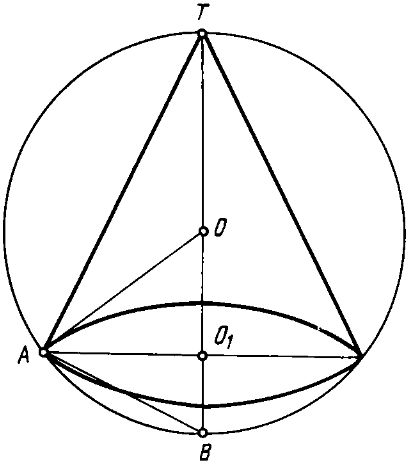


Рис. 9

перпендикулярно боковым ребрам, и расположены на большой окружности шара.

Призма называется вписанной в **шар (сферу)**, если все ее вершины принадлежат поверхности шара (сфере). В этом случае шар называют описанным около призмы.

Чтобы около призмы можно было описать шар (сферу), необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около основания призмы можно было описать окружность.

При этих же условиях вокруг призмы можно описать цилиндр, который, в свою очередь, вписан в шар. Следовательно, радиус шара R, радиус окружности r, описанной около основания призмы, и высота призмы H связаны зависимостью

$$R^2 = r^2 + \frac{H^2}{4}.$$

Например, если a — длина стороны основания правильной треугольной призмы, то

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad R^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{H^2}{4},$$

аналогично для правильной четырехугольной призмы $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $R^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{H^2}{4}$, а для шестиугольной $R^2 = a^2 + \frac{H^2}{4}$.

6) **Шар** называется вписанным в **пирамиду**, если он касается основания пирамиды и всех ее боковых граней. Центр шара, касающегося двух пересекающихся плоскостей, лежит в плоскости, которая делит на два равных угла двугранный угол, образованный этими плоскостями. Такая плоскость называется биссектором двугранного угла. Если в пирамиду вписан шар, то его центр является точкой пересечения биссекторов всех двугранных углов пирамиды.

Не во всякую пирамиду можно вписать шар. Это можно сделать, например, для любой треугольной пирамиды, для правильной пирамиды или для пирамиды, у которой двугранные углы при сторонах основания равны.

Пирамида называется вписанной в **шар**, если все ее вершины принадлежат поверхности шара (сфере). В этом случае говорят также, что пирамида вписана в сферу. Тогда шар называют описанным, а сферу описанной около пирамиды.

Чтобы около пирамиды можно было описать шар, необходимо и достаточно, чтобы около ее основания можно было описать окружность. Центр описанного шара лежит на перпендикуляре к основанию, проведенному через центр этой окружности.

Если около пирамиды описан шар, то его центр является точкой пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно к этим ребрам.

Если вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания, то около пирамиды можно описать конус, вписанный, в свою очередь, в шар. Следовательно, радиус шара R, радиус окружности r, описанной около основания пирамиды, и высота пирамиды (конуса) H связаны зависимостью

$$H(2R-H)=r^2.$$

Если a — длина стороны основания правильной треугольной пирамиды, то $r=a/\sqrt{3}$ и $H(2R-H)=a^2/3$; аналогично для правильной четырехугольной пирамиды $r=a/\sqrt{2}$ и $H(2R-H)=a^2/2$, а для шестиугольной $r=a$ и $H(2R-H)=a^2$.

Если рассматриваются комбинации геометрических тел, отличные от рассмотренных выше, в условии задачи должно быть точно описано их взаимное расположение.

Построение чертежа.

Чертеж к задаче по стереометрии представляет собой проекцию геометрического тела или комбинации тел на плоскость (обычно изображенную в некотором масштабе). Чаще всего используется фронтальная диметрия, при которой две оси (вертикальная и горизонтальная) располагаются в плоскости чертежа, а изображение третьей оси, перпендикулярной им, располагается на чертеже под углом 45° к горизонтали. Отрезки, параллельные первой или второй осям, откладываются в натуральную величину в направлении этих осей. Длины отрезков, параллельных третьей оси, принято уменьшать на чертеже в два раза. При этом способе построения сечение тела плоскостью, параллельной первым двум осям, дается на чертеже без искажений. Поэтому изображаемую фигуру надо расположить так, чтобы в плоскости, параллельной чертежу, оказались наиболее важные для решения элементы.

Для примера рассмотрим чертеж правильной треугольной пирамиды, в котором не искажается сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту и боковое ребро (рис. 10). Так как при этом будет сильно искажено основание пирамиды, начнем со вспомогательного чертежа — равностороннего треугольника ABC. На нем покажем высоту основания AD и его центр O. Затем на основном чертеже откладываем горизонтальный отрезок AD. Из точки O восстанавливаем перпендикуляр к AD, на котором откладываем высоту пирамиды PO. Через точку D проводим под углом 45° к горизонтали прямую. Каждый из отрезков DB и CD

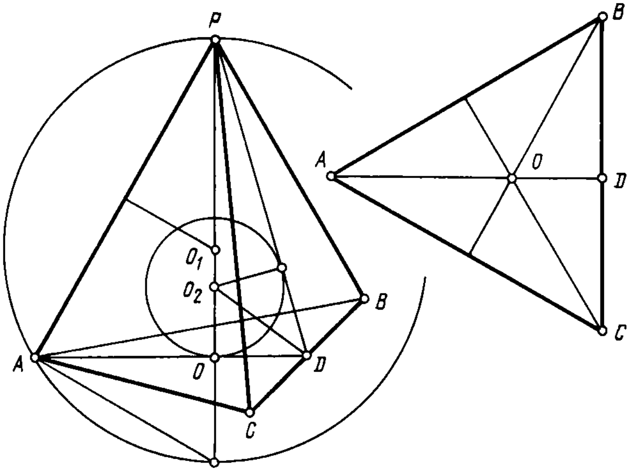


Рис. 10

откладываем на этой прямой с уменьшением в два раза. Затем рисуем ребра пирамиды, соединяя точки *A*, *B*, *C* и *P*.

При таком чертеже изображается без искажения сечение пирамиды плоскостью *APD*, в частности боковое ребро *AP*, апофема *PD*, высота пирамиды *PO*, а также угол между боковым ребром *AP* и основанием и линейный угол двугранного угла при стороне *BC* основания. Это дает возможность найти центр O_2 вписанного в пирамиду шара и центр O_1 шара, описанного около пирамиды. Точка O_2 лежит на пересечении высоты пирамиды *PO* и биссектрисы угла *PDO*. Точка O_1 находится на пересечении высоты *PO* и срединного перпендикуляра к ребру *AP*. В плоскости *APD* оказываются, таким образом, большие круги вписанного и описанного шаров, которые изображаются тоже без искажений.

В правильной четырехугольной пирамиде, как и во всех правильных пирамидах, имеющих в основании многоугольник с четным числом сторон, нельзя провести плоскость, которая проходила бы одновременно через высоту пирамиды, боковое ребро и апофему. Поэтому в зависимости от решаемой задачи целесообразно выбирать один из рассмотренных ниже способов построения чертежа.

На рис. 11, а в плоскости чертежа расположена одна из диагоналей основания и высота пирамиды, поэтому хорошо виден угол между боковым ребром *AP* и основанием. На этом чертеже удобно рисовать большую окружность описанного шара, проходящую через вершины пирамиды, и находить центр этого шара O_1. Из треугольника *PCK* можно установить зависимость между высотой пирамиды, диагональю основания и радиусом описанного шара.

Чтобы наглядно показать вписанный шар, нужно повернуть пирамиду так, чтобы плоскость чертежа была параллельна высоте

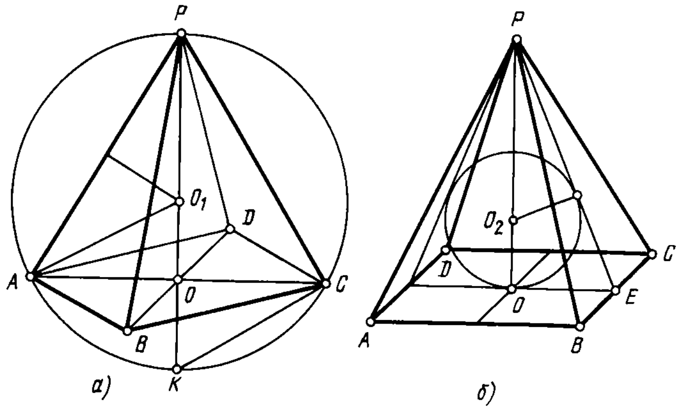


Рис. 11

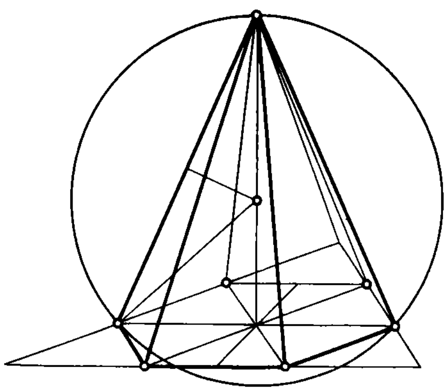


Рис. 12

пирамиды и апофеме (рис. 11, б). На этом чертеже без искажения показаны две стороны основания, линейные углы двугранных углов при двух других сторонах основания и большой круг вписанного шара, касающийся апофем пирамиды.

При построении чертежа правильной шестиугольной пирамиды (или призмы) удобно сначала изобразить правильный треугольник со стороной, в три раза большей стороны шестиугольника. Разделив каждую сторону треугольника на три равные части, примем точки деления за вершины шестиугольника (рис. 12). В плоскости чертежа на этом рисунке расположена диагональ основания шестиугольной пирамиды и ее высота. Здесь хорошо видна большая окружность описанного шара, проходящая через вершины пирамиды, и положение его центра.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА

Вариант № 1

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

2. Решите уравнение $\sin x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=0$.

3. Решите уравнение $9^x=6+3^x$.

4. Решите неравенство $\frac{3}{x+3}<1$.

5. В кубе с длиной ребра a расположен шар, касающийся трех граней, сходящихся в вершине A. Другой шар касается первого шара и трех граней, сходящихся в вершине C, где AC — диагональ грани куба. Найдите радиусы шаров, если известно, что они относятся друг к другу как $1:2$.

Ответы: **1.** За 15 и 18 с. **2.** $x=k\pi/2$, $k\in \mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(-\infty;\ -3)\bigcup\bigcup(0;\ +\infty)$. **5.** $a/5$; $2a/5$.

Вариант № 2

1. Рабочий A может окончить некоторую работу на 5 дней позже, чем рабочий B, и на 9 дней позже, чем рабочий C. Рабочие A и B, работая вместе, могут окончить эту работу во столько дней, во сколько ее может закончить рабочий C. Во сколько дней каждый рабочий в отдельности может закончить эту работу?

2. Решите уравнение $\sin 2x+\sin x=\cos x+\frac{1}{2}$.

3. Решите уравнение $\log_2\frac{x}{2}=1-\log_2(x+3)$.

4. При каких значениях параметра p функция $\ln((4-p)x^2-5x+ +\frac{5}{8}(1-p))$ определена при всех $x\in \mathbf{R}$?

5. Основание параллелепипеда — квадрат со стороной b, а одно из боковых ребер образует равные углы α со сторонами основания. Известно, что в параллелепипед можно вписать шар, касающийся всех его граней. Найдите длину бокового ребра параллелепипеда и радиус вписанного шара.

Ответы: **1.** 15, 10 и 6 дней. **2.** $x_1=(-1)^k\pi/6+k\pi$, $x_2=\pm 2\pi/3+ +2n\pi$, k, $n\in \mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $p<-1$. **5.** $b/\sin\alpha$; $b\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}/2$.

Вариант № 3

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 351, а сумма следующих трех членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

2. Решите уравнение $\sin x+\cos x=\cos 2x$.

3. Решите уравнение $8\cdot 9^x+6^{x+1}=27\cdot 4^x$.

4. Решите неравенство $\log_2\frac{x+1}{x}>1$.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c. Длины всех боковых ребер пирамиды одинаковы, а длина высоты боковой грани, проведенной

из вершины пирамиды к катету основания, равна длине катета. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

Ответы: **1.** $a=243$; $q=1/3$. **2.** $x_1=-\pi/4+n\pi$, $x_2=-\pi/2+2k\pi$, $x_3=2m\pi$, n, k, $m\in Z$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(0;\ 1)$. **5.** $\pi c^3(\sqrt{6}-1)^3/750$.

Вариант № 4

1. Пароход грузится подъемными кранами. Начали грузить четыре крана одинаковой мощности. Когда они проработали 2 ч, к ним присоединили еще два крана меньшей мощности, и после этого погрузка была окончена через 3 ч. Если бы все краны начали работать одновременно, то погрузка заняла бы 4,5 ч. Определите, во сколько часов мог бы загрузить пароход один кран большей мощности.

2. Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}}{3}+2\sin 2x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

3. Решите уравнение $\log_3 x=1-\log_3(2x+5)$.

4. Решите неравенство $\frac{2^x-4}{1-x}<0$.

5. Нижнее основание правильной шестиугольной призмы принадлежит верхней грани куба, а вершины ее верхнего основания расположены на сфере, описанной около куба. Найдите высоту призмы, если известно, что диагональ ее боковой грани составляет с боковым ребром угол 60°, а длина ребра куба равна a. Определите отношение площади полной поверхности призмы к площади сферы.

Ответы: **1.** 24 ч. **2.** $x=(-1)^k\pi/6+k\pi/2$, $k\in Z$. **3.** $\{1/2\}$. **4.** $(-\infty;\ 1)\bigcup(2;\ +\infty)$. **5.** $a/4$; $5\sqrt{3}/(16\pi)$.

Вариант № 5

1. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если вместо третьего числа поставить сумму трех чисел, а остальные числа оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите заданные числа, если известно, что второе из них равно 12.

2. Решите уравнение $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=8\operatorname{ctg}^2 2x$.

3. Решите уравнение $\lg\lg(x-1)=\lg\lg(2x+1)-\lg 2$.

4. Решите неравенство $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6}>0$.

5. В сферу вписана правильная треугольная призма, все ребра которой имеют одну и ту же длину a. Подобная ей призма одним основанием соприкасается с боковой гранью первой призмы, а вершины другого ее основания лежат на сфере. Найдите длину ребра второй призмы и ее объем.

Ответы: **1.** 4, 12, 20. **2.** $x_1=\pi/4+k\pi/2$, $x_2=\pm\pi/6+n\pi$, k, $n\in Z$. **3.** $\{4\}$. **4.** $[0;\ 4)\bigcup(9;\ +\infty)$. **5.** $\sqrt{3}a/4$; $9a^3/256$.

Вариант № 6

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 56, а сумма первых шести ее членов составляет 63. Найдите прогрессию.

2. Решите уравнение $1-\sin 5x=\left(\cos\frac{3}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)^2$.

3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+x+5}=1$.

4. Решите неравенство $\lg(x-2)+\lg(x-5)<\lg 4$.

5. Конус с высотой H вписан в сферу так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной треугольной призмы (параллельного основанию конуса) лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Найдите объем конуса, если радиус его основания равен стороне основания призмы и в $\sqrt{3/2}$ раз больше ее высоты.

Ответы: **1.** $q=1/2$, $a=32$. **2.** $x_1=\pi k$, $x_2=\pi(1+2n)/8$, $k, n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(5;\ 6)$. **5.** $\pi H^3/6$.

Вариант № 7

1. Найдите возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первого и третьего членов равна 14, а сумма их квадратов составляет 106.

2. Решите уравнение $\cos 2x+\cos 6x=1+\cos 8x$.

3. Решите уравнение $1+2\log_3 x=\log_3(6-7x)$.

4. Решите неравенство $\frac{2^x+8}{2^x-1}>2^x$.

5. В конус с радиусом основания R помещена правильная треугольная призма, у которой высота в два раза меньше длины ребра основания, равной $3R/4$. Все вершины нижнего основания призмы (параллельного основанию конуса) принадлежат сфере с центром в вершине конуса и касающейся основания конуса, а остальные ее вершины лежат на боковой поверхности конуса. Найдите объем конуса.

Ответы: **1.** $a=5$, $d=2$. **2.** $x_1=\pi(1+2k)/8$, $x_2=n\pi/3$, $k, n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{2/3\}$. **4.** $(0;\ 2)$. **5.** $\pi R^3\sqrt{3}/6$.

Вариант № 8

1. Расстояние от пункта A до пункта B равно 19 км. Из A в B выехал велосипедист. Через 15 мин в том же направлении выехал автомобиль. Через 10 мин после выхода он нагнал велосипедиста, доехал до B и, повернув обратно, встретил велосипедиста через 50 мин после своего выхода из A. Определите скорости велосипедиста и автомобиля.

2. Решите уравнение $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$.

3. Решите уравнение $2\cdot 4^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\sqrt{x}}+2=0$.

4. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{\log_{1/2} x}{3-x}}$.

5. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Верхняя грань куба принадлежит основанию пирамиды, а вершины противоположной его грани лежат на сфере. Найдите длину ребра куба, если она в три раза меньше длины стороны основания пирамиды. Определите отношение объема пирамиды к объему куба.

Ответы: **1.** 12 и 30 км/ч. **2.** $x_1=\pi(1+2k)/4$, $x_2=\pm 2\pi/3+2n\pi$, k, $n\in Z$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(0;\ 1]\bigcup(3;\ +\infty)$. **5.** $2\sqrt{3}R/9$, $9(1+\sqrt{3})/2$.

Вариант № 9

1. Найдите три числа, которые образуют возрастающую арифметическую прогрессию, если известно, что сумма их равна 30 и что если к ним прибавить соответственно 1, 2 и 9, то новые три числа образуют геометрическую прогрессию.

2. Решите уравнение $\cos 2x=1+\sin x$.

3. Решите уравнение $\log_2(4^x+1)=x+\log_2(2^{x+3}-6)$.

4. Решите неравенство $\sqrt{1-\log_{1/2} x}<2$.

5. Вершины основания правильной треугольной пирамиды лежат на сфере с центром в вершине пирамиды. Верхняя грань куба принадлежит основанию пирамиды, а вершины нижней грани лежат на сфере. Сторона основания пирамиды b в четыре раза больше ее высоты. Найдите длину ребра куба и отношение его объема к объему пирамиды.

Ответы: **1.** 5, 10, 15. **2.** $x_1=(-1)^{k+1}\pi/6+k\pi$, $x_2=n\pi$, k, $n\in Z$. **3.** $\{0\}$. **4.** $[0{,}5;\ 8)$. **5.** $b/3$, $16\sqrt{3}/27$.

Вариант № 10

1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, составленной из членов исходной бесконечной геометрической прогрессии, имеющих нечетные номера, в два раза больше суммы прогрессии, составленной из членов той же прогрессии, имеющих четные номера. Найдите исходную прогрессию, если сумма первых трех ее членов равна 21.

2. Решите уравнение $\log_8(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_2 x)))=\dfrac{1}{3}$.

3. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{3}(\cos x-1)=0$.

4. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x+4}{x-3}}$.

5. Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы объема v, имеющей наименьшую сумму длин всех ее ребер.

Ответы: **1.** $a=12$, $q=1/2$. **2.** $\{2\}$. **3.** $x_1=\pi/3+2k\pi$, $x_2=2n\pi$, k, $n\in Z$. **4.** $(3;\ +\infty)$. **5.** $(2+\sqrt{3})\sqrt[3]{4v^2}$.

Вариант № 11

1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна -12, а второй ее член на 27 больше первого. Найдите прогрессию.

2. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 2x}$.

3. Решите уравнение $\log_2(2^x - 2) = 3 - x$.

4. Решите неравенство $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.

5. Расстояние от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до бокового ребра равно a, а до боковой грани равно b. Найдите объем пирамиды.

Ответы: **1.** $a = -18$, $q = -1/2$. **2.** $x = \pi(6k-1)/12$, $k \in Z$. **3.** $\{2\}$. **4.** $(1;\ 3) \bigcup (3;\ 5)$. **5.** $2a^3b^3/(3(a^2-b^2)\sqrt{2b^2-a^2})$.

Вариант № 12

1. Все члены арифметической прогрессии — натуральные числа. Сумма ее девяти членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найдите прогрессию, если ее второй член равен 12.

2. Решите уравнение $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Решите уравнение $2^{x(x+2)-1/2} = 4\sqrt{2}\cdot 4^x$.

4. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\log_{2/3}(7-x) - 1}$.

5. В правильную четырехугольную пирамиду, диагональное сечение которой является правильным треугольником со стороной b, вписана правильная четырехугольная призма, боковые ребра которой параллельны диагонали основания пирамиды, одна боковая грань лежит в основании пирамиды, а вершины противоположной грани лежат на боковых гранях пирамиды. При какой высоте призмы ее объем будет наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответы: **1.** $a = 8$, $d = 4$. **2.** $x = \pi(1+3k)$, $k \in Z$. **3.** $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. **4.** $[19/3;\ 7)$. **5.** $b/3$, $4(2-\sqrt{3})^2 b^3/9$.

Вариант № 13

1. Найдите бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой в 3 раза больше суммы прогрессии, составленной из квадратов ее членов, а сумма первого и второго членов равна 0,75.

2. Решите уравнение $2\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 1 = 0$.

3. Решите уравнение $4\cdot 9^x + 5\cdot 12^x = 6\cdot 16^x$.

4. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{\log_2(x+1)}{x-1}}$.

5. В конус с радиусом основания R и осевым сечением, являющимся правильным треугольником, вписана правильная треугольная призма наибольшей площади боковой поверхности, у которой вершины одной боковой грани лежат в плоскости основания конуса, а две остальные вершины лежат на боковой поверхности конуса. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Ответы: **1.** $a=1/2$, $q=1/2$. **2.** $x_1=3\pi(4k-1)$, $x_2=6n\pi$, k, $n\in \mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(-1;\ 0]\bigcup(1;\ +\infty)$. **5.** $(3+\sqrt{3}/2)R^2$.

Вариант № 14

1. Вычислите $1-\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^3\frac{\pi}{6}+\ldots+(-1)^{n-1}\cos^{n-1}\frac{\pi}{6}+\ldots$

2. Решите уравнение $2\sin x\cdot\cos 2x=\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Решите уравнение $3\cdot 9^{x^2+1}-5\cdot 3^{x^2+2}+18=0$.

4. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{1+\log_{1/2}x}$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна a. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A и C_1 (AC_1 — диагональ куба) и середины параллельных ребер AA_1 и BB_1.

Ответы: **1.** $4-2\sqrt{3}$. **2.** $x=(-1)^k\pi/3+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{0\}$. **4.** $(0;\ 2)$. **5.** $a\sqrt{14}/4$.

Вариант № 15

1. Пароход прошел 4 км против течения реки и затем прошел еще 33 км по течению, затратив на все 1 ч. Найдите скорость парохода в стоячей воде, если скорость течения реки равна 6,5 км/ч.

2. Решите уравнение

$$\sin\frac{x}{2}\cos\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)+\sin\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=4x^3-9x^2-12x$ на промежутке $[-1;\ 1]$.

4. Решите неравенство

$$(x+2)\lg x<0.$$

5. В прямой призме с квадратным основанием боковое ребро равно диагонали основания. На какие части делится диагональ призмы основаниями перпендикуляров, опущенных на нее из всех вершин призмы?

Ответы: **1.** 32,5 км/ч. **2.** $x=\pi/2+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\max f(x)=f(-0,5)=13/4$, $\min f(x)=f(1)=-17$. **4.** $(0;\ 1)$. **5.** На 4 отрезка равной длины.

Вариант № 16

1. Сумма квадратов двух положительных чисел равна 300. Подберите эти числа так, чтобы произведение одного их них на квадрат другого было наибольшим.

2. Решите уравнение $\cos 5x - \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos(4x + 3\pi)$.

3. Решите уравнение $\frac{15}{10^x - 2} = 10^x$.

4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} - 6} > 0$.

5. Внутри шара радиуса R расположены четыре меньших шара одинакового радиуса, каждый из которых касается трех других и поверхности большого шара. Найдите радиус меньших шаров.

Ответы: **1.** 10, $10\sqrt{2}$. **2.** $x_1 = \pi(1 + 2k)/8$, $x_2 = \pm 3\pi/4 + 2n\pi$, k, $n \in Z$. **3.** $\{\lg 5\}$. **4.** $[0;\ 1) \bigcup (4;\ +\infty)$. **5.** $(\sqrt{6} - 2)R$.

Вариант № 17

1. Первый член бесконечной геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов как 4:3. Найдите прогрессию, если ее сумма равна 10.

2. Найдите экстремум функции $y = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8} - \cos 2x - \sqrt{2}\,x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и определите его тип.

3. Решите уравнение $\frac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x} = 1$.

4. Решите неравенство $\frac{4}{x + 2} < 1$.

5. В куб с ребром a вписана правильная шестиугольная призма, так что диагональ куба проходит через центры оснований призмы и на каждой грани куба лежат по две вершины призмы. Найдите высоту призмы, при которой ее объем будет наибольшим. Какую по объему часть куба занимает при этом призма?

Ответы: **1.** $a = 5$, $q = 1/2$. **2.** $y(3\pi/8) = \sqrt{2}/2$ — максимум. **3.** $\{0\}$. **4.** $(-\infty;\ -2) \bigcup (2;\ +\infty)$. **5.** $a/\sqrt{3}$, $1/3$.

Вариант № 18

1. Найдите координаты точки пересечения касательных, проведенных к графику функции $y = x(4 - x)$ в точках с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Сделайте рисунок.

2. Решите уравнение $\frac{2}{3}\cos^2 x + \sin x = 1$.

3. Решите уравнение $0{,}5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1$.

4. Решите неравенство $\frac{x-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}-3}<1$.

5. Прямоугольный треугольник, имеющий сумму длин катетов p, вращается вокруг одного их них. Какими должны быть длины катетов, чтобы объем полученного при вращении конуса был наибольшим? Найдите этот объем.

Ответы: **1.** $C(1;\ 7)$. **2.** $x_1=\pi/2+2n\pi$, $x_2=(-1)^k\pi/6+k\pi$, n, $k\in Z$. **3.** $\{13\}$. **4.** $[0;\ 9)$. **5.** $2p/3$, $p/3$, $4\pi p^3/81$.

Вариант № 19

1. Две машинистки вместе напечатали 65 страниц, причем первая работала на час больше второй. Вторая машинистка печатает в час на 2 страницы больше первой; напечатала она на 5 страниц больше. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка?

2. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos^2 x=\sin^2 x$.

3. Решите уравнение $\log_5\frac{125}{30-5^{2x}}=2x$.

4. Решите неравенство $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)}>8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$.

5. В сферу вписана правильная шестиугольная призма, боковые грани которой — квадраты с длиной стороны a. Вершины верхнего основания правильной четырехугольной призмы принадлежит сфере, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания данной шестиугольной призмы. Какой должна быть высота четырехугольной призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответы: **1.** 5 с., 7 с. **2.** $x_1=\pi(1+2k)/5$, $x_2=\pi(1+2n)$, k, $n\in Z$. **3.** $\{1;\ 1/2\}$. **4.** $(-\infty;\ -3)\bigcup(2;\ +\infty)$. **5.** $a/3$, $10a^3/27$.

Вариант № 20

1. Представьте число 48 в виде суммы двух таких положительных слагаемых, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

2. Решите уравнение

$$\cos 7x+\sin\left(3x+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(5x-\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Решите уравнение $4^{x^2+1}-9\cdot 2^{x^2}+2=0$.

4. Решите неравенство $x-4<\sqrt{x-2}$.

5. На плоскости лежат три шара радиуса R, касающиеся друг друга. Между ними, касаясь этих шаров и плоскости, лежит шар меньшего радиуса. Найдите его объем.

Ответы: **1.** $128/3+16/3$. **2.** $x_1=\pi(1+2k)/10$, $x_2=\pm\pi/3+n\pi$, k, $n\in Z$. **3.** $\{1;\ -1\}$. **4.** $[2;\ 6)$. **5.** $4\pi R^3/81$.

Вариант № 21

1. Из точки A, лежащей на окружности, выходят одновременно два тела, движущиеся равномерно по этой окружности в противоположных направлениях. Через некоторое время они встретились, и оказалось, что первое тело прошло на 10 см больше второго. После встречи тела продолжали путь, причем первое тело пришло в точку A через 9 с, а второе — через 16 с после встречи. Найдите длину окружности, по которой двигались тела.

2. Решите уравнение $7\sin x+2=4\sin^2 x$.

3. Решите уравнение $x\sqrt[5]{x}+6=5\sqrt[5]{x^3}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\log_{1/2} x}{x-3}<0$.

5. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого основания принадлежат поверхности этого шара. Определите высоту призмы, при которой сумма длин всех ее ребер будет наибольшей.

Ответы: **1.** 70 см. **2.** $x=(-1)^{k+1}\arcsin(1/4)+k\pi$, $k\in Z$. **3.** $\{3\sqrt[3]{9};\ 2\sqrt[3]{4}\}$. **4.** $(0;\ 1)\cup(3;\ +\infty)$. **5.** $R/\sqrt{13}$.

Вариант № 22

1. В арифметической прогрессии 12 членов, их сумма равна 354. Сумма членов с четными номерами относится к сумме членов с нечетными номерами как 32 : 27. Определите разность прогрессии.

2. Решите уравнение $\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x=\dfrac{1}{8}$.

3. Решите уравнение $x-6\sqrt{x}=7$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\ln(2x)-x^2+x$ на промежутке $\left[\dfrac{1}{2};\ 2\right]$.

5. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами, соответственно равными α и β. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проведенной через диагонали двух смежных боковых граней параллелепипеда.

Ответы: **1.** $d=5$. **2.** $x=(-1)^k\pi/24+k\pi/4$, $k\in Z$. **3.** $\{49\}$. **4.** $\max y(x)=\ln 2$, $\min y(x)=2(\ln 2-1)$. **5.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}$.

Вариант № 23

1. Бригада должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла по

8 м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Сколько кубических метров древесины в день должна была бригада заготовлять по плану?

2. Решите уравнение $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=1-\frac{3}{2}\cos^2\frac{x}{2}$.

3. Решите уравнение $\lg\left(x+\frac{3}{2}\right)=-\lg x$.

4. Решите неравенство $\frac{1-2x}{x-5}<\frac{1}{3-x}$.

5. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине равен 2α, а боковые стороны равны a. Найдите объем пирамиды, если у всех боковых граней высоты, опущенные из вершины пирамиды на стороны основания, равны h.

Ответы: **1.** 24 м^3. **2.** $x_1=\pm 2\pi/3+2k\pi$, $x_2=\pi(1+2n)$, k, $n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\{1/2\}$. **4.** $(-\infty;\ 2)\bigcup(2;\ 3)\bigcup(5;\ +\infty)$.
5. $a^2\sin 2\alpha\sqrt{h^2-a^2\operatorname{tg}^2\alpha\,(1-\sin\alpha)^2}/6$.

Вариант № 24

1. Найдите бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна 8/3, а сумма прогрессии, составленной из квадратов ее членов, в 8 раз больше.

2. Решите уравнение $\cos\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{2}=1$.

3. Решите уравнение $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$.

4. При каких значениях параметра p функция $\sqrt{(3p+1)\,x-p\,(4+\ +x^2)}$ определена при всех $x\in R$?

5. В конус с радиусом основания R и осевым сечением, являющимся правильным треугольником, вписана правильная треугольная призма наибольшего объема, так что вершины одной ее боковой грани лежат в плоскости основания конуса, а две остальные вершины лежат на его боковой поверхности. Найдите объем призмы.

Ответы: **1.** $a=4$, $q=-1/2$. **2.** $x_1=2\pi(1+2k)$, $x_2=\pm 4\pi/3+8n\pi$, k, $n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\{0;\ 1\}$. **4.** $p\leqslant -1/7$. **5.** $8\sqrt{3}R^3/27$.

Вариант № 25

1. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 65, а сумма третьего и четвертого членов равна 30. Найдите первый член и разность прогрессии.

2. Решите уравнение $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Решите уравнение $16^{x+1/2}=15\cdot 4^x+4$.

4. Решите неравенство $\lg(x-3)+\lg x<\lg\left(\frac{9}{2}x+4\right)$.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором AA_1 — одно из ребер. Через вершину A, середину ребра A_1D_1 и центр грани D_1DCC_1 проведена плоскость. Найдите площадь сечения куба этой плоскостью, если длина ребра куба равна a. Определите величины углов между секущей плоскостью и гранями куба. На какие по объему части делится куб секущей плоскостью?

Ответы: **1.** $a=5$, $d=4$. **2.** $x=(-1)^{k+1}\pi/2+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** (3; 8). **5.** $a^2\sqrt{14}/4$; $\arccos(1/\sqrt{14})$, $\arccos(2/\sqrt{14})$, arscos$(3/\sqrt{14})$; 7/29.

Вариант № 26

1. Найдите сумму первых 25 членов арифметической прогрессии, в которой тринадцатый член равен 15.

2. Решите уравнение $\cos^2 3x+\cos 2x=6\sin^2 x-\sin^2 3x$.

3. Решите уравнение $\log_3(3^x-2)=1-x$.

4. Решите неравенство $\log_2(x+\sqrt{x}-2)<2$.

5. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Другой шар касается всех боковых граней пирамиды и первого шара. Расстояние между центрами шаров равно $2l$. Какими должны быть радиусы шаров, чтобы пирамида имела наименьший объем?

Ответы: **1.** 375. **2.** $x=\pm\pi/6+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** (1; 4). **5.** $\sqrt{2/3}\,l$, $(2-\sqrt{2/3})\,l$.

Вариант № 27

1. Сумма первого и третьего членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма второго и четвертого членов равна 16. Найдите прогрессию.

2. Решите уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

3. Решите уравнение $\lg 2+\lg(4^{-x^2}+9)=1+\lg(2^{-x^2}+1)$.

4. Решите неравенство $\log_2(x+1)>1+\log_2 x$.

5. В основании пирамиды лежит ромб. Высота пирамиды проходит через центр ромба. Боковая грань пирамиды образует углы α и β с диагоналями ромба. Найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

Ответы: **1.** $a=2$, $d=3$. **2.** $x=\pm\pi/3+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{0\}$. **4.** (0; 1). **5.** $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$.

Вариант № 28

1. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу один из пункта A в пункт B, другой из B в A. После встречи один из них находился в пути еще 2 ч, а другой 9/8 ч. Определите скорости автомобилей, если расстояние между A и B равно 210 км.

2. Решите уравнение $\sin^2 x-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x\cos x=\frac{1}{2}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\ln(2x)-6x^2+11x$ на промежутке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

4. Решите неравенство $\log_3(2^{2x-1}-3\cdot 2^{x-1}+1)<1$.

5. В правильной треугольной призме, боковое ребро которой равно a, расположен шар радиуса $7a/16$, касающийся трех боковых граней и одного из оснований. Другой шар расположен так, что он касается первого шара, другого основания и двух боковых граней. Найдите радиус второго шара.

Ответы: **1.** 60 и 80 км/ч. **2.** $x=-\pi/6+k\pi/2$, $k\in Z$. **3.** $y(1)=5+\ln 2$ — наибольшее, $y(2)=2(\ln 2-1)$ — наименьшее значение. **4.** $(-\infty;\ 0)\bigcup(1;\ 2)$. **5.** $3a/16$.

Вариант № 29

1. Сколько нужно взять членов прогрессии 105, 98, 91, ... , чтобы их сумма была равна нулю?

2. Решите уравнение $\cos 3x-\sin\left(7x-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

3. Решите уравнение $x-\sqrt{x+2}=4$.

4. Решите неравенство $\frac{\log_3(4-x)}{x-2}<0$.

5. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a и боковым ребром l пересекается плоскостью, проходящей через высоту основания параллельно боковому ребру пирамиды, не пересекающему эту высоту. Найдите площадь сечения и угол между секущей плоскостью и плоскостью основания.

Ответы: **1.** 31. **2.** $x_1=\pi(1+2k)/10$, $x_2=\pi(1+2n)/4$, $k,\ n\in Z$. **3.** $\{7\}$. **4.** $(-\infty;\ 2)\bigcup(3;\ 4)$. **5.** $a\sqrt{12l^2-a^2}/16$, $\operatorname{arctg}(2\sqrt{(l/a)^2-1/3})$.

Вариант № 30

1. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из них, работая отдельно еще 40 дней, может закончить эту работу. За сколько дней каждый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу?

2. Решите уравнение $\sin x+\cos 4x=\sin 7x$.

3. Решите уравнение $8\cdot 64^{1/x}-3\cdot 2^{3+3/x}+16=0$.

4. Решите неравенство $(\log_{1/2}x)^2+\log_{1/2}x-2\geqslant 0$.

5. В куб с ребром a вписан цилиндр, ось которого лежит на диагонали куба, а окружности оснований касаются граней. Найдите высоту цилиндра, при которой он будет иметь наибольший объем. Определите это наибольшее значение объема цилиндра.

Ответы: **1.** 50 и 75 дней. **2.** $x_1=(-1)^k\pi/18+k\pi/3$, $x_2=\pi(1+2n)/8$, $k,\ n\in Z$. **3.** $\{3\}$. **4.** $(0;\ 1/2]\bigcup[4;\ +\infty)$. **5.** $a/\sqrt{3}$, $\pi a^3\sqrt{3}/18$.

Вариант № 31

1. По плану одной бригаде нужно изготовить на 600 изделий больше, чем другой за то же время. Чтобы каждая бригада выполнила свой план на 2 дня раньше, в первую бригаду добавили 4 человека, а во вторую 3. Сколько рабочих было в каждой бригаде во время работы, если каждый из них изготовлял в среднем по 15 изделий в день?

2. Решите уравнение $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

3. Решите уравнение $1-x\log_6 2=\log_6(2^x+1)$.

4. Решите неравенство $\frac{2^x-1}{x-2}<0$.

5. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. В пирамиду вписана прямая призма, одно основание которой лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого лежат на боковых ребрах пирамиды. Какими должны быть высота пирамиды и высота призмы, чтобы объем призмы был наибольшим? Найдите это значение объема. Покажите, что при этом пирамида также должна иметь наибольший объем.

Ответы: **1.** 20 и 15 рабочих. **2.** $x=(-1)^k\pi/6+k\pi/2,\ k\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(0;\ 2)$. **5.** $4R/3,\ 4R/9,\ 32\sqrt{3}R^3/243$.

Вариант № 32

1. Бассейн, содержавший 30 м^3 воды, сначала был опорожнен, а затем снова заполнен до прежнего уровня. На все это потребовалось 8 ч. Сколько времени шло заполнение бассейна, если при наполнении насос перекачивает в час на 4 м^3 воды меньше, чем при опорожнении?

2. Решите уравнение $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0$.

3. Решите уравнение $16^{1/x}-20\cdot 2^{2/x-2}+4=0$.

4. Решите неравенство $x\log_2(x+2)>0$.

5. Середина бокового ребра правильной треугольной пирамиды находится на расстоянии d от высоты основания, не пересекающей это боковое ребро. При какой длине стороны основания пирамиды она будет иметь наибольшую площадь боковой поверхности? Найдите это значение площади.

Ответы: **1.** 5 ч. **2.** $x_1=k\pi/2,\ x_2=\pm 2\pi/3+2n\pi,\ k,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(-2;\ -1)\bigcup(0;\ +\infty)$. **5.** $2\sqrt{3}d,\ 3\sqrt{6}d^2$.

Вариант № 33

1. Вычислите площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции

$$y=5+2x-x^2$$

в точках с абсциссами $x_1=1$ и $x_2=3$, и прямой, соединяющей эти точки касания. Постройте чертеж.

2. Решите уравнение $\sin^2 2x+\sin^2 x=1$.

3. Решите уравнение $\frac{3}{5^x-2}=5^{x-1}$.

4. Решите неравенство $\frac{1}{1-\lg x}<\frac{2\lg x-5}{1+\lg x}$.

5. Одно основание правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны h, принадлежит основанию правильной шестиугольной пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. При какой высоте пирамиды объем вписанного в нее шара будет наибольшим? Найдите это значение объема шара. Определите отношение объемов пирамиды и шара.

Ответы: **1.** 2 ед^2. **2.** $x_1=\pi/2+k\pi$, $x_2=\pm\pi/6+n\pi$, k, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(0;\ 0{,}1)\bigcup(10;\ \infty)$. **5.** $7h$, $343\pi h^3/384$, $16/(\pi\sqrt{3})$.

Вариант № 34

1. Два поезда выходят одновременно из пунктов M и N, расстояние между которыми 45 км, и встречаются через 20 мин. Поезд, вышедший из пункта M, прибывает в пункт N на 9 мин раньше, чем другой поезд в M. Какова скорость каждого поезда?

2. Решите уравнение $\sin^2 x+3\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=0$.

3. Решите уравнение $2\cdot 4^{\log_2 x}=7x+4$.

4. Решите неравенство $2+\frac{\log_2^2 x}{1+\log_2 x}>\log_2 x$.

5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Второй шар, имеющий радиус r, касается первого шара и всех боковых граней. При каком радиусе первого шара пирамида имеет наименьший объем? Найдите отношение объема пирамиды к объему первого шара в этом случае.

Ответы: **1.** 5/4 и 1 км/мин. **2.** $x=(-1)^{k+1}\pi/3+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{4\}$. **4.** $(0;\ 1/4)\bigcup(1/2;\ +\infty)$. **5.** $5r/4$, $25/(2\pi)$.

Вариант № 35

1. Два вертолета одновременно вылетели навстречу друг другу из городов A и B. Через 15 мин после вылета они встретились и, не останавливаясь, продолжали путь. Первый прибыл в город B на 40 мин раньше, чем второй прибыл в город A. Сколько времени потребовалось первому вертолету на путь из A в B?

2. Решите уравнение $\sin x+\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin(3x+\pi)$.

3. Решите уравнение $\lg\left(\frac{3}{4}x+1\right)=-\lg x$.

4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0$.

5. Правильная треугольная призма, у которой высота и радиус окружности, описанной около основания, равны a, вписана в сферу. Вершины верхнего основания правильной четырёхугольной призмы принадлежат этой сфере, а её нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания данной треугольной призмы. Какой должна быть высота четырёхугольной призмы, чтобы её объём был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объёма.

Ответы: **1.** 20 мин. **2.** $x_1=k\pi/3$, $x_2=\pm 5\pi/12+n\pi$, $k, n\in Z$. **3.** $\{2/3\}$. **4.** $(-3/2;\ -1/2)\bigcup(1;\ +\infty)$. **5.** $a/3$, $10a^3/27$.

Вариант № 36

1. Найдите три числа, которые образуют убывающую арифметическую прогрессию, если известно, что сумма их равна 42 и что если первое число оставить без изменения, от второго отнять 2, а к третьему прибавить 2, то новые три числа образуют геометрическую прогрессию.

2. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{3}(\cos x+1)=0$.

3. Решите уравнение $3(3^{\sqrt{x}}+3^{-\sqrt{x}})=10$.

4. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{12+x-x^2}{\log_{1/2}x}}$.

5. В сферу вписана правильная четырёхугольная пирамида, в пирамиду вписан цилиндр, у которого одно из оснований лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность другого основания касается боковых граней. Высота цилиндра и радиус его основания равны a. При какой высоте пирамиды радиус описанной около нее сферы будет наименьшим? Найдите это наименьшее значение радиуса.

Ответы: **1.** 24, 14, 4. **2.** $x_1=\pi(1+2n)$, $x_2=-2\pi/3+2k\pi$, n, $k\in \mathbf{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(0;\ 1)\bigcup[4;\ +\infty)$. **5.** $3a$; $9a/4$.

Вариант № 37

1. Две автомашины разной грузоподъемности перевозили удобрения, делая одинаковое число рейсов. Оказалось, что на первую машину можно грузить на 4 т меньше, а на вторую на 3 т меньше, чем планировалось, поэтому каждой машине пришлось сделать по 10 лишних рейсов. При этом, как и предполагалось по плану, первая машина перевезла на 60 т больше, чем вторая. Какова грузоподъемность машин и сколько рейсов планировалось?

2. Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2 x=\sin x$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=9x+3x^2-x^3$ на промежутке $[-2;\ 2]$.

4. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $p\cdot 4^{x+1}-(3p+1)\cdot 2^x+p=0$ не имеет решений.

5. В правильной четырехугольной пирамиде с высотой H центры вписанного и описанного шаров совпадают. Найдите объемы пирамиды, описанного и вписанного шаров.

Ответы: **1.** 12 т, 9 т; 20 рейсов. **2.** $x=(-1)^k\pi/3+k\pi$, $k\in \mathbf{Z}$. **3.** $\min f(x)=f(-1)=-5$, $\max f(x)=f(2)=22$. **4.** $(-\infty; 0]\bigcup(1; +\infty)$. **5.** $2(\sqrt{2}-1)H^3/3$, $\sqrt{2}\pi H^3/3$, $\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}-1)^3H^3/3$.

Вариант № 38

1. Два грузовых автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже и, когда он прибыл на место погрузки, первый перевез уже 0,6 всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль; весь груз был перевезен таким образом за 12 ч. Сколько времени нужно было бы каждому автомобилю в отдельности для перевозки всего груза?

2. Решите уравнение $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$.

3. Решите уравнение $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2$.

4. Решите неравенство $\dfrac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}>0$.

5. В конус с высотой H и радиусом основания R вписана правильная треугольная призма, нижнее основание которой лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Вершины верхнего основания другой призмы, подобной первой, принадлежат боковой поверхности конуса, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания первой призмы. При какой высоте первой призмы вторая призма имеет наибольший объем? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответы: **1.** 12 и 12 ч или 10 и 15 ч. **2.** $x_1=\pi/2+$ $+n\pi$, $x_2=(-1)^k\pi/3+k\pi$, n, $k\in \mathbf{Z}$. **3.** $\{9/2\}$. **4.** $(-1; 1)$. **5.** $H/6$, $\sqrt{3}\,(5/6)^5R^2H/8$.

Вариант № 39

1. Разность первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма второго и третьего равна 20. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

2. Решите уравнение $2\sin x-\cos x=1-\sin 2x$.

3. Решите уравнение $2\cdot 81^x-3\cdot 16^x=36^x$.

4. Решите неравенство $\log_3\dfrac{1+2x}{x}>0$.

5. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a. Высота пирамиды равна $3a/4$ и проходит через середину одной из сторон основания. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

Ответы: **1.** 18, 2/3. **2.** $x_1=\pi(1+2k)$, $x_2=(-1)^n\pi/6+n\pi$, k, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{1/2\}$. **4.** $(-\infty;\ -1)\bigcup(0;+\infty)$. **5.** $a\sqrt{3}(2\sqrt{3}-1)/22$.

Вариант № 40

1. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y=1+x+x^2$, $y=(x^2+3)/2$. Сделайте чертеж.

2. Решите уравнение $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=16\cos^3 2x$.

3. Решите уравнение $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=\log_2\left(\frac{5}{2}x-2\right)$.

4. Решите неравенство $\frac{x^2+|x|-2}{x^2+|x|-6}>0$.

5. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиуса R. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, если расстояние от его центра до центра сферы, описанной около пирамиды, равно d. При каком значении d (при заданном R) радиус вписанного шара будет наибольшим? Какую часть объема пирамиды будет занимать вписанный шар в этом случае?

Ответы: **1.** $y=x+1$; $y=-3(x+1)$. **2.** $x_1=\pi/4+n\pi/2$, $x_2=\pi/8+k\pi/4$, $n,k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{2\}$. **4.** $(-\infty;\ -2)\bigcup(-1;\ 1)\bigcup(2;\ +\infty)$. **5.** $r=(\sqrt{4R^2-3d^2}-R)/3$, $d=0$, $\pi\sqrt{3}/18$.

Вариант № 41

1. Из пункта A кольцевой трассы длиной 24 км выехал велосипедист, а через 20 мин в том же направлении выехал мотоциклист. Через 10 мин после выхода он нагнал велосипедиста, а еще через 30 мин нагнал его вторично. Определите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

2. Решите уравнение $2\cos x+\sin x=1+\sin 2x$.

3. Решите уравнение $81^{|x|}+16^{|x|}=\frac{13}{6}\cdot 36^{|x|}$.

4. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(p-1)\cdot 4^x-4\cdot 2^x+(p+2)=0$ имеет хотя бы одно решение.

5. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a вписана в сферу, при этом центр сферы делит высоту пирамиды в отношении $\sqrt{5}:1$, считая от вершины. Верхнее основание правильной четырехугольной призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины ее нижнего основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это значение объема.

Ответы: **1.** 24 и 72 км/ч. **2.** $x_1=\pm\pi/3+2n\pi$, $x_2=\pi/2+2k\pi$, n, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{\pm 1/2\}$. **4.** $(-2;\ 2]$. **5.** $a\sqrt{3}/9$, $10\sqrt{3}a^3/243$.

Вариант № 42

1. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой сумма первых четырех членов равна 40, а сумма членов от четвертого до седьмого включительно равна 1080.

2. Решите уравнение $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$.

3. Решите уравнение $\dfrac{1-\log_3(x^2+3)}{1-\log_3(x+3)}=2$.

4. Решите неравенство $2\cdot 4^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\sqrt{x}}+2<0$.

5. Высота H правильной четырехугольной пирамиды равна стороне основания. Нижнее основание правильной четырехугольной призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на медианах боковых граней пирамиды, проведенных из вершин основания к боковым ребрам пирамиды. Какой должна быть высота призмы, чтобы длина ее диагонали была наименьшей? Найдите это наименьшее значение длины диагонали.

Ответы: **1.** $b=1$, $q=3$. **2.** $x_1=\pi(1+2k)/8$, $x_2=\pm\pi/3+n\pi$, k, $n\in Z$. **3.** $\{3\}$. **4.** $[0;\ 1)$. **5.** $4H/11$, $\sqrt{6/11}H$.

Вариант № 43

1. Вычислите площадь треугольника, образованного тремя касательными, проведенными к графику функции

$$y=1+x-x^2/2$$

в точках с абсциссами $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=6$ соответственно.

2. Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$.

3. Решите уравнение $9^{x+1}+3^{x+2}-18=0$.

4. Решите неравенство $\lg(x-4)+\lg x<\lg 21$.

5. В правильной четырехугольной призме со стороной основания a и высотой $0{,}8a$ расположен шар радиуса $0{,}25a$, касающийся трех граней, сходящихся в вершине A. Второй шар, расположенный в призме, касается первого шара и всех граней, сходящихся в вершине C', где AC' — диагональ призмы. Найдите радиус второго шара.

Ответы: **1.** 16 ед^2. **2.** $x=((-1)^k-1)\,\pi/6+k\pi$, $k\in Z$. **3.** $\{0\}$. **4.** $(4;\ 7)$. **5.** $0{,}35a$.

Вариант № 44

1. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии равна 65, а сумма третьего и четвертого членов равна 30. Найдите прогрессию.

2. Решите уравнение $2-\cos 2x+5\cos x=0$.

3. Решите уравнение $4^{1/x+x}-5\cdot 2^{1/x+x}+4=0$.

4. Решите неравенство $\log_2(2^x-2)<3-x$.

5. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, высота которой равна стороне основания. Между боковой гранью пирамиды и сферой расположена правильная треугольная призма, одно из оснований которой (ближнее к центру сферы) лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это значение объема.

Ответы: **1.** $a=5$, $d=4$. **2.** $x=\pm 2\pi/3+2k\pi$, $k\in Z$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(1;\ 2)$. **5.** $2\sqrt{5}R/15$, $2\sqrt{15}R^3/45$.

Вариант № 45

1. Лесовозы разной вместимости должны делать одинаковое число рейсов за смену, при этом первый должен перевезти на 40 м^3 древесины больше, чем второй. На первый лесовоз грузили на 4 м^3, а на второй на 3 м^3 больше нормы, поэтому каждый водитель выполнил свой план, сделав на два рейса меньше. Определите вместимость машин и количество рейсов при нормальной загрузке.

2. Решите уравнение $1-\cos x+\cos 2x-\cos 3x=0$.

3. Решите уравнение $1+2\log_3 x=\log_3(2x+1)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{1}{4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2}<\dfrac{1}{6}$.

5. В правильную треугольную пирамиду с высотой H вписана правильная треугольная призма со стороной основания a, так что ее нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Нижнее основание второй призмы, подобной первой, принадлежит верхнему основанию первой призмы, а вершины верхнего основания тоже лежат на боковых ребрах пирамиды. При какой высоте первой призмы вторая призма имеет наибольший объем? Найдите отношение объема пирамиды к объему второй призмы в этом случае.

Ответы: **1.** 16 и 12 м^3, 10 рейсов. **2.** $x_1=\pi/2+k\pi$, $x_2=2n\pi/3$, k, $n\in Z$. **3.** $\{1\}$. **4.** $(0;\ 1)\bigcup(4;\ +\infty)$. **5.** $H/4$, $(4/3)^6$.

Вариант № 46

1. На прямой $2x-3y=6$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=x^2/4$.

2. Решите уравнение $\cos x-\sin\left(5x+\dfrac{3}{2}\pi\right)=\sqrt{3}\cos(3x+\pi)$.

3. Решите уравнение $\log_2\left(\dfrac{3}{8}x+1\right)=1-\log_2 x$.

4. Решите неравенство $\dfrac{6}{2^x-1}>2^x$.

5. Конус с углом α между образующей и высотой вписан в сферу радиуса R так, что его вершина находится в центре сферы, а окружность основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной шестиугольной призмы (параллельного основанию конуса) лежат на сфере, а остальные ее вершины принадлежат боковой поверхности конуса. Какими должны быть высота и сторона основания призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

Ответы: **1.** (3/2; −1). **2.** $x_1=\pi(1+2k)/6$, $x_2=\pm 5\pi/12+n\pi$, k, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{4/3\}$. **4.** $(0;\ \log_2 3)$. **5.** $0{,}5R/\cos(\alpha/2)$, $R\sin(\alpha/2)$, $3R^2\operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Вариант № 47

1. Две бригады рабочих, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу за 12 дней. Фактически работало 3/4 рабочих первой бригады и 0,9 рабочих второй бригады, и работа была выполнена за 15 дней. За сколько дней могла бы выполнить эту работу каждая бригада в отдельности при полном составе?

2. Решите уравнение $\sin^2 x-\sin x\cdot\cos x=1/2$.

3. Решите уравнение $9^x=8\cdot 3^x+9$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{y}, \\ y^2-x^2-2x+4y+3=0 \end{cases}$$

имеет решение.

5. В правильной четырехугольной пирамиде с высотой H и углом α между боковым ребром и высотой расположена правильная четырехугольная призма. Все вершины ее нижнего основания (параллельного основанию пирамиды) принадлежат сфере с центром в вершине пирамиды и касающейся ее основания; верхнее основание призмы является сечением пирамиды. Какими должны быть сторона основания и высота призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

Ответы: **1.** 18 и 36 дней. **2.** $x=-\pi/8+k\pi/2$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $\{2\}$. **4.** $(-\infty;\ -3]\bigcup[3/4;\ +\infty)$. **5.** $H\sqrt{2}\sin(\alpha/2)$, $0{,}5H/\cos(\alpha/2)$; $2\sqrt{2}H^2\operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Вариант № 48

1. Поезд вышел из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 234 км. Через один час навстречу ему вышел из пункта B второй поезд, проходивший в час на 12 км больше, чем первый. Определите скорость каждого поезда, если они встретились на расстоянии 108 км от пункта B.

2. Решите уравнение $\cos 9x+\cos 6x+\cos 3x=0$.

3. Решите уравнение $4^{x+1/x}-\sqrt{50}\cdot 2^{x+1/x}+8=0$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2-y+1=0, \\ x^2-y^2+(a+1)x+(a-1)y+a=0 \end{cases}$

имеет решение.

5. В конус вписана правильная четырехугольная призма с высотой h; ее нижнее основание лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Вершины верхнего основания другой призмы, подобной первой, принадлежат боковой поверхности конуса, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания первой призмы. При какой высоте второй призмы отношение ее объема к объему конуса будет наибольшим? Найдите это значение отношения.

Ответы: **1.** 42 и 54 км/ч. **2.** $x_1=\pi(1+2k)/12$, $x_2=\pm 2\pi/9+2n\pi/3$, k, $n\in Z$. **3.** $\{2; 1/2\}$. **4.** $[3/4; +\infty)$. **5.** $5h/6$, $(5/6)^5/\pi$.

Вариант № 49

1. Точка A лежит на графике функции $y=\frac{1}{8}(x^2-12x)$, точка B — на кривой $x^2+y^2-18x-12y+97=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AB?

2. Решите уравнение $1-\cos 6x=\operatorname{tg} 3x$.

3. Решите уравнение $2^{x^2+1}+2^{4-x^2}=33$.

4. Решите неравенство $\frac{\log_{1/2}(x-2)}{x^2-4}>0$.

5. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма; вторая призма, подобная первой, своим нижним основанием поставлена на верхнее основание первой призмы, а вершины ее верхнего основания принадлежат сфере. При какой высоте первой вписанной призмы вторая призма имеет наибольшую высоту?

Ответы: **1.** $\sqrt{5}/2$. **2.** $x_1=k\pi/3$, $x_2=\pi(1+4n)/12$, k, $n\in Z$. **3.** $\{-2; 2\}$. **4.** $(2; 3)$. **5.** $2\sqrt{2/\sqrt{3}-1}\,R$.

Вариант № 50

1. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 2 мин быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За какое время каждый лыжник проходил круг?

2. Решите уравнение $\sin^2 2x+\cos^2 x=1$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых функция

$$y=a\cdot 8^x+(3a+1)\cdot 4^x+(9a+1)\cdot 2^x+2$$

не имеет экстремумов.

4. Решите неравенство $\frac{3}{1-\lg x}<\frac{\lg x}{1+\lg x}$.

5. В конус с радиусом основания R помещена правильная шестиугольная призма, у которой сторона основания в два раза больше бокового ребра и в пять раз меньше радиуса основания конуса. Все вершины нижнего основания призмы (параллельного основанию конуса) принадлежат сфере с центром в вершине конуса и касающейся его основания, а остальные вершины призмы лежат на боковой поверхности конуса. Найдите высоту конуса. Определите отношение объема конуса к объему призмы.

Ответы: **1.** 10 и 12 мин. **2.** $x_1=k\pi$, $x_2=\pm\pi/3+n\pi$, k, $n\in \mathbf{Z}$. **3.** $(-\infty; -1/6]\cup[0; +\infty)$. **4.** $(0; 0{,}1)\cup(10; +\infty)$. **5.** $R/4$, $125\pi/(9\sqrt{3})$.

Вариант № 51

1. На обработку одной детали рабочий A затрачивает на 1,5 мин меньше рабочего B. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за 6 ч работы, если A обрабатывает за это время на 20 деталей больше, чем B?

2. Решите уравнение $\sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x$.

3. Решите уравнение $\frac{\lg(3x^2-12x+13)}{\lg(x-1)}=2$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=2x, \\ x^2+y^2+a^2=2x+2ay \end{cases}$$

имеет решение.

5. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Одна грань куба с ребром a лежит в плоскости основания пирамиды, при этом один конец диагонали куба совпадает с центром основания пирамиды, а другой конец этой диагонали лежит на боковом ребре пирамиды. При какой высоте пирамиды объем шара будет наименьшим? Найдите это значение объема.

Ответы: **1.** 60 и 80. **2.** $x=(-1)^{k+1}\pi/6+k\pi$, $k\in Z$. **3.** $\{3\}$. **4.** $-1/4\leqslant a\leqslant 2$. **5.** $3a$, $343\pi a^3/16$.

Вариант № 52

1. На плоскости xy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства

$$y=x^2-2(1+2p)x+2p^2-1;$$

здесь p — параметр, которому можно придавать любое значение.

2. Решите уравнение $\cos\frac{x}{2}=1+\cos x$.

3. Решите уравнение $\frac{2^x}{5^{x-1}}+3=\frac{5^x}{2^{x-1}}$.

4. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{3x-10\sqrt{x}+3}}{x-3\sqrt{x}-10}<0$.

5. В правильную треугольную пирамиду вписана правильная треугольная призма, одно основание которой лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания принадлежат апофемам пирамиды. Высота призмы равна h, а сторона ее основания $\sqrt{3/2}\,h$. При какой высоте пирамиды радиус описанной около нее сферы будет наименьшим? Найдите это значение радиуса.

Ответы: **1.** $\{(x;\ y)|\,y<-(x+1)^2\}$. **2.** $x_1=\pi(1+2k)$, $x_2=\pm 2\pi/3+$ $+4n\pi$, k, $n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $[0;\ 1/9)\cup(9;\ 25)$. **5.** $3h$, $9h/4$.

РЕШЕНИЯ ВАРИАНТОВ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА

Вариант № 1

1. В условии задачи содержатся только величины, имеющие размерность времени. Чтобы воспользоваться законом равномерного движения $l=vt$, в который кроме времени t входят еще расстояние и скорость, одну из этих величин (длину окружности l) мы возьмем произвольной. Тогда скорости тел определяются из закона движения: они пропорциональны принятому значению l. В окончательно составленное уравнение длина окружности входить не должна. В частности, длину окружности можно принять равной 1, но здесь это делать не рекомендуется; для обозначения величин, имеющих ясное физическое содержание, желательно пользоваться буквами, обычно принятыми для них в физике. Это делает составляемые уравнения более наглядными, исключает ошибки в размерности величин.

Если первое тело проходит окружность за T секунд, то второе — за $T+3$ секунды. За полторы минуты, т. е. за 90 с, первое тело пройдет расстояние $90l/T$, а второе $90l/(T+3)$. Первое из расстояний больше второго на длину окружности, так как первое тело догоняет второе каждые полторы минуты, т. е. $\dfrac{90l}{T}=\dfrac{90l}{T+3}+l$, или $T^2+3T-270=0$. Полученное уравнение имеет два решения: $T=15$ и $T=-18$. Второе решение не удовлетворяет условию задачи, предполагается, что $T>0$. Второе тело пройдет окружность за 18 с.

2. $\sin x-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)=0 \Leftrightarrow \sin x+\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x=0 \Leftrightarrow$ $\sin 2x=0$. Так как $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то в тех случаях, когда сомножитель $\cos x$ обращается в нуль, $\sin 2x$ также равен нулю. Следовательно, $x=k\pi/2$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

3. Обозначая $y=3^x$, сводим уравнение к квадратному уравнению $y^2-y-6=0$ относительно неизвестной y при ограничении $y>0$. Решению квадратного уравнения $y=3$ соответствует $x=1$, второй корень квадратного уравнения $y=-2$ не удовлетворяет условию $y>0$.

4. $\frac{3}{x+3}<1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+3}>0$. Неравенство сводится к совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x+3>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x+3<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0,\\ x<-3.\end{array}\right.$$

В этом примере рекомендуем проверить решение, построив график функции, стоящей в левой части неравенства, и отметив на оси абсцисс промежутки, в которых график лежит ниже прямой $y=1$ (рис. 13).

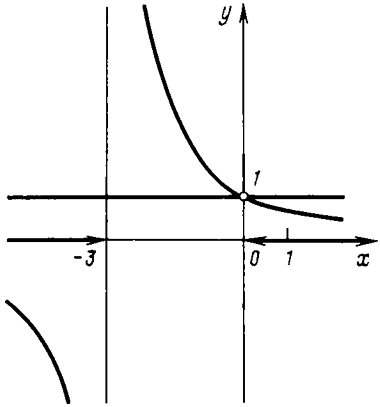


Рис. 13

5. Каждая точка диагонали куба AC' одинаково удалена от граней куба, сходящихся в вершине A, следовательно, центр первого шара O_1 лежит на AC' (рис. 14, а). Центр другого шара O_2 принадлежит диагонали куба CA'. Поэтому куб на рис. 14, а расположен так, что диагональная плоскость $A'ACC'$ совпадает с плоскостью чертежа. На этом рисунке хорошо видна точка касания шаров E, лежащая на отрезке O_1O_2, и точки касания шаров с гранью куба $ABCD$. Это точки F и G, лежащие на диагонали грани AC. Однако на рисунке трудно показать точки касания шаров с

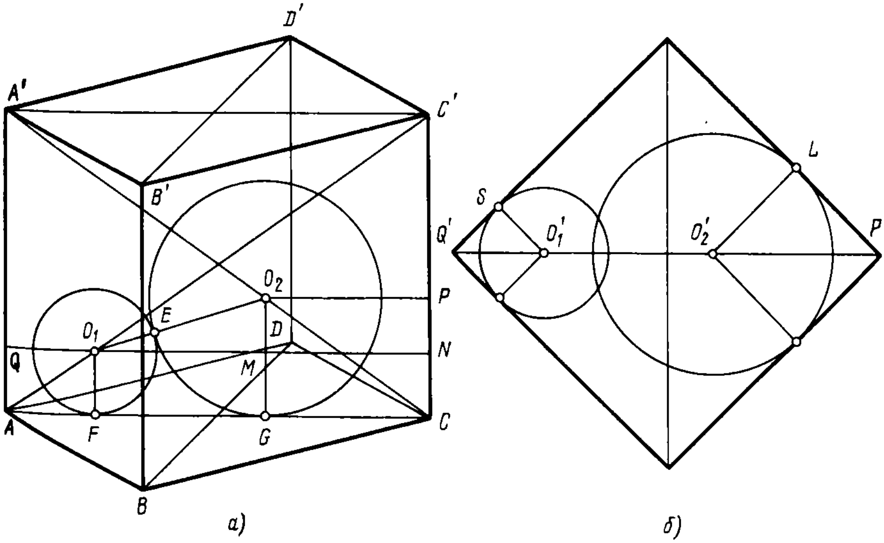


Рис. 14

другими гранями и, что особенно важно, неясно взаимное расположение шаров и ребер куба AA' и CC'. Поэтому на рис. 14, б дана проекция на горизонтальную плоскость. На этом рисунке четко видны все точки касания шаров с гранями куба; легко определяются расстояния от центров шаров до ребер куба AA' и CC'. Если r и R — радиусы меньшего и большего шаров, то $QO_1=Q'O'_1=r\sqrt{2}$ и $O_2P=O'_2P'=R\sqrt{2}$. Обратите внимание, что на рис. 14, б точку касания шаров E изобразить трудно, так как больший шар частично закрывает меньший. Кроме того, по данному рисунку нельзя определить расстояние между центрами шаров, так как в натуральную величину здесь изображается не сам отрезок O_1O_2, а его проекция на плоскость $ABCD$.

В треугольнике O_1O_2M $O_1O_2^2=O_1M^2+O_2M^2$; в этом равенстве $O_1O_2=r+R$, $O_2M=R-r$, $O_1M=\sqrt{2}(a-R-r)$, следовательно, $(R+r)^2=(R-r)^2+2(a-R-r)^2$.

Так как $R=2r$, то для определения r получаем уравнение

$$5r^2-6ar+a^2=0,$$

решая которое, находим $r=a/5$ и $R=2a/5$. Второму корню уравнения $r=a$ соответствуют шары, выходящие за пределы куба.

Вариант № 2

1. Поскольку в условии задачи нет никаких сведений об объеме выполняемой работы, примем его равным единице. Если рабочий А может выполнить всю работу за Т дней, то В — за Т − 5 дней и С — за Т − 9 дней.

Тогда части работы, выполняемые рабочими А, В и С за один день (производительность), соответственно равны

$$\frac{1}{\mathrm{T}},\ \frac{1}{\mathrm{T}-5},\ \frac{1}{\mathrm{T}-9}.$$

Рабочий С выполняет за день такую же часть работы, какую рабочие А и В выполняют вместе, т. е.

$$\frac{1}{\mathrm{T}}+\frac{1}{\mathrm{T}-5}=\frac{1}{\mathrm{T}-9}\Leftrightarrow \mathrm{T}^2-18\mathrm{T}+45=0.$$

Решая уравнение, получаем $T=15$, второй корень уравнения не удовлетворяет условию задачи.

2. $\sin 2x+\sin x=\cos x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0.$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2},\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi,\ n\in \boldsymbol{Z};\\ x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ k\in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

3. Левая и правая части уравнения определены при $x>0$. При

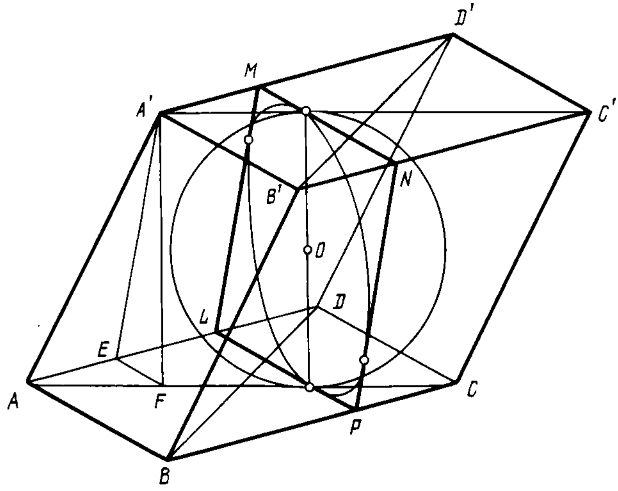


Рис. 15

этом ограничении уравнение равносильно уравнению $\log_2 \frac{x(x+3)}{2} = \log_2 2$ и уравнению $x^2+3x-4=0$. Корень квадратного уравнения $x=1$ является также корнем данного уравнения. Второй корень $x=-4$ не удовлетворяет условию $x>0$ и корнем данного уравнения не является.

4. Функция $\ln\left((4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)\right)$ определена при всех $x \in R$, если квадратный трехчлен, стоящий под знаком логарифма, принимает при всех x только положительные значения.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c принимает только положительные значения, если его коэффициенты удолетворяют двум условиям: $D=b^2-4ac<0$ и $a>0$. Первое условие гарантирует, что квадратный трехчлен принимает или только положительные, или только отрицательные значения, а его график не пересекает ось абсцисс. Если выполнено и второе условие, то ветви параболы, являющейся графиком квадратного трехчлена, направлены вверх, т. е. квадратный трехчлен принимает только положительные значения. Условие $a>0$ можно заменить на $c>0$, так как c есть значение квадратного трехчлена при $x=0$.

Итак, задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 4-p>0, \\ 25-\frac{5}{2}(1-p)(4-p)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p<4, \\ p^2-5p-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p<4, \\ (p-6)(p+1)>0. \end{cases}$$

Система равносильна неравенству $p+1<0$, так как $p-6<0$ при $p<4$.

5. Пусть $\angle BAA' = \angle DAA' = \alpha$ (рис. 15). Если через центр шара провести плоскость, перпендикулярную ребру основания, то сечением параллелепипеда этой плоскостью будет ромб $MNPL$. Проведем $FA' \perp ABCD$, а также $EA' \perp AD$. Очевидно, F принадлежит диагонали AC, и тогда $EF \perp AD$. Так как $ML = LP = b$ и $ML \perp AD$, то $ML = EA' = AA' \sin\alpha = b$. Следовательно, $AA' = b/\sin\alpha$ и $EF = AE = AA' \cos\alpha = b \operatorname{ctg}\alpha$. Поскольку $FA' = \sqrt{EA'^2 - EF^2} = b\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$, то радиус вписанного шара $r = FA'/2 = b\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}/2$.

Вариант № 3

2. $\sin x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

$$\sin x + \cos x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x),$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \cos x + \sin x) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)\left(2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю (при этом остальные сомножители имеют смысл), поэтому полученное уравнение можно заменить совокупностью уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{x}{2} = 0. \end{array}\right.$$

Из первого уравнения получаем $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ и $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. Аналогично из второго уравнения $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, третье уравнение дает $x = 2k\pi$. Решением исходного уравнения будет объединение решений всех уравнений, входящих в эту совокупность.

3. Обратим внимание, что $9^x = (3^x)^2$, $4^x = (2^x)^2$ и $6^x = 3^x \cdot 2^x$. Уравнение принимает вид $8 \cdot (3^x)^2 + 6 \cdot 3^x 2^x - 27 \cdot (2^x)^2 = 0$. Полученное уравнение сводится к квадратному уравнению, если его левую часть разделить на $(2^x)^2$ и ввести обозначение $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$,

$$8y^2 + 6y - 27 = 0, \quad y > 0.$$

Положительному корню квадратного уравнения $y = 3/2$ соответствует $x = 1$, второй корень $y = -9/4$ — посторонний.

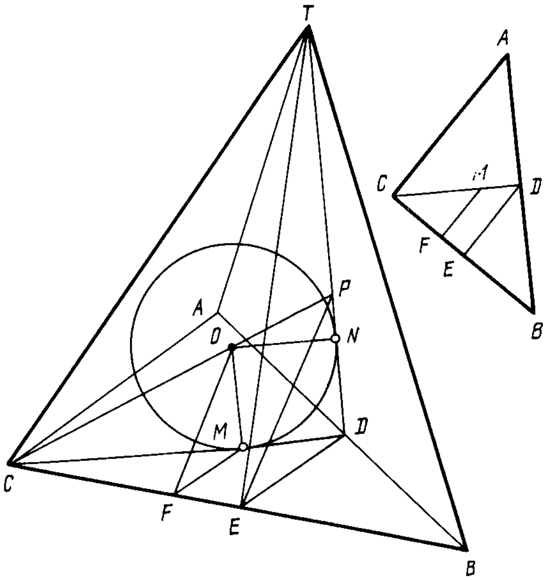


Рис. 16

5. В пирамиде $TABC$ AB — гипотенуза основания, AC и CB — катеты (рис. 16). Так как $TA=TB=TC$, то $AD=CD=BD$, т. е. высота пирамиды проходит через середину гипотенузы основания. Проведем $DE\perp CB$; TE — высота боковой грани BTC, ED — ее проекция на плоскость ABC. Следовательно, $\angle TED$ — линейный угол двугранного угла, образованного боковой гранью BTC и основанием ABC. Найдем величину этого угла.

Так как $ET=AC=CB$, а $ED=\frac{1}{2}AC$, то $\angle TED=60°$.

Для нахождения центра шара, вписанного в пирамиду, проведем EP — биссектрису $\angle TED$. Центр шара расположен в плоскости CEP и одновременно в плоскости CDT. Так как CP есть линия пересечения плоскостей CEP и CDT, то $O\in CP$. Проведем OM перпендикулярно плоскости CAB, $M\in CD$, и $MF\perp CB$. Очевидно, $\angle OFM=\angle PED=30°$, следовательно, $MF=OM\operatorname{ctg}30°$ и $CM=$ $=\sqrt{2}\cdot MF=\sqrt{2}\cdot OM\cdot\operatorname{ctg}30°=r\sqrt{6}$. Так как $CM+MD=CD$, а $MD=ON=r$ и $CD=c/2$, то $r\sqrt{6}+r=c/2$. Отсюда $r=\frac{c}{2(\sqrt{6}+1)}$ и объем шара $v=\frac{\pi c^3}{6(\sqrt{6}+1)^3}$.

Замечание. Если центр шара соединить отрезками со всеми вершинами пирамиды, то данную пирамиду можно представить как объединение четырех пирамид, для которых эти отрезки являются боковыми ребрами, грани пирамиды — основаниями, а радиусы шара, проведенные в точки касания с гранями,— высотами. Сравнивая суммарный объем четырех пирамид с объемом данной пирамиды, можно получить формулу для вычисления радиуса вписанного шара через объем пирамиды $v_п$ и площадь полной поверхности $s_п$: $r=\frac{3v_п}{s_п}$. Так как в этой задаче легко найти высоту пирамиды, можно воспользоваться полученной формулой для определения радиуса шара.

Вариант № 4

1. Если x — часть всей работы, выполняемая краном большей мощности за один час (производительность), а y — часть работы, выполняемая краном меньшей мощности за один час, то $\begin{cases} 5\cdot 4x+3\cdot 2y=1, \\ 4{,}5(4x+2y)=1. \end{cases}$ Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, получим $x=1/24$. Следовательно, всю погрузку один кран большей мощности мог бы произвести за 24 ч.

2. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

После умножения левой и правой части уравнения на $\sin 2x$ получаем уравнение, сводящееся к квадратному уравнению введением новой переменной $y=\sin 2x$: $6y^2+\sqrt{3}y-6=0$.

Корню этого уравнения $y=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{147}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствует уравнение $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и решение $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. Второй корень $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ не удовлетворяет условию $|y|\leqslant 1$.

4. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x-4>0, \\ 1-x<0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x-4<0, \\ 1-x>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2, \\ x>1; \end{cases} \\ \begin{cases} x<2, \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<1. \end{array}\right.$$

Проверим решение, построив графики функций, стоящих в числителе и знаменателе дроби, и отметив на оси абсцисс промежутки, в которых графики расположены по разные стороны от нее (рис. 17).

5. По условию задачи вершины верхнего основания шестиугольной призмы и вершины куба лежат на сфере. Так как верхняя и нижняя грани куба и основания призмы лежат в параллельных плоскостях, то их центры расположены на одном диаметре сферы, перпендикулярном этим плоскостям. Куб и призму можно поворачивать вокруг этого диаметра на любой угол, не нарушая условий задачи. Поэтому на чертеже (рис. 18) фигуры располагаем

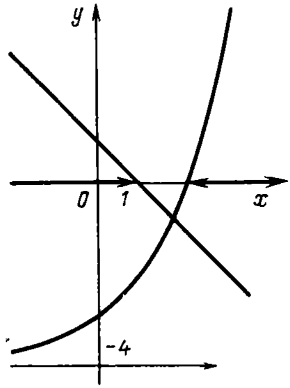


Рис. 17

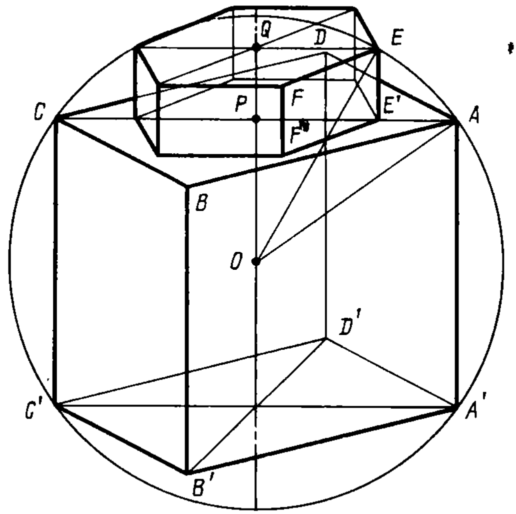


Рис. 18

так, чтобы боковое ребро призмы EE', параллельный ему диаметр шара и ребро куба AA' лежали в одной плоскости. Обозначим $x=EE'=PQ$, тогда $EQ=EF=x\sqrt{3}$.

Так как $AA'=a$, то $AO=EO=a\sqrt{3}/2$. В ΔOEQ $EO^2=EQ^2+OQ^2$, следовательно,

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=(x\sqrt{3})^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2,$$

или $8x^2+2ax-a^2=0$. Решая это квадратное уравнение, получаем $x=a/4$. Отрицательный корень уравнения $x=-a/2$ не удовлетворяет условию задачи, геометрически он соответствует перевернутому относительно верхней грани куба положению призмы. Площадь полной поверхности призмы $S_п=12\frac{\sqrt{3}}{4}(x\sqrt{3})^2+6x^2\sqrt{3}=$ $=\frac{15\sqrt{3}a^2}{16}$; площадь сферы $S_с=4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=3\pi a^2$; их отношение $\frac{5\sqrt{3}}{16\pi}$.

Вариант № 5

2. $\dfrac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{8\cos^2 2x}{\sin^2 2x}$;

$$\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\sin^2 2x}=\frac{2\cos^2 2x}{\sin^2 2x};\quad \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}=\frac{2\cos^2 2x}{\sin^2 2x},$$

следовательно, $\cos 2x=2\cos^2 2x$. Последнее уравнение получено из

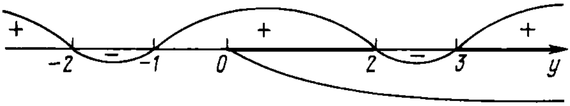


Рис. 1.9

предыдущего умножением обеих его частей на $\sin^2 2x$ (отбрасыванием знаменателя), поэтому обязательно нужно убедиться, что среди его корней нет таких, при которых $\sin 2x=0$. Действительно, если $\sin 2x=0$, то $\cos 2x=\pm 1$, и равенство не выполняется. Нелишне отметить, что «сокращение» по аналогии на $\cos 2x$ здесь было бы грубой ошибкой. Уравнение сводится к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \cos 2x=\frac{1}{2};\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi.\end{array}\right.$$

4. Введя новую переменную $y=\sqrt{x}$, неравенство представим в виде

$$\frac{y^2-y-2}{y^2-y-6}=\frac{(y-2)(y+1)}{(y-3)(y+2)}>0.$$

Полученное неравенство можно решить методом интервалов, отметив на числовой оси значения y, при которых обращаются в нуль числитель и знаменатель дроби, и определив знаки дроби в промежутках между этими значениями (рис. 19). Учитывая, что переменная y может принимать только неотрицательные значения, получаем промежутки $y\in[0;\ 2)\cup(3;\ +\infty)$. Соответственно $x\in[0;\ 4)\cup(9;\ +\infty)$.

Решение можно упростить, воспользовавшись свойствами неравенств и арифметического корня:

$$\frac{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}-6}>0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}>0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}>0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что выражения $\sqrt{x}+1$ и $\sqrt{x}+2$ положительны при всех допустимых значениях x.

Итак,

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}<2,\\ \sqrt{x}>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leqslant x<4,\\ 9<x.\end{array}\right.$$

5. Центры боковой грани первой призмы и лежащего в той же плоскости основания второй призмы совпадают. Это следует из того, что вершины боковой грани первой призмы и вершины другого основания второй призмы принадлежат сфере, а значит,

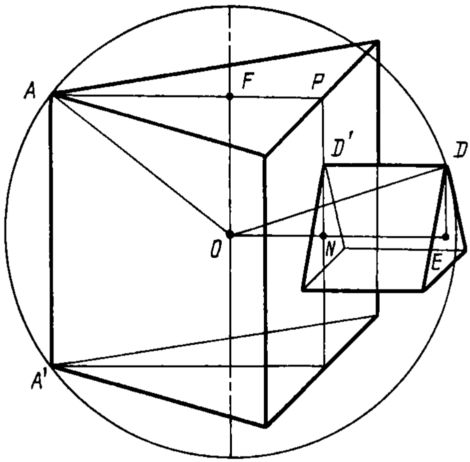


Рис. 20

центры оснований второй призмы и параллельной им боковой грани первой призмы лежат на одном диаметре сферы. В ΔOAF (рис. 20) $OA^2=OF^2+AF^2$, отсюда $OA^2=7a^2/12$. В ΔODE $OD^2=$ $=ED^2+OE^2$.

Обозначив $x=DD'$, получим $\frac{7}{12}a^2=\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(x+\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2$, так как $AO=OD$. После упрощений получаем квадратное уравнение относительно x $8x^2+2\sqrt{3}\,ax-3a^2=0$ и находим решение $x=\sqrt{3}a/4$.

Вариант № 6

1. Составим систему уравнений

$$\frac{a(1-q^3)}{1-q}=56 \text{ и } \frac{a(1-q^6)}{1-q}=63.$$

Так как $1-q^6=(1-q^3)(1+q^3)$, то $1+q^3=\frac{63}{56}=\frac{9}{8}$ и $q=\frac{1}{2}$.

4. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \lg(x^2-7x+10)<\lg 4, \\ x>2, \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+6<0, \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<6, \\ x>5. \end{cases}$$

Следовательно, $5<x<6$.

5. Центры оснований призмы F и E лежат на том же диаметре сферы, что и высота конуса OO' (рис. 21). На чертеже достаточно показать сечение всех фигур плоскостью, проходящей через высоту конуса и боковое ребро призмы AA'. Пусть R — радиус основа-

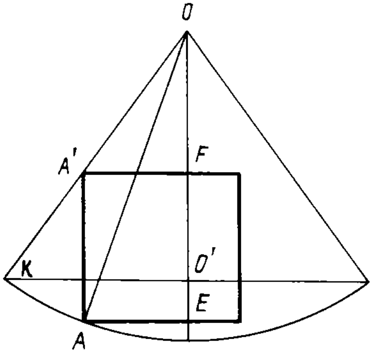


Рис. 21

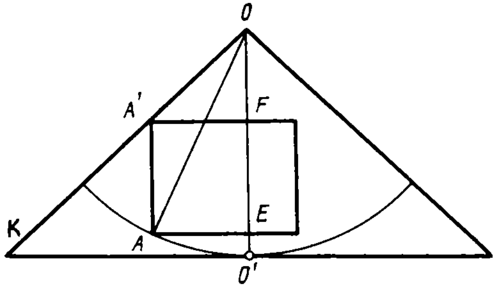


Рис. 22

ния конуса, тогда $AA'=\sqrt{2/3}\,R$ и $A'F=AE=R/\sqrt{3}$. Так как $\Delta OA'F \backsim \Delta OKO'$, то $\frac{OF}{A'F}=\frac{H}{R}$. Поскольку $OF=\sqrt{AO^2-AE^2}-FE$, то

$$\frac{\sqrt{R^2+H^2-(R/\sqrt{3})^2}-\sqrt{2/3}\,R}{R/\sqrt{3}}=\frac{H}{R},$$

откуда $R=H/\sqrt{2}$ и объем конуса $v_k=\pi H^3/6$.

Вариант № 7

2. Применяя формулы преобразования суммы и разности косинусов в произведения, получаем $\cos 2x \cos 4x=\cos^2 4x$ и $\cos 4x \sin 3x \sin x=0$.

$$1)\ \cos 4x=0,\ \ x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4};\ \ 2)\ \sin 3x=0,\ \ x_2=\frac{\pi k}{3};\ \ 3)\ \sin x=0,$$

$x_3=\pi n$ — эти значения содержатся среди корней x_2.

4. Приведя к общему знаменателю, получим $\frac{(2^x)^2-2\cdot 2^x-8}{2^x-1}<0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(2^x-4)(2^x+2)}{2^x-1}<0 \Leftrightarrow \frac{2^x-4}{2^x-1}<0$. Следовательно, $1<2^x<4$ и $0<x<2$.

5. Проведем плоскость через высоту конуса OO′ и боковое ребро призмы AA' (рис. 22). Центры оснований призмы F и E лежат на высоте конуса. Обозначим H = OO′. Из подобия треугольников OFA′ и OO′K получим $\frac{OF}{FA'}=\frac{OO'}{O'K}$, следовательно, $\frac{\sqrt{H^2-3R^2/16}-3R/8}{\sqrt{3}R/4}=\frac{H}{R}$. После упрощений получаем $52H^2-12\sqrt{3}RH-21R^2=0$, откуда $H=\sqrt{3}R/2$ и $v=\pi\sqrt{3}R^3/6$.

Вариант № 8

1. Если v_1 — скорость велосипедиста, а v_2 — скорость автомобиля, то $25v_1=10v_2$, т. е. $5v_1=2v_2$. К моменту встречи суммарное расстояние, пройденное автомобилем и велосипедистом, вдвое больше расстояния между A и B, следовательно,

$$\frac{50}{60}v_2+\frac{65}{60}v_1=38.$$

Отсюда $v_1=12$ км/ч, $v_2=30$ км/ч.

2. Заменив $\cos x+\cos 3x$ произведением $2\cos 2x\cos x$, получим $\cos 2x(2\cos x+1)=0$.

3. Уравнение превращается в квадратное уравнение $2y^2-5y+2=0$ после замены переменной $y=2^{\sqrt{x}}$. Для переменной y получаем ограничение $y\geqslant 1$, так как $\sqrt{x}\geqslant 0$. Корню $y=2$ соответствует $x=1$, корень $y=1/2$ — посторонний.

4. По свойству арифметического корня $\frac{\log_{1/2}x}{3-x}\geqslant 0$. Заменим неравенство равносильной совокупностью неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\log_{1/2}x\geqslant 0,\\ 3-x>0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\log_{1/2}x\leqslant 0,\\ 3-x<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}0<x\leqslant 1,\\ x<3;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\geqslant 1,\\ x>3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x\leqslant 1,\\ x>3.\end{array}\right.$$

5. Так как верхняя грань куба принадлежит основанию пирамиды, а вершины параллельной грани лежат на сфере, центры этих граней и высота пирамиды находятся на одном диаметре сферы. Расположим фигуры так, чтобы боковое ребро пирамиды TA и ребро куба MK лежали в одной плоскости (рис. 23). Пусть $MK=x$, тогда $PM=x/\sqrt{2}$, $EA=3x/\sqrt{2}$ и $OE=\sqrt{R^2-(3x/\sqrt{2})^2}$. В ΔOMP $OM^2=MP^2+OP^2$; так как $OP=OE+EP$, а $EP=x$, то

$$R^2=\frac{x^2}{2}+\left(x+\sqrt{R^2-\frac{9x^2}{2}}\right)^2.$$

Решая это уравнение относительно x, получаем $x=2\sqrt{3}R/9$. Тогда $TE=(1+\sqrt{3})R/\sqrt{3}$. Объем пирамиды равен $v_{\text{п}}=\frac{2}{3}\cdot EA^2\cdot ET=$ $=\frac{4}{9}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}R^3$. Объем куба $v_{\text{к}}=\frac{8R^3}{81\sqrt{3}}$, их отношение $\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{к}}}=9(1+\sqrt{3})/2$.

Вариант № 10

3. Переходя к тригонометрическим функциям половинного аргумента, получаем $\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\right)=0$. Отсюда $\sin\frac{x}{2}=0$ или

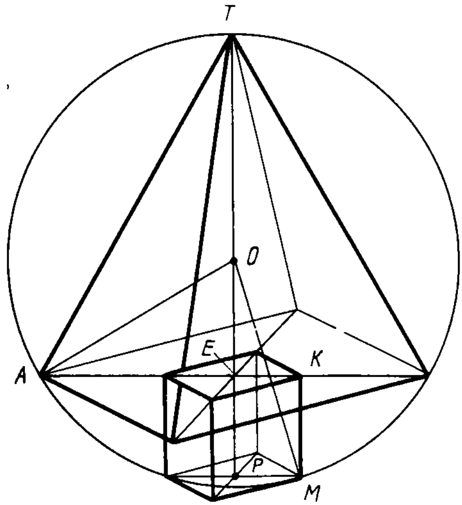


Рис. 23

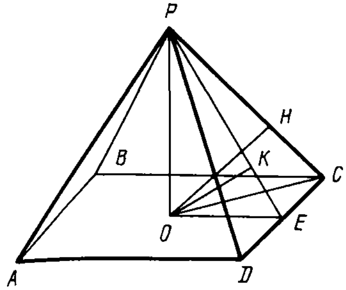
$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; соответственно $x=2k\pi$ или $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, где $k\in \mathbf{Z}$.

При другом способе решения, например, переписав уравнение в виде $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $x=$ $=((-1)^n-1)\frac{\pi}{3}+n\pi$. Получено решение, по виду отличающееся от найденного ранее, но эти два ответа совпадают как множества. Это легко показать. Полагая во втором ответе $n=2k$, получаем $x=2k\pi$; считая n числом нечетным, т. е. $n=2k+1$, получаем $x=-\frac{2\pi}{3}+$ $+(2k+1)\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

5. Пусть a — длина стороны основания призмы, h — ее высота. Одну из величин a или h можно задать произвольно, но тогда вторая определяется из условия $3\sqrt{3}a^2h/2=v$, где v — заданный объем призмы. Пусть независимой переменной будет a. Тогда сумма длин всех ребер L, равная $12a+6h$, будет функцией длины стороны основания, т. е.

$$L(a)=12a+\frac{4v}{\sqrt{3}a^2}\quad (0<a<+\infty).$$

Определим, при каком a эта функция принимает наименьшее значение. Для этого вычислим производную функции $L'(a)=$



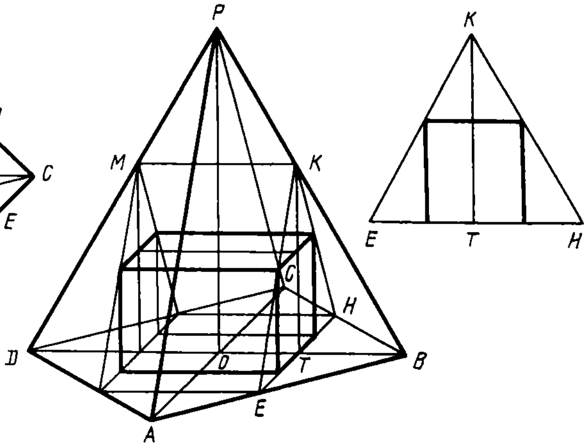


Рис. 24

Рис. 25

$=12-\frac{8v}{\sqrt{3}a^3}$. Производная равна нулю при $a=a_0=\sqrt[3]{\frac{2v}{3\sqrt{3}}}$. Если $a<a_0$, то $L'(a)<0$, при $a>a_0$ $L'(a)>0$, следовательно, a_0 — точка минимума функции $L(a)$. Так как других критических точек нет, функция $L(a)$ в точке a_0 принимает наименьшее значение. При $a=a_0$ $h=a_0$ и площадь полной поверхности призмы $s=(2+\sqrt{3})\sqrt[3]{4v^2}$.

Вариант № 11

5. Пусть x — сторона основания пирамиды, h — высота, тогда $OC=x/\sqrt{2}$, $OE=x/2$, $OP=h$ (рис. 24). Так как $\Delta POE \backsim \Delta OKE$, то $\frac{PE}{PO}=\frac{OE}{OK}$, или $\frac{\sqrt{h^2+x^2/4}}{h}=\frac{x/2}{b}$, отсюда

$$1+x^2/(4h^2)=x^2/(4b^2). \qquad (1)$$

Аналогично из ΔPOC получим

$$1+x^2/(2h^2)=x^2/(2a^2). \qquad (2)$$

Исключая из (1) и (2) h^2, получим $x=\frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$, а затем $h=\frac{ab}{\sqrt{2b^2-a^2}}$. Тогда $v=x^2h/3$.

Вариант № 12

1. $\begin{cases} 200<\frac{a+(a+8d)}{2}\cdot 9<220; \\ a+d=12,\ a\in \mathbf{N},\ d\in \mathbf{N}. \end{cases}$

Так как $a=12-d$, то $3\frac{11}{27}<d<4\frac{4}{27}$, следовательно, $d=4$.

5. Если h — высота призмы, то $EH=2\cdot TB=b-h$ (рис. 25). Пусть x — длина стороны основания призмы. Тогда в ΔEKH $EH=x+2x/\sqrt{3}$, отсюда $x=\frac{(b-h)\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. Объем призмы получаем как функцию высоты h: $v(h)=3(2-\sqrt{3})^2h(b-h)^2$. Вычислим производную этой функции $v'(h)=3(2-\sqrt{3})^2(b-h)(b-3h)$. В промежутке $0<h<b$ производная равна нулю только при $h=b/3$; функция в этой точке принимает наибольшее значение $v_m=4(2-\sqrt{3})^2b^3/9$.

Вариант № 16

5. *Указание.* Пусть r — радиус меньших шаров. Их центры являются вершинами тетраэдра, все ребра которого имеют длину $2r$. Радиус шара R_1, описанного около тетраэдра, равен $R_1=r\sqrt{6}/2$. Из условия $R=R_1+r$ найдем r.

Вариант № 17

5. На ребрах куба (или на их продолжениях) от вершины A откладываем отрезки равной длины. Соединим концы отрезков и разделим каждую сторону полученного правильного треугольника на три равные части. Точки деления — вершины основания призмы (рис. 26). Если h — высота призмы, то $OA=(a\sqrt{3}-h)/2$, $OK=(a\sqrt{3}-h)/\sqrt{2}$, а сторона основания призмы равна $(a\sqrt{3}-h)/\sqrt{6}$.

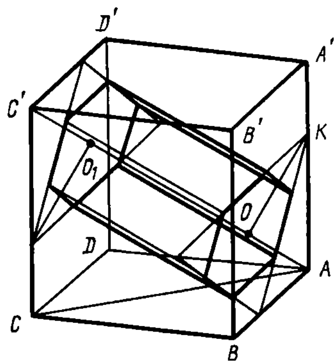


Рис. 26

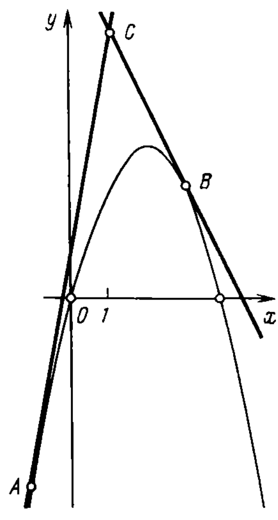


Рис. 27

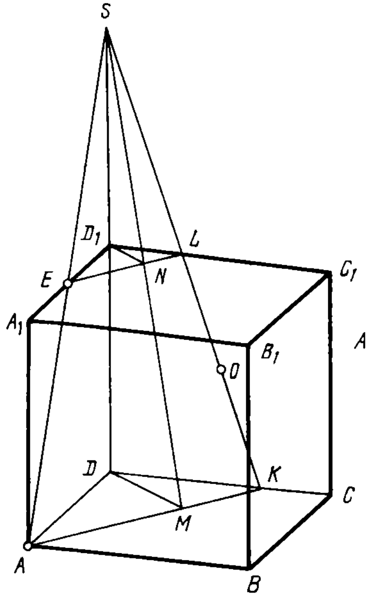


Рис. 28

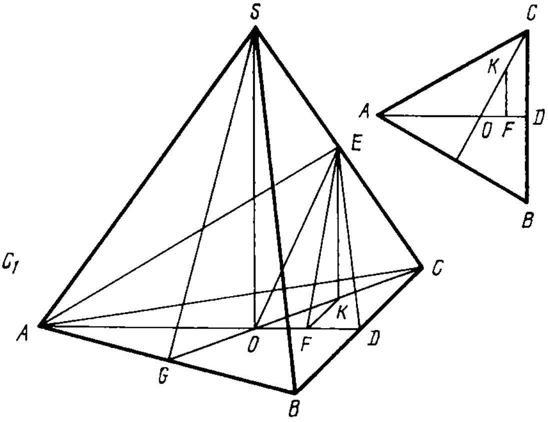


Рис. 29

Отсюда можно получить выражение для объема призмы $v(h)=$ $=\frac{\sqrt{3}}{4}h(a\sqrt{3}-h)^2$ $(0<h<a\sqrt{3})$.

Вычислим производную функции и представим ее в виде

$$v'(h)=\frac{\sqrt{3}}{4}(a\sqrt{3}-h)(a\sqrt{3}-3h).$$

При $h=h_0=a/\sqrt{3}$ $v'(h)=0$. Если $h<h_0$, то $v'(h)>0$, при $h>h_0$ $v'(h)<0$, следовательно, h_0 — точка максимума функции, а функция при этом принимает наибольшее значение, равное $a^3/3$.

Вариант № 18.

1. См. рис. 27.

Вариант № 25

5. *Указание.* Точки A и E — вершины сечения (рис. 28). Найдем точку S пересечения прямой AE с продолжением ребра DD_1. На прямой SO лежат вершины L и K сечения.

Вариант № 29

5. *Указание.* Проведем $DE \parallel BS$ (рис. 29). Докажите, что $DE=OE$. Тогда, если $OF=FD$, то EF — высота сечения.

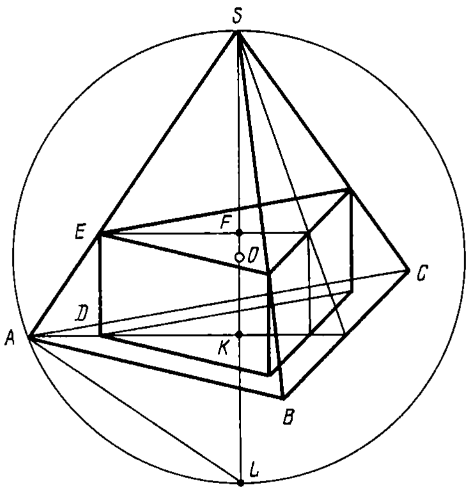


Рис. 30

Вариант № 31

1. Пусть x и y — число фактически работавших в бригадах, t — время работы. Тогда количество изделий, изготовленных первой бригадой, равно $15xt$, второй — $15yt$. При работе по плану, эти же количества изделий можно было записать как $15(x-4)(t+2)$ и $15(y-3)(t+2)$. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} xt=(x-4)(t+2), \\ yt=(y-3)(t+2), \\ 15xt-15yt=600, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x-4t=8, \\ 2y-3t=6, \\ (x-y)t=40. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$2(x-y)-t=2.$$

Из этого уравнения и третьего уравнения системы можно исключить разность $x-y$ и записать уравнение для определения времени работы $t^2+2t-80=0$; отсюда $t_1=8$, $t_2=-10$ — посторонний корень. Из первых двух уравнений системы находим $x=20$, $y=15$.

5. Введем обозначения: $SK=H$ и $ED=h$ — высоты пирамиды и призмы, $AK=r$ и $EF=r_1$ — радиусы окружностей, описанных около оснований пирамиды и призмы (рис. 30).

На первом этапе решения задачи будем считать, что размеры пирамиды H и r заданы, и найдем ту высоту h призмы, при которой она имеет наибольший объем.

Так как $\Delta EDA \sim \Delta SKA$, то $\frac{h}{H}=\frac{r-r_1}{r}$, отсюда $r_1=r\left(1-\frac{h}{H}\right)$, а следовательно, объем призмы

$$v_2(h)=\frac{3\sqrt{3}}{4}r_1^2h=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4H^2}(H^2h-2h^2H+h^3) \quad (0<h<H).$$

Вычислим производную этой функции

$v_2'(h)=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4H^2}(H^2-4hH+3h^2)=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4H^2}(h-H)(3h-H)$. Из условия $v_2'(h)=0$ следует, что $h=H/3$ (других критических точек на промежутке $0<h<H$ нет). Так как $v_2'>0$ при $h<H/3$ и $v_2'<0$ при $h>H/3$, то функция $v_2(h)$ при $h=H/3$ принимает наибольшее значение, т. е. $\max v_2(h)=v_2(H/3)=\frac{\sqrt{3}}{9}r^2H$.

Учитывая, что объем пирамиды $v_1=\sqrt{3}r^2H/4$, получим, $\max v_2=4v_1/9$.

Мы доказали, что призма наибольшего объема, вписанная в пирамиду, занимает 4/9 ее объема (независимо от размеров H и r пирамиды!).

Теперь осталось подобрать высоту H пирамиды так, чтобы ее объем $v_1(H)$ был наибольшим. В ΔSAL $AK^2=SK\cdot KL$, т. е. $r^2=$ $=H(2R-H)$. Тогда $v_1(H)=\frac{\sqrt{3}}{4}H^2(2R-H)$ $(0<H<2R)$. Из уравнения $v'_1(H)=\sqrt{3}(4RH-3H^2)/4=0$ найдем $H=4R/3$. Исследовав знак производной, докажем, что $\max v_1(H)=v_1(4R/3)=\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$, а следовательно, $\max v_2=\frac{4}{9}\max v_1=32\sqrt{3}R^3/243$. Он достигается при $H=4R/3$ и $h=H/3=4R/9$.

Вариант № 32

2. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$.

1) $\sin 2x=0$, $x_1=\frac{k\pi}{2}$; 2) $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x_2=\pm 2\pi/3+2\pi n$.

3. Обозначим $y=4^{\frac{1}{x}}$, тогда $y^2-5y+4=0$. Отсюда $y_1=4$, $4^{\frac{1}{x}}=4$, $x=1$; $y_2=1$, $4^{\frac{1}{x}}=1$, $\frac{1}{x}=0$ — нет решения.

5. Если $EF=d$, то $OE=ED$ и $OF=FD$ (см. рис. 29). Пусть $AB=a$, тогда $FK=\frac{a}{4}$ и $EK=\sqrt{d^2-a^2/16}$; $OS=2EK$; $GS=$ $=\sqrt{GO^2+OS^2}=\sqrt{a^2/12+4d^2-a^2/4}=\sqrt{4d^2-a^2/6}$. Площадь $S(a)=$ $=3\frac{3}{2}AB\cdot GS=\frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{24a^2d^2-a^2}$ $(0<a<4d)$; $S(a)$ имеет наибольшее значение, когда наибольшее значение имеет подкоренное выражение. Приравняем нулю его производную $(24a^2d^2-a^4)'=48ad^2-$ $-4a^3=4a(2\sqrt{3}d+a)(2\sqrt{3}d-a)=0$. Получаем единственную критическую точку $a=2\sqrt{3}d$ в промежутке $0<a<4d$; при $a<2\sqrt{3}d$ производная положительна, при $a>2\sqrt{3}d$ отрицательна.

Вариант № 33

1. Производная функции $y=5+2x-x^2$ равна $y'=2(1-x)$. Поскольку $y(1)=6$ и $y'(1)=0$, получим уравнение первой касательной в виде $y=6$; аналогично, вычислив значения $y(3)=2$ и $y'(3)=-4$ запишем уравнение второй касательной: $y=2-4(x-3)$, или $y=-4x+14$.

Для точки C $y=6$ (рис. 31); $x=2$ найдем из уравнения второй касательной. Итак, вершины треугольника имеют координаты $A(1;\ 6)$, $C(2;\ 6)$ и $B(3;\ 2)$. Легко находятся длины основания AC и

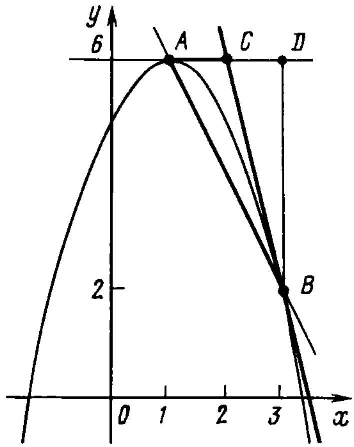


Рис. 31

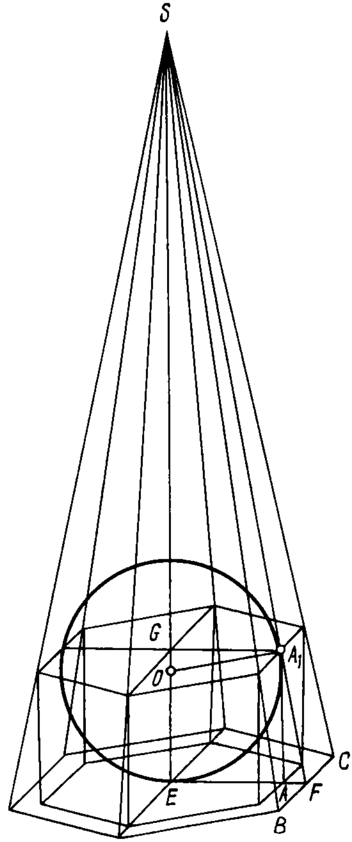


Рис. 32

высоты BD: $AC=1$, $BD=4$. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2$ ед^2.

4. После приведения слагаемых к общему знаменателю получаем $\frac{\lg^2 x-3\lg x+3}{(\lg x-1)(\lg x+1)}>0$. Так как $\lg^2 x-3\lg x+3>0$ при всех $x>0$, то

$$(\lg x-1)(\lg x+1)>0.$$

Следовательно, неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\lg x<-1,\\ \lg x>1,\end{array}\right. \quad \text{отсюда} \quad \left[\begin{array}{l}0<x<0{,}1,\\ 10<x.\end{array}\right.$$

5. Вписанный шар имеет наибольший радиус, когда середины ребер верхнего основания призмы лежат на поверхности шара. Если O — центр шара, то $OA_1=OE=r$ и $OA_1\perp SF$ (рис. 32). Так как

$A_1G=h\sqrt{3}/2$, $OG=EG-OE=h-r$ и $OA_1^2=A_1G^2+OG^2$, то $r^2=\frac{3}{4}h^2+(h-r)^2$. Отсюда $r=7h/8$ и $OG=h/8$. Так как $A_1G^2=OG\cdot GS$, то $GS=\frac{A_1G^2}{OG}=6h$, $SE=7h$, $EF=A_1G\cdot\frac{SE}{SG}=\frac{7\sqrt{3}}{12}h$ и $BC=EF\cdot 2/\sqrt{3}=7h/6$. Найдем объем пирамиды $v_\text{п}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot BC^2\cdot SE=\frac{7\sqrt{3}}{72}h^3$ и объем шара $v_\text{ш}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{7}{8}h\right)^3=\frac{343}{384}\pi h^3$. Их отношение равно $\frac{16}{\pi\sqrt{3}}$.

Вариант № 34

1. Пусть x и y — скорости первого и второго поездов, км/мин; тогда $(x+y)20=45$ и $\frac{45}{y}-\frac{45}{x}=9$. Исключая y, получаем $x_1=5/4$, $x_2=-9<0$. Следовательно, $y=1$; $x=5/4$.

2. $\sin^2 x+3\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-3=0$.

1) $\sin x=-\sqrt{3}/2$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+k\pi$; 2) $\sin x=\sqrt{3}>1$, $x\in\varnothing$.

3. $2\cdot 4^{\log_2 x}=7x+4\Rightarrow 2x^2-7x-4=0$.
$x_1=4$; $x_2=-1/2<0$ (посторонний корень).

4. После приведения к общему знаменателю получаем

$$\frac{\log_2 x+2}{\log_2 x+1}>0,\ \text{отсюда}\ \left[\begin{array}{l}\log_2 x>-1,\\ \log_2 x<-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{2},\\ 0<x<\frac{1}{4}.\end{array}\right.$$

5. Пусть $O_2L=r$, $O_1P=O_1K=R$ (рис. 33). Проведем $O_2M\perp O_1K$, тогда $O_2M=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$. Так как $\Delta O_1KS\backsim\Delta O_1MO_2$, то $O_1M/O_1O_2=O_1K/O_1S$. Обозначим $SP=H$, тогда $\frac{R-r}{R+r}=\frac{R}{H-R}$ и $H=\frac{2R^2}{R-r}$. Из подобия треугольников O_1MO_2 и QPS получим

$$PQ=\frac{H(R-r)}{2\sqrt{Rr}}=\frac{R^2}{\sqrt{Rr}}.$$

Найдем объем пирамиды $v(R)=\frac{1}{3}\cdot 4PQ^2\cdot SP=\frac{8}{3}\cdot\frac{R^5}{r(R-r)}$ $(r<R<+\infty)$; $v'(R)=\frac{8}{3r}\cdot\frac{R^4(4R-5r)}{(R-r)^2}$; $v'(R)=0$ при $R=\frac{5}{4}r$. Так как $v'<0$ при $R<\frac{5}{4}r$ и $v'>0$ при $R>\frac{5}{4}r$, то $v\left(\frac{5}{4}r\right)=\min v(R)=\frac{3125}{96}r^3$.

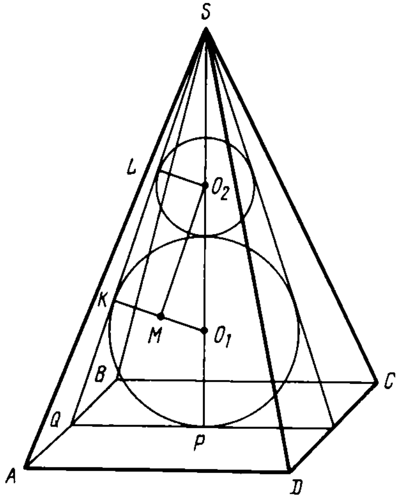


Рис. 33

Вариант № 35

1. Пусть t — время, необходимое первому вертолету на путь из A и B, мин; тогда $\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+40}\right)15=1$, или $t^2+10t-600=0$. Корень $t_1=20$ — решение задачи; $t_2=-30<0$.

2. Используя формулы приведения, получим $\sin x+\sin 5x=$ $=-\sqrt{3}\sin 3x$; $2\sin 3x\cos 2x=-\sqrt{3}\sin 3x$,

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=0,\\ \cos 2x=-\sqrt{3}/2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi/3,\\ x=\pm 5\pi/12+n\pi.\end{array}\right.$$

4. $$\frac{\sqrt{3+2x}}{(x+1/2)(x-1)}>0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x>-3/2;\\ \left[\begin{array}{l}x<-1/2,\\ x>1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3/2<x<-1/2,\\ x>1.\end{array}\right.$$

5. Так как $O'A'=AA'=a$, то $OA'^2=OB''^2=5a^2/4$ (рис. 34). Обозначим $B'B''=h$. Тогда $O''B''^2=\frac{5}{4}a^2-\left(\frac{a}{2}+h\right)^2=a^2-ah-h^2$ и $v(h)=$ $=2\cdot O''B''^2\cdot B'B''=2(a^2h-ah^2-h^3)$.

$$v'(h)=2(a^2-2ah-3h^2).$$

$$v'(h)=0 \text{ при } h=a/3;\ \max v(h)=v(a/3)=10a^3/27.$$

Вариант № 36

1. $\left\{\begin{array}{l}a+(a+d)+(a+2d)=42,\\ a(a+2d+2)=(a+d-2)^2,\end{array}\right.$ отсюда

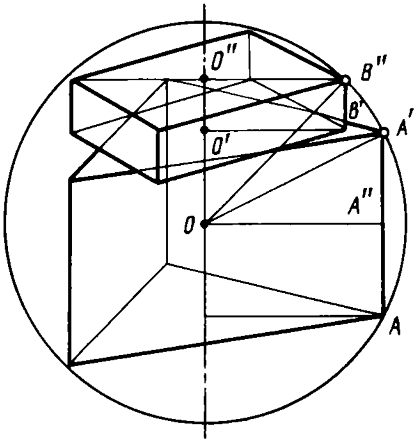


Рис. 34

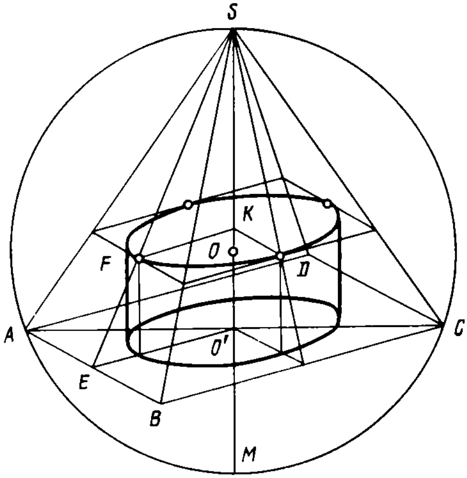


Рис. 35

$$\begin{cases} a+d=14, \\ (14-d)(16+d)=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+d=14, \\ d^2+2d-80=0. \end{cases}$$

При $d_1=-10$ $a=24$; $d_2=8$ не удовлетворяет условию $d<0$.

2. С помощью формул двойного аргумента приведем уравнение к виду $\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}\right)=0$ и заменим равносильной совокупностью уравнений $\left[\begin{array}{l}\cos(x/2)=0, \\ \operatorname{tg}(x/2)=-\sqrt{3},\end{array}\right.$ следовательно, $\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi n, \\ x=-2\pi/3+2\pi k.\end{array}\right.$

3. Умножая на $3^{\sqrt{x}}$, получим уравнение $3\cdot(3^{\sqrt{x}})^2-10\cdot 3^{\sqrt{x}}+3=0$, отсюда $(3^{\sqrt{x}})_{1,2}=\frac{5\pm 4}{3}$. При $3^{\sqrt{x}}=3$ $\sqrt{x}=1$ и $x=1$. Если $3^{\sqrt{x}}=1/3$, то $\sqrt{x}=-1$ — решения нет.

4. $\frac{(4-x)(3+x)}{\log_{1/2}x}\geqslant 0$. Так как $x>0$, то $3+x>0$, следовательно, можно сократить на $3+x$:

$$\frac{x-4}{\log_{1/2}x}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geqslant 4, \\ 0<x<1. \end{array}\right.$$

5. Введем обозначения: $2b$ — длина стороны основания пирамиды; H — высота пирамиды; R — радиус сферы. Тогда $\frac{O_1E}{KF}=\frac{SO_1}{SK}$ (рис. 35), $\frac{b}{a}=\frac{H}{H-a}$, отсюда $b^2=\frac{a^2H^2}{(H-a)^2}$. Так как $AO_1^2=SO_1\cdot O_1M$, или $(b\sqrt{2})^2=$

$=H(2R-H)$, то $\frac{2a^2H^2}{(H-a)^2}=H(2R-H)$. Отсюда $R(H)=H/2+a^2H/(H-a)^2$ $(a<H<+\infty)$. $R'(H)=\frac{1}{2}-a^2\frac{a+H}{(H-a)^3}=\frac{H^3-3H^2a+Ha^2-3a^3}{2(H-a)^3}=$ $=\frac{(H^2+a^2)(H-3a)}{2(H-a)^3}$; $R'(H)=0$ при $H=3a$; $R(3a)=\min R(H)=9a/4$.

Вариант № 37

1. Пусть x и y — грузоподъемность машин, т; n — планируемое число рейсов; тогда

$$\begin{cases} xn=(x-4)(n+10), \\ yn=(y-3)(n+10), \\ (x-y)n=60. \end{cases}$$

Первые два уравнения упрощаются после раскрытия скобок; система принимает вид

$$\begin{cases} 10x-4n=40, \\ 10y-3n=30, \\ (x-y)n=60. \end{cases}$$

Теперь легко исключить x и y, подставляя их выражения из первого и второго уравнений системы в третье. Для определения n получаем квадратное уравнение

$$n^2+10n-600=0,$$

откуда $n=20$ (второй корень отрицательный). Следовательно, $x=12$; $y=9$.

2. Выполнив подстановку $y=\sin x$, приходим к уравнению $2\sqrt{3}y^2+y-2\sqrt{3}=0$. Корню уравнения $y_1=\sqrt{3}/2$ соответствует $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$; второй корень $y_2=-2/\sqrt{3}$ не удовлетворяет условию $|y|\leqslant 1$.

3. Производная функции $f'(x)=9+6x-3x^2$ равна нулю в точках $x_1=-1$ и $x_2=3$. Заданному промежутку принадлежит только $x_1=-1$. Вычисляем значения функции в этой точке и на концах промежутка: $f(-1)=-5$; $f(-2)=2$; $f(2)=22$. Выбираем из них наименьшее $f(-1)=-5$ и наибольшее $f(2)=22$.

4. Выполним подстановку $2^x=y$. Так как $y>0$, то уравнение

$$p\cdot 4^{x+1}-(3p+1)\cdot 2^x+p=0 \qquad (1)$$

не имеет решений, если уравнение

$$4p\cdot y^2-(3p+1)y+p=0 \qquad (2)$$

не имеет положительных решений. 1) При $p=0$ получаем $y=0$, исходное уравнение решения не имеет. 2) Квадратное уравнение (2) не имеет решения, если его дискриминант отрицателен, т. е. $D=$

$=(3p+1)^2-16p^2<0$, или $7p^2-6p-1>0$. Решая это неравенство, получим

$$p\in\left(-\infty;\ -\frac{1}{7}\right)\cup(1;\ +\infty).$$

3) Уравнение (1) не имеет решений и в том случае, если уравнение (2) имеет решения, но среди них нет ни одного положительного. Воспользовавшись теоремой Виета, получим систему неравенств

$$\begin{cases} D\geqslant 0, \\ \dfrac{3p+1}{p}\leqslant 0, \\ \dfrac{p}{4p}\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{7}\leqslant p\leqslant 1, \\ -\frac{1}{3}\leqslant p<0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{7}\leqslant p<0.$$

Объединяя результаты для всех трех случаев, найдем

$$p\in(-\infty;\ 0]\cup(1;\ +\infty).$$

Замечание. Этот пример удобно решать методом исключения, т. е. найти сначала значения p, при которых уравнение (1) имеет решение. В этом случае уравнение (2) должно иметь хотя бы один положительный корень.

Так как при $p=0$ решений нет, рассмотрим случай $p\neq 0$. Необходимо, чтобы дискриминант уравнения (2) был неотрицательным:

$$D=(3p+1)^2-16p^2\geqslant 0,\ \text{ т. е. }\ -\frac{1}{7}\leqslant p\leqslant 1.$$

Корни разных знаков или равные нулю для уравнения (2) невозможны, так как $\frac{p}{4p}=\frac{1}{4}>0$.

Оба корня уравнения (2) положительны, если

$$\begin{cases} -\frac{1}{7}\leqslant p\leqslant 1, \\ \dfrac{3p+1}{4p}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{7}\leqslant p\leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} p<-\frac{1}{3}, \\ p>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0<p\leqslant 1.$$

Исключая из всей числовой оси промежуток $(0;\ 1]$, получаем множество значений p, при которых уравнение (1) не имеет решений:

$$p\in(-\infty;\ 0]\cup(1;\ +\infty).$$

5. На рис. 36 показано сечение пирамиды плоскостью, проходящей через боковое ребро AS и диагональ основания AC, на

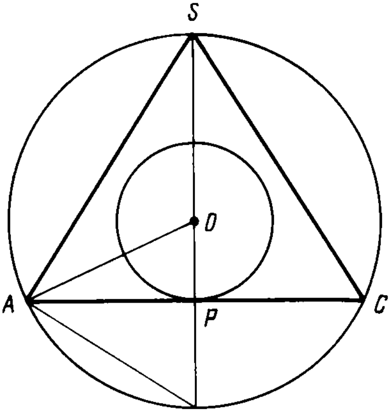


Рис. 36

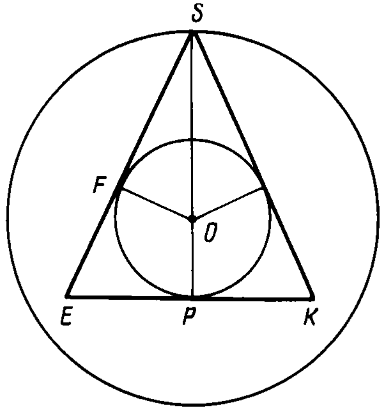


Рис. 37

рис. 37 — сечение, в котором лежат высота пирамиды и апофема SE. На этих рисунках O — общий центр описанного и вписанного шаров; $OS=OA=R$ — радиус описанного шара; $OP=OF=r$ — радиус вписанного шара. Длина отрезка EK равна длине стороны основания пирамиды. Из ΔAPO $AP=\sqrt{R^2-r^2}$, тогда $EP=$ $=AP/\sqrt{2}=\sqrt{R^2-r^2}/\sqrt{2}$. Так как $\Delta OFS\sim\Delta EPS$, то $\frac{OF}{FS}=\frac{EP}{SP}$, или $\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{\sqrt{2}(R+r)}$. Отсюда получаем $r\sqrt{2}(R+r)=(R-r)(R+r)$ и $R=r(1+\sqrt{2})$. Так как $SP=H=R+r$, то $H=(2+\sqrt{2})r$. Следовательно, $r=\frac{H(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ и $R=\frac{H}{\sqrt{2}}$.

Для вычисления объема пирамиды нужна еще длина стороны основания

$$EK=2EP=\sqrt{2}\sqrt{R^2-r^2}=H\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

Объемы шаров и пирамиды запишем по известным формулам.

Вариант № 38

1. $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\\ 0{,}6x+0{,}4y=12;\end{cases}$ $x^2-22x+120=0$, $x_1=12$, $y_1=12$; $x_2=10$, $y_2=15$.

3. $\frac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}=2\Rightarrow 16x^2-122x+225=0$. $x_1=9/2$, $x_2=25/8$ — посторонний корень.

4. Разложим на множители подкоренное выражение $\frac{x+1}{\sqrt{(x+3)(1-x)}}>0$. Так как $x+1>0$, то $x+3>0$, следовательно, $1-x>0$. Таким образом, $-1<x<1$.

5. Введем обозначения: r_1 и r_2 — радиусы окружностей, описанных вокруг оснований призм; h_1 и h_2 — высоты призм. Рассмотрим осевое сечение ASB конуса (рис. 38). Будем считать, что в этом сечении лежит боковое ребро CD первой призмы и боковое ребро EF второй призмы. Тогда $KD=r_1$, $LF=r_2$.

Пусть $SK=x$; $SL=y$. Из подобия треугольников SLF, SKD и SOA получим

$$\frac{r_1}{x}=\frac{R}{H}; \quad \frac{r_2}{y}=\frac{R}{H}. \qquad (1)$$

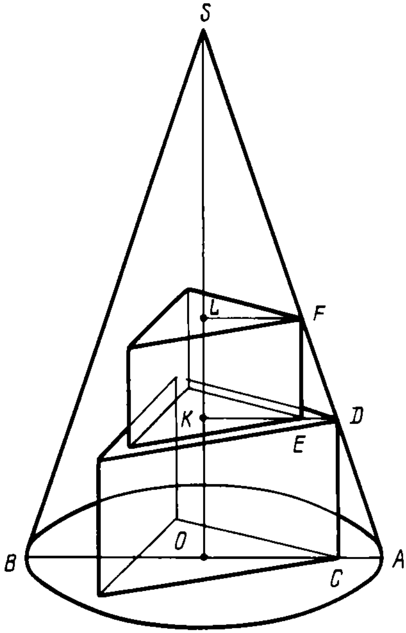


Рис. 38

Условие подобия призм $\frac{h_2}{r_2}=\frac{h_1}{r_1}$ перепишем в виде

$$\frac{x-y}{r_2}=\frac{H-x}{r_1}.$$

Подставляя в эту зависимость выражения r_2 и r_1 из формул (1), получим $y=\frac{x^2}{H}$. Следовательно,

$$r_2=\frac{x^2R}{H^2} \text{ и } h_2=x-y=\frac{x(H-x)}{H}.$$

Объем второй призмы

$$v(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}r_2^2h_2=\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{R^2}{H^5}x^5(H-x) \quad (0<x<H).$$

Найдем производную этой функции

$$v'(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{R^2}{H^5}x^4(5H-6x);$$

$v'(x)=0$ при $x=\frac{5}{6}H$. Если $x<5H/6$, $v'(x)>0$, при $x>\frac{5}{6}H$ $v'(x)<0$; следовательно, в точке $x=5H/6$ функция $v(x)$ имеет максимум. В

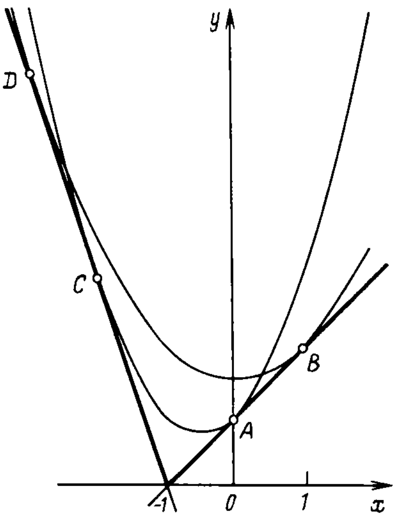


Рис. 39

этой точке функция принимает наибольшее значение, так как других критических точек в промежутке $0<x<H$ нет. Наибольшее значение объема второй призмы

$$\max v(x)=v\left(\frac{5}{6}H\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^5 R^2H;$$

оно достигается, когда высота h_1 первой призмы равна $H/6$.

Вариант № 39

3. Указание. Разделите левую и правую части уравнения на 16^x.

5. Докажите, что две боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$.

Вариант № 40

1. Пусть x_1 — абсцисса точки касания прямой и параболы $y=1+x+x^2$. Тогда уравнение касательной можно записать в виде

$$y=(1+x_1+x_1^2)+(1+2x_1)(x-x_1),$$

или

$$y=(1+2x_1)x+1-x_1^2.$$

Если x_2 — абсцисса точки касания с параболой $y=(x^2+3)/2$, то уравнение той же касательной имеет вид

$$y=\frac{1}{2}(x_2^2+3)+x_2(x-x_2),$$

или

$$y=x_2x+\frac{3}{2}-\frac{x_2^2}{2}.$$

Так как в уравнении прямой $y=kx+b$ коэффициенты k и b определяются однозначно, мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 1+2x_1=x_2, \\ 1-x_1^2=\frac{3}{2}-\frac{x_2^2}{2}, \end{cases}$$

из которой найдем абсциссы точек касания. Система имеет два решения. Решению $x_1=0$, $x_2=1$ соответствует уравнение общей касательной $y=x+1$ (рис. 39). В точках $A(0;\ 1)$ и $B(1;\ 2)$ эта прямая касается соответственно парабол $y=1+x+x^2$ и $y=(x^2+3)/2$.

Второе решение системы $x_1=-2$, $x_2=-3$ дает уравнение $y=-3x-3$ еще одной общей касательной; $C(-2; 3)$ и $D(-3; 6)$ — точки касания.

2. Выражая $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\sin x$ и $\cos x$, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x}=16\cos^3 2x.$$

Используя формулы двойного аргумента, получаем $\cos 2x= =4\cos^3 2x\cdot\sin^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x=\cos 2x\sin^2 4x \Leftrightarrow \cos 2x\cdot\cos^2 4x=0$. Уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \cos 4x=0.\end{array}\right.$$

3. Уравнение можно заменить смешанной системой

$$\begin{cases} x>1,\\ (x-1)(x+1)=\frac{5}{2}x-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1,\\ 2x^2-5x+2=0.\end{cases}$$

При $x>1$ все логарифмические функции, входящие в уравнение, определены. Корень $x_1=2$ квадратного уравнения является решением данного уравнения; второй корень $x_2=\frac{1}{2}$ — посторонний, он не удовлетворяет условию $x>1$.

4. Так как $x^2=|x|^2$, перепишем неравенство в виде

$$\frac{(|x|+2)(|x|-1)}{(|x|+3)(|x|-2)}>0.$$

Учитывая свойство $|x|\geqslant 0$, приходим к равносильному неравенству $\frac{|x|-1}{|x|-2}>0$, которое заменим совокупностью неравенств

$$\left[\begin{array}{l}|x|<1,\\ |x|>2.\end{array}\right.$$

Условие $|x|<1$ равносильно двойному неравенству $-1<x<1$; неравенству $|x|>2$ удовлетворяют значения x из двух промежутков: $x>2$ или $x<-2$.

5. Проведем сечение через высоту SO и боковое ребро AS пирамиды (рис. 40). В этом же сечении лежит апофема SB. Если O_1 и O_2 — центры описанного и вписанного шаров, то $O_1S=O_1A=R$; $O_1O_2=d$; $O_2D=O_2O=r$. Тогда $O_1O=r+d$ (аналогично рассматриваются случаи $O_1O=r-d$ или $O_1O=d-r$), следовательно, $OA=\sqrt{R^2-(r+d)^2}$; $OB=OA/2$.

Так как $\frac{O_2D}{SD}=\frac{BO}{OS}$, то $\frac{r}{\sqrt{(R+d)^2-r^2}}=\frac{\sqrt{R^2-(r+d)^2}}{2(R+d+r)}$. Отсюда, после сокращения на $R+d+r$, получаем $4r^2=(R-r)^2-d^2$; $3r^2+2Rr-R^2+d^2=0$. Положительный корень этого уравнения дает радиус

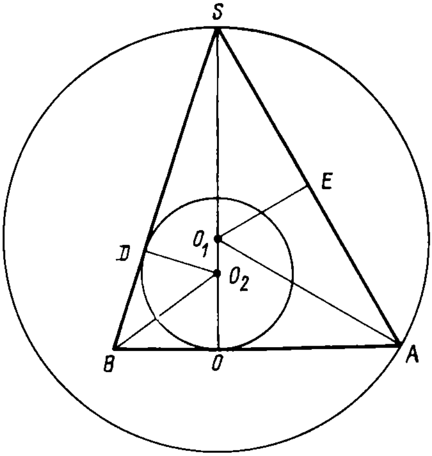


Рис. 40

вписанного шара $r=(\sqrt{4R^2-3d^2}-R)/3$. При $d=0$ $r=r_{\max}=R/3$. В этом случае $OA=2\sqrt{2}R/3$; $OS=4R/3$; $v_п=\frac{1}{3}\cdot 3\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot OA^2\cdot SO=$ $=8\sqrt{3}R^3/27$; $v_ш=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{3}\right)^3=\frac{4\pi}{81}R^3$; $v_ш/v_п=\pi\sqrt{3}/18$.

Вариант № 41

1. Если x и y — скорости велосипедиста и мотоциклиста, то

$$\begin{cases}30x=10y,\\(y-x)\frac{30}{60}=24.\end{cases}$$

Отсюда $x=24$, $y=72$.

4. Уравнение

$$(p-1)\cdot 4^x-4\cdot 2^x+(p+2)=0$$

имеет решение, если уравнение

$$(p-1)z^2-4z+(p+2)=0$$

имеет положительное решение.

Дискриминант уравнения должен быть неотрицательным, т. е.

$$D/4=4-(p-1)(p+2)\geqslant 0,$$

следовательно, $-3\leqslant p\leqslant 2$.

1) Если оба корня положительны,

$$\frac{p+2}{p-1}>0 \text{ и } \frac{4}{p-1}>0,$$

т.е. $p>1$, и с учетом $D\geqslant 0$ $1<p\leqslant 2$.

2) Если корни разных знаков, то

$$\frac{p+2}{p-1}<0,$$

отсюда $-2<p<1$ (в этом случае условие $D\geqslant 0$ выполняется автоматически).

3) При $p=-2$ один из корней равен нулю. Найдем второй корень. Уравнение при $p=-2$ принимает вид $-3z^2-4z=0$, отсюда $z_1=0$; $z_2=-4/3<0$, следовательно, при $p=-2$ исходное уравнение решения не имеет.

Отдельно рассмотрим случай $p=1$. Уравнение превращается в линейное $-4z+3=0$, его корень $z_1=3/4$ положителен.

Объединяя промежутки $-2<p<1$; $1<p\leqslant 2$ и точку $p=1$, получаем промежуток $-2<p\leqslant 2$. Если значение p принадлежит этому промежутку, исходное уравнение имеет решение; при всех других значениях p решений нет.

5. Очевидно, что высота пирамиды и центры оснований призмы лежат на одном диаметре сферы. Проведем сечение через высоту SO_1 и боковое ребро SA пирамиды (рис. 41). Призму можно расположить так, что её ребро EF будет лежать в этом сечении. В этом же сечении, очевидно, лежат центр сферы O и центры оснований призмы O_1 и K.

Обозначим $OO_1=x$, тогда $OS=OA=OF=\sqrt{5}x$. Так как $OA^2=OO_1^2+O_1A^2$, то $(\sqrt{5}x)^2=x^2+(a/\sqrt{3})^2$, отсюда $x=a/2\sqrt{3}$. Пусть $EF=O_1K=h$, тогда

$$KF^2=OF^2-OK^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}a\right)^2-\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}+h\right)^2=\frac{a^2}{3}-\frac{a}{\sqrt{3}}h-h^2.$$

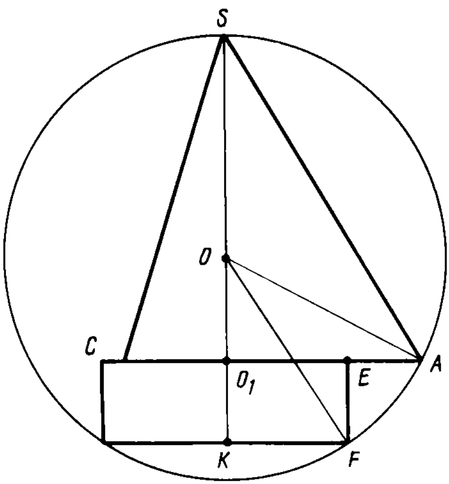


Рис. 41

Объем призмы $v(h)=2KF^2EF=2\left(\frac{a^2}{3}h-\frac{a}{\sqrt{3}}h^2-h^3\right)$; $v'(h)=$ $=2\left(\frac{a^2}{3}-\frac{2a}{\sqrt{3}}h-3h^2\right)$; $v'(h)=0$ при $h=\frac{a}{3\sqrt{3}}$; $\max v(h)=10\sqrt{3}a^3/243$.

Вариант № 42

2. $\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0 \Leftrightarrow 2\cos 4x\left(\frac{1}{2}+\cos 2x\right)=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0,\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

3. $\frac{1-\log_3(x^2+3)}{1-\log_3(x-3)}=2 \Rightarrow (x+3)^2=3(x^2+3)$; $2x^2-6x=0$; $x_1=0$ — посторонний корень; $x_2=3$ удовлетворяет уравнению.

4. $2\cdot 4^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\sqrt{x}}+2<0 \Leftrightarrow (2^{\sqrt{x}}-2)\left(2^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)<0$. Так как $\sqrt{x}\geqslant 0$, то $2\sqrt{x}\geqslant 1$ скобка $\left(2^{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)$ положительна при всех x, на неё можно разделить

$$2^{\sqrt{x}}-2<0 \Leftrightarrow \sqrt{x}<1 \Leftrightarrow 0\leqslant x<1.$$

5. По условию $SE=EB$ (рис. 42), $K\in AE$. Если SR — апофема, то $QR=RS/3$. Пусть $KK_1=h$, $PK=x$. Из подобия треугольников PKQ и RAQ получим $\frac{PK}{AR}=\frac{PQ}{QR}$. Проведем $QT\parallel PO_1$:

$\frac{PQ}{QR}=\frac{O_1T}{TO}=\frac{h-H/3}{H/3}$, следовательно, $\frac{x}{H/2}=\frac{h-H/3}{H/3}$ и $x=(3h-H)/2$.

Так как $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{H-h}{H}$, то $A_1B_1=H-h$, $PO_1=(H-h)/2$; $KM^2=$ $=4\cdot KO_1^2=4(PO_1^2+PK^2)=(H-h)^2+(3h-H)^2$. Если d — диагональ призмы, то $d^2=h^2+(H-h)^2+(3h-H)^2$, $(d^2)'=2(11h-4H)$; $(d^2)'=0$ при $h=\frac{4}{11}H$, при этом d принимает наименьшее значение $d_{\min}=$ $=\sqrt{6}H/\sqrt{11}\approx 0{,}74H$. Для сравнения вычислим $d(0)=\sqrt{2}H\approx 1{,}41H$ и $d(H/2)=\sqrt{3}H/2\approx 0{,}87H$.

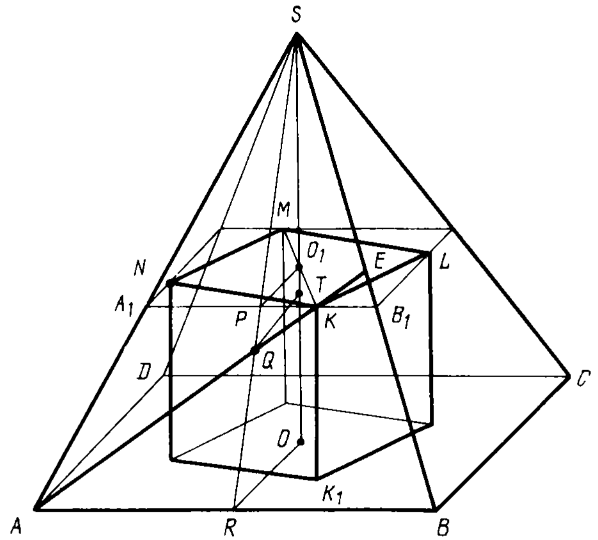


Рис. 42

Вариант № 43

1. Найдем производную функции $y=1+x-\frac{x^2}{2}$: $y'=1-x$.

Напишем уравнения касательных в указанных точках.

1) $x_1=-2$, $y_1=-3$, $y'_3=3$, $y=-3+3(x+2)$, $y=3x+3$;

2) $x_2=2$, $y_2=1$, $y'_2=-1$, $y=1-(x-2)$, $y=3-x$;

3) $x_3=6$, $y_3=-11$, $y'_3=-5$, $y=-11-5(x-6)$, $y=19-5x$.

Найдем координаты точек пересечения касательных (рис. 43). Для точки A $3x+3=3-x$, $x_A=0$, $y_A=3$; для точки B $3x+3=19-5x$, $x_B=2$, $y_B=9$; для точки C $3-x=19-5x$, $x_C=4$, $y_C=-1$.

Площадь треугольника ABC проще всего подсчитать, заключив его в прямоугольник $DCFE$; площади «лишних» треугольников CDA, AEB и BFC легко вычисляются: $S_{\Delta ABC}=S_{EFCD}-S_{\Delta CDA}-$ $-S_{\Delta AEB}-S_{BFC}=10\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2=16$.

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

4. $\lg(x-4)+\lg x<\lg 21 \Leftrightarrow \begin{cases} x>4, \\ x^2-4x-21<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4, \\ -3<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow 4<x<7$.

5. Проведем диагональное сечение призмы (рис. 44). Если r, R — радиусы шаров, то $MO_1=r\sqrt{2}$; $O_2P=R\sqrt{2}$; $AC=a\sqrt{2}$. В ΔO_1O_2E $O_1O_2^2=O_2E^2+O_1E^2$;

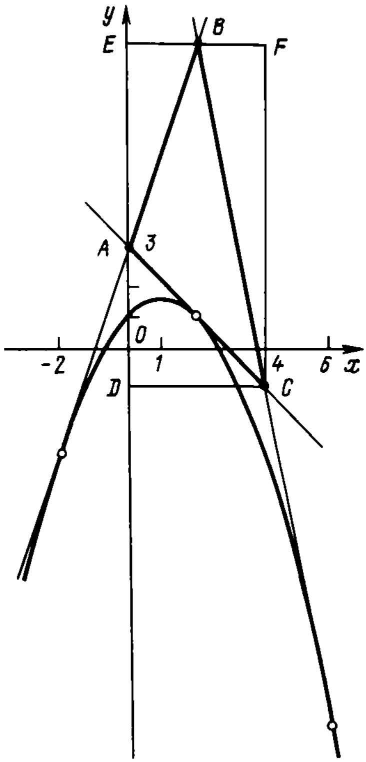


Рис. 43

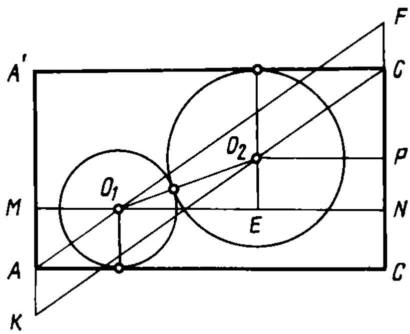


Рис. 44

$$(r+R)^2=(0{,}8a-(R+r))^2+(a\sqrt{2}-(R+r)\sqrt{2})^2.$$

Обозначим $R+r=z$, тогда $z^2-2{,}8az+1{,}32a^2=0$; $z/a=1{,}4\pm 0{,}8$. При $z=2{,}2a$ центр второго шара лежит вне призмы; при $z=0{,}6a$ $r=0{,}25a$; $R=0{,}35a$.

Вариант № 44

2. $2-\cos 2x+5\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x-3=0$.

$(\cos x)_1=3$, $x\in\varnothing$; $(\cos x)_2=-1/2$, $x=\pm 2\pi/3+2k\pi$.

3. Обозначим $2^{x+1/x}=y$; тогда $y^2-5y+4=0$; $y_1=1$, $y_2=4$.

а) $2^{x+1/x}=1$; $x+\dfrac{1}{x}=0$; $x^2+1=0$, $x\in\varnothing$.

б) $2^{x+1/x}=4$; $x+\dfrac{1}{x}=2$, $(x-1)^2=0$, $x=1$.

4. $\log_2(2^x-2)<3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-2>0, \\ 2^x-2<2^{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow$

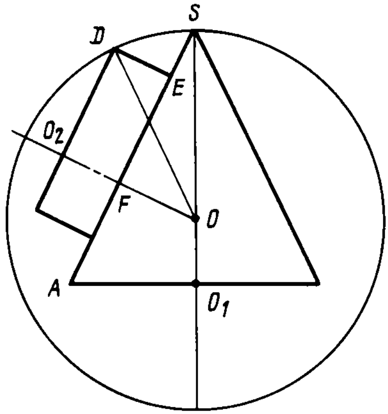


Рис. 45

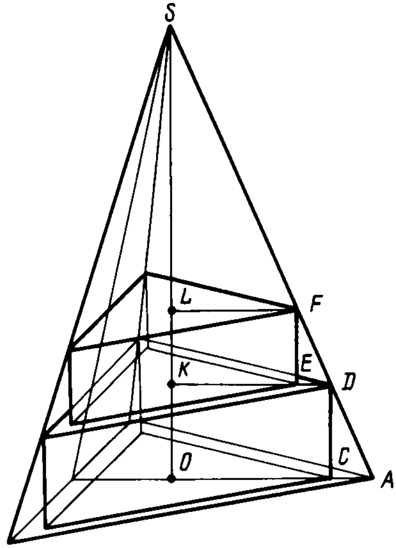


Рис. 46

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 2, \\ (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 2, \\ (2^x - 4)(2^x + 2) < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $2 < 2^x < 4$, т. е. $1 < x < 2$.

5. Проведем сечение через высоту SO_1 и апофему AS пирамиды (рис. 45). Если $SO_1 = H$, то $AO_1 = H/2$; $AS = H\sqrt{5}/2$. Пусть O_2 и F — центры оснований призмы, $OF \perp AS$, следовательно,

$$\frac{FO}{OS} = \frac{AO_1}{AS} \text{ и } FO = R/\sqrt{5}.$$

Обозначим $DE = O_2F = h$, тогда

$$O_2D^2 = R^2 - (h + R/\sqrt{5})^2 = 4R^2/5 - 2Rh/\sqrt{5} - h^2.$$

Объем призмы $v(h) = 3\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot O_2D^2 \cdot DE = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}R^2h - \frac{2}{\sqrt{5}}Rh^2 - h^3\right)$; $v'(h) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{5}R^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}Rh - 3h^2\right)$; $v' = 0$ при $h = 2\sqrt{5}R/15$; $\max v(h) = 2\sqrt{15}R^3/45$.

Вариант № 45

2. $1 - \cos x + \cos 2x - \cos 3x = 0$, $2\cos^2 x - 2\cos 2x \cos x = 0$,

$$2\cos x(\cos x - \cos 2x) = 0, \quad 4\cos x \cdot \sin\frac{x}{2}\sin\frac{3}{2}x = 0;$$

$$x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi;\quad x_2=2n\pi;\quad x_3=\frac{2}{3}m\pi,\quad (x_2 \text{ входит в } x_3).$$

4. $\dfrac{1}{4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2}<\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow \dfrac{4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}-4}{4^{\sqrt{x}}-3\cdot 2^{\sqrt{x}}+2}>0;\ \dfrac{(2^{\sqrt{x}}-4)(2^{\sqrt{x}}+1)}{(2^{\sqrt{x}}-2)(2^{\sqrt{x}}-1)}>0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2^{\sqrt{x}}-4}{2^{\sqrt{x}}-2}>0,\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}>2,\\ \sqrt{x}<1,\end{array}\right.\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4,\\ 0<x<1.\end{array}\right.$$

5. Обозначим $r_2=LF$, $r_1=\dfrac{a}{\sqrt{3}}=KD$, $x=SK$, $y=SL$ (рис. 46). Так как $\Delta SLF\backsim\Delta SKD$, то $\dfrac{LF}{SL}=\dfrac{KD}{SK}$, или

$$\frac{r_2}{y}=\frac{r_1}{x}. \tag{1}$$

Из подобия призм следует, что $\dfrac{FE}{LF}=\dfrac{DC}{KD}$, т. е.

$$\frac{x-y}{r_2}=\frac{H-x}{r_1}. \tag{2}$$

Перемножая (1) и (2), получаем зависимость $\dfrac{x-y}{y}=\dfrac{H-x}{x}$, откуда $y=\dfrac{x^2}{H}$. Тогда

$$EF=x-y=\frac{x}{H}(H-x);\quad LF=r_2=r_1\frac{y}{x}=\frac{ax}{\sqrt{3}H}.$$

Найдем объем второй призмы (как функцию от x):

$$v_2(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\,LF^2FE=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2}{H^3}x^3(H-x)\quad (0<x<H).$$

Вычислим производную функции

$$v_2'(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2}{H^3}x^2(3H-4x).$$

В промежутке $0<x<H$ производная равна нулю только при $x=3H/4$, причем при $x<3H/4$ $v_2'(x)>0$, а при $x>3H/4$ $v_2'(x)<0$. Следовательно, при $x=3H/4$ $v_2(x)$ достигает наибольшего значения (высота первой призмы при этом равна $H/4$):

$$\max v_2(x)=v_2\left(\frac{3}{4}H\right)=\frac{\sqrt{3}\cdot 3^3}{4^5}a^2H.$$

Определим объем пирамиды в этом случае. Так как $\Delta SKD \sim SOA$, то

$$OA = KD\frac{OS}{SK} = \frac{aH}{\sqrt{3}x}.$$

Объем пирамиды $v(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}OA^2 \times$

$$\times\, SO = \frac{a^2H^3}{4\sqrt{3}x^2};$$

$$v\left(\frac{3}{4}H\right) = \frac{4a^2H}{9\sqrt{3}}.$$

Отношение объемов второй призмы и пирамиды $(3/4)^6$.

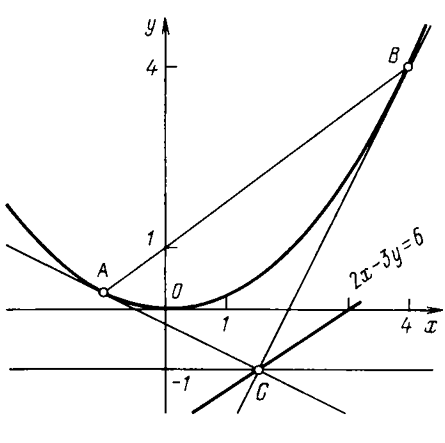


Рис. 47

Вариант № 46

1. Рассмотрим задачу в общем виде. Пусть задана парабола $y = ax^2$ и прямая $y = kx + b$ (рис. 47). Касательная к параболе, проходящая через точку $A(x_1; y_1)$ имеет уравнение $y = ax_1^2 + 2ax_1(x - x_1)$, или $y = 2ax_1x - ax_1^2$. Аналогичное уравнение запишем для касательной, проходящей через точку точку $B(x_2; y_2)$: $y = 2ax_2x - ax_2^2$.

Найдем координаты точки $C(x_0; y_0)$ пересечения двух касательных к параболе, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y_0 = 2ax_1x_0 - ax_1^2, \\ y_0 = 2ax_2x_0 - ax_2^2. \end{cases}$$

Получим $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_0 = ax_1x_2$.

Заметим, что угловой коэффициент k_1 первой касательной равен $2ax_1$, а угловой коэффициент k_2 второй касательной равен $2ax_2$. Если касательные перпендикулярны, то $k_1k_2 = -1$, или $4a^2x_1x_2 = -1$, откуда получаем условие $x_1x_2 = -\frac{1}{4a^2}$. Следовательно, $y_0 = -\frac{1}{4a}$. Полученный результат можно сформулировать так: если две касательные к параболе $y = ax^2$ перпендикулярны, то их точка пересечения лежит на прямой $y = -\frac{1}{4a}$.

Зная y_0, найдем x_0 из уравнения прямой $y = kx + b$. В данном варианте $a = \frac{1}{4}$, следовательно, $y_0 = -1$; тогда из уравнения прямой

$3x-2y=6$ найдем $x_0=\frac{3}{2}$. Искомая точка — $C\left(\frac{3}{2};\ -1\right)$. Чтобы построить касательные, найдем точки касания, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2=-\dfrac{1}{4a^2}, \\ x_1+x_2=2x_0. \end{cases}$$

Получим

$$x_{1,2}=x_0\pm\sqrt{x_0^2+\frac{1}{4a^2}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2};\ x_1=-1,\ y_1=\frac{1}{4};\ x_2=4,\ y_2=4.$$

Замечание. Зависимость $x_1x_2=-\frac{1}{4a^2}$ можно получить из условия $AB^2=AC^2+BC^2$. Действительно, $(x_2-x_1)^2+(ax_2^2-ax_1^2)=$ $=\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+(ax_1^2-ax_1x_2)^2+\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+(ax_2^2-ax_1x_2)^2$. Все слагаемые в этом равенстве можно разделить на $(x_2-x_1)^2$, следовательно,

$$1+a^2(x_1+x_2)^2=\frac{1}{4}+ax_1^2+\frac{1}{4}+ax_2^2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим $\frac{1}{2}+2ax_1x_2=$ $=0$, а следовательно, $x_1x_2=-\frac{1}{4a^2}$.

5. Проведем осевое сечение конуса, в котором лежит боковое ребро BC призмы (рис. 48). Так как вершина B призмы лежит на сфере, $SB=SA=R$. Введем обозначения: $h=BC$, $r=EC=BD$ — радиус окружности, описанной вокруг основания призмы (в шестиугольной призме он равен стороне основания), и $\beta=\angle BSG$. Величины h и r легко выразить через β:

$$r=R\sin\beta,\ \ h=R\cos\beta-r\operatorname{ctg}\alpha=R(\cos\beta-\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha).$$

Найдем площадь боковой поверхности призмы:

$$S(\beta)=6rh=6R^2(\cos\beta\sin\beta-\sin^2\beta\operatorname{ctg}\alpha)\ \ (0<\beta<\alpha).$$

Исследуем функцию $S(\beta)$ с помощью производной

$$S'(\beta)=6R^2(\cos^2\beta-\sin^2\beta-2\sin\beta\cos\beta\operatorname{ctg}\alpha)=$$
$$=6R^2(\cos 2\beta-\sin 2\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha);$$
$$S'(\beta)=0,\ \text{если}\ \operatorname{ctg}2\beta=\operatorname{ctg}\alpha.$$

На промежутке $0<\beta<\alpha$ это уравнение имеет один корень $\beta=\alpha/2$. Вычислим размеры призмы и площадь боковой поверхности при этом значении аргумента:

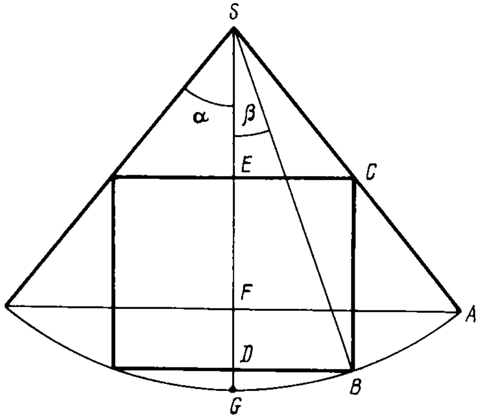


Рис. 48

$$r=R\sin\frac{\alpha}{2};\quad h=R\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}c\right)=\frac{R}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)=$$

$=\dfrac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\dfrac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; $S=3R^2\operatorname{tg}\alpha/2$. Можно утверждать, что найденное значение площади — наибольшее.

Рассмотрим функцию $S(\beta)$ на промежутке $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$. Она непрерывна, имеет одну критическую точку $\beta=\alpha/2$, в которой $S>0$. Так как $S(0)=S(\alpha)=0$, то $S\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ — наибольшее значение функции на промежутке $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$, а следовательно, и на промежутке $0<\beta<\alpha$.

Конечно, можно применить здесь и достаточный признак экстремума функции, исследовав знак производной $S'(\beta)$.

Вариант № 47

1. Если первая бригада может выполнить работу за x дней, а вторая за y дней, то часть работы, выполняемая первой бригадой за один день (производительность), равна $1/x$, а выполняемая второй бригадой — $1/y$. При совместной работе бригады должны выполнять в день $1/12$ часть работы, фактически они выполняли $1/15$. Следовательно,

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12},\\[2mm] \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{15}.\end{cases}$$

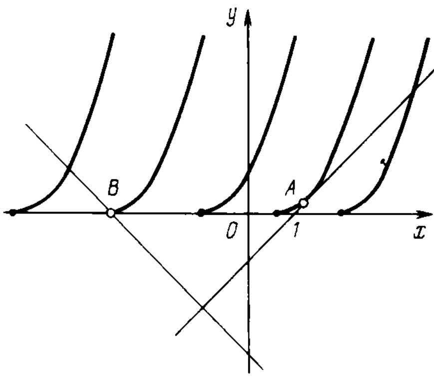


Рис. 49

Решая эту линейную относительно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ систему, получим

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{18}; \ \frac{1}{y}=\frac{1}{36}.$$

2. *Указание.* Перейдите к функциям двойного аргумента.

4. Начнем с геометрической иллюстрации. Уравнению $x=a+\sqrt{y}$ при каждом значении a соответствует в плоскости xy правая ветвь параболы (рис. 49). Вершина параболы имеет координаты $x=a$, $y=0$. При увеличении a парабола смещается вправо, при уменьшении a — влево.

Уравнение $y^2-x^2-2x+4y+3=0$ желательно упростить. Сгруппировав слагаемые, убедимся, что левую часть можно разложить на множители:

$$(y^2+4y+4)-(x^2+2x+1)=0,$$
$$(y+2)^2-(x+1)^2=0,$$
$$(y+2-x-1)(y+2+x+1)=0,$$
$$(y-x+1)(y+x+3)=0.$$

Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} y-x+1=0, \\ y+x+3=0 \end{array}\right.$$

и на плоскости xy задает две прямые. Теперь решение задачи становится наглядным. При $a=-3$ вершина параболы (точка B) попадает на прямую $y+x+3=0$, а при всех $a<-3$ соответствующая парабола пересекает эту прямую. При движении параболы вправо надо найти значение параметра a_k, при котором парабола будет касаться прямой $y=x-1$. При $a>a_k$ правая ветвь параболы имеет с прямой $y=x-1$ одну или даже две общие точки.

Таким образом, исследование данной системы уравнений можно заменить исследованием двух более простых систем. Исследуем на совместно систему

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{y}, \\ y-x+1=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Исключая x, придем к квадратному относительно $\sqrt{y}$ уравнению $y-\sqrt{y}+1-a=0$. Найдем дискриминант уравнения $D=1-4(1-a)=$

$=4a-3$; $D \geqslant 0$ при $a \geqslant \frac{3}{4}$.

Среди корней этого уравнения

$$(\sqrt{y})_{1,2}=\frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$$

всегда есть один положительный, значит, при $a \geqslant \frac{3}{4}$ система (1), а вместе с ней и исходная система, имеет решение. При $a<\frac{3}{4}$ система (1) несовместна.

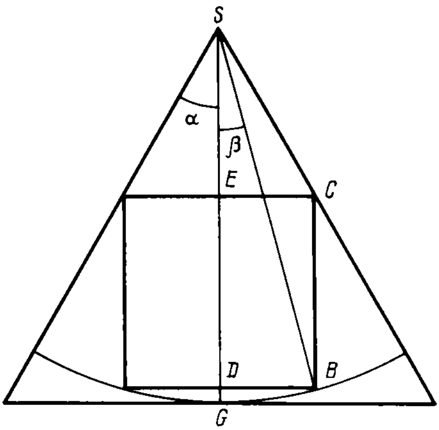


Рис. 50

Решая систему

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{y}, \\ y+x+3=0, \end{cases} \qquad (2)$$

опять придем к квадратному относительно $\sqrt{y}$ уравнению $y+\sqrt{y}+3+a=0$. Дискриминант этого уравнения $D=1-4(3+a)=$ $=-11-4a$ неотрицателен при $a \leqslant -11/4$. Так как в этом случае

$$(\sqrt{y})_{1,2}=\frac{-1 \pm \sqrt{-11-4a}}{2},$$

надо потребовать, чтобы среди корней был хотя бы один неотрицательный. Достаточно выполнить условие $-1+\sqrt{-11-4a} \geqslant 0$, откуда получаем $a \leqslant -3$.

При $a \leqslant -3$ система (2), а вместе с ней и исходная система, имеет решение. При $a>3$ система (2) решения не имеет.

Итак, если $a \geqslant \frac{3}{4}$ или $a \leqslant -3$, исходная система имеет решение; при $-3<a<\frac{3}{4}$ у систем (1), (2) решений нет, а следовательно, не имеет решений и исходная система.

5. *Указание*. На рис. 50 дано диагональное сечение пирамиды, здесь $SG=SB=H$. Решение аналогично решению задачи 5 из варианта № 46.

Вариант № 48

3. Выполнив подстановку $2^{1/x+x}=y$, получим уравнение $y^2-5\sqrt{2}y+8=0$. Найдем его корни $y_{1,2}=\frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2}=\frac{5\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2}$; $y_1=4\sqrt{2}$; $y_2=\sqrt{2}$.

Корню $y_1=4\sqrt{2}$ соответствует уравнение

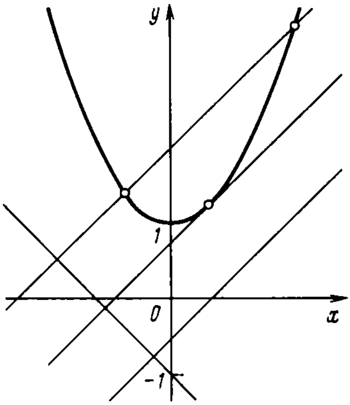


Рис. 51

$$2^{1/x+x}=2^{5/2},$$

откуда $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$, или $2x^2-5x+2=0$. Решая полученное уравнение, находим корни исходного уравнения $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$. Для корня $y_2=\sqrt{2}$ мы получаем уравнение $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$, которое не имеет решений.

4. Левую часть второго уравнения системы можно разложить на множители, линейные относительно x и y. Действительно, собирая слагаемые, содержащие a, получаем $(x^2-y^2+x-y)+a(x+y+1)=0$, далее $(x-y)(x+y+1)+a(x+y+1)=0$ и $(x+y+1)(x-y+a)=0$. Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}x+y+1=0,\\ x-y+a=0\end{array}\right.$$

и задает на плоскости xy две прямые (рис. 51). При увеличении параметра a вторая прямая смещается вверх (влево), при уменьшении a — вниз (вправо).

Данную систему можно представить как совокупность двух систем

$$\begin{cases}y=x^2+1,\\ x+y+1=0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}y=x^2+1,\\ x-y+a=0.\end{cases}$$

Исключая переменную y из первой системы, получаем уравнение $x^2+x+2=0$, которое решений не имеет (прямая $x+y+1=0$ с параболой $y=x^2+1$ не пересекается).

Вторая система сводится к квадратному уравнению

$$x^2-x+1-a=0,$$

которое имеет решение, если его дискриминант $D=4a-3\geqslant 0$, т. е. при $a\geqslant 3/4$. Соответствующее значение y тогда можно найти из первого уравнения системы. Очевидно, что при $a=3/4$ (когда квадратное уравнение имеет совпадающие корни) парабола $y=x^2+1$ касается прямой $y=x+3/4$ (рис. 51), при $a>3/4$ прямая $y=x+a$ расположена выше и пересекает параболу в двух точках. При $a<3/4$ прямая $y=x+a$ и парабола $y=x^2+1$ не имеют общих точек.

5. *Указания.* Чертеж к задаче аналогичен рис. 38. Высота h первой призмы задана, высоту h_2 второй призмы надо соответствующим образом подобрать. Введем обозначения: R, r, r_2 — соответственно радиус основания конуса и радиусы окружностей, описанных около оснований первой и второй призм. Один из этих радиусов, например r, будем в процессе решения считать заданным (в выражение для отношения объемов второй призмы и конуса он, очевидно, не войдет). Тогда при заданных h и r радиусы r_2 и R, а также высота конуса H определяются как функции h_2 из уравнений:

$$\frac{r_2}{r}=\frac{h_2}{h};\ \frac{r_2}{r}=\frac{H-h-h_2}{H-h};\quad \frac{R}{r}=\frac{H}{H-h}.$$

Сравнивая первые два уравнения, получим $H=h^2/(h-h_2)$, затем найдем из третьего $R=rh/h_2$ и из первого $r_2=rh_2/h$. Отношение $z(h_2)$ объема второй призмы к объему конуса

$$z(h_2)=\frac{6}{\pi}\frac{h_2^5(h-h_2)}{h^6}\quad (0<h_2<h).$$

Исследовав функцию, получим

$$\max z(h_2)=z\left(\frac{5}{6}h\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

Вариант № 49

1. Графиком функции $y=(x^2-12x)/8$ является парабола, пересекающая ось Ox в точках $x=0$ и $x=12$. В уравнении кривой $x^2+y^2-18x-12y+97=0$ проведем группировку членов

$$(x^2-18x+81)+(y^2-12y+36)-20=0$$

и преобразуем его к виду $(x-9)^2+(y-6)^2=20$. Это уравнение задает окружность радиуса $2\sqrt{5}$ с центром в точке O_1 (9; 6). Докажем, что отрезок AB наименьшей длины должен лежать на продолжении радиуса O_1B. Предположим противное: пусть B^*A — отрезок наименьшей длины и отрезки O_1B^* и B^*A не лежат на одной прямой (рис. 52). Соединив точки O_1 и A, получим для треугольника O_1B^*A неравенство

$$O_1B^*+B^*A>O_1A.$$

Пусть B — точка пересечения отрезка O_1A с окружностью, тогда

$$O_1B^*+B^*A>O_1B+BA.$$

Так как $O_1B^*=O_1B$, то $B^*A>BA$. Предположение, что отрезок B^*A имеет наименьшую длину, оказалось ложным.

Теперь задачу можно сформулировать проще. Нужно на параболе $y=(x^2-12x)/8$ найти такую точку A, чтобы длина отрезка O_1A была наименьшей.

Пусть A — произвольная точка параболы, тогда

$$O_1A^2=\left(\frac{x^2-12x}{8}-6\right)^2+(x-9)^2=z(x).$$

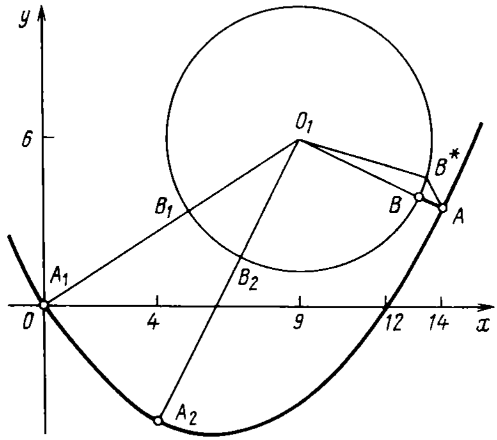


Рис. 52

После преобразований получаем

$$y(x)=\frac{1}{64}x^4-\frac{3}{8}x^3+\frac{7}{4}x^2+117.$$

Исследуем функцию на экстремум:

$$z'(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{9}{8}x^2+\frac{7}{2}x=\frac{x(x^2-18x+56)}{16}=\frac{x(x-4)(x-14)}{16}.$$

Получили три критические точки: $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=14$. Производная меньше нуля в промежутках $(-\infty;\ 0)$ и $(4;\ 14)$; больше нуля в промежутках $(0;\ 4)$ и $(14;\ +\infty)$. Следовательно, в точках $x_1=0$ и $x_3=14$ функция имеет минимумы, между ними находится точка максимума $x_2=4$.

Вычислим значения функции в найденных точках:

$$z(0)=117;\quad z(4)=125;\quad z(14)=\frac{125}{4}.$$

Очевидно, что при $x=14$ функция $z(x)$ принимает наименьшее значение; наименьшее значение длины отрезка O_1A равно $5\sqrt{5}/2$ и достигается, когда точка A имеет координаты (14; 3,5). Длина отрезка AB в этом случае равна $\frac{5\sqrt{5}}{2}-2\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

4. Левая часть неравенства определена при $x>2$; при этом $x^2-4>0$, следовательно, неравенство можно заменить равносильным $\log_{1/2}(x-2)>0$. Отсюда $0<x-2<1$, или $2<x<3$.

5. Проведем сечение через диаметр сферы, на котором лежат центры оснований E, K, L обеих призм, и боковое ребро AD первой призмы. Можно считать, что в этой же плоскости лежит боковое ребро BF второй призмы (рис. 53).

Введем обозначения: $AD = 2H$, $BF = 2h$. Так как призмы подобны, то $\frac{EB}{BF} = \frac{AK}{AD}$. Отсюда

$$EB = \frac{BF \cdot AK}{AD} = \frac{h\sqrt{R^2 - H^2}}{H}.$$

Вершины A и B призм лежат на сфере, следовательно, $OA = OB = R$. В ΔOEB $OB^2 = EB^2 + OE^2$. Так как $OE = OK + KE$, предыдущее равенство можно переписать в виде

$$R^2 = \frac{h^2(R^2 - H^2)}{H^2} + (H + 2h)^2.$$

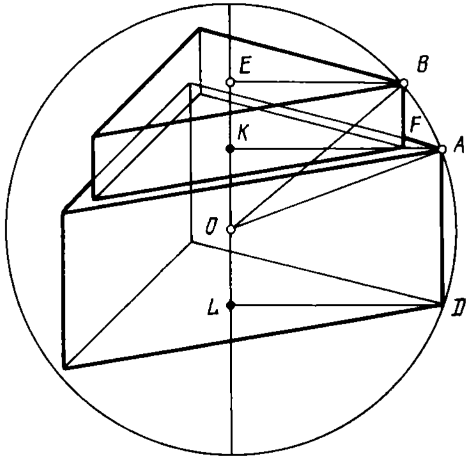


Рис. 53

После упрощений получаем

$$h^2(R^2 + 3H^2) + 4hH^3 - (R^2 - H^2)H^2 = 0;$$

решая его, находим $h(H) = H \cdot \frac{R^2 - H^2}{R^2 + 3H^2}$ $(0 < H < R)$.

Вычислим производную функции $h'(H) = \frac{-3H^4 - 6H^2R^2 + R^4}{(R^2 + 3H^2)^2}$.

Производная равна нулю при $H = \sqrt{2/\sqrt{3} - 1}\,R$, в этой точке функция $h(H)$ имеет наибольшее значение, причем

$$h = H/\sqrt{3} = \sqrt{2/\sqrt{3} - 1}\,R/\sqrt{3}.$$

Вариант № 50

3. Найдем производную функции

$$y'(x) = a \cdot 8^x \ln 8 + (3a + 1) \cdot 4^x \cdot \ln 4 + (9a + 1) \cdot 2^x \cdot \ln 2 =$$
$$= (3a \cdot 4^x + 2(3a + 1) \cdot 2^x + (9a + 1)) \cdot 2^x \cdot \ln 2.$$

Так как $2^x \cdot \ln 2 > 0$, знак производной $y'(x)$ совпадает со знаком квадратичной функции:

$$\varphi(z) = 3az^2 + 2(3a + 1)z + (9a + 1) \quad (z > 0).$$

Здесь введено обозначение $z = 2^x$; отметим, что функция $z = 2^x$ возрастающая и каждому значению $z > 0$ соответствует единственное значение $x = \log_2 z$.

Рассмотрим возможные частные случаи. 1) Если квадратное уравнение $\varphi(z) = 0$ имеет два различных корня, из которых хотя бы один положительный, то заданная функция $y(x)$ имеет экстремум. Действительно, если z_0 — один из корней, то $y'(x_0)=0$, где $x_0=\log_2 z_0$. При переходе аргумента x через точку x_0 переменная z переходит через точку z_0, при этом меняется знак квадратичной функции $\varphi(z)$, а значит, и знак производной $y'(x)$.

2) Если квадратное уравнение $\varphi(z)$ имеет один корень z_0, то при $z_0>0$ производная $y'(x)$ обращается в нуль при $x=x_0=\log_2 z_0$, но при переходе через эту точку знак функции $\varphi(z)$ не меняется. Если $z_0\leqslant 0$, то $\varphi(z)$ сохраняет знак, производная $y'(x)$ в нуль не обращается. Таким образом, если уравнение $\varphi(z)=0$ имеет один корень (точнее, корни его совпадают), то функция $y(x)$ экстремума не имеет.

3) Если среди корней уравнения $\varphi(z)=0$ нет положительных, то $y'(x)$ в нуль не обращается и сохраняет знак при всех x.

4) Уравнение $\varphi(z)=0$ может вообще не иметь корней, тогда $y'(x)$ сохраняет знак и $y(x)$ экстремумов не имеет.

5) Уравнение $\varphi(z)=0$ превращается в линейное, когда коэффициент при z^2 обращается в нуль. Если его корень положителен, функция имеет экстремум; в противном случае экстремума нет.

Исследуем функцию $\varphi(z)=3a\cdot z^2+2(3a+1)z+(9a+1)$.

а) Уравнение $\varphi(z)=0$ не имеет решений или имеет совпадающие корни, если $D\leqslant 0$, т. е.

$$(3a+1)^2-3a(9a+1)\leqslant 0.$$

Следовательно, $18a^2-3a-1\geqslant 0$. Этому неравенству удовлетворяют значения $a\leqslant -\frac{1}{6}$ или $a\geqslant\frac{1}{3}$.

б) Если оба корня неположительны, то a удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} D>0, \\ -\dfrac{3a+1}{a}\leqslant 0, \\ \dfrac{9a+1}{a}\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6}<a<\frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} a\leqslant -\frac{1}{3}, \\ a>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{1}{3}.$$

в) При $a=0$ получаем уравнение $2z+1=0$, которое имеет единственный корень $z_1=-1/2$, следовательно, при $z>0$ $\varphi(z)>0$.

Объединяя найденные в пунктах «а», «б», «в» ответы, получаем решение задачи: $a\in(-\infty;\ -\frac{1}{6}]\bigcup[0;\ +\infty)$.

4. Неравенство приводится к виду $\dfrac{\lg^2 x+2\lg x+3}{(\lg x-1)(\lg x+1)}>0$. Так как $\lg^2 x+2\lg x+3>0$ при всех $x>0$, то приходим к равносильному неравенству

$$(\lg x-1)(\lg x+1)>0.$$

5. На рис. 54 показано осевое сечение конуса, проходящее через ребро AA_1 призмы. Центры оснований призмы F и E

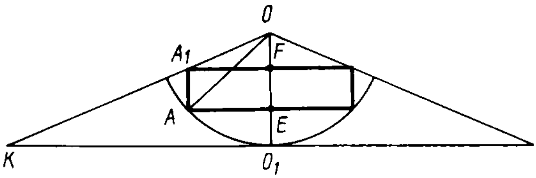


Рис. 54

лежат на высоте OO_1 конуса. Пусть $OO_1=H$. По условию задачи $KO_1=R$, $A_1F=AE=R/5$; $AA_1=EF=R/10$. Так как $AO=H$, то $OE=\sqrt{H^2-(R/5)^2}$ и $OF=\sqrt{H^2-(R/5)^2}-R/10$. В подобных треугольниках A_1FO и KO_1O $A_1F=R/5$, следовательно, $OF=H/5$. Получаем уравнение $\sqrt{H^2-(R/5)^2}-R/10=H/5$, которое приводится к виду

$$96H^2-4RH-5R^2=0.$$

Отсюда $H=R/4$ и объем конуса $v_к=\pi R^3/12$. Объем призмы

$$v_п=6\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{R^2}{25}\cdot\frac{R}{10}=\frac{3\sqrt{3}R^3}{500};$$

$$\frac{v_к}{v_п}=\frac{125\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Вариант № 51

4. Группируя слагаемые, содержащие x и y, перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} y-1=-(x-1)^2, \\ (x-1)^2+(y-a)^2=1. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение системы задает на плоскости xy параболу с вершиной в точке A (1; 1), второе — окружность радиуса 1 с центром в точке O_1 (1; a). При увеличении параметра a окружность смещается вверх, при уменьшении — вниз (рис. 55). Сразу видно, что окружность и парабола не имеют общих точек, если $a>2$. Наименьшему значению a, при котором система совместна, соответствует окружность, касающаяся параболы снизу.

Из уравнений системы легко исключается x и получается уравнение, содержащее только неизвестное y:

$$y^2-(2a+1)y+a^2=0. \qquad (2)$$

Очень важно отметить, что из первого уравнения системы следует ограничение $y\leqslant 1$.

Итак, если пара чисел $(x_0;\ y_0)$ является решением системы (1), то y_0 — решение уравнения (2); и обратно, если $y_0\leqslant 1$ — решение уравнения (2), то из уравнения $(x-1)^2=1-y$ можно найти соответствующее значение x_0 и получить решение $(x_0;\ y_0)$ системы (1).

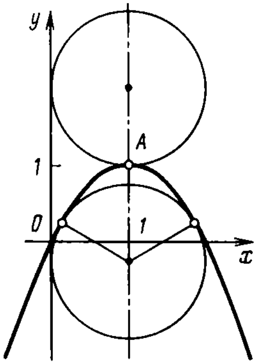


Рис. 55

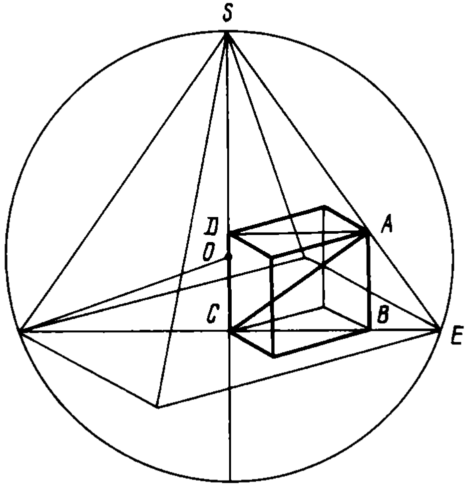


Рис. 56

Теперь задачу сформулируем так: найти все значения параметра a, при которых уравнение (2) имеет решение, удовлетворяющее условию $y \leqslant 1$. Найдем дискриминант уравнения

$$D = (2a+1)^2 - 4a^2 = 4a+1.$$

При $a \geqslant -\frac{1}{4}$ существуют корни уравнения

$$y = \frac{2a+1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Достаточно потребовать, чтобы меньший корень не превышал единицы. Получаем неравенство для определения a:

$$\frac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2} \leqslant 1, \text{ или } \sqrt{4a+1} \geqslant 2a-1.$$

Неравенство, очевидно, выполняется, если $2a-1<0$. С учетом условия $a \geqslant -\frac{1}{4}$ получаем промежуток

$$-\frac{1}{4} \leqslant a < \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Если же $2a-1 \geqslant 0$, перейдем к равносильному неравенству

$$4a+1 \geqslant (2a-1)^2, \text{ или } a^2-2a \leqslant 0.$$

Решая его, получаем (с учетом условия $a \geqslant 1/2$) промежуток

$$\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2. \qquad (4)$$

Объединяя промежутки (3) и (4), запишем решение задачи $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 2$.

5. Так как CA — диагональ куба, то $DA = a\sqrt{2}$ (рис. 56). Обозначим $SC = H$, $CE = r$. Из подобия треугольников SDA и SCE следует

$$\frac{SD}{SC} = \frac{AD}{EC}, \quad \text{или} \quad \frac{H-a}{H} = \frac{a\sqrt{2}}{r}.$$

Отсюда $r = \frac{\sqrt{2}aH}{H-a}$.

Для правильной пирамиды, вписанной в сферу радиуса R, выполняется условие

$$H(2R - H) = r^2,$$

где H — высота пирамиды; r — радиус окружности, описанной около основания.

Подставляя в это равенство выражение для r, получим

$$R = \frac{1}{2}H + \frac{a^2 H}{(H-a)^2} \quad (H > a).$$

Найдем наименьшее значение функции $R(H)$, используя производную

$$R'(H) = \frac{1}{2} - \frac{a^2(H+a)}{(H-a)^3};$$

$$R'(H) = 0, \text{ если } (H-a)^3 = 2a^2(H+a).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$H^3 - 3H^2 a + Ha^2 - 3a^3 = 0.$$

Левую часть уравнения можно разложить на множители $(H-3a) \times (H^2 + a^2) = 0$. Уравнение имеет единственное решение $H = 3a$. Производная $R'(H) < 0$, если $a < H < 3a$. Проверим это для точки $H = 2a$:

$$R'(2a) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} < 0;$$

если $H > 3a$, $R'(H) > 0$. Например,

$$R'(4a) = \frac{1}{2} - \frac{5}{27} = \frac{17}{54} > 0.$$

Следовательно, в точке $H = 3a$ достигается минимум функции $R(H)$. Это значение функции будет наименьшим значением во всей области определения:

$$\min R(H) = R(3a) = 9a/4.$$

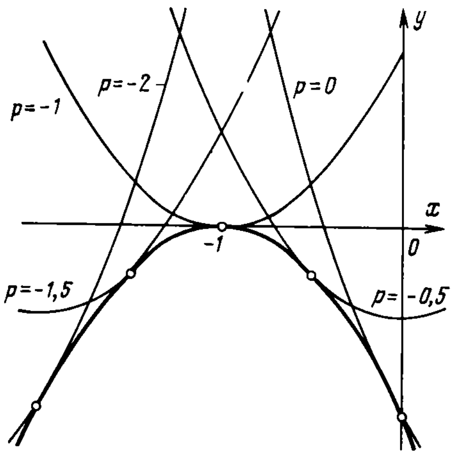


Рис. 57

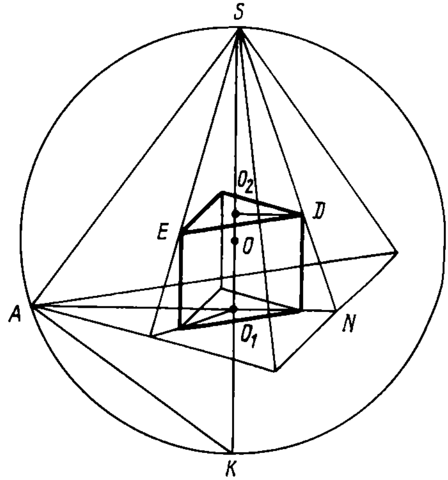


Рис. 58

Наименьшее значение объема описанного шара $v = 343\pi a^3/16$.

Вариант № 52

1. Выделив слагаемые, зависящие от p, перепишем уравнение кривой в виде

$$y = -(x+1)^2 + 2(p-x)^2.$$

Меняя значения p (при фиксированном x), мы можем получить любое значение $y \geqslant -(x+1)^2$. Так как $(p-x)^2 \geqslant 0$, значения $y < -(x+1)^2$ получить нельзя. Следовательно, через точки плоскости xy, лежащие ниже кривой $y = -(x+1)^2$, не проходит ни одна из кривых заданного семейства (рис. 57).

Можно использовать производную при решении этого примера. Фиксируем значение x и рассматриваем y как квадратичную функцию p. Найдем наименьшее значение этой функции при каждом x:

$$y'(p) = -4x + 4p; \quad y'(p) = 0 \ \text{при} \ p = x;$$

$$\min y(p) = y(p)|_{p=x} = x^2 - 2(1+2x)x + 2x^2 - 1 = -(x+1)^2.$$

Значения $y < -(x+1)^2$ не могут быть получены ни при каком p.

4. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (3\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) > 0, \\ (\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} < 1/3, \\ \sqrt{x} > 1, \end{array} \right. \\ \sqrt{x} < 5. \end{array} \right.$$

Следовательно, $x \in [0;\ 1/9) \cup (9;\ 25)$.

5. Обозначим $SO_1 = H$ (рис. 58). По условию задачи $DE = \sqrt{\frac{3}{2}}h$, тогда $DO_2=\sqrt{\frac{3}{2}}h/\sqrt{3}=\frac{h}{\sqrt{2}}$. Из подобия треугольников SDO_2 и SNO_1 получим $\frac{DO_2}{NO_1}=\frac{SO_2}{SO_1}$. Отсюда

$$NO_1=\frac{DO_2\cdot SO_1}{SO_2}=\frac{hH}{\sqrt{2}(H-h)};\quad O_1A=2NO_1=\frac{\sqrt{2}hH}{H-h}.$$

В треугольнике SAK $O_1A^2=SO_1\cdot O_1K$, следовательно, $\frac{2h^2H^2}{(H-h)^2}=$ $=H(2R-H)$. Из этого уравнения найдем радиус сферы

$$R=\frac{1}{2}H+\frac{Hh^2}{(H-h)^2}.$$

Исследуя функцию $R(H)$ на экстремум, получим $R_{\min}=R(3h)=9h/4$ (см. задачу 5 варианта № 51).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Уравнения и системы уравнений, приводящиеся к уравнению второй степени

1. Найдите все значения параметра p, при которых неравенство $p(x^2+2)<x(x+4)$ верно при всех $x\in\boldsymbol{R}$.

Ответ: $p<-1$.

2. При каких значениях параметра p функция

$$\lg((p-4)x^2+(p+1)x+(2p-1))$$

определена при всех $x\in\boldsymbol{R}$?

Ответ: $p>5$.

3. При каких значениях параметра p функция

$$\sqrt{(p+1)x^2+2px+3p+2}$$

определена при всех $x\in\boldsymbol{R}$?

Ответ: $p>-1/2$.

4. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$(p-3)9^x-6\cdot 3^x+p+5=0$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $-5<p\leqslant 4$.

5. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$(p-1)\cdot 9^x+2p\cdot 3^x+3p-2=0$$

не имеет решения.

Ответ: $p\in(-\infty;\ 1/2)\cup[1;\ +\infty)$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=(x-a)^2, \\ y^2-x^2+6y-4x+5=0 \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: $-19/4<a<3/4$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=2x-x^2, \\ y^2-x^2+(a-1)x-(a+1)y+a=0 \end{cases}$$

имеет решение.

Ответ: $a\leqslant 9/4$.

8. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+2x+2, \\ x^2+2x+y^2-2ay+a^2=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $0\leqslant a\leqslant 9/4$.

9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y=2x+a, \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$$

имеет решение.

Ответ: $-2\leqslant a\leqslant 1/4$.

10. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x-a=2\sqrt{y}, \\ y^2-x^2+2x+8y+15=0 \end{cases}$$

имеет решение.

Ответ: $a\leqslant -3$ или $a\geqslant 4$.

Применение производной

11. Вычислите площадь треугольника, ограниченного касательными, проведенными к графику функции $y=x^2-2x+2$ в точках с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=2$, и прямой, соединяющей точки касания. Постройте чертеж.

Ответ: 2 ед^2.

12. Вычислите площадь треугольника, ограниченного касательными, проведёнными к графику функции $y=x^2/2+x+2$ в точках с абсциссами $x_1=-2$ и $x_2=2$, и прямой, соединяющей точки касания. Сделайте чертеж.

Ответ: 8 ед^2.

13. Найдите площадь треугольника, ограниченного касательными, проведёнными к графику функции $y=x^2/2-x+1$ в точках с абсциссами $x_1=1$ и $x_2=3$, и прямой, соединяющей точки касания. Постройте чертёж.

Ответ: 1 ед^2.

14. Вычислите площадь треугольника, образованного тремя касательными, проведенными к графику функции $y=x^2-2x+2$ в точках с абсциссами $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=6$ соответственно.

Ответ: 32 ед^2.

15. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y=x^2+x-1$, $y=(x-1)(2-x)$. Сделайте чертёж.

Ответ: $y=x-1$ или $y=3x-2$.

16. На прямой $x=4y$ найдите точку, через которую проходят две перпендикулярные друг другу касательные к графику функции $y=-x^2$.

Ответ: $(1;\ 1/4)$.

17. На плоскости xy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства $y=p^2+(4-2p)x-x^2$; здесь p — параметр, которому можно придавать любое значение.

Ответ: $\{(x;\ y)\,|\,y<4x-2x^2\}$.

18. На графике функции $y=(x-1)^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ найдите такую точку, чтобы треугольник, ограниченный касательной, проведенной к графику функции в этой точке, и координатными осями, имел наибольшую площадь. Найдите это значение площади.

Ответ: (1/3; 4/9); 1/3 ед^2.

19. Точка A лежит на графике функции $y=x^2/2-3x$, точка B — на кривой $x^2+y^2-18x-6y+89=0$. Какое наименьшее значение может иметь длина отрезка AB?

Ответ: $\sqrt{17/2}-1$.

20. Найдите все значения параметра p, при которых функция $y=5px^3-5x^2+(3p-4)x+1$ будет убывающей.

Ответ: $p\leqslant -1/3$.

21. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y=a\cdot 8^x-(3a-2)\cdot 4^x+3(3a-2)\cdot 2^x-1$ не имеет экстремумов.

Ответ: $a\in(-\infty;\ -1/3]\bigcup[2/3;\ +\infty)$.

22. Найдите все значения параметра a, при которых функция $y=a\cdot 8^x+\frac{3a+5}{2}\cdot 4^x+(6a+7)\cdot 2^x$ не имеет экстремумов.

Ответ: $a\in(-\infty;\ -25/21]\bigcup[0;\ +\infty)$.

Задачи по стереометрии

23. Найдите угол между медианой основания и медианой боковой грани, выходящими из одной вершины правильной треугольной пирамиды, если сторона основания пирамиды равна a и боковое ребро l.

Ответ: $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{12l^2-a^2}/(5a)$.

24. Правильная треугольная пирамида вписана в шар радиуса R.

Центр шара, вписанного в пирамиду, совпадает с центром описанного шара. Найдите объемы пирамиды и каждого из шаров.

Ответ: $8\sqrt{3}R^3/27$; $4\pi R^3/3$; $4\pi R^3/81$.

25. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник, а высота пирамиды проходит через одну из его вершин. Длина высоты пирамиды в полтора раза больше длины стороны основания. Найдите объем пирамиды, если радиус шара, вписанного в пирамиду, равен r.

Ответ: $(2+\sqrt{3})^3 r^3/3$.

26. В правильной треугольной призме, длина бокового ребра которой равна a, расположен шар, касающийся одного основания и всех боковых граней. Другой шар расположен в призме так, что он касается первого шара, другого основания и двух боковых граней. Радиусы шаров относятся, как 13:7. Найдите длину стороны основания призмы.

Ответ: $\dfrac{13a}{6\sqrt{3}}$.

27. В кубе с длиной ребра a расположен шар, касающийся трех граней, сходящихся в вершине A. Другой шар, расположенный в кубе, касается первого шара и всех граней, сходящихся в вершине B; AB — ребро куба. Найдите радиусы шаров, если известно, что они относятся друг к другу, как 5:13.

Ответ: $5a/32$; $13a/32$.

28. Основание параллелепипеда — квадрат, а одно из боковых ребер образует равные углы α со сторонами основания. В параллелепипед вписан шар радиуса r, касающийся всех его граней. Найдите длины всех ребер параллелепипеда.

Ответ: $\dfrac{2r}{\sqrt{2\sin^2\alpha-1}}$; $\dfrac{2r\sin\alpha}{\sqrt{2\sin^2\alpha-1}}$.

29. Основание параллелепипеда — квадрат со стороной a. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Известно, что в параллелепипед можно вписать шар, касающийся всех его граней. Найдите длину боковых ребер параллелепипеда и радиус вписанного шара.

Ответ: $a\sqrt{5}/2$; $a\sqrt{3}/4$.

30. В цилиндр вписан шар радиуса R, касающийся верхнего основания и боковой поверхности цилиндра. Три шара одинакового радиуса расположены внутри цилиндра так, что каждый из них касается двух других, первого шара, нижнего основания и боковой поверхности цилиндра. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: $R(1+\sqrt{2\sqrt{3}-3})^2$.

31. В правильную треугольную призму вписан шар радиуса R, касающийся верхнего основания и всех боковых граней призмы. Три шара одного радиуса расположены внутри призмы так, что каждый из них касается двух других, первого шара, нижнего основания и двух боковых граней призмы. Найдите высоту призмы.

Ответ: $\left(1+2\sqrt{3}+\sqrt{9+4\sqrt{3}}\right)R/\left(1+\sqrt{3}\right)$.

32. Нижнее основание правильной треугольной призмы принадлежит верхней грани куба, а вершины ее верхнего основания расположены на сфере, описанной около куба. Найдите длину ребра куба, если боковое ребро призмы равно a, а длина ребра ее основания в три раза больше длины бокового ребра. Определите отношение объема призмы к объему шара, ограниченного сферой.

Ответ: $4a$; $9/(128\pi)$.

33. В основании правильной призмы лежит квадрат, сторона которого в пять раз больше бокового ребра призмы, равного a. Куб одной своей гранью соприкасается с боковой гранью призмы, а остальные четыре его вершины лежат на сфере, описанной вокруг призмы. Найдите длину ребра куба и отношение площади сферы к площади поверхности куба.

Ответ: a; $51\pi/6$.

34. В сферу вписана правильная треугольная призма, все ребра которой имеют одну и ту же длину a. Другая призма, подобная данной, своей боковой гранью соприкасается с верхним основанием первой призмы (центры соприкасающихся граней совпадают); две оставшиеся вершины второй призмы лежат на сфере. Найдите объем второй призмы.

Ответ: $a^3/96$.

35. В сферу вписана правильная треугольная призма, все ребра которой имеют одну и ту же длину a. Боковая грань другой призмы, подобной данной, лежит в боковой грани первой призмы (центры соприкасающихся граней совпадают); две оставшиеся вершины второй призмы принадлежат сфере. Найдите длину ребра второй призмы и ее объем.

Ответ: $a/2$; $\sqrt{3}a^3/32$; (очевидное решение — вторая призма равна первой).

36. Радиус шара, вписанного в правильную шестиугольную пирамиду, равен r. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды, если расстояние от ее центра до центра вписанного шара равно d. При каком значении d (при заданном r) радиус описанного шара будет наименьшим? Какую часть объема описанного шара будет занимать пирамида в этом случае?

Ответ: $r+\sqrt{4r^2/3+d^2}$; $d=0$; $6\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^2/\pi$.

37. Правильная треугольная призма, все ребра которой имеют длину h, вписана в конус так, что одно ее основание принадлежит основанию конуса, а вершины другого основания лежат на боковой поверхности конуса. Подберите высоту конуса так, чтобы вписанный в этот конус шар имел наибольший объем. Найдите это значение объема и сравните с объемом конуса.

Ответ: $2h$; $8\pi h^3/9$; 4:9.

38. Основание пирамиды — правильный треугольник, одно из боковых ребер совпадает с высотой пирамиды, длины двух других боковых ребер равны l. При какой высоте пирамиды ее объем будет наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: $l/\sqrt{3}$; $l^3/18$.

39. Основания цилиндра являются сечениями шара радиуса R. Определите высоту цилиндра, при которой его объем будет наибольшим. Какую по объему часть шара занимает этот цилиндр?

Ответ: $2R/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$.

40. Все вершины правильной шестиугольной призмы принадлежат сфере радиуса R. При какой высоте призмы ее объем будет наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема. Какую часть объема шара, ограниченного сферой, занимает эта призма? При какой высоте призмы сумма длин всех ее ребер будет наибольшей?

Ответ: $2R/\sqrt{3}$; $2R^3$; $3/(2\pi)$; $R\sqrt{2}$; $12R\sqrt{2}$.

41. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого основания принадлежат поверхности этого шара. Определите высоту призмы, при которой ее объем будет наибольшим. Найдите этот объем.

Ответ: $R/\sqrt{3}$; $R^3/2$.

42. Правильная треугольная призма вписана в шар радиуса R так, что одно из боковых ребер лежит на диаметре шара, а все вершины противоположной боковой грани принадлежат поверхности шара. При какой высоте призмы сумма длин всех ее ребер будет наибольшей?

Ответ: $R/\sqrt{2}$; $6\sqrt{2}R$.

43. Одна из боковых граней правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R. Две вершины призмы, не принадлежащие этой грани, лежат на поверхности шара. Определите высоту призмы, при которой ее объем будет наибольшим.

Ответ: $2R/\sqrt{3}$; $4R^3/9$.

44. Вершина конуса совпадает с центром сферы радиуса R, а окружность его основания принадлежит сфере. При какой высоте конуса его объем будет наибольшим? Какую по объему часть шара, ограниченного сферой, занимает этот конус?

Ответ: $R/\sqrt{3}$; $1/(6\sqrt{3})$.

45. Вершина правильной четырехугольной пирамиды совпадает с центром шара радиуса R, а вершины ее основания принадлежат поверхности шара. При какой высоте пирамиды ее объем будет наибольшим? Какую по объему часть шара занимает эта пирамида?

Ответ: $R/\sqrt{3}$; $1/(3\pi\sqrt{3})$.

46. В сферу радиуса R вписан конус, окружность основания и вершина которого принадлежат сфере. Какой должна быть высота конуса, чтобы его объем был наибольшим? Найдите отношение объемов конуса и шара, ограниченного сферой.

Ответ: $4R/3$; $8/27$.

47. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, все вершины которой принадлежат сфере. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: $4R/3$; $8\sqrt{3}R^3/27$.

48. В сферу радиуса R вписана пирамида, все вершины которой принадлежат сфере. Основание пирамиды — правильный треугольник, а одно из боковых ребер перпендикулярно основанию. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: $2R/\sqrt{3}$; $2R^3/3$.

49. В сферу радиуса R вписан цилиндр. Второй цилиндр, подобный первому, своим нижним основанием поставлен на верхнее основание первого цилиндра, а окружность его верхнего основания принадлежит сфере. Определите, при какой высоте вписанного цилиндра второй цилиндр будет иметь наибольшую высоту. Найдите в этом случае отношение площадей поверхностей цилиндров.

Ответ: $2\sqrt{2/\sqrt{3}-1}R$; $1/3$.

50. Шар радиуса r вписан в правильную шестиугольную пирамиду, которая, в свою очередь, вписана в сферу. Определите, при какой высоте пирамиды радиус описанной около нее сферы будет наименьшим. Найдите это наименьшее значение радиуса. Докажите, что в этом случае центр сферы, описанной около пирамиды, совпадает с центром вписанного шара. Решите задачу, заменив пирамиду на четырехугольную или на треугольную.

Ответ: $2(1+\sqrt{3})r/\sqrt{3}$; $(2+\sqrt{3})r/\sqrt{3}$; $(2+\sqrt{2})r$; $(1+\sqrt{2})r$; $4r$; $3r$.

51. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, в которую, в свою очередь, вписан шар. При какой высоте пирамиды объем вписанного шара будет наибольшим? Во сколько раз наибольший объем вписанного шара меньше объема шара, ограниченного данной сферой. Докажите, что в случае, когда вписанный шар имеет наибольший объем, его центр совпадает с центром данной сферы.

Ответ: $4R/3$; в 27 раз.

52. В сферу вписан конус, в который, в свою очередь, вписана правильная четырехугольная призма; одно из ее оснований лежит в плоскости основания конуса, а вершины другого основания — на боковой поверхности конуса. Длина бокового ребра призмы равна b, а длина стороны основания равна$2b$. Определите высоту конуса, при которой радиус описанной около него сферы будет наименьшим. Найдите это наименьшее значение радиуса.

Ответ: $3b$; $9b/4$.

53. В сферу радиуса R вписан конус. В конус вписана правильная четырехугольная призма, нижнее основание которой лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания принадлежат боковой поверхности конуса. Определите, при какой

высоте конуса и какой высоте призмы объем призмы будет наибольшим. Найдите это наибольшее значение объема. Покажите, что при этом конус также должен иметь наибольший объем.

Ответ: $4R/3$; $4R/9$; $256R^3/729$.

54. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная призма, у которой длина диагонали основания в два раза больше длины бокового ребра. Вершины верхнего основания правильной шестиугольной призмы принадлежат сфере, а ее нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания данной четырехугольной призмы. Какой должна быть высота шестиугольной призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: $2\sqrt{5}R/15$; $4\sqrt{15}R^3/45$.

55. В сферу вписана правильная треугольная призма, у которой длина высоты равна H, а диагональ боковой грани образует со стороной основания угол 30°. Нижнее основание цилиндра лежит в плоскости верхнего основания призмы, а окружность другого его основания принадлежит сфере. При какой высоте цилиндра его объем будет наибольшим? Найдите это наибольшее значение объема.

Ответ: $H/3$; $5\pi H^3/27$.

56. В конус вписан шар. Второй шар, имеющий радиус r, касается каждой образующей конуса и первого шара. При каком значении радиуса первого шара конус имеет наименьший объем? Какую по объему часть конуса занимает в этом случае первый шар?

Ответ: $5r/4$; $8/25$.

57. В правильную шестиугольную пирамиду с высотой H вписан шар. Второй шар касается всех боковых граней и первого шара. При каком значении радиуса первого шара радиус второго шара будет наибольшим? Какую по объему часть пирамиды занимает при этом первый шар?

Ответ: $H/4$; $\pi\sqrt{3}/12$.

58. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная призма, в которой диагональ боковой грани составляет с боковым ребром угол 30°. Окружность одного из оснований цилиндра принадлежит сфере, а другое основание цилиндра находится в плоскости одной из боковых граней призмы (цилиндр и призма лежат по разные стороны этой плоскости). При какой высоте цилиндра его объем будет наибольшим? Найдите это значение объема.

Ответ: $2\sqrt{5}R/15$; $8\pi\sqrt{5}R^3/135$.

59. В сферу вписана правильная треугольная пирамида, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R. Между боковой гранью пирамиды и сферой расположен цилиндр, одно из оснований которого (ближнее к центру сферы) лежит в плоскости боковой грани, а окружность другого основания принадлежит сфере. При какой высоте цилиндра его объем будет наибольшим? Найдите это значение объема.

Ответ: $R/3$; $5\pi R^3/27$.

60. Через центр основания и середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды, имеющей объем v, проведена плоскость, параллельная другому боковому ребру. Какой должна быть длина стороны основания пирамиды, чтобы площадь получившегося сечения была наименьшей? Найдите это значение площади.

Ответ: $\sqrt[6]{96v^2}$; $3\sqrt[3]{3v^2/2}/4$.

61. Правильная треугольная пирамида имеет объем v. При какой длине стороны основания расстояние от середины бокового ребра до высоты основания, не пересекающей это ребро, будет наименьшим? Найдите это наименьшее расстояние.

Ответ: $\sqrt[3]{9v/2}/2$; $2\sqrt[3]{6}\sqrt[6]{v}$.

62. В правильной четырехугольной пирамиде высота H в два раза больше стороны основания. Нижнее основание правильной четырехугольной призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины верхнего основания лежат в боковых гранях пирамиды на прямых, соединяющих середины апофем с вершинами основания пирамиды. Какой должна быть высота призмы, чтобы длина ее диагонали была наименьшей? Найдите это значение длины диагонали.

Ответ: $H/3$; $H/2$.

63. Правильная четырехугольная пирамида с диагональю основания d вписана в сферу, при этом центр сферы делит высоту пирамиды в отношении $\sqrt{5}:1$, считая от вершины. Верхнее основание правильной треугольной призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины ее нижнего основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это значение объема.

Ответ: $d/6$; $5\sqrt{3}d^3/288$.

64. В шар вписана правильная треугольная пирамида, в пирамиду вписан цилиндр, одно из оснований которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность другого основания касается всех боковых граней. Длины высоты цилиндра и радиуса его основания соответственно равны a и $a/\sqrt{2}$. При какой высоте пирамиды объем шара будет наименьшим? Найдите это значение объема.

Ответ: $3a$; $243\pi a^3/16$.

65. В правильную треугольную пирамиду вписана правильная шестиугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости основания пирамиды, а все вершины другого основания принадлежат боковым граням пирамиды. Высота призмы равна h, а сторона основания $\sqrt{2/3}h$. Какой должна быть высота пирамиды, чтобы радиус описанной вокруг нее сферы был наименьшим? Найдите это значение радиуса.

Ответ: $3h$; $2{,}25h$.

66. Правильная треугольная пирамида с углом α между боковым ребром и высотой вписана в сферу радиуса R так, что ее

вершина находится в центре сферы, а вершины основания — на сфере. Все вершины нижнего основания правильной треугольной призмы (параллельного основанию пирамиды) лежат на сфере, а ее верхнее основание является сечением пирамиды. Какими должны быть сторона основания и высота призмы, чтобы площадь ее боковой поверхности была наибольшей? Найдите это значение площади.

Ответ: $R\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Раздел 2
ФИЗИКА

УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Приступая к решению задачи, надо прежде всего внимательно прочитать ее условие, постараться вникнуть в ее суть, уяснить физический смысл, понять, какие физические процессы и явления включены в условие задачи. Желательно начертить схему (рисунок) физической картины, особенно при решении задач по механике, электростатике, геометрической оптике. Что дает графическое представление физической картины задачи? Во-первых, рисунок делает задачу более наглядной. Во-вторых, сделав рисунок, легче сообразить, что необходимо определить в первую очередь, особенно если рисунок дает развитие физического явления во времени. Например, рисунок может отражать начальное и конечное, а при необходимости, и промежуточное состояния физической системы. Таким образом, рисунок поможет составить алгоритм решения задачи. В-третьих, при ответе с рисунком легче следить за ходом рассуждений экзаменующегося и соответственно правильно его понять, так как встречаются абитуриенты, которые очень путано излагают ход своих рассуждений.

Решение задачи целесообразно проводить в общем (алгебраическом) виде, стремясь выразить искомую величину через величины, заданные в условии задачи. При этом для уяснения физической основы задачи, поиска ее рационального решения и упрощения промежуточных выкладок можно смело вводить буквенные обозначения новых величин (параметров). В дальнейшем, если будут правильно проведены математические преобразования, введенные параметры сократятся, т. е. окончательная зависимость для искомой величины не будет содержать в своей записи никаких величин, кроме тех, что заданы в условии задачи. После того как решение задачи в общем виде получено, необходимо убедиться в том, что оно правильно. С этой целью целесообразно провести анализ решения.

Во-первых, надо по возможности исследовать выведенные зависимости в предельных случаях, т. е. когда включенные в зависимость величины будут принимать характерные или предельные численные значения. Например, решая задачу о движении теннисного мяча, брошенного под углом α к горизонту с начальной

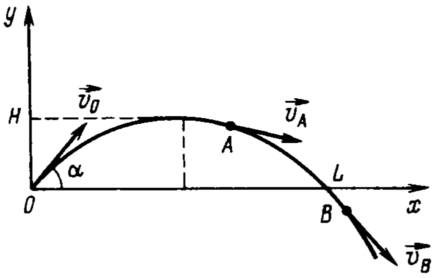


Рис. 59

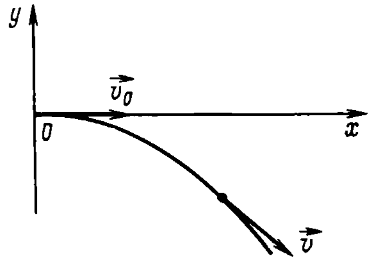


Рис. 60

скоростью v_0 (рис. 59), получаем следующий результат: уравнение движения мяча по вертикальной оси

$$y = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}; \qquad (1)$$

по горизонтальной оси

$$x = v_0 \cos\alpha t. \qquad (2)$$

Время полета мяча при его движении от $x=0$ до $x=L$

$$\tau = 2v_0 \sin\alpha / g. \qquad (3)$$

Максимальная высота полета по отношению к исходной точке $(y=H)$

$$H = 0{,}5 v_0^2 \sin^2\alpha / g. \qquad (4)$$

Дальность полета, соответствующая времени $\tau\,(x=L)$,

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (5)$$

Анализ решения. 1. $\alpha=0$ (мяч брошен горизонтально). Тогда

$$y = -0{,}5gt^2;$$

$$\tau=0; \quad x=v_0 t; \quad H=0; \quad L=0.$$

Этот случай иллюстрирует рис. 60. Здесь движение мяча будет происходить при непрерывном увеличении по модулю координата y и x. Правда такое движение может быть естественным образом ограничено, например, глубиной ямы.

2. $\alpha=45°$. При этом значении угла дальность полета, рассчитанная по формуле (5), принимает максимальное значение

$$L_{\max} = v_0^2/g.$$

3. $\alpha=90°$ (мяч брошен вертикально вверх, рис. 61). Тогда

$$y = v_0 t - 0{,}5gt^2, \quad x=0; \quad \tau = 2v_0/g; \quad H = 0{,}5v_0^2/g; \quad L=0.$$

Здесь при $t>\tau$ $y<0$, т. е. движение мяча будет происходить при

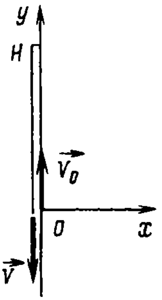


Рис. 61

непрерывном увеличении по модулю координаты y, которое вновь может быть ограничено, например, глубиной ямы.

Во-вторых, следует проверить размерность выведенной зависимости. При этом размерность искомой величины, стоящей слева, должна совпадать с размерностью правой части. Это является необходимым условием правильности выведенной формулы. Например, в левой части формулы (5) стоит физическая величина, имеющая размерность длины; единицей измерения этой величины в СИ является метр (м). Если мы преобразуем единицы измерения физических величин правой части формулы (5) в СИ, то получим

$$\frac{м^2/с^2}{м/с^2}=м.$$

Таким образом, видим, что правая часть формулы (5) имеет также размерность длины.

Другой пример: частица массой m, имеющая заряд q и скорость v, влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции B. Используя равенство центростремительной силы и силы Лоренца, можно записать

$$\frac{mv^2}{R}=qvB.$$

Радиус окружности R, по которой будет двигаться частица в поле,

$$R=\frac{mv}{qB}. \tag{6}$$

Единицы измерения величин в СИ в формуле (6) будут следующими:

$$\text{м}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м/с}}{\text{Кл}\cdot\text{Тл}}.$$

Числитель в правой части равенства имеет размерность импульса силы: Н · с. Известно, что $\text{Тл}=\frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}$. Пользуясь законом электромагнитной индукции $E=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, можно написать, что $\text{Вб}=\text{В}\cdot\text{с}$. Подставляя найденные зависимости в исходное выражение, получим

$$\text{м}=\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{с}/\text{м}^2}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}\cdot\text{В}}.$$

Осталось вспомнить, что по определению работа $A=FS$, а в электростатике работа вычисляется по формуле $A=q\Delta\varphi$. Поэтому можно написать

$$\text{м}=\frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{Дж}}=\text{м}.$$

Или можно воспользоваться другой формулой для определения единицы измерения индукции магнитного поля

$$\text{В}=\frac{M_{\max}}{I\cdot S},$$

где $M_{\max}$ — максимальный момент сил, действующих на плоскую рамку с током, помещенную в магнитное поле; I — сила тока в рамке; S — площадь рамки. Используя эту формулу, можно написать

$$\text{Тл}=\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2};$$

поскольку $\text{А}=\frac{\text{Кл}}{\text{с}}$, то, подставляя эту зависимость в формулу (6), получим

$$\text{м}=\frac{\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}}{\text{Кл}\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Кл}\cdot\text{м}}}=\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Н}\cdot\text{с}}\text{м}=\text{м}.$$

Таким образом, в формуле (6) полное соответствие размерностей правой и левой частей.

После того как итоговая формула проверена, необходимо подставить в нее, согласно условию задачи, числовые значения исходных величин, предварительно приведя их к одной системе единиц измерений. Операцию вычисления искомой величины следует проводить, используя действия над приближенными числами. Необходимо проверить, соответствует ли численный результат искомой величины физическому явлению. Например, если в задаче требуется определить длину световой волны, то абитуриент вне зависимости от решения задачи должен знать, что видимый свет занимает узкий интервал шкалы электромагнитных волн от 0,4 до 0,76 мкм. Поэтому, если абитуриент получил в ответе задачи длину волны видимого света, равную 100 мкм, и с таким ответом задачи выходит отвечать, то экзаменатор оценивает такой ответ не как арифметическую ошибку, а как неполное знание поступающим волновой оптики. Аналогичная ситуация возникает, если экзаменующийся, решив задачу, получает скорость распространения электромагнитных волн $v=3{,}5\cdot10^8$ м/с. Абитуриент должен знать, что предельная скорость распространения электромагнитных волн не может превышать скорость распространения света в вакууме ($c=3\cdot10^8$ м/с) и что ответ, полученный им в задаче, является принципиально неправильным.

Иногда экзаменующиеся, не оценивая критически ответ, полученный ими при решении задачи, выходят отвечать с результатом, противоречащим здравому смыслу. Например, решая задачу о движении шайбы, брошенной хоккеистом, один абитуриент, используя известные исходные данные, определил массу шайбы в 120 кг.

Неверные ответы получают поступающие, которые плохо знают дольные и кратные единицы. Так, при переводе единиц емкости некоторые из них ошибаются в 10^{12} раз. Например, пишут 1 мкФ $=10^6$ Ф (в действительности 1 мкФ $=10^{-6}$ Ф) и т. д.

Как уже упоминалось, некоторые экзаменующиеся не умеют представлять физические величины в векторной форме, переходить от векторной записи уравнений к скалярной. Например, при описании горизонтального колебательного движения шарика под действием пружины (рис. 62) абитуриенты не всегда правильно объясняют переход от уравнения

$$m\vec{a}=\vec{F} \tag{7}$$

к уравнению вида

$$ma_x=-kx, \tag{8}$$

где m — масса шарика; a_x — проекция ускорения $\vec{a}$ на ось Ox; $\vec{F}$ — сила, действующая на шарик со стороны деформированной пружины с жесткостью k.

Чтобы не загромождать память частными случаями, целесообразно овладеть одним универсальным методом перехода от векторного уравнения к скалярному — методом проецирования векторного уравнения на оси координат. Его основой является понятие проекции вектора на какое-либо направление. Проекция C_n произвольного вектора $\vec{C}$ на выбранное направление n (ось On) определяется следующим образом:

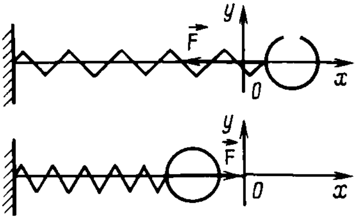


Рис. 62

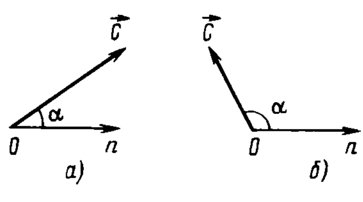


Рис. 63

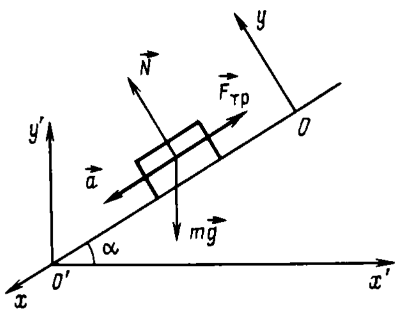


Рис. 64

$$C_n = |C| \cos \alpha,$$

где α — угол между осью On и вектором $\vec{C}$ (рис. 63), т. е. проекция C_n — алгебраическая величина, принимающая в зависимости от угла α либо положительное, либо отрицательное значения. Например, на рис. 63, а $C_n > 0$, так как $\cos\alpha > 0$, а на рис. 63, б $C_n < 0$, так как $\cos\alpha < 0$.

При проецировании векторного уравнения на какое-либо направление проецируется каждый вектор, входящий в исходное уравнение.

Итак, шарик под действием пружины совершает колебательное движение, описываемое в соответствии со вторым законом Ньютона уравнением (7). После проецирования уравнения (7) на ось Ox, начало координат которой (точка O) совпадает с положением равновесия колебательной системы, получим

$$ma_x = F_x,$$

где $F_x = |\vec{F}| \cos\alpha$ — проекция силы $\vec{F}$ на ось Ox, α — угол между положительным направлением оси Ox и вектором силы $\vec{F}$.

Известно, что $|\vec{F}| = k|x|$. Последняя зависимость характеризует физическое условие того, что упругая сила прямо пропорциональна смещению торца пружины вне зависимости от вида деформации (сжатия или удлинения). Таким образом, можно написать:

$$F_x = k|x|\cos\alpha = \begin{cases} kx\cos\pi = -kx, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -kx\cos 0 = -kx, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при любом расположении шарика относительно положения равновесия всегда $F_x = -kx$. Таким образом, после проецирования уравнения (7) на ось Ox приходим к уравнению (8).

Известно, что законы механики не зависят от выбора инерциальной системы отчета. Поэтому, если будем проецировать векторное уравнение, составленное в соответствии со вторым законом Ньютона, на оси координат любой инерциональной системы отсчета (СО), то должны в итоге получить один и тот же результат. Следовательно, выбор СО и связанной с нею системы координат должен быть обусловлен лишь удобством получения конечного результата. Для подтверждения вышесказанного рассмотрим задачу о движении бруса по наклонной плоскости (рис. 64).

Задача. Брус спускается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, с ускорением a. Определите ускорение a,

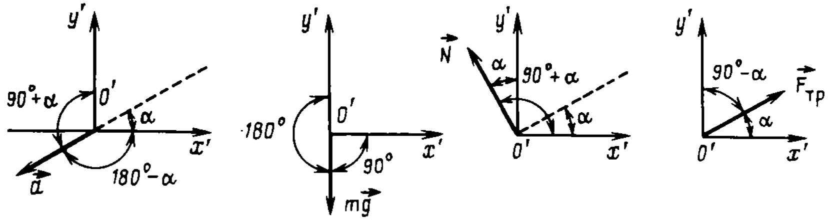


Рис. 65

если коэффициент трения бруса о плоскость равен k. Уравнение, составленное по второму закону Ньютона, для бруса массой m будет иметь вид

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр}}, \tag{9}$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести; $\vec{N}$ — реакция опоры, т. е. сила, действующая со стороны наклонной плоскости на брус; $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения.

Поскольку векторы не лежат на одной прямой, но лежат в одной плоскости, то векторное уравнение (9) необходимо проецировать на две оси координат (обычно выбирается прямоугольная система координат).

I вариант решения. Спроецируем уравнение (9) на оси координат системы $x'O'y'$ (рис. 64). При проецировании будем обозначать $|\vec{N}|=N$, $|m\vec{g}|=mg$, $|F_{\text{тр}}|=F_{\text{тр}}$, $|\vec{a}|=a$. Рис. 65 иллюстрирует выбор углов при проецировании. Сначала спроецируем уравнение (9) на ось $O'x'$:

$$ma\cos(180^\circ-\alpha)=mg\cos 90^\circ+N\cos(90^\circ+\alpha)+F_{\text{тр}}\cos\alpha;$$

используя формулы приведения, получим

$$-ma\cos\alpha=N\sin\alpha+F_{\text{тр}}\cos\alpha. \tag{10}$$

После проецирования (10) на ось $O'y'$ имеем

$$ma\cos(90^\circ+\alpha)=mg\cos 180^\circ+N\cos\alpha+F_{\text{тр}}\cos(90^\circ-\alpha).$$

Используя формулы приведения, найдем

$$-ma\sin\alpha=-mg+N\cos\alpha+F_{\text{тр}}\sin\alpha. \tag{11}$$

Сила трения $F_{\text{тр}}=kN$. Тогда уравнения (10) и (11) после преобразования примут следующий вид:

$$ma\cos\alpha=N\sin\alpha-kN\cos\alpha, \tag{12}$$

$$ma\sin\alpha=mg-N\cos\alpha-kN\sin\alpha. \tag{13}$$

В итоге имеем систему алгебраических уравнений (12), (13) и две неизвестные величины a и N. Используя методы решения систем алгебраических уравнений, например метод подстановки, находим

$$N=mg\cos\alpha, \tag{14}$$

$$a=g(\sin\alpha-k\cos\alpha). \tag{15}$$

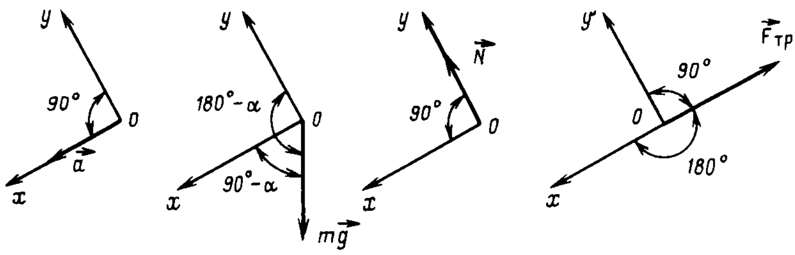


Рис. 66

Этот конечный результат можно получить проще и быстрее, если систему координат связать с наклонной плоскостью (система координат xOy).

II вариант решения. Уравнение (9) в проекциях на оси Ox и Oy (рис. 66) запишется так:

$$ma\cos 90° = mg\cos(180° - \alpha) + N\cos 0° + F_{тр}\cos 90°, \tag{16}$$

$$ma\cos 0° = mg\cos(90° - \alpha) + N\cos 90° + F_{тр}\cos 180°. \tag{17}$$

Применяя формулы приведения и подстановку $F_{тр} = kN$, уравнения (16) и (17) преобразуем к виду

$$N = mg\cos\alpha, \tag{18}$$

$$ma = -kN + mg\cos\alpha. \tag{19}$$

Как видно, зависимость (18) совпадает с формулой (14), которая ранее была получена только после решения двух алгебраических уравнений (12) и (13). Подставляя (18) в (19), находим

$$a = g(\sin\alpha - k\cos\alpha),$$

т. е. вновь приходим к зависимости (15).

Таким образом, изложенное решение показывает, что конечный результат не зависит от выбора инерциальной СО, однако II вариант решения оказался более эффективным по сравнению с первым, т. е. конечный результат получен с меньшими математическими выкладками. Поэтому вопрос о выборе СО должен решаться в зависимости от конкретных условий задачи. При этом СО и связанную с ней систему координат целесообразно выбирать так, чтобы большинство векторов составляли с осями координат углы, равные О, $\frac{\pi}{2}$, π. Если же в направлении векторов наблюдается какая-либо осевая симметрия, то целесообразно одну из координатных осей направить вдоль этой оси симметрии.

При решении задач по атомной физике абитуриенты, как правило, используют готовые формулы энергии атома водорода или радиуса орбиты электрона в атоме. При этом экзаменующиеся часто записывают эти формулы с ошибками, так как они действительно не совсем удобны для механического запоминания.

Более целесообразно запомнить логику вывода этих формул, тем более, что этот вывод не является сложным. Исходными уравнениями теории Бора для атома водорода являются, во-первых, правило квантования момента импульса (произведение импульса электрона на радиус r его орбиты, рис. 67)

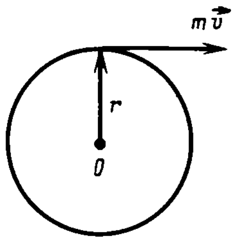


Рис. 67

$$mvr = n\hbar, \tag{20}$$

где $n = 1, 2, 3...$.

Некоторые абитуриенты, к сожалению, забывают это основное правило, которое является одним из трех постулатов Бора. Во-вторых, полная энергия атома водорода складывается из кинетической энергии электрона и потенциальной энергии его электрического взаимодействия с ядром:

$$E = E_k + E_п = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{21}$$

В-третьих, уравнение движения электрона по орбите записывается в соответствии со вторым законом Ньютона $ma_{ц.с} = F_{кул}$, или

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{22}$$

Итак, имеем три уравнения (20)—(22) и три неизвестных величины: скорость электрона v, энергию E, радиус орбиты электрона r. Остальные физические величины известны: масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $(\hbar = h/2\pi)$, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Найти E, v, r из уравнений (20)—(22) можно различными способами. Приведем здесь один из них. Легко заметить, что уравнения (20) и (22) являются независимыми от уравнения (21), так как зависят только от v и r. Поэтому целесообразно сразу определить r и v. Для этого предварительно сократим на r правую и левую части уравнения (22):

$$mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{23}$$

Далее найдем из (20), например, скорость

$$v = \frac{n\hbar}{mr}. \tag{24}$$

После возведения обеих частей этого равенства в квадрат получим

$$v^2=\frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}. \tag{25}$$

Если теперь подставить (25) в (23), то после преобразований находим радиус произвольной n-й орбиты

$$r=4\pi\varepsilon_0\frac{n^2\hbar^2}{me^2}. \tag{26}$$

Скорость электрона на n-й орбите определим, если (26) подставим в (24):

$$v=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \tag{27}$$

Полную энергию атома E можно вычислить, непосредственно подставляя (26) и (27) в (21), но можно уравнение (21) предварительно упростить, исключив из него с помощью (23) r или v:

$$E=\frac{mv^2}{2}-mv^2=-\frac{mv^2}{2}, \tag{28}$$

$$E=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}. \tag{29}$$

Эти зависимости иногда удобно использовать при решении задач, так как в них энергия зависит только от одной величины: скорости $E(v)$ или радиуса $E(r)$, в отличие от уравнения (21), в котором $E(r, v)$. Поставив (27) в (28) или (26) в (29), окончательно находим энергию атома при движении электрона по n-й орбите:

$$E_n=-\frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}\right)^2. \tag{30}$$

Энергия излученного (поглощенного) фотона равна разности энергий стационарных состояний. Действительно, в соответствии с законом сохранения энергии при излучении $E_k=E_m+h\nu$, а при поглощении $h\nu+E_m=E_k$, где k, m — порядковые номера орбит и $k>m$, ν — частота.

Иначе говоря, изменение энергии атома равно энергии фотона: $h\nu=E_k-E_m$; используя (30), находим

$$h\nu=-\frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{m^2}\right)=\frac{m}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{k^2}\right)>0.$$

Чтобы облегчить самостоятельную подготовку абитуриентов к вступительным экзаменам, в данном пособии публикуются задачи с решениями. Правда в ряде задач решение дается без подробных выкладок, и это сделано преднамеренно; для подготовленного читателя такое изложение вполне приемлемо, а тем, кому не ясно происхождение промежуточной формулы, предоставлена возможность самим провести необходимые преобразования, что послужит им дополнительной тренировкой в решении задач. В тех задачах, где рассматривается движение тела в воздухе, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Поскольку мы рекомендуем определять в задачах численный ответ, используя действия над приближенными числами, то и физические константы целесообразно записывать в приближенном виде:

g — ускорение свободного падения .... 10 м/с^2
c — скорость света .... 3.10^8 м/с
γ — гравитационная постоянная .... $6{,}7\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2
R — универсальная газовая постоянная ..... 8,3 Дж/(моль·К)
N_A — постоянная Авогадро .... $6\cdot10^{23}$ 1/моль
F — постоянная Фарадея .... $9{,}6\cdot10^{4}$ Кл/моль
e — элементарный заряд .... $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
ε_0 — электрическая постоянная .... $8{,}8\cdot10^{-12}$ Ф/м
h — постоянная Планка .... $6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с
$\hbar=\frac{h}{(2\pi)}$ .... 10^{-34} Дж·с
m_e — масса электрона .... $9\cdot10^{-31}$ кг
m_p — масса протона ....$1{,}673\cdot10^{-27}$ кг
m_n — масса нейтрона .... $1{,}675\cdot10^{-27}$ кг
1 эВ $=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА

Механика

1. Два тела брошены вертикально вверх из одной точки, одно вслед за другим с интервалом $\tau=2$ с, с одинаковыми начальными скоростями $v_0=50$ м/с. Через сколько времени и на какой высоте они встретятся?

Ответ: $t_в=6$ с; $y_в=120$ м.

2. Два тела брошены с одной и той же скоростью под углом α и $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ к горизонту. Определите отношение наибольших высот подъема этих тел.

Ответ: $\frac{H_1}{H_2}=\mathrm{tg}^2\,\alpha$.

3. Из брандспойта (шланг с металлическим наконечником), расположенного около поверхности Земли, вырывается струя воды со скоростью $v_0=10$ м/с. Брандспойт медленно вращается вокруг вертикальной оси. Одновременно с этим меняется угол его наклона к Земле. Определите максимальную площадь, которую можно полить этим брандспойтом.

Ответ: $S_{max}=314$ м^2.

4. Мяч, брошенный со скоростью $v_0=10$ м/с под углом $\alpha=45°$ к горизонту, ударяется о вертикальную стену, находящуюся на

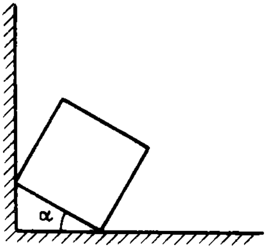


Рис. 68

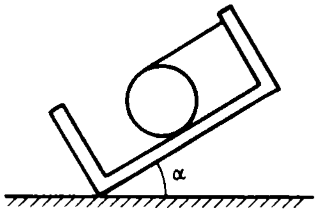


Рис. 69

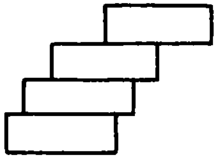


Рис. 70

расстоянии $S=3$ м от места броска. Определите модуль и направление скорости мяча (v и угол β) после удара. Удар считать абсолютно упругим, а углы падения и отражения — равными.

Ответ: $v \approx 7{,}6$ м/с; $\beta \approx 22°$.

5. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. При этом на тело действует попутный горизонтальный ветер, сообщая ему постоянное ускорение a. Найдите время полета, наибольшую высоту и наибольшую дальность полета.

Ответ: $x_{max} = \frac{2v_0^2}{g} \sin^2 \alpha \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{a}{g} \right)$.

6. Тело совершает два последовательных, одинаковых по длине перемещения со скоростями $v_1 = 20$ м/с под углом $\alpha_1 = 60°$ к направлению оси x и $v_2 = 40$ м/с под углом $\alpha_2 = 120°$ к тому же направлению. Найдите среднюю скорость движения $v_{ср}$.

Ответ: $v_{ср} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ м/с.

7. Первую половину времени тело движется со скоростью $v_1 = 20$ м/с под углом $\alpha_1 = 60°$ к заданному направлению, а вторую половину времени — под углом $\alpha_2 = 120°$ к тому же направлению со скоростью $v_2 = 40$ м/с. Найдите среднюю скорость движения $v_{ср}$.

Ответ: $v_{ср} = 26{,}46$ м/с.

8. Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты $H = 680$ м. Какова начальная скорость пули? Выстрел произведен вертикально вверх; сопротивление движению пули не учитывать. Скорость звука v принять равной 340 м/с.

Ответ: $v_0 = 349{,}8$ м/с.

9. Кубик стоит у стены так, что одна из его граней образует угол α с полом. При каком значении коэффициента трения кубика о пол это возможно, если трение о стену пренебрежимо мало (рис. 68)?

Ответ: $k = \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - \cos(45° - \alpha)}{\sqrt{2} \sin \alpha}$.

10. На плоском шероховатом дне чаши находится шар (рис. 69). Дно чаши наклонено на некоторый угол по отношению к горизонту. Шар удерживается в равновесии нитью, параллельной дну. На какой наибольший угол α можно наклонить дно чаши, чтобы шар все еще оставался в равновесии? Коэффициент трения $k=0{,}5$.

Ответ: $\alpha=45^\circ$.

11. Кирпичи укладывают друг на друга без связующего вещества так, что часть каждого последующего кирпича выступает над нижележащим (рис. 70). На какое максимальное расстояние правый край верхнего кирпича может выступать над правым краем самого нижнего кирпича, служащего основанием всей кладки? Длина каждого кирпича равна l.

Ответ: длина выступающих концов кирпичей будет $l/2$, $l/4$, $l/6$, считая от верхнего кирпича.

12. Два груза с массами $m_1=20$ кг и $m_2=10$ кг связаны между собой тросом, масса которого равна 10 кг. Грузы движутся ускоренно вверх под действием вертикальной силы F, равной 600 Н и приложенной к верхнему грузу с массой m_1. Найдите натяжение в верхнем конце, в середине и нижнем конце троса.

Ответ: натяжение троса на верхнем конце $T_1=300$ Н, в середине $T_2=225$ Н, на нижнем конце $T_3=150$ Н.

13. Чтобы сдвинуть с места ящик массой M, человек тянет его к себе с силой F, направленной под углом α к горизонту. Определите эту силу, если масса человека m, коэффициенты трения о пол человека и ящика одинаковы и равны μ. Считать $M>m$.

Ответ: $F\geqslant\frac{1}{2}g\sqrt{(M-m)^2+\mu^2(M+m)^2}$.

14. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $M=2$ кг, на котором находится брусок массой $m=1$ кг. Оба бруска соединены легкой нитью, перекинутой через невесомый блок (рис. 71). Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он начал двигаться от блока с постоянным ускорением $a=g/2$? Коэффициент трения между брусками $K=0{,}5$. Трением между нижним бруском и столом пренебречь.

Ответ: $F=25$ Н.

15. Брусок массой m_1 лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит тело массой m_2 (рис. 72). Коэффициент трения между телом и бруском равен k. При каком значении силы F, приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску? Через сколько времени тело упадет с бруска? Длина бруска равна l.

Ответ: $F>k(m_1+m_2)g$, $t=\sqrt{\dfrac{2lm_1}{F-kg(m_1+m_2)}}$.

16. Клин с углом при основании α может без трения перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности. При каком

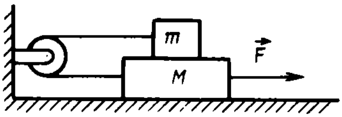


Рис. 71

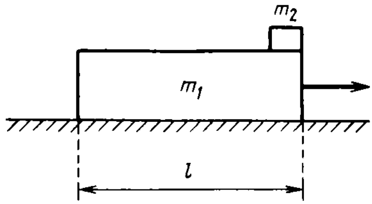


Рис. 72

соотношении масс m_1 и m_2 грузов, связанных нитью, перекинутой через блок, клин будет неподвижен и при каком соотношении масс клин начнет перемещаться вправо или влево? Коэффициент трения между грузом массой m_2 и клином равен k (рис. 73).

Ответ: $\sin\alpha - k\cos\alpha \leqslant \frac{m_1}{m_2} \leqslant \sin\alpha + k\cos\alpha$.

17. На горизонтальной плоскости лежит доска массой $M = 2{,}0$ кг, на которой помещен груз массой $m = 1{,}0$ кг. Горизонтальная сила $F = 20$ Н приложена к грузу. Коэффициент трения между плоскостью и доской $k_1 = 0{,}1$, между доской и грузом — $k_2 = 0{,}5$. Найдите ускорение обоих тел и необходимое условие для того, чтобы сдернуть груз с доски.

Ответ: $a_1 = 1$ м/с^2; $a_2 = 15$ м/с^2; $F > 6{,}0$ Н.

18. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l_1 = l/2$ от нее в стенку забит гвоздь (рис. 74). Найдите период T колебаний маятника.

Ответ: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

19. Стержень длиной $l = 1$ м закреплен жестко на вертикальной оси под углом $\varphi = 30^\circ$ к ней и вращается вместе с осью с угловой скоростью $\omega = 10$ 1/с. К нижнему концу стержня прикреплен шарик массой $m = 1$ кг. Найдите силу, с которой стержень действует на шарик.

Ответ: $F \approx 50$ Н.

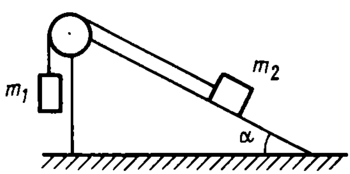


Рис. 73

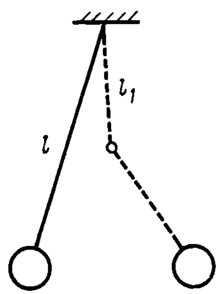


Рис. 74

20. Шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, приведен во вращательное движение в горизонтальной плоскости. Какова должна быть прочность нити F, чтобы радиус R окружности, по которой движется шарик, мог достигнуть размера $2l/\sqrt{5}$?

Ответ: $F=mg\sqrt{5}$.

21. Тяжелый шарик, подвешенный на нити длиной $l=1$ м, описывает окружность в горизонтальной плоскости (конический маятник). Найдите период обращения шарика, если маятник находится в лифте, движущемся с постоянным ускорением $a=5$ м/с^2, направленным вниз. Нить составляет с вертикальным направлением угол $\alpha=60°$.

Ответ: $T\approx 2$ с.

22. Чаша в форме полусферы радиусом $R=0{,}8$ м вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Вместе с чашей вращается шарик, лежащий на ее внутренней поверхности. Расстояние от шарика до нижней точки чаши равно ее радиусу. Определите угловую скорость вращения чаши.

Ответ: $\omega=5$ 1/с.

23. Тело массой $m=0{,}1$ кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной $l=1$ м. Ось вращения расположена над полом на высоте $\mathrm{H}=2$ м. При прохождении нижнего положения нить обрывается и тело падает на пол на расстоянии $L=4$ м (по горизонтали) от точки обрыва. Определите силу натяжения нити в момент ее обрыва.

Ответ: $N=9$ Н.

24. Два шара, имеющие одинаковый диаметр, связаны нитью и опускаются медленно и вертикально один над другим с постоянной скоростью в жидкости. Определите силу натяжения нити, если массы шаров: $m_1=2$ кг, $m_2=1{,}6$ кг. Силой сопротивления жидкости пренебречь.

Ответ: $N=2$ Н.

25. Бетонная однородная свая массой m лежит на дне водоема глубиной h, большей, чем длина сваи l. Привязав трос к одному концу сваи, ее медленно вытаскивают из воды так, что центр тяжести сваи поднимается на высоту Н от поверхности воды ($\mathrm{H}>l$). Какая работа совершается при подъеме сваи? Плотность бетона в n раз больше плотности воды. Силами сопротивления пренебречь.

Ответ: $A=mg\left[H+h\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$.

26. Металлический стержень, к верхнему торцу которого прикреплен пружинный динамометр, медленно погружают в цилиндрический сосуд с водой, имеющий площадь поперечного сечения $S=20$ см^2. Определите, на сколько изменится показание динамометра в тот момент, когда уровень воды в сосуде поднимется на высоту $h=10$ см. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3.

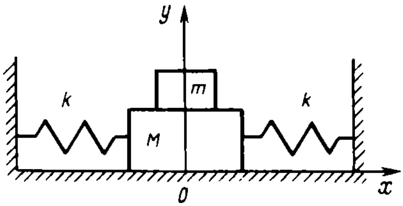


Рис. 75

Ответ: $\Delta F = 2$H.

27. На идеально гладкой горизонтальной плоскости расположен брусок массой $M = 1$ кг, скрепленный с пружинами, жесткость каждой из которых $k = 30$ Н/м (рис. 75). На бруске лежит шайба массой $m = 0{,}5$ кг. Система брусок — шайба приводится в колебательное движение. Определите максимальную амплитуду колебаний, при которой система будет двигаться как единое целое, т. е. без проскальзывания шайбы по бруску. Коэффициент трения скольжения между бруском и шайбой $\mu = 0{,}4$.

Ответ: $A \leqslant 0{,}1$ м.

28. Тело массой 1 кг брошено под углом к горизонту. За время полета его импульс изменился на 10 кг·м/с. Определите наибольшую высоту подъема тела.

Ответ: $h \approx 1{,}25$ м.

29. Преграда массой $M = 10$ кг, имеющая цилиндрическую поверхность с радиусом $R = 0{,}2$ м, расположена на горизонтальной плоскости (рис. 76). Тело массой $m = 1$ кг с начальной горизонтальной скоростью $v_0 = 3$ м/с скользит и поднимается по цилиндрической поверхности. Определите скорость тела на высоте, равной радиусу R (в точке A). Трением пренебречь.

Ответ: $v \approx 2$ м/с.

30. Орудие, масса ствола которого $M = 400$ кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m = 8$ кг, его начальная скорость $v_0 = 10^3$ м/с. При выстреле ствол откатывается на

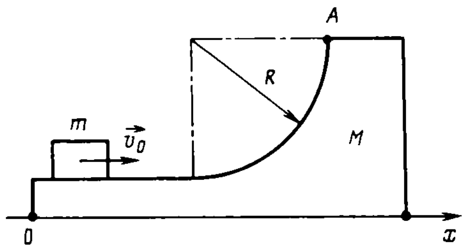


Рис. 76

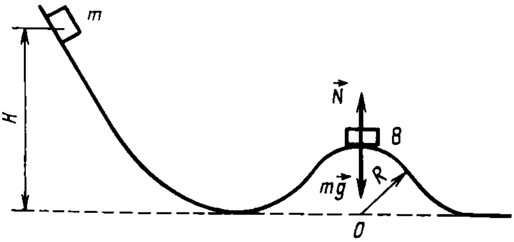


Рис. 77

$S=50$ см. Определите среднее значение силы торможения, развивающейся в противооткатном устройстве орудия.

Ответ: $F_{ср}=160$ кН.

31. От удара копра массой $m=50$ кг, падающего с высоты Н=5 м, свая массой $M=200$ кг погружается в грунт на глубину $l=20$ см. Определите силу сопротивления грунта, считая ее постоянной. Удар копра о сваю абсолютно неупругий.

Ответ: $F=5$ кН.

32. Тело массой $m=2$ кг соскальзывает с горки высотой Н=4,5 м по наклонной поверхности, плавно переходящей в цилиндрическую поверхность радиусом $R=2$ м (рис. 77). Определите силу давления тела на цилиндрическую поверхность в верхней ее точке B, если работа сил трения при движении тела до этой точки А=40 Дж.

Ответ: $N=10$ Н.

33. На концах и в середине невесомого стержня длиной l расположены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную поверхность.

Ответ: $v=2\sqrt{3gl/5}$.

34. Два дельфина движутся навстречу друг другу. Один из них издает звуковые импульсы с частотой следования ν. С какой частотой ν_1 приходят эти импульсы к другому дельфину, если скорость дельфинов относительно воды равна v? Скорость звука в воде c.

Ответ: $\nu_1=\nu\dfrac{c+v}{c-v}$.

35. Из пункта A в пункт B был послан звуковой сигнал частоты $\nu=50$ Гц, распространяющийся со скоростью $v=330$ м/с. При этом на расстоянии от A до B укладывалось целое число волн. Этот опыт повторили, когда температура была на $\Delta t=20$ К выше, чем в первом случае. Число волн, укладывающихся на расстоянии от A до B, уменьшилось во втором случае на две. Найдите расстояние l

между пунктами A и B, если известно, что при повышении температуры на 1 К скорость звука увеличивается на 0,5 м/с.

Ответ: $l \approx 450$ м.

Электромагнетизм

36. Три положительных заряда: q_1, q_2, q_3 — расположены на одной прямой и связаны друг с другом двумя нитями длиной l каждая. Определите натяжение нитей, если q_2 связан одновременно с q_1 и q_3.

Ответ: $T_{12}=\frac{q_1(4q_2+q_3)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}$; $T_{23}=\frac{q_3(4q_2+q_1)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}$.

37. Сосуд с маслом, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon=5$, помещен в вертикальное однородное электрическое поле. В масле находится во взвешенном состоянии алюминиевый шарик диаметром $d=3$ мм, имеющий заряд $q=10^{-7}$ Кл. Определите напряженность электрического поля, если плотность алюминия $\rho_A=2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, а масла $\rho_м=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3.

Ответ: $E_0=\frac{\pi d^3\varepsilon g}{6q}(\rho_A-\rho_м)=12$ кВ/м.

38. В однородном электростатическом поле с вектором напряженности E, направленным вертикально вниз, равномерно вращается шарик массой m с положительным зарядом q, подвешенный на нити длиной l. Угол отклонения нити от вертикали равен α. Найдите силу натяжения нити и кинетическую энергию шарика.

Ответ: $W_k=\frac{1}{2}(mg+qE)l\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $N=\frac{mg+qE}{\cos\alpha}$.

39. Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом q, в точках A и B (рис. 78) равна соответственно $E_A=0{,}2$ кВ/м и $E_B=0{,}1$ кВ/м. Определите напряженность электрического поля в точке C.

Ответ: $E_c=0{,}3$ кВ/м.

40. Электрическое поле образовано внешним однородным электрическим полем и электрическим полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным (рис. 79). Напряженность результирующего электрического поля справа от пластины $E_1=3\cdot10^4$ В/м, а слева — $E_2=5\cdot10^4\ \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Определите заряд пластины, если сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля, F = 0,7 Н.

Ответ: $q=-7\cdot10^{-5}$ мкКл.

41. В пространство, где одновременно действуют горизонтальное и вертикальное однородные электрические поля с напряженностью $E_г=4\cdot10^2$ В/м и $E_в=3\cdot10^2$ В/м, вдоль направления силовой линии результирующего электрического поля влетает электрон,

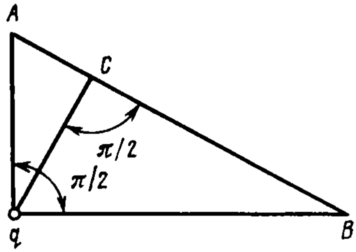


Рис. 78

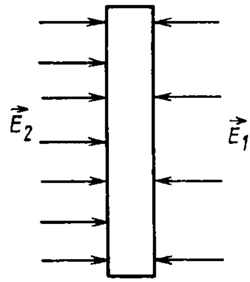


Рис. 79

скорость которого на пути $l=2{,}7$ мм изменяется в два раза. Определите скорость электрона в конце пути.

Ответ: $v_к=4\cdot10^5$ м/с.

42. В однородное, горизонтальное электростатическое поле с напряженностью $E=10^3$ В/м помещена система, состоящая из двух одинаковых и противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длиной $l=0{,}1$ м. Система может только вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Масса и модуль заряда каждого шарика $m=5$ г, $q=1$ мкКл. Система кратковременным воздействием выводится из состояния устойчивого равновесия и приводится во вращательное движение с начальной угловой скоростью $\omega_0=2$ с$^{-1}$. Определите максимальный угол поворота этой системы. Массой стержня пренебречь. Шарики рассматривать как материальные точки.

Ответ: $\varphi=60°$.

43. На расстоянии r от центра незаряженного металлического шара находится точечный заряд q. Определите потенциал шара.

Ответ: $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

44. Множество зарядов (трех значений) $q_1=10^{-9}$ Кл, $q_2=-2q_1$, $q_3=3q_1$ распределены вдоль окружности так, что все одинаковые заряды рассредоточены по окружности равномерно через равный угловой интервал. Определите напряженность и потенциал электрического поля в центре окружности, если работа по удалению пробного заряда $q=0{,}01q_1$ из центра окружности равна $A=10^{-9}$ Дж.

Ответ: $E=0$, $\varphi=100$ В.

45. Шарик массой $m=2$ г, имеющий положительный заряд q, начинает скользить без начальной скорости из точки A по сферической поверхности радиуса $R=10$ см (рис. 80). Потенциальная энергия взаимодействия заряда q и неподвижного отрицательного заряда Q в начальный момент $W_A=-2\cdot10^{-3}$ Дж. Определите потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда

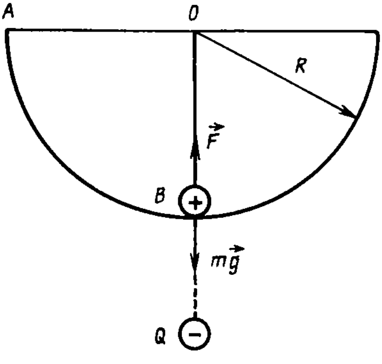


Рис. 80

заряд q находится в точке B, если в этом случае результирующая сил реакции со стороны сферической поверхности и кулоновского взаимодействия, приложенная к шарику, $F=0,1$ Н. Трением между шариком и сферической поверхностью пренебречь.

Ответ: $W=-4\cdot10^{-3}$ Дж.

46. Положительно заряженный шарик массой $m=30$ г (математический маятник) совершает гармонические колебания над положительно заряженной бесконечной горизонтальной плоскостью. При этом сила электрического взаимодействия шарика с плоскостью $F=0,1$ Н, а период его колебаний $T_1=2$ с. Затем шарик перезарядили так, что его заряд стал отрицательным, но по модулю равным первоначальному. Определите период гармонических колебаний шарика в новом состоянии. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Ответ: $T_2=1,4$ с.

47. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U, влетает в электрическое поле отклоняющих пластин параллельно им, а затем попадает на экран, расположенный на расстоянии L от конца пластин. На какое расстояние h сместится электронный луч на экране, если на пластины, имеющие длину l и расположенные на расстоянии d друг от друга, подать напряжение $U_п$?

Ответ: $h=\frac{U_п l}{4dU}(l+2L)$.

48. Отрицательная заряженная частица влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B=10^{-3}$ Тл, где движется по дуге окружности радиуса $R=0,2$ м. Затем частица попадает в однородное электрическое поле, где пролетает вдоль направления силовой линии участок с разностью потенциалов $U=10^3$ В, при этом скорость частицы изменяется в $n=3$ раза. Определите конечную скорость частицы.

Ответ: $v_к\approx3,8\cdot10^6$ м/с.

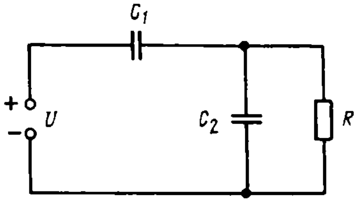


Рис. 81

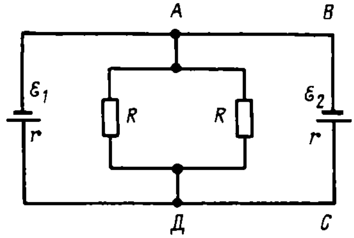


Рис. 82

49. На схеме, изображенной на рис. 81, емкость конденсатора $C_2=10$ мкФ, сопротивление резистора $R=2$ кОм, площадь пластин конденсатора емкостью C_1 равна $S=100$ см^2, а расстояние между ними $d=5$ мм. Мощность рентгеновского излучателя, который ионизирует воздух между обкладками конденсатора C_1, равна $w=2\cdot10^{12}$ пар носителей заряда за 1 с в 1 м^3. Заряд носителей равен элементарному заряду $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Все образованные за единицу времени носители заряда долетают до пластин конденсатора C_1. Определите заряд на конденсаторе C_2.

Ответ: $q=6{,}4\cdot10^{-13}$ Кл.

50. Источники тока, имеющие одинаковые внутренние сопротивления $r=0{,}5$ Ом, подключены к резисторам, каждый из которых имеет сопротивление R (рис. 82). ЭДС источников тока соответственно равны: $\mathscr{E}_1=12$ В, $\mathscr{E}_2=6$ В. Определите сопротивление R, при котором ток в цепи $ABCD$ не течет.

Ответ: $R=1$ Ом.

51. Определите массу меди, нужной для устройства двухпроводной линии длиной $l=5$ км. Напряжение на шинах станции $U=2{,}4$ В. Передаваемая потребителю мощность $P=60$ кВт. Допускаемая потеря напряжения в проводах равна 8%. Плотность меди $d=8{,}9$ г/см^3, удельное сопротивление $\rho=1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м.

Ответ: $M\approx2{,}1\cdot10^3$ кг.

52. Никелирование пластины с поверхностью $S=100$ см^2 продолжается $t=4$ ч при токе $J=0{,}4$ А. Молярная масса никеля $\mathrm{M}=58{,}7\cdot10^{-3}$ кг/моль, его валентность $n=2$, а плотность $\rho=8{,}9\cdot10^3$ кг/м^3. Определите толщину слоя никеля, который покроет за это время пластину.

Ответ: $H=20$ мкм.

53. Источник постоянного тока с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом замкнут в первом случае на резистор сопротивлением R, во втором случае — на четыре таких же резистора, соединенных параллельно. Определите сопротивление R, если мощность, выделяемая в нагрузке, в первом и втором случаях одна и та же.

Ответ: $R=2$ Ом.

54. Прямолинейный проводник массой $m=0{,}03$ кг, по которому протекает ток $J=5$ А, поднимается вертикально вверх в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией $B=0{,}4$ Тл,

двигаясь к линиям магнитной индукции под углом $\alpha=30°$. Через $\tau=2$ с после начала движения он приобретает скорость $v=4$ м/с. Определите длину проводника.

Ответ: $l=0{,}36$ м.

55. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}05$ Тл находится проволочный контур, плоскость которого перпендикулярна магнитному полю. Площадь контура $S=20$ см^2. Контур присоединен к баллистическому гальванометру. При повороте контура в положение, когда его плоскость параллельна магнитному полю, через гальванометр проходит заряд $q=2\cdot10^{-4}$ Кл. Найдите сопротивление всей цепи.

Ответ: $R=0{,}5$ Ом.

56. Плоский замкнутый металлический контур площадью $S_0=10$ см^2 деформируется в однородном магнитном поле, индукция которого $B=10^{-2}$ Тл. Площадь контура за время $\tau=2$ с равномерно уменьшается (плоскость контура при этом остается перпендикулярной магнитному полю) до $S_к=2$ см^2. Определите силу тока, протекающего по контуру в течение времени τ, если сопротивление контура $R=1$ Ом.

Ответ: $J=4$ мкА.

57. Катушка, имеющая $N=100$ витков, расположена в однородном магнитном поле с индукцией $B=10^{-2}$ Тл. Плоскости ее витков перпендикулярны линиям магнитной индукции. Площадь одного витка $S=10$ см^2. Катушка присоединена к баллистическому гальванометру так, что сопротивление всей цепи $R=10$ Ом. При повороте катушки на угол α через гальванометр проходит заряд $Q=5\cdot10^{-5}$ Кл. Определите угол α.

Ответ: $\alpha=60°$.

58. В однородном магнитном поле с индукцией B с постоянной скоростью v движется металлический шарик радиусом r. Укажите точки шарика, разность потенциалов $\Delta\varphi$ между которыми будет максимальна, и определите эту разность потенциалов. Направление скорости составляет с направлением магнитной индукции угол α.

Ответ: $\Delta\varphi_{max}=2rBv\cdot\sin\alpha$.

59. Емкость колебательного контура радиоприемника $C=0{,}2$ пФ, а в катушке индуктивности возникает ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}=0{,}1$ В при скорости изменения в ней тока, равной 2 А/с. Определите, на какую длину волны настроен радиоприемник.

Ответ: $\lambda=188$ м.

60. Рамка из проволоки, в которую вмонтирован конденсатор (рис. 83), пронизывается перпендикулярно ее плоскости однородным магнитным полем. Скорость изменения индукции этого магнитного поля $\frac{\Delta B}{\Delta t}=0{,}02$ Тл/с. Определите энергию заряженного

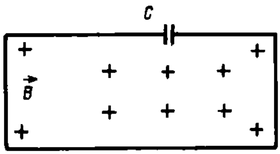


Рис. 83

конденсатора, если его емкость $C=4$ мкФ, а площадь рамки $S=50$ см^2.

Ответ: $W=\frac{1}{2}C\left[S\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}\right]^2=2\cdot10^{-14}$ Дж.

Тепловые явления

61. Сколько молекул ртути содержится в 1 м^3 воздуха в помещении, зараженном ртутью, при температуре 293 К, если давление насыщенного пара ртути при этой температуре 133 мПа?
Ответ: $N=3{,}3\cdot10^{19}$ молекул.

62. В 1 см^3 при давлении 20 кПа находится $5\cdot10^{19}$ молекул гелия. Определите среднюю квадратичную скорость молекул при этих условиях.
Ответ: $v=424$ м/с.

63. На дне цилиндра, заполненного воздухом, плотность которого 1,29 кг/м^3, лежит полый металлический шарик радиуса $r=1$ см. До какого давления нужно сжать воздух в цилиндре, чтобы шарик всплыл? Опыт проводится при 290 К. Воздух считать идеальным газом, $\mu=29\cdot10^{-3}$ кг/моль. Масса шарика 5 г.
Ответ: $p=99$ МПа.

64. Компрессор захватывает при каждом такте нагнетания 0,5 л воздуха при давлении $p_0=10^5$ Па и температуре 276 К и нагнетает его в автомобильный баллон объемом 0,5 м^3. Температура воздуха в баллоне 290 К. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы уменьшить площадь соприкосновения покрышки с полотном дороги на 100 см^2? До этого площадь соприкосновения была равна 450 см^2; колесо находится под нагрузкой 5 кН.
Ответ: $n=300$.

65. Параметры идеального одноатомного газа, взятого в количестве $\gamma=3$ моль, изменились по циклу, изображенному на рис. 84. Температуры газа в состояниях, отмеченных на рисунке цифрами, равны $T_1=400\ K$, $T_2=800\ K$, $T_4=1200\ K$. Определите работу, которую совершил газ за цикл.
Ответ: $A=20$ кДж.

66. В вертикальном цилиндре с площадью поперечного сечения S под поршнем, масса которого равна M, находится 1 моль идеального одноатомного газа. В некоторый момент времени под поршнем включается нагреватель, передающий газу за единицу

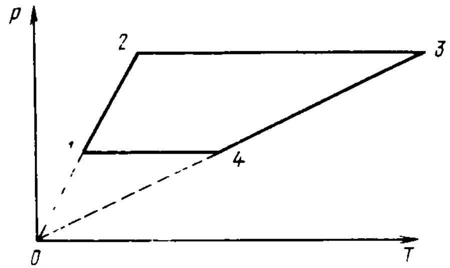


Рис. 84

времени количество теплоты q. Определите установившуюся скорость v движения поршня при условии, что давление газа над поршнем постоянно и равно p_0, газ под поршнем теплоизолирован.

Ответ: $v = \dfrac{2q}{5(p_0 S + Mg)}$.

67. В проточном калориметре исследуемый газ пропускают по трубопроводу с нагревателем. Газ поступает в калориметр при температуре $T_1 = 293$ K. При мощности нагревателя $N_1 = 1$ кВт и расходе газа $q_1 = 540$ $\frac{\text{кг}}{\text{ч}}$ температура его T_2 за нагревателем оказалась такой же, как и при удвоенной мощности нагревателя и увеличении расхода газа до $q_2 = 720$ $\frac{\text{кг}}{\text{ч}}$. Считая молярную теплоемкость газа в этом процессе ($p = \text{const}$) $c = 29{,}3$ Дж/(моль $\cdot$ K), а молекулярную массу газа $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, найдите температуру T_2 (рис. 85).

Ответ: $T_2 = T_1 + \dfrac{\mu(N_2 - N_1)}{c(q_2 - q_1)}$; $T_2 = 312{,}8$ K.

68. В ведре находится смесь воды со льдом массой $m = 10$ кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять темпера-

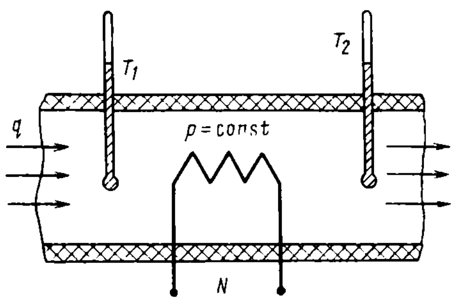


Рис. 85

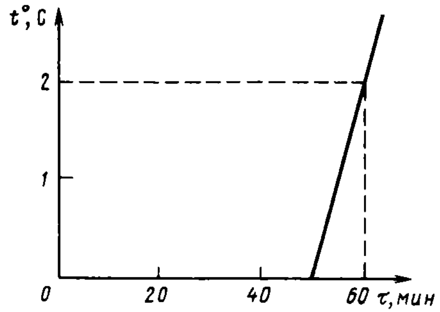


Рис. 86

туру смеси. Получившаяся зависимость температуры смеси от времени изображена на рис. 86. Удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг. Определите массу льда в ведре, когда его внесли в комнату; теплоемкостью ведра пренебречь.

Ответ: $m_л = 1{,}23$ кг.

69. Нижний конец капилляра радиуса $r = 0{,}2$ мм и длиной $l = 8$ см погружен в воду, температура которой $T_н = 273$ К и постоянна. Температура верхнего конца капилляра $T_в = 373$ К. На какую высоту h поднимется вода в капилляре? Считать, что теплопроводность капилляра намного превосходит теплопроводность воды в нем. Теплообменом с окружающим воздухом пренебречь. Коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры в диапазоне 273—373 К линейно:

$\sigma(T) = (133{,}3 - 0{,}21T)$ мН/м.

Ответ: $h = 6$ см.

70. В сосуд объемом $V = 10$ дм^3, наполненный сухим воздухом при давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 273$ К, вводят $m = 3$ г воды. Сосуд нагревают до температуры $T = 373$ К. Каково давление влажного воздуха в сосуде при этой температуре?

Ответ: $p = 1{,}88 \cdot 10^5$ Па.

Оптика

71. В кювете (плоской ванне) с жидкостью на глубине $h = 3$ см находится точечный источник света, который начинает смещаться по вертикали со скоростью $v = 10^{-3}$ м/с. На дне кюветы находится плоское зеркало, а на поверхности жидкости на высоте $H = 4$ см от дна плавает непрозрачный диск радиуса $R = 6$ см. Центр диска расположен на одной вертикали с источником света. Через какое время t источник света станет видим для внешнего наблюдателя. Показатель преломления жидкости $n = \sqrt{2}$.

Ответ: $t = 10$ с.

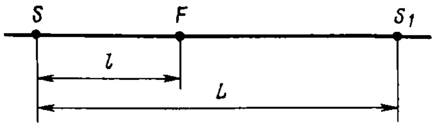


Рис. 87

72. Предмет находится на расстоянии $l = 15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластинки. Наблюдатель рассматривает предмет через пластинку, причем луч зрения нормален к ней. Определите расстояние изображения предмета x от ближайшей к наблюдателю грани, если толщина пластины $d = 4{,}5$ см, показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Ответ: $x = 18$ см.

73. Найдите положение изображения объекта, расположенного на расстоянии $l = 4$ см от передней поверхности плоскопараллельной стеклянной пластинки толщиной $d = 1$ см, посеребренной с задней стороны, считая, что показатель преломления пластинки $n = 1{,}5$. Изображение рассматривается перпендикулярно к поверхности пластинки.

Ответ: на $5\frac{1}{3}$ см от передней поверхности пластинки.

74. На каком расстоянии надо поместить предмет от собирающей линзы с фокусным расстоянием F, чтобы расстояние от предмета до его действительного изображения было наименьшим?

Ответ: $d = 2F$.

75. На рис. 87 изображены точечный источник света S, его изображение S_1, полученное с помощью собирающей линзы, и ближайший к источнику фокус линзы F. Расстояния $SF = l$ и $SS_1 = L$ заданы. Определите положение линзы и ее фокусное расстояние.

Ответ: $d = \sqrt{Ll}$; $F = \sqrt{Ll} - l$.

76. Человек с нормальным зрением начинает смотреть через очки с оптической силой $D = +5$ диоптрий. Между какими двумя предельными положениями должен быть расположен рассматриваемый объект, чтобы его было ясно видно без напряжения глаз?

Ответ: от 11 до 20 см до глаз.

77. Какие предметы можно рассмотреть на фотографии, сделанной со спутника, если разрешающая способность пленки 0,01 мм? Каким должно быть время экспозиции τ для того, чтобы полностью использовались возможности пленки? Фокусное расстояние объектива используемого фотоаппарата $F = 10$ см.

Ответ: $h < 640$ м; $\tau \approx 8 \cdot 10^{-2}$ с.

78. На стеклянную пластинку ($n_1 = 1{,}5$) нанесена прозрачная пленка ($n_2 = 1{,}4$). На пленку нормально к поверхности падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Какова

наименьшая толщина пленки, если в результате интерференции отраженные лучи максимально ослаблены?

Ответ: $d_{\min}=107$ нм.

79. На диафрагму с двумя узкими щелями, находящимися на расстоянии $d=2{,}5$ мм, падает по нормали к ней монохроматический свет. Интерференционная картина образуется на экране, отстоящем от диафрагмы на расстоянии $l=100$ см. Куда и на какое расстояние сместятся интерференционные полосы, если одну из щелей закрыть стеклянной пластинкой толщиной $b=10$ мкм $(n=1{,}5)$?

Ответ: на $\Delta y=2$ мм в сторону перекрытой щели.

80. На установку для получения колец Ньютона падает нормально монохроматический свет ($\lambda=0{,}5$ мкм). Определите толщину воздушного слоя там, где наблюдается пятое темное кольцо.

Ответ: $h=1{,}375$ мкм.

81. Дифракционная решетка содержит 100 штрихов на 1 мм длины. Определите длину волны монохроматического света, падающего на решетку нормально, если угол между двумя спектрами первого порядка 8°.

Ответ: $\lambda=0{,}7$ мкм.

82. Мощность точечного источника монохроматического света $P_0=10$ Вт на длине волны $\lambda=500$ нм. На каком максимальном расстоянии этот источник будет замечен человеком, если глаз реагирует на световой поток, соответствующий 60 фотонам в секунду? Диаметр зрачка $d_{зр}=0{,}5$ см.

Ответ: $R=10^6$ м.

Атомная и ядерная физика

83. Плоский алюминиевый электрод освещается ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda=83$ нм. На какое максимальное расстояние l от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E=7{,}5$ В/см? Красная граница фотоэффекта для алюминия соответствует длине волны $\lambda_0=332$ нм.

Ответ: $l=1{,}5$ см.

84. Рентгеновское излучение с длиной волны 56,3 пм рассеивается плиткой графита. Определите длину волны лучей, рассеянных под углом 120° к первоначальному направлению рентгеновских лучей.

Ответ: $\lambda'=59{,}9$ пм.

85. Фотон рентгеновских лучей ($\lambda=24$ пм) при соударении со свободным электроном передал ему 9% своей энергии. Определите длину волны рассеянного рентгеновского излучения.

Ответ: $\lambda'=26{,}3$ пм.

86. Атом водорода переведен из нормального состояния в возбужденное, характеризуемое главным квантовым числом 2. Найдите энергию возбуждения атома.

Ответ: $W=10{,}2$ эВ.

87. Минимальная энергия электрона, необходимая для ионизации атома водорода, равна W_0.Определите минимальные начальные скорости ионов водорода и гелия, необходимые для ионизации атома водорода. Ионизация происходит в результате полностью неупругого удара.

Ответ: $v_{0_H}=2\sqrt{\frac{W_0}{m_H}}$; $v_{0_{He}}=\sqrt{\frac{10W_0}{m_H}}$.

Теория относительности

88. Чему равно релятивистское сокращение метрового стержня, движущегося мимо наблюдателя со скоростью 180 Мм/с?

Ответ: 0,2 м.

89. Ускоритель сообщил радиоактивному ядру скорость $v=0{,}4$ с. В момент вылета из ускорителя ядро выбросило в направлении своего движения β — частицу со скоростью $u=0{,}75\ c$ относительно ускорителя. Найдите скорость частицы относительно движущегося ядра.

Ответ: $v'=0{,}5\ c$.

90. Во сколько раз движущийся со скоростью $v=0{,}999\ c$ электрон «тяжелее» покоящегося?

Ответ: в 22,4 раза.

91. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов и приобрел кинетическую энергию 0,76 МэВ. Определите скорость электрона.

Ответ: $v=275$ Мм/с.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

1. Напишем уравнение движения первого тела

$$y_1(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Второе тело брошено на $\tau=2$ с позже первого, поэтому

$$y_2(t)=v_0(t-\tau)-\frac{g(t-\tau)^2}{2}; \qquad (2)$$

при встрече, т. е. при $t=t_в$, координаты обоих тел будут равны: $y_1(t_в)=y_2(t_в)$ (рис. 88). Используя это условие, можно написать

$$v_0t_в-\frac{gt_в^2}{2}=v_0(t_в-\tau)-\frac{g(t_в-\tau)^2}{2}.$$

Отсюда после алгебраических преобразований находим

$$t_в=v_0/g+\tau/2. \qquad (3)$$

Подставляя (3), например в (1), определяем высоту встречи

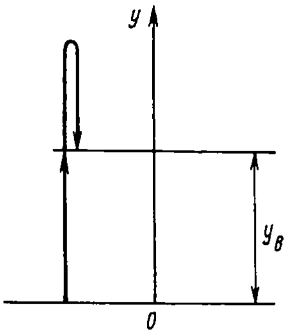


Рис. 88

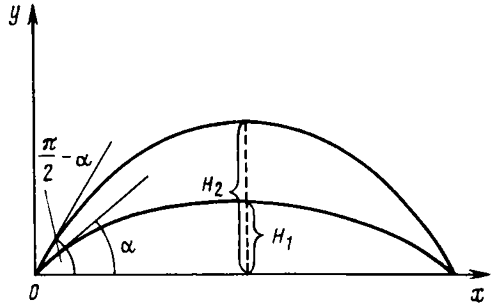


Рис. 89

$$y_1(t_в)=y_в;\quad y_в=v_0t_в-gt_в^2/2=v_в^2/2g-g\tau^2/8. \qquad (4)$$

Окончательно вычисляем

$$t_в=\left(\frac{50}{10}+\frac{2}{2}\right)с=6с;\quad y_в=\left(\frac{50^2}{2\cdot 10}-\frac{10\cdot 2^2}{8}\right)м=120 \text{ м}.$$

2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту (рис. 89), описывается уравнениями

$$x=v_0\cos\alpha t,\quad y=v_0\sin\alpha t-\frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$

Проекция скорости тела на ось $0y$

$$v_y=v_0\sin\alpha-gt. \qquad (2)$$

На вершине траектории $v_y=0$, поэтому время подъема находим из уравнения (2)

$$t_п=\frac{v_0\sin\alpha}{g}. \qquad (2)$$

Максимальную высоту подъема тела определим после подстановки (3) и (1):

$$H_1=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}-\frac{g}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g^2}=\frac{1}{2}\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}. \qquad (4)$$

Все предыдущие рассуждения будут справедливы и для тела, брошенного под углом $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Поэтому для него максимальная высота подъема

$$H_2=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\cos^2\alpha. \qquad (5)$$

Окончательно по формулам (4) и (5) находим отношение высот

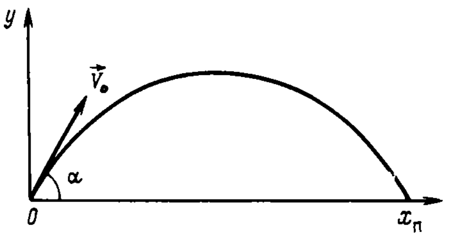


Рис. 90

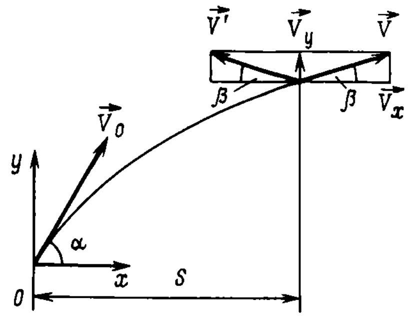


Рис. 91

$$\frac{H_1}{H_2}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

3. Уравнения движения капли воды по осям x и y имеют вид (рис. 90)

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t, \tag{1}$$

$$y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

Из (2), полагая $y=0$, находим время полета капли

$$t_n=\frac{2\cdot v_0\sin\alpha}{g}. \tag{3}$$

Дальность полета капли находим при подстановке (3) в (1):

$$x_п=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \tag{4}$$

Из (4) следует, что максимальная дальность x_{max} достигается при $\alpha=45°$, т. е. $x_{max}=\frac{v_0^2}{g}$. Изменяя в формуле (4) угол α от 0 до 45°, видим, что капля падает в любую точку оси $0x$ от 0 до x_{max}. Следовательно, максимальная площадь полива

$$S_{max}=\pi x_{max}^2=\pi\frac{v_0^4}{g^2};$$

$$S_{max}=3{,}14\cdot\frac{10^4}{10^2}=314 \text{ м}^2.$$

4. Проекции скорости в момент удара (рис. 91)

$$v_x=v_0\cos\alpha,$$

$$v_y=v_0\sin\alpha-gt=v_0\sin\alpha-\frac{gS}{v_0\cos\alpha}.$$

Найдем отношение

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v_y}{v_x}=\operatorname{tg}\alpha-\frac{gS}{v_0^2\sin^2\alpha}.$$

Так как угол падения равен углу отражения ($\angle\beta=\angle\beta'$), то угол наклона вектора скорости мяча после удара

$$\beta'=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{gS}{v_0^2\cos^2\alpha}\right).$$

Поскольку удар абсолютно упругий, то модуль скорости v' можно определить следующим образом:

$$v'=v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=v_0\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\left(1-\frac{2gS}{v_0^2\sin 2\alpha}\right)^2}.$$

Итак, после удара мяч летит вверх и в обратном направлении со скоростью v' и под углом β' к горизонту:

$$\beta'=\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}45^\circ-\frac{10\cdot 3}{10^2\cos^2 45^\circ}\right);$$

$$v'=10\sqrt{\cos^2 45^\circ+\sin^2 45^\circ\left(1-\frac{2\cdot 10\cdot 3}{10^2\sin(2\cdot 45^\circ)}\right)^2};$$

$$\beta'=\operatorname{arc\,tg}0{,}4\approx 22^\circ;\quad v'=7{,}6\ \text{м/с}.$$

5. Уравнения движения тела в проекциях

$$x=v_0t\cos\alpha+\frac{at^2}{2},\quad y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2},$$

а проекции скорости

$$v_x=v_0\cos\alpha+at,\quad v_y=v_0\sin\alpha-gt.$$

Время полета тела $T=\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g}$.

Наибольшая высота подъема

$$h_{\max}=y_{\max}=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha;$$

$$x_{\max}=v_0^2\frac{2\sin\alpha}{g}\cos\alpha+v_0^2\frac{2a\sin^2\alpha}{g^2}=\frac{2v_0^2}{g}\sin^2\alpha\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{a}{g}\right).$$

6. Из рис. 92 следует, что перемещение тела $\Delta\vec{r}=\Delta\vec{r}_1+\Delta\vec{r}_2$, или $\vec{v}_{\text{ср}}t=\vec{v}_1t_1+\vec{v}_2t_2$; $\vec{v}_{\text{ср}}=\dfrac{(\vec{v}_1t_1+\vec{v}_2t_2)}{t}$, или $\vec{v}_{\text{ср}}=\dfrac{\vec{v}\Delta r_1/v_1+\vec{v}_2\Delta r_2/v_2}{\Delta r_1/v_1+\Delta r_2/v_2}$. По условию $\Delta r_1=\Delta r_2=\Delta r$; сокращая на Δr, находим

$$\vec{v}_{\text{ср}}=\frac{\vec{v}_1/v_1+\vec{v}_2/v_2}{1/v_1+1/v_2}.$$

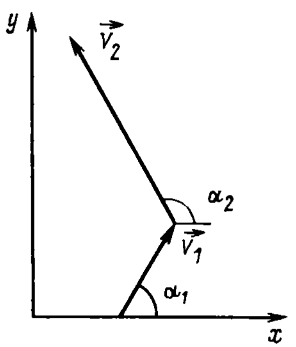


Рис. 92

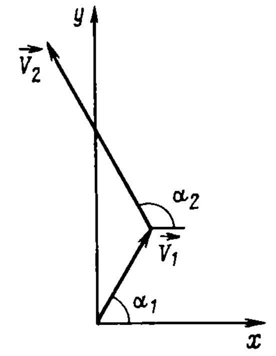


Рис. 93

Проецируем это векторное равенство на оси координат:

$$v_{\text{ср}\,x}=\frac{v_1\cos\alpha_1/v_1+v_2\cos\alpha_2/v_2}{1/v_1+1/v_2}=\frac{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{1/v_1+1/v_2}=0;$$

$$v_{\text{ср}\,y}=\frac{v_1\sin\alpha_1/v_1+v_2\sin\alpha_2/v_2}{1/v_1+1/v_2}=\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2}{1/v_1+1/v_2}=\frac{40\sqrt{3}}{3};$$

$$v_{\text{ср}}=\sqrt{v_{\text{ср}\,x}^2+v_{\text{ср}\,y}^2}=\frac{40\sqrt{3}}{3}.$$

7. Как следует из рис. 93, перемещение тела $\Delta\vec{r}=\Delta\vec{r}_1+\Delta\vec{r}_2$,

$$\vec{v}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{r}_1+\Delta\vec{r}_2}{2\Delta t/2}=\frac{1}{2}(\vec{v}_1+\vec{v}_2).$$

Проекции этого уравнения на оси x и y

$$v_{\text{ср}\,x}=\frac{1}{2}(v_1\cos\alpha_1+v_2\cos\alpha_2)=-5\ \text{м/с};$$

$$v_{\text{ср}\,y}=\frac{1}{2}(v_1\sin\alpha_1+v_2\sin\alpha_2)=15\sqrt{3}\ \text{м/с};$$

$$v_{\text{ср}}=\sqrt{v_{\text{ср}\,x}^2+v_{\text{ср}\,y}^2}=26{,}46\ \text{м/с}.$$

8. Время полета пули $t=H/v$, где v — скорость звука. Из уравнения равнопеременного движения

$$H=v_0t-\frac{gt^2}{2}=v_0\frac{H}{v}-\frac{g}{2}\,\frac{H^2}{v^2},$$

откуда

$$v_0=\left(v+\frac{gH}{2v}\right);\quad v_0=\left(340+\frac{10\cdot 680}{2\cdot 340}\right)=350\ \text{м/с}.$$

9. Условие равновесия кубика $\Sigma M=0$ относительно точки 0 (рис. 94):

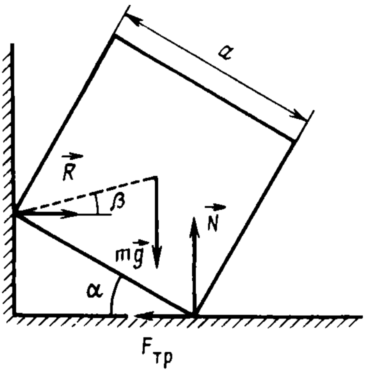


Рис. 94

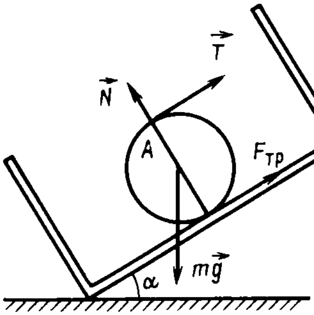


Рис. 95

$$Na\cos\alpha - mg\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\beta - F_{тр}a\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Подставляя в (1) $\beta = 45° - \alpha$, $N = mg$, $F_{тр} = kmg$, получим

$$mga\cos\alpha - mg\frac{a}{\sqrt{2}}\cos(45 - \alpha) - mgka\sin\alpha = 0. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2), находим

$$k = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \cos(45 - \alpha)}{\sqrt{2}\sin\alpha}.$$

10. Силы, действующие на шар, изображены на рис. 95. Сумма проекций сил на направление, перпендикулярное к дну чаши, должна быть равна нулю. Проекции на это направление имеют только сила тяжести mg и реакция дна чаши N. Таким образом, $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, сила трения

$$F_{тр} \leqslant k\,mg\cos\alpha. \qquad (1)$$

Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка: $2RF_{тр} - mgR\sin\alpha = 0$, R — радиус шара, отсюда $F_{тр} = mg\sin\alpha/2$.

Учитывая неравенство (1) найдем, что при равновесии

$$kmg\cos\alpha \geqslant mg\sin\alpha/2.$$

Следовательно, максимальный угол α определяется из условия $\operatorname{tg}\alpha = 2k = 1$, $\alpha = 45°$.

11. Первый верхний кирпич будет находиться в равновесии по отношению ко второму кирпичу, когда центр его тяжести будет располагаться на продолжении линии среза второго кирпича, т. е. наибольшая длина свободного конца первого кирпича будет $l/2$. Центр тяжести первого и второго кирпичей, взятых вместе, будет

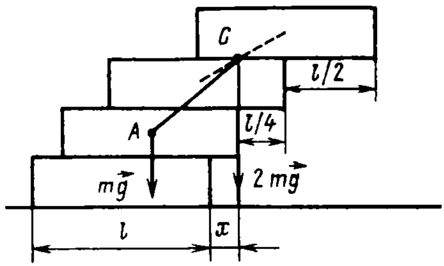


Рис. 96

располагаться от края второго кирпича на расстоянии $l/4$. На эту длину и может быть сдвинут второй кирпич относительно третьего. Центр тяжести трех кирпичей будет находиться на линии AC (рис. 96), его положение определится из уравнения $mg(l/2-x)=$ $=2mgx$. Откуда $x=l/6$, т. е. третий кирпич может выступать над четвертым не более чем на $1/6$ часть своей длины.

12. Уравнение динамики для всей системы

$$F-m_1g-m_Tg-m_2g=(m_1+m_т+m_2)\,a,$$

где m_T — масса троса; отсюда

$$a=\frac{F-g(m_1+m_T+m_2)}{m_1+m_T+m_2}=\frac{F}{m_1+m_T+m_2}-g.$$

Натяжение троса на верхнем конце

$$T_1=F-m_1(a+g)=(m_т+m_2)(a+g)=\frac{F(m_т+m_2)}{m_1+m_т+m_2};$$

$$T_1=\frac{600\,(10+10)}{20+10+10}=300\ \text{Н};$$

в середине

$$T_2=F-\left(m_1+\frac{m_т}{2}\right)(a+g)=\left(\frac{m_т}{2}+m_2\right)(a+g)=\frac{F\left(\frac{m_т}{2}+m_2\right)}{m_1+m_т+m_2},$$

$$T_2=\frac{600\,(10/2+10)}{20+10+10}=225\ \text{Н};$$

на нижнем конце

$$T_3=F-(m_1+m_T)(a+g)=m_2(a+g)=\frac{Fm_2}{m_1+m_T+m_2},$$

$$T_3=\frac{600\cdot 10}{20+10+10}=150\ \text{Н}.$$

13. Чтобы сдвинуть ящик, не скользя по полу, человек должен приложить к ящику силу F(рис. 97), горизонтальная проекция

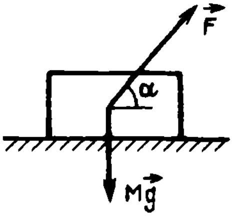


Рис. 97

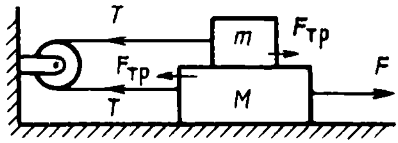


Рис. 98

которой по абсолютному значению больше или равна силе трения покоя ящика о пол и меньше силы трения покоя человека о пол:

$$F\cos\alpha \geqslant \mu(Mg - F\sin\alpha),$$
$$F\cos\alpha \leqslant \mu(mg + F\sin\alpha),$$

откуда

$$\begin{cases} \mu F\sin\alpha \geqslant \mu Mg - F\cos\alpha; \\ \mu F\sin\alpha \geqslant F\cos\alpha - \mu mg. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств относительно $F\sin\alpha$ и $F\cos\alpha$, получаем $F\sin\alpha \geqslant (M-m)g/2$, $F\cos\alpha \geqslant \mu(M+m)g/2$, откуда

$$F \geqslant \frac{1}{2}g\sqrt{(M-m)^2 + \mu^2(M+m)^2}.$$

14. Уравнения движения для нижнего и верхнего брусков имеют вид (рис. 98)

$$Ma = F - T - F_{тр}, \quad ma = T - F_{тр},$$

где T — сила натяжения веревки. Учитывая, что $F_{тр} = mgk$, получаем

$$F = a(M+m) + 2mgk;$$
$$F = \frac{10}{2}(2+1) + 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 25 \text{ Н}.$$

15. Уравнения движения бруска и тела имеют вид

$$m_1a_1 = F - F_{тр}, \quad m_2a_2 = F_{тр},$$

где $F_{тр}$ — сила трения; a_1 и a_2 — ускорения бруска и тела.

Предположим, что проскальзывания нет, тогда $a_1 = a_2$. Из уравнения движения можно определить ускорение и силу трения. Сила трения $F_{тр} = m_2\frac{F}{(m_1+m_2)}$. Чтобы не было проскальзывания, сила трения должна удовлетворять неравенству $F_{тр} \leqslant km_2g$, т. е. $\frac{F}{(m_1+m_2)} \leqslant kg$.

Если $F > k(m_1+m_2)g$, то возникает скольжение. Уравнения движения в этом случае примут вид

$$m_1a_1 = F - km_2g, \quad m_2a_2 = km_2g.$$

Из этих уравнений находим $a_1 = (F - km_2 g) m_1$, $a_2 = kg$. Очевидно, что $a_1 > a_2$. Ускорение тела относительно бруска будет направлено в сторону, противоположную движению, и по модулю равно

$$(F - km_2 g) m_1 - kg.$$

Время движения тела по бруску

$$t = \sqrt{\frac{2lm_1}{F - kg(m_1 + m_2)}}.$$

16. Так как внешние силы, действующие на систему по горизонтали, отсуствтуют, то проекция общего импульса системы клин — грузы на горизонтальное направление должна оставаться постоянной (равной нулю). Отсюда следует, что клин начинает двигаться только в том случае, если будут двигаться грузы. Чтобы груз массой m_2 двигался вправо, должно выполняться условие

$$m_2 g \sin\alpha \geqslant m_1 g + km_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда $\frac{m_1}{m_2} \leqslant \sin\alpha - k\cos\alpha$. При этом клин будет двигаться влево.

Чтобы груз массой m_2 двигался влево, должно выполняться условие

$$m_1 g \geqslant m_2 g \sin\alpha + km_2 g \cos\alpha, \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} \geqslant \sin\alpha + k\cos\alpha.$$

Клин при этом будет двигаться вправо. Следовательно, для равновесия клина отношения масс грузов должно удовлетворять неравенству

$$\sin\alpha - k\cos\alpha \leqslant \frac{m_1}{m_2} \leqslant \sin\alpha + k\cos\alpha.$$

17. На груз действуют внешняя сила F и сила тормозящего трения $F_{1,2}$. На доску действуют сила движущего трения $F_{2,1}$ со стороны груза и сила тормозящего трения между доской и плоскостью $F_{\text{пл},1}$.

Запишем уравнения движения тел:

$$\text{для доски } F_{2,1} - F_{\text{пл},1} = Ma_1,$$
$$\text{для груза } F - F_{1,2} = ma_2;$$

кроме того,

$$|F_{2,1}| = |F_{1,2}| = k_2 mg; \quad F_{\text{пл},1} = k_1 (M + m) g.$$

Отсюда находим

$$a_1 = \frac{(k_2 - k_1) mg}{M} - k_1 g = ; \quad a_2 = \frac{F}{m} - k_2 g;$$

$$a_1 = \frac{(0{,}5 - 0{,}1) \cdot 1 \cdot 10}{2,} - 0{,}1 \cdot 10 = 1 \, \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$a_2=\frac{20}{1}-0,5\cdot 10=15 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы сдвинуть груз с доски, необходимо соблюдение неравенства $a_2>a_1$ или $F>(k_2-k_1)mg\frac{M+m}{M}$;

$$F>(0,5-0,1)\,1\cdot 10\frac{2+1}{2}=6 \text{ Н}.$$

18. $T=0,5T_1+0,5T_2$, где T_1 и T_2 — периоды колебаний маятников с длиной нити соответственно l и $\frac{l}{2}$;

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

19. Искомая сила, вообще говоря, направлена не вдоль стержня, так как стержень жестко скреплен с осью под углом φ и не меняет своей ориентации ни при вращении, ни при остановке. Поэтому при вращении системы на шарик действуют сила тяжести mg и искомая сила F. Равнодействующая этих двух сил представляет собой центростремительную силу

$$m\omega^2R=\sqrt{F^2+(mg)^2}.$$

Так как $R=l\sin\varphi$, то

$$F=m\sqrt{g^2+\omega^4l^2\sin^2\varphi};$$

$$F=1\cdot\sqrt{10^2+10^4\cdot 1\cdot\sin^2 30^\circ}\approx 50 \text{ Н}.$$

Направление этой силы можно найти из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{\omega^2 l\sin\varphi}{g}.$$

20. Силы, действующие на шарик, показаны на рис. 99. Условие движения конического маятника: $mg=F\sin\alpha$, откуда

$$F=\frac{mg}{\sin\alpha}=mg\sqrt{5}.$$

21. На шарик действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити F (рис. 100). Движение его относительно Земли складывается из движения по вертикали вместе с лифтом и обращения вокруг оси АО. Напишем второй закон Ньютона для проекций на вертикальное направление: $ma=mg-F\cos\alpha$; для проекций на направление радиуса OB окружности, описываемой шариком,

$$m\omega^2 l\sin\alpha=F\sin\alpha,$$

где ω — угловая скорость шарика; m — его масса.

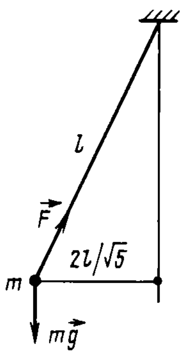


Рис. 99

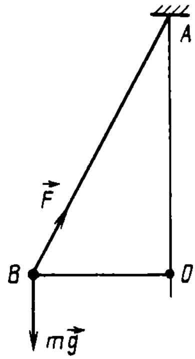


Рис. 100

Исключая из этих уравнений F, получим $\omega^2 l = (g-a)/\cos\alpha$. Отсюда

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{(g-a)}};\quad T = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{1\cdot\cos 60^\circ}{(10-5)}} \approx 2 \text{ с.}$$

22. На шарик действуют сила тяжести mg и сила реакции N (рис. 101). На основании второго закона Ньютона для шарика можно написать уравнение в векторном виде

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} = \vec{F}_{\text{рез}},$$

где a — центростремительное ускорение шарика.

Проекция этого уравнения на ось $0x$

$$m\omega^2 r = F_{\text{рез}} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

где $r = R\sin\alpha$ — радиус вращения шарика.

После подстановки r в полученное уравнение и последующих преобразований имеем $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R\cos\alpha}}$.

По условию задачи треугльник ABC — равносторонний, поэтому $\alpha = 60^\circ$. Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{10}{0{,}8\cdot\cos 60^\circ}} = 5 \quad 1/\text{с}.$$

23. На основании второго закона Ньютона для шарика в момент обрыва нити (рис. 102) можно написать следующее уравнение:

$$N - mg = \frac{mv_0^2}{l}. \qquad (1)$$

Время падения шарика

$$t_{\text{п}} = \sqrt{2(H-l)/g}.$$

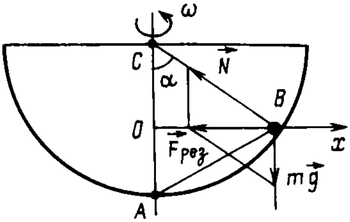


Рис. 101

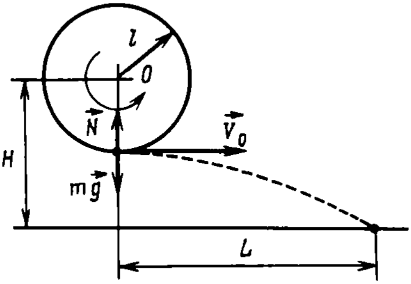


Рис. 102

Начальную скорость шарика найдем из условия

$$v_0 = \frac{L}{t_п} = \frac{L}{\sqrt{2(H-l)/g}}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1) и окончательно определим силу натяжения нити

$$N = mg\left(1 + \frac{L^2}{2l(H-l)}\right);$$

$$N = 0{,}1 \cdot 10\left(1 + \frac{4^2}{2 \cdot 1(2-1)}\right) = 9 \text{ Н}.$$

24. Поскольку шарики двигаются с постоянной скоростью, то для них должны выполняться условия равновесия (рис. 103):

$$F_2 = N + m_2 g, \quad F_1 = m_1 g - N,$$

где $N = |\vec{N}'| = |\vec{N}|$.

Очевидно, что силы Архимеда, действующие на шарики, будут равны, так как равны их объемы: $F_1 = F_2 = \rho_ж g V$. Тогда уравнения равновесия запишутся следующим образом: $N = \rho_ж g V - m_2 g$, $N = m_1 g - \rho_ж g V$. Складывая их, окончательно находим

$$N = 0{,}5(m_1 - m_2)g; \quad N = 0{,}5(2 - 1{,}6)10 = 2 \text{ Н}.$$

25. Так как подъем сваи происходит медленно, то кинетической энергией сваи будем пренебрегать.

1 этап. Подъем сваи в вертикальное положение. Работу, которая совершается на этом этапе, можно определить по формуле

$$A_1 = P^* l/2,$$

где P^* — «кажущийся вес» сваи, т. е. разность силы тяжести $P = mg$ и архимедовой силы $F_А$, а $l/2$ — высота подъема центра тяжести сваи.

Для P^* имеем $P^* = \rho V g - \rho_в V g = \rho V g\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho}\right) = mg\left(1 - \frac{1}{n}\right) = P\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

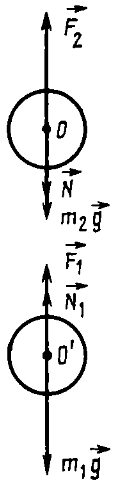


Рис. 103

2 этап. Подъем вертикально расположенной сваи. Если изобразить результирующую силу, против которой совершается работа при подъеме, как функцию высоты центра тяжести сваи над дном водоема, то этот график будет иметь вид, показанный на рис. 104. Площадь под этим графиком и представляет совершенную работу. Поэтому

$$A_2 = P^*(h-l) + P\left(H - \frac{l}{2}\right) - \frac{1}{2}(P - P^*)\,l = P^*h + PH - \frac{1}{2}P^*l$$

и окончательно

$$A = A_1 + A_2 = mg\left[H + h\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right].$$

26. Уравнения равновесия стержня до погружения в воду и после (рис. 105) имеют вид $mg = F_1$, $mg = F_A + F_2$. Если из первого вычтем второе, то получим $0 = F_1 - F_2 - F_A$ или

$$\Delta F = F_A, \tag{1}$$

т. е. изменение показания динамометра равно силе Архимеда, действующей на стержень

$$F_A = \rho g S_{ст}(h + H), \tag{2}$$

где $S_{ст}$ — площадь стержня. Поскольку вода несжимаема, то выполняется закон сохранения объема, т. е.

$$V = S_{ст} \cdot H = (S - S_{ст})\,h = \text{const}.$$

Отсюда находим $S_{ст}(H + h) = Sh$. Подставляя найденное выражение в (2) и учитывая (1), окончательно получим

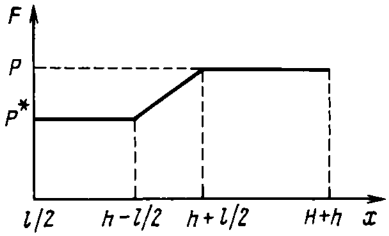


Рис. 104

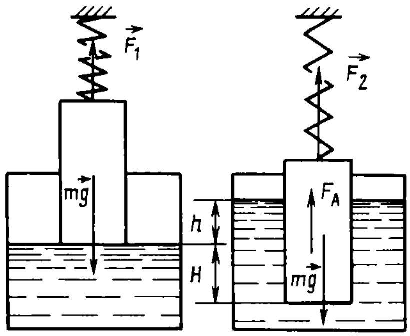


Рис. 105

$$\Delta F = \rho g S h,$$
$$\Delta F = 10^3 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 = 2 \text{ Н}.$$

27. Уравнение второго закона Ньютона для бруска с шайбой, когда шайба не скользит по бруску, имеет вид $(m+M)a_x = -2kx$, отсюда находим ускорение $a_x = -\frac{2k}{m+M}x$. Тогда при $x = A$, где A — амплитуда колебаний, получаем $|a_x|_{x=A} = a_{\max}$, т. е. $a_{\max} = \frac{2k}{m+M}A$. Чтобы шайба не скользила по бруску, необходимо выполнение условия $ma_{\max} \leqslant \mu mg$. Подставляя сюда значение $a_{\max}$, приходим к соотношению

$$A \leqslant \frac{m+M}{2k}\mu g; \quad A \leqslant \frac{0{,}5+1}{2 \cdot 30} \cdot 0{,}4 \cdot 10 = 0{,}1 \text{ м}.$$

28. $h = \Delta P^2/8m^2 g$; $h = 10^2/8 \cdot 1 \cdot 10 = 1{,}25$ м.

29. Уравнение сохранения импульса вдоль оси $0x$

$$mv_0 = (m+M)u, \tag{1}$$

где u — скорость преграды и горизонтальная скорость тела в момент времени, когда тело поднимается на высоту R, т. е. будет находиться в точке A. Уравнение сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgR + \frac{mu^2}{2}, \tag{2}$$

где v — модуль скорости тела в точке A. Из уравнения (1) находим

$$u = v_0 \frac{m}{m+M}. \tag{3}$$

Подставляем (3) в (2) и после преобразования получим

$$v = \sqrt{v_0^2\left[1 - \frac{mM}{(m+M)^2}\right] - 2gR};$$

$$v=\sqrt{3^2\left[1-\frac{1\cdot 10}{(1+10)^2}\right]-2\cdot 10\cdot 0{,}2}\approx 2 \text{ м/с}.$$

30. Из закона сохранения импульса определим начальную скорость движения ствола орудия при выстреле $Mv_c=mv_0$, откуда $v_c=\left(\frac{m}{M}\right)v_0$. Скорость ствола гасится противооткатным устройством, которое при этом совершает работу $A=F_{ср}S=\frac{Mv_c^2}{2}$. Подставляя сюда значение v_c, находим

$$F_{ср}=\frac{m^2v_0^2}{2MS};$$

$$F_{ср}=\frac{8^2\cdot(10^3)^2}{2\cdot 400\cdot 0{,}5}=160 \text{ кН}.$$

31. Из уравнения сохранения энергии находим скорость копра до удара $v_0=\sqrt{2gH}$. Из уравнения сохранения импульса $(m+M)v_1=$ $=v_0m$ находим скорость системы копер — свая после удара

$$v_1=v_0\frac{m}{m+M}=\sqrt{2gH}\frac{m}{m+M}.$$

Работа сил сопротивления грунта по торможению сваи равна изменению кинетической и потенциальной энергии системы сваякопер:

$$Fl=\frac{m+M}{2}v_1+(m+M)gl.$$

Подставив сюда значение v_1, после преобразований находим

$$F=mg\frac{m}{m+M}\frac{H}{l}+(m+M)g;$$

$$F=50\cdot 10\frac{50}{50+200}\cdot\frac{5}{0{,}5}+(50+200)\cdot 10=5 \text{ кН}.$$

32. Закон сохранения энергии при движении тела от начального положения до точки B

$$mgH-mgR=\frac{mv^2}{2}+A,$$

где v — скорость тела в точке B. На основании второго закона Ньютона для тела в момент прохождения им точки B можно написать уравнение

$$\frac{mv^2}{R}=mg-N.$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$N=mg\left(3-2\frac{H}{R}\right)+2\frac{A}{R};$$

$$N=2\cdot 10\left(3-2\frac{4{,}5}{2}\right)+2\frac{40}{2}=10\ \text{Н}.$$

33. Так как в горизонтальном направлении на систему не действуют никакие внешние силы, то центр масс системы (средний шарик) движется вертикально. Это означает, что в тот момент, когда верхний шарик касается плоскости, скорость нижнего шарика равна нулю, а скорость верхнего шарика направлена вертикально и по модулю вдвое больше скорости среднего шарика. Согласно закону сохранения энергии,

$$mg\frac{l}{2}+mgl=\frac{mv^2}{2}+\frac{m}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

где m — масса каждого из шариков.

Отсюда $v=2\sqrt{\frac{3}{5}gl}$.

34. Пусть в начальный момент времени $(t=0)$ дельфины находятся на расстоянии l и первый дельфин испускает импульс. Второй дельфин примет этот импульс спустя промежуток времени t_1. За это время звук пройдет путь $l-vt$. Следовательно,

$$t_1=\frac{l-vt_1}{c}. \qquad (1)$$

Следующий импульс первый дельфин издает через промежуток времени $T=\frac{1}{\nu}$. Этот импульс дойдет до второго дельфина в момент времени

$$t_2=\frac{(l-vt_1)-vT-v(t_2-t_1)}{c}. \qquad (2)$$

Вычитая (1) из (2) и обозначив $t_2-t_1=T'$, получим

$$T'=T-\frac{v}{c}(T+T'),\ \text{т. е.}\ T'=T\frac{c-v}{c+v}.$$

Значит, частота следования импульсов, воспринимаемая вторым дельфином,

$$\nu_1=\nu\frac{c+v}{c-v}.$$

35. Длина волны в первом опыте $\lambda_1=\frac{l}{n}$, где n — число длин волн,

укладывающихся на расстоянии l. Во втором опыте $\lambda_2 = \frac{l}{(n-2)}$. До повышения температуры скорость звука $v = \nu\lambda_1 = \frac{\nu l}{n}$, а после повышения $v_2 = \nu\lambda_2 = \frac{\nu l}{(n-2)}$. Но так как $n = \frac{\nu l}{v_1}$, то

$$v_2 = \frac{\nu l v_1}{\nu l - 2v_1}.$$

Скорость звука возрастает по линейному закону $v_2 = v_1(1 + \alpha\Delta t)$, где $\alpha = \left(\frac{0,5}{330}\right) K^{-1}$. Подставляя в данное выражение значение v_2, получим

$$l = \frac{2v_1(1 + \alpha\Delta t)}{\nu\alpha\Delta t};$$

$$l = \frac{2 \cdot 330\left(1 + \frac{0,5}{330} \cdot 20\right)}{50 \cdot \frac{0,5}{330} \cdot 20} \approx 450 \text{ м}.$$

36. Система из трех зарядов находится в равновесии. На заряд q_1 действуют три силы: две кулоновские силы F_{12} и F_{13} отталкивания от второго и третьего зарядов и сила натяжения T_{12} нити, скрепляющей заряды q_1 и q_2.
Из равенства этих сил находим $T_{12} = F_{12} + F_{13}$, или

$$T_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 4l^2} = \frac{q_1(4q_2 + q_3)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

Аналогичным образом находим выражение для силы натяжения T_{23} нити, скрепляющей заряды q_2 и q_3:

$$T_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 l^2} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 4l^2} = \frac{q_3(4q_2 + q_1)}{16\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

37. Шарик в масле находится в состоянии равновесия. Поэтому

$$\vec{F}_A + \vec{F}_э + \vec{F}_T = 0, \qquad (1)$$

где $F_A = \frac{\pi d^3}{6} \rho_M g$ — сила Архимеда; $F_э = qE$ — сила, действующая на шарик со стороны электрического поля в масле; $F_T = \frac{\pi d^3}{6} \rho_A g$ — сила тяжести.

Поскольку $\rho_а > \rho_М$, то для пребывания шарика во взвешенном состоянии в масле необходимо, чтобы векторы сил $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_э$ были направлены в одну сторону. Поэтому при проецировании уравнения (1) на вертикальную ось получим

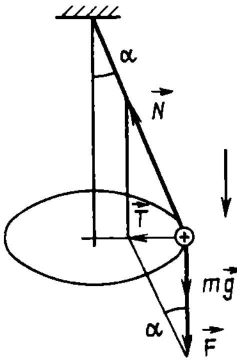


Рис. 106

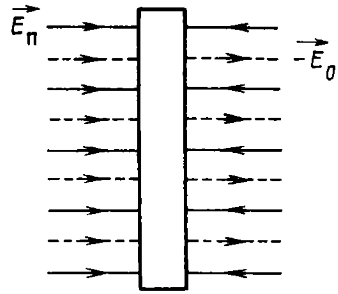


Рис. 107

$$\frac{\pi d^3}{6}\rho_М g + Eq - \frac{\pi d^3}{6}\rho_А g = 0,$$

откуда

$$E = \frac{\pi d^3}{6q} g\left(\rho_А - \rho_М\right).$$

Модуль вектора напряженности электрического поля в масле связан с модулем вектора напряженности внешнего электрического поля соотношением $E = \frac{E_0}{\varepsilon}$. Окончательно $E_0 = \frac{\pi d^3 \varepsilon g}{6q}\left(\rho_А - \rho_М\right)$;

$$E_0 = \frac{3{,}14\,(3\cdot 10^{-3})^3\cdot 5\cdot 10}{6\cdot 10^{-7}}\left(2{,}6 - 0{,}9\right)\cdot 10^3 = 12\,\frac{кВ}{м}.$$

38. Шарик движется по окружности (рис. 106) под действием центростремительной силы

$$\vec{T} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}, \tag{1}$$

где $\vec{N}$ — сила, с которой нить действует на шарик, $N = |\vec{N}|$ — соответствует силе натяжения нити; сила $\vec{F} = q\vec{E}$ определяет действие электростатического поля на заряд q.

Запишем уравнение движения шарика $m\vec{a} = \vec{T}$. Проецируя его с учетом (1) на вертикальное и горизонтальное направления, получим два уравнения:

$$N\cos\alpha = mg + F. \tag{2}$$

$$mv^2/r = \left(mg + F\right)\operatorname{tg}\alpha, \tag{3}$$

Из уравнения (2) находим силу натяжения нити

$$N = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}.$$

Радиус окружности r в формуле (3) определяем через угол α

$$r = l \sin\alpha. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), после преобразований находим кинетическую энергию

$$W_K = \frac{mv^2}{2} = \left[(mg + qE)\, l \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha\right]/2.$$

39. Обозначим расстояние от заряда q до точек A, B, C соответственно через r_A, r_B, r_C. Тогда, используя известные геометрические соотношения, находим

$$\frac{1}{r_C^2} = \frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2}.$$

Если умножим это уравнение на $q/4\pi\varepsilon_0$, то получим соотношение для напряженности:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_C^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B^2},$$

или $E_C = E_A + E_B$, $E_C = 2 \cdot 10^2 + 10^2 = 3 \cdot 10^2$ В/м.

40. Напряженность результирующего поля определяется в соответствии с принципом суперпозиции (наложения) электрических полей. Поэтому электрическое поле слева от пластины $E_2 = E_0 + E_п$, а справа $E_1 = E_п - E_0$, где E_0, $E_п$ — модули векторов напряженности внешнего электрического поля и электрического поля пластины, заряженной отрицательно (рис. 107). Решая совместно оба уравнения, находим $E_0 = 0{,}5(E_2 - E_1)$. Тогда модуль заряда пластины $|q| = \frac{F}{E_0} = \frac{2E}{E_2 - E_1}$; $|q| = \frac{2 \cdot 0{,}7}{(5-3) \cdot 10^4} = 7 \cdot 10^{-5}$ Кл.

41. Вертикальное и горизонтальное электрические поля образуют результирующее однородное электрическое поле с напряженностью

$$E = \sqrt{E_Г^2 + E_В^2}. \qquad (1)$$

Так как электрон летит вдоль направления силовой линии, то он будет тормозиться и, следовательно, соотношение между его начальной $v_н$ и конечной скоростью $v_к$ запишется так:

$$v_н = 2v_к. \qquad (2)$$

Изменение кинетической энергии электрона происходит за счет работы, совершаемой электростатическим полем,

$$\frac{mv_н^2}{2} - \frac{mv_к^2}{2} = A = eEl. \qquad (3)$$

После подстановки (2) в (3) с учетом (1) находим

$$v_к = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{el}{m}}\,(E_Г^2 + E_В^2)^{1/4},$$

$$v_к = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot2{,}7\cdot10^{-3}}{9{,}1\cdot10^{-31}}}\left(16\cdot10^4+9\cdot10^4\right)^{1/4} = 4\cdot10^5\ \frac{м}{с}.$$

42. В начальный момент времени каждый шарик обладает кинетической энергией $W_к = mv^2/2$. Так как $v=\omega_0 l/2$, то

$$W_к = \frac{1}{8} m\omega_0^2 l^2. \qquad (1)$$

Работа электрического поля по торможению каждого из шариков (рис. 108)

$$A = qEh = qE\frac{l}{2}(1-\cos\varphi). \qquad (2)$$

В соответствии с законом сохранения энергии приравниваем (1) и (2) и после преобразования находим

$$\cos\varphi = 1 - \frac{m\omega_0^2 l}{4qE}, \text{ или}$$

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{m\omega_0^2 l}{4qE}\right),$$

$$\varphi = \arccos\left(1 - \frac{5\cdot10^{-3}\cdot4\cdot0{,}1}{4\cdot10^{-6}\cdot10^3}\right) = 60°.$$

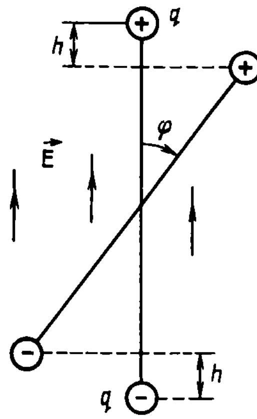


Рис. 108

43. Напряженность электрического поля внутри шара равна нулю $(E=0)$. Следовательно, потенциал шара во всех его точках, включая и точки на поверхности шара, будет везде один и тот же. Чтобы определить потенциал шара, достаточно определить потенциал, например, центра шара

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta q_i}{4\pi\varepsilon_0 R}, \qquad (1)$$

где R — радиус шара; Δq_i — i-й заряд, индуцированный на поверхности шара под действием электрического поля, образованного точечным зарядом q; N — число индуцированных зарядов.

В силу закона сохранения заряда полный заряд шара остается равным нулю $Q=\Sigma\Delta q_i=0$. Поэтому из формулы (1) следует, что

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

44. Все одинаковые заряды, согласно условию, образуют симметричную систему. Поэтому в центре напряженность электрического поля $\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = 0$. Потенциал электрического поля в центре окружности $\varphi = \frac{A}{q}$; $\varphi = \frac{10^{-9}}{10^{-11}} = 100$ В.

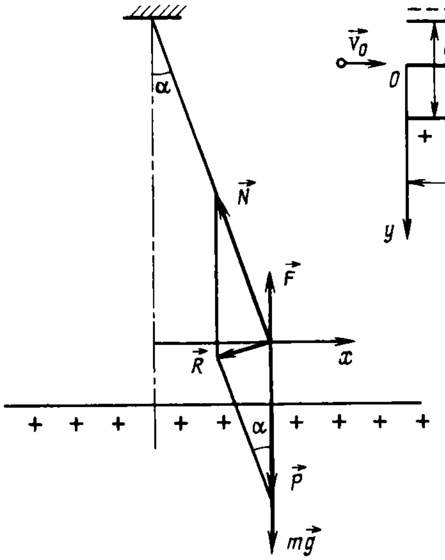


Рис. 109

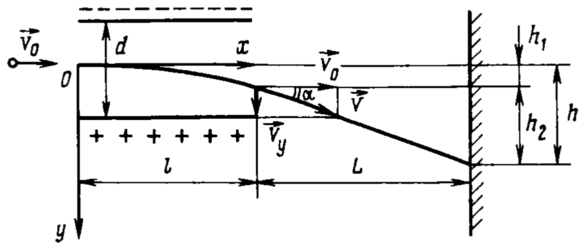


Рис. 110

45. Закон сохранения энергии при движении шарика запишется следующим образом:

$$mgR + W_A = \frac{mv_B^2}{2} + W_B, \qquad (1)$$

где W_B — потенциальная энергия взаимодействия, когда q находится в точке B; v_B — скорость движения шарика в точке B.

Уравнение второго закона Ньютона, определяющее движение шарика в точке B, имеет вид

$$F - mg = \frac{mv_B^2}{R}. \qquad (2)$$

Выражая mv_B^2 из (2) и подставляя в (1), после преобразований окончательно находим

$$W_B = 0{,}5\,(3mg - F)\,R + W_A,$$

$$W_B = 0{,}5\,(3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 - 0{,}1)\,0{,}1 - 2 \cdot 10^{-3} = -4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

46. Движение шарика происходит в соответствии со вторым законом Ньютона (рис. 109) $m\vec{a} = \vec{R}$, где $\vec{R} = \vec{P} + \vec{N}$; $\vec{P} = \vec{F} + m\vec{g}$; $\vec{a}$ — ускорение шарика; $\vec{N}$ — сила, с которой нить действует на шарик. При гармонических колебаниях, когда угол α мал, вместо этого уравнения можно написать $mx'' = -Px/l$, где x — координата шарика относительно положения равновесия, x'' — вторая производная координаты по времени, l — длина маятника.

Последнее уравнение преобразуем к виду $x''+\omega_0^2x=0$, где $\omega_0=\sqrt{\frac{P}{ml}}$ — круговая частота колебаний маятника. Используя известное соотношение $\omega_0=2\pi/T$, находим период колебаний маятника $T=2\pi\sqrt{ml/P}$. При положительно заряженном шарике $P=mg-F$, а когда шарик заряжен отрицательно, то $P=mg+F$. Подставляя поочередно эти значения в формулу для T, после преобразований приходим к зависимости

$$T_2=T_1\sqrt{\frac{mg-F}{mg+F}};$$

$$T_2=2\sqrt{\frac{0{,}03\cdot 10-0{,}1}{0{,}03\cdot 10+0{,}1}}\simeq 1{,}4\ \text{с}.$$

47. Скорость электронов после ускорения определяем из уравнения сохранения энергии $v_0=\sqrt{2eU/m}$, где e, m — заряд и масса электрона. В электрическом поле пластин на электрон действует вдоль оси y (рис. 110) сила $F_y=eE=eU_п/d$. В результате электрон приобретает в этом направлении ускорение $a_y=\frac{eU_п}{md}$. Время пролета электроном пластин $t=l/v_0$. За это время электрон приобретает в направлении оси y скорость $v_y=a_yt=\frac{eU_пl}{mdv_0}$ и отклоняется от оси x на расстояние

$$h_1=\frac{a_yt^2}{2}=\frac{U_пl^2}{4dU}.$$

За пластинами электрон летит по прямой линии под углом α к оси X. Угол отклонения α определяется по формуле $\operatorname{tg}\alpha=v_y/v_0$. Перемещение электрона по оси Y при движении за пластинами $h_2=$ $=L\operatorname{tg}\alpha=\frac{LU_пl}{2dU}$. Тогда смещение луча на экране $h=h_1+h_2$, или

$$h=\frac{U_пl}{4dU}(l+2L).$$

48. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле происходит под действием силы Лоренца

$$\frac{mv_0^2}{R}=qv_0B, \tag{1}$$

где v_0 — скорость частицы в магнитном поле; q и m — заряд и масса частицы.

Отрицательно заряженная частица, двигаясь в однородном электрическом поле вдоль силовой линии, будет тормозиться, поэтому $v_k=v_0/n$. Изменение кинетической энергии частицы в электрическом поле

$$\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv_k^2}{2}=qU. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) с учетом, что $v_k=\frac{v_0}{n}$, находим

$$v_k=\frac{2Un}{RB(n^2-1)},$$

$$v_k=\frac{2\cdot 10^3\cdot 3}{0{,}2\cdot 10^{-3}(9-1)}\approx 3{,}8\cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

49. Электрический ток, протекающий между обкладками конденсатора C_1, складывается из движения положительных и отрицательных носителей заряда $I=2ewV$, где $V=Sd$ — объем между обкладками конденсатора C_1. При этом напряжение, возникающее между обкладками конденсатора C_2 $U=IR=2ewSdR$, а заряд на обкладках $q=C_2U$, т. е.

$$q=2ewSdRC_2,$$

$$q=2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^{12}\cdot 10^{-2}\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^3\cdot 10^{-5}=6{,}4\cdot 10^{-13}\text{ Кл}.$$

50. При условии, что ток в цепи $ABCD$ отсутствует, сила тока, протекающего по левому контуру,

$$J=\frac{\mathcal{E}_1}{r+R/2}, \qquad (1)$$

где $R/2$ — общее сопротивление параллельно соединенных резисторов.

Так как ток в цепи $ABCD$ отсутствует, то $U_{AD}=\mathcal{E}_2$, или

$$J\frac{R}{2}=\mathcal{E}_2. \qquad (2)$$

Подставив в (2) выражение (1), находим после преобразований $R=\frac{2\mathcal{E}_2 r}{\mathcal{E}_1-\mathcal{E}_2}$, $R=\frac{2\cdot 6\cdot 0{,}5}{12-6}=1$ Ом.

51. Падение напряжения на линии $U_л=0{,}08U=IR_л$, где I — сила тока в линии; $R_л$ — сопротивление проводов.

В свою очередь, $U=IR_л+IR_н$, где $R_н$ — сопротивление нагрузки. Из совместного решения этих уравнений находим

$$R_н=11{,}5R_л.$$

Потребляемая мощность

$$P=I^2R_н=\frac{(0{,}08U)^2}{R_л^2}R_н.$$

Из двух последних уравнений $R_л=\frac{(0{,}08U)^2}{P}\cdot 11{,}5=7{,}1$ Ом. Поскольку $R_л=\rho\frac{2l}{S}$, а масса проводов $M=d\cdot 2l\cdot S$, то $M=4\frac{\rho d l^2}{R_л}$,

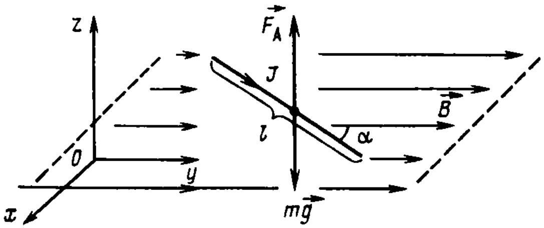


Рис. 111

$$M=\frac{4\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 8{,}9\cdot 10^{3}(5\cdot 10^{3})^{2}}{7{,}1}\approx 2{,}1\cdot 10^{3}\ \text{кг}.$$

52. В соответствии с законами Фарадея можно написать: $m=\frac{1}{F}\times\frac{M}{n}q$, где F — число Фарадея; учитывая, что $q=Jt$, а $m=\rho SH$, получим

$$\rho SH=\frac{1}{F}\frac{M}{n}Jt.$$

Отсюда находим толщину слоя никеля

$$H=\frac{MJt}{nF\rho S},$$

$$H=\frac{58{,}7\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}4\cdot 14400}{2\cdot 9{,}6\cdot 10^{4}\cdot 8{,}9\cdot 10^{3}\cdot 10^{-2}}=20\ \text{мкм}.$$

53. Ток, протекающий через нагрузку, в первом и во втором случаях соответственно

$$I_1=\mathscr{E}/(R+r),$$

$$I_2=\frac{\mathscr{E}}{R_{\text{экв}}+r}=\frac{\mathscr{E}}{\frac{R}{4}+r}.$$

Мощность, выделяемая в нагрузке, по условию $P_1=P_2$, т. е. $I_1^2R=I_2^2\frac{R}{4}$. Подставив сюда значения I_1 и I_2, после преобразований находим $R=2r$, $R=2\cdot 1=2$ Ом.

54. Проводник движется в магнитном поле под действием силы Ампера $\vec{F}_A$ и силы тяжести $m\vec{g}$. Результирующая этих сил должна быть направлена вверх, т. е. $|\vec{F}_A|>|m\vec{g}|$. Следовательно, проводник расположен горизонтально и движется в горизонтальном магнитном поле (рис. 111). Уравнение движения проводника $ma=F_A-mg$. Сила Ампера

$$F_A=JBl\cdot\sin\alpha.$$

Так как $F_A = \text{const}$ и $mg = \text{const}$, то движение проводника будет происходить равноускоренно ($a = \text{const}$), поэтому $v = at$, или $a = v/t$. Из формулы для F_A определяем длину проводника

$$l = \frac{F_A}{JB \sin \alpha}.$$

Используя уравнение движения проводника и заменяя $a = v/t$, окончательно находим

$$l = \frac{m\left(\frac{v}{t} + g\right)}{JB \cdot \sin \alpha},$$

$$l = \frac{0{,}03\left(\frac{4}{2} + 10\right)}{5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5} = 0{,}36 \text{ м}.$$

55. При повороте контура в нем возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

В соответствии с законом Ома в цепи возникает электрический ток

$$I = -\frac{\Delta \Phi}{R \Delta t}.$$

Количество электричества, прошедшего через гальванометр,

$$q = I \Delta t = -\frac{\Delta \Phi}{R},$$

$$\Delta \Phi = \Phi_k - \Phi_0,$$

где $\Phi_0 = B \cdot S$ — магнитный поток, пронизывающий контур в начальном положении контура; $\Phi_к = 0$ — то же, в конечном положении контура.

Тогда $q = \frac{B \cdot S}{R}$, или $R = \frac{BS}{q}$;

$$R = \frac{0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}5 \text{ Ом}.$$

56. ЭДС электромагнитной индукции $\mathscr{E} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$. Поскольку $\vec{B} = \text{const}$, то $\Delta \Phi = B(S_k - S_0)$. По условию задачи $\Delta t = \tau$, поэтому

$$\mathscr{E} = \frac{B(S_0 - S_k)}{\tau}.$$

В соответствии с законом Ома для замкнутой цепи $J = \frac{\mathscr{E}}{R}$. Подставляя сюда значение $\mathscr{E}$, окончательно находим

$$J=\frac{B(S_0-S_k)}{R\tau},$$

$$J=\frac{10^{-2}(10\cdot 10^{-4}-2\cdot 10^{-4})}{1\cdot 2}=4\text{ мкА}.$$

57. Заряд, прошедший через гальванометр, $Q=J\Delta t$. Из закона Ома для замкнутой цепи $J=\frac{\mathscr{E}}{R}$. В свою очередь, в соответствии с законом электромагнитной индукции имеем

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Подставляя поочередно два последние выражения в первое, находим

$$Q=-\frac{\Delta\Phi}{R}=\frac{\Phi_0-\Phi_k}{R}, \qquad (1)$$

где $\Phi_0=NBS$ — магнитный поток через катушку в начальном ее положении, а $\Phi_k=NBS\cos\alpha$ — то же, в конечном ее положении.

Подставляя Φ_0 и Φ_k в (1), после преобразований получим

$$\cos\alpha=1-\frac{QR}{NBS},$$

$$\alpha=\arccos\left(1-\frac{5\cdot 10^{-5}\cdot 10}{100\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-3}}\right)=60^\circ.$$

58. На свободные электроны металлического шарика при его движении в магнитном поле действует сила Лоренца. В результате перераспределения электронов в шарике образуется электрическое поле. Перераспределение закончится тогда, когда сила Лоренца и сила, действующая на электрон со стороны образованного электрического поля, уравновесят друг друга: $\vec{F}_{\text{л}}+\vec{F}_{\text{э}}=0$, или $Eq=qBv\sin\alpha$. Отсюда находим напряженность электрического поля

$$E=vB\cdot\sin\alpha.$$

Из этих уравнений следует, что образованное электрическое поле является однородным. В однородном электрическом поле разность потенциалов $\varphi_1-\varphi_2=\Delta\varphi=El$, где l — расстояние между точками 1 и 2 вдоль силовой линии электрического поля. Следовательно, максимальная разность потенциалов возникает между крайними точками диаметра, параллельного силовым линиям,

$$\Delta\varphi_{\max}=2rvB\sin\alpha.$$

59. ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности колебательного контура, определяется зависимостью $\mathscr{E}=-L\frac{\Delta J}{\Delta t}$,

откуда $L=\left|\frac{\mathscr{E}}{\frac{\Delta J}{\Delta t}}\right|$. Подставляем это значение в формулу для периода $T=2\pi\sqrt{LC}$. Тогда длину волны, на которую настроен радиоприемник, можно определить как $\lambda=v\cdot T$, где $v=3\cdot10^8$ м/с — скорость электромагнитной волны. Следовательно,

$$\lambda=2\pi v\sqrt{C\left|\frac{\mathscr{E}}{\frac{\Delta J}{\Delta t}}\right|},$$

$$\lambda=2\cdot3{,}14\cdot3\cdot10^8\sqrt{0{,}2\cdot10^{-12}\cdot\frac{0{,}1}{2}}=188 \text{ м.}$$

60. При изменении магнитного поля, связанного с рамкой, на обкладках конденсатора возникает разность потенциалов

$$U=\Delta\varphi=S\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Тогда энергия конденсатора

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}C\left(S\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2,$$

$$W=\frac{1}{2}\cdot4\cdot10^{-6}(50\cdot10^{-4}\cdot0{,}02)^2=2\cdot10^{-14} \text{ Дж.}$$

61. Число молекул N газообразного вещества в единице объема, т. е. концентрация $n=\frac{N}{V}$, связана с давлением газа соотношением $p=2n\varepsilon/3$, а средняя энергия поступательного движения одной молекулы $\varepsilon=3kT/2$. Поэтому

$$n=\frac{3p}{2\varepsilon}=\frac{p}{kT} \text{ и } N=\frac{pV}{kT};$$

$$N=\frac{133\cdot10^{-3}\cdot1}{1{,}38\cdot10^{-23}\cdot293}=3{,}3\cdot10^{19} \text{ молекул.}$$

62. Средняя квадратичная скорость молекул газа зависит от вида газа и его температуры: $v_{с.к}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Используя основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа $p=nkT=\frac{N}{V}kT$, выражаем температуру газа T и подставляем в формулу

$$v_{с.к}=\sqrt{\frac{3RpV}{\mu kN}};\quad v_{с.к.}=\sqrt{\frac{3\cdot8{,}3\cdot20\cdot10^3\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-3}\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\cdot5\cdot10^{19}}}=424 \text{ м/с.}$$

63. Шарик всплывает, когда выталкивающая сила становится не меньше силы тяжести шарика:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \geqslant mg.$$

По уравнению Клапейрона — Менделеева находим плотность воздуха: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. Тогда $p \geqslant \frac{3mRT}{4\pi\mu r^3}$; $p \geqslant \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 290}{4\pi \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}} = 99$ МПа.

64. Давление в баллоне подспущенного колеса (без учета упругости резины) $p_1 = \frac{Q}{S_1}$; в соответствии с уравнением Клапейрона — Менделеева в баллоне находится масса воздуха

$$m_1 = \frac{p_1 V_6 \mu}{T_2 R}.$$

После n тактов нагнетания в баллон будет введена масса воздуха Δm, определяемая из условия $\frac{nV'p_0}{T_1} = \frac{\Delta m}{\mu} R$. Учитывая, что $p_2 = \frac{Q}{S_1 - \Delta S}$ и $m_2 = m_1 + \Delta m = \frac{p_2 V_6 \mu}{RT_2}$, найдем число качаний

$$n = \frac{T_1 V_6 Q \Delta S}{T_2 V' p_0 S_1 (S_1 - \Delta S)}; \quad n = \frac{276 \cdot 0{,}5 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{290 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 45 \cdot 10^{-3} (45 - 10) \cdot 10^{-3}} = 300.$$

65. Целесообразно изобразить процессы цикла в осях координат p, V. Газ совершает работу в изобарических процессах $2 \to 3$ и $4 \to 1$. Полная работа газа за цикл $A = A_{23} + A_{41} = p_2 (V_4 - V_1) + p_1 (V_1 - V_4) = (p_2 - p_1)(V_4 - V_1)$. Преобразуем полученное выражение, используя газовые законы:

$$A = p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \cdot V_1 \left(\frac{V_4}{V_1} - 1\right) = p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right) =$$

$$= \nu R T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right),$$

$$A = 3 \cdot 8{,}31 \cdot 400 \left(\frac{800}{400} - 1\right)\left(\frac{1200}{400} - 1\right) = 20 \text{ кДж}.$$

66. По первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$. Изменение внутренней энергии 1 моль идеального газа

$$\Delta U = \frac{3}{2} k \Delta T N_A = \frac{3}{2} R \Delta T.$$

При постоянном давлении газ совершает против внешних тел работу $A = p\Delta V = pS\Delta x$, где Δx — перемещение поршня. Давление газа под поршнем $p = p_0 + \frac{Mg}{S}$. Из уравнения Клапейрона — Менделеева следует, что $p\Delta V = R\Delta T$, поэтому

$$Q=\frac{S}{2}p\Delta V=\frac{5}{2}pS\Delta x.$$

За время Δt, соответствующее перемещению поршня на Δx, нагреватель передает газу количество теплоты $Q=q\Delta t$. Таким образом, скорость движения поршня

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{2q}{5(p_0S+Mg)}.$$

67. За интервал времени Δt нагреватель выделяет количество тепла $N\Delta t$, которое частично отдается газу в количестве ΔM, проходящему за это время через спирали нагревателя, а частично теряется $Q_{\text{пот}}$ за счет теплопроводности и излучения стенок трубы и торцев устройства. Уравнения теплового баланса для двух условий опыта запишутся так:

$$N_1\Delta t=Q_{\text{пот}}+C\frac{\Delta M_1}{\mu}\Delta T,\quad N_2\Delta t=Q_{\text{пот}}+C\frac{\Delta M_2}{\mu}\Delta T.$$

Вычитая почленно уравнения и считая мощность потерь постоянной при установившейся разности температур $\Delta T=T_2-T_1$, имеем $N_2-N_1=\frac{c}{\mu}\Delta T(q_2-q_1)$, где $q=\frac{\Delta M}{\Delta t}$ — расход газа. Отсюда

$$T_2=T_1+\frac{\mu(N_2-N_1)}{(q_2-q_1)};\quad T_2=293+\frac{29\cdot10^{-3}\cdot10^3\cdot3600}{29{,}3\,(720-540)}=312{,}8\text{ К}.$$

68. Из графика видно, что первые $\Delta\tau_1=50$ минут температура смеси оставалась равной 0° С: таял лед, и на это шло все подводимое к смеси тепло. Далее за $\Delta\tau_2=10$ мин температура воды поднялась на $\Delta t=2°$ С. Эти данные позволяют выразить скорость подвода тепла $Q'=\frac{c_в m\Delta t}{\Delta\tau_2}$ и количество теплоты, пошедшее на плавление льда

$$Q=Q'\Delta\tau_1=c_в m\Delta t\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2}.$$

Поскольку $Q=m_л\lambda$, то

$$m_л=\frac{c_в m\Delta t\Delta\tau_1}{\lambda\Delta\tau_2};\quad m_л=\frac{4{,}2\cdot10^3\cdot10\cdot2\cdot50}{340\cdot10^3\cdot10}=1{,}23\text{ кг}.$$

69. Температура воды у границы раздела с воздухом на высоте h определяется температурой капилляра в этом месте. Полагаем распределение температуры по капилляру линейным, тогда

$$T_h=\frac{T_В-T_Н}{l}h+T_Н.$$

Силы поверхностного натяжения, удерживающие столбик воды, зависят от температуры воды у верхнего конца столбика, поэтому

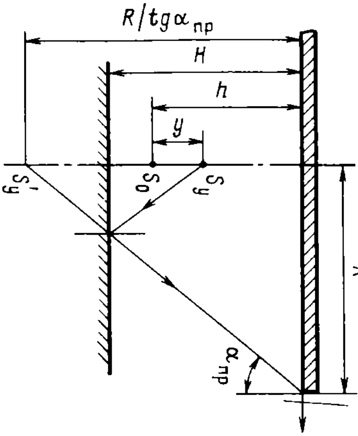


Рис. 112

$$h=\frac{2\sigma(T_h)}{\rho_в gr}.$$

Учитывая зависимость $\sigma(T)$, получим

$$h=\frac{2l\cdot 1{,}33\cdot 10^{-1}-4{,}2\cdot 10^{-4}h(T_В-T_Н)-4{,}2\cdot 10^{-4}T_Нl}{\rho_в grl},\text{ откуда}$$

$$h=\frac{(2{,}66\cdot 10^{-1}-4{,}2\cdot 10^{-4}T_Н)l}{\rho_в grl+(T_В-T_Н)\cdot 4{,}2\cdot 10^{-4}};$$

$$h=\frac{(2{,}66\cdot 10^{-1}-4{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 273)\,0{,}08}{10^3\cdot 10\cdot 2\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}08+(373-273)\cdot 4{,}2\cdot 10^{-4}}=0{,}06\text{ м}.$$

70. Давление p влажного воздуха складывается из давлений воздуха и водяного пара: $p=p_в+p_п$. В закрытом сосуде давление газа пропорционально температуре, т. е. $p_в=p_0\frac{T}{T_0}$. Предположим, что введенная вода испарится, и найдем, считая пар идеальным газом, давление паров воды при температуре T: $p_п=\frac{mRT}{\mu V}$. Для проверки правильности предположения нужно произвести расчет $p_п$ и сравнить эту величину с давлением насыщенного пара при этой же температуре T. В нашем случае $p_п=\frac{3\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}31\cdot 373}{18\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2}}=5{,}1\cdot 10^4$ Па, что меньше $p_{нас}=p_0=10^5$ Па. Таким образом, пар ненасыщен и давление влажного воздуха

$$p=p_0\frac{T}{T_0}+p_п;\quad p=\left(10^5\cdot\frac{373}{273}+5{,}1\cdot 10^4\right)=1{,}88\cdot 10^5\text{ Па}.$$

71. Чтобы источник стал видим, необходимо переместить его из точки S_0 вверх в точку S_y на высоту (рис. 112)

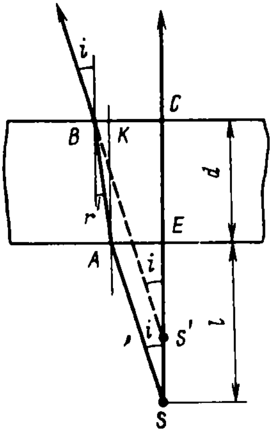


Рис. 113

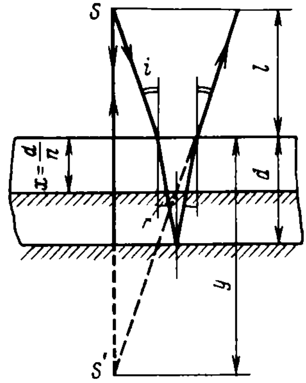


Рис. 114

$$y=\frac{R}{\operatorname{tg}\alpha_{\text{пр}}}+h-2H, \qquad (1)$$

где $\alpha_{\text{пр}}$ — предельный угол полного отражения светового луча,

$$\alpha_{\text{пр}}=\arcsin\frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Время, когда источник станет видим, найдем по формуле

$$t=\frac{y}{v}. \qquad (3)$$

Подставляя (2) в (1), а затем (1) в (3), окончательно получим

$$t=\frac{1}{v}\left(\frac{R}{\operatorname{tg}\arcsin\frac{1}{n}}+h-2H\right);$$

$$t=\frac{1}{10^{-3}}\left(\frac{6\cdot10^{-2}}{\operatorname{tg}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}}+3\cdot10^{-2}-2\cdot4\cdot10^{-2}\right)=10 \text{ с}.$$

72. Ход лучей от предмета к глазу наблюдателя представлен на рис. 113, где i — угол, под которым идет луч из точки S; этот угол, а также угол r настолько малы, что можно положить $\operatorname{tg} i\approx\sin i$ и $\operatorname{tg} r\approx\sin r$. Из рисунка получаем: $BC=BK+KC$; $KC=AE=ES\operatorname{tg} i=$ $=l\operatorname{tg} i$; $BK=AK\operatorname{tg} r=d\operatorname{tg} r$. Поэтому $BC=l\operatorname{tg} i+d\operatorname{tg} r$. Из треугольника BCS' находим

$$CS'=\frac{BC}{\operatorname{tg} i}=l+d\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i}=l+d\frac{\sin r}{\sin i}=l+\frac{d}{n},$$

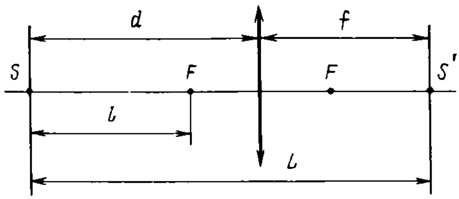


Рис. 115

$$CS' = x = 15 + \frac{4{,}5}{1{,}5} = 18 \text{ см}.$$

73. Изображение получается как бы в зеркале, находящемся на расстоянии $\frac{d}{n}$ от передней поверхности. Это изображено на рис. 114: $d \operatorname{tg} r = x \operatorname{tg} i$,

$$x = d\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = d\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{d}{n};$$

что справедливо в силу малости углов i и r. Далее находим расстояние y изображения от передней стороны пластинки: $y = 2(l + x) - l = l + 2\frac{d}{n}$; $y = 4 + 2\frac{1}{1{,}5} = 5\frac{1}{3}$ см.

74. Пусть L — расстояние от предмета до изображения, тогда расстояние от линзы до изображения $f = L - d$. Используем формулу линзы и после преобразований получаем $d^2 - Ld + FL = 0$. Корни этого уравнения $d_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - FL}$. Поскольку F, d и L — положительные величины, то должно выполняться неравенство $\frac{L^2}{4} - FL \geqslant 0$ или $\frac{L}{4} \geqslant F$, $L_{\min} = 4F$; соответственно $d_{\min} = 2F$.

К этому же ответу можно прийти, находя минимум функции $L = d + f = d + \frac{Fd}{d - F}$ в зависимости от d. Дифференцируя $L(d)$ по переменной d и приравнивая производную нулю, находим $d_{\min} = 2F$.

75. Используя схему расположения предмета, линзы и изображения, а также формулу линзы, получаем $d = l + F$, $f = L - (l + F)$, $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ и после преобразований (рис. 115) $F^2 + 2Fl - l(L - l) = 0$. Учитывая, что линза собирающая, рассматриваем лишь положительный корень уравнения $F = \sqrt{Ll} - l$. Затем находим расстояние от источника S до линзы: $d = \sqrt{Ll}$.

76. Глаз видит объект в том месте, где находится его изображение, даваемое очковой линзой, расположенной вблизи глаза. Если объект находится в фокусе линзы $\left(F=\frac{1}{D}=0{,}2\text{ м}\right)$, глаз аккомодирован на бесконечность. Расстояние наилучшего зрения 25 см (в формуле линзы эта величина обозначена f) до изображения будет тогда, когда объект находится на расстоянии $d=\frac{fF}{f+F}=$ $=\frac{0{,}25\cdot 0{,}2}{0{,}45}\approx 0{,}11$ м от линзы (и от глаза). Таким образом, объект должен располагаться между точками, удаленными от глаза на 11 и 20 см.

77. Будем исходить из того, что высота орбиты спутника $H\gg F$ и в то же время $H\ll R$ (R — радиус Земли). В этом случае скорость спутника на орбите $v=\sqrt{Rg}$, а период его обращения вокруг Земли $T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

За время экспозиции τ спутник смещается на угол $\alpha=2\pi\frac{\tau}{T}$. Вследствие этого изображение на пленке в фокальной плоскости объектива «размывается» на $\Delta l=\alpha F=\frac{2\pi\tau F}{T}$. Возможности пленки будут использованы полностью, если Δl не превысит разрешающей способности δ. При этом на фотографии можно будет рассмотреть предметы, размеры которых меньше $\alpha R=\delta R/F$. Время экспозиции составляет $8\cdot 10^{-2}$ с, а размеры предметов $\ll 640$ м.

78. Разность хода лучей, отраженных от передней и задней поверхностей пленки толщиной d с показателем преломления n_2, составляет $2n_2d$. Для гашения отраженных лучей эта разность хода должна быть равна нечетному числу полуволн $\frac{\lambda}{2}$, т. е. $(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, где $k=0,\ 1,\ 2\ldots$. Наименьшая толщина соответствует минимальному значению числа k:

$$2n_2d_{\min}=\frac{\lambda}{2},\quad \text{откуда}$$

$$d_{\min}=\frac{\lambda}{4n_2};\quad d_{\min}=\frac{600}{4\cdot 1{,}4}=107\text{ нм}.$$

79. При отсутствии стеклянной пластинки толщиной b максимум интерференции нулевого порядка совпадал с центром экрана O (рис. 116). Расстояние между соседними светлыми полосами (положениями максимумов с отличающимися на единицу номерами) составляло $\Delta y_c=\lambda\frac{l}{d}$. При внесении пластинки разность хода лучей 1

страница 163 отсутствует

страница 164 отсутствует

страница 165 отсутствует

страница 166 отсутствует

страница 167 отсутствует

страница 168 отсутствует

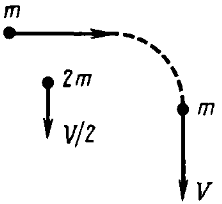


Рис. 122

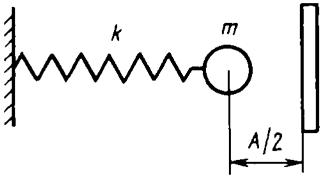


Рис. 123

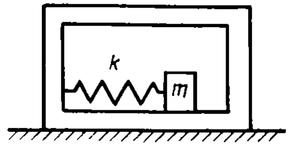


Рис. 124

ние потенциальной энергии шарика ΔU. Плотность глицерина $\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность стекла $\rho_2 = 2{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $\Delta U = mgH\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) = -0{,}49$ Дж.

11. Груз массой $m = 10^3$ кг опускается с помощью лебедки с постоянной скоростью $v = 4$ м/с. Какова будет максимальная сила натяжения троса при внезапной остановке лебедки, если жесткость троса $k = 5 \cdot 10^5$ Н/м? Массой троса и трением пренебречь.

Ответ: $T_{\max} = v\sqrt{km} + mg \approx 10^5$ Н.

12. Веревка длиной $l = 20$ м переброшена через блок. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем в результате незначительного толчка начинает двигаться по блоку. Будет ли движение веревки равноускоренным? Какова будет скорость веревки, когда она сойдет с блока? Массой блока пренебречь, радиус блока считать малым.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{gl}{2}} \approx 10$ м/с.

13. Четыре заряда q, Q, q, Q связаны пятью нитями длины l (рис. 125). Определите натяжение нити, связывающей заряды Q. ($Q > q$).

Ответ: $N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left(Q^2 - \frac{q^2}{3\sqrt{3}}\right)$.

14. На нити подвешен шарик массой $m = 9{,}8$ г, которому сообщили заряд $q = 1$ мкКл. Когда к нему поднесли снизу заряженный таким же зарядом шарик, сила натяжения нити уменьшилась в четыре раза. Определите расстояние между центрами шариков.

Ответ: $r = 35$ см.

15. Математический маятник, состоящий из железного шарика массой $m = 40$ г, подвешенного на нити длиной $l = 1$ м, совершает гармонические колебания. Если снизу под шарик поместить магнит, то он будет притягивать шарик с постоянной вертикальной силой $F = 0{,}24$ Н. Определите период колебаний шарика в новом состоянии.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + F/m}} \approx 1{,}6$ с.

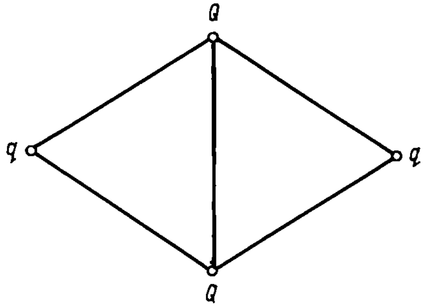


Рис. 125

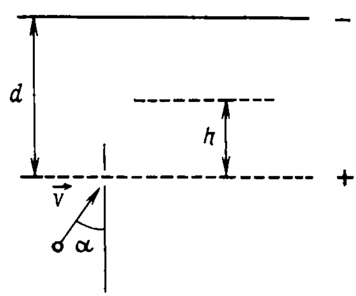


Рис. 126

16. Металлический шар радиуса r помещен в жидкий диэлектрик с плотностью ρ_2. Плотность материала, из которого изготовлен шар, равна ρ_1. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле, направленном вертикально вверх, шар оказался взвешенным в жидкости? Электрическое поле создается двумя параллельными пластинами, расстояние между которыми d, а разность потенциалов U.

Ответ: $q=\frac{4\pi r^3 g(\rho_1-\rho_2)d}{3U}$.

17. Электрон со скоростью $v=10^9$ см/с влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора, между которыми поддерживается разность потенциалов $U=425$ В (рис. 126). Определите максимальное удаление электрона h от нижней пластины конденсатора. Отношение заряда электрона к его массе $\frac{e}{m}=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг, угол падения электронов $\alpha=30^\circ$. Расстояние между пластинами $d=1$ см.

Ответ: $h=\frac{dv^2\cos^2\alpha}{2Ue/m}=5$ мм.

18. Найдите натяжение нити, соединяющей одинаковые шарики с радиусом r, в центре которых находятся одинаковые заряды Q. Один из шариков плавает на поверхности жидкости плотности ρ, второй шарик имеет массу m и висит на нити внутри жидкости (рис. 127). Расстояние между центрами шариков l.

Ответ: $T=mg+\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}-\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$.

19. В схеме (рис. 128) емкость батареи конденсаторов не изменяется при замыкании ключа K. Определите емкость конденсатора C_x.

Ответ: $C_x=C/2$.

20. Два плоских конденсатора с емкостями C_1 и C_2, обладающих зарядами q_1 и q_2, включают в замкнутую цепь так, что положительно заряженная пластина одного конденсатора соединя-

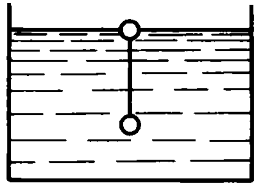


Рис. 127

ется с отрицательно заряженной пластиной другого. Определите заряд каждого конденсатора в этом случае.

Ответ: $q_1' = C_1 \dfrac{q_1 - q_2}{C_1 + C_2}$; $q_2' = C_2 \dfrac{q_1 - q_2}{C_1 + C_2}$.

21. Конденсатор емкости C_1 при помощи переключателя K присоединяют сначала к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$, а потом к незаряженному конденсатору емкости C_2 (рис. 129). Найдите заряд q_2, который появится на конденсаторе C_2.

Ответ: $q_2 = \mathscr{E} \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

22. Одна из пластин незаряженного плоского конденсатора освещается рентгеновскими лучами, вырывающими из нее электроны со скоростью $v = 10^6$ м/с. Электроны собираются на второй пластине. Через какое время фототок между пластинами прекратится, если с каждого квадратного сантиметра площади вырывается ежесекундно $n = 10^{13}$ электронов? Расстояние между пластинами $d = 10$ мм.

Ответ: $t = \dfrac{\varepsilon_0 m v^2}{2e^2 n d} = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ с.

23. На схеме рис. 130 $\mathscr{E}_1 = 12$ В, $\mathscr{E}_2 = 6$ В, $R_1 = 4$ Ом, ток в электрической цепи равен $J = 1$ А, внутреннее сопротивление источников $r_1 = 0{,}75$ Ом, $r_2 = 0{,}25$ Ом. Определите напряжение между точками A и B.

Ответ: $U = 1$ В.

24. Найдите напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 в схеме на рис. 131, если известно, что при замыкании резистора с сопротивлением R накоротко ток через батарею возрастает в три раза. ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$.

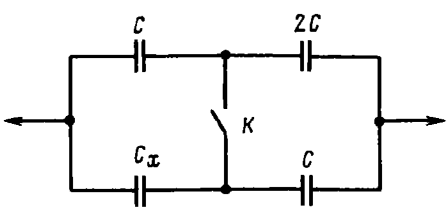


Рис. 128

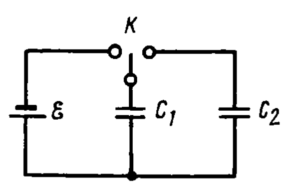


Рис. 129

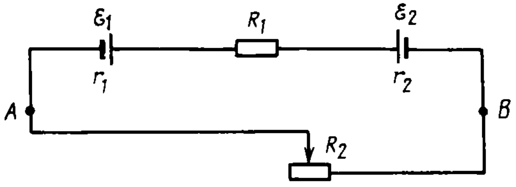


Рис. 130

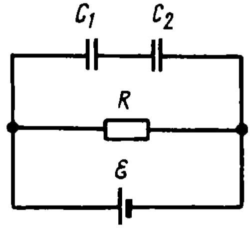


Рис. 131

Ответ: $U_1=\frac{2}{3}\mathscr{E}\frac{C_2}{C_1+C_2}$; $U_2=\frac{2}{3}\mathscr{E}\frac{C_1}{C_1+C_2}$.

25. Сопротивление амперметра $R=0{,}04$ Ом, а максимальный электрический ток, который можно измерить этим прибором, $J_1=1{,}2$ А. Определите сечение медного провода длиной $l=10$ см, который нужно подключить к амперметру, чтобы можно было измерить этим прибором электрический ток $J_2=6$ А. Удельное сопротивление меди $\rho=1{,}75\cdot10^{-8}$ Ом·м.

Ответ: $S=1{,}75\cdot10^{-7}$ м^2.

26. К гальвонометру с сопротивлением $r=290$ Ом присоединили шунт, понижающий чувствительность гальвонометра в 10 раз. Какой резистор надо включить последовательно с шунтированным гальвонометром, чтобы общее сопротивление осталось неизменным?

Ответ: $R=261$ Ом.

27. Имеется прибор с ценой деления $i_0=10$ мкА. Шкала прибора имеет $n=100$ делений; внутреннее сопротивление прибора $r=50$ Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр с пределом измерения напряжения $U_0=200$ В или миллиамперметр с пределом измерения тока $I_0=800$ мА?

Ответ: $R_д\approx2\cdot10^5$ Ом; $R_ш\approx0{,}06$ Ом.

28. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предел измерения напряжения в n раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает предел измерения в m раз. Во сколько раз увеличится предел измерения вольтметра, если включить последовательно с вольтметром эти два сопротивления, соединенные между собой параллельно?

Ответ: $k=\frac{mn-1}{m+n-2}$.

29. В схему включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра (рис. 132). Показания микроамперметров $I_1=100$ мкА и $I_2=99$ мкА; показание вольтметра $U_1=10$ В. Найдите показание вольтметра U_2.

Ответ: $U_2=0{,}1$ В.

30. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0{,}08$ Ом при токе $I_1=4$ А отдает во внешнюю цепь мощность $P_1=8$ Вт. Какую мощность P_2 отдаст он во внешнюю цепь при токе $I_2=6$ А?

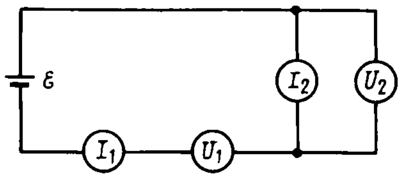


Рис. 132

Ответ: $P_2 = 11$ Вт.

31. Через водный раствор серной кислоты пропускали ток силой $J = 1$ А в течение $\tau = 2$ мин. Каковы объемы выделившихся при этом водорода и кислорода? Считать, что эти газы находятся при нормальных условиях.

Ответ: $V_{H_2} = 14$ см^3; $V_{O_2} = 7$ см^3.

32. При электролизе раствора сульфата меди была совершена работа 4 кВт·ч. Определите количество выделившейся меди, если напряжение между электродами ванны 6 В.

Ответ: $m = 0{,}8$ кг.

33. Электрон влетает в однородное магнитное поле. В точке A он имеет скорость v, которая составляет с направлением поля угол α (рис. 133). При какой индукции магнитного поля электрон окажется в точке C? Заряд электрона равен e, его масса m, расстояние $AC = L$.

Ответ: $B = 2\pi k \dfrac{mv}{eL} \cos\alpha$, где k — произвольное целое число.

34. При движении в однородном магнитном поле прямого медного провода длиной $l = 0{,}4$ м и площадью поперечного сечения $S = 0{,}28$ мм^2 в нем возникает ЭДС $\mathscr{E} = 0{,}64$ В. К проводу подключено сопротивление $R = 0{,}8$ Ом. Определите, какое количество тепла выделяется за 1 с в этом сопротивлении. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Ответ: $Q = 0{,}48$ Дж.

35. Прямоугольная проволочная рамка со стороной l находится в магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном к плоскости рамки (рис. 134). По рамке параллельно одной из ее сторон без нарушения контакта скользит с постоянной скоростью v перемычка ab, сопротивление которой равно R.

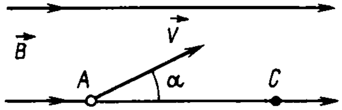


Рис. 133

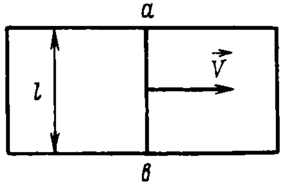


Рис. 134

Определите ток через перемычку. Сопротивлением остальной части рамки пренебречь.

Ответ: $J = \frac{Blv}{R}$.

36. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл расположен плоский проволочный виток, плоскость которого перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, $Q = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ Кл. На какой угол повернули виток? Площадь витка $S = 10^3$ см^2, его сопротивление $R = 2$ Ом.

Ответ: $\alpha = 120°$.

37. Замкнутый проводник сопротивлением $R = 30$ Ом находится во внешнем магнитном поле, причем поток магнитной индукции, пронизывающий контур, образованный проводником, равномерно возрастает с $\Phi_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ Вб до $\Phi_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ Вб. Определите заряд, который пройдет при этом через поперечное сечение проводника.

Ответ: $q = 10^{-5}$ Кл.

38. Газ нагревается в открытом сосуде при нормальном атмосферном давлении от 300 до 600 К. На сколько при этом изменяется число молекул в единице объема газа?

Ответ: на $1{,}22 \cdot 10^{25}$ молекул/м^3.

39. В сосуде объемом 1 дм^3 содержится некоторый газ при температуре 290 К. На сколько понизится давление газа в сосуде, если вследствие утечки газа из него выйдет 10^{21} молекул?

Ответ: на $4 \cdot 10^3$ Па.

40. В сосуде объемом $3 \cdot 10^{-3}$ м^3 находятся 4 мг гелия, 70 мг азота и $5 \cdot 10^{21}$ молекул водорода. Каково давление смеси, если температура ее 300 К?

Ответ: $9{,}8 \cdot 10^3$ Па.

41. Для дальней космической связи используется спутник объемом 100 м^3, наполненный воздухом при нормальных условиях. Метеорит пробивает в его корпусе отверстие площадью $S = 1$ см^2. Найдите время, через которое давление внутри спутника изменится на 1%. Температуру газа считать неизменной.

Ответ: примерно 2 мин.

42. В сосуде объемом $V = 1$ л при температуре $t = +183°$ С находится $N = 1{,}62 \cdot 10^{22}$ молекул газа. Каково будет давление газа в сосуде, если его объем изотермически увеличить в 5 раз? При нормальных условиях 1 см^3 газа содержит $2{,}7 \cdot 10^{19}$ молекул.

Ответ: $p = \frac{p_0 N T}{5 n V T_0}$; $0{,}2 \cdot 10^5$ Па.

43. Температура воздуха в помещении объемом 50 м^3 при давлении $0{,}98 \cdot 10^5$ Па была равна 288 К. После подогрева воздуха калорифером его температура поднялась до 293 К. Найдите массу воздуха, вытесненного из комнаты за время нагрева ($\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг $\cdot$ моль$^{-1}$).

Ответ: 1,58 кг.

44. За сколько циклов работы поршневого насоса с объемом цилиндра V_1можно откачать газ из стеклянного баллона объемом V до давления p, если вначале давление в баллоне было равно атмосферному? Процесс считать изотермическим.

Ответ: $k=\frac{\lg(p/p_0)}{\lg[V/(V-V_1)]}$.

45. Два одинаковых сосуда наполнены кислородом при температуре $t_1=27°$ С и соединены между собой трубкой, объем которой мал по сравнению с объемом сосудов. Во сколько раз изменится давление кислорода в сосудах, если один из них нагреть до температуры $t_2=87°$ С, а во втором поддерживать температуру прежней?

Ответ: $\frac{p_2}{p_1}=\frac{2T_2}{(T_1+T_2)}$; $\frac{p_2}{p_1}=1{,}09$.

46. Воздух, находившийся в открытом баллоне при температуре $+27°$ С, подвергается нагреванию. В результате нагревания масса воздуха, оставшегося в баллоне, составляет 40% от массы воздуха, первоначально находившегося в баллоне. До какой температуры нагрет воздух в баллоне в этот момент?

Ответ: $T_2=750$ К.

47. Посередине лежащего на боку заполненного газом запаянного цилиндрического сосуда длиной $L=1$ м находится тонкий поршень массой $m=1$ кг и площадью $S=10$ см^2. Если сосуд поставить на основание, то поршень перемещается на расстояние $l=10$ см. Каково было начальное давление p газа в сосуде? Трение между стенками сосуда и поршнем отсутствует.

Ответ: $p=\frac{(L^2-4l^2)mg}{4LlS}$; $p=24$ кН/м^2.

48. Идеальный газ, занимающий объем V_1 и находящийся под давлением p_1, сначала изотермически сжимают до объема V_2, потом изобарически сжимают до объема V_3, затем изотермически сжимают до объема V_4. Под каким давлением будет находиться этот газ в конце указанного процесса?

Ответ: $p_4=p_3\frac{V_3}{V_4}=p_1\frac{V_1}{V_4}$.

49. В вертикальном цилиндре, закрытом сверху поршнем, находится газ при температуре $t_1=20°$ С. Площадь поршня $S=20$ см^2, его масса $m=2$ кг. На поршень положили груз массой $M=5$ кг. До какой температуры нужно нагреть газ, чтобы объем газа составил долю $k=0{,}9$ от первоначального значения? Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Н/м^2.

Ответ: $T_2=kT_1\frac{p_0S+(m+M)g}{p_0S+mg}$; $T_2=324$ К.

50. В цилиндре под поршнем находится некоторое количество газа, занимающего при температуре $t_1=27°$ С и давлении $p=2\cdot10^5$ Н/м^2 объем $V=9\cdot10^{-3}$ м^3. Какую работу A пришлось совершить,

сжимая газ при постоянном давлении, если его температура при этом повысилась до $t_2=77^\circ$ С? Трение между стенками цилиндра и поршнем отсутствует.

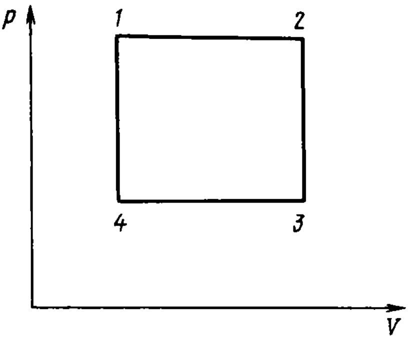


Рис. 135

Ответ: $A=pV\dfrac{T_2-T_1}{T_1}$; $A=300$ Дж.

51. В сосуде с теплонепроницаемыми стенками объемом $V=5{,}6$ л находится кислород при температуре $t_1=85^\circ$ С и давлении $p=2{,}5\cdot10^5$ Па. Для нагрева этого газа до $t_2=87^\circ$ С требуется количество теплоты $q=21$ Дж. Какова удельная теплоемкость кислорода в этих условиях? Теплоемкостью и тепловым расширением стенок сосуда пренебречь. Объем 1 моль газа при нормальных условиях равен 22,4 л.

Ответ: $c=\dfrac{qp_0V_0T_1}{\mu VpT_0\Delta T}$; $c=0{,}67\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

52. Параметры идеального газа в количестве 1 моль изменяются по циклическому процессу, состоящему из двух изобар и двух изохор, в направлении $1\to2\to3\to4\to1$, как показано на рис. 135.

Известно, что при изобарическом расширении объем увеличился вдвое. Температура в конце изобарического расширения $1\to2$ $t_2=800^\circ$ С; а в конце изохорического процесса $2\to3$ $t_3=700^\circ$ С. Молярная теплоемкость газа (количество теплоты, необходимое для нагревания на 1 К 1 моль газа) при постоянном объеме $C_v=21$ Дж/(моль·К); при постоянном давлении $C_p=29$ Дж/(моль·К). Определите коэффициент полезного действия цикла [$R=8{,}31$ Дж/(моль·К)].

Ответ: $\eta=\dfrac{A}{Q}=\dfrac{R\left(1-\dfrac{T_3}{T_2}\right)\left(\dfrac{V_2}{V_1}-1\right)}{C_p\left(\dfrac{V_2}{V_1}-1\right)+C_v\left(1-\dfrac{T_3}{T_2}\right)}$; $\eta=2{,}5\%$.

53. В термосе находится вода при температуре 0° С. Масса воды $M=100$ г. Выкачивая из термоса воздух, воду замораживают посредством ее испарения. Какова масса m льда, образовавшегося в термосе? Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r=24{,}8\cdot10^5$ Дж/кг.

Ответ: $m=\dfrac{Mr}{\lambda+r}$, $m=0{,}088$ кг.

54. В калориметре находится $m_1=300$ г льда при температуре $t_1=-10^\circ$ С. Туда же помещают $m_2=250$ г алюминия, нагретого до температуры $t_2=+200^\circ$ С. Какая температура установится в калориметре? Теплоемкость алюминия $c=0{,}9\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

Ответ: 0° С.

55. В теплоизолированном сосуде находится смесь, состоящая из воды массой $m_1 = 1{,}5$ кг и льда массой $m_2 = 0{,}5$ кг, при общей температуре $t_1 = 0°$ С. В сосуд введено некоторое количество сухого насыщенного водяного пара, имеющего температуру $t_2 = 100°$ С. Через некоторое время в сосуде установилась температура $\Theta = 80°$ С. Найдите массу m_3 пара, введенного в сосуд. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг; удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг; удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

Ответ: $m_3 = \dfrac{m_2\lambda + c(m_1 + m_2)(\Theta - T_1)}{r + c(T_2 - \Theta)}$; $m_3 = 0{,}35$ кг.

56. В калориметре смешиваются три химически не взаимодействующих жидкости в количествах $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 10$ кг, $m_3 = 5$ кг, имеющие соответственно температуры $t_1 = 6°$ С, $t_2 = -40°$ С, $t_3 = 60°$ С и удельные теплоемкости $c_1 = 2$ кДж/(кг · К), $c_2 = 4$ кДж/(кг · К), $c_3 = 2$ кДж/(кг · К). Определите температуру Θ смеси и количество теплоты, необходимое для последующего нагревания смеси до $t = 6°$ С.

Ответ: $\Theta = -19°$ С; $Q = 1300$ кДж.

57. В сосуд, содержащий $m_1 = 10$ кг воды при температуре $t_1 = 10°$ С, положили кусок льда, охлажденный до $t_2 = -50°$ С, после чего температура образовавшейся ледяной массы стала $\Theta = -4°$ С. Какое количество m_2 льда было положено в сосуд? Удельные теплоемкости воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг · К), льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг · К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$МДж/кг.

Ответ: $m_2 = 40$ кг.

58. Определите массу m воды, которая может быть превращена в лед при 0° С испарением эфира, масса которого $M = 0{,}1$ кг, а температура $t_1 = 20°$ С. Теплообмен происходит только между эфиром и водой. Начальная температура воды также $t_1 = 20°$ С. Удельная теплота испарения эфира $r = 3{,}8 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг, удельные теплоемкости воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг · К) и эфира $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг · К).

Ответ: $m = 0{,}08$ кг.

59. Мыльная пленка ограничена проволочным каркасом и двумя подвижными планками: AB длиной $l_1 = 10$ см и CD длиной $l_2 = 5$ см. Планки жестко скреплены между собой. Коэффициент поверхностного натяжения пленки $\sigma = 0{,}07$ Н/м. Какую работу надо совершить для перемещения планки AB влево на $h = 5$ см (рис. 136).

Ответ: $A = 2\sigma h(l_1 - l_2)$; $A = 2{,}25 \cdot 10^{-4}$ Дж.

60. В вертикальном закрытом капилляре радиуса $r = 0{,}5$ мм находится вода, заполняющая часть капилляра длиной $h = 20$ см. Сколько капель воды выльется из капилляра, если открыть его концы? Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0{,}075$ Н/м.

Ответ: $n = \dfrac{\rho_в g\pi r^2 h}{2\pi r\sigma}$; $n = 6$.

61. В цилиндре под поршнем в пространстве объемом $V_1 = 1{,}5$ л находится воздух и насыщенный водяной пар при температуре

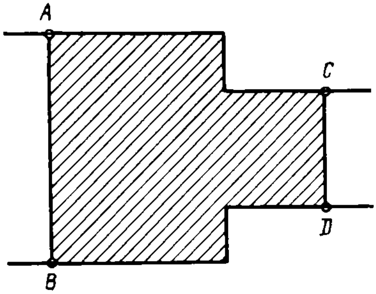


Рис. 136

$t_1 = 20°$ С. Какова будет относительная влажность воздуха в цилиндре, если объем уменьшить до $V_2 = 0{,}1$ л, а температуру повысить до $t_2 = 100°$ С? Давление насыщенного водяного пара при 20° С $p_н = 2{,}3$ кПа. Пар считать идеальным газом.

Ответ: $r = \dfrac{V_1 p_н T_2}{p_0 V_2 T_1}$; $r = 0{,}44$.

62. В закрытом помещении объемом $V = 60$ м^3 относительная влажность воздуха $r = 50\%$ при температуре $t = 18°$ С. Сколько воды необходимо испарить в этот объем, чтобы водяные пары при той же температуре стали насыщенными? Давление насыщенного пара при 18° С $p_н = 2063$ Па, $R = 8{,}31 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль·К).

Ответ: $\Delta m = (1 - r/100\%) p_н \dfrac{\mu V}{RT}$; $\Delta m = 0{,}46$ кг.

63. В сосуде при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па находится воздух, температура которого $t_1 = 10°$ С и относительная влажность $r = 60\%$. На сколько изменится относительная влажность воздуха, если сосуд нагреть до температуры $t_2 = 100°$ С и уменьшить объем в $k = 3$ раз? Давление насыщающих паров воды при 10° С $p_н = 1224$ Па. Считать содержащийся в воздухе пар идеальным газом.

Ответ: $\Delta r = r\left(\dfrac{3p_0 T_2}{p_н T_1} - 1\right)$; $\Delta r = -57\%$.

64. Сосуд емкостью $2V$ разделен пополам тонкой полупроницаемой перегородкой площадью S. В левую половину ввели газ массой m_1, плотностью ρ_1 и газ массой m_2, плотностью ρ_2. В правой половине — вакуум. Через перегородку может диффундировать лишь первый газ. Температура T остается постоянной. Молярные массы газов равны μ_1 и μ_2 соответственно. Какие давления установятся в обеих половинах сосуда?

Ответ: $p_л = \dfrac{RT}{V}\left(\dfrac{m_1}{2\mu_1} + \dfrac{m_2}{\mu_2}\right)$; $p_п = \dfrac{RTm_1}{2V\mu_1}$.

65. Предмет небольших размеров находится на расстоянии $l = 15$ см от плоскопараллельной стеклянной пластинки толщиной $d = 4{,}5$ см с показателем преломления $n = 1{,}5$. Наблюдатель рассматривает предмет через пластинку, причем луч зрения нормален к ней.

Определите расстояние изображения предмета x от ближайшей к наблюдателю грани пластинки.

Ответ: $x = 18$ см.

66. Расстояние от освещенного предмета до экрана $L = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $l = 20$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Ответ: $F = \frac{L^2 - l^2}{4L}$; $F = 24$ см.

67. Предмет находится на расстоянии $L = 90$ см от экрана. Между предметом и экраном помещают линзу, причем при одном положении линзы на экране получается увеличенное изображение предмета, а при другом — уменьшенное. Каково фокусное расстояние линзы, если линейные размеры первого изображения в четыре раза больше размеров второго?

Ответ: $F = 2L/9$; $F = 20$ см.

68. На сколько меняется оптическая сила хрусталика глаза за счет его аккомодации при переводе взгляда со звезды на книгу, находящуюся на расстоянии наилучшего зрения?

Ответ: на 4 диоптрии.

69. В тонкой клинообразной пластинке в отраженном свете при нормальном падении лучей с длиной волны $\lambda = 450$ нм наблюдаются темные интерференционные полосы, расстояние между которыми $b = 1,5$ мм. Найдите угол Θ между гранями пластинки, если ее показатель преломления $n = 1,5$.

Ответ: $\Theta = 20''$.

70. Тонкая пленка с показателем преломления $n = 1,5$ освещается светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм. При какой минимальной толщине пленки резко возрастет интенсивность отраженного света, если пленка расположена на материале с показателем преломления $n > 1,5$?

Ответ: $d = \frac{\lambda}{(2n)}$; $d = 200$ нм.

71. Какой наибольший порядок спектра натрия ($\lambda = 590$ нм) можно наблюдать при помощи дифракционной решетки, имеющей 500 штрихов на 1 мм, если свет падает на решетку нормально?

Ответ: $m_{\max} = 3$.

72. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на экране две линии спектра ртути с длинами волн $\lambda_1 = 577$ нм и $\lambda_2 = 579,1$ нм в спектре первого порядка, полученном при помощи дифракционной решетки с периодом $d = 4$ мкм? Фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран, $F = 60$ см. Лучи падают на решетку нормально.

Ответ: $b = 0,36$ мм.

73. Период дифракционной решетки $d = 4$ мкм. Дифракционная картина наблюдается с помощью линзы с фокусным расстоянием $F = 40$ см. Определите длину световой волны падающего нормально

на решетку света, если первый максимум получается на расстоянии 5 см от центрального.

Ответ: $\lambda=0{,}5$ мкм.

74. На дифракционную решетку с периодом $d=2$ мкм падает нормально свет, пропущенный сквозь светофильтр. Фильтр пропускает волны длиной от $\lambda_{min}=500$ до $\lambda_{max}=600$ нм. Будут ли спектры различных порядков накладываться друг на друга?

Ответ: не будут.

75. Определите энергию, массу и импульс фотона рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda=100$ пм. Сравните массу этого фотона с массой покоя электрона.

Ответ: $E=1{,}99\cdot10^{-15}$ Дж; $m=2{,}2\cdot10^{-32}$ кг; $p=6{,}625\cdot10^{-24}$ кг · м/с.

76. При какой температуре средняя кинетическая энергия теплового движения молекул одноатомного газа была бы равна энергии фотонов рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda=0{,}1$ нм?

Ответ: $T=\frac{2hc}{3k\lambda}$; $T=96\cdot10^{6}$ К.

77. Красная граница фотоэффекта для платины лежит около 198 нм. Если платину прокалить при высокой температуре, то красная граница фотоэффекта станет равной 220 нм. На сколько прокаливание уменьшает работу выхода электронов?

Ответ: на 0,6 эВ.

78. Изолированная металлическая пластинка освещается светом с длиной волны 450 нм. Работа выхода электронов из металла $A_{вых}=2$ эВ. До какого потенциала зарядится пластинка при непрерывном действии света?

Ответ: $\varphi=0{,}75$ В.

79. Гамма-лучи с длиной волны $\lambda=2{,}7$ пм испытывают комптоновское рассеяние. Во сколько раз длина волны излучения, рассеянного под углом 180° к первоначальному направлению, больше длины волны падающего излучения?

Ответ: в 2,8 раза.

80. Во сколько раз увеличится радиус орбиты электрона у атома водорода, находящегося в основном состоянии, при возбуждении его квантом с энергией 12,09 эВ?

Ответ: в 9 раз.

81. Реактивный самолет летит со скоростью 1000 м/с. На сколько будут отличаться показания часов в самолете от показаний часов на Земле?

Ответ: на $5\cdot10^{-10}$% или на 1 с за 10 000 лет.

82. Масса тела, движущегося с определенной скоростью, возросла на 20%. Во сколько раз при этом уменьшилась его длина?

Ответ: в 1,2 раза.

83. Во сколько раз увеличится масса движущегося электрона по сравнению с массой покоя, если электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов, приобрел кинетическую энергию 0,76 МэВ?

Ответ: в 2,5 раза.

84. Определите скорость электрона, разогнанного из состояния покоя электрическим полем с разностью потенциалов 10^6 В.

Ответ: $v \approx 290$ Мм/с.

85. Электрон обладает кинетической энергией $W_к = 2$ МэВ. Определите импульс p электрона, считая энергию покоя электрона $W_0 = 0{,}51$ МэВ.

Ответ: $p \approx 1{,}3 \cdot 10^{-21}$ кг·м/с.

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Билет № 1

1. Движение тела под действием силы тяжести. Движение планет и искусственных спутников. Невесомость. Первая космическая скорость.
2. Магнитные свойства вещества. Магнитная проницаемость. Ферромагнетизм.
3. Задача из раздела «Оптика».

Билет № 2

1. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Трение покоя. Трение скольжения. Коэффициент трения. Движение тела с учетом силы трения.
2. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи. Работа и мощность тока.
3. Задача из раздела «Тепловые явления».

Билет № 3

1. Давление. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Сообщающиеся сосуды. Гидравлический пресс.
2. Дифракция света. Дифракционная решетка. Поперечность световых волн. Поляризация света.
3. Задача из раздела «Электромагнетизм».

Билет № 4

1. Архимедова сила для жидкостей и газов. Условия плавания тел на поверхности жидкости.
2. Опыт Резерфорда по рассеянию α-частиц. Ядерная модель атома. Квантовые постулаты Бора. Испускание и поглощение света атомом. Лазеры.
3. Задача из раздела «Электромагнетизм».

Билет № 5

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории и их опытные обоснования. Броуновское движение. Масса и размеры молекул. Число Авогадро. Взаимодействие молекул. Идеальный газ.
2. Сопротивление проводников. Последовательное и параллельное соединение проводников. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной цепи.

3. Задача из раздела «Механика».

Билет № 6

1. Трансформатор. Передача электрической энергии. Электромагнитные волны. Скорость их распространения. Излучение и прием электромагнитных волн.

2. Поверхностное натяжение жидкостей. Сила поверхностного натяжения. Смачивание. Капиллярные явления.

3. Задача из раздела «Механика».

ЛИТЕРАТУРА

1. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике.— М.: Наука, 1987.—415 с.

2. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учебное пособие / Егерев В. К., Кордемский Б. А., Зайцев В. В. и др.; Под ред. Сканави М. И.— 5-е изд., перераб. и доп.— М.: Высшая школа, 1988.—431 с.

3. Сборник задач по физике / Под ред. Козела С. М.— М.: Наука, 1983.—285 с.

Леонид Петрович Паршев, Александр Григорьевич Андреев,
Николай Алексеевич Гладков, Юрий Алексеевич Струков

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Пособие для поступающих в МВТУ им. Н. Э. Баумана

Зав. редакцией *Н. Г. Ковалевская*
Редактор *Ю. Н. Хлебинский*
Художественный редактор *А. С. Александров*
Технический редактор *Г. Г. Семенова*
Корректор *Л. И. Малютина*

Сдано в набор 02.02.89 г. Подписано в печать 28.07.89 г. Бумага офсетная. Заказ № 395. Усл. печ. л. 12,0. Уч.- изд. л. 11,59. Формат 60x90 / 16. Печать офсетная. Тираж 20000 экз. Цена 1 р.

Издательство МВТУ
Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 109088, Москва, Южнопортовая ул., 24.

ДОРОГИЕ ЮНОШИ И ДЕВУШКИ!

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана готовит инженеров в области машиностроения и приборостроения, способных осуществлять исследования и разработку новой техники, материалов и технологий на уровне, превышающем лучшие мировые достижения.

Подготовка инженеров в Училище основана на принципах, сочетающих передовые методы фундаментального университетского и инженерно-технического образования.

МВТУ им. Н. Э. Баумана имеет следующие факультеты:

ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ, РОБОТОТЕХНИКА И КОМПЛЕКСНАЯ АВТОМАТИЗАЦИЯ, РАДИОЭЛЕКТРОНИКА И ЛАЗЕРНАЯ ТЕХНИКА, СПЕЦИАЛЬНОЕ МАШИНОСТРОЕНИЕ, ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ МАШИНОСТРОЕНИЕ.

СРОК ОСНОВНОГО КУРСА ОБУЧЕНИЯ — 5 лет 10 месяцев.

При МВТУ им. Н. Э. Баумана созданы отраслевые факультеты:

МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ, ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ, ПРИБОРОСТРОИТЕЛЬНЫЙ, РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ, ЭНЕРГОМАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫЙ.

На отраслевых факультетах учеба студентов по дневной форме совмещается с работой на предприятии по профилю подготовки. Студенты получают стипендию и зарплату за выполненную работу.

Обучение студентов осуществляется на учебно-лабораторной базе предприятия и МВТУ по учебным планам и программам, полностью соответствующим учебным планам и программам, принятым в МВТУ для подготовки по дневной форме.

МВТУ им. Н. Э. Баумана имеет филиал в г. Калуге с дневной и вечерней формами обучения.

МВТУ им. Н. Э. Баумана основано в 1830 году.

История Училища полна замечательных страниц. Высокий авторитет МВТУ у нас в стране и за рубежом объясняется тем, что здесь возник целый ряд отраслей науки и техники.

Профессорами Училища были такие крупные ученые, как Николай Егорович Жуковский — отец русской авиации, С. И. Вавилов, Е. А. Чудаков, П. К. Худяков, А. И. Сидоров, В. А. Котельников, В. Н. Челомей, М. А. Саверин, Э. А. Сатель, В. П. Ветчинкин, Б. В. Булгаков, С. О. Доброгурский и многие другие.

МВТУ им. Н. Э. Баумана окончили конструктор первых в мире ракетно-космических систем С. П. Королев, знаменитые авиаконструкторы А. Н. Туполев, С. А. Лавочкин, В. М. Мясищев, П. О. Сухой, В. М. Петляков, руководитель разработки первой советской ЭВМ С. А. Лебедев, выдающиеся конструкторы В. Г. Шухов, Б. Н. Юрьев, Б. С. Стечкин, В. Я. Климов, А. А. Архангельский, А. А. Микулин, Н. А. Пилюгин, Б. И. Шавырин и другие.

Выпускниками Училища являются летчики-космонавты СССР К. П. Феоктистов, А. С. Елисеев, О. Г. Макаров, Г. М. Стрекалов, А. П. Александров, В. А. Соловьев, А. И. Лавейкин.

Питомцы МВТУ внесли весомый вклад в развитие отечественной и мировой науки и техники. При их участии созданы первый в России вертолет, первая автоматическая станочная линия, первый газотурбовоз, первая в мире телевизионная трубка — иконоскоп, первый в мире пассажирский реактивный самолет, первая в мире атомная электростанция.

Становление и развитие МВТУ непрерывно связано с научно-техническим прогрессом нашей Родины. В нем сформированы крупные научные школы, накоплен богатый опыт инженерного образования, работают известные ученые, профессора и преподаватели, вносящие существенный вклад в подготовку специалистов и решение научных проблем в области машиностроения и приборостроения.

За большие достижения в развитии науки и техники, в воспитании инженерных кадров Училище награждено орденами Ленина, Октябрьской Революции и Трудового Красного Знамени.

Подготовка специалистов в МВТУ им. Н. Э. Баумана осуществляется научно-учебными комплексами, включающими в себя учебные факультеты и соответствующие научно-исследовательские институты с конструкторскими бюро.

Научно-учебные комплексы обеспечивают глубокую теоретическую подготовку будущих специалистов по фундаментальным и общеинженерным дисциплинам и практическое обучение студентов на основе их участия в решении конкретных задач ускорения научно-технического прогресса под руководством профессоров, преподавателей, ведущих разработчиков новой техники и технологии.

К проведению занятий в Училище привлекаются крупные ученые из других вузов страны, институтов Академии наук СССР, отраслевых научно-исследовательских организаций, ведущие специалисты народного хозяйства, приглашаются видные зарубежные ученые и специалисты.

В лабораториях, научно-учебных комплексах, оборудованных современными машинами и приборами, студенты МВТУ знакомятся с новейшими научными и техническими достижениями, проходят практическую подготовку, выполняют исследования и конструкторские разработки.

Большое внимание уделяется изучению общественных наук, формирующих мировоззрение советского специалиста любого профиля. В Училище организована кафедра гуманитарной подготовки и социологических исследований.

МВТУ им. Н. Э. Баумана — базовый вуз Госкомитета СССР по народному образованию. МВТУ поддерживает тесные деловые связи со многими высшими учебными заведениями нашей страны, США, Великобритании, ГДР и др. Училище является одним из центров по созданию учебников по машиностроению и приборостроению, совершенствованию студенческой научной работы. Студенческое научное общество, организованное в МВТУ в 1909 году Н. Е. Жуковским, носит его имя и за выдающуюся деятельность награждено премией Ленинского комсомола.

Московскому высшему техническому училищу имени Н. Э. Баумана предоставлено право направлять до 25 процентов студентов после завершения основного курса обучения в научно-исследовательские и конструкторские организации для углубленной подготовки в форме годичной стажировки или в аспирантуру. Выпускникам Училища, прошедшим такую стажировку, присваивается квалификация «инженер-разработчик», а специалистам, успешно завершившим курс обучения в аспирантуре,— квалификационное звание «инженер-разработчик — исследователь». Молодым специалистам, получившим квалификацию «инженер-разработчик» и направленным на работу в соответствии с персональным распределением, выплачивается повышенная заработанная плата в пределах схем должностных окладов.

Выпускники МВТУ работают в подразделениях научно-исследовательских, опытно-конструкторских организаций и промышленных предприятий (объединений) машиностроительного и приборостроительного профиля, осуществляющих разработку наиболее перспективных материалов, технических средств и технологий.

Всем студентам МВТУ им. Н. Э. Баумана при наличии оценок не ниже «удовлетворительно» в обязательном порядке назначается стипендия в размере 70 рублей (на I — III курсах) и 75 рублей (на IV — V курсах) в месяц.

В целях стимулирования учебной работы, повышения творческой активности всем студентам, имеющим по результатам экзаменационной сессии только хорошие и отличные оценки, размер стипендии повышается на 25%, имеющим по результатам экзаменационной сессии только отличные оценки,— на 50%.

Для наиболее отличившихся студентов-отличников МВТУ им. Н. Э. Баумана установлены стипендии имени В. И. Ленина, Ф. Э. Дзержинского, Н. Э. Баумана, Н. Е. Жуковского, К. Э. Циолковского, С. П. Королева, стипендия имени Ленинского комсомола, стипендия Профсоюзов СССР.

В Училище имеется спортивный клуб с секциями практически по всем видам спорта и спортивный комплекс с плавательным бассейном, легкоатлетическим манежем и спортивными залами. Занятия спортом помогают студентам в учебе, дают прекрасный заряд бодрости.

При Доме культуры МВТУ работают многочисленные коллективы художественной самодеятельности.

В МВТУ им. Н. Э. Баумана образован факультет довузовской подготовки и профессиональной ориентации.

Для учащихся 9—10 классов Москвы и Московской области в Училище организована физико-математическая школа. Физико-математическая школа работает и в Калужском филиале МВТУ им. Н. Э. Баумана.

Ежегодно с октября при МВТУ им. Н. Э. Баумана начинаются занятия на 10-месячных, а с февраля — на 6-месячных подготовительных курсах для лиц, проживающих в г. Москве и Московской области. При Калужском филиале МВТУ ежегодно с октября работают заочные 9-месячные подготовительные курсы.

В июне—июле перед началом вступительных экзаменов организуются занятия на подготовительных курсах для абитуриентов, подавших заявления в МВТУ им. Н. Э. Баумана.

Для поступающих в МВТУ им. Н. Э. Баумана в июле проводятся консультации по физике, математике, русскому языку и литературе.

МВТУ им. Н. Э. Баумана и Калужский филиал МВТУ имеют подготовительные отделения, которые готовят слушателей для поступления на первый курс Училища. Обучение на подготовительных отделениях осуществляется по дневной форме с отрывом от производства в течение 8 месяцев.

Прием документов от лиц, направленных предприятиями на подготовительное отделение МВТУ им. Н. Э. Баумана, проводится до 10 ноября, от лиц, уволенных в запас из рядов Вооруженных Сил СССР,— до 30 ноября. Начало занятий на подготовительном отделении с 1 декабря.

Поступающие на подготовительное отделение проходят устные собеседования по русскому языку, математике и физике.

Поступающие на первый курс МВТУ им. Н. Э. Баумана подают на имя ректора заявления установленной формы с указанием факультета и специальности.

К заявлению о приеме в МВТУ им. Н. Э. Баумана поступающие прилагают документ о среднем образовании в подлиннике, характеристику (рекомендацию) с последнего места работы или учебы, медицинскую справку по форме № 086-у, выписку из трудовой книжки (для имеющих стаж работы), 6 фотокарточек размером 3×4 см и 2 фотокарточки 4×6 см, предъявляют лично паспорт и документ об отношении к воинской обязанности (военный билет от военнообязанных или приписное свидетельство от лиц призывного возраста).

КОНКУРС В МВТУ им. Н. Э. БАУМАНА ПРОВОДИТСЯ ПО ФАКУЛЬТЕТАМ! Поступающие в МВТУ им. Н. Э. Баумана сдают следующие вступительные экзамены: физика (устно), математика (письменно), русский язык и литература в форме сочинения (письменно).

Профилирующим экзаменом для лиц, окончивших среднюю школу с золотой (серебряной) медалью, окончивших среднее специальное учебное заведение или среднее профессионально-техническое училище с дипломом с отличием, является экзамен по физике.

Все вступительные экзамены проводятся по программам, составленным в соответствии с учебными программами средней общеобразовательной школы.

Более подробные сведения о МВТУ им. Н. Э. Баумана можно получить, приняв участие в ежегодно проводимых для поступающих мероприятиях:

1. Лекторий по современным проблемам науки и техники для учащихся 9—10 классов (ноябрь—декабрь).

2. Экскурсии школьников на кафедры и в лаборатории Училища (январь—март).

3. Дни открытых дверей факультетов (март).

4. Встречи ректора МВТУ им. Н. Э. Баумана с поступающими (июль).

МВТУ им. Н. Э. Баумана проводит Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду: I тур (до 1 июля), II тур (до 31 декабря), а также очные олимпиады: физико-математическую (март) и по информатике (апрель).

ЖДЕМ ВАС, ДОРОГИЕ ТОВАРИЩИ, В МВТУ им. Н. Э. БАУМАНА! ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ!

Адрес МВТУ: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул, д. 5
Телефоны: приемная комиссия — 263-65-41
подготовительное отделение — 261-88-34
подготовительные курсы — 267-04-22

Проезд: Метро, ст. «Бауманская»
Трамваи — 32, 37, 45, 50 — ост. «МВТУ»
Троллейбус 24 — ост. «ул. Радио»
Автобус 78 — ост. «МВТУ»

В период приема документов и проведения вступительных экзаменов приемная комиссия работает:
Понедельник и пятница — 13.00 — 20.00
Вторник, среда, четверг — 10.00 — 17.00
Суббота — 10.00 — 14.00

Адрес Калужского филиала:
248650, г. Калуга, ул. Баженова, д. 4
Телефон: 982-44
Подготовительные курсы при Калужском филиале:
248650, г. Калуга, ул. Баженова, д. 4
Телефон: 982-04


КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ
A
B
C
X
Y