

Р. Кристенсен
**ВВЕДЕНИЕ
В МЕХАНИКУ
КОМПОЗИТОВ**



MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS

R.M. Christensen

**Lawrence Livermore Laboratory,
University of California, Livermore**

**A. Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons,
New York · Chichester · Brisbane · Toronto**

Р. Кристенсен

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ КОМПОЗИТОВ

Перевод с английского
А.И. Бейля и Н.П. Жмудя
под редакцией
Ю.М. Тарнопольского

Систематическое изложение механики композитов, принадлежащее перу известного американского ученого, знакомого нашим читателям по переводу его монографии «Введение в теорию вязкоупругости» (М.: Мир, 1974). Книга написана на высоком научном уровне, охватывает наиболее важные проблемы механики композитов, в ней содержится около 100 задач и вопросов.

Для специалистов по механике, преподавателей, аспирантов и студентов университетов.

Редакция литературы по математическим наукам

1703040000

К 20304-036 36-82, ч. 1
041(01)-82

© 1979 by John Wiley & Sons Inc.
All Rights Reserved. Authorized translation
from English Language edition published by
John Wiley & Sons, Inc.

© Перевод на русский язык с дополнением, «Мир», 1982

Успехи в области механики композитов, прежде всего в СССР и США, создали предпосылки для написания обобщающих работ. Появившиеся в последние годы монографии и обзоры по отдельным вопросам механики композитов не могут заменить книг, в которых эта область механики рассматривалась бы в целом. Предлагаемая советскому читателю монография представляет собой успешную попытку в этом направлении.

Название книги в оригинале «Mechanics of Composite Materials» значительно шире содержания, фактически она является введением в механику композитов. Книга написана на основании опыта работы автора в одном из ведущих центров в США в области композитов и курса лекций для аспирантов Калифорнийского университета в Беркли, что, несомненно, наложило свой отпечаток на стиль изложения.

В основу книги положено описание связи эффективных свойств гетерогенных сред разных типов с характеристиками компонентов и анализ особенностей поведения композитов, обусловленных их гетерогенностью. Изучены и описаны среды с включениями сферической, цилиндрической, пластинчатой и эллипсоидальной формы. Подробно представлены различные по сложности расчетные модели (в основном разработанные американскими авторами) для сред с малой, произвольной и близкой к предельной объемной долей включений. Модель среды с произвольной долей включений представлена двумя модификациями, названными при переводе полидисперсной и трехфазной, что подчеркивает способ их построения. Рассмотрены модели хаотически армированных сред, в том числе и модели типа взаимопроникающих сеток. В развернутом и систематизированном виде эти модели впервые предстают перед советским читателем. Отчетливо виден прогресс теории армированных сред, берущий свое начало от основополагающих работ Фойгта и Рейсса. Особенности макроскопического поведения гетерогенных сред, связанные с их строением и свойствами составляющих фаз, продемонстрированы при рассмотрении теории слоистых пластин, расчета элементов конструкций с использованием теории пограничного слоя, примеров проектирования оболочек давления и маховиков и особенно подробно — распространения волн. Изложение ведется преимущественно в рамках линейно-упругого подхода. Разработанные подходы и модели распространены также на описание нелинейно-упругого, вязкоупругого, вязкого, пластического и термоупругого поведения. Однако, как справедливо отмечает Р. М. Кристенсен, такие разделы, как теория предельного состояния, механика разрушения композитов, усталость, влияние внешних факторов, еще не достигли уровня монографического изложения.

Ко всем главам автором удачно подобраны задачи и упражнения. Нельзя не упомянуть о том, что некоторые из них по уровню сложности сравнимы с отдельными научными проблемами.

В целом книга может использоваться и как учебное пособие, и как справочное руководство по теории армирования, так как содержит много интересных расчетных формул. Для облегчения поиска необходимых формул

переводчики подготовили специальное дополнение в виде таблиц с комментариями

В книге практически нет ссылок на работы советских авторов (отчасти это объясняется особенностью ее построения), хотя нужно подчеркнуть, что именно ученым нашей страны принадлежит целый ряд фундаментальных результатов в области механики армированных сред. Список таких работ был бы слишком обширен, и мы ограничимся ссылками на издаваемый у нас с 1965 г. журнал «Механика композитных материалов» (ранее «Механика полимеров») и приведенную в конце книги дополнительную литературу.

В заключение хотелось бы поблагодарить автора за его любезное внимание к нашей работе над переводом.

Ю. М. Тарнопольский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наука о композитных материалах является быстро развивающейся отраслью знания во всех аспектах, будь то теоретические исследования, экспериментальное изучение или практические применения. Как и в любой интенсивно развивающейся области, результаты научных работ, проливающие свет на взаимосвязь явлений, неоднозначны, а иногда отрывочны. Мы сделали попытку объединить, описать с единой точки зрения и найти взаимосвязи между многими результатами, полученными в области механики композитов, с целью создания теоретических основ для описания механического поведения гетерогенных сред.

В литературе под термином «композитный материал» часто подразумевают только волокнистые композиты. В книге этот термин применен в более широком смысле. Здесь рассмотрены особенности поведения, присущие широкому классу гетерогенных сред, одной из которых являются волокнистые композиты. В действительности мы не ограничились изучением только твердых гетерогенных сред и уделили также внимание анализу поведения некоторых типов суспензий. Естественно, эта тема весьма обширна и представляет самостоятельный интерес. Она затронута лишь для того, чтобы показать существенную общность подходов и те особенности, которые выявляются при совместном рассмотрении поведения жидкостей и твердых тел.

Поведение композитов рассмотрено здесь с позиции механики сплошных сред, в рамках которой, однако, просто невозможно учесть все эффекты, присущие композитам, включающим большое число дискретных фаз. Поэтому, как правило, использованы идеализированные геометрические модели гетерогенных систем, позволяющие получить аналитические оценки макроскопических свойств гетерогенных сред через геометрические и физические характеристики составляющих их фаз. Указанный принцип является стержнем наших исследований. Достоинство выбранного подхода заключается в том, что он позволяет лучше понять и описать особенности поведения различных комбинаций гетерогенных материалов. Кроме того, именно в формулировке и применении идеализированных моделей есть много спорных и неясных моментов, часто порождающих противоречивые суждения. Мы намерены дать детальное и полное объяснение этого вопроса.

Как видно из оглавления, в книге затронут довольно широкий круг проблем. Среди них расчет макроскопических жесткостей, оценка предельных состояний, распространение волн в гетерогенных средах. В большей части книги предполагается знакомство читателя с методами линейной теории упругости. Однако в ряде важных случаев механическое поведение композитов не является линейно-упругим. Поэтому исследуются типы механического поведения, описываемые теориями вязкоупругости и невязкой пластичности. Кроме того, рассматриваются также некоторые геометрически нелинейные задачи. Имея в виду тесную взаимосвязь механических и термических свойств гетерогенных сред, мы включили также описание макроскопических термических свойств гетерогенной среды. Следует, наконец, упомянуть, что вводные

разделы книги содержат сводку необходимых результатов механики сплошных сред, которые потребуются при изложении основных глав.

Такие аспекты механики полимерных композитов, как усталость, разрушение, а также диффузия влаги, совсем не затронуты. Эти довольно специфические направления в последнее время интенсивно развиваются.

В их разработке участвуют многие исследователи, в том числе и я. Однако мне кажется, и большинство моих коллег, по-видимому, согласятся со мной, что эти важные разделы механики композитов еще не достигли уровня, достойного освещения в монографиях.

Хотя основной акцент сделан на теоретических аспектах механики композитов, достигнутые в этой области результаты критически оценены с точки зрения практики. Сопоставление различных подходов между собой, а также с достоверными экспериментальными данными осуществлено только для отдельных наиболее важных задач. Основные вопросы проектирования изделий из композитов затронуты лишь слегка с целью подчеркнуть плодотворное взаимное влияние практического проектирования и теории.

Я надеюсь, что книга не только будет полезной для исследователей, но и послужит источником современной информации по рассмотренным проблемам для инженеров-практиков. Ее можно также использовать как учебное пособие для аспирантов, поскольку в работе над ней отражен опыт чтения курса лекций по композитным материалам для аспирантов Калифорнийского университета в Беркли. За предоставленную мне возможность читать лекции я благодарен всем коллегам по университету, и особенно П. Нахди и Ц.-Л. Тьену.

Считаю своим приятным долгом выразить признательность многим моим коллегам по работе в Lawrence Livermore Laboratory. Помогла также стимулирующая атмосфера в группе по проекту The Composites and Mechanics Project и в отделе органических материалов (Organic Materials Division), где я работаю. Большой вклад в постановку и организацию исследований композитов в указанной лаборатории внесли Е. М. Ву и Т. Т. Чао. Большую помощь оказало также руководство отделения Chemistry and Materials Science Department, и мне особенно хочется поблагодарить Дж. К. Леппера, Х. Ф. Риццо, Л. У. Робертса и Ч. Ф. Бендера. Нельзя не отметить содействие Исследовательского центра армии (Army Research Office), и в частности поддержку, оказанную мне Е. А. Сейбелем в работе по исследованию композитов. В заключение я благодарю Лорис С.-Х. Донахью из Калифорнийского университета в Беркли за перепечатку рукописи и Кристин Кристенсен за помощь при чтении корректур.

Ричард Кристенсен

Данвилл, Калифорния
Август 1979 г.

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В этой книге рассмотрены некоторые аспекты механического поведения гетерогенных сред. К подобному предмету можно подойти с различных сторон и с различной степенью общности. Например, можно собрать обширные экспериментальные данные механических испытаний, тщательно проанализировать их, сопоставив между собой, интерпретировать и в конечном счете использовать в форме графиков, начерченных в безразмерных координатах. Или можно сделать следующий шаг и подыскать эмпирические аналитические выражения, моделирующие экспериментальные данные. Однако в книге обсуждается другой путь, потому что хотя такие подходы и бывают весьма полезны и удобны, области их применения ограничены теми условиями, при которых получены данные опытов. Следовательно, такой метод оказывается бессильным для описания поведения материала за пределами лабораторного опыта.

Постараемся отыскать более фундаментальный подход, пригодный для прогнозирования механического поведения гетерогенных сред. Очевидно, такая цель не достигается быстро и дешево. Награда, которая нас ожидает, — это награда за те затраты времени и усилия, которые израсходованы для развития строгой теории (теорий) механического поведения. Строго выведенные теории механического поведения содержат в своей основе несколько предположений или гипотез, определяющих границы применимости полученных результатов. В пределах этих границ теория имеет полную и законченную способность моделировать действительное механическое поведение среды.

Наша дальнейшая цель — развить теоретическую основу для рассмотрения механического поведения гетерогенных сред. Можно подойти к решению этой проблемы с позиций предельной общности, т. е. рассматривая полностью нелинейную кинематику и уравнения состояния, записанные в наиболее общем виде. Несмотря на то что такое приближение могло бы быть совершенно строгим, оно слишком общее для использования в частных приложениях. Поэтому примем некоторое компромиссное

приближение, твердо придерживаясь условия, что все введенные предположения или гипотезы должны соответствовать физической реальности. В рамках принятых предположений будем добиваться строгого математического построения теории (теорий) и ее приложений. В самом деле, большая часть нашей работы основана на анализе механического поведения, описываемого линейной теорией упругости, которая сама по себе является высокоразвитой и строгой теорией.

Среди многих разделов механики деформируемых сред (механики континуума) линейная теория упругости дала, вероятно, наиболее широкий спектр приложений. Огромные успехи линейной теории упругости можно объяснить несколькими факторами. Во-первых, что наиболее важно, она реалистично описывает поведение широкого класса материалов. Во-вторых, многочисленные разделы этого предмета высокоразвиты. К настоящему времени имеется обширный набор непосредственно применимых готовых методов и результатов. В-третьих, во многих практических задачах окончательные результаты представлены в простом, но в то же время в достаточно общем виде, удобном для расчетов.

По этим причинам изложим предмет о механическом поведении гетерогенных сред первоначально с точки зрения линейной теории упругости. Это, однако, не означает, что линейная теория упругости разрешит все проблемы.

Два наиболее распространенных обобщения теории упругости — это теория вязкоупругого и упругопластического поведения. Эти типы неупругого поведения гетерогенных сред будут также рассмотрены в книге. Более того, определенное внимание уделено задачам с полностью нелинейной кинематикой деформирования, чтобы показать, что, несмотря на присущую нелинейности сложность, практические проблемы для гетерогенных сред все же можно приблизить к этому уровню.

В связи с нашими намерениями применить теории упругости, вязкоупругости и пластичности дадим обзор элементов этих теорий, которые будут использоваться при анализе механического поведения гетерогенных сред. Этот обзор приведен в гл. I. Там же представлены фундаментальные результаты Эшелби, на основе которых построен расчет характеристик гетерогенных сред в следующих главах.

1.1 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В данном разделе приведены некоторые сведения из линейной теории упругости однородных сред. По этому предмету имеется обширная литература, в частности книга Сокольников [1.1].

Краевая задача

Наиболее общая форма линейно-упругих (закон Гука) соотношений напряжение—деформация для анизотропных сред имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — тензоры линейных напряжений и деформаций соответственно, а C_{ijkl} — тензор упругих модулей четвертого ранга, *тензор жесткостей*. Используем прямоугольную декартову систему координат с обычными декартовыми обозначениями, включая суммирование по повторяющимся индексам. Потребуем, чтобы тензоры напряжений и деформаций были симметричными. Тензор жесткости как тензор четвертого ранга имеет 81 независимую компоненту. Однако симметрия тензоров σ_{ij} и ε_{ij} уменьшает число независимых компонент до 36. Как будет отмечено ниже, гипотеза о существовании упругого потенциала еще уменьшит число независимых компонент. В данном разделе рассматривается однородная среда, следовательно, C_{ijkl} не зависят от координат. Наша главная цель в последующей работе — ослабить ограничение относительно гомогенности.

Тензор малых деформаций определяется через компоненты перемещения *соотношениями Коши*

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.2)$$

где запятая означает частное дифференцирование по координате, символ которой следует за запятой. Шесть независимых компонент деформаций выводятся из трех независимых компонент перемещений, поэтому компоненты деформаций не могут быть независимыми. Это приводит к условиям совместности деформаций. *Уравнения совместности деформаций*, приведенные в [1.1], имеют вид

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}. \quad (1.3)$$

Конечно, большинство из 81 уравнения в (1.3) не независимы. Как правило, уравнения (1.3) записываются в виде группы из шести уравнений; однако только три из них независимы. Уравнения совместности можно записать в напряжениях, а не в деформациях, используя соотношения напряжение—деформация.

Уравнения баланса импульсов имеют вид

$$\sigma_{ij,j}(x_k, t) + F_i(x_k, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(x_k, t)}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

где ρ — массовая плотность и F_i — компоненты объемной силы. В случае когда инерционными членами в (1.4) можно пренебречь, задача имеет статическую природу и (1.4) представляют собой *уравнения равновесия*.

В совокупности с соответствующими формулировками граничных и начальных условий соотношения (1.1)—(1.4) образуют полную систему определяющих соотношений, решение которой даст распределение полей переменных в частной краевой задаче. Единственность решения может быть доказана различными методами. Сокольников [1.1] приводит доказательство, основанное на существовании упругого потенциала. Обратимся далее к соотношению между напряжениями, деформациями и энергией деформирования.

Энергия деформирования

Наиболее удобно вывести соотношения между напряжениями, деформациями и энергией при помощи термодинамического анализа. На данном этапе не будем делать пространственный экскурс в термодинамику, к которой обратимся в гл. IX в связи с неизотермическими состояниями. Здесь отметим только, что напряжение можно выразить как производную энергии деформирования W по деформации:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (1.5)$$

где

$$W = 1/2 C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (1.6)$$

Для получения соотношения напряжение — деформация (1.1) из (1.5) и (1.6) необходимо, чтобы тензор C_{ijkl} был симметричен:

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (1.7)$$

С учетом ограничения (1.7) число независимых компонент C_{ijkl} сокращается до 21. Дальнейшее уменьшение числа независимых компонент может быть сделано только путем введения ограничений, налагаемых свойствами *симметрии среды*. Рассмотрим далее эти типы ограничений.

Частные виды симметрии

Для представления тензора C_{ijkl} в компактной форме удобно ввести *сокращенные (матричные) обозначения* для напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, & \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23}, & \varepsilon_4 &= \varepsilon_{23}, \\ \sigma_5 &= \sigma_{13}, & \varepsilon_5 &= \varepsilon_{13}, \\ \sigma_6 &= \sigma_{12}, & \varepsilon_6 &= \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В этих обозначениях соотношения (1.1) с 21 независимой компонентой для C_{ijkl} можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

где C_{ij} — симметричная матрица, в сокращенной форме имеющая вид

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (1.10)$$

Для симметрии по отношению к плоскости матрица C_{ij} имеет 13 независимых компонент [1.2], например

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

где координата x_3 нормальна к плоскости симметрии.

Далее рассмотрим симметрию по отношению к трем взаимно перпендикулярным плоскостям. Этот класс симметрии известен как *ортотропия* и характеризуется девятью независимыми компонентами тензора C_{ij} :

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

В отличие от предыдущего случая у *трансверсально изотропного (монотропного) материала* одна из плоскостей ортотропии

становится плоскостью изотропии. Полагая, что x_1 нормальна к плоскости изотропии, получим пять независимых компонент:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Наконец, в случае полной изотропии остаются две независимые компоненты C_{ij} :

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Соотношения напряжение — деформация (1.10) легко обратить для выражения деформаций через напряжения в общем случае или для какого-либо из упомянутых здесь классов симметрии. Эти результаты приведены подробно в разд. 3.1 для трансверсально изотропных сред, к которым относятся, в частности, однонаправленные волокнистые композиты.

Для изотропии соотношения напряжение — деформация можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.15)$$

где λ и μ — упругие константы Ламе, а δ_{ij} — символ Кронекера. Кроме того, соотношения можно компактно записать через диверторы и шаровые части тензоров. Пусть s_{ij} и e_{ij} — диверторные компоненты напряжений и деформаций, определяемые как

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \\ e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При помощи (1.16) соотношения напряжение — деформация (1.15) принимают вид

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2\mu e_{ij}, \\ \sigma_{kk} &= 3k e_{kk}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где, как мы теперь видим, константа μ — *модуль сдвига*, а константа k — *объемный модуль*. Конечно, только две из трех характеристик λ , μ , k независимы. Соотношения между ними, а также между характеристиками среды для других напряженных состояний приведены в [1.1]. Отметим, что обычно используемые модуль при одноосном нагружении (*модуль Юнга*) E и коэффициент Пуассона ν связаны с μ и k посредством следующих соотношений:

$$E = \frac{9k\mu}{3k + \mu}, \quad \nu = \frac{3k - 2\mu}{2(3k + \mu)}.$$

Теоремы о минимуме

В линейной теории упругости имеются два фундаментальных энергетических принципа или теоремы, которые полезны и необходимы при исследовании гетерогенных сред. Эти энергетические теоремы устанавливают, что некоторый функционал энергетического типа принимает минимальное значение для единственных значений переменных физических полей, которые представляют собой решение краевой задачи, в отличие от значений функционала для других «допустимых» значений этих переменных. Теперь перейдем к формулировке этих теорем: о минимуме потенциальной энергии и о минимуме дополнительной энергии.

Рассмотрим статическую упругую задачу с объемными силами $F_i(x_k)$ и *граничными условиями*

$$\sigma_{ij}n_j = f_i \text{ на } S_\sigma, \quad (1.18)$$

$$u_i = U_i \text{ на } S_u, \quad (1.19)$$

где S_σ и S_u — дополняющие друг друга части поверхности тела объема V , а n_j — компоненты единичной внешней нормали к поверхности. Определим далее *функционал потенциальной энергии*

$$U_\varepsilon = \int_V [W(\varepsilon_{ij}) - F_i u_i] d\sigma - \int_{S_\sigma} f_i u_i ds, \quad (1.20)$$

где $W(\varepsilon_{ij})$ задается уравнением (1.6).

Определим в качестве *допустимого поля перемещений* $\dot{u}_i(x_j)$ некоторое поле непрерывных перемещений, которое удовлетворяет граничным условиям в перемещениях (1.19), но во всех других отношениях выбрано произвольно (за исключением обычного требования регулярности производных). Теорему о минимуме потенциальной энергии можно теперь сформулировать следующим образом:

Среди всех допустимых полей перемещений абсолютный минимум функционала потенциальной энергии (1.20) обеспечивает лишь то, которое удовлетворяет уравнениям равновесия.

Математически этот результат формулируется следующим образом:

$$\dot{U}_\varepsilon - U_\varepsilon \geq 0,$$

где \dot{U}_ε — функционал (1.20), вычисленный для какого-либо допустимого поля перемещений $\dot{u}(x_i)$. Доказательство этой теоремы, данное во многих источниках, основано на свойстве положительной определенности потенциальной энергии деформирования (1.6):

$$W(\varepsilon_{ij}) \geq 0.$$

Теорема о минимуме дополнительной энергии формулируется аналогично. Определим функционал дополнительной энергии

$$U_\sigma = \int_V W(\sigma_{ij}) dv - \int_{S_u} \sigma_i U_i ds, \quad \sigma_i = \sigma_{ij} n_j, \quad (1.21)$$

где энергия деформирования (1.6) выражена в напряжениях

$$W = 1/2 S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}, \quad (1.22)$$

а S_{ijkl} — тензор упругих податливостей. Определим допустимые напряженные состояния $\sigma_{ij}(x_i)$ как такие напряженные состояния, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям в напряжениях (1.18), но во всех других отношениях произвольны. Будем вновь подразумевать, что непрерывности напряжений и их производных достаточно для доказательства теоремы.

Теорему о минимуме дополнительной энергии теперь можно сформулировать следующим образом:

Среди всех допустимых полей напряжений абсолютный минимум функционала дополнительной энергии (1.21) обеспечивает лишь то, которое удовлетворяет уравнениям совместности деформаций.

Математическую формулировку этого вывода можно представить в виде

$$\dot{U}_\sigma - U_\sigma \geq 0,$$

где \dot{U}_σ — функционал (1.21), вычисленный для любого допустимого поля напряжений. Ключевой шаг в доказательстве теоремы основан на использовании свойства положительной определенности функции W (1.22).

Аналогия с механикой вязкой жидкости

До сих пор мы ограничивались рассмотрением линейно-упругого поведения. Однако при решении некоторых задач представляет интерес связь между определяющими уравнениями теории упругости и соответствующими уравнениями движения вязких жидкостей. В частности, мы используем ее при изучении задач о поведении суспензий. Выпишем уравнения движения (1.4) в перемещениях. Используя закон Гука (1.1) для изотропного тела в форме (1.15), а также (1.2), получим

$$(\lambda + \mu) u_{k,kl} + \mu u_{i,jj} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.23)$$

В случае несжимаемости материала имеем условие

$$u_{k,k} = 0, \quad (1.24)$$

выполнимое при $\lambda \rightarrow \infty$. Первое слагаемое в (1.23) в этом случае неопределенно и связано с действующим гидростатическим давлением p ; таким образом,

$$-p_{,i} + \mu u_{i,jj} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.25)$$

Выпишем для сравнения определяющие уравнения Навье—Стокса для движения несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости [1.3]:

$$-p_{,i} + \eta v_{i,jj} + \rho F_i = \rho \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + v_j v_{i,j} \right), \quad (1.26)$$

где v_i — вектор скорости, η — коэффициент вязкости, F_i — объемная сила, выраженная на единицу массы, и p — действующее давление. Уравнение неразрывности имеет вид

$$v_{k,k} = 0. \quad (1.27)$$

Отметим, что уравнения (1.24) и (1.25), определяющие вектор перемещения в твердом теле, имеют точно такую же форму, что и соответствующие уравнения (1.27) и (1.26), определяющие вектор скорости в вязкой жидкости. Эти уравнения имеют не только одинаковую форму, но и совпадают почленно, с одним лишь исключением. В уравнение (1.26) через субстанциональную производную входит нелинейный член $v_j v_{i,j}$, который не имеет аналога в (1.25). Однако в условиях так называемого «ползущего» течения, когда скорости жидкости очень малы по отношению к некоторой норме, нелинейные члены $v_j v_{i,j}$ в (1.26) имеют более высокий порядок по сравнению с линейными и ими можно пренебречь. Таким образом, в условиях «ползущего» течения имеется прямая аналогия между решениями задач вязкого течения и решениями упругих задач. Она состоит

в отождествлении скорости вязкой жидкости и упругого перемещения твердого тела. Эта аналогия используется далее при рассмотрении некоторых задач.

Обозначения

Закончим этот раздел замечаниями об обозначениях. Большинство, как это уже было отмечено выше, в книге используются декартовы тензорные обозначения. В некоторых решениях будут использованы другие обозначения, в частности *безындексная форма записи*, в которой, например, соотношения напряжение — деформация (1.1) имеют вид

$$\sigma = C\varepsilon.$$

В безындексных обозначениях этого типа символы интерпретируются непосредственно как векторы или тензоры. Тензор C определяется математически как линейное преобразование над соответствующим векторным пространством.

1.2. ТЕОРИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Для многих материалов, в частности полимеров, характерна зависимость процессов деформирования от скорости и времени, не отражаемая уравнениями теории упругости. Такие материалы проявляют как мгновенную, так и замедленную реакцию на нагрузку. Это свойство образно называют памятью. Другая особенность многих полимеров состоит в том, что у них сочетаются способности запасать энергию подобно упругим телам и рассеивать подобно средам с вязкими свойствами. Такие материалы называют *вязкоупругими*. Теория вязкоупругих материалов высокоразвита и доступна для широкого применения. Наиболее полное исследование различных возможных форм вязкоупругих соотношений напряжение — деформация приведено в книге Гросса [1.4]. Кроме того, некоторые аспекты общей теории вязкоупругости исследовались Кристенсенем [1.5] и Пипкином [1.6].

Соотношения напряжение — деформация

Наиболее общая форма линейного вязкоупругого соотношения напряжение — деформация имеет вид

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\tau) \frac{de_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.1)$$

где компоненты тензора $C_{ijkl}(t)$ называются *функциями релаксации* материала. Эти функции характеризуют вязкоупругий

материал, так же как их аналоги — модули упругости — упругий. Действительно, если бы тензор функций релаксации $C_{ijkl}(t)$ не зависел от времени, выражения (2.1) можно было бы проинтегрировать непосредственно, получив при этом соотношения типа упругих. Выражения (2.1) для дальнейшего использования записываются в безындексных обозначениях:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{C}(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Это можно переписать в другой форме при помощи интегрирования по частям:

$$\sigma(t) = \mathbf{C}(0) \epsilon(t) - \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{C}(t-\tau)}{d\tau} \epsilon(\tau) d\tau, \quad (2.3)$$

полагая при этом, что $\epsilon(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow -\infty$.

Установлено, что функции релаксации $\mathbf{C}(t)$ должны быть положительными монотонно убывающими функциями времени, как показано на рис. 1.1, а. Ограничения, налагаемые на $\mathbf{C}(t)$ термодинамикой, и требования затухания памяти приведены в [1.5].

Иную форму вязкоупругих соотношений напряжение — деформация можно найти путем выражения деформации как функционала временной истории напряжения:

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где через $\mathbf{J}(t)$ обозначен тензор *функций ползучести*. Установлено, что функции ползучести должны быть монотонно возрастающими функциями времени (рис. 1.1, б), которые могут приближаться или не приближаться к асимптоте, не зависящей от времени. Эти варианты обсуждаются далее. Очевидно, функции ползучести $\mathbf{J}(t)$ и функции релаксации $\mathbf{C}(t)$ должны выражаться друг через друга. Для установления этого соотношения применим преобразование Лапласа к выражениям (2.2) и (2.4). Используя теорему о свертке, получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(s) &= s\bar{\mathbf{C}}(s) \bar{\epsilon}(s), \\ \bar{\epsilon}(s) &= s\bar{\mathbf{J}}(s) \bar{\sigma}(s), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где s — параметр преобразования, а $\bar{\epsilon}(s)$ означает изображение функции $\epsilon(t)$ и т. д. Из (2.5) находим

$$\bar{\mathbf{J}}(s) = 1/[s^2\bar{\mathbf{C}}(s)]. \quad (2.6)$$

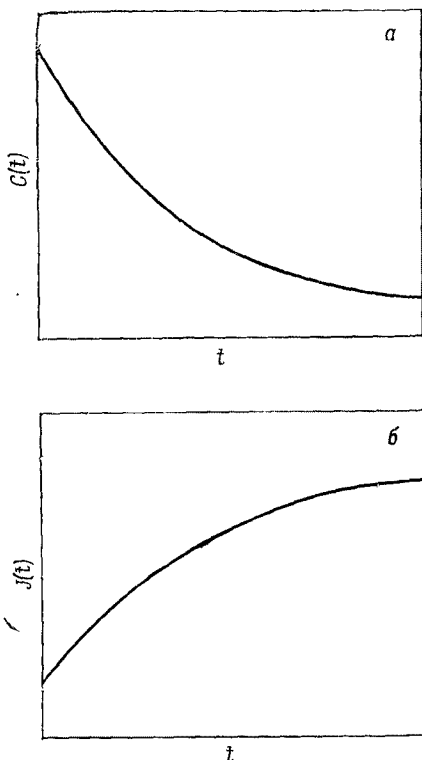


Рис. 1.1. Функции релаксации и ползучести: а — функция релаксации; б — функция ползучести.

Кроме приведенной выше формулы, существует еще и другая форма записи вязкоупругих соотношений напряжение — деформация, включающая комплексные модули. В частности, положим, что как действительная, так и мнимая части деформации являются гармоническими функциями времени:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (2.7)$$

где ω — частота колебаний. Подставляя (2.7) в (2.2), получим

$$\sigma(t) = \mathbf{C}^*(\omega) \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{C}^*(\omega)$ — комплексный модуль:

$$\mathbf{C}^*(\omega) = \mathbf{C}'(\omega) + i\mathbf{C}''(\omega), \quad (2.9)$$

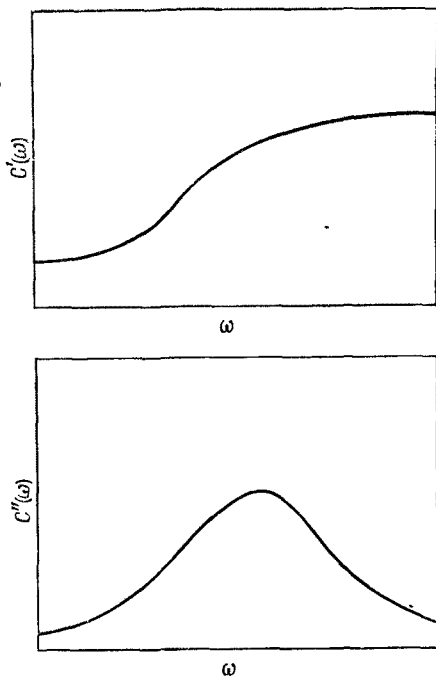


Рис. 1.2. Комплексный модуль.

Действительная и мнимая части модуля $C^*(\omega)$ записываются в виде

$$\begin{aligned}
 C'(\omega) &= C_\infty + \omega \int_0^\infty \hat{C}(s) \sin \omega s \, ds, \\
 C''(\omega) &= \omega \int_0^\infty \hat{C}(s) \cos \omega s \, ds,
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

где $C(t)$ представлено в виде суммы

$$C(t) = C_\infty + \hat{C}(t),$$

причем C_∞ — асимптотическое значение C при $t \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{C}(t) = 0.$$

Типичное поведение действительной и мнимой частей комплексного модуля показано на рис. 1.2. Комплексный модуль можно использовать для записи соотношений напряжение — деформация

в форме преобразования Фурье. *Комплексную податливость* $J^*(\omega)$ можно также определить как результат тензорного обращения $C^*(\omega)$.

Отношение мнимой части к действительной в (2.9) часто используется в качестве характеристики материала. Обозначим частную компоненту $C(t)$ через $C(t)$ и соответственно компоненту $C^*(\omega)$ через $C^*(\omega)$. *Тангенс потерь* $C^*(\omega)$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi = C''(\omega)/C'(\omega). \quad (2.11)$$

Угол φ интерпретируется как фазовый угол запаздывания деформации относительно напряжения при установившихся гармонических колебаниях в вязкоупругой среде.

Вязкоупругие жидкости

На основании вышеизложенного охарактеризуем вязкоупругие свойства, которыми механическое поведение жидкости отличается от механического поведения твердого тела. Поскольку мы имеем дело с жидкостями, то ограничимся рассмотрением состояния сдвигового деформирования изотропной среды со следующими определяющими характеристиками:

$\mu(t)$ — функция релаксации при сдвиге,

$J(t)$ — функция ползучести при сдвиге,

$\mu^*(\omega)$ — комплексный модуль сдвига.

Вязкоупругая жидкость обладает способностью находиться в установившемся состоянии сдвигового течения. Из (2.4) видно, что функция ползучести должна давать деформационный отклик на ступенчатое изменение напряжения. При постоянном напряжении деформация неограниченно растет, а скорость деформации стремится к постоянному значению по мере приближения к условиям установившегося состояния. Таким образом, сдвиговая функция ползучести должна иметь вид

$$J(t) = \hat{J}(t) + \frac{t}{\eta_{\text{EFF}}}, \quad (2.12)$$

где $\hat{J}(t)$ приближается к асимптоте при $t \rightarrow \infty$. Здесь η_{EFF} — *эффективная вязкость* вязкоупругой жидкости в условиях установившегося состояния. Используя функцию релаксации в форме соотношений напряжение — деформация (2.2), можно показать, что вязкость η_{EFF} связана с функцией релаксации при сдвиге следующим образом:

$$\eta_{\text{EFF}} = \int_0^{\infty} \mu(s) ds. \quad (2.13)$$

Полученные соотношения имеют смысл только в условиях, когда скорости деформаций бесконечно малы. Необходимо подчеркнуть, что у вязкоупругих жидкостей в полной мере проявляются эффекты памяти и влияния скорости деформирования. Среда ведет себя как вязкая жидкость с эффективной вязкостью, описываемой выражением (2.13), только в состоянии установившегося течения.

При изучении течения суспензий необходимо иметь в виду один важный момент, относящийся к характеристике жидкой фазы суспензий. Это вопрос о форме, которую вязкоупругие функции принимают в предельном случае, когда среда представляет собой ньютоновскую вязкую жидкость. Было показано, что вязкоупругие соотношения напряжение — деформация очень легко и непосредственно сводятся к соотношениям, описывающим упругое поведение. Другой предельный случай вязкоупругих уравнений состояний — уравнения состояния вязкой жидкости — можно получить аналогичным образом. Для ньютоновской вязкой жидкости соотношения напряжение — деформация при сдвиге имеют вид

$$s_{ij} = 2\eta d_{ij}, \quad (2.14)$$

где s_{ij} — девиаторное напряжение, а тензор скоростей деформаций выражен через градиенты скоростей:

$$d_{ij} = 1/2(v_{i,j} + v_{j,i}). \quad (2.15)$$

В условиях малых скоростей деформирования соотношение (2.14) эквивалентно

$$s_{ij} = 2\eta \frac{de_{ij}}{dt}. \quad (2.16)$$

Из соотношения (2.2) следует, что функция релаксации $\mu(t)$ должна иметь вид

$$\mu(t) = \eta \delta(t), \quad (2.17)$$

чтобы свести соотношение (2.2) к (2.16); здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Для ньютоновской вязкой жидкости функция ползучести при сдвиге имеет форму последнего слагаемого в (2.12). Наконец, комплексный модуль $\mu^*(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$ должен иметь вид

$$\mu'(\omega) = 0, \quad \mu''(\omega) = \omega\eta. \quad (2.18)$$

Эти соотношения можно получить, используя функцию релаксации ньютоновской жидкости (2.17) в форме (2.10).

Упруго-вязкоупругая аналогия

Другой важный вопрос, который будет рассмотрен, — это принцип упруго-вязкоупругой аналогии. Отметим, что определяющие уравнения и условия для упругой и вязкоупругой краевых задач имеют идентичную форму, за исключением соотношений напряжение — деформация. Однако даже вязкоупругие соотношения напряжение — деформация можно привести к тому же виду, что и упругие, путем использования интегральных преобразований, таких, как преобразования Лапласа или Фурье. Отметим, что изображения по Лапласу вязкоупругих соотношений напряжение — деформация (2.5) имеют тот же вид, что и соответствующие упругие соотношения, если отождествить $s\bar{C}(s)$ с упругими модулями C . Эта тождественность имеет большое значение. Если все определяющие соотношения для упругой краевой задачи подвергнуть интегральному преобразованию, то они, очевидно, будут идентичны преобразованным вязкоупругим соотношениям, если упругие модули C определены как $s\bar{C}$. Теперь следует, что решения статических упругих задач можно превратить в преобразованные решения соответствующих вязкоупругих задач, подставляя просто вместо упругих модулей C величины $s\bar{C}(s)$ и истолковывая поле упругих переменных в решении как изображение поля вязкоупругих переменных. Вязкоупругое решение находится путем обратного преобразования.

Этот прием широко используется в практике. В случае установившихся гармонических колебаний процедура еще более упрощается. Статические упругие решения можно преобразовать в вязкоупругие решения для установившихся гармонических колебаний, заменяя просто упругие модули C соответствующими комплексными вязкоупругими модулями $C^*(\omega)$ и истолковывая упругое поле переменных как комплексное гармоническое вязкоупругое поле переменных. Принцип соответствия, очевидно, применим для гетерогенной среды в той же степени, что и для гомогенной.

Распространение волн

Рассмотрим вопрос о распространении волн в вязкоупругих средах. Это поможет нам в дальнейшем при анализе волнового поведения гетерогенной среды. Плоская гармоническая во времени волна в изотропной вязкоупругой среде представляется решением в перемещениях уравнения движения (1.4):

$$u(x, t) = Ae^{-\alpha x} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right], \quad (2.19)$$

где ω — заданная частота, $c = c(\omega)$ — волновая скорость и $\alpha = \alpha(\omega)$ — коэффициент затухания:

$$\begin{aligned} c(\omega) &= \frac{|C^*(\omega)|^{1/2}}{\rho^{1/2}} \sec \frac{\varphi(\omega)}{2}; \\ \alpha(\omega) &= \frac{\omega}{c} \operatorname{tg} \frac{\varphi(\omega)}{2}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

здесь φ — угол потерь, определяемый через тангенс потерь (2.11). Константа A — амплитуда волны; C^* равно $\lambda^* + 2\mu^*$ в случае волны расширения, равно μ^* в случае сдвиговой волны и равно E^* в случае распространения волны вдоль стержня (при условии большой длины волны).

Отличительными чертами распространения волны в гомогенной вязкоупругой среде являются эффект дисперсии вследствие зависимости фазовой скорости c от частоты ω и эффект затухания волны, обусловленный превращением механической энергии в тепло и характеризуемый тангенсом потерь. Ни одно из этих явлений не наблюдается в гомогенной упругой среде.

1.3. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Теория пластичности описывает неупругие эффекты, которые сильно отличаются от неупругих эффектов вязкоупругости. Теория вязкоупругости, кроме эффектов упругого типа, учитывает и специфическую зависимость реакции материала от скорости нагружения. Теория пластичности в свою очередь моделирует нелинейную реакцию материала за пределами упругой области, не зависящую от скоростей нагружения. Теория пластичности (при отсутствии инерционных эффектов) является, таким образом, статической, не зависящей от времени теорией.

Теорию невязкой пластичности, рассмотренную ниже, часто называют теорией скоростного типа. Этот термин может восприниматься как противоречащий данной выше характеристике теории пластичности. В действительности противоречия нет. Термин *теория скоростного типа* просто означает, что рассматриваются члены, представляющие собой по внешним признакам скорости; однако явно исключается любая зависимость от времени. Целая область трехмерной теории пластичности ставит своей целью многомерное обобщение одномерной формы соотношения напряжение — деформация. Последняя характеризует упругую область, ограниченную пределом текучести, за которым имеется область нелинейного поведения, включающая в себя упругую разгрузку, как показано на рис. 1.3. Теперь изложим соответствующие формулы этой теории. Основной литературой

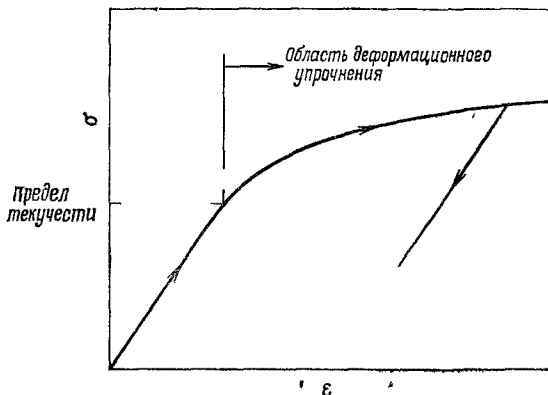


Рис. 1.3. Пластическое поведение.

по этому предмету являются книги Прагера и Ходжа [1.7], Хилла [1.8], Качанова [1.9], Мендельсона [1.10] и обзорная статья Нахди [1.11].

Уравнения состояния

Вначале изложим основные предположения об уравнениях состояния теории пластичности. Пусть имеется область упругого поведения, определяемая некоторой функцией текучести, или функцией нагружения. В основном будем использовать термин *функция нагружения*, оговаривая, что термином *функция текучести* будем называть начальную форму функции нагружения, действующую в течение первого цикла нагружения, начиная от недеформированного состояния. Общий вид функции нагружения:

$$\hat{f}(\sigma_{kl}, \epsilon''_{kl}) = \kappa, \quad (3.1)$$

где деформации разложены на упругую и пластическую части:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij}, \quad (3.2)$$

причем ϵ''_{ij} означает пластическую компоненту деформации. Скалярная функция κ в (3.1) есть общая функция главных переменных теории. Кратко покажем, как функция нагружения (3.1) используется для определения упругой или пластической деформации.

Определим деформации в (3.2) как функции напряжений. Упругую компоненту ϵ'_{ij} полагаем связанной с σ_{ij} законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon'_{kl}.$$

Обычно используется изотропная форма данного соотношения, что и будет сделано ниже. Пластическая компонента деформации при пластическом нагружении имеет вид

$$\dot{\epsilon}''_{ij} = F_{ij}(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{kl}, \epsilon''_{kl}), \quad (3.3)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени. Далее, для того чтобы действительное физическое поведение было независимым от скоростей деформирования, необходимо, чтобы функция F_{ij} в (3.3) была однородной функцией первой степени по скоростям напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$. Вместо записи (3.3) через скорости можно с тем же успехом записать (3.3) через приращения $d\epsilon''_{ij}$ и $d\sigma_{kl}$. Теперь можно изложить предположения об уравнениях состояния теории невязкой пластичности. Рассмотрим их по отношению к трем видам деформирования: нагружению, разгрузке и нейтральному нагружению.

Полная деформация упруга вплоть до первого достижения поверхности текучести. Последующее нагружение изменяет размер и форму поверхности, соответствующей функции нагружения (3.1). По отношению к произвольной точке в пространстве напряжений состояние нагружения определяется следующим образом:

Нагружение: $f = k$, $\dot{k} \neq 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$; при этих условиях $\dot{\epsilon}''_{ij}$ определяется согласно (3.3).

Нейтральное нагружение: $f = k$, $\dot{k} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0$; тогда $\dot{\epsilon}''_{ij} = 0$.

Разгрузка: $f = k$, $\dot{k} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0$; и вновь $\dot{\epsilon}''_{ij} = 0$.

Представив $f()$ и $F_{ij}()$ в развернутом виде, можно проинтегрировать уравнения состояния, выраженные через скорости, при этом получим истории напряжений и деформаций. Главная проблема состоит в задании вида функций состояния $f()$, $F_{ij}()$ и k .

Функции текучести

Рассмотрим начальную функцию текучести. Наиболее распространены функция текучести Мизеса и функция текучести Треска. Функция текучести Треска допускает течение тогда, когда максимальное сдвиговое напряжение достигает определенной величины:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad (3.4)$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге. Чтобы избежать использования специальных обозначений для указания

максимального сдвигового напряжения, *критерий Треска* можно переписать в общей форме:

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0, \quad (3.5)$$

где J_2 и J_3 — инварианты девиатора тензора напряжений, определенного в разд. 1.1. Эти инварианты имеют вид

$$J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij}, \quad J_3 = |s_{ij}|.$$

Критерий Мизеса значительно проще критерия Треска, если его записать просто как

$$J_2 = 1/2 s_{ij} s_{ij} = k^2, \quad (3.6)$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге. Физический смысл критерия Мизеса состоит в том, что энергия деформирования, связанная со сдвиговой деформацией, имеет ограниченную величину.

Для упруго-идеально-пластического материала предварительного задания функции текучести достаточно для того, чтобы непосредственно сформулировать законченную теорию деформирования. Отсутствие упрочнения делает этот случай особенно простым. Определяющие уравнения, известные как *уравнения Прандтля — Рейсса*, приведены, например, в [1.7].

Закон течения

Для соотношения напряжение — деформация, описывающего упрочнение, использовано уравнение (3.3) в частной форме:

$$\dot{\epsilon}''_{ij} = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.7)$$

где

$$\Lambda = \Lambda(\sigma_{k1}, \dot{\sigma}_{k1}, \dot{\epsilon}''_{k1})$$

и Λ должна быть однородной функцией первой степени по отношению к $\dot{\sigma}_{k1}$. Соотношение (3.7) известно как закон течения. Оно выражает условие нормальности вектора скорости пластической деформации к поверхности текучести. Последний результат следует из постулата Друккера, который представляет собой основное энергетическое неравенство. Из него также следует, что поверхность нагружения должна быть выпуклой. Прежде чем рассмотреть определение параметра Λ в (3.7), обсудим два наиболее общих типа упрочнения.

Упрочнение

После начала течения о последующих поверхностях нагружения говорят, что они отражают упрочнение вследствие пластического деформирования. Правило упрочнения определяет ха-

рактен изменения формы и размеров поверхности нагружения в процессе деформирования. Простейший тип упрочнения — так называемое *изотропное упрочнение*. В этом случае функция нагружения (3.1) записывается в следующем частном виде:

$$f(J_2, J_3) = \kappa, \quad (3.8)$$

где весь эффект упрочнения отражается исключительно параметром κ . При этих условиях пластическая деформация не должна сопровождаться анизотропными эффектами. При изотропном упрочнении не проявляется эффект Баушингера, и поэтому гипотеза (3.8) не легла в основу модели, пригодной для описания поведения широкого класса материалов.

Другой общий тип упрочнения — *кинематическое упрочнение*. В этом случае функция нагружения (3.1) записывается в виде

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = k^2, \quad (3.9)$$

где k — константа, а α_{ij} — *тензор параметров упрочнения*, который обязательно зависит от основных переменных задачи. Из выражения (3.9) видно, что поверхность нагружения перемещается в пространстве напряжений без изменения формы. Имеются два распространенных способа определения параметров упрочнения α_{ij} , носящие название *правила Прагера* и *правила Циглера*. В первом параметры α_{ij} определяются следующим образом:

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\epsilon}''_{ij}, \quad (3.10)$$

где c — скаляр, подлежащий определению, тогда как по правилу Циглера

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\mu} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}). \quad (3.11)$$

Установлено, что последняя формула инвариантна по отношению к уменьшению размерности задачи. Другими словами, формула (3.11) применима во всех подпространствах напряжений, тогда как (3.10) нет. В дальнейшей работе будет применяться формула (3.11). Можно показать, что $\dot{\mu}$ в (3.11) вычисляется следующим образом:

$$\dot{\mu} = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}}{(\partial f / \partial \sigma_{k1}) (\sigma_{k1} - \alpha_{k1})}. \quad (3.12)$$

Возвращаясь к закону течения для кинематического упрочнения, перепишем (3.9) в следующей форме:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon''_{ij}) = k^2. \quad (3.13)$$

Используя (3.13) вместе с (3.7), можно вычислить Λ :

$$\Lambda = \frac{-(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}}{(\partial f / \partial \sigma_{ij}) (\partial f / \partial \epsilon''_{ij})}. \quad (3.14)$$

Представленные формулы полностью определяют соотношения напряжения — деформация для теории невязкой пластичности. Разумеется, можно сформулировать и более общие зависимости для упрочнения. Остальные условия для формирования полной системы уравнений поля — соотношения между деформациями и перемещениями, уравнения совместности деформаций и уравнения движения — те же самые, что и в линейной теории упругости. Соотношениям напряжение — деформация теории пластичности присуща нелинейность; таким образом, полная система уравнений теории пластичности нелинейна. Несмотря на это усложнение, многие важные задачи разрешимы. Эту общую теорию мы применим в гл. VIII для решения двух важных задач пластического деформирования композитного материала.

1.4. ПРИНЦИП ЭШЕЛБИ

Один из основных результатов теории упругости, имеющий исключительно важное значение для анализа гетерогенных сред, получен Эшелби [1.12]. Им предложен прием вычисления энергии деформирования систем, содержащих включения. Так как формула Эшелби отсутствует в учебниках по теории упругости, приведем ее вывод в форме, наиболее пригодной для последующего использования.

Формула, выведенная Эшелби для вычисления энергии деформирования, преобразует обычное интегрирование по объему в интегрирование по поверхности частного вида. Это упрощение очень удобно. Рассмотрим однородное тело с заданными на поверхности граничными условиями в напряжениях. Пусть внутри тела находится единичное включение с иными свойствами, как схематически показано на рис. 1.4, а. Энергия упругого деформирования гетерогенного тела определяется следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv, \quad (4.1)$$

где V — объем области. Далее определим энергию деформирования такого же тела, в котором включение не отличается по свойствам от окружающей его среды. Пусть граничные условия для обеих задач одинаковы (рис. 1.4, б). Энергия деформирования гомогенного тела имеет вид

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dv, \quad (4.2)$$

где поля переменных различаются следующим образом:

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$ — задача, соответствующая рис. 1.4, а;

$\sigma_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^0, u_i^0$ — задача, соответствующая рис. 1.4, б.

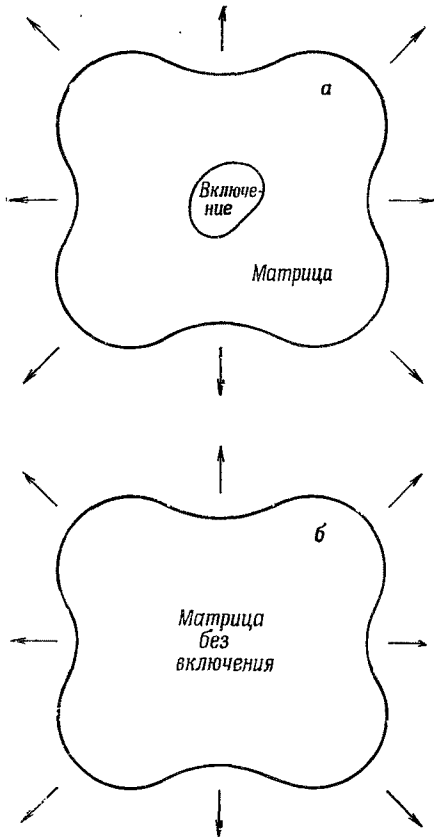


Рис. 1.4. Схемы к задаче о включении в бесконечной среде и к вспомогательной задаче для однородной среды.

Выражение (4.1) вместе с (4.2) можно переписать в виде

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dv. \quad (4.3)$$

Применяя теорему Остроградского — Гаусса вместе с уравнениями равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$ и $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ к (4.3), получим

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S (\sigma_i u_i - \sigma_i^0 u_i^0) ds, \quad (4.4)$$

где S — поверхность тела. На поверхности

$$\sigma_i = \sigma_i^0 \text{ на } S, \quad (4.5)$$

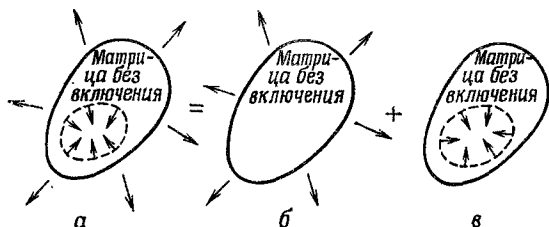


Рис. 1.5. Схема суперпозиции решений

поскольку граничные условия обеих задач одинаковы. Используя (4.5) и (4.4), получим

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S \sigma_i^0 (u_i - u_i^0) ds. \quad (4.6)$$

Это соотношение представляет собой промежуточную форму искомого результата. Для преобразования интеграла в (4.6) к другой форме решим вспомогательную задачу.

Рассмотрим гомогенное тело той же формы, что и на рис. 1.4, а, в котором эффект, связанный с наличием включения, учтен путем введения внутренних сил, распределенных некоторым образом (рис. 1.5, а). Нетрудно показать, что иллюстрируемая рис. 1.5, а задача о действии частной системы внутренних сил, приложенных по поверхности включения, дает в точности то же самое состояние полей переменных в области вне включения, что и задача, иллюстрируемая рис. 1.4, а. Далее задачу, соответствующую рис. 1.5, а, можно представить как суперпозицию двух задач, показанных на рис. 1.5, б и в. Обозначим поля переменных для задач на рис. 1.5:

$\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}, \hat{u}_i$ — задача, соответствующая рис. 1.5, а;

$\sigma'_{ij}, \varepsilon'_{ij}, u'_i$ — задача, соответствующая рис. 1.5, в.

Конечно, рис. 1.5, б и 1.4, б иллюстрируют одну и ту же задачу. Используем далее условия, что $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}$ и \hat{u}_i идентичны $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$ соответственно вне области, включающей внутренние силы, т. е. вне включения.

При помощи метода суперпозиции (см. рис. 1.5) теперь можно записать

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \\ \hat{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}, \\ \hat{u}_i &= u_i^0 + u'_i. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя (4.7), упругую энергию в задаче, соответствующей рис. 1.5, а, можно записать в виде

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij})(\epsilon_{ij}^0 + \epsilon'_{ij}) dv, \quad (4.8)$$

или почленно

$$\hat{U} = U_0 + U' + U_{\text{INT}}, \quad (4.9)$$

где U_0 определяется согласно (4.2) и

$$U' = \frac{1}{2} \int_V \sigma'_{ij} \epsilon'_{ij} dv, \quad (4.10)$$

$$U_{\text{INT}} = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^0 \epsilon'_{ij} + \sigma'_{ij} \epsilon_{ij}^0) dv. \quad (4.11)$$

Член U_{INT} описывает эффект энергии взаимодействия двух напряженных состояний для схем нагружения, показанных на рис. 1.5, б и в.

Энергию взаимодействия (4.11) можно представить в более удобной форме. Используя соотношения напряжение — деформация, запишем второй член в подынтегральном выражении (4.11) в виде

$$\sigma'_{ij} \epsilon_{ij}^0 = C_{ijkl} \epsilon'_{kl} \epsilon_{ij}^0. \quad (4.12)$$

Используя симметрию $C_{ijkl} = C_{klij}$, из (4.12) получим

$$\sigma'_{ij} \epsilon_{ij}^0 = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^0 \epsilon'_{ij}. \quad (4.13)$$

Однако правая часть (4.13) есть не что иное, как $\sigma_{ij}^0 \epsilon'_{ij}$; таким образом,

$$\sigma'_{ij} \epsilon_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 \epsilon'_{ij}. \quad (4.14)$$

Подстановка (4.14) в (4.11) дает

$$U_{\text{INT}} = \int_V \sigma_{ij}^0 \epsilon'_{ij} dv. \quad (4.15)$$

Применяя теперь теорему Остроградского — Гаусса и уравнение равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$, приведем (4.15) к виду

$$U_{\text{INT}} = \int_S \sigma_{ij}^0 u'_i ds. \quad (4.16)$$

Эта формула для U_{INT} связана с интегральным членом в (4.6). Чтобы в этом убедиться, используем последнее из выражений (4.7) для записи (4.6) в виде

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^0 u'_i ds \quad (4.17)$$

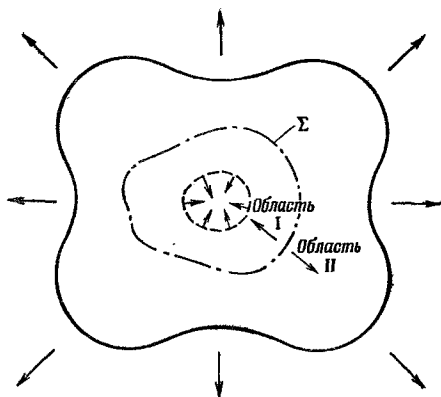


Рис. 1.6. Положение промежуточной поверхности Σ , по которой производится интегрирование.

при условии, что $u_i = \hat{u}_i$ на S . Из сравнения интегрального члена в (4.17) и (4.16) видно, что

$$U = U_0 + 1/2 U_{\text{INT}}. \quad (4.18)$$

В заключение рассмотрим наиболее подходящие для использования в (4.18) формы записи U_{INT} . Возвращаясь к формуле (4.15) для U_{INT} , разделим, как показано на рис. 1.6, область интегрирования по объему на две части с поверхностью раздела Σ . Поверхность Σ берется вне области внутренних сил. С учетом этого деления областей уравнение (4.15) примет вид

$$U_{\text{INT}} = \int_{V_I} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dv + \int_{V_{II}} \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0 dv. \quad (4.19)$$

Использование (4.14) в последнем слагаемом (4.19) дает

$$U_{\text{INT}} = \int_{V_I} \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dv + \int_{V_{II}} \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0 dv. \quad (4.20)$$

Соотношение (4.20) можно записать в виде

$$U_{\text{INT}} = \int_{\Sigma} \sigma'_i u'_i ds - \int_{\Sigma} \sigma'_i u'_i ds + \int_S \sigma'_i u'_i ds, \quad (4.21)$$

где вновь применена теорема Остроградского — Гаусса в сочетании с уравнениями равновесия $\sigma'_{ij,j} = 0$ в области V_I и $\sigma'_{ij,j} = 0$ в области V_{II} . Знак минус, входящий в (4.21), связан с тем, что положительное направление единичного вектора нормали к Σ противоположно для двух областей.

Вспоминая, что $\sigma'_i = 0$ на S , (4.21) можно свести к уравнению

$$U_{\text{INT}} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 u'_i - \sigma'_i u_i^0) ds. \quad (4.22)$$

Использование соотношения (4.7) приводит (4.22) к виду

$$U_{\text{INT}} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 \hat{u}_i - \hat{\sigma}_i u_i^0) ds. \quad (4.23)$$

Так как в основной задаче, соответствующей рис. 1.5, а, переменные $\hat{\sigma}_i$ и \hat{u}_i идентичны переменным σ_i и u_i вне области, включающей внутренние силы, то (4.23) принимает вид

$$U_{\text{INT}} = \int_{\Sigma} (\sigma_i^0 u_i - \sigma_i u_i^0) ds, \quad (4.24)$$

Наконец, подстановка (4.24) в (4.18) дает окончательный результат

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{S_1} (\sigma_i^0 u_i - \sigma_i u_i^0) ds. \quad (4.25)$$

где Σ берется по поверхности включения.

Формула (4.25) получена из решения задачи с граничными условиями в напряжениях для гетерогенного тела. Можно показать, что соответствующее решение задачи с заданными перемещениями на наружной границе имеет вид

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_{S_1} (\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i) ds. \quad (4.26)$$

Эти результаты можно обобщить на случай многих включений.

Полученные формулы (*формулы Эшелби*) имеют очень простой вид. Основная формула для общей энергии деформирования содержит громоздкие квадратичные формы, которые интегрируются по объему области. Однако по приведенным формулам Эшелби энергию деформирования можно вычислить, выполняя простое интегрирование по поверхности в соответствии с (4.25), (4.26). Это значительно упрощает исследования механического поведения гетерогенных сред.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.1. Sokolnikoff I. S. *Mathematical Theory of Elasticity*. — New York: McGraw-Hill, 1956.
- 1.2. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. — New York: Oxford University Press, 1968.

- 1.3. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. — New York: Cambridge University Press, 1967. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973, 758 с.]
- 1.4. Gross B. *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. — Paris: Hermann, 1953.
- 1.5. Christensen R. M. *Theory of Viscoelasticity*. — New York: Academic, 1971. [Имеется перевод: Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. — М.: Мир, 1974.]
- 1.6. Pipkin A. C. *Lecture on Viscoelasticity Theory*. — New York: Springer-Verlag, 1972.
- 1.7. Prager W., Hodge P. G. (Jr.) *Theory of Perfectly Plastic Solids*. — New York: Wiley, 1961. [Имеется перевод с другого издания: Прагер В., Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. — М.: ИЛ, 1956.]
- 1.8. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. — New York: Oxford University Press, 1960. [Имеется перевод: Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехтеориздат, 1956, 407 с.]
- 1.9. Качанов Л. М. *Основы теории пластичности*. — М.: Наука, 1969, 420 с.
- 1.10. Mendelson A. *Plasticity: Theory and Application*. — London: Macmillan, 1968.
- 1.11. Naghdi P. M. *Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity*. — In: *Symposium on Naval Structural Mechanics*. — N. Y.: Pergamon, Elmsford, N. Y., 1960. [Имеется перевод: сб. Механика. — М.: ИЛ, 1961, № 1(71), с. 87—133.]
- 1.12. Eshelby J. D. *The continuum theory of lattice defects*. — In: *Progress in Solid State Physics*, v. 3 (F. Seitz and D. Turnbull, Eds.). — New York: Academic, 1956, p. 79. [Имеется перевод: Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. — М.: ИЛ, 1963, 247 с.]

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ СРЕДЫ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В своей деятельности человек использует различные по свойствам материалы, придавая им в изделиях разнообразную форму. Однако простой материал редко обладает сочетанием свойств, в точности соответствующим требованиям конкретного применения. Практика показала, что, комбинируя материалы, часто можно добиться благоприятного сочетания свойств. Объяснение таких эмпирических результатов и случайных открытий — одна из задач прикладной науки. Однако более важным ее предназначением является создание новых материалов на основе фундаментального исследования гетерогенных сред. В конечном счете только точная наука о свойствах гетерогенных сред может дать ключ к оптимальному использованию конструктивных материалов.

Два примера помогут нам подготовить мотивировки и дать толчок к дальнейшим исследованиям. Многие гомогенные полимеры стеклообразны и хрупки. Методом проб и ошибок технологами обнаружено, что однородное диспергирование сферических частиц каучука в полимере позволяет значительно ослабить его чувствительность к удару. Большая часть выпускаемых в настоящее время стеклообразных полимеров содержит каучуковую «упрочняющую» добавку в качестве средства, улучшающего эксплуатационные свойства материала. Второй пример — это волокнистые композиты. Материал некоторых волокон, используемых для создания композитов, даже нельзя получить в виде массива или если и можно, то свойства волокон совершенно иные и намного лучше, чем свойства массива. Было установлено, что очень выгодно применять волокна, объединенные в монолитный материал с помощью податливого компонента — матрицы (часто полимера). Такая гетерогенная система — волокнистый композит — сохраняет многие свойства, связанные исключительно со свойствами волокон.

Это наиболее типичные примеры целенаправленного создания и использования гетерогенных материалов. Необходимо помнить, что комбинирование материалов, которое улучшает

отдельные свойства, часто сопровождается ухудшением других свойств. Таким образом, следует рассматривать все определяющие характеристики композита и часто приходится принимать компромиссные решения.

В данной главе начнем детальное изучение поведения гетерогенных сред. Как всегда, начиная исследование, необходимо сосредоточить внимание на главном аспекте рассматриваемой проблемы. В этой и двух последующих главах теоретически исследуются жесткости, или эффективные модули. Жесткость и прочность, несомненно, наиболее важные технические характеристики. Действительно, математическое описание жесткости — это основа расчета напряжений, который в конечном итоге обосновывает применение инженерных материалов в конструкциях. Исследование в данной главе проводится в предположении о линейно-упругом поведении материала. Это допущение представляет собой основу современных методов инженерного проектирования.

В гл. II—IV рассмотрены различные типы гетерогенных сред. Основное внимание уделено средам с включениями сферической, цилиндрической и пластинчатой формы. Эти типы включений позволяют создавать весьма различные по свойствам наполненные и армированные материалы. В данной главе изучается только случай сферических включений. Задачи о цилиндрических и пластинчатых включениях откладываются до следующих глав.

Остановимся на определении эффективных жесткостей гетерогенной среды со сферическими включениями. Под *эффективными жесткостями* мы понимаем средние меры жесткости, учитывающие свойства всех фаз гетерогенной среды и их взаимодействия. Процедура осреднения, которая используется для нахождения этих свойств, должна быть очень строго определена. Это и будет сделано в следующем разделе. В некоторых случаях можно найти точные решения для *эффективных модулей*. Когда это невозможно, то по крайней мере показано, как найти *области*, в которых находятся значения эффективных модулей.

2.1. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ГОМОГЕННОСТИ

Если рассматривать материалы в некотором достаточно малом масштабе, то можно считать, что они неоднородны. Чтобы убедиться в высокой степени разупорядоченности и изменчивости, которая может встретиться, необходимо начать с масштаба атомов и молекул. Если технические материалы рассматривать на этом уровне, то задача об описании их свойств неразрешима. Для преодоления этой трудности вводится *гипотеза*

континуума. Эта гипотеза включает в себя процедуру статистического осреднения, посредством которой действительное состояние и структура материала идеализируются таким образом, что материал считается континуумом. Эта гипотеза континуума основана на существовании некоторых мер, связанных со свойствами, определяющими деформируемость среды. Эти свойства отражают осредненные неизбежно очень сложные взаимодействия на уровне атомов или молекул. Если принимается модель континуума, становится уместной концепция гомогенности. При этом считают, что присущие однородной среде характерные свойства одинаковы во всех точках среды. Рассмотрим далее различные типы неоднородных сред.

Неоднородность можно рассматривать или как идеализацию непрерывного изменения свойств от точки к точке, или как скачкообразное изменение свойств при прохождении через поверхности раздела. В данной работе мы коснемся только лишь второго случая, когда в *гетерогенной* среде различные фазы остаются отчетливо выраженными. Тип гетерогенности с дискретными фазами, несомненно, практически более важен, чем встречающаяся неоднородность, связанная с непрерывным изменением свойств. В книге предполагается, что фазы, составляющие среду, однородны и изотропны. Для перехода к дальнейшему изложению проблемы необходимо сказать кое-что и о *масштабе неоднородности.*

Мы предполагаем существование характерного размера неоднородности для гетерогенной среды. Например, в волокнистой системе это — значение расстояния между волокнами. Конечно, такой характерный размер представляет собой грубую идеализацию неизбежно статистического описания действительной гетерогенной системы. Очевидно, имеется масштаб длины, в пределах которого свойства можно осреднить некоторым осмысленным образом. Масштаб длины осреднения, назовем его δ , должен быть значительно больше характерного размера неоднородности. Очень благоприятен случай, когда существует масштаб длины осреднения δ , который еще мал по сравнению с характерным размером тела. При этом условии материал можно идеализировать как эффективно гомогенный, и задача о нагружении тела может быть решена с использованием средних свойств, ассоциированных с масштабом длины δ .

Далее мы предполагаем, что масштаб длины осреднения свойств существует и имеет физический смысл, т. е. масштаб неоднородности по порядку величины меньше характеристического размера в интересующей нас задаче. Это означает, что существует промежуточный размер, осреднение свойства в пределах которого обоснованно. Описанное условие называется условием *эффективной, или эквивалентной, гомогенности.*

Употребляются также другие термины: *макроскопическая гомогенность* и *статистическая гомогенность*, под которыми подразумевается то же самое. В противоположность предположению об эквивалентной гомогенности можно проводить для каждой фазы расчеты, удовлетворяющие *условиям непрерывности векторов напряжений и перемещений* на границах фаз. Для типичных изделий из композитов, состоящих из тысяч или миллионов отдельных частиц или волокон, это немыслимая задача.

Принятие гипотезы об эквивалентной гомогенности позволяет поставить фундаментальную задачу о свойствах гетерогенной среды. Основная проблема состоит в том, чтобы использовать процедуру осреднения для предсказания эффективных свойств идеализированной гомогенной среды через свойства фаз и некоторые их геометрические характеристики. Полученные в результате осреднения эффективные свойства — это те свойства, которые можно использовать в расчетах нагруженного тела из композита. Соотношения между эффективными свойствами и свойствами фаз в совокупности с расчетом конкретных конструкций лежат в основе оптимизации конструкций.

Осреднение по объему

Определим процедуру осреднения. Введем элемент объема гетерогенной среды, имеющий характерный размер, идентичный масштабу осреднения δ (см. рис. 2.1). Пусть этот элемент объема V является *представительным элементом объема*. В условиях приложенного к нему макроскопически однородного поля напряжений или деформаций *средние напряжение и деформация* определяются следующим образом:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \int_V \sigma_{ij}(x_i) dv, \quad (1.1)$$

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = \int_V \epsilon_{ij}(x_i) dv, \quad (1.2)$$

где ϵ_{ij} — тензор малых деформаций. Соотношения (1.1) и (1.2) весьма общие в том смысле, что совершенно отсутствуют ограничения на геометрические характеристики фаз гетерогенной среды. Определим теперь эффективные свойства гетерогенной среды. *Эффективные жесткости* линейно-упругого тела, или свойства типа модулей, обозначенные тензором C_{ijkl} , определяются посредством соотношения

$$\langle \sigma_i \rangle = C_{ijkl} \langle \epsilon_{kl} \rangle. \quad (1.3)$$

Таким образом, чтобы решить задачу об эффективных свойствах гетерогенной среды, необходимо выполнить процедуру

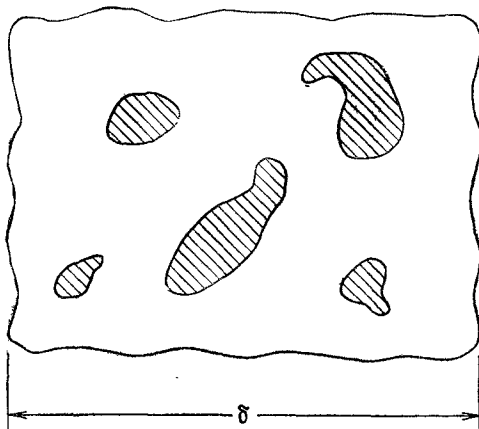


Рис. 2.1. Представительный элемент объема.

осреднения, определяемую выражениями (1.1) и (1.2), и затем найти C_{ijkl} из (1.3)¹⁾. Хотя эта процедура кажется простой в общих чертах, она сложна в деталях, и при ее выполнении необходима осторожность. Для строгого выполнения осреднения необходимо иметь точные решения для полей напряжений и деформаций $\sigma_{ij}(x_i)$ и $\epsilon_{ij}(x_i)$ в гетерогенной среде. Наша цель состоит в том, чтобы выполнить эту процедуру с минимумом упрощений без обращения к эмпирическим закономерностям. Полученные результаты ограничены несколькими идеализированными геометрическими моделями типичных сочетаний фаз гетерогенной среды. Примечательно, что эти несколько геометрических моделей охватывают большое число типов материалов, сохраняя при этом их существенные черты.

Для большей определенности в отношении возможных геометрических особенностей гетерогенную среду можно классифицировать на пять геометрических типов. К первому типу относятся такие материалы, которые характеризуются кристаллической зернистой структурой, как у обычных металлов. Каждое зерно анизотропно, и различные зерна имеют различную ориентацию своих плоскостей или осей симметрии. Это единственная однофазная система среди пяти типов систем. Следующий тип среды характеризуется наличием двух или более отчетливо выраженных фаз, каждая из которых непрерывна и отсутствует характерная геометрическая характеристика поверхностей раздела, которую можно использовать для указания, на

¹⁾ Сходные определения объемных средних применяются в нелинейном случае; см. описание у Ковина [2.1].

какой стороне поверхности раздела находится та или иная фаза. Эта система иногда называется системой, образованной *взаимопроницающими сетками*. Строгий критерий для выделения системы этого типа должен быть обязательно статистическим.

Оставшиеся три элемента классификации представляют собой варианты одного общего случая. Эти три типа сред образованы непрерывной фазой, называемой *матрицей*, с *включениями* сферической, цилиндрической или пластинчатой формы. Общность этих типов следует из того факта, что все три формы включений представляют собой предельные случаи эллипсоида. Цилиндрическая и пластинчатая формы связаны соответственно с вытянутыми или сплюснутыми эллипсоидами. Конечно, формы эллипсоида бесконечно разнообразны в областях между предельными случаями; однако именно эти предельные случаи имеют первостепенную важность. Действительно, во многих полимерных системах, в которых имеются кинетические движущие силы и достигается термодинамическое равновесие, всегда встречаются только три формы надмолекулярных образований: сферическая, цилиндрическая или пластинчатая.

Рассмотрим все пять основных геометрических типов гетерогенности. Более общие случаи могут иногда трактоваться как комбинации двух или более основных типов. С другой стороны, такие случаи должны рассматриваться индивидуально. На наиболее элементарном уровне композиты могут быть отнесены к одному из двух типов: 1) системы, содержащие одну непрерывную фазу с дискретными включениями из одного или более других материалов, и 2) все остальные системы. На этом простом уровне классификации к первому типу относятся среды со сферическими, цилиндрическими и пластинчатыми включениями. Выведем теперь точную формулу, которая будет использована при нахождении эффективных свойств гетерогенной среды, содержащей дискретные включения.

Интересующая нас задача относится к двухфазной гетерогенной системе, в которой одна из фаз непрерывна, а другая имеет форму дискретных включений. Обе фазы считаются изотропными. Соотношения напряжение — деформация для двух фаз имеют вид

для включения

$$\sigma_{ij} = \lambda_I \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_I \varepsilon_{ij}, \quad (1.4)$$

для непрерывной фазы (матрицы)

$$\sigma_{ij} = \lambda_M \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_M \varepsilon_{ij}, \quad (1.5)$$

где λ и μ — константы Ламе. Формулу для средних напряжений (1.1) можно записать в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V - \sum_{n=1}^N V_n} \sigma_{ij} dv + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \sigma_{ij} dv, \quad (1.6)$$

где принято, что внутри представительного элемента объема содержится N включений, объемы которых обозначены через V_n , а $V - \sum_{n=1}^N V_n$ есть область, не занятая включениями. Выражение (1.6) с учетом (1.5) можно переписать в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{V - \sum_{n=1}^N V_n} (\lambda_M \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_M \epsilon_{ij}) dv + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \sigma_{ij} dv. \quad (1.7)$$

Первый интеграл в (1.7) можно представить в виде суммы двух следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\lambda_M \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_M \epsilon_{ij}) dv - \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} (\lambda_M \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_M \epsilon_{ij}) dv + \\ + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \sigma_{ij} dv. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Среднее напряжение в (1.8) переписывается с использованием (1.3) для изотропного тела, а первый интеграл в (1.8) можно записать в явном виде через средние деформации; получим

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \langle \epsilon_{kl} \rangle = \lambda_M \delta_{ij} \langle \epsilon_{kk} \rangle + 2\mu_M \langle \epsilon_{ij} \rangle + \\ + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} (\sigma_{ij} - \lambda_M \delta_{ij} \epsilon_{kk} - 2\mu_M \epsilon_{ij}) dv. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Эта формула полезна для дальнейшего вывода эффективных свойств. Видно, что для вычисления тензора эффективных свойств C_{ijkl} необходимы только условия внутри включений. Вывод (1.9), проделанный нами, повторяет вывод Рассела и Акривоса [2.2].

Среды с малой объемной долей включений

Выражение (1.9) применяется далее для описания среды с малой объемной долей включений. Такая система моделируется, по существу, бесконечной средой с одиночным включением.

Отметим, что подобная постановка нарушает условие малости объема представительного элемента по сравнению с характерным линейным размером в конкретной задаче. Однако физический смысл этой идеализации заключается просто в том, что частицы так малы и настолько удалены одна от другой, что взаимодействием между ними можно пренебречь независимо от того, каков размер представительного элемента объема.

Рассмотрим состояние чистого сдвига, приложенного на больших расстояниях от включения; тогда (1.9) имеет вид

$$2\mu\langle e \rangle = 2\mu_M\langle e \rangle + \frac{1}{V_I} \int (\lambda_I \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_I \epsilon_{ij} - \lambda_M \delta_{ij} \epsilon_{kk} - 2\mu_M \epsilon_{ij}) dv, \quad (1.10)$$

где использовано (1.4) и $\langle e \rangle$ — средняя деформация сдвига. Как показал Эшелби [2.3], одиночное эллипсоидальное включение, внедренное в бесконечную среду, находится в состоянии однородной деформации, пропорциональной деформации, приложенной в бесконечной среде на большом расстоянии от включения. В соответствии с этим уравнение (1.10) можно записать в виде

$$\mu\langle e \rangle = \mu_M\langle e \rangle + \frac{V_I}{V} (\mu_I - \mu_M)\langle e_I \rangle, \quad (1.11)$$

где $\langle e_I \rangle$ — однородная деформация сдвига во включении. Наконец, (1.11) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\mu - \mu_M}{\mu_I - \mu_M} = c \frac{\langle e_I \rangle}{\langle e \rangle}, \quad (1.12)$$

где c — объемная доля включения:

$$c = V_I/V. \quad (1.13)$$

Подобным образом можно вывести формулу и для объемного модуля:

$$\frac{k - k_M}{k_I - k_M} = c \frac{\langle \epsilon_I \rangle}{\langle \epsilon \rangle}, \quad (1.14)$$

где $\langle \epsilon \rangle$ — средняя объемная деформация, $\langle \epsilon_I \rangle$ — однородная объемная деформация во включении. Эти удивительно простые формулы показывают, что для вывода выражений эффективных свойств необходимо знать только состояние однородной деформации во включении. Конечно, результаты (1.12) и (1.14) справедливы только при малых объемных долях включений, в то время как формула (1.9) справедлива для любых объемных долей.

Энергетические методы

В предыдущем разделе эффективные свойства определялись посредством точной формулы (1.3), включающей среднее напряжение и среднюю деформацию в представительном элементе объема. В данном разделе используем другой способ определения эффективных свойств — через равенство энергии.

Произведем свертку выражения (1.3) при помощи тензора средних деформаций $\langle \epsilon_{ij} \rangle$:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle \langle \epsilon_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \epsilon_{ij} \rangle \langle \epsilon_{kl} \rangle. \quad (1.15)$$

Средние напряжения и деформации в (1.15) определяются условиями на границе представительного элемента объема. Так как напряженное и деформированное состояния макроскопически однородны внутри представительного элемента объема, то средние величины можно также найти или путем интегрирования по объему или, что легче, из граничных значений. Тогда член, описывающий работу в левой части выражения (1.15), равен интегралу, вычисленному через напряжения и перемещения на поверхности, т. е. (1.15) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_S \sigma_i u_i ds = \frac{1}{2} C_{ijkl} \langle \epsilon_{ij} \rangle \langle \epsilon_{kl} \rangle, \quad (1.16)$$

где u_i — вектор перемещений; множитель $1/2$ добавлен для удобства дальнейшей интерпретации. Наконец, используя теорему Остроградского — Гаусса и уравнения равновесия $\sigma_{ij,j} = 0$, (1.16) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} C_{ijkl} \langle \epsilon_{ij} \rangle \langle \epsilon_{kl} \rangle. \quad (1.17)$$

Соотношение (1.17) определяет эффективные свойства C_{ijkl} через равенство энергий деформирования, запасаемых в гетерогенной среде и эквивалентной гомогенной среде.

Располагая формулами (1.3), (1.17) для тензора эффективных свойств C_{ijkl} , выведенными различными способами, можно отметить сходство энергетической формулы с выражением (1.9) применительно к случаю двухфазной среды с дискретными включениями. Чтобы показать эту эквивалентность, свернем (1.9) при помощи $\langle \epsilon_{ij} \rangle$, в результате чего получим

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \epsilon_{ij} \rangle &= (\lambda_M \delta_{ij} \langle \epsilon_{kk} \rangle + 2\mu_M \langle \epsilon_{ij} \rangle) \langle \epsilon_{ij} \rangle + \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} [\sigma_{ij} \langle \epsilon_{ij} \rangle - (\lambda_M \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_M \epsilon_{ij}) \langle \epsilon_{ij} \rangle] dv. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Рассмотрим последний член в подинтегральном выражении в (1.18), который для анизотропии общего вида можно записать так:

$$C_{ijkl}^M \langle \varepsilon_{kl} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle.$$

Используя теперь симметрию $C_{ijkl}^M = C_{klij}^M$, получим

$$C_{ijkl}^M \langle \varepsilon_{kl} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (1.19)$$

где

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}^M \langle \varepsilon_{kl} \rangle. \quad (1.20)$$

Здесь σ_{ij}^0 имеет смысл напряжения в области включений, но при условии, что свойства включения идентичны свойствам остальной среды. Использование (1.19) приводит (1.18) к виду

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \frac{U_0}{V} + \frac{1}{2V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} (\sigma_{ij} e_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 e_{ij}) dv, \quad (1.21)$$

где величина $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ в (1.18) записана как деформация в однородной среде, обладающей свойствами матрицы, и U_0 — соответствующая энергия деформирования однородной среды. Теперь, подставляя (1.17) в левую часть (1.21) и применяя теорему Остроградского — Гаусса к интегральному члену, можно показать, что это выражение идентично формуле Эшелби (I-4.26), обобщенной на случай N включений. Таким образом, (1.21) представляет собой удобную формулу для расчета эффективных свойств C_{ijkl} . Отметим, что для вычисления по (1.21) необходимы лишь решения для полей напряжений и деформаций внутри включений. Хотя формула (1.21) выведена с использованием только процедуры осреднения без помощи формулы Эшелби, последняя представляет собой более общий результат. Другими словами, формулы Эшелби (I-4.25, 4.26) имеют самостоятельное значение в теории упругости безотносительно к частному применению.

2.2. МОДЕЛЬ СРЕДЫ С МАЛОЙ ОБЪЕМНОЙ ДОЛЕЙ ВКЛЮЧЕНИЙ

В данном разделе выведем решения для *эффективного модуля сдвига* упругой среды с упругими сферическими включениями.

Модуль сдвига

Рассмотрим вначале поведение однородной среды в состоянии чистого сдвига. Компоненты перемещений в декартовой системе координат в осях x , y , z определяются следующим об-

разом:

$$u_x = cx, \quad u_y = -cy, \quad u_z = 0, \quad (2.1)$$

где максимум деформации сдвига имеет значение c . Перепишем выражения для перемещений, соответствующих (2.1), в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} u_r &= cr \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \\ u_\theta &= cr \sin \theta \cos \theta \cos 2\varphi, \\ u_\varphi &= -cr \sin \theta \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Руководствуясь предшествующими формулами для деформации однородной среды, запишем общее решение для неоднородной среды в виде

$$\begin{aligned} u_r &= U_r(r) \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \\ u_\theta &= U_\theta(r) \sin \theta \cos \theta \cos 2\varphi, \\ u_\varphi &= U_\varphi(r) \sin \theta \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $U_r(r)$, $U_\theta(r)$ и $U_\varphi(r)$ — неизвестные функции r , которые подлежат определению из уравнений равновесия. Уравнения равновесия в сферических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} u_\theta - \frac{\text{ctg}^2 \theta}{r^2} u_\theta + \right. \\ \left. + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta \partial \varphi} - \\ - \frac{\text{ctg} \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_\theta - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \\ + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \right. \\ \left. - \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \\ - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} + \frac{\text{ctg} \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} u_\varphi - \\ - \frac{\text{ctg}^2 \theta}{r^2} u_\varphi + \frac{\text{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\text{ctg} \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.3) в (2.4)–(2.6) и приравнивая нулю коэффициенты при $\sin^2 \theta$ и при членах, не зависящих от θ , получим три определяющих уравнения:

$$2(1-\nu) \left(U_r'' + \frac{2}{r} U_r' - \frac{2}{r^2} U_r - \frac{3}{r} U_\theta' + \frac{3}{r^2} U_\theta \right) + \\ + (1-2\nu) \left(-\frac{6}{r^2} U_r + \frac{3}{r} U_\theta' + \frac{3}{r^2} U_\theta \right) = 0, \quad (2.7)$$

$$2(1-\nu) \left(\frac{2}{r} U_r' + \frac{4}{r^2} U_r - \frac{6}{r^2} U_\theta \right) + \\ + (1-2\nu) \left(-\frac{2}{r} U_r' + U_\theta'' + \frac{2}{r} U_\theta' \right) = 0, \quad (2.8)$$

$$U_\theta + U_\varphi = 0, \quad (2.9)$$

где штрих означает производную по r . Можно показать, что решение уравнений (2.7)–(2.9) дается выражениями

$$U_r = A_1 r - \frac{6\nu}{1-2\nu} A_2 r^3 + \frac{3A_3}{r^4} + \frac{5-4\nu}{1-2\nu} \frac{A_4}{r^2}, \\ U_\theta = A_1 r - \frac{7-4\nu}{1-2\nu} A_2 r^3 - \frac{2A_3}{r^4} + \frac{2A_4}{r^2}, \quad (2.10) \\ U_\varphi = -U_\theta.$$

Перепишем решения (2.10) отдельно для включения и матрицы:

$$U_{rI} = A_1 r - \frac{6\nu_I}{1-2\nu_I} A_2 r^3, \\ U_{\theta I} = A_1 r - \frac{7-4\nu_I}{1-2\nu_I} A_2 r^3, \quad (2.11)$$

$$U_{rM} = B_1 r + \frac{3B_3}{r^4} + \frac{5-4\nu_M}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{r^2}, \\ U_{\theta M} = B_1 r - \frac{2B_3}{r^4} + \frac{2B_4}{r^2}, \quad (2.12)$$

причем решение для U_φ для каждой фазы следует из (2.10). Отдельные слагаемые (2.10), отсутствующие в (2.11) и (2.12), берутся с нулевыми коэффициентами, чтобы избежать сингулярности или нарушения граничных условий.

Коэффициент B_1 рассматривается как заданный, поскольку он определяет состояние приложенного чистого сдвига при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, (2.11) и (2.12) содержат четыре константы, подлежащие определению.

На границе фаз должны выполняться условия непрерывности следующих величин: σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{r\varphi}$; u_r , u_θ , u_φ на радиусе $r = a$ сферического включения. Однако только четыре из этих

условий независимы. Окончательно условия непрерывности на границе фаз принимают вид

$$aA_1 - \frac{6\nu_I}{1-2\nu_I} a^3 A_2 = aB_1 - \frac{6\nu_M}{1-2\nu_M} a^3 B_2 + \frac{3}{a^4} B_3 + \frac{5-4\nu_M}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{a^2}, \quad (2.13)$$

$$aA_1 - \frac{7-4\nu_I}{1-2\nu_I} a^3 A_2 = aB_1 - \frac{7-4\nu_M}{1-2\nu_M} a^3 B_2 - \frac{2}{a^4} B_3 + \frac{2}{a^2} B_4, \quad (2.14)$$

$$21\lambda_I a^2 A_2 + 2\mu_I \left(A_1 - \frac{18\nu_I}{1-2\nu_I} a^2 A_2 \right) = \lambda_M \left(21a^2 B_2 - \frac{6}{a^3} B_4 \right) + \\ + 2\mu_M \left(B_1 - \frac{18\nu_M}{1-2\nu_M} a^2 B_2 - \frac{12}{a^5} B_3 - 2 \frac{5-4\nu_M}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{a^3} \right), \quad (2.15)$$

$$\mu_I \left(A_1 - \frac{7+2\nu_I}{1-2\nu_I} a^2 A_2 \right) = \\ = \mu_M \left(B_1 - \frac{7+2\nu_M}{1-2\nu_M} a^2 B_2 + \frac{8}{a^5} B_3 + 2 \frac{1+\nu_M}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{a^3} \right). \quad (2.16)$$

Используем формулу Эшелби (I-4.26) и энергетический критерий эквивалентности гомогенной и гетерогенной сред. Вначале запишем формулу Эшелби в виде

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \int_S [-\sigma_{rr}^0 u_r - \sigma_{r\theta}^0 u_\theta - \sigma_{r\varphi}^0 u_\varphi + \sigma_{rr} u_r^0 + \sigma_{r\theta} u_\theta^0 + \sigma_{r\varphi} u_\varphi^0] ds; \quad (2.17)$$

напомним, что переменные, имеющие верхний индекс 0, отвечают случаю однородной среды (целиком состоящей из матрицы). Для этой однородной задачи имеем

$$u_r^0 = B_1 r \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \\ u_\theta^0 = B_1 r \sin \theta \cos \theta \cos 2\varphi, \quad (2.18)$$

$$u_\varphi^0 = -B_1 r \sin \theta \sin 2\varphi, \\ \sigma_{rr}^0 = 2\mu_M B_1 \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \\ \sigma_{r\theta}^0 = 2\mu_M B_1 \sin \theta \cos \theta \cos 2\varphi, \quad (2.19) \\ \sigma_{r\varphi}^0 = -2\mu_M B_1 \sin \theta \sin 2\varphi.$$

Энергия деформирования, запасаемая в однородной сфере из матрицы, определяется формулой

$$U_0 = \frac{4}{3}\pi b^3 \mu_M B_1^2, \quad (2.20)$$

где b — радиус сферы. Выражение для энергии, запасаемой в сфере из эквивалентной однородной среды, имеет вид

$$U_{\text{СОМР}} = \frac{4}{3}\pi b^3 \mu B_1^2, \quad (2.21)$$

где μ — эффективный модуль сдвига. Наконец, полагая равными энергию деформирования гетерогенной среды и энергию деформирования эквивалентной гомогенной среды $U = U_{\text{сomp}}$ и затем подставляя (2.20) и (2.21) в (2.17), получим

$$\mu = \mu_M + \frac{3}{4\pi b^3 B_1^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[-\sigma_{rr}^0 u_r - \sigma_{r\theta}^0 u_\theta - \sigma_{r\varphi}^0 u_\varphi + \right. \\ \left. + \sigma_{rr}^0 u_r^0 + \sigma_{r\theta}^0 u_\theta^0 + \sigma_{r\varphi}^0 u_\varphi^0 \right] a^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.22)$$

При вычислении интегралов в (2.22) напряжения и перемещения на поверхности $r = a$ одни и те же. Переменные с верхним индексом 0 определяются из (2.18), (2.19), в то время как остальные переменные соответствуют решению задачи для гетерогенной среды. Перемещения определяются из (2.3), (2.10) и (2.13) — (2.16), а напряжения — непосредственно из соотношений напряжения — деформация линейной теории упругости. Напряжения и перемещения, используемые в (2.22), можно вычислить в каждой фазе на поверхности $r = a$.

После интегрирования (2.22) необходимо проделать лишь длинные и утомительные алгебраические преобразования. Использование условия малости объемной доли включений $(a/b)^3 \ll 1$ окончательно приводит выражение (2.22) к виду

$$\frac{\mu}{\mu_M} = 1 - \frac{15(1 - \nu_M)[1 - (\mu_I/\mu_M)]c}{7 - 5\nu_M + 2(4 - 5\nu_M)(\mu_I/\mu_M)}, \quad (2.23)$$

где $c = (a/b)^3$ — объемная доля сферических включений. Этот результат, очевидно, впервые был получен Дьюи [2.4] на основе упругого решения, данного Гудьером.

Представляет интерес проверить решение (2.23) для частного случая, когда включения абсолютно жесткие, а матрица несжимаема, т. е. $\nu_M = 1/2$. В результате получим

$$\mu/\mu_M = 1 + 5/2c. \quad (2.24)$$

Эта формула исключительно важна и не только для упругой среды с включениями. Как отмечалось в разд. 1.1, математическая структура уравнений, определяющих линейно-упругое поведение и поведение ньютоновской вязкой жидкости, одинакова, если в обоих случаях инерционными членами можно пренебречь. Действительно, вопрос об эффективных свойствах суспензий можно поставить точно так же, как и для рассмотренного случая. Критерием для определения эффективной вязкости является равенство скорости диссипации энергии в вязкой суспензии и в эквивалентной однородной среде. Таким образом, в случае жидкости скорость диссипации энергии играет роль энергии деформирования в теории упругости. В обоих случаях математическая структура теории и процедура одни и те же незави-

симо от того, является ли среда жидкостью или твердым телом. Здесь, однако, эта аналогия ограничивается рассмотрением разбавленных суспензий твердых частиц. Следовательно, в задаче для суспензии аналог (2.24) имеет вид

$$\eta/\eta_M = 1 + \frac{5}{2}c, \quad (2.25)$$

где η — эффективная вязкость разбавленной суспензии сферических частиц в жидкости с вязкостью η_M . Соотношение (2.25) представляет собой знаменитую *формулу Эйнштейна*, впервые полученную им в 1905 г. [2.5].

Аналогия между поведением вязкой жидкости и упругого твердого тела имеет существенные ограничения. Хотя она полностью корректна и строга в данной задаче для жестких включений, поведение суспензии упругих частиц в жидкости, как мы далее увидим, не имеет простой аналогии с поведением упругой среды с упругими включениями, изученной в данном разделе.

Объемный модуль

Описанную выше процедуру определения эффективного модуля сдвига можно использовать и для определения *эффективного объемного модуля* k . Эта задача значительно проще, так как поля переменных обладают сферической симметрией и, таким образом, задача является одномерной. Предоставим читателю в качестве упражнения показать, что при условии малой объемной доли включений эффективный объемный модуль k определяется по формуле

$$k = k_M + \frac{(k_I - k_M)c}{1 + [(k_I - k_M)/(k_M + \frac{4}{3}\mu_M)]}. \quad (2.26)$$

2.3. ПОЛИДИСПЕРСНАЯ МОДЕЛЬ

В предыдущем разделе были определены эффективные модуль сдвига и объемный модуль упругой среды с малой объемной долей упругих сферических включений. Перейдем теперь к описанию сред с произвольной объемной долей включений. Логично сделать этот шаг путем введения модели гетерогенной среды с частной геометрической характеристикой и затем решить задачу о ее свойствах. Естественно, мы хотим, чтобы такая модель отражала основные особенности реальных сред. С другой стороны, очевидно, что модель с частными геометрическими характеристиками не охватывает все возможные случаи. Имея это в виду, перейдем теперь к описанию модели более общего характера.

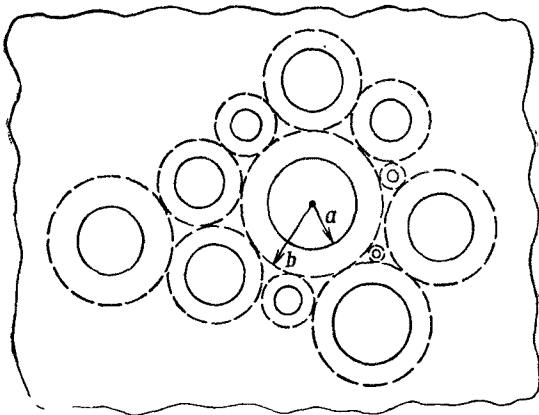


Рис. 2.2. Полидисперсная модель среды со сферическими включениями.

Такая модель была предложена Хашином [2.6]. Рассматривается непрерывная среда со сферическими включениями различного размера. Распределение размеров, однако, не случайное, а скорее имеет весьма частный характер. Схематически модель изображена на рис. 2.2. Штриховыми линиями на рис. 2.2 ограничены области матрицы, связанные с каждым отдельным включением. Отношение радиусов a/b принято постоянным для каждой такой составной частицы независимо от ее абсолютного размера. Поэтому распределение размеров частиц должно быть таким, чтобы весь объем был заполнен составными частицами с $a/b = \text{const}$. Очевидно, что это распределение требует, чтобы размеры частиц уменьшились до бесконечно малых.

Можно ожидать, что эта модель даст разумные результаты для реальных систем, которые имеют довольно широкое непрерывное распределение размеров включений. Почти очевидно, что от этой модели нельзя ожидать приемлемых результатов для систем, содержащих большие объемные доли включений одного размера. Общая применимость этой модели будет рассмотрена ниже. Сначала, однако, мы приступим к выводу оценок эффективных модулей.

Объемный модуль

Начнем с расчета свойств одной составной частицы. Затем рассмотрим обобщение полученного результата на представительный элемент объема. Пусть единичная составная частица на своей внешней границе подвержена действию гидростати-

ческого давления p :

$$\text{при } r = b \quad \sigma_{rr} = p. \quad (3.1)$$

На эквивалентную гомогенную сферическую частицу действует то же напряжение.

Перемещения на внешних границах составной и эквивалентной гомогенной сферических частиц приравниваются друг другу, обеспечивая тем самым одно и то же среднее объемное деформированное состояние внутри каждой из них. Эта процедура дает решение для эффективного объемного модуля единичной составной частицы.

Единственное уравнение равновесия, которому необходимо удовлетворить, имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad (3.2)$$

где $\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta}$. Уравнение (3.2) в перемещениях принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_r = 0. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.3) имеет вид

$$u_r = Ar + B/r^2.$$

Применяя это решение отдельно для включения и для матрицы, получим

$$u_{rI} = A_I r, \quad u_{rM} = A_M r + \frac{B_M}{r^2}, \quad (3.4)$$

где коэффициент B_I для включения должен равняться нулю во избежание сингулярности. Для соответствующих напряжений находим

$$\begin{aligned} \sigma_{rI} &= (3\lambda_I + 2\mu_I) A_I, \\ \sigma_{rM} &= (3\lambda_M + 2\mu_M) A_M - 4\mu_M \frac{B_M}{r^3}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Три константы интегрирования вычисляются из условий непрерывности

$$\text{при } r = a \quad u_{rI} = u_{rM}, \quad \sigma_{rI} = \sigma_{rM} \quad (3.6)$$

вместе с граничным условием (3.1). В результате получим

$$A_M = L \frac{p}{4\mu_M}, \quad (3.7)$$

$$\frac{B_M}{b^3} = -\frac{p}{4\mu_M} + \frac{3k_M}{4\mu_M} L \frac{p}{4\mu_M}, \quad (3.8)$$

$$A_I = A_M + \frac{B_M}{a^3}, \quad (3.9)$$

где

$$L = \frac{3k_I + 4\mu_M}{3(k_I - k_M)c + 9/4(k_I k_M / \mu_M) + 3k_M}. \quad (3.10)$$

Перемещения на внешней границе составной частицы, следовательно, имеют вид

$$u_{rM}|_{r=b} = A_M b + \frac{B_M}{b^2}. \quad (3.11)$$

Нетрудно показать, что для эквивалентной гомогенной частицы

$$u_r|_{r=b} = pb/3\hat{k}. \quad (3.12)$$

где \hat{k} — эффективный объемный модуль гомогенной частицы. Приравнявая (3.11) и (3.12), получим решение для k в следующем виде:

$$\hat{k} = k_M + \frac{c(k_I - k_M)}{1 + (1 - c)[(k_I - k_M)/(k_M + 4/3\mu_M)]}. \quad (3.13)$$

Теперь остается доказать, что решение (3.13) применимо ко всему представительному элементу объема, а не только к единичной составной частице. Сначала отметим, что то же самое давление p можно приложить ко всем составным частицам в представительном элементе объема. Таким образом, напряженное состояние непрерывно по всему представительному элементу объема и удовлетворяет уравнениям равновесия. Согласно теореме о минимуме дополнительной энергии разд. 1.1, только что описанное напряженное состояние является допустимым напряженным состоянием. Следовательно, энергия, вычисляемая для этого напряженного состояния, является верхней границей энергии действительного напряженного состояния в представительном элементе объема. Для изотропного материала, находящегося в состоянии объемного деформирования, выражение для локальной дополнительной энергии имеет вид

$$U = p^2/2k, \quad (3.14)$$

где p — гидростатическое напряженное состояние. Так как дополнительная энергия (3.14), связанная с допустимым напряженным состоянием, является оценкой сверху, то

$$1/k \leq 1/\hat{k}, \quad (3.15)$$

где теперь k — эффективный объемный модуль. Зная оценку k снизу, целесообразно найти и оценку сверху.

Изменим последовательность процедуры; вместо граничных условий в напряжениях на единичной составной частице используем условия в перемещениях. Затем решим задачу для эффективного объемного модуля \hat{k} составной частицы, потре-

бывав, чтобы осредненное деформированное состояние было идентичным в составной и эквивалентной гомогенной частицах. Предоставим читателю выполнить это в качестве упражнения.

Теперь заметим, что в совокупности с компонентой перемещения как жесткого тела поле перемещений для единичной составной частицы можно рассматривать как допустимое поле перемещений для представительного элемента объема (допустимого в смысле теоремы о минимуме потенциальной энергии разд. 1.1). Из этой теоремы следует, что эффективный объемный модуль \bar{k} единичной составной сферы представляет собой оценку сверху для объемного модуля представительного элемента объема

$$k \leq \bar{k}. \quad (3.16)$$

Выполнив описанную выше процедуру, получим, что $k = \bar{k}$. Таким образом, оценки совпали, и эффективный объемный модуль выражается в виде

$$\frac{k - k_M}{k_I - k_M} = \frac{c}{1 + [(1 - c)(k_I - k_M)/(k_M + \frac{4}{3}\mu_M)]}; \quad (3.17)$$

это выражение аналогично выражению (3.13), переписанному в иной форме.

Модуль сдвига

Определив эффективный объемный модуль для рассмотренной модели составных сфер, перейдем теперь к определению эффективного модуля сдвига для той же модели. Задача об определении μ , как уже отмечалось, должна быть более сложной, чем задача об определении k , так как первая представляет собой трехмерную задачу теории упругости, в то время как задача для k была одномерной. Тем не менее процедура нахождения μ в действительности основана на найденных в предыдущем разделе упругих решениях. Решение и обсуждение результатов подробно изложены в [2.6]. Как и в случае k , для нахождения верхней и нижней границ μ использованы теоремы теории упругости о минимуме потенциальной и дополнительной энергии. В противоположность ситуации с объемным модулем оценки модуля сдвига не совпадают, за исключением случаев очень малых и очень больших долей включений. Формула для малых объемных долей в точности совпадает с выведенной ранее формулой (2.23). Выражение для больших объемных долей имеет вид

$$\frac{\mu}{\mu_I} = 1 - \frac{(1 - \mu_M/\mu_I)[7 - 5\nu_M + 2(4 - 5\nu_M)\mu_I/\mu_M]}{15(1 - \nu_M)} c', \quad (3.18)$$

где $c' = 1 - c$; оно справедливо с точностью до членов первого порядка по c' .

То, что верхняя и нижняя оценки не совпадают в задаче о модуле сдвига, малоутешительно, но не удивительно. При детальном рассмотрении процедуры установлено, что в случае, когда на поверхности составной сферы задаются компоненты перемещения при чистом сдвиге, результирующие напряжения на границе не соответствуют напряженному состоянию при чистом сдвиге. Следовательно, когда на границе задаются напряжения чистого сдвига, результирующее деформированное состояние не соответствует чистому сдвигу. Таким образом, результатом являются только оценки μ , и чем больше несоответствие между μ_m и μ_l , тем больше расхождение между оценками. Очевидно, для получения точного решения или даже оценки эффективного модуля сдвига для описанной выше полидисперсной модели композита нужен другой подход. В настоящее время точное решение неизвестно. Разумное приближение к решению этой проблемы предлагается в следующем разделе.

2.4. ТРЕХФАЗНАЯ МОДЕЛЬ

Не добившись успеха в предыдущем разделе в поисках решения для эффективного модуля сдвига в рамках полидисперсной модели, испробуем другой подход.

Вновь обратимся к модели композита, изображенной на рис. 2.2. Теперь заменим все, за исключением одной, составные сферические частицы эквивалентной гомогенной средой, как показано на рис. 2.3. Представим, что бесконечная область подвергнута однородной деформации на большом расстоянии от начала координат. Внешний слой, будучи эквивалентной гомогенной средой, обладает неизвестными эффективными свойствами μ и k . Модель композита на рис. 2.3 эквивалентна эффективной гомогенной среде при условии, что энергия деформирования обеих систем одинакова при равенстве осредненных деформаций. В противоположность предыдущим задачам искомые эффективные свойства входят в обе задачи о критерии эквивалентности, а не только в задачу о нагружении эквивалентной гомогенной среды. Тем не менее задача поставлена правильно, и мы найдем ее решение. Перед этим, однако, рассмотрим соответствие трехфазной и полидисперсной моделей.

У нас нет гарантий того, что решения задачи для трехфазной модели на рис. 2.3 в точности описывают эффективные свойства композита, представленного полидисперсной моделью (рис. 2.2). Мы можем рассматривать это только как гипотезу и проверить ее на примере. В частности, в случае эффективного

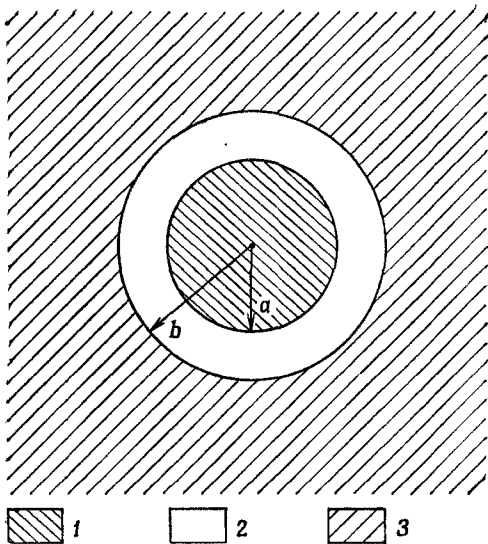


Рис. 2.3. Трехфазная модель: 1 — сферическое включение; 2 — фаза матрицы; 3 — эквивалентная однородная среда.

объемного модуля k мы знаем решение для полидисперсной модели композита. Оно представлено соотношением (3.17). Задачу для гетерогенной среды, изображенной на рис. 2.3, можно решить для объемного деформированного состояния и тем самым определить k для эквивалентной однородной среды. Необходимые выкладки рекомендуем проделать в качестве упражнения.

Установлено, что эффективные модули k для моделей композитной среды на рис. 2.3 и 2.2 идентичны, что внушает уверенность в тождественности моделей. С этим обнадеживающим результатом и перейдем к поиску решения для эффективного модуля сдвига модели, изображенной на рис. 2.3. Необходимо, однако, подчеркнуть, что остается открытым вопрос о том, является ли решение для μ для модели на рис. 2.3 решением и для модели композита на рис. 2.2. Можно лишь сказать, что полученные результаты точны для модели на рис. 2.3. Последняя представляет интерес сама по себе независимо от того, соответствует ли ее поведение при сдвиге поведению полидисперсной модели композита или нет. Наконец, перед тем как приступить к расчетам, необходимо упомянуть о том, что модель, изображенная на рис. 2.3, предложена Кернером [2.7] и Ван-дер-Полем [2.8]. Однако результаты, выведенные здесь, отличаются от

результатов этих двух работ. Как показано далее, в [2.7] и [2.8] содержатся некоторые ошибки и необоснованные допущения.

Метод решения задачи для модели, показанной на рис. 2.3, прямо следует решению для упругих сред с малой объемной долей сферических частиц, рассмотренному в разд. 2.2. В частности, решения (2.3) используются для условий деформации чистого сдвига на большом расстоянии от начала координат. Функции $U_r(r)$, $U_\theta(r)$, $U_\varphi(r)$, как установлено из решения уравнений равновесия, имеют вид (2.10). Отдельно следует рассматривать решения для трех областей, показанных на рис. 2.3. В частности, получим

$$U_{rI} = A_1 r - \frac{6\nu_I}{1-2\nu_I} A_2 r^3, \quad (4.1)$$

$$U_{\theta I} = A_1 r - \frac{7-4\nu_I}{1-2\nu_I} A_2 r^3,$$

$$U_{rM} = B_1 r - \frac{6\nu_M}{1-2\nu_M} B_2 r^3 + \frac{3B_3}{r^4} + \frac{5-4\nu_M}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{r^2}, \quad (4.2)$$

$$U_{\theta M} = B_1 r - \frac{7-4\nu_M}{1-2\nu_M} B_2 r^3 - \frac{2B_3}{r^4} + \frac{2}{r^2} B_4$$

и, наконец, в третьей фазе, образованной эквивалентной гомогенной средой,

$$U_{rE} = D_1 r + \frac{3D_3}{r^4} + \frac{5-4\nu}{1-2\nu} \frac{D_4}{r^2}, \quad (4.3)$$

$$U_{\theta E} = D_1 r - \frac{2D_3}{r^4} + \frac{2D_4}{r^2},$$

где, напомним из разд. 2.2, $U_\varphi = -U_\theta$. Коэффициент Пуассона ν , входящий в (4.3), и есть эффективное свойство нужного типа для эквивалентной гомогенной среды. Константа D_1 в (4.3) рассматривается как заданная из условия наложения деформированного состояния чистого сдвига на большом расстоянии от начала координат. Остается определить восемь констант. Условия непрерывности напряжений и перемещений на двух границах раздела фаз обеспечивают требуемые восемь соотношений. Четыре соотношения, полученные из условий непрерывности при $r = a$, уже установлены (уравнения (2.13)–(2.16)). Оставшиеся четыре соотношения получаются из условий непрерывности при $r = b$, т. е. на поверхности раздела между матрицей и эф-

фактивной гомогенной средой. Эти уравнения имеют вид

$$bB_1 - \frac{6\nu_M}{1-2\nu_M} b^3 B_2 + \frac{3}{b^4} B_3 + \frac{5-4\nu_M}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{b^2} = bD_1 + \frac{3}{b^4} D_3 + \frac{5-4\nu}{1-2\nu} \frac{D_4}{b^2}, \quad (4.4)$$

$$bB_1 - \frac{7-4\nu_M}{1-2\nu_M} b^3 B_2 - \frac{2}{b^4} B_3 + \frac{2}{b^2} B_4 = bD_1 - \frac{2}{b^4} D_3 + \frac{2}{b^2} D_4; \quad (4.5)$$

$$\lambda_M \left(21b^2 B_2 - \frac{6}{b^3} B_4 \right) + 2\mu_M \left(B_1 - \frac{18\nu_M}{1-2\nu_M} b^2 B_2 + \frac{12}{b^5} B_3 - \right. \\ \left. - 2 \frac{5-4\nu_M}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{b^3} \right) = -6\lambda \frac{D_4}{b^3} + 2\mu \left(D_1 - \frac{12}{b^5} D_3 - \frac{2(5-4\nu)}{1-2\nu} \frac{D_4}{b^3} \right), \quad (4.6)$$

$$\mu_M \left(B_1 - \frac{7+2\nu_M}{1-2\nu_M} b^2 B_2 + \frac{8}{b^5} B_3 + \frac{2(1+\nu_M)}{1-2\nu_M} \frac{B_4}{b^3} \right) = \\ = \mu \left(D_1 + \frac{8D_3}{b^5} + \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \frac{D_4}{b^3} \right), \quad (4.7)$$

где λ , μ и ν — эффективные свойства, причем только два из них являются независимыми. Решение этих уравнений приводится ниже.

Применим вариант формулы Эшелби (I-4.26) с заданными перемещениями для вычисления энергии деформирования, запасаемой трехфазной средой, показанной на рис. 2.3. Переписанная здесь для удобства формула (I-4.26) имеет вид

$$U_{\text{COMP}} = U_0 + \frac{1}{2} \int_S (\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i) ds, \quad (4.8)$$

где поверхность S — поверхность раздела $r = b$, а U_0 — энергия деформирования, запасаемая эквивалентной гомогенной средой. Критерий для определения эффективных свойств заключается в том, что мы полагаем, что энергии, запасенные в композите и эквивалентной гомогенной среде (ЕН) равны:

$$U_{\text{COMP}} = U_{\text{ЕН}}, \quad (4.9)$$

но, как обсуждалось ранее, правая часть (4.9) соответствует U_0 ; учитывая это, преобразуем (4.8) к виду

$$\int_S (\sigma_i u_i^0 - \sigma_i^0 u_i) ds = 0. \quad (4.10)$$

Следуя в точности той же процедуре, что и в разд. 2.2, используем соответствующие выражения для напряжений и деформаций; тогда из (4.10) получим очень простой результат:

$$D_4 = 0. \quad (4.11)$$

Рассматриваемая задача сводится к решению системы восьми уравнений (2.13) — (2.16) и (4.4) — (4.7) для D_4 . Полученное решение полагается равным нулю. Это дает критерий для определения эффективного модуля сдвига μ . Установлено, что в процессе решения сокращаются константы λ и ν , остается только одно неизвестное μ . Эффективный модуль сдвига μ находится из следующего квадратного уравнения:

$$A \left(\frac{\mu}{\mu_M} \right)^2 + 2B \left(\frac{\mu}{\mu_M} \right) + C = 0, \quad (4.12)$$

где

$$A = 8 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) (4 - 5\nu_M) \eta_1 c^{10/3} - 2 \left[63 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] c^{7/3} + \\ + 252 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) \eta_2 c^{5/3} - 25 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) (7 - 12\nu_M + 8\nu_M^2) \eta_2 c + \\ + 4(7 - 10\nu_M) \eta_2 \eta_3, \quad (4.13)$$

$$B = -2 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) (1 - 5\nu_M) \eta_1 c^{10/3} + 2 \left[63 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] c^{7/3} - \\ - 252 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) \eta_2 c^{5/3} + 75 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) (3 - \nu_M) \eta_2 \nu_M c + \\ + \frac{3}{2} (15\nu_M - 7) \eta_2 \eta_3, \quad (4.14)$$

$$C = 4 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) (5\nu_M - 7) \eta_1 c^{10/3} - 2 \left[63 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] c^{7/3} - \\ - 252 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) \eta_2 c^{5/3} + 25 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) (\nu_M^2 - 7) \eta_2 c - 4(7 + 5\nu_M) \eta_2 \eta_3, \quad (4.15)$$

причем

$$\eta_1 = (49 - 50\nu_I \nu_M) \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 1 \right) + 35 \frac{\mu_I}{\mu_M} (\nu_I - 2\nu_M) + 35(2\nu_I - \nu_M), \\ \eta_2 = 5\nu_I \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} - 8 \right) + 7 \left(\frac{\mu_I}{\mu_M} + 4 \right), \quad (4.16) \\ \eta_3 = \frac{\mu_I}{\mu_M} (8 - 10\nu_M) + (7 - 5\nu_M).$$

Здесь, как всегда, $c = (a/b)^3$ характеризует объемную долю включений.

Можно показать, что конечный результат (4.12) сводится к ранее выведенной формуле (2.23) для упругой среды с малой объемной долей упругих сферических включений. Этот вывод демонстрирует большую полезность формул Эшелби (1-4.25),

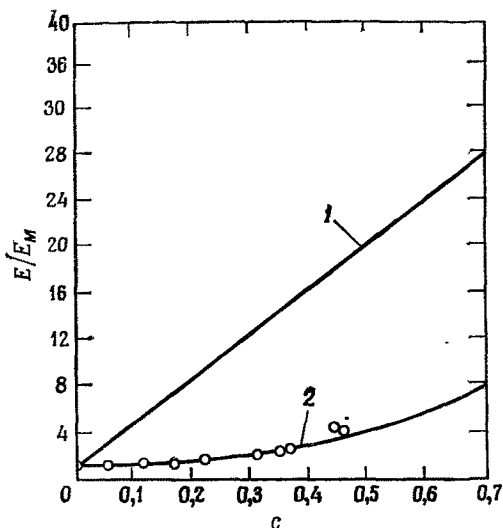


Рис. 2.4. Эффективный модуль композита — стеклянные микросферы ($d = 210-297$ мкм) в полиэфирной матрице. 1 — правило смеси; 2 — модуль E определяется по формуле $E = 9k\mu/(3k + \mu)$, k из уравнения (3.17), μ из уравнения (4.12); \circ — экспериментальные данные [2.9], $E_1/E_M = 40,8$; $\nu_1 = 0,21$; $\nu_M = 0,45$.

(I-4.26) для вычисления энергии деформирования только путем интегрирования по поверхности. Отметим, что в данной задаче было невозможно воспользоваться простой формулой (1.12) для вычисления эффективного модуля сдвига, так как включение образовано здесь двумя фазами и поэтому однородное деформированное состояние не реализуется. Наконец, важно отметить внутреннюю согласованность данного вывода. Напомним, что при определении эффективного объемного модуля k для полидисперсной модели композита решение для k было найдено в форме, не связанной с другим свойством, скажем μ . Полностью аналогичная ситуация возникает и в данном выводе; μ было определено в форме, не связанной с k . Это дает косвенную поддержку той точки зрения, что данный результат может быть точным решением для эффективного модуля сдвига полидисперсной модели композита. Однако в данной ситуации с определенностью можно сказать, что найдено решение для модели, изображенной на рис. 2.3.

Экспериментальные данные для композита, состоящего из непрерывной матрицы и сферических частиц наполнителя, были получены Ричардом [2.9]. Измерялся эффективный модуль E

при одноосном нагружении. С целью сравнения экспериментальных данных с теоретическим предсказанием выразим эффективный модуль E через эффективный модуль сдвига из формулы (4.12) и эффективный объемный модуль из (3.17):

$$E = 9k\mu / (3k + \mu).$$

Результаты показаны на рис. 2.4. Композитный материал состоял из стеклянных микросфер, внедренных в полиэфирную матрицу. Диапазон размеров стеклянных сфер 210—297 мкм в диаметре. На рис. 2.4 показано также предсказание по правилу смесей, которое, как видно из рисунка, оказывается неприемлемым.

При написании данного раздела использована работа Кристенсена и Ло [2.10]. Очень схожий с [2.10] подход предложен Смитом [2.11, 2.12]. В его работах, однако, сделано необоснованное допущение, которое отсутствует в данном подходе, в частности в [2.11, 2.12] полагалось, что коэффициент D_4 в уравнениях (4.3) равен нулю. В данном подходе такое допущение отсутствует; вернее, этот результат доказан. Кроме того, эта же задача изучалась также Кернером [2.7] и Ван-дер-Полем [2.8]. Их результаты отличаются от полученного здесь. В последней работе имеется конкретная ошибка в выкладках. В работе Кернера из-за сжатости вывода нельзя установить ошибку точно. Однако конечная формула решения Кернера наводит на мысль о том, что сделанное предположение об однородной сдвиговой деформации включения опровергается данной работой.

2.5. МЕТОД САМОСОГЛАСОВАНИЯ

Две наиболее часто применяемые модели поведения макроскопически изотропной среды — это полидисперсная модель композита и модель с использованием метода самосогласования. Ниже описывается и оценивается последняя из этих моделей.

Расчетная схема по методу самосогласования была разработана Хершеем [2.13] и Крёнером [2.14] применительно к описанию поведения поликристаллических материалов. Такие материалы действительно однофазны, но благодаря случайной или частично случайной ориентации кристаллитов в них существуют скачкообразные изменения свойств при переходе через границы кристаллитов. Таким образом, свойства меняются скачком при переходе от точки к точке, что является признаком неоднородной среды частного типа.

При применении метода к поликристаллическим агрегатам единичный анизотропный кристаллит рассматривается как сферическое или эллипсоидальное включение, внедренное в бесконечную среду с неизвестными изотропными свойствами агрега-

та. Затем система подвергается действию однородного напряжения или деформации на большом расстоянии от включения. Далее ориентационно среднее напряжение или деформация во включении полагается равным соответственно значению приложенного напряжения или деформации. Эта процедура и дала название методу.

В результате получим уравнения, из которых можно определить эффективные изотропные свойства. Метод фактически сводится к получению системы уравнений, которые должны быть решены для μ и k . Полная процедура требует на некоторой стадии применения численных методов и вначале была выполнена для случая сферической границы.

Развитие расчетной схемы по методу самосогласования для многофазной среды было дано Хиллом [2.15] и Будянским [2.16]. Будянский [2.16] предложил простую геометрическую интерпретацию этого метода. В частности, каждая фаза композита поочередно рассматривается как взятая целиком в виде единичного эллипсоидального включения в бесконечной матрице с неизвестными эффективными свойствами. Использование однородных условий для напряжений или деформаций на бесконечности позволяет определить соответствующие осредненные поля во включении. После того как эта операция выполнена для всех фаз, осредненные поля известны во всех фазах через свойства этих фаз и эффективные свойства. Таким образом, зная осредненные поля в собственно композите, можно определить эффективные модули. Как и в случае поликристалла, находится система уравнений, подлежащая решению для μ и k через свойства индивидуальных фаз и их объемные доли. Несмотря на кажущуюся простоту, применение метода для расчета свойств многофазной среды встречает некоторые затруднения.

Симптомы трудности можно наблюдать в случаях жестких включений и полостей. Как отмечено Будянским [2.16], в случае полостей предсказанный эффективный модуль сдвига имеет вид

$$\mu = \frac{3(1-2c)}{1-c} \mu_M, \quad (5.1)$$

где c — объемная доля пор, тогда как для жестких включений в несжимаемой матрице

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mu_M}{1-\frac{5}{2}c}, & 0 \leq c \leq \frac{2}{5}, \\ \mu &= \infty, & \frac{2}{5} \leq c \leq 1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где c — теперь объемная доля жестких включений. Таким образом, μ становится равным нулю при объемной доле $c \equiv 1/2$ в случае пустот и бесконечным при объемной доле $c = 2/5$ в случае жестких включений.

Ясно, что такие странные результаты связаны с применением расчетной схемы по методу самосогласования к многофазной среде. Этот результат не слишком удивителен, так как метод чрезмерно произволен в отношении геометрических характеристик модели композита. Поскольку необходимо вычислить средние поля для каждой фазы, геометрические характеристики последовательно изменяются для рассмотрения данной фазы как включения, даже если в действительности фаза полностью непрерывна. Конечно, расчетная схема никоим образом не является геометрической моделью материала; это только удобная и привлекательная схема операций, которая, к сожалению, дает ошибочные результаты¹⁾. Несмотря на эти несоответствия, расчетная схема по методу самосогласования довольно часто применяется для расчета свойств многофазной среды с одним лишь явным оправданием, заключающимся в ее простоте. Однако точка зрения, принятая здесь, состоит в том, что расчетная схема по методу самосогласования не отображает реальное поведение многофазной композитной среды, и в дальнейшем в связи с обсуждением поведения многофазной среды ссылки на нее не делаются.

Ситуация по отношению к однофазной среде существенно иная. Для однофазной поликристаллической среды метод самосогласования не связан с большим произволом в отношении геометрических характеристик, и это уже действительно геометрическая модель. Конечно, в применении к поликристаллическим материалам метод представляется весьма разумным. Действительно, трехфазная геометрическая модель предыдущего раздела представляет собой многофазный аналог модели однофазной среды, рассчитываемой по схеме с использованием метода самосогласования. Трехфазную модель иногда называют схемой расчета по методу самосогласования, внося тем самым путаницу. Сохраним термин *схема расчета по методу самосогласования* для процедуры, описанной в данном разделе.

2.6. МОДЕЛЬ СРЕДЫ С ОБЪЕМНОЙ ДОЛЕЙ ВКЛЮЧЕНИЙ, БЛИЗКОЙ К ПРЕДЕЛЬНОЙ

Рассмотрим среду со сферическими включениями одного размера, объемная доля которых близка к максимальному значению. Это особенно трудная задача, и мы не сможем получить точное решение, как это было сделано для предыдущих моделей. По существу, придется использовать асимптотические ме-

¹⁾ Другая схема, дающая лучшие результаты, обсуждалась Мак-Лафлином [2.17] на основе более ранних работ.

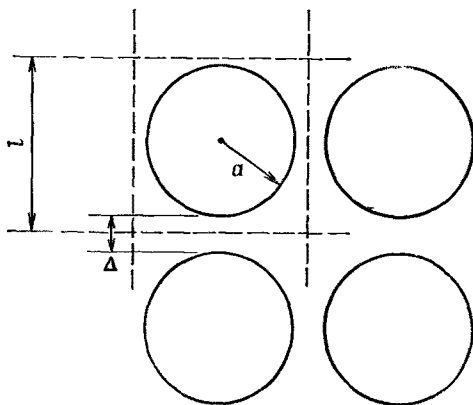


Рис. 2.5. Кубическая упаковка включений

тоды и применить некоторые приближения. Такой подход тем не менее вполне обоснован и позволит получить ценные результаты.

Ограничимся только случаем абсолютно жестких сферических включений одного размера в несжимаемой непрерывной среде (матрице). Будем решать задачу определения эффективной характеристики сдвига. Постановка этой задачи одинакова как для упругой матрицы, так и для вязкой жидкости. Изложим результаты решения упругой задачи, следуя выводу, приведенному Франкелем и Акривосом [2.18] для вязкой жидкости. Эти выводы иллюстрируют двойственность подходов. Необходимо добавить, что интерпретация результатов в случае вязкой жидкости требует введения некоторых ограничений, которые подробно обсуждаются в следующем разделе.

Для постановки математической задачи применительно к системе с большой объемной долей включений необходимо задаться их упаковкой. Рассмотрим кубическую упаковку сферических частиц одного размера. Выбор именно кубической упаковки с объемной долей частиц $c_{\max} = \pi/6$ обусловлен тем, что практически важные неплотноупакованные системы обычно содержат объемную долю частиц немного более $1/2$ (см., например, книгу Хаппеля и Бреннера [2.19]).

Рассмотрим структуру, изображенную на рис. 2.5. При объемных долях, близких к максимальным, сферические частицы почти касаются друг друга. В этих условиях область, в пределах которой встречаются состояния значительных деформаций, как раз и относится к местам, где сферы почти касаются друг друга. Вначале необходимо установить основные геометрические

параметры модели. Из рис. 2.5 видно, что

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{l}{a} - 2, \quad (6.1)$$

где l — сторона куба или размер ячейки, используемой для моделирования среды. Отношение l/a можно выразить через объемную долю частиц c следующим образом:

$$\left(\frac{a}{l}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c_{\max}}\right)^{1/3}, \quad (6.2)$$

где максимальная объемная доля включений при кубической упаковке

$$c_{\max | \text{cub}} = \pi/6.$$

Состояние деформации сдвига определяется выражениями

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = -\varepsilon. \quad (6.3)$$

Для рассматриваемой гетерогенной среды это состояние осредненной деформации определится требованием, чтобы сферы подвергались относительному перемещению u в одном направлении и в то же время относительному перемещению $-u$ в перпендикулярном направлении. Осредненная деформация равна $\varepsilon = u/l$. Кроме того, максимальная деформация сдвига e также равна u/l .

Как и ранее, определение эффективного модуля сдвига заключается в приравнивании энергий деформирования, запасаемых гетерогенной средой и эквивалентной гомогенной средой. Для единичного куба на рис. 2.5 энергия деформирования записывается в следующем виде:

$$U = \mu l^3 \left(\frac{u}{l}\right)^2, \quad (6.4)$$

где μ — эффективный модуль сдвига. Далее необходимо определить энергию деформирования гетерогенной среды.

Найти точное аналитическое решение задачи, изображенной на рис. 2.5, очень трудно. Используем приближение теории смазки для замены краевой задачи с границами, изображенными на рис. 2.5, более простой задачей. В терминах механики жидкости сдвиговое течение жидкости с относительным скольжением между непараллельными границами идеализируется как локальное простое сдвиговое течение, определяемое расстоянием между поверхностями в каждой точке. Сущность этого приближения допускает нарушение одного из двух балансов, выраженных уравнениями импульсов в двумерной задаче. Поскольку изменение толщины зазора на большом протяжении сравнимо с толщиной зазора, то приближение оказывается удовлетворительным. Более детальное описание приведено у

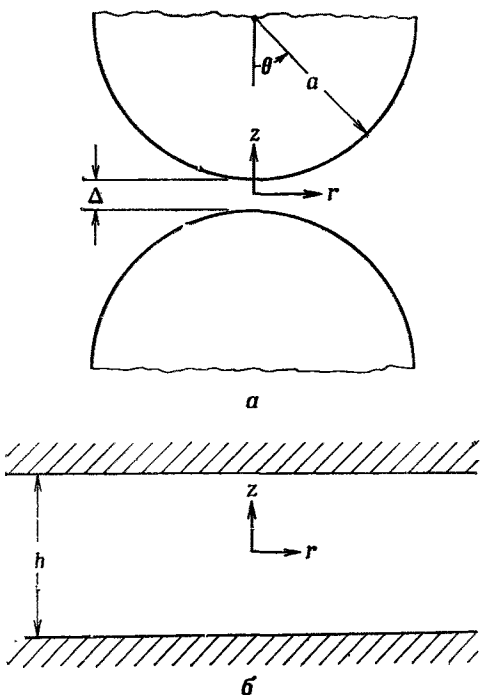


Рис. 2.6. Модель среды с объемной долей сферических включений, близкой к предельной.

Бэтчелора [2.20]. Общий метод приближения теории смазки можно успешно применить в данной задаче, включающей относительное коаксиальное перемещение сфер, сдерживаемое упругой средой.

Расчетная схема изображена на рис. 2.6, а, но поскольку для решения мы применяем методы теории смазки, рассмотрим вначале простейшую задачу (рис. 2.6, б) с параллельными границами. В цилиндрических координатах задача определяется условиями

$$\text{при } z = \pm h/2 \quad u_z = \pm u/2, \quad u_r = 0, \quad (6.5)$$

где u — относительное перемещение границ. Так как среда несжимаема, должно выполняться условие

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 0, \quad (6.6)$$

где компоненты деформации выражены через компоненты перемещений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_M \nabla^2 u_r = 0, \quad (6.8)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_M \nabla^2 u_z = 0, \quad (6.9)$$

где p — гидростатическое давление, поддерживаемое несжимаемой матрицей, и μ_M — модуль сдвига матрицы. Следуя Ландау и Лифшицу [2.21], в задаче данного типа полагаем $u_z \ll u_r$ и $\partial u_r / \partial r \ll \partial u_r / \partial z$; таким образом, уравнения равновесия примут вид

$$\mu_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (6.11)$$

Решение определяющих уравнений (6.6), (6.10) и (6.11), удовлетворяющее граничным условиям (6.5), имеет вид

$$u_r = \frac{3}{4} \left(\frac{u}{h} \right) r \left(\frac{4z^2}{h^2} - 1 \right), \quad (6.12)$$

$$u_z = -\frac{3}{2} \left(\frac{u}{h} \right) \left(\frac{4z^3}{3h^2} - z \right).$$

Обозначим локальную энергию деформирования через w . В общем виде w имеет вид

$$w = \mu_M \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (6.13)$$

Для дальнейших целей удобно взять интеграл от w по толщине. Используя соотношения (6.7) и решение (6.12), можно получить

$$\int_0^{h/2} w \, dz = \frac{9\mu_M}{10} \left(\frac{u}{h} \right)^2 h + \frac{3\mu_M}{8} \left(\frac{u}{h} \right)^2 \frac{r^2}{h}, \quad (6.14)$$

где последний член обусловлен сдвиговой компонентой деформации.

Для получения упругого аналога решения методом теории смазки предполагается, что решение (6.14) соответствует задаче, иллюстрируемой рис. 2.6, а, в связи с чем толщина h полагается в качестве текущего размера зазора на рис. 2.6, а, т. е.

$h = h(r)$. Общая энергия в четырех четвертях зазора (по одной четверти зазора на один куб) примет вид

$$U = 8\pi\mu_M \int_0^a \left[\frac{9}{10} \left(\frac{u}{h} \right)^2 h + \frac{3}{8} \left(\frac{u}{h} \right)^2 \frac{r^2}{h} \right] r dr, \quad (6.15)$$

где

$$\frac{h}{2} = \left(\frac{\Delta}{2} + a \right) - a \cos \theta \quad (6.16)$$

и θ — угол, обозначенный на рис. 2.6, а. Координата r выражается соотношением

$$r = a \sin \theta. \quad (6.17)$$

Наша цель состоит в том, чтобы определить характер энергетического члена U в пределе при исчезающе малом зазоре Δ между сферами. Из (6.15) видно, что первый член в подынтегральном выражении (6.15) более высокого порядка по сравнению со вторым членом, когда $\Delta \rightarrow 0$ для $\theta = 0$, поэтому первым членом пренебрежем. Объединяя модифицированное соотношение (6.15) с (6.16) и (6.17), получим

$$U = \frac{3\pi}{8} \mu_M u^2 a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}{(\Delta/2a + 1 - \cos \theta)^3}. \quad (6.18)$$

После интегрирования остается только член, дающий сингулярность при $\Delta \rightarrow 0$:

$$U = \frac{3\pi}{4} \mu_M u^2 a \left(\frac{a}{\Delta} \right). \quad (6.19)$$

В заключение приравниваем энергию гетерогенной среды (6.19) к энергии эквивалентной однородной среды (6.4); при этом получим

$$\frac{\mu}{\mu_M} = \frac{3\pi}{4} \left(\frac{a}{l} \right) \left(\frac{a}{\Delta} \right). \quad (6.20)$$

Члены a/Δ и a/l описываются выражениями (6.1) и (6.2), которые после объединения с (6.20) дают

$$\frac{\mu}{\mu_M} = \frac{3\pi}{16 [1 - (c/c_{\max})^{1/3}]}, \quad (6.21)$$

где (6.21) имеет смысл только при $c \rightarrow c_{\max}$ из-за введенных аппроксимаций, связанных с $\Delta \rightarrow 0$.

Таким образом, установлена природа эффективного модуля сдвига для среды с жесткими сферическими включениями при $c \rightarrow c_{\max}$. Мы, конечно, знаем, что для этой идеализации $\mu \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow c_{\max}$, однако соотношение (6.21) указывает порядок сингулярности. В строгом смысле соотношение (6.21) применимо

для описания деформированного состояния только рассмотренной системы, так как кубическая упаковка не изотропна. Но это отличие, вероятно, несущественно при практической оценке соотношения (6.21) с учетом других введенных упрощений.

Соответствующая задача для суспензий имеет лишь тривиальные отличия. Перемещения надо заменить скоростями и модуль сдвига — вязкостью. Результат (6.21) как для твердого тела, так и для жидкости применим только для кубической упаковки с $c_{\max} = \pi/6$. Франкель и Акривос [2.18] рассмотрели другую конфигурацию ячейки.

Практическая оценка результата (6.21) дана в следующем разделе.

2.7. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В предыдущих разделах исследовались модели для использования применительно к композитным системам со сферическими частицами. Как было показано, полидисперсная модель композита и соответствующая модель из разд. 2.4 — единственные модели, для которых имеется полностью обоснованная аналитическая характеристика. Эти модели схватывают весь диапазон изменения объемных долей в том смысле, что содержание включений c может принимать любое значение на отрезке $0 \leq c \leq 1$.

Такие модели хорошо описывают тип композитного материала со сферическими частицами наполнителя различного размера. Что касается других случаев, например случая сферических частиц одного размера, то возникает вопрос о том, можно ли их описать полидисперсной моделью. Ответ должен быть определенным, а именно положительным, при условии что объемная доля частиц не близка к максимальной объемной доле частиц в агрегированной форме. Как показано на рис. 2.4, полидисперсная модель композита и связанная с ней модель из разд. 2.4 дают довольно точную оценку экспериментально измеренного эффективного модуля при одноосном нагружении для объемной доли в промежутке между $c = 0,45$ и $0,50$. Если учесть, что это ненамного ниже объемной доли для рыхлой (кубической) упаковки сфер одинакового размера, применимость модели (моделей) в отмеченной области производит благоприятное впечатление. Однако точные границы областей применимости таких моделей для всех композитных систем установить нельзя. Возможные отклонения зависят не только от объемной доли, но также и от свойств каждой фазы. Тем не менее полидисперсная модель композита описывает поведение многих систем, представляющих практический интерес.

Необходимо отметить, что полидисперсная модель композита описывает поведение разнообразных композитных систем не

только с частицами точно сферической формы. Пока форма частиц незначительно отличается от сферической, от модели можно ожидать приемлемых предсказаний. Эта гибкость модели обусловлена тем, что эффективные свойства связаны с макроскопически средними напряжениями и деформациями, которые сами по себе в большей мере зависят от объемных долей различных фаз, чем от тонких деталей локальной геометрии фаз. Конечно, хотя эта гибкость применения модели и ограничена, другой подходящей модели для описания систем с частицами, близкими по форме к сферическим, нет

Маловероятно, что будет выведен в замкнутом виде теоретический результат для модели среды со сферическими включениями одинакового размера, применимый во всем диапазоне объемных долей. В предшествующем разделе описано поведение эффективного модуля сдвига среды с объемной долей сферических включений, близкой к максимальной. Однако представляет интерес установить, насколько хорошо выражение (6.21) моделирует экспериментальные данные. Как уже упоминалось, соотношение (6.21) применимо как в случае твердого упругого тела, так и в случае вязкой жидкости. Так как рассматривались абсолютно жесткие включения, вероятно, в случае жидкости характеристика сдвига предсказывается более точно.

Тщательно проверенные данные по эффективной вязкости, полученные Кригером [2.22], приведены на рис. 2.7. Там же представлены результаты расчета по формуле (6.21) для кубической упаковки при $c_{\max} = \pi/6$. Совпадение исключительно хорошее. Формула выведена в приближении, которое дает строгий результат только в пределе при $c \rightarrow c_{\max} = \pi/6$, т. е. (6.21) имеет смысл только для объемных долей, близких к максимальным. Поэтому хорошее соответствие между расчетом и экспериментом при объемных долях, намного меньших c_{\max} , — это лишь удачное совпадение.

Остается только проблема поиска выражений, описывающих экспериментальные результаты, такие, как на рис. 2.7, во всей области объемных долей. Рассмотрим, например, эмпирическое выражение

$$\frac{\mu}{\mu_M} = \frac{2+c}{2(1-2c)}. \quad (7.1)$$

Это выражение дает неограниченные значения μ при $c = 1/2$, т. е. вблизи предельной объемной доли для кубической упаковки, что представляется реалистическим. Более того, выражение (7.1) правильно вырождается в формулу Эйнштейна в случае разбавленных суспензий. Сравнение выражения (7.1) и экспериментальных данных на рис. 2.7 дает благоприятные результаты.

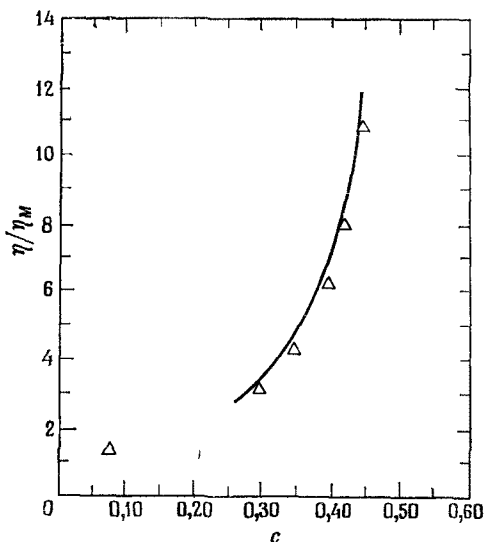


Рис. 2.7. Эффективная вязкость жидкости со сферическими включениями одинакового размера. Кривая соответствует уравнению (6.21). Δ — экспериментальные данные из [2.22].

Можно применять эту или любую другую эмпирическую формулу. Однако необходимо проявлять осторожность, так как такие выражения не имеют фундаментального обоснования и могут ввести в заблуждение в частных приложениях.

Наконец, необходимо упомянуть о некоторых особенностях, касающихся суспензий. Мы использовали двойственность задач для упругого твердого тела и для вязкой жидкости. Вспомним, что это основа только для линейно-упругого расчета при малых деформациях. Сходное ограничение можно сделать в отношении задачи для суспензии, чтобы результаты двух аналогичных расчетов были взаимозаменяемыми. С другой стороны, в задаче о суспензиях имеется фундаментальная неопределенность, связанная с относительным положением частиц. Задача непрерывно текущей суспензии изучалась Бэтчелором и Грином [2.23] на уровне, учитывающем взаимодействие двух сферических частиц, переносимых ньютоновской вязкой жидкостью. Они нашли фундаментальную неопределенность, упомянутую выше, из которой следовало, что суспензия не изотропна, а следовательно, возможны *неньютоновские эффекты*. Это означает, что эффективная вязкость зависит от скорости сдвига, а также что существует эффект нормальных напряжений при простом сдвиговом те-

чении. Несмотря на эти осложнения, Бэтчелор и Грин оценили эффективную вязкость при нулевой скорости сдвига вплоть до порядков c^2 и вывели выражение

$$\frac{\mu}{\mu_M} = 1 + \frac{5}{2}c + (5,2 \pm 0,3)c^2 + O(c^3). \quad (7.2)$$

В обширных исследованиях Чен и Акривос [2.24, 2.25] уточнили, что коэффициент при c^2 , входящий в (7.2), равен 5,01. Интересно отметить, что разложение эмпирического выражения (7.1) имеет вид

$$\frac{\mu}{\mu_M} = 1 + \frac{5}{2}c + 5c^2 + O(c^3). \quad (7.3)$$

Это подкрепляет мнение, что выражение (7.1) имеет по крайней мере практическое значение.

Неньютоновские эффекты, упомянутые выше, играют существенную роль в поведении суспензий. Данные Кригера, показанные на рис. 2.7, относятся к эффективной вязкости при нулевой скорости сдвига, но как только скорость сдвига возрастает, то, как установлено, происходит сдвиговое разжижение и значения вязкости изменяются. До сих пор мы обсуждали только суспензии сферических частиц и установили наличие существенных усложнений. В поведении суспензий частиц, форма которых отличается от сферической, неньютоновские эффекты, по-видимому, преобладают. Конечно, неньютоновские эффекты сами по себе не фундаментальны, а скорее являются признаками фундаментальных эффектов. Агломерация и ориентация потока частиц с одновременной анизотропией тоже являются признаками других фундаментальных эффектов. Эти эффекты могут быть строго гидродинамическими или другой природы. Например, броуновское движение и электрические силы относятся к отмеченным эффектам и обычно становятся более существенными с уменьшением размеров частиц. В масштабе коллоидов подобные эффекты имеют первостепенное значение. Однако нас интересуют системы, масштаб длины в которых больше коллоидного, и мы не будем подробно касаться таких эффектов.

ЗАДАЧИ

1. Выведите формулу Эшелби (I-4.26) для случая, когда заданы граничные условия в перемещениях.
2. Докажите, что в выводе формул Эшелби (I-4.25, 4.26) внутренние силы с энергией, обозначенной через U_0 , распределены только по поверхности границы включения, а не внутри области.
3. Решите задачу об эффективном объемном модуле для полидисперсной модели при заданных перемещениях.

4. Решите задачу об эффективном объемном модуле для трехфазной модели из разд. 2.4. Убедитесь, что этот результат идентичен результату для полидисперсной модели.
5. Можно ли обобщить полидисперсную модель композита на случай N -фазного материала? Рассмотрите как точные решения, так и верхнюю и нижнюю оценки эффективных свойств.
6. Используйте полидисперсную модель композита для вычисления объемного модуля вспененного материала, содержащего пустоты. Какую модель следует использовать для определения эффективного модуля сдвига вспененного материала? Учитывает ли эта модель изгиб стенок пор? Если нет, то как вы учтете такие эффекты?
7. Выведите формулу для объемной доли сфер при гексагональной упаковке. Сравните с результатом для кубической упаковки. Как определить распределение размеров сфер, требуемое для полидисперсной модели композита?
8. Примените расчет из разд. 2.6 для нахождения эффективного модуля сдвига композита с гексагональной упаковкой жестких сфер одинакового размера в несжимаемой матрице. Сравните результат с экспериментальными данными [2.22].

ЛИТЕРАТУРА

- 2.1. Cowin S. C. Effective stress-strain relations for finitely deformed inhomogeneous bodies. — *Mech. Res. Commun.*, 1977, v. 4, p. 163.
- 2.2. Russel W. B., Acrivos A. On the effective moduli of composite materials: slender rigid inclusions at dilute concentrations. — *Z. Angew. Math. und Phys.*, 1972, v. 23, p. 434.
- 2.3. Eshelby J. D. The Determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. — *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1957, v. A241, p. 376.
- 2.4. Dewey J. M. The elastic constants of materials loaded with non-rigid fillers. — *J. Appl. Phys.*, 1947, v. 18, p. 578.
- 2.5. Эйнштейн А. Новое определение размеров молекул. — *Собр. научн. тр.*, т. 3. — М.: Наука, 1966, с. 75—91.
- 2.6. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. — *J. Appl. Mech.*, 1962, v. 29, p. 143. [Имеется перевод: *Прикладная механика*. — М.: Мир, 1962, № 1, с. 159—167.]
- 2.7. Kerner E. H. The elastic and thermoelastic properties of composite media. — *Proc. Phys. Soc.*, 1956, v. 69, p. 808.
- 2.8. Van der Pol C. On the rheology of concentrated dispersions. — *Rheol. Acta*, 1958, v. 1, p. 198.
- 2.9. Richard T. G. The mechanical behavior of a solid microsphere filled composite. — *J. Comp. Mater.*, 1975, v. 9, p. 108.
- 2.10. Christensen R. M., Lo K. H. Solutions for effective shear properties in three phase and cylinder models. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1979, v. 27, No. 4.
- 2.11. Smith J. C. Correction and extension of van der Pol's method for calculating the shear modulus of a particulate composite. — *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 1974, v. 78A, p. 355.
- 2.12. Smith J. C. Simplification of van der Pol's formula for the shear modulus of a particulate composite. — *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 1975, v. 79A, p. 419.
- 2.13. Hershey A. V. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. — *J. Appl. Mech.*, 1954, v. 21, p. 236.

- 2.14. Kröner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. — *Z. Phys.*, 1958, v. 151, p. 504.
- 2.15. Hill R. A. self-consistent mechanics of composite materials. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1965, v. 13, p. 213.
- 2.16. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1965, v. 13, p. 223.
- 2.17. McLaughlin R. A study of the differential scheme for composite materials. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1977, v. 15, p. 237.
- 2.18. Frankel N. A., Acrivos A. On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres. — *Chem. Eng. Sci.*, 1967, v. 22, p. 847.
- 2.19. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. — Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N. J., 1965. [Имеется перевод: Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. — М.: Мир, 1976, 630 с.]
- 2.20. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. — New York: Cambridge University Press, 1967. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973, 758 с.]
- 2.21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. — М.: Гостехтеориздат, 1954, 796 с.
- 2.22. Krieger I. M. Rheology of monodisperse lattices. — *Adv. Colloid Interface Sci.*, 1972, v. 3, p. 111.
- 2.23. Batchelor G. K., Green J. T. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field. — *J. Fluid Mech.*, 1972, v. 56, p. 375.
- 2.24. Chen H.-S., Acrivos A. The solution of the equations of linear elasticity for an infinite region containing two spherical inclusions. — *Int. J. Solids and Structures*, 1978, v. 14, p. 331.
- 2.25. Chen H.-S., Acrivos A. The effective elastic moduli of composite materials containing spherical inclusions at non dilute concentrations. — *Int. J. Solids and Structures*, 1978, v. 14, p. 349.

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ СРЕД С ВКЛЮЧЕНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И ПЛАСТИНЧАТОЙ ФОРМЫ

В предыдущей главе была изложена концепция эффективной гомогенности и на ее основе исследованы свойства среды со сферическими включениями. В этой главе распространим наши исследования на случаи других форм включений — рассмотрим среды с цилиндрическими и пластинчатыми включениями. Для определения эффективных модулей будет использован метод, описанный в предыдущей главе, поэтому читателю целесообразно освежить в памяти материал разд. 2.1.

Работа над созданием законченной теории поведения гетерогенных сред только начинается. Поэтому не следует забывать, что анализ систем с разными типами включений может преследовать различные цели. Например, считают, как правило, что твердые сферические включения снижают прочность композита по сравнению с прочностью матрицы, в которую они введены. Хотя такие включения и повышают жесткость материала, но незначительно. Целесообразность их введения определяется совсем другими причинами, такими, как снижение стоимости композита или улучшение его динамических характеристик. В противоположность этому армирование волокнами обосновано прежде всего одновременным улучшением прочности и жесткости композита. В данной главе обсуждаются пределы возможного варьирования жесткостью гетерогенного материала. В ней также рассматриваются некоторые предварительные соображения относительно свойств сред, содержащих включения в виде пластинчатых частиц. В следующей главе показано, насколько различается поведение сред с пластинчатыми и цилиндрическими включениями.

Полезно обсудить два совершенно различных способа описания геометрической формы цилиндрических и пластинчатых включений. Согласно одному подходу, эти включения можно рассматривать как предельные случаи вытянутого или сплющенного эллипсоидов, т. е. как случаи, когда отношение максимального размера эллипсоида к минимальному очень велико. Согласно другому подходу, считают, что включения имеют беско-

нечную протяженность в направлении оси или в плоскости. В частности, волокна идеализируются в виде однородных круговых цилиндров бесконечной длины.

Оценка относительной эффективности армирования включениями различной формы подробно изложена в гл. IV. В ней на основании теорем о минимуме будут получены возможные пределы эффективности армирования. Результаты, полученные в данной главе, в последующем потребуются для оценки эффективности армирования.

3.1. ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

Наша цель состоит в описании эффективной жесткости гетерогенных сред, содержащих цилиндрические и пластинчатые включения. Рассмотрим для примера систему с параллельными волокнами. До тех пор пока упаковка волокон в поперечном сечении носит стохастический характер, можно представить себе, что среда эффективно гомогенна. Среды такого типа, как показано на рис. 3.1, обладают симметрией свойств в плоскости, перпендикулярной к направлению ориентации волокон, и называются трансверсально изотропными. Для дальнейшей работы полезно иметь полный набор характеристик трансверсально изотропной среды. Будем оперировать характеристиками типа модулей, являющихся свойствами эквивалентной гомогенной среды.

В следующем разделе определим эти эффективные свойства через свойства отдельных фаз.

Жесткости

Допустим, что ось 1 — ось симметрии. Тогда соотношения напряжение — деформация можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{22}\varepsilon_{22} + C_{23}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{33} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + C_{22}\varepsilon_{33}, \\
 \sigma_{12} &= 2C_{66}\varepsilon_{12}, \\
 \sigma_{23} &= (C_{22} - C_{23})\varepsilon_{23}, \\
 \sigma_{31} &= 2C_{66}\varepsilon_{31}.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Пять констант C_{11} , C_{12} , C_{22} , C_{23} и C_{66} обозначают пять независимых эффективных свойств среды. Хотя эти константы и позволяют полностью описать жесткость среды, обычно ими пользуются редко. Дело в том, что определение этих констант путем

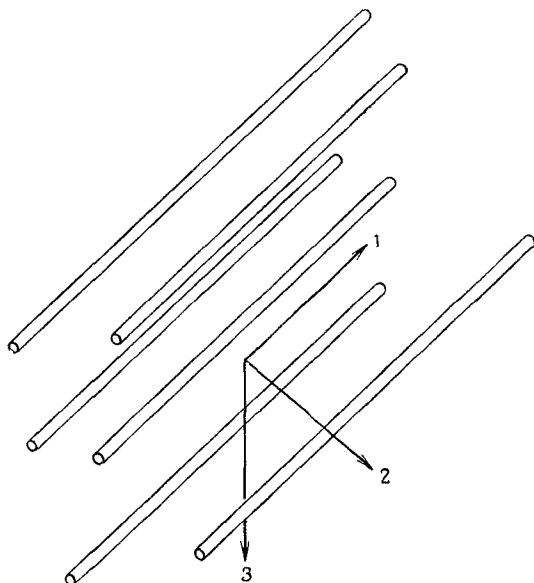


Рис. 3.1. Система параллельных волокон.

прямых механических экспериментов сопряжено со значительными трудностями. Поэтому на практике пользуются так называемыми техническими константами.

Рассмотрим состояние одноосного нагружения, при котором

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &\neq 0, \\ \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Из (1.1) легко найдем, что $\sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11}$, где

$$E_{11} = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}. \quad (1.2)$$

Величина E_{11} , определяемая непосредственно из эксперимента, называется *модулем упругости при одноосном нагружении* (модуль Юнга). Изменение поперечных размеров образца при одноосном нагружении используется для определения коэффициентов Пуассона через отношения

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{и} \quad \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}},$$

где в обозначении ν_{ij} принято, что первый индекс i относится к направлению приложения напряжения (деформации), а второй j — к направлению вызванной им поперечной деформации. Из

(1.1) следует, что при одноосном нагружении в направлении 1

$$\nu_{12} = \nu_{13} = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}. \quad (1.3)$$

Далее рассмотрим состояние, когда $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$. Пусть $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma$, тогда из (1.1) найдем, что $\sigma = 2K_{23}\varepsilon$, где

$$K_{23} = 1/2 (C_{22} + C_{23}). \quad (1.4)$$

Величина K_{23} называется *объемным модулем упругости при плоском деформированном состоянии*.

И наконец, модули сдвига, которые можно измерить непосредственно, выражаются следующим образом:

$$\mu_{12} = \mu_{31} = C_{66}, \quad (1.5)$$

$$\mu_{23} = 1/2 (C_{22} - C_{23}). \quad (1.6)$$

Соотношения (1.2) — (1.6) можно преобразовать:

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_{11} + 4\nu_{12}^2 K_{23}, \\ C_{12} &= 2K_{23}\nu_{12}, \\ C_{22} &= \mu_{23} + K_{23}, \\ C_{23} &= -\mu_{23} + K_{23}, \\ C_{66} &= \mu_{12}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Кроме пяти независимых констант, определенных по (1.2) — (1.6), экспериментально можно измерить и другие константы трансверсально изотропной среды. Например, представим, что на тело действует одноосное растягивающее напряжение в направлении, перпендикулярном оси симметрии. Этому соответствует

$$\sigma_{22} \neq 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0.$$

Из (1.1) найдем $\sigma_{22} = E_{22}\varepsilon_{22}$, где

$$E_{22} = C_{22} + \frac{C_{12}^2 (-C_{22} + C_{23}) + C_{23} (-C_{11}C_{23} + C_{12}^2)}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \quad (1.8)$$

Определяя коэффициенты Пуассона ν_{21} и ν_{23} при помощи выражений

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}, \quad \nu_{23} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{22}},$$

найдем, что

$$\nu_{21} = \frac{C_{12}(C_{22} - C_{23})}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad \nu_{23} = \frac{C_{11}C_{23} - C_{12}^2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \quad (1.9)$$

Из свойств симметрии среды следует также, что

$$\nu_{31} = \nu_{21}, \quad \nu_{32} = \nu_{23}. \quad (1.10)$$

Отметим, что $v_{12} \neq v_{21}$; из ранее выведенных формул легко найти связь между этими константами:

$$\frac{v_{12}}{E_{11}} = \frac{v_{21}}{E_{22}}. \quad (1.11)$$

Полезными могут также оказаться следующие соотношения:

$$E_{22} = \frac{4\mu_{23}K_{23}}{K_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \quad (1.12)$$

$$v_{23} = \frac{K_{23} - \mu_{23} - 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}{K_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \quad (1.13)$$

$$v_{21} = \frac{4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}}{E_{11}(K_{23} + \mu_{23}) + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}}, \quad (1.14)$$

$$v_{12}^2 = \left(-v_{23} - \frac{1}{4} \frac{E_{22}}{K_{23}} + \frac{1}{4} \frac{E_{22}}{\mu_{23}} \right) \frac{E_{11}}{E_{22}}. \quad (1.15)$$

Податливости

Соотношения напряжение — деформация (1.1) полезно представить и в обращенном виде. Запишем (1.1) в матричной форме:

$$\{\sigma_i\} = [C_{ij}] \{\epsilon_j\}, \quad (1.16)$$

где $\{\sigma_i\}$ и $\{\epsilon_j\}$ — шестикомпонентные векторы-столбцы и $[C_{ij}]$ — квадратная матрица 6×6 . Обращение (1.16) дает

$$\{\epsilon_i\} = [S_{ij}] \{\sigma_j\}, \quad (1.17)$$

где матрица $[S_{ij}]$ определена следующим образом:

$$[S_{ij}] = \frac{[C'_{ij}]^T}{|C_{ij}|};$$

здесь T обозначает операцию транспонирования; C'_{ij} — матрица алгебраических дополнений. Из симметрии $C_{ij} = C_{ji}$ следует симметрия $S_{ij} = S_{ji}$.

Выразим (1.17) в развернутом виде. Для этого примем, что σ_{11} — единственное действующее напряжение, тогда ϵ_{11} задается как σ_{11}/E_{11} . Если, с другой стороны, действует только напряжение σ_{22} , то $\epsilon_{22} = \sigma_{22}/E_{22}$. При этом $\epsilon_{11} = -v_{21}\epsilon_{22}$, и, таким образом, $\epsilon_{11} = -v_{21}\sigma_{22}/E_{22}$. Продолжая наши рассуждения, получим

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E_{11}} \sigma_{11} - \frac{v_{21}}{E_{22}} \sigma_{22} - \frac{v_{21}}{E_{22}} \sigma_{33}.$$

Еще два соотношения подобного типа позволяют записать $[S_{ij}]$ в развернутом виде:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Заметим, что из приведенной записи и свойства симметрии $S_{ij} = S_{ji}$, очевидно, следует соотношение (1.11).

Допустимые значения коэффициентов Пуассона

Наконец, определим границы области изменения коэффициентов Пуассона ν_{ij} , что облегчит их дальнейшую интерпретацию. Обратившись к соотношению (1.13), сначала заметим, что если $\mu_{23} \rightarrow \infty$, то $\nu_{23} \rightarrow -1$. Из (1.13) также следует, что если $K_{23} \rightarrow \infty$ и $E_{11} \rightarrow \infty$, то $\nu_{23} \rightarrow 1$. Таким образом, имеем

$$-1 \leq \nu_{23} \leq 1. \quad (1.19)$$

Невыполнение этого условия приводит к отрицательным значениям некоторых модулей. Для изотропного тела верхняя граница ν равна $1/2$. Иное значение верхней границы (1) у трансверсально изотропного тела можно, однако, легко объяснить. Рассмотрим несжимаемое тело, обладающее бесконечной жесткостью в направлении 1. При растяжении подобного тела в направлении 2 оно должно претерпевать такое же сокращение размеров в направлении 3, чтобы не нарушилось условие несжимаемости. В этом случае $\nu_{23} = 1$.

Оценим далее границы ν_{12} и ν_{21} , Решая (1.12) относительно ν_{12}^2 , получим

$$\nu_{12}^2 = \frac{E_{11}}{E_{22}} - \frac{E_{11}}{4} \left(\frac{1}{K_{23}} + \frac{1}{\mu_{23}} \right). \quad (1.20)$$

Считается, что все модули в правой части (1.20) имеют неотрицательные значения. Наибольшее значение ν_{12}^2 , очевидно, достигается при $K_{23} \rightarrow \infty$ и $\mu_{23} \rightarrow \infty$, тогда

$$|\nu_{12}| \leq (E_{11}/E_{22})^{1/2}. \quad (1.21)$$

Из (1.11) также следует

$$|\nu_{21}| \leq (E_{22}/E_{11})^{1/2}. \quad (1.22)$$

Для трансверсально изотропного материала типа волокнистого армированного композита характерно $E_{11} \gg E_{22}$. Тогда из (1.21) и (1.22) следует, что ν_{12} может достигать значений, больших 1, что и наблюдается, а ν_{21} по сравнению с 1, как правило, очень мало.

3.2. ПОЛИДИСПЕРСНАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Теперь мы готовы к поиску решения задачи об эффективных свойствах композитов, армированных волокнами. Из предыдущего раздела видно, что для этого достаточно найти пять независимых констант. Итак, наша цель состоит в представлении в аналитическом виде пяти констант через свойства компонентов (волокон и матрицы) и их объемное содержание.

Для выполнения этой задачи следует ввести структурную модель композита. Наиболее часто употребляется полидисперсная

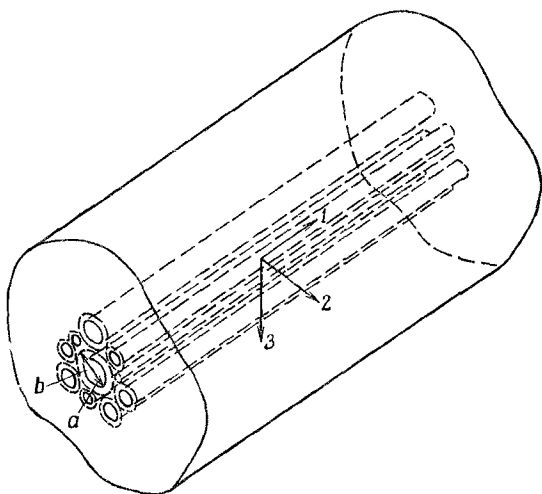


Рис. 3.2. Полидисперсная модель среды с цилиндрическими включениями.

модель среды с цилиндрическими включениями, описанная Хашиним и Розеном [3.1]. Эта модель является двумерным аналогом трехмерной полидисперсной модели среды со сферическими включениями, введенной в разд. 2.3. Принимается, что волокна представляют собой бесконечно длинные круговые цилиндры, заключенные в непрерывную матрицу. Модель схематически представлена на рис. 3.2. Согласно этой модели, с каждым отдельным волокном радиуса a связана оболочка из материала матрицы радиуса b . Каждая отдельная комбинация волокна и матрицы называется составным цилиндром. Абсолютные значения радиусов a и b цилиндров различны, так что получается конфигурация, целиком заполненная этими цилиндрами. Отношение радиусов цилиндра a/b должно оставаться тем не менее постоянным. Естественно, абсолютный размер отдельных цилиндров при этом меняется вплоть до бесконечно малого. Практичность подобной модели объясняется тем, что для определения четырех из пяти эффективных модулей представительного элемента объема достаточно рассматривать отдельный составной цилиндр. В разд. 2.1 мы уже дали определение эффективных свойств. Определения и методы, развитые в разд. 2.1, составляют основу исследований, описанных в данной главе.

Модуль Юнга

Итак, наша цель заключается вначале в определении модуля E_{11} при одноосном нагружении. Для этого примем

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0,$$

где ось 1 в прямоугольной декартовой системе координат совпадает с направлением оси составного цилиндра. Переходя к цилиндрической системе координат, предположим существование следующего поля перемещений:

$$u_{rF} = A_F r, \quad u_{rM} = A_M r + \frac{B_M}{r}, \quad u_z = \varepsilon z. \quad (2.1)$$

Легко показать, что решение в таком виде удовлетворяет уравнениям равновесия. Константа A_F относится к внутреннему цилиндру (волокну), а A_M и B_M — к оболочке (матрице). Для определения этих констант используем условия на границе

$$\text{при } r = a \quad u_{rF} = u_{rM}, \quad \sigma_{rF} = \sigma_{rM}, \quad (2.2)$$

$$\text{при } r = b \quad \sigma_{rM} = 0. \quad (2.3)$$

В контексте нашей простой задачи эффективный модуль E_{11} определяется выражением

$$E_{11} = \frac{\langle \sigma_{zz} \rangle}{\varepsilon}.$$

которое можно записать в другом виде:

$$E_{11} = \frac{1}{\pi b^2 e} \iint_A \sigma_z(r) da, \quad (2.4)$$

где A — площадь поперечного сечения. Интегрирование соотношения (2.4) дает

$$E_{11} = cE_F + (1-c)E_M + \frac{4c(1-c)(\nu_F - \nu_M)^2 \mu_M}{(1-c)\mu_M/(k_F + \mu_F/3) + c\mu_M/(k_M + \mu_M/3) + 1}. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) определяет эффективный модуль упругости при одноосном нагружении в направлении оси одиночного составного цилиндра. Теперь остается показать, что полученный результат действительно характеризует свойства представительного элемента объема. Эта задача в точности соответствует той, с которой мы столкнулись при анализе полидисперсной модели среды со сферическими включениями в разд. 2.3. Не будем подробно останавливаться на процедуре доказательства еще раз, напомним лишь ее сущность. Чтобы показать, что (2.5) является оценкой снизу соответствующей характеристики представительного элемента объема, можно применить теорему о минимуме потенциальной энергии. С другой стороны, использование теоремы о минимуме дополнительной энергии позволяет при наложении граничных условий в напряжениях, а не в перемещениях найти оценку E_{11} сверху. Выполнив эти процедуры, установим, что значения оценок совпадают и что (2.5), таким образом, есть точное решение.

Другие свойства

Поставленная задача позволяет найти решение и для эффективного значения коэффициента Пуассона ν_{12} , если ось 1 совпадает с направлением волокон и $\nu_{12} \neq \nu_{21}$. В соответствии с рассматриваемой задачей ν_{12} определяется в виде

$$\nu_{12} = -u_r|_{r=b}/(eb), \quad (2.6)$$

т. е. имеем отрицательное значение отношения поперечной деформации к заданной продольной деформации тела. Можно показать, что

$$\nu_{12} = (1-c)\nu_M + c\nu_F + \frac{c(1-c)(\nu_F - \nu_M)[\mu_M/(k_M + \mu_M/3) - \mu_M/(k_F + \mu_F/3)]}{(1-c)\mu_M/(k_F + \mu_F/3) + c\mu_M/(k_M + \mu_M/3) + 1}. \quad (2.7)$$

Интересно заметить, что формула (2.5) для E_{11} очень хорошо аппроксимируется *правилом смесей*, если пренебречь последним членом. Формула (2.7) также аппроксимируется правилом смесей, однако менее точно. Далее увидим, что значения оставшихся трех эффективных констант уже нельзя описать этим правилом с достаточной точностью.

Задачи об определении еще двух констант можно сформулировать и решить подобным же образом, получив точные решения для объемного модуля при плоском деформированном состоянии K_{23} и модуля сдвига в плоскости, параллельной волокнам μ_{12} . Можно показать, что

$$K_{23} = k_M + \frac{\mu_M}{3} + \frac{c}{1/[k_F - k_M + 1/3(\mu_F - \mu_M)] + (1-c)/(k_M + 1/3\mu_M)}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_M} = \frac{\mu_F(1+c) + \mu_M(1-c)}{\mu_F(1-c) + \mu_M(1+c)}. \quad (2.9)$$

Задачи об определении K_{23} и μ_{12} , так же как и задачи, рассмотренные при выводе E_{11} и ν_{12} , являются простыми в том смысле, что поле переменных решения включает только одну компоненту перемещения. Развернутые формулы (2.5) и (2.7) — (2.9) выведены Хиллом [3.2] и Хашином [3.3].

После того как найдены четыре из пяти констант трансверсально изотропной среды, кажется, что поставленная задача почти решена. К сожалению, это не совсем так. Остается определить последнюю константу, модуль сдвига μ_{23} в плоскости изотропии, а это оказывается трудной задачей, если использовать полидисперсную модель. И снова мы сталкиваемся с проблемой, подобной уже рассмотренной в разд. 2.3 при отыскании эффективного модуля сдвига для этой модели среды со сферическими включениями. Как и в разд. 2.3, можно определить оценку для μ_{23} сверху, решая задачу в перемещениях, и оценку для μ_{23} снизу, решая задачу в напряжениях. Как показали Хашин и Розен [3.1], эти оценки не совпадают, за исключением случаев очень малой и очень высокой объемных долей включений. До настоящего времени точное решение для μ_{23} не получено.

В следующем разделе, используя другую модель, мы выведем выражение, которое можно считать решением μ_{23} и для полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями. Обсуждение области применимости такой модели отложим пока до разд. 4.3 и 4.6.

3.3. ТРЕХФАЗНАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Дилемма, с которой мы столкнулись в предыдущем разделе, разрешима, по-видимому, при помощи другой модели. В частности, было доказано, что модуль сдвига в плоскости изотропии определить при помощи полидисперсной модели нелегко. Поэтому введем модель, очень близкую к уже рассмотренной, но позволяющую найти точное решение для модуля сдвига μ_{23} .

Снова обратимся к рис. 3.2. Заменяем все, кроме одного, составные цилиндры эквивалентной гомогенной средой, как показано на рис. 3.3. Теперь при помощи этой модели попытаемся определить эффективный модуль сдвига в плоскости изотропии. Процедура подобна уже использованной в разд. 2.4 при анализе трехфазной модели среды со сферическими включениями. Результат, который будет получен, вероятно, соответствует константе μ_{23} для полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями. Уверенным можно быть лишь в том, что он является точным для модели, показанной на рис. 3.3.

Рассмотрим представительный элемент объема, подверженный деформации сдвига. В частности, деформированное состояние эквивалентной гомогенной среды в полярной системе координат выражается в виде

$$u_{rE} = \frac{b}{4\mu_{23}} \left[\frac{2r}{b} + (\eta + 1) \frac{b}{r} a_3 + \frac{b^3}{r^3} c_3 \right] \cos 2\theta, \quad (3.1)$$

$$u_{\theta E} = \frac{b}{4\mu_{23}} \left[-\frac{2r}{b} - (\eta - 1) \frac{b}{r} a_3 + \frac{b^3}{r^3} c_3 \right] \sin 2\theta, \quad (3.2)$$

где

$$\eta = 3 - 4\nu_{23}. \quad (3.3)$$

При $r \rightarrow \infty$ соотношения (3.1), (3.2) описывают заданное состояние чистого сдвига. Модуль μ_{23} и коэффициент Пуассона ν_{23} являются неизвестными эффективными константами эквивалентной гомогенной среды. Легко показать, что соотношения (3.1), (3.2) удовлетворяют уравнениям равновесия, так же как и приведенные ниже выражения для перемещений в матрице:

$$u_{rM} = \frac{b}{4\mu_M} \left[(\eta_M - 3) \frac{r^2}{b^3} a_2 + \frac{r}{b} d_2 + (\eta_M + 1) \frac{b}{r} c_2 + \right. \\ \left. + \frac{b^3}{r^3} b_2 \right] \cos 2\theta, \quad (3.4)$$

$$u_{\theta M} = \frac{b}{4\mu_M} \left[(\eta_M + 3) \frac{r^2}{b^3} a_2 - \frac{r}{b} d_2 - (\eta_M - 1) \frac{b}{r} c_2 + \right. \\ \left. + \frac{b^3}{r^3} b_2 \right] \sin 2\theta \quad (3.5)$$

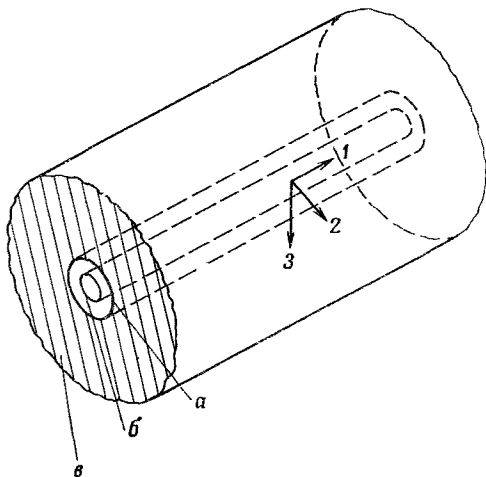


Рис. 3.3. Трехфазная модель: a — матрица; b — волокно; v — эквивалентная однородная среда.

И В ВОЛОКНЕ

$$\begin{aligned} u_{rF} &= \frac{b}{4\mu_F} \left[(\eta_F - 3) \frac{r^3}{b^3} a_1 + \frac{r}{b} d_1 \right] \cos 2\theta, \\ u_{\theta F} &= \frac{b}{4\mu_F} \left[(\eta_F + 3) \frac{r^3}{b^3} a_1 - \frac{r}{b} d_1 \right] \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\eta_M = 3 - 4\nu_M, \quad \eta_F = 3 - 4\nu_F. \quad (3.7)$$

Теперь необходимо определить восемь неизвестных констант $a_1, a_2, a_3, b_2, c_2, c_3, d_1, d_2$.

Зададим условия неразрывности перемещений и напряжений $\sigma_r, \sigma_{r\theta}, u_r, u_\theta$ на границах раздела $r = a, r = b$. Эти условия приводят к следующей системе восьми независимых уравнений:

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 c_2 + 3 \left(\frac{b}{a} \right)^4 b_2 &= 0, \\ a_1 - a_2 + \left(\frac{b}{a} \right) c_2 + \left(\frac{b}{a} \right)^6 b_2 &= 0, \\ [(\eta_M - 3) \mu_F - (\eta_F - 3) \mu_M] a_2 + \left(\frac{b}{a} \right)^4 [(\eta_M + 1) \mu_F + (\eta_F + 1) \mu_M] c_2 + \\ + (\mu_F - \mu_M) \left(\frac{b}{a} \right)^2 d_2 + (\mu_F + \eta_F \mu_M) \left(\frac{b}{a} \right)^6 b_2 &= 0, \\ [(\eta_M + 3) \mu_F - (\eta_F + 3) \mu_M] a_2 + \left(\frac{b}{a} \right)^4 [(\eta_M - 1) \mu_F - (\eta_M - 1) \mu_M] c_2 - \\ - (\mu_F - \mu_M) \left(\frac{b}{a} \right)^2 d_2 + (\mu_F + \eta_F \mu_M) \left(\frac{b}{a} \right)^6 b_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$2 - 4a_3 - 3c_3 - d_2 + 4c_2 + 3b_2 = 0,$$

$$-2 - 2a_3 - 3c_3 - 6a_2 + d_2 + 2c_2 + 3b_2 = 0,$$

$$\mu_M [2 + (\eta + 1)a_3 + c_3] - \mu_{23} [(\eta_M - 3)a_2 + d_2 + (\eta_M + 1)c_2 + b_2] = 0,$$

$$\mu_M [-2 - (\eta - 1)a_3 + c_3] - \mu_{23} [(\eta_M + 3)a_2 - d_2 - (\eta_M - 1)c_2 + b_2] = 0.$$

Принятый критерий определения эффективных свойств требует равенства энергий деформирования гетерогенной среды и эквивалентной гомогенной среды. Запишем это условие

$$U = U_{\text{EH}}. \quad (3.9)$$

Теперь используем формулу Эшелби (I-4.26) для оценки энергии, запасаемой в гетерогенной среде. Интегрирование проводим по поверхности составного включения (рис. 3.3). В формуле (I-4.26) член U_0 относится к энергии деформирования среды, у которой включение заменено окружающим его материалом. Для рассматриваемой модели — это среда с эквивалентными однородными свойствами. Таким образом,

$$U_0 = U_{\text{EH}}. \quad (3.10)$$

Объединяя (3.9) и (3.10) с формулой (I-4.26), получим следующее выражение в полярных координатах:

$$\int_0^{2\pi} (\sigma_{rrE} u_r^0 + \sigma_{r\theta E} u_\theta^0 - \sigma_{rr}^0 u_{rE} - \sigma_{r\theta}^0 u_{\theta E})_{r=b} d\theta = 0. \quad (3.11)$$

Входящие в (3.11) члены имеют вид

$$\sigma_{rr}^0 = \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{r\theta}^0 = -\sin 2\theta,$$

$$u_r^0 = \frac{r}{2\mu_{23}} \cos 2\theta, \quad (3.12)$$

$$u_\theta^0 = \frac{r}{2\mu_{23}} \sin 2\theta,$$

$$\sigma_{rrE}|_{r=b} = (1 - 2a_3 - \frac{3}{2}c_3) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{r\theta E}|_{r=b} = -(1 + a_3 + \frac{3}{2}c_3) \sin 2\theta,$$

а $u_{rE}|_{r=b}$ и $u_{\theta E}|_{r=b}$ выражены в соответствии с (3.1), (3.2). Подставив (3.1), (3.2) и (3.12) в (3.1) и проведя интегрирование, приходим к простому результату:

$$a_3 = 0. \quad (3.13)$$

Выразив a_3 из (3.8) и приравняв его нулю в соответствии с (3.13), получим соотношения для определения μ_{23} :

$$A \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_M} \right)^2 + 2B \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_M} \right) + C = 0, \quad (3.14)$$

где

$$A = 3c(1-c)^2 \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} - 1 \right) \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} + \eta_F \right) + \\ + \left[\frac{\mu_F}{\mu_M} \eta_M + \eta_F \eta_M - \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} \eta_M - \eta_F \right) c^3 \right] \left[c \eta_M \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} - 1 \right) - \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} \eta_M + 1 \right) \right],$$

$$B = -3c(1-c)^2 \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} - 1 \right) \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} + \eta_F \right) + \\ + \frac{1}{2} \left[\eta_M \frac{\mu_F}{\mu_M} + \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} - 1 \right) c + 1 \right] \left[(\eta_M - 1) \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} + \eta_F \right) - \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} \eta_M - \eta_F \right) c^3 \right] + \frac{c}{2} (\eta_M + 1) \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} - 1 \right) \times \\ \times \left[\frac{\mu_F}{\mu_M} + \eta_F + \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} \eta_M - \eta_F \right) c^3 \right],$$

$$C = 3c(1-c)^2 \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} - 1 \right) \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} + \eta_F \right) + \\ + \left[\eta_M \frac{\mu_F}{\mu_M} + \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} - 1 \right) c + 1 \right] \left[\frac{\mu_F}{\mu_M} + \eta_F + \left(\frac{\mu_F}{\mu_M} \eta_M - \eta_F \right) c^3 \right],$$

а объемная доля волокон задается в виде $c = (a/b)^2$. Можно показать, что при малых объемных долях волокон уравнение (3.14) преобразуется к простому виду:

$$\frac{\mu_{23}}{\mu_M} = 1 + \frac{c}{\mu_M / (\mu_F - \mu_M) + (k_M + 7/3 \mu_M) / (2k_M + 8/3 \mu_M)}. \quad (3.15)$$

Выражение (3.14) и есть то решение, которые мы ищем. Это выражение позволяет найти модуль сдвига μ_{23} для модели композита, представленной на рис. 3.3, через характерные параметры и объемные доли компонент. Обнадеживает и кажется полезной независимость решения μ_{23} (3.14) от других эффективных констант, несмотря на то что ν_{23} входит в исходные уравнения задачи (см. уравнения (III-3.3)).

Еще раз подчеркнем, что не известно, справедливо ли решение (3.14) для полидисперсной модели. Тем не менее для практических целей можно использовать найденные в предыдущем разделе выражения (2.5), (2.7)–(2.9), а также (3.14) для определения пяти независимых констант для трансверсально изотропной среды, армированной волокнами. Для модели, показанной на рис. 3.3, есть и другое решение, полученное Германсом [3.4]. Однако решение в последней работе содержит ошибку, на которую указали Кристенсен и Ло [3.5]. Из этой работы и взяты выкладки, приведенные в данном разделе.

Практическую оценку полученных результатов дадим лишь после того, как рассмотрим поведение систем, содержащих пластинчатые включения. Сейчас заметим только, что полидисперсная модель среды с цилиндрическими включениями и модель, рассмотренная в данном разделе, описывают свойства систем, содержащих любую объемную долю включений, $0 \leq c \leq 1$. Вопрос, насколько хорошо такая модель описывает среду с цилиндрическими включениями одинакового размера, обсуждается в разд. 4.3.

3.4. ВЛИЯНИЕ ДЛИНЫ ВОЛОКОН

В предыдущем разделе при оценке эффективных свойств волокнистых композитов считалось, что волокна имеют бесконечную длину. Однако все в большей степени находят применение композиты с арматурой в виде так называемых «рубленых» волокон. В таких композитах соотношение размеров волокна имеет конечное значение, и можно ожидать в связи с этим снижения эффективности армирования. В данном разделе дадим количественную оценку этому явлению. Ограничимся случаем малой объемной доли волокон, когда между ними нет взаимодействия. Выражения для эффективных свойств, полученные в предыдущих разделах, справедливы для любых объемных долей. В соответствии с построением полидисперсной модели допустима любая объемная доля волокон, т. е. $0 \leq c \leq 1$.

Вывод, приведенный ниже, основан на работе Рассела [3.6], в которой в свою очередь использованы результаты, полученные Эшелби [3.7].

Нам предстоит решить задачу об эллипсоидальном включении в бесконечной среде, которая подвергнута равномерному деформированию на большом расстоянии от включения. Решение этой задачи позволит определить эффективные свойства гетерогенной среды. Поскольку нас интересует система с *волокнами конечной длины*, допустим, что включение имеет форму тонкого вытянутого эллипсоида. Эффективные характеристики гетерогенной среды определим как функцию отношения размеров эллипсоида и свойств фаз.

Постановка задачи

Едва ли это очевидно, но для пользы дела начнем анализ проблемы с рассмотрения бесконечной среды с эллипсоидальным отверстием, а не с включением. Пусть, как показано на рис. 3.4, в отверстие необходимо поместить эллипсоидальное включение такой же формы, как отверстие, но отличающееся от него размером. Чтобы размеры включения и отверстия совпали, необходимо приложить по поверхности включения распределенную на-

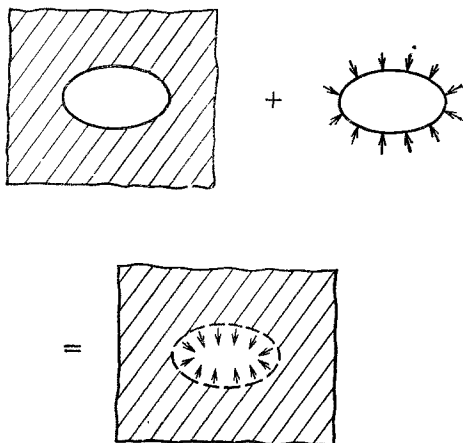


Рис. 3.4. Схема к задаче о совмещении включения с отверстием в бесконечной среде.

грузку. После совмещения включения и отверстия получим непрерывную среду с распределенными внутренними силами (рис. 3.4). Причем в полученной системе среда в области вне первоначального отверстия свободна от действия напряжений и деформаций.

Теперь для удаления внутренних сил по поверхности включения необходимо к этой же поверхности приложить равное, но противоположное по знаку распределение сил. Это приведет к изменению напряженного и деформированного состояния всей среды. Однако Эшелби [3.7] показал, что внутри эллипсоидальной области напряженное и деформированное состояние остается однородным. Именно этот вывод Эшелби является решающим для последующего доказательства.

Следующим шагом будет приложение однородных напряжений и деформации ко всей рассматриваемой области. Теперь напряженное состояние в области первоначального отверстия складывается из трех составляющих: (1) от действия внутренних сил, совмещающих размеры включения и отверстия; (2) от действия внутренних сил противоположного знака, приложенных к непрерывной среде по поверхности отверстия; (3) от действия приложенного ко всей системе однородного напряженного состояния. По отношению к исходному состоянию ненагруженной среды с эллипсоидальным отверстием конечное деформированное состояние в области отверстия определяется из двух слагаемых:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^c, \quad (4.1)$$

Где ε_{ij}^0 — приложенное однородное деформированное состояние и ε_{ij}^c — изменение деформации вследствие повторного наложения поверхностных сил, компенсирующих действие поверхностных сил, необходимых для свободного совмещения включения и отверстия.

Пусть теперь ε_{ij}^T обозначает деформацию включения, необходимую для совмещения его размеров с размерами отверстия. Тогда напряженное состояние в области исходного отверстия, складывающееся из трех составляющих, можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \lambda_M (\varepsilon_{kk}^0 + \varepsilon_{kk}^c - \varepsilon_{kk}^T) \delta_{ij} + 2\mu_M (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^c - \varepsilon_{ij}^T), \quad (4.2)$$

где λ_M и μ_M — константы изотропной среды (матрицы). Связь между ε_{ij}^c и ε_{ij}^T представим в виде линейного преобразования:

$$\varepsilon_{ij}^c = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^T, \quad (4.3)$$

где тензор S_{ijkl} можно найти, используя функции Грина для однородной среды. Решение для S_{ijkl} , приведенное Эшелби в [3.7], будет дано ниже.

Перейдем к обсуждению первоначально поставленной задачи об эллипсоидальном включении, отличающемся по свойствам от окружающей его среды. Зададим соотношение напряжение — деформация для включения

$$\sigma_{ij} = \lambda_I \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_I \varepsilon_{ij}. \quad (4.4)$$

Теперь подставим результат разложения деформаций (4.1) в (4.4), а полученное выражение — в (4.2); тогда придем к соотношению

$$\lambda_I (\varepsilon_{kk}^0 + \varepsilon_{kk}^c) \delta_{ij} + 2\mu_I (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^c) = \lambda_M (\varepsilon_{kk}^0 + \varepsilon_{kk}^c - \varepsilon_{kk}^T) \delta_{ij} + 2\mu_M (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^c - \varepsilon_{ij}^T). \quad (4.5)$$

Далее заменим ε_{ij}^c в (4.5) его значением из (4.3) и решим полученное уравнение относительно ε_{ij}^T . Символически решение можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij}^T = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0. \quad (4.6)$$

Очевидно, A_{ijkl} определяется свойствами обеих фаз. Найдя ε_{ij}^T из (4.6), а затем ε_{ij}^c из (4.3), определим деформированное состояние включения из (4.1). Напомним, что значение деформированного состояния включения приводит нас к непосредственному решению задачи об эффективных свойствах. Другими словами, для решения задачи о свойствах гетерогенной среды использовано решение задачи для гомогенной среды.

Теперь получим выражение эффективных свойств среды для рассматриваемой задачи. Повторим выведенную в разд. 2.1 формулу эффективных свойств (II-1.9):

$$C_{ijkl} \langle e_{kl} \rangle = \lambda_M \delta_{ij} \langle e_{kk} \rangle + 2\mu_M \langle e_{ij} \rangle + \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} (\sigma_{ij} - \lambda_M e_{kk} \delta_{ij} - 2\mu_M e_{ij}) dv. \quad (4.7)$$

Подставив (4.1) и (4.2) в (4.7), получим

$$C_{ijkl} e_{kl}^0 = \lambda_M \delta_{ij} e_{kk}^0 + 2\mu_M e_{ij}^0 - \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} (\lambda_M e_{kk}^T \delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^T) dv, \quad (4.8)$$

где принято, что $\langle e_{ij} \rangle = e_{ij}^0$. При малой объемной доле включений, учитывая, что e_{ij}^T однородна, соотношение (4.8) можно переписать в виде

$$C_{ijkl} e_{kl}^0 = \lambda_M \delta_{ij} e_{kk}^0 + 2\mu_M e_{ij}^0 - c (\lambda_M e_{kk}^T \delta_{ij} + 2\mu_M e_{ij}^T), \quad (4.9)$$

где c — объемная доля, а e_{ij}^0 представляет собой решение уравнения (4.5) в виде (4.6). Эффективные свойства среды C_{ijkl} находим из (4.9). Процедура нахождения конкретных значений характеристик требует задания соответствующего деформированного состояния e_{ij}^0 .

Сдвиговые свойства

Приступая к определению эффективных свойств, остановимся в первую очередь на модуле сдвига в плоскости изотропии μ_{23} , когда ось 1 совпадает с направлением волокон. Соответственно положим $e_{23}^0 \neq 0$, остальные компоненты $e_{ij}^0 = 0$. Используя уравнение (4.5) и выражение e_{ij}^c из (4.3), найдем, что

$$e_{23}^T = \frac{(\mu_M - \mu_I) e_{23}^0}{\mu_M + 2(\mu_I - \mu_M) S_{2323}}. \quad (4.10)$$

Подставив этот результат в (4.9), получим

$$\frac{\mu_{23}}{\mu_M} = 1 + \frac{c [(\mu_I/\mu_M) - 1]}{1 + 2[(\mu_I/\mu_M) - 1] S_{2323}}. \quad (4.11)$$

Теперь для подстановки в (4.11) необходимо развернутое выражение S_{2323} . Поскольку далее придется использовать и другие компоненты S_{ijkl} , приведем их сразу из работы [3.7]. В записи

S_{ijkl} отсутствует суммирование по повторяющимся индексам:

$$\begin{aligned} S_{ijij} &= 1/2 Q (r_i^2 + r_j^2) I_{ij} + 1/2 R (I_i + I_j), \\ S_{iijj} &= Q r_j^2 I_{ij} - R I_i \quad (i \neq j), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{8\pi(1-\nu_M)}, \\ R &= \frac{1-2\nu_M}{8\pi(1-\nu_M)}, \\ I_i &= 2\pi a b_2 b_3 \int_0^\infty \frac{du}{(r_i^2 + u)\Delta}, \\ I_{ij} &= \frac{2}{3} \pi a b_2 b_3 \int_0^\infty \frac{du}{(r_i^2 + u)(r_j^2 + u)\Delta} \quad (i \neq j), \\ I_{ii} &= 2\pi a b_2 b_3 \int_0^\infty \frac{du}{(r_i^2 + u)^2 \Delta}, \\ \Delta &= (a^2 + u)^{1/2} (b_2^2 + u)^{1/2} (b_3^2 + u)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

и

$$r_1 = a, \quad r_2 = b_2, \quad r_3 = b_3 \quad (4.14)$$

— размеры эллипсоида в направлениях большой и малых осей.

Для случая вытянутого эллипсоида, когда $a > b_2 = b_3 = b$, Эшелби [3.7] показал, что

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\pi - I_2 - I_3, \\ I_2 &= I_3 = \frac{2\pi a b^2}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \left[\frac{a}{b} \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right)^{1/2} - \operatorname{arch}(a/b) \right], \\ I_{13} &= I_{12}, \\ I_{22} &= I_{33} = 3I_{23}, \\ I_{11} &= \frac{4\pi}{3a^2} - 2I_{12}, \\ a^2 I_{11} &= I_1 - 2b^2 I_{12}, \\ I_{12} + I_{22} + I_{23} &= \frac{4\pi}{3b^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Представленная задача рассмотрена в связи с намерением использовать эллипсоид в качестве модели волокна конечной длины. Для вытянутого эллипсоида в соответствии с соотношением

$a \gg b$ получим

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx 4\pi\kappa^2 \left(\ln \frac{2}{\kappa} - 1 \right), \\
 I_2 = I_3 &\approx 2\pi \left[1 - \kappa^2 \left(\ln \frac{2}{\kappa} - 1 \right) \right], \\
 a^2 I_{11} &\approx 4\pi\kappa^2 \left(\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{4}{3} \right), \\
 a^2 I_{12} = a^2 I_{13} &\approx \frac{2\pi}{3} \left[1 - 3\kappa^2 \left(\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{4}{3} \right) \right], \\
 b^2 I_{22} = b^2 I_{33} &\approx \pi \left(1 - \frac{\kappa^2}{2} \right), \\
 b^2 I_{23} &\approx \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{\kappa^2}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

где

$$\kappa = b/a \ll 1. \tag{4.17}$$

Соотношения (4.16) получены с использованием разложения $\text{arch}(1/\kappa)$ из (4.15) в ряд

$$\text{arch} \left(\frac{1}{\kappa} \right) = \ln \frac{2}{\kappa} - \frac{\kappa^2}{4} - \frac{3}{32} \kappa^4 \dots$$

Используя (4.16), компоненты S_{ijkl} в (4.12) для тонкого вытянутого эллипсоида можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &\approx \frac{2 - \nu_M}{1 - \nu_M} \kappa^2 \left[\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{5 - 2\nu_M}{2(2 - \nu_M)} \right], \\
 S_{1122} &\approx -\frac{1 - 2\nu_M}{2(1 - \nu_M)} \kappa^2 \left[\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{3 - 4\nu_M}{2(1 - 2\nu_M)} \right], \\
 S_{2222} &\approx \frac{5 - 4\nu_M}{8(1 - \nu_M)} - \frac{1 - 2\nu_M}{4(1 - \nu_M)} \kappa^2 \left[\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{1 - 8\nu_M}{4(1 - 2\nu_M)} \right], \\
 S_{2211} &\approx \frac{\nu_M}{2(1 - \nu_M)} - \frac{1 + \nu_M}{2(1 - \nu_M)} \kappa^2 \left[\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{3 + 2\nu_M}{2(1 + \nu_M)} \right], \\
 S_{2233} &\approx -\frac{1 - 4\nu_M}{8(1 - \nu_M)} + \frac{1 - 2\nu_M}{4(1 - \nu_M)} \kappa^2 \left[\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{5 - 8\nu_M}{4(1 - 2\nu_M)} \right], \\
 S_{1212} &\approx \frac{1}{4}, \\
 S_{2323} &\approx \frac{3 - 4\nu_M}{8(1 - \nu_M)}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Возвращаясь теперь к рассматриваемой задаче, подставим S_{2323} из (4.18) в (4.11), преобразуя последнее к виду

$$\frac{\mu_{23}}{\mu_M} = 1 + \frac{c(\mu_I/\mu_M - 1)}{1 + 2[(\mu_I/\mu_M) - 1]\{(3 - 4\nu_M)/[8(1 - \nu_M)]\}}. \tag{4.19}$$

Заметим, что этот результат совпадает с оценкой, полученной на основании модели, рассмотренной в разд. 3.3 (см. (3.15)). Таким образом, мы видим, что модуль сдвига μ_{23} , рассчитанный по модели, в которой волокна конечной длины заменяются вытянутыми эллипсоидами ($b/a \ll 1$), соответствует решению по модели, в которой волокна представлены цилиндрами бесконечной длины. Можно также показать, что в точности совпадают и решения для μ_{12} , полученные по модели с вытянутыми эллипсоидами и по модели с бесконечными цилиндрами при малой объемной доле включений (2.9).

Модуль Юнга и другие константы

Рассмотрим определение трех оставшихся констант E_{11} , ν_{12} и K_{23} . Начнем их определение, положив $\varepsilon_{11}^0 \neq \varepsilon$, $\varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{33}^0 = \varepsilon_{rr}^0 \neq 0$. Последние деформации можно задать так, чтобы отсутствовали напряжения на боковых поверхностях при выводе выражений для E_{11} и ν_{12} . Для определения K_{23} имеем $\varepsilon_{11}^0 = 0$. С учетом вышесказанного уравнение (4.5) дает

$$\begin{aligned} a_{11}\varepsilon_{11}^T + a_{12}\varepsilon_{rr}^T &= b_{11}\varepsilon_{11}^A + b_{12}\varepsilon_{rr}^A, \\ a_{21}\varepsilon_{11}^T + a_{22}\varepsilon_{rr}^T &= b_{21}\varepsilon_{11}^A + b_{22}\varepsilon_{rr}^A, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \Delta\lambda S_{ii11} + 2\Delta\mu S_{1111} + \lambda_M + 2\mu_M, \\ a_{12} &= 2\Delta\lambda S_{ii22} + 4\Delta\mu S_{1122} + 2\lambda_M, \\ a_{21} &= \Delta\lambda S_{ii11} + 2\Delta\mu S_{2211} + \lambda_M, \\ a_{22} &= 2\Delta\lambda S_{ii22} + 2\Delta\mu (S_{2222} + S_{2233}) + 2\lambda_M + 2\mu_M, \\ b_{11} &= -\Delta\lambda - 2\Delta\mu, \\ b_{12} &= -2\Delta\lambda, \\ b_{21} &= -\Delta\lambda, \\ b_{22} &= -2\Delta\lambda - 2\Delta\mu \end{aligned} \quad (4.21)$$

с

$$\Delta\lambda = \lambda_I - \lambda_M, \quad \Delta\mu = \mu_I - \mu_M. \quad (4.22)$$

Решение (4.20) относительно ε_{ij}^T в форме (4.6) дает следующие ненулевые элементы A_{ijkl} :

$$\begin{aligned} A_{1111} &= \frac{1}{D} (b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}), \\ A_{1122} = A_{1133} &= \frac{1}{2D} (b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22}), \\ A_{2211} = A_{3311} &= \frac{1}{D} (a_{11}b_{21} - b_{11}a_{21}), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$A_{2222} + A_{3333} = A_{3322} + A_{2233} = \frac{1}{D} (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12}),$$

$$\text{остальные } A_{ijkl} = 0,$$

где

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Теперь из (4.9) для одноосного напряженного состояния получим

$$\frac{E_{11}}{E_M} = 1 - c [A_{1111} - \nu_M (A_{1122} + A_{1133})], \quad (4.24)$$

где использованы соотношения (4.6) и (4.23). Подобным же образом найдено, что

$$\nu_{12} = \nu_M - c \{ A_{2211} + A_{3311} - \nu_M (A_{2222} + A_{2233}) + \nu_M [A_{1111} - \nu_M (A_{1122} + A_{1133})] \}, \quad (4.25)$$

$$K_{23} = K_M \{ 1 - c [A_{2222} + A_{2233} + \nu_M (A_{1122} + A_{1133})] \}. \quad (4.26)$$

Окончательный вид решений для E_{11} , ν_{12} и K_{23} в случае вытянутого эллипсоида получают после подстановки (4.23) в (4.24) — (4.26) при использовании (4.21) и (4.18).

Выпишем теперь окончательное развернутое выражение только для E_{11} . Формулы для ν_{12} и K_{23} в развернутом виде приведены в [3.6]. Запишем выражение для E_{11} :

$$\begin{aligned} \frac{E_{11}}{E_M} = 1 + c \times & \frac{\frac{\Delta\mu}{2(1-\nu_M)} (3\Delta\lambda + 2\Delta\mu) + \frac{E_M(1-2\nu_M)}{2(1+\nu_M)} \Delta\lambda + \frac{E_M(1+2\nu_M^2)}{(1+\nu_M)(1-2\nu_M)} \Delta\mu}{\Delta\mu(3\Delta\lambda + 2\Delta\mu) \left(\frac{1+\nu_M}{1-\nu_M} \right)^2 \left[\ln \frac{2}{\kappa} - \frac{5-4\nu_M}{4(1-\nu_M)} \right] + \frac{E_M}{2(1-\nu_M)} (\Delta\lambda + \Delta\mu) + \mu_m(3\lambda_m + 2\mu_m)} \\ & \quad (4.27) \end{aligned}$$

Полученное выражение полезно исследовать для двух частных случаев. С этой целью расположим члены этого выражения по степеням модуля упругости включений E_I . Записывая (4.27) в символической форме и располагая члены в порядке убывания степеней, получим

$$\frac{E_{11}}{E_M} = 1 + c \left[\frac{O(E_I^2) + O(E_I) + O(E_I^0)}{O(E_I^2) + O(E_I) + O(E_I^0)} \right].$$

Рассмотрим сначала случай, когда включения почти жесткие, так что

$$\frac{E_I}{E_M} \kappa^2 \ln \frac{2}{\kappa} \gg 1.$$

При этом в (4.27) достаточно сохранить только члены вида $O(E_I^2)$, что даст

$$\frac{E_{11}}{E_M} = 1 + c \left\{ \frac{1/[2(1 + \nu_M)]}{\kappa^2 \{ \ln(2/\kappa) - (5 - 4\nu_M)/[4(1 - \nu_M)] \}} \right\}. \quad (4.28)$$

Для противоположного случая примем, что

$$\frac{E_I}{E_M} \kappa^2 \ln \frac{2}{\kappa} \ll 1.$$

В этом случае в числителе и знаменателе соотношения (4.27) остаются только члены низших степеней относительно E_I :

$$\frac{E_{11}}{E_M} = 1 + c \left[\frac{E_I}{E_M} - 1 + \frac{2(\nu_I - \nu_M)^2}{(1 + \nu_M) + (E_M/E_I)(1 + \nu_I)(1 - 2\nu_I)} \right], \quad (4.29)$$

Это выражение идентично ранее полученному для модели с бесконечно длинными цилиндрами (2.5) при малой объемной доле включений.

Как общее решение (4.27), так и выражение (4.28) указывают на сильную зависимость эффективного модуля E_{11} от относительного размера эллипсоидального включения $\kappa = b/a$. Выражение (4.27) можно представить в следующем виде:

$$\frac{E_{11}}{E_M} = 1 + cA. \quad (4.30)$$

На рис. 3.5 показана зависимость коэффициента эффективности армирования A в (4.30) от κ и отношения модулей E_I/E_M . Огибающая семейства кривых на рис. 3.5 в области малых значений E_I/E_M соответствует уравнению (4.29), тогда как кривые для разных κ при больших E_I/E_M — уравнению (4.28).

Особый интерес представляет область значений $10 \leq E_I/E_M \leq 10^3$, соответствующая свойствам большинства практически применяемых волокнистых композитов. В этом диапазоне наблюдается сильная зависимость E_{11} от отношения поперечных размеров включений κ . Например, для $E_I/E_M = 200$ и $\kappa = 0,01$ ($l/d = 100$) значение коэффициента A в (4.30) составляет 82% от максимального значения при армировании бесконечно длинными волокнами, тогда как при $\kappa = 0,1$ ($l/d = 10$) величина A составляет всего лишь около 11% от предельного значения. Этот вывод относится, конечно, к малой объемной доле включений. При больших объемных долях влияние конечности размеров волокна l/d будет таким же, однако, вероятно, не столь сильным. Очевидно, для получения значительного армирующего эффекта отношение длины армирующих волокон к диаметру должно быть достаточно большим.

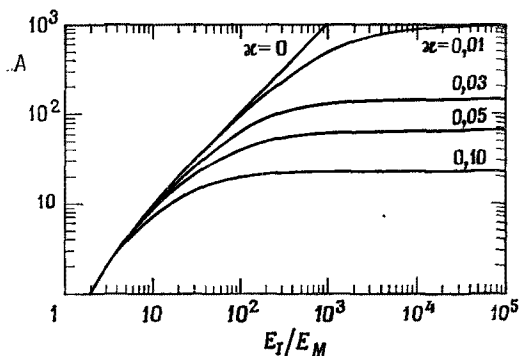


Рис. 3.5. Влияние конечной длины волокон на коэффициент эффективности армирования A [3.6]; $\nu_I = 0,25$; $\nu_M = 0,35$; A из уравнений (4.27), (4.30).

Задачи такого типа решались при помощи метода так называемого «сдвигового анализа». Однако исследование этого метода показывает, что в его основе лежат довольно грубые предположения, не согласующиеся с теорией упругости. Более тонкий подход, использующий формулы теории упругости в трехмерной постановке, предложен Муки и Штернбергом [3.8, 3.9]. Эти работы нашли свое продолжение в исследовании, выполненном Карне [3.10], который получил распределение напряжений для системы двух полубесконечных взаимодействующих волокон, заключенных в трехмерную упругую сплошную среду.

Наконец, следует упомянуть и работу Левина [3.11]. В задаче, подобной только что рассмотренной, он использовал решение Эшелби для вытянутого эллипсоидального включения для определения эффективных свойств среды, содержащей массив изолированных трещин.

3.5. СРЕДА С МАЛОЙ ОБЪЕМНОЙ ДОЛЕЙ ПЛАСТИНЧАТЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

В предыдущем разделе показана возможность анализа напряженного состояния среды с включением в виде вытянутого эллипсоида для моделирования волокнистого однонаправленного композита. Очевидно, включение пластинчатой формы, являющееся компонентом слоистого композита, можно представить в виде сплюсненного эллипсоида.

Рассмотрим свойства среды с малой объемной долей произвольно ориентированных тонких пластинчатых включений.

Соответствующую задачу о свойствах системы, армированной произвольно ориентированными¹⁾ волокнами, а также анализ систем, содержащих ориентированные пластинчатые включения, отложим до следующей главы. Пластинчатые включения будем моделировать сплюсненными эллипсоидами. Весь ход анализа в значительной степени подобен анализу, проведенному в предыдущем разделе при рассмотрении системы с вытянутыми эллипсоидами. Приведенные далее выводы в общем следуют работе Буше [3.12].

Равновероятность всех возможных ориентаций включений позволяет получить среду с изотропными эффективными свойствами. Соответствующие формулы для нахождения μ и k (II-2.14) здесь переписаны в следующем виде:

$$\frac{\mu - \mu_M}{\mu_I - \mu_M} = c \frac{\langle e_I \rangle}{\epsilon^0} \quad \text{и} \quad \frac{k - k_M}{k_I - k_M} = c \frac{\langle \epsilon_I \rangle}{\epsilon^0}, \quad (5.1)$$

где использованы обозначения предыдущего раздела, ϵ_{ij}^0 — наложенное однородное деформированное состояние, а $\langle e_I \rangle$ и $\langle \epsilon_I \rangle$ — объемное осреднение соответственно сдвиговых и объемных деформаций по включению. Таким образом, необходимо определить деформированное состояние включений в среде с малой их объемной долей.

Деформацию включений можно записать в виде суммы

$$(\epsilon_{ij})_I = \epsilon_{ij}^0 + \epsilon_{ij}^c, \quad (5.2)$$

где ϵ_{ij}^c определено в предыдущем разделе в виде

$$\epsilon_{ij}^c = S_{ijkl} e_{kl}^T, \quad (5.3)$$

причем e_{ij}^T — решение уравнения (4.5), а S_{ijkl} определено в предыдущем разделе. Решение уравнения (4.5) запишем в символической форме:

$$e_{ij}^T = A_{ijkl} \epsilon_{kl}^0. \quad (5.4)$$

Объединяя (5.3) и (5.4), получим

$$\epsilon_{ij}^c = S_{ijkl} A_{klmn} \epsilon_{mn}^0. \quad (5.5)$$

Подстановка (5.5) в (5.2) позволяет записать последнее как

$$(\epsilon_{ij})_I = T_{ijkl} \epsilon_{kl}^0, \quad (5.6)$$

где

$$T_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} + S_{ijmn} A_{mnkl}. \quad (5.7)$$

¹⁾ Этот перевод термина random orientation здесь и далее означает равновероятность всех возможных ориентаций характерных осей армирующих включений в плоскости или в пространстве. — *Прим. перев.*

Выражение (5.6) представляет собой прямое преобразование приложенного поля однородной деформации в деформированное состояние включения. Напомним, что в рассматриваемых условиях деформированное состояние включения однородно.

Рассмотрим далее заданное состояние объемной деформации:

$$\varepsilon_{ij}^0 = (\varepsilon/3) \delta_{ij}. \quad (5.8)$$

Подставляя (5.8) в (5.6), получим

$$(\varepsilon_{ij})_I = \frac{T_{jkk}}{3} \varepsilon. \quad (5.9)$$

Теперь T_{jkk} есть инвариант тензора T_{ijkl} , и соотношение (5.9) показывает, что изменение объема эллипсоидального включения не зависит от его ориентации. Этот вывод необходим для решения рассматриваемой задачи. Подстановка (5.9) в (5.1) дает

$$\frac{k - k_M}{k_I - k_M} = \frac{c}{3} T_{jkk}. \quad (5.10)$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению T_{jkk} , определенному в (5.7). Тензор S_{ijkl} входит в (5.7) в явном виде, а также неявно через A_{mnkl} . Следующий шаг состоит в поиске подходящей формы тензора S_{ijkl} для случая сплющенного эллипсоида.

Тензор S_{ijkl} в необходимом частном виде определен выражением (4.12). Для подстановки в (4.12) следует вычислить I_i и далее I_{ij} . Из [3.7] заимствуем подходящую для данной задачи форму I_2 и I_3 :

$$I_2 = I_3 = \frac{2\pi ab^2}{(b^2 - a^2)^{3/2}} \left[\arccos \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2} \right], \quad (5.11)$$

где $a = c$ и $b = c$ при $a < b$ — полуоси сплющенного эллипсоида, а направление 1 соответствует оси симметрии эллипсоида. Наибольший интерес для исследования представляют очень тонкие эллипсоиды. Рассмотрим только предельный случай, когда $a/b \rightarrow 0$. При этом из (5.11) следует

$$\lim_{a/b \rightarrow 0} I_2 = 0,$$

а из [3.7] можно найти

$$I_1 = 4\pi, \quad I_2 = I_3 = 0. \quad (5.12)$$

Сравним теперь (5.12) с соответствующими выражениями для тонких вытянутых эллипсоидов (4.16). Как видно, наши цели здесь более скромные — предстоит исследовать только предельный случай с $a/b \rightarrow 0$, тогда как при моделировании включения вытянутыми эллипсоидами в соответствующих разложениях пришлось сохранить два первых члена. Таким образом, мы не получим результатов для пластинчатых включений с конечным

отношением поперечных размеров, а ограничимся лишь вырожденным результатом для включений с бесконечным отношением.

На основании (5.12) из формул Эшелби [3.7] следуют значения I_{ij} , S_{jjkk} определяется из (4.12) и, наконец, T_{jjkk} — из (5.7). Подробные алгебраические выкладки длинны, однако достаточно очевидно и подобны уже сделанным в предыдущем разделе. Конечный результат имеет вид

$$\frac{k - k_M}{k_I - k_M} = \frac{c}{1 + (k_I - k_M)/(k_M + \frac{4}{3}\mu_I)}. \quad (5.13)$$

Теперь у нас достаточно исходных данных для решения задачи определения эффективного модуля сдвига μ . Для этого положим, что состояние сдвиговой деформации описывается следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^0 = e_{ij}^0, \quad \varepsilon_{kk}^0 = 0. \quad (5.14)$$

Эти условия после подстановки в (5.6) позволяют определить деформации сдвига во включениях:

$$(e_{ij})_I = T_{ijkl} e_{kl}^0 - \frac{T_{mnkl}}{3} e_{kl}^0 \delta_{ij}. \quad (5.15)$$

Далее следует найти объемное среднее $(e_{ij})_I$ для всех равновероятных ориентаций эллипсоидального включения. Выполнение этой процедуры связано с довольно сложной операцией интегрирования, которую мы обсудим позже в разд. 4.5. Пока заменим интегрирование следующей простой процедурой.

Обозначим среднее $(e_{ij})_I$ для всех возможных ориентаций включения через $(e_{ij})_I^{AV}$. Эта величина должна быть линейной функцией инвариантов первой степени от T_{ijkl} , а именно T_{ijij} и T_{jjkk} . Для отыскания линейной функции от этих инвариантов запишем частные формы для уравнения

$$\frac{(e_{ij})_I^{AV}}{e_{ij}^0} = C, \quad (5.16)$$

где из первоначальной формы уравнения эффективных свойств (5.1) следует, что C — константа. Для деформации сдвига в плоскости (1, 2) из (5.6) и (5.16) имеем $T_{1212}^{AV} = C/2$, где T_{ijkl}^{AV} получается интегрированием T_{ijkl} по всем возможным ориентациям эллипсоида. Еще два уравнения подобного типа вытекают из условий сдвигового деформирования в двух других плоскостях. Далее определяется деформация сдвига типа $\varepsilon_{22}^{AV} = -\varepsilon_{11}^{AV}$. Буше в [3.12] показал, что для этого случая из (5.6) и (5.16) следуют уравнение

$$T_{1111}^{AV} + T_{2222}^{AV} - T_{1122}^{AV} - T_{2211}^{AV} = 2C$$

и еще два подобных уравнения. Как показано в [3.12], линейные комбинации этих шести уравнений приводят к уравнению

$$3T_{ijij}^{AV} - T_{jjkk}^{AV} = 15C.$$

Это и есть искомый результат, так как $T_{ijij}^{AV} = T_{ijij}$ и $T_{jjkk}^{AV} = T_{jjkk}$ вследствие инвариантности свойств тензора T_{ijkl} .

Таким образом, можно записать

$$\frac{(e_{ij})_I^{AV}}{e_{ij}^0} = \frac{1}{15} (3T_{ijij} - T_{jjkk}). \quad (5.17)$$

Поступая так же, как и при вычислении k , найдем T_{ijij} , T_{jjkk} для предельного случая сплюсненного эллипсоида и, используя (5.1) и (5.17), получим

$$\frac{\mu - \mu_M}{\mu_I - \mu_M} = \frac{c}{1 + (\mu_I - \mu_M)/(\mu_M + \mu_d)}, \quad (5.18)$$

где

$$\mu_d = \frac{\mu_I(9k_I + 8\mu_I)}{6(k_I + 2\mu_I)}.$$

Окончательные результаты (5.13) и (5.18) и составляют основу для оценки армирующего действия пластинчатых включений при малой их объемной доле. Важность этих формул определяется не только тем, что они позволяют непосредственно оценить армирующий эффект. В следующей главе мы увидим, что результаты (5.13) и (5.18) можно рассматривать и как значения максимально достижимого эффекта армирования. Оставим доказательство этого вывода до гл. IV.

Заметим, между прочим, что выводы формул, проведенные здесь, могли быть с таким же успехом повторены и для случая среды с произвольно ориентированными волокнами на основании результатов, полученных в предыдущем разделе для вытянутого эллипсоида. Мы не будем следовать в этом направлении. В разд. 4.4 предложен другой способ решения задачи о композите с хаотической ориентацией волокон. В следующей главе мы еще раз проведем анализ свойств системы с хаотически ориентированными пластинчатыми включениями, используя метод, позволяющий получить решение без ограничения на их объемную долю.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что для трансверсально изотропной среды

$$\nu_{12}/E_{11} = \nu_{21}/E_{22}.$$

2. Проверьте справедливость соотношений (1.12)–(1.15), связывающих константы трансверсально изотропной среды.

3. Выведите выражения для E_{11} и ν_{12} на основании полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями.
4. Выведите выражения для μ_{12} на основании той же модели.
5. В разд. 3.4 оценены эффективные свойства композита с волокнами конечной длины при малой их объемной доле. Как изменяется влияние отношения длины волокна к диаметру в случае увеличения объемной доли волокон? Объясните свой ответ.
6. Сравните концентрацию напряжений у пластинчатых включений и волокон конечных размеров при одинаковых отношениях характерных размеров.
7. Используйте метод, предложенный в разд. 2.6 (теория смазки), для вывода выражения модуля сдвига в плоскости изотропии для однонаправленного композита на основе несжимаемой матрицы и идеально жестких волокон при высоких объемных долях волокон.
8. Объясните, почему области допустимых значений ν_i трансверсально изотропной среды и ν изотропной среды не совпадают.
9. Обсудите возможность использования результатов разд. 3.2 и 3.3 для оценки свойств композита с трансверсально изотропными волокнами (см. Хашин [8.13]).

ЛИТЕРАТУРА

- 3.1. Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. — *J. Appl. Mech.*, 1964, v. 31, p. 223. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1964, № 2, с. 71.]
- 3.2. Hill R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials. I. Elastic behavior. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1964, v. 12, p. 199.
- 3.3. Hashin Z. Viscoelastic fiber reinforced materials. — *AIAA Journal*, 1966, v. 4, p. 1411. [Имеется перевод: Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 8, с. 125—134.]
- 3.4. Hermans J. J. The elastic properties of fiber Reinforced materials when the fibers are aligned. — *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, 1967, v. B70, p. 1.
- 3.5. Christensen R. M., Lo K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1979, v. 27, No. 4.
- 3.6. Russel W. B. On the effective moduli of composite materials effect of fiber length and geometry at dilute concentrations. — *Z. Angew. Math. and Phys.*, 1973, v. 24, p. 581.
- 3.7. Eshelby J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. — *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1957, v. A241, p. 376.
- 3.8. Muki R., Sternberg E. On the diffusion of an axial load from an infinite cylindrical bar embedded in an elastic medium. — *Int. J. Solids and Structures*, 1969, v. 5, p. 587.
- 3.9. Sternberg E., Muki R. Load-absorption by a filament in a fiber-reinforced material. — *Z. Angew. Math. and Phys.*, 1970, v. 21, p. 552.
- 3.10. Carne T. G. Load absorption and interaction of two adjacent filaments in a fiber-reinforced material. — *J. Elasticity*, 1976, v. 6, p. 1.
- 3.11. Левин В. М. К определению эффективных упругих модулей композиционных материалов. — *ДАН СССР, сер. матем.-физ.*, 1975, т. 220, № 5, с. 1042—1045.
- 3.12. Boucher S. On the effective moduli of isotropic two-phase elastic composites. — *J. Comp. Mater.*, 1974, v. 8, p. 82.
- 3.13. Hashin Z. Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents. — *J. Appl. Mech.*, 1979, v. 46.

НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ; ДАЛЬНЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ

Мы получили несколько важных и полезных для практики результатов, относящихся к оценке эффективной жесткости сред с включениями различной формы, в частности сферической, цилиндрической и пластинчатой. Однако последний случай был рассмотрен только применительно к малой объемной доле включений. Было бы интересно и поучительно сопоставить эффективность армирования этими столь различными по форме включениями. Проводя сравнительную оценку эффективности армирования включениями различной формы, обобщим результаты предыдущих глав. Также попытаемся получить информацию о верхних и нижних оценках значений эффективных характеристик, не уточняя при этом форму поверхности раздела фаз.

На первый взгляд может показаться, что оценки эффективных свойств сверху и снизу не столь уж важны. В конце концов знание этих оценок не может заменить точно рассчитанной величины интересующей нас характеристики. И лишь когда нет подходящего способа расчета самой величины, знание ее оценок имеет определенный, хотя и ограниченный смысл. Однако если необходим прогноз для практических целей, то какую же величину следует задать: верхнюю или нижнюю оценку или же промежуточное значение? На поставленный вопрос ответа нет, и в этом смысле знание упомянутых оценок не особенно полезно.

Тем не менее существует и более целесообразное использование информации об оценках эффективных свойств. Мы хорошо умеем определять нижнюю и верхнюю оценки для двухфазных сред с некоторыми определенными формами поверхности раздела фаз. Знание верхней оценки дает нам фундаментальное представление об оптимальных геометрических формах твердых включений, армирующих податливую среду (матрицу). С другой стороны, изучая эти оценки, мы можем исследовать вопрос о том, какие геометрические формы пустот в композите дают наименьший эффект снижения его жесткости. Итак, все-таки оказывается, что информация об оценках свойств сверху и

снизу чрезвычайно полезна при анализе механического поведения гетерогенных сред.

В заключение несколько слов о вопросах, затронутых в главе и не связанных непосредственно с основным содержанием. В предыдущей главе были рассмотрены методы расчета эффективной жесткости сред с малой объемной долей произвольно ориентированных пластинчатых включений. В данной главе этот результат будет обобщен на случай любых объемных долей. Кроме того, получим соответствующие данные и для сред с произвольно ориентированными волокнами. Эти вопросы рассмотрены в разных главах не без основания. В предыдущей главе для анализа таких систем использовался метод Эшелби для включения эллипсоидальной формы. В данной главе используем совершенно иные методы по сравнению с методом Эшелби, в котором рассматриваются вытянутые или сплюснутые эллипсоиды. Эти методы, как будет показано, наиболее близки разделам, посвященным оценкам эффективных свойств.

4.1. МАКРОСКОПИЧЕСКИ ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

Совершенно очевидно, что теоремы о минимуме, рассмотренные в разд. 1.1, можно применить для получения оценок эффективных свойств. Используем для этого простейшие из допустимых полей переменных, вызывающие однородное напряжение или однородную деформацию по поперечному сечению всех фаз гетерогенного твердого тела. В частности, рассмотрим случай макроскопически изотропной среды, содержащей N различных фаз. Будем считать, что однородное деформированное состояние во всех фазах создается линейно изменяющимся полем перемещений. Тогда, используя теорему о минимуме потенциальной энергии и определяя эффективные свойства путем приравнивания энергии деформирования гетерогенной среды к энергии деформирования макроскопически однородной изотропной среды, получим, что эффективные модули ограничены следующим образом:

$$k \leq \sum_{i=1}^N c_i k_i, \quad \mu \leq \sum_{i=1}^N c_i \mu_i, \quad (1.1)$$

где c_i — объемные доли соответствующих фаз. При выводе соотношений (1.1) следует рассматривать независимые допустимые состояния объемного расширения и простого сдвига. С другой стороны, предположение об однородном напряженном состоянии во всей среде в сочетании с теоремой о минимуме до-

полнительной энергии дает

$$\frac{1}{k} \leq \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{k_i}, \quad \frac{1}{\mu} \leq \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{\mu_i}. \quad (1.2)$$

Объединяя неравенства (1.1) и (1.2), получим

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^N c_i/k_i} \leq k \leq \sum_{i=1}^N c_i k_i, \quad \frac{1}{\sum_{i=1}^N c_i/\mu_i} \leq \mu \leq \sum_{i=1}^N c_i \mu_i. \quad (1.3)$$

На эти неравенства, по-видимому, впервые обратил внимание Пауль [4.1]. Нижние границы (1.3) называются *границами по Фойгту*, а верхние — *границами по Рейссу*. Как Рейсс, так и Фойгт отметили, что соотношения такого типа присущи моделям сред, составленным из последовательных или параллельных элементов.

К сожалению, оценки по выражениям (1.3) настолько далеки от свойств типичных композитов, что не имеют практического значения. Конечно, мы знаем, как получить более точную информацию об эффективных свойствах для некоторых конкретных форм включений. Однако перед нами стоит цель получить возможно более точную информацию, не конкретизируя форму включений. Возникает вопрос: реально ли для таких условий получить оценки более близкие, чем по (1.3)? Интуитивный ответ будет, по-видимому, отрицательным. Действительно, как определить подходящее допустимое поле (иное, чем однородное использованное при выводе (1.3)), не определяя форму включений? И все же ответ на поставленный вопрос будет положительным. В данной главе будут найдены более близкие, чем по (1.3), и имеющие практический смысл оценки. Этот результат получен Хашином и Штрикманом [4.2] и является одним из замечательных достижений науки о композитах. В этой главе воспроизведен вывод Уэлпола [4.3], обобщившего на основании работ Хилла результаты [4.2].

Верхняя оценка

Представим гетерогенное твердое тело с заданными граничными условиями в перемещениях на поверхности, состоящее из N фаз, имеющих объем V_r и соответственно объемную долю c_r . Будем использовать безындексные обозначения тензоров по причинам, рассмотренным в разд. 1.1. Модули упругости фазы r обозначим через C_r . Введем квазиоднородное тело сравнения и зададим для него такие же граничные условия, что и для рассматриваемого гетерогенного тела. Подобный прием был

использован в разд. 1.4 при выводе формулы Эшелби. Свойства тела обозначим через \mathbf{C}_0 , пока не уточняя смысла этого обозначения.

Положим, что $\boldsymbol{\varepsilon}$ — любое поле деформаций в теле сравнения, вызванных непрерывными перемещениями, удовлетворяющими граничным условиям на поверхности. Пусть

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}, \quad (1.4)$$

где, как мы докажем в дальнейшем, $\boldsymbol{\sigma}^*$ — самоуравновешенные (удовлетворяющие уравнениям равновесия) напряжения, а $\boldsymbol{\tau}$ называются *напряжениями упругой поляризации*. Для

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0) \boldsymbol{\varepsilon}$$

имеем точное решение рассматриваемой задачи для гетерогенных сред, в других случаях $\boldsymbol{\sigma}^*$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ не удовлетворяют решению.

Рассмотрим кусочно-однородное напряжение поляризации

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r, \quad (1.5)$$

где $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r$ — значение $\boldsymbol{\varepsilon}$, осредненное по объему V_r . Таким образом,

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}_r \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r + \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon}'_r, \quad (1.6)$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_r = \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r. \quad (1.7)$$

Переменная $\boldsymbol{\varepsilon}'_r$ представляет собой отклонение $\boldsymbol{\varepsilon}$ от своего среднего значения по объему V_r .

Теорема о минимуме потенциальной энергии (разд. 1.1) выражается следующим образом:

$$U \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{C}_r \boldsymbol{\varepsilon} \, dv, \quad (1.8)$$

где U — энергия деформирования, соответствующая точному решению, и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — уже определенное, согласно (1.4), поле допустимых деформаций. Добавим к (1.8) еще один член, не изменяющий величины правой части. Тогда получим

$$U \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{C}_r \boldsymbol{\varepsilon} \, dv + \frac{1}{2} \int_{V_r} \boldsymbol{\sigma}^* (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) \, dv, \quad (1.9)$$

где $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ — осредненное по объему значение $\boldsymbol{\varepsilon}$, а последнее слагаемое, как мы сейчас докажем, равно нулю. Действительно, подынтегральное выражение в этом слагаемом равно нулю:

$$\boldsymbol{\sigma}^* (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon}) = 0,$$

поскольку $\boldsymbol{\sigma}^*$ самоуравновешено, и, следовательно, мы имеем не что иное, как выражение *принципа виртуальной работы*.

Подставляя (1.6) в (1.9) и используя (1.7), получим

$$U \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \varepsilon \mathbf{C}_r \varepsilon \, dv + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) [\mathbf{C}_r (\bar{\varepsilon} - \varepsilon) + \mathbf{C}_0 \varepsilon'_r] \, dv. \quad (1.10)$$

Выражение (1.10) можно представить в иной форме:

$$U \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \bar{\varepsilon} \mathbf{C}_r \bar{\varepsilon} \, dv + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \bar{\varepsilon} \mathbf{C}_0 \varepsilon'_r \, dv + \\ + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \varepsilon'_r (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0) \varepsilon'_r \, dv + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \bar{\varepsilon}_r (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0) \varepsilon'_r \, dv, \quad (1.11)$$

где вновь использовано (1.7).

Первое слагаемое в правой части (1.11) содержит только средние значения $\bar{\varepsilon}$, что позволяет непосредственно проинтегрировать его, после чего (1.11) преобразуется к виду

$$U \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N V_r \bar{\varepsilon} \mathbf{C}_r \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \varepsilon'_r (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0) \varepsilon'_r \, dv + \\ + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} [\bar{\varepsilon} \mathbf{C}_0 + \bar{\varepsilon}_r (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0)] \varepsilon'_r \, dv, \quad (1.12)$$

где последнее слагаемое представляет собой объединенные второй и четвертый члены из правой части (1.11). Оно равно нулю, поскольку переменные, включающие средние значения, можно вынести за знак интеграла, который, как следует из определения ε'_r (уравнение (1.7)), будет равен нулю:

$$\int_{V_r} \varepsilon'_r \, dv = 0.$$

После этого преобразования получим окончательно

$$U \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N V_r \bar{\varepsilon} \mathbf{C}_r \bar{\varepsilon} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \varepsilon'_r (\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_r) \varepsilon'_r \, dv. \quad (1.13)$$

Отсутствие симметрии в первом слагаемом, включающем как $\bar{\varepsilon}$, так и $\bar{\varepsilon}_r$, а не только одну из них, вызывает очередное осложнение, которое постараемся устранить далее.

Определим тензор $\bar{\mathbf{A}}_r$ так, что

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{\mathbf{A}}_r \bar{\varepsilon}. \quad (1.14)$$

Так как в (1.14) входят только осредненные переменные, то

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{A}}_r = \mathbf{I}, \quad (1.15)$$

где

$$\mathbf{I} = 1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Подстановка (1.14) в (1.13) дает

$$U \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N V_r \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{A}}_r \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \boldsymbol{\varepsilon}'_r (\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_r) \boldsymbol{\varepsilon}'_r dv. \quad (1.16)$$

Приравняем энергию деформирования U к соответствующей энергии деформирования тела сравнения, которая выражается через тензор эффективных характеристик \mathbf{C} . В результате получим

$$\left(\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) V \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N V_r \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{A}}_r \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \boldsymbol{\varepsilon}'_r (\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_r) \boldsymbol{\varepsilon}'_r dv. \quad (1.17)$$

Определим $\bar{\mathbf{C}}$ посредством соотношения

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_{r=1}^N c_r \mathbf{C}_r \bar{\mathbf{A}}_r. \quad (1.18)$$

Тогда (1.17) можно представить в виде

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{C} - \bar{\mathbf{C}}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq - \frac{1}{V} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \boldsymbol{\varepsilon}'_r (\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_r) \boldsymbol{\varepsilon}'_r dv. \quad (1.19)$$

Неравенство приняло окончательную форму, которая уже позволяет извлечь полезную информацию об оценках величины \mathbf{C} . Если соотношение (1.19) было бы записано не в тензорной форме, то, выбирая \mathbf{C}_0 достаточно большим, можно получить в результате $\mathbf{C} \leq \bar{\mathbf{C}}$ и задача, по существу, сведется к определению $\bar{\mathbf{C}}$. В полной тензорной форме (1.19) задача все же сводится к определению $\bar{\mathbf{C}}$. Для осуществления этой процедуры необходимо проделать далее громоздкие выкладки.

Поле деформаций

Теперь задача заключается в нахождении $\bar{\mathbf{C}}$ в соответствии с определениями (1.14) и (1.18), т. е. через $\boldsymbol{\varepsilon}$. Выбор деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ не вполне произволен. Она должна быть такой, чтобы напряжение $\boldsymbol{\sigma}^*$, определенное согласно (1.4) и (1.5), было самоуравновешенным. Так как переменная $\boldsymbol{\tau}$ (напряжение поляризации) не является самоуравновешенной, ее можно использо-

вать для определения поля внутренних сил. Это значит, что в изотропном теле сравнения для заданного поля τ (1.5) уравнения равновесия можно решить относительно внутренних сил, связанных с τ . Можно определить и деформированное состояние, связанное с τ . Примем, что в теле сравнения деформация $\hat{\varepsilon}$ определена через τ . Тогда напряжения, полученные через $\hat{\varepsilon}$ и τ по (1.4), будут самоуравновешенными; доказательство этого оставим читателю в качестве упражнения. Итак, перейдем к последней процедуре. Перемещение от действия напряжения τ запишем в следующем виде:

$$\hat{u}_i(\mathbf{r}) = \int_S G_{ij}[\tau_{jk}] n_k ds + \int_V G_{ij} \tau_{jk,k} dv, \quad (1.20)$$

где $[\tau_{jk}]$ — скачок напряжений τ на поверхности раздела фаз и G_{ij} — функция Грина для перемещения u_i вследствие действия силы F_j в трехмерной изотропной упругой среде, т. е. $u_i = G_{ij} F_j$. С другой стороны, (1.20) можно записать как

$$\hat{u}_i(\mathbf{r}) = - \int_V \frac{\partial G_{ij}}{\partial x'_k} \tau_{jk} dv, \quad (1.21)$$

где F_j относится к точке \mathbf{r}' . Согласно [4.4], подходящая форма функции Грина для материала сравнения имеет вид

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\delta_{ij}}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|} - \frac{k_0 + \mu_0/3}{8\pi\mu_0(k_0 + 4/3\mu_0)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (1.22)$$

Деформации $\hat{\varepsilon}_{ij}$ определяются дифференцированием (1.21). Окончательно суммарная деформация ε принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(\hat{u}_{i,i} + \hat{u}_{j,i}) + \varepsilon'_{ij}, \quad (1.23)$$

где дополнительная деформация ε'_{ij} приложена для удовлетворения граничных условий задачи в перемещениях. Чтобы убедиться в том, что напряжение, полученное при подстановке ε_{ij} в (1.4), остается самоуравновешенным, покажем далее, что деформация ε'_{ij} однородна.

Объединяя (1.21) и (1.23), получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k_0 + \mu_0/3}{\mu_0(k_0 + 4/3\mu_0)} \left[\sum_{r=1}^N \tau'_{kl} \Psi'_{ijkl} - \frac{1}{2\mu_0} \sum_{r=1}^N (\tau'_{ik} \Phi'_{kj} + \tau'_{jk} \Phi'_{ki}) \right] + \varepsilon'_{ij}, \quad (1.24)$$

где

$$\sigma^r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_r} \frac{dv}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.25)$$

$$\psi^r(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_r} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dv. \quad (1.26)$$

Можно показать, что потенциальные функции $\varphi^r(\mathbf{r})$ и $\psi^r(\mathbf{r})$ удовлетворяют условию

$$\nabla^4 \psi^r = \nabla^2 \varphi^r = 1 \quad \text{внутри } V_r. \quad (1.27)$$

Теперь для получения $\bar{\epsilon}_r$ необходимо знать осредненные значения функций $\varphi^r_{,ij}$ и $\psi^r_{,ijkl}$. Потенциал φ^r представляет собой обычный гравитационный потенциал «массы» единичной плотности, занимающей объем V_r . Эта «масса» изотропна и равномерно распределена по объему. Поэтому среднее значение $\varphi^r_{,ij}$ должно быть изотропным тензором второго ранга. Это утверждение вместе с (1.27) дает

$$\varphi^r_{,ij} |_{AV} = 1/2 \delta_{ij}. \quad (1.28)$$

Подобным же образом потенциал ψ является бигармоническим потенциалом. Можно показать, что

$$\psi^r_{,ijkl} |_{AV} = 1/15 (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (1.29)$$

Подставляя (1.28) и (1.29) в (1.24) и используя τ из (1.5), получим

$$\bar{\epsilon}_r = -\mathbf{P}_0 \tau^r + \epsilon^I = \mathbf{P}_0 (\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_r) \bar{\epsilon}_r + \epsilon^I, \quad (1.30)$$

где

$$\mathbf{P}_0 = (\mathbf{C}_0^* + \mathbf{C}_0)^{-1} \quad (1.31)$$

с \mathbf{C}_0^* , имеющим вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^* &= k_0^* \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0^* (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2/3 \delta_{ij} \delta_{kl}), \\ k_0^* &= 4/3 \mu_0, \quad \mu_0^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{10}{9k_0 + 8\mu_0} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Обратная операция в (1.31) определена посредством $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_0^{-1} = \mathbf{I}$. Запишем (1.30) как

$$\bar{\epsilon}_r = \mathbf{A}_r \epsilon^I, \quad (1.33)$$

где

$$\mathbf{A}_r = [\mathbf{I} + \mathbf{P}_0 (\mathbf{L}_r - \mathbf{L}_0)]^{-1}. \quad (1.34)$$

Используя (1.31), можем записать (1.34) в виде

$$(\mathbf{C}_0^* + \mathbf{C}_r) \mathbf{A}_r = \mathbf{C}_0^* + \mathbf{C}_0. \quad (1.35)$$

Теперь умножим (1.33) на c_r и просуммируем:

$$\sum_{r=1}^N c_r \bar{\varepsilon}_r = \sum_{r=1}^N c_r \mathbf{A}_r \varepsilon^I. \quad (1.36)$$

Первый член есть не что иное, как $\bar{\varepsilon}$; таким образом,

$$\varepsilon^I = \left(\sum_{r=1}^N c_r \mathbf{A}_r \right)^{-1} \bar{\varepsilon}. \quad (1.37)$$

Отметим на данном этапе, что форма представления (1.37) гарантирует однородность поля деформаций ε^I , так как $\bar{\varepsilon}$ — объемное среднее. Однородность ε^I была условием, необходимым при выводе (1.23).

Подставляя (1.37) обратно в (1.33), получим

$$\bar{\varepsilon}_r = \mathbf{A}_r \left(\sum_{r=1}^N c_r \mathbf{A}_r \right)^{-1} \bar{\varepsilon}. \quad (1.38)$$

Это в точности то же самое, что и (1.14); таким образом, мы связали $\bar{\mathbf{A}}_r$ и \mathbf{A}_r посредством соотношения

$$\bar{\mathbf{A}}_r = \mathbf{A}_r \left(\sum_{r=1}^N c_r \mathbf{A}_r \right)^{-1}. \quad (1.39)$$

Подстановка (1.39) в (1.18) дает

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_{r=1}^N c_r \mathbf{C}_r \mathbf{A}_r \left(\sum_{r=1}^N c_r \mathbf{A}_r \right)^{-1}. \quad (1.40)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\bar{\mathbf{C}} = \sum_{r=1}^N c_r (\mathbf{C}_0^* + \mathbf{C}_r) \mathbf{A}_r \left(\sum_{r=1}^N c_r \mathbf{A}_r \right)^{-1} - \mathbf{C}_0^*, \quad (1.41)$$

где \mathbf{C}_0^* прибавлено и вычтено из правой части. Используя (1.35), уравнение (1.41) можно привести к следующей форме:

$$\bar{\mathbf{C}} = \left[\sum_{r=1}^N c_r (\mathbf{C}_0^* + \mathbf{C}_r)^{-1} \right]^{-1} - \mathbf{C}_0^*. \quad (1.42)$$

Численные оценки

Наконец, перейдем к определению оценок эффективных модулей. Применяя неравенство (1.19), полученное на основании теоремы о минимуме потенциальной энергии, имеем

$$\gamma(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{C})\gamma \geq 0, \quad \text{если} \quad \gamma(\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}_r)\gamma \geq 0, \quad (1.43)$$

где γ — любой симметричный тензор второго ранга. Очевидно, можно считать, что \mathbf{C}_0 характеризует фазу, обладающую наибольшей жесткостью. В случае изотропного материала примем

$$\mu_0 = \mu_{\max}, \quad k_0 = k_{\max}, \quad (1.44)$$

где μ_{\max} и k_{\max} — максимальные характеристики любой из N фаз. Теперь, подставляя $\bar{\mathbf{C}}$ для изотропной среды из (1.42) в (1.43), получим

$$\begin{aligned} k &\leq \left[\sum_{r=1}^N c_r (k_g^* + k_r)^{-1} \right]^{-1} - k_g^*, \\ \mu &\leq \left[\sum_{r=1}^N c_r (\mu_g^* + \mu_r)^{-1} \right]^{-1} - \mu_g^*, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где μ_g^* и k_g^* определяются из (1.32) в виде

$$k_g^* = \frac{4}{3} \mu_{\max}, \quad \mu_g^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_{\max}} + \frac{10}{9k_{\max} + 8\mu_{\max}} \right)^{-1}. \quad (1.46)$$

Для двухфазного материала из (1.18) имеем

$$\bar{\mathbf{C}} = c_1 \mathbf{L}_1 \bar{\mathbf{A}}_1 + c_2 \mathbf{L}_2 \bar{\mathbf{A}}_2, \quad (1.47)$$

или, записанное с помощью (1.15),

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_2 + c_1 (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \bar{\mathbf{A}}_1. \quad (1.48)$$

Используя (1.35) и (1.39), преобразуем (1.48) к виду

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_2 + c_1 (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) [\mathbf{I} + c_2 (\mathbf{C}_0^* + \mathbf{C}_2)^{-1} (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)]^{-1}. \quad (1.49)$$

Теперь, подставляя $\bar{\mathbf{C}}$ из (1.49) в (1.43), где свойства тела сравнения \mathbf{C}_0 представлены в форме (1.44), получаем оценки свойств в форме, соответствующей (1.45).

Подобным образом можно применить теорему о минимуме дополнительной энергии для получения нижних оценок эффективных свойств. Окончательный результат для двухфазной среды (l — нижняя оценка, u — верхняя) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{1 + [(1 - c_1)(k_1 - k_2)/(k_2 + k_l)]} &\leq \frac{k - k_2}{k_1 - k_2} \leq \\ &\leq \frac{c_1}{1 + [(1 - c_1)(k_1 - k_2)/(k_2 + k_u)]}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{1 + [(1 - c_1)(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \mu_l)]} &\leq \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \leq \\ &\leq \frac{c_1}{1 + [(1 - c_1)(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \mu_u)]}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где для $(\mu_1 - \mu_2)(k_1 - k_2) \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} k_l &= {}^4/3\mu_2, & k_u &= {}^4/3\mu_1, \\ \mu_l &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{10}{9k_2 + 8\mu_2} \right)^{-1}, \\ \mu_u &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{10}{9k_1 + 8\mu_1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.52)$$

и для $(\mu_1 - \mu_2)(k_1 - k_2) \leq 0$

$$\begin{aligned} k_l &= {}^4/3\mu_1, & k_u &= {}^4/3\mu_2, \\ \mu_l &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{10}{9k_1 + 8\mu_2} \right)^{-1}, \\ \mu_u &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{10}{9k_2 + 8\mu_1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Сопоставление полученных оценок с оценками Рейсса и Фойгта (1.3) для частных случаев показывает, что они гораздо более определены. Обе системы оценок (1.50), (1.51) и (1.3) получены на основании классических теорем о минимуме для упругих тел. Решающим шагом, позволившим получить (1.50) и (1.51), явилось введение переменных полей допустимых напряжений и деформаций в отличие от однородных полей напряжений и деформаций, использованных при выводе (1.3). Даже не уточняя формы включений, мы смогли получить переменные поля допустимых напряжений и деформаций, что и позволило прийти к более близким оценкам эффективных жесткостей гетерогенной среды.

Теперь перед нами стоит следующий важный вопрос: являются ли оценки (1.50), (1.51) наиболее близкими из тех, которые можно получить без уточнения формы включений? На этот вопрос получим по крайней мере частичный ответ. До этого, однако, и до анализа полученных выражений найдем соответствующие оценки для трансверсально изотропных сред.

4.2. ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА

Для получения оценок эффективных свойств гетерогенной среды, являющейся макроскопически трансверсально изотропной, применимы теоремы о минимуме для упругих тел. В предыдущем разделе мы видели, как можно получить эти результаты, поэтому здесь только приведем соответствующие соотношения для двухфазной трансверсально изотропной среды, полученные Хашином [4.5] и Хиллом [4.6]. Предполагается, что $\mu_1 > \mu_2$, $k_1 > k_2$ и, как всегда, ось 1 совпадает с направлением

оси симметрии среды. Оценки пяти независимых констант упругости имеют вид

$$K_2 + \frac{c_1}{1/(K_1 - K_2) + c_2/(K_2 + \mu_2)} \leq K_{23} \leq K_1 + \frac{c_2}{1/(K_2 - K_1) + c_1/(K_1 + \mu_1)}, \quad (2.1)$$

$$\mu_2 + \frac{c_1}{1/(\mu_1 - \mu_2) + c_2(K_2 + 2\mu_2)/2\mu_2(K_2 + \mu_2)} \leq \mu_{23} \leq \mu_1 + \frac{c_2}{1/(\mu_2 - \mu_1) + c_1(K_1 + 2\mu_1)/2\mu_1(K_1 + \mu_1)}, \quad (2.2)$$

$$\mu_2 + \frac{c_1}{1/(\mu_1 - \mu_2) + c_2/2\mu_2} \leq \mu_{12} \leq \mu_1 + \frac{c_2}{1/(\mu_2 - \mu_1) + c_1/2\mu_1}, \quad (2.3)$$

$$\frac{c_1 c_2}{c_1/K_2 + c_2/K_1 + 1/\mu_2} \leq \frac{E_{11} - c_1 E_1 - c_2 E_2}{4(\nu_1 - \nu_2)^2} \leq \frac{c_1 c_2}{c_1/K_2 + c_2/K_1 + 1/\mu_1}, \quad (2.4)$$

$$\frac{c_1 c_2}{c_1/K_2 + c_2/K_1 + 1/\mu_2} \leq \frac{\nu_{12} - c_1 \nu_1 - c_2 \nu_2}{(\nu_1 - \nu_2)(1/K_2 - 1/K_1)} \leq \frac{c_1 c_2}{c_1/K_2 + c_2/K_1 + 1/\mu_1}. \quad (2.5)$$

Напомним, что K есть объемный модуль плоской деформации, определенный для изотропного материала как $K = k + \mu/3$. Интерпретация этих выражений будет дана далее.

4.3. АНАЛИЗ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

Выражения для эффективных свойств и их оценок, полученные в предыдущих главах и в начале этой главы, позволяют провести полезный анализ. Рассмотрим одновременно два типа сред — макроскопически изотропную и трансверсально изотропную, поскольку их объединяет ряд общих черт.

Сначала обратим внимание, что при $\mu_1 = \mu_2$ оценки объемных модулей k (1.50) совпадают, являясь для этого случая точным решением; оценки μ совпадают тривиально. Подобным же образом для трансверсальной изотропии при $\mu_1 = \mu_2$ известны точные решения для всех пяти эффективных констант.

Далее заметим, что выражение для нижней оценки k (1.50) совпадает с результатом, полученным для полидисперсной модели среды со сферическими включениями (II-3.17), если индексом 2 обозначена фаза матрицы и индексом 1 — фаза включения при $(\mu_1 - \mu_2)(k_1 - k_2) \geq 0$. С другой стороны, заметим, что выражение для верхней оценки k (1.50) совпадает с соответствующим выражением для полидисперсной модели среды со сферическими включениями, если индексом 1 обозначена фаза матрицы и индексом 2 — фаза включения опять при $(\mu_1 -$

— $\mu_2)(k_1 - k_2) \geq 0$. Таким образом, совпадение оценок k с точными результатами для частной модели указывает на то, что это наилучшие оценки, которые можно получить, не уточняя геометрию составляющих материал фаз.

Можно, кажется, ожидать подобного поведения и для оценок μ . Однако это не так. Единственной моделью, для которой есть точное решение для μ во всем диапазоне коэффициентов армирования, является трехфазная модель, рассмотренная в разд. 2.4. Как мы вскоре увидим, расчеты по этой модели в общем случае не совпадают с полученными оценками (1.51). Исключение составляют только случаи, когда объемная доля одной из фаз очень мала или очень велика. Например, для малой объемной доли включений величина μ по (II-2.23) совпадает с выражениями верхней и нижней оценок по (1.51) при соответствующем обозначении фаз. Это соответствие результатов расчета μ по модели с полученными оценками наблюдается также для полидисперсной модели среды со сферическими включениями при очень малой или очень большой объемной доле последних.

Точно такая же ситуация существует и для трансверсально изотропной среды. Из пяти выражений для оценок (2.1) — (2.5) все, кроме формулы для μ_{23} , совпадают (при соответствующем обозначении фаз) с расчетом по полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями (разд. 3.2). Таким образом, по крайней мере для этих четырех характеристик выражения для оценок являются наилучшими из тех, которые можно получить без уточнения формы поверхности раздела фаз. Что касается μ_{23} , то расчеты по трехфазной модели (разд. 3.3) не совпадают с соответствующими выражениями границ (2.2), за исключением случаев очень высокой или очень малой объемной доли включений.

Следует упомянуть еще два результата, относящиеся к оценкам свойств. Это точные оценки для полидисперсных моделей сред со сферическими, найденные Хашином [4.7], и цилиндрическими (Хашин и Розен [4.8]) включениями. Полученные ими выражения не следует путать с приведенными в этой главе, поскольку первые справедливы для частной геометрической модели, а последние применимы при произвольных геометрических характеристиках гетерогенных сред внутри соответствующих классов симметрии. Было бы интересно сравнить расчеты по этим различным выражениям для конкретного композита. Наиболее важно сопоставить решения для трехфазных моделей, рассмотренных в разд. 2.4 и 3.3, с соответствующими оценками.

Случай макроскопической изотропии рассмотрим на примере эпоксидной смолы, наполненной стеклянными сферами. Зависимости эффективного модуля сдвига и его оценок от объемной доли частиц приведены на рис. 4.1. Верхняя граница,

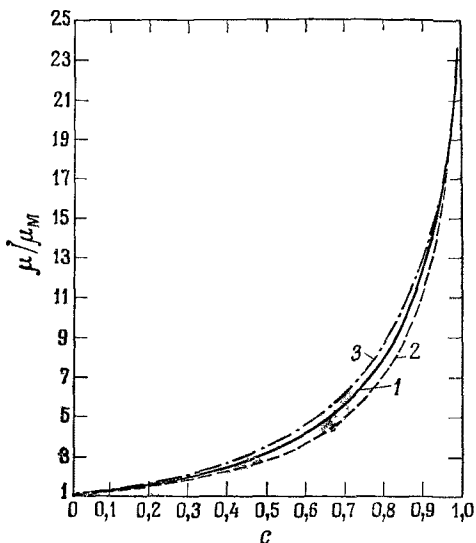


Рис. 4.1. Эффективный модуль сдвига для композита — стеклянные микросферы в эпоксидной матрице ($\mu_l/\mu_m = 23,46$; $\nu_l = 0,22$; $\nu_m = 0,35$); 1 — расчет по трехфазной модели, уравнение (II-4.12); 2 — оценка снизу без уточнения геометрии фаз; 3 — оценка сверху по полидисперсной модели.

определенная для модели с произвольной поверхностью раздела фаз (1.51), и нижняя граница, подсчитанная по полидисперсной модели среды со сферическими включениями, лежат вне границ, показанных на рис. 4.1. Вероятно, прежде всего следует обратить внимание на то, что формула нижней оценки (1.51) дает хорошую аппроксимацию расчета (рис. 4.1) по трехфазной модели (II-4.12) при не слишком больших объемных долях включений. Эта особенность существенна, поскольку выражение (II-4.12) не отличается простотой, а оценка μ рассчитывается по очень простой формуле. Однако в любом случае замену точного решения оценкой следует выполнять осторожно, проводя всегда численную проверку для рассматриваемой конкретной системы. Интересно отметить, что результат Кернера, упомянутый в разд. 2.4, соответствует нижней оценке по (1.51). Ошибка в работе Кернера является, по-видимому, следствием сильно упрощенного подхода.

Аналогичным образом проведем расчеты для композита на основе стекловолокон в эпоксидной матрице. Зависимость модуля сдвига μ_{23} и его оценок от объемной доли волокон представ-

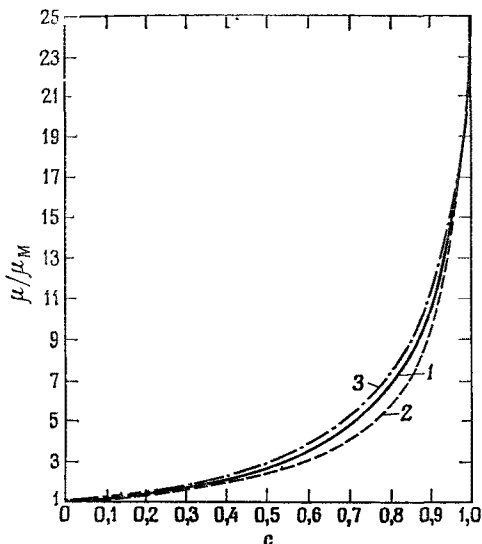


Рис. 4.2. Эффективный модуль сдвига в плоскости изотропии для однонаправленного композита — стекловолокна в эпоксидной матрице ($\mu_F/\mu_M = 23,46$; $\nu_F = 0,22$; $\nu_M = 0,35$); 1 — расчет по трехфазной модели, уравнение (III-3.14); 2 — оценка снизу без уточнения геометрии фаз; 3 — оценка сверху по полидисперсной модели.

лена на рис. 4.2. Верхняя оценка для произвольной геометрии по (2.2) и нижняя оценка по полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями лежат вне границ, показанных на рисунке. Выражение верхней оценки модуля сдвига по полидисперсной модели композита с цилиндрическими включениями, полученное Хашином [4.9], имеет вид

$$\mu_{23} \Big|_{\text{CYL}}^{\text{COMP}} < \frac{(1 + \alpha c^3)(\rho + \beta_M c) - 3c(1 - c)^2 \beta_M^2}{(1 + \alpha c^3)(\rho - c) - 3c(1 - c)^2 \beta_M^2} \mu_M, \quad (3.1)$$

где

$$\alpha = \frac{\beta_M - \gamma \beta_F}{1 + \gamma \beta_F}, \quad \rho = \frac{\gamma + \beta_M}{\gamma - 1}, \quad \gamma = \frac{\mu_F}{\mu_M},$$

$$\beta_F = \frac{1}{3 - 4\nu_F}, \quad \beta_M = \frac{1}{3 - 4\nu_M}.$$

Можно заметить, что нижняя оценка по (2.2) дает хорошее приближение к результату (III-3.14) при сравнительно небольших объемных долях. Результаты Германса, упомянутые в разд. 3.3, совпадают с нижней оценкой по (2.2). Очевидно, нарушение

граничных условий в работе Германса приводит к значительно-му упрощению конечного результата. Таким образом, выводы в отношении работ Кернера и Германса аналогичны.

В разд. 3.5 были получены оценки эффективных жесткостей среды с малой объемной долей произвольно ориентированных пластинчатых включений. Интересно сопоставить свойства, прогнозируемые на основании этой модели, с обобщенными оценками, рассмотренными в данной главе. Сравнение расчетов для k и μ по (III-5.13), (III-5.18) с верхними оценками по (1.50) и (1.51) при условии малости объемных долей указывает на хорошее совпадение, когда фаза 1 отождествляется с относительно жестким пластинчатым включением и фаза 2 — с более податливой средой. Этот очень интересный результат свидетельствует о том, что армирование пластинчатыми включениями является наилучшим, когда нужно обеспечить композиту жесткость при малом объемном содержании вводимых частиц. Важно, однако, заметить, что в этом отношении рассмотренная форма (пластинчатых) армирующих частиц не является единственной.

Как уже установлено, в условиях малых объемных долей включений расчет по полидисперсной модели среды со сферическими включениями, так же как и расчет по трехфазной модели, рассмотренной в разд. 2.4, указывает на максимальный армирующий эффект, когда включение является более податливой фазой. Мы уже знаем, что при больших объемных долях результаты расчета по трехфазной модели (разд. 2.4) не совпадают с верхней оценкой по (1.51). В связи с этим очень интересно выяснить, совпадают ли с верхней оценкой результаты расчета по модели среды с пластинчатыми включениями при увеличении их объемной доли. Ответ на этот вопрос будет получен в следующем разделе после рассмотрения соответствующей модели.

В заключение данного раздела обсудим область применения развитых моделей. Будем рассматривать случай армирования волокнами, поскольку в гл. II с этой точки зрения уже рассматривалась полидисперсная модель среды со сферическими включениями. Для систем, армированных волокнами, суть вопроса состоит в следующем: насколько хорошо полидисперсная модель среды с цилиндрическими включениями и трехфазная модель, рассмотренные соответственно в разд. 3.2 и 3.3, описывают поведение реальных волокнистых композитов? В конце концов исследованные модели идеализируют композит как систему цилиндров, имеющую бесконечно большой разброс размеров, вплоть до бесконечно малых, тогда как большинство реальных волокнистых композитов содержит волокна только одного размера. Различие между моделью и реальной системой представляется

существенным. Однако, как показано, это расхождение для типичных композитов не столь уж значительно.

Прежде всего формула (III-2.5) подтверждает применимость правила смеси для определения модуля упругости при одноосном нагружении E_{11} . Это широко используется на практике. Аналогичная ситуация существует и в отношении коэффициента Пуассона ν_{12} . Из оставшихся трех независимых констант μ_{23} , K_{23} и μ_{12} наиболее чувствительной к геометрическим параметрам модели является, вероятно, модуль сдвига μ_{23} в плоскости изотропии. Расчет модуля упругости E_{22} при одноосном растяжении приводит, так же как и расчет μ_{23} , к критической оценке применимости модели композита. Можно обнаружить, что экспериментальные данные подтверждают почти любой результат расчета по модели. Мы полагаем, что более содержательную оценку точности прогноза по аналитическим моделям, рассмотренным здесь, дает сопоставление расчетов по ним с численными решениями для систем, содержащих волокна одного размера. Детальное сравнение такого рода проведено Беренсом [4.10], использовавшим численное решение Чена и Ченга [4.11] для случая гексагональной упаковки волокон одного диаметра. В частности, показано, что трансверсальный модуль упругости для одноосного нагружения при гексагональной упаковке очень близок или слегка превышает рассчитанный по модели композита с цилиндрическими включениями через характеристики E_{11} , ν_{12} , K_{23} , μ_{12} и нижнюю оценку μ_{23} по (2.2). Это полностью соответствует зависимости, приведенной на рис. 4.2, где нижняя оценка очень близка к результату, полученному для μ_{23} по трехфазной модели.

Таким образом, можно сделать вывод, что для типичных представляющих интерес волокнистых композитов уточнение геометрических характеристик гетерогенной среды гораздо менее существенно, чем просто правильная классификация фаз в поперечном сечении композита на непрерывную фазу и фазу включений. Безусловно, такой вывод не является универсальным. Все зависит от отношения жесткостей включений и матрицы. В предельном случае для бесконечно жестких волокон одного размера нельзя ожидать содержательных оценок μ_{23} при коэффициентах объемного содержания волокон, близких к максимальным, как по полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями, так и по трехфазной модели. Несмотря на эти ограничения, для практически интересных систем композитов можно получить, как уже обсуждалось выше, вполне реалистические прогнозы констант упругости по полидисперсной и трехфазной (для μ_{23}) моделям. Не менее важно, что расчеты по этим моделям являются единственными строго обоснованными расчетами. Альтернативу этим моделям составляет множество

эмпирических формул, одна из которых упомянута при постановке задачи.

В разд. 4.4 проведем анализ эффективных свойств композита, армированного произвольно ориентированными волокнами. При этом необходимо использовать соответствующие характеристики композита с выпрямленными параллельными волокнами. Константы E_{11} , ν_{12} , K_{23} , μ_{12} будут выражены при помощи полидисперсной модели, а для μ_{23} используем зависимость (III-3.14), полученную по трехфазной модели. Однако, поскольку последняя зависимость имеет сложную аналитическую форму, аппроксимируем ее выражением для нижней оценки (2.2). Подобная замена, если обратиться к рис. 4.2, является вполне оправданной. Далее перейдем к задаче об армировании произвольно ориентированными волокнами, после чего обсудим задачу об описании композита, армированного произвольно ориентированными пластинчатыми частицами. В последнем случае решение задачи облегчается отсутствием затруднений в определении пяти независимых констант для случая упорядоченной ориентации частиц. Как показано, все эти пять констант определяются непосредственно из точных решений.

4.4. СВОЙСТВА МАКРОСКОПИЧЕСКИ ИЗОТРОПНЫХ ВОЛОКНИСТЫХ СРЕД

В предыдущих разделах были довольно подробно рассмотрены свойства композитов с выпрямленными параллельными волокнами. Теперь обратимся к близкой проблеме описания поведения систем, содержащих произвольно ориентированные волокна. Будем оценивать эффективные модули для случаев произвольной ориентации волокон в пространстве и плоскости.

Пространственное армирование

Рассмотрим эту систему армирования первой, как более сложную. Не вызывает сомнения, что ее эффективные свойства будут изотропными. Безусловно, можно достичь желаемой цели, следуя разд. 3.5, где была исследована среда с малой объемной долей произвольно ориентированных пластинчатых включений. Решение основывалось на моделировании включений сплюсненными эллипсоидами. Аналогично волокна можно моделировать вытянутыми эллипсоидами и повторить преобразования разд. 3.5.

Мы используем другой подход, по крайней мере чтобы не ограничиваться условием малости объемной доли включений. Метод, которым мы воспользуемся здесь, позволяет получить

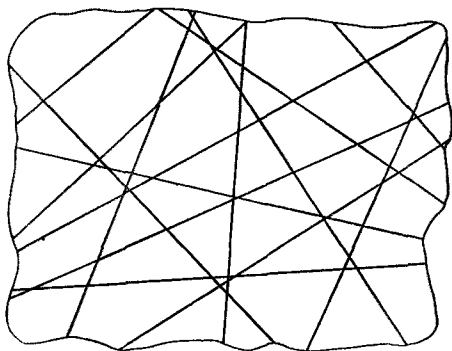


Рис. 4.3. Произвольная ориентация волокон — представительный элемент объема

более общие результаты. Начнем с рассмотрения структуры материала, показанной на рис. 4.3. Допустим, что представительный элемент объема содержит непрерывные волокна, которые оканчиваются только на поверхности элемента. Было бы нелегко решать задачу об определении эффективных свойств тела, содержащего произвольно ориентированные волокна (рис. 4.3), как граничную для многосвязной области. Будем действовать иначе.

Обратим внимание сначала на отличительную особенность задачи, поставленной для представительного элемента объема, показанного на рис. 4.3. Эта особенность заключается в совместности деформаций волокон и деформаций элемента в целом. Таким образом, граничным условиям, наложенным на поверхность представительного элемента объема, соответствует определенный уровень деформации в волокнах. Сущность предлагаемого подхода заключается в выполнении требования совместности деформаций. Будем решать задачу, рассматривая тело с выпрямленными параллельными волокнами при заданном уровне деформации. Проведем процедуру пространственного осреднения, которая эффективно соответствует приданию системе с параллельными волокнами всех возможных направлений в пространстве по отношению к направлению заданной деформации. Будем считать, что результаты, полученные таким образом, представляют деформацию реальной системы, показанной на рис. 4.3. Перейдем к осуществлению процедуры осреднения.

Основные уравнения для трансверсально изотропной среды (характерные для системы с выпрямленными параллельными волокнами) были приведены ранее (см. (III-1.1)). Следуя Кристенсену и Вальсу [4.12], начнем с наложения деформации в произвольном направлении относительно оси симметрии

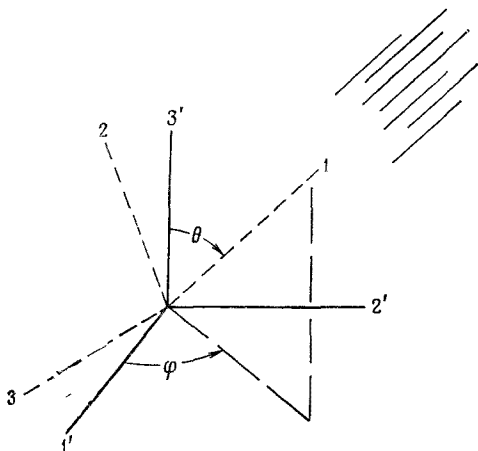


Рис. 4.4. Основная и вспомогательная системы координат.

трансверсально изотропной среды. Ситуация иллюстрируется на рис. 4.4, где ось 1 совпадает с направлением оси симметрии, а ось 3' — с направлением действия приложенной деформации. Эти условия формулируются следующим образом:

$$\epsilon'_{33} \neq 0, \quad \epsilon'_{ij} = 0 \quad \text{для } i \neq 3, \quad j \neq 3. \quad (4.1)$$

Можно принять без потери общности, что ось 3 лежит в плоскости 1', 2'. Соответствующий тензорный закон преобразования компонент деформации имеет вид

$$e_{\alpha\beta} = l_{i\alpha} l_{j\beta} e'_{ij}, \quad (4.2)$$

где $l_{i\alpha}$ — направляющий косинус угла между осями x'_i и x_α . Объединяя уравнения (4.1) и (4.2), получаем

$$e_{\alpha\beta} = l_{3\alpha} l_{3\beta} e'_{33}. \quad (4.3)$$

Подстановка (4.3) в соотношения напряжение — деформация при условии $l_{33} = 0$ дает

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{e_{33}} &= C_{11} l_{31}^2 + C_{12} l_{32}^2, & \frac{\sigma_{12}}{e_{33}} &= 2C_{66} l_{31} l_{32}, \\ \frac{\sigma_{22}}{e_{33}} &= C_{12} l_{31}^2 + C_{22} l_{32}^2, & \frac{\sigma_{23}}{e_{33}} &= 0, \\ \frac{\sigma_{33}}{e_{33}} &= C_{12} l_{31}^2 + C_{23} l_{32}^2, & \frac{\sigma_{31}}{e_{33}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Компоненты напряжения также преобразуются по тензорному закону:

$$\sigma'_{\alpha\beta} = l_{\alpha i} l_{\beta j} \sigma_{ij}. \quad (4.5)$$

Подстановка (4.4) в (4.5) дает

$$\frac{\sigma'_{33}}{\epsilon'_{33}} = C_{11} l_{31}^4 + (2C_{12} + 4C_{66}) l_{31}^2 l_{32}^2 + C_{22} l_{32}^4, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'_{22}}{\epsilon'_{33}} = & C_{11} l_{31}^2 l_{21}^2 + C_{12} (l_{32}^2 l_{21}^2 + l_{31}^2 l_{22}^2 + l_{31}^2 l_{23}^2) + \\ & + C_{22} l_{32}^2 l_{22}^2 + 4C_{66} l_{31} l_{32} l_{21} l_{22} + C_{23} l_{32}^2 l_{23}^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Система направляющих косинусов, соответствующая рис. 4.4, имеет вид

$$l_{\alpha i} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Как отмечалось выше, считается, что роль произвольной ориентации волокон в определении отношения $\sigma'_{ij}/\epsilon'_{33}$ аналитически эквивалентна отысканию среднего значения $\sigma'_{ij}/\epsilon'_{33}$ в направлении волокон, когда ось 1 принимает все возможные ориентации относительно фиксированной оси x'_i . Другими словами,

$$\left. \frac{\sigma'_{ij}}{\epsilon'_{33}} \right|_{\text{rand}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sigma'_{ij}}{\epsilon'_{33}} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (4.9)$$

Подставляя (4.6) и (4.7) в (4.9), получаем

$$\left. \frac{\sigma'_{33}}{\epsilon'_{33}} \right|_{\text{rand}} = \frac{1}{15} (3C_{11} + 4C_{12} + 8C_{22} + 8C_{66}), \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{\sigma'_{22}}{\epsilon'_{33}} \right|_{\text{rand}} = \frac{1}{15} (C_{11} + 8C_{12} + C_{22} - 4C_{66} + 5C_{23}). \quad (4.11)$$

Теперь для изотропной среды отношения напряжения к деформации, выраженные через (4.10) и (4.11), связаны соответственно с характеристиками $k + \frac{4}{3}\mu$ и $k - \frac{2}{3}\mu$. Приравнявая эти выражения к (4.10) и (4.11), получаем

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{9} [C_{11} + 2(C_{22} + C_{23}) + 4C_{12}], \\ \mu &= \frac{1}{30} [2C_{11} + 7C_{22} - 5C_{23} - 4C_{12} + 12C_{66}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подобным же образом константы E и ν можно связать с величинами C , выраженными через μ и k .

Можно также выразить μ и k через технические константы, используя (III-1.7):

$$k = 1/9 [E_{11} + 4(1 + \nu_{12})^2 K_{23}], \quad (4.13)$$

$$\mu = 1/15 [E_{11} + (1 - 2\nu_{12})^2 K_{23} + 6(\mu_{12} + \mu_{23})]. \quad (4.14)$$

Аналогично, используя связь E и ν с μ и k , можно записать первые через технические постоянные:

$$E = \frac{[E_{11} + 4(1 - \nu_{12})^2 K_{23}][E_{11} + (1 - 2\nu_{12})^2 K_{23} + 6(\mu_{12} + \mu_{23})]}{3[2E_{11} + (8\nu_{12}^2 + 12\nu_{12} + 7)K_{23} + 2(\mu_{12} + \mu_{23})]}, \quad (4.15)$$

$$\nu = \frac{E_{11} + 2(2\nu_{12}^2 + 8\nu_{12} + 3)K_{23} - 4(\mu_{12} + \mu_{23})}{2[2E_{11} + (8\nu_{12}^2 + 12\nu_{12} + 7)K_{23} + 2(\mu_{12} + \mu_{23})]}. \quad (4.16)$$

Определив экспериментально или рассчитав характеристики среды, армированной выпрямленными параллельными волокнами, и подставив их в (4.13) — (4.16), можно далее оценить константы среды с произвольно ориентированными волокнами. Прежде чем приступить к обсуждению полученных таким образом констант, выведем соответствующие результаты для двумерной задачи.

Армирование в плоскости

Для армирования в плоскости естественно рассматривать задачу о плоском напряженном состоянии. Наложение этого условия на соотношения напряжение — деформация для трансверсально изотропной среды (III-1.1) дает

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= Q_{11}\epsilon_{11} + Q_{12}\epsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= Q_{12}\epsilon_{11} + Q_{22}\epsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= 2Q_{66}\epsilon_{12}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где (1, 2) — интересующая нас плоскость и

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}, & Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{22}}, \\ Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{12}C_{23}}{C_{22}}, & Q_{66} &= C_{66}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Применим процедуру, подобную использованной в трехмерном случае. Из осей 1, 2 ось 1 примем за направление оси симметрии трансверсально изотропной среды. Координатную систему, поворачивающуюся относительно осей 1, 2 на угол θ , обозначим через 1', 2'. Примем, что ϵ'_{11} — единственная не равная нулю компонента тензора деформации. Отношения $\sigma'_{11}/\epsilon'_{11}$ и $\sigma'_{22}/\epsilon'_{11}$,

выраженные через (4.18), подставляем в соотношение

$$\frac{\sigma'_{ij}}{\varepsilon'_{11}} \Big|_{\text{rand}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sigma'_{ij}}{\varepsilon'_{11}} d\theta. \quad (4.19)$$

Окончательные формулы имеют вид

$$\frac{\sigma'_{11}}{\varepsilon'_{11}} \Big|_{\text{rand}} = 1/8 (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \quad (4.20)$$

$$\frac{\sigma'_{22}}{\varepsilon'_{11}} \Big|_{\text{rand}} = 1/8 (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}). \quad (4.21)$$

Для условий плоского напряженного состояния отношения (4.20) и (4.21) связаны соответственно с константами обобщенного плоского напряженного состояния изотропного тела $E/(1-\nu^2)$ и $\nu E/(1-\nu^2)$. Отождествляя эти величины с (4.20) и (4.21) соответственно, получаем

$$\nu = \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}}, \quad (4.22)$$

$$E = 1/8 (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) (1 - \nu^2). \quad (4.23)$$

Используя (4.18) и (III-1.7), можно выразить эти константы через технические характеристики системы с параллельными волокнами:

$$E = \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1}, \quad \nu = \frac{u_2}{u_1}, \quad (4.24)$$

где

$$u_1 = 3/8 E_{11} + \frac{\mu_{12}}{2} + \frac{(3 + 2\nu_{12} + 3\nu_{12}^2) \mu_{23} K_{23}}{2(\mu_{23} + K_{23})}, \quad (4.25)$$

$$u_2 = 1/8 E_{11} - \frac{\mu_{12}}{2} + \frac{(1 + 6\nu_{12} + \nu_{12}^2) \mu_{23} K_{23}}{2(\mu_{23} + K_{23})}.$$

Как и в трехмерном случае, подстановка технических характеристик, определенных из эксперимента или расчета, в (4.25) и затем в (4.24) позволяет оценить свойства композита в плоскости изотропии для случая произвольной ориентации волокон в этой плоскости. Далее обсудим осуществление этой процедуры.

Асимптотические оценки

Для оценки констант изотропной среды, несомненно, можно использовать прямую подстановку определенных любым способом эффективных свойств трансверсально изотропной среды в соотношения (4.13) — (4.16) и (4.24). В разд. 4.3 уже подробно

обсуждалось, что для определения констант E_{11} , ν_{12} , K_{23} и μ_{12} рекомендуется применять полидисперсную модель композита с цилиндрическими включениями [уравнения (III-2.5) и (III-2.7) — (III-2.9)], а модуль упругости при одноосном нагружении в плоскости изотропии E_{22} следует определять при помощи трехфазной модели (III-3.14). Подобный расчет лучше всего реализовать в виде небольшой вычислительной программы — простой в составлении и использовании. Попытаемся, однако, найти несложные аналитические формулы для только что описанной процедуры, которые позволят объяснить поведение среды. Поэтому вместо эмпирических методов, не являющихся строго определенными, используем асимптотические методы, приемлемые для систем с жесткими армирующими волокнами.

Применение асимптотического метода основано, за одним исключением, на уже перечисленных константах. Поскольку выражение для модуля сдвига в плоскости изотропии (III-3.14) довольно сложное, аппроксимируем его нижней оценкой по (2.2). Подобная замена, как показано в разд. 4.3, соответствует поведению реального материала. Еще раз выпишем используемые далее константы

$$E_{11} = cE_F + (1 - c)E_M + 4c(1 - c)\mu_M \frac{(\nu_F - \nu_M)^2}{\frac{(1 - c)\mu_M}{k_F + \mu_M/3} + \frac{c\mu_M}{k_M + \mu_M/3} + 1},$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = c\nu_F + (1 - c)\nu_M +$$

$$+ \frac{c(1 - c)(\nu_F - \nu_M) \left[\frac{\mu_M}{k_M + \mu_M/3} - \frac{\mu_M}{k_F + \mu_F/3} \right]}{\frac{(1 - c)\mu_M}{k_F + \mu_F/3} + \frac{c\mu_M}{k_M + \mu_M/3} + 1},$$

$$K_{23} = k_M + \frac{\mu_M}{3} + \frac{c}{\frac{k_F - k_M + (\mu_F - \mu_M)/3}{1} + \frac{1 - c}{k_M + 4\mu_M/3}}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_M} = \frac{\mu_F(1 + c) + \mu_M(1 - c)}{\mu_F(1 - c) + \mu_M(1 + c)},$$

$$\frac{\mu_{23}}{\mu_M} = 1 + \frac{c}{\frac{\mu_M}{\mu_F - \mu_M} + \frac{(k_M + 7\mu_M/3)(1 - c)}{2(k_M + 4\mu_M/3)}}.$$

Прямая подстановка (4.26) в (4.13) — (4.16) или в (4.24) и (4.25) приводит к окончательному результату.

Перед отысканием асимптотических выражений можно получить окончательную формулу в замкнутом виде для одного случая. Примем, что обе фазы несжимаемы. Тогда можно по-

казать, что (4.14) упрощается и сводится к выражению

$$\mu_{3D} |v_F - v_M - 1/2 = 1/15 [E_{11} + 6(\mu_{12} + \mu_{23})]. \quad (4.27)$$

Подстановка (4.26) в (4.27) дает

$$\mu_{3D} |v_F - v_M - 1/2 = \frac{c}{5} \mu_F + \frac{1}{5} \frac{(5 + 2c + c^2) \mu_F + (5 + c)(1 - c) \mu_M}{(1 - c) \mu_F + (1 + c) \mu_M} \mu_M. \quad (4.28)$$

Тогда из предположения о несжимаемости $E_{3D} = 3\mu_{3D}$ и из (4.28) получаем

$$E_{3D} |v_F - v_M - 1/2 = \frac{c}{5} E_F + \frac{1}{5} \frac{(5 + 2c + c^2) E_F + (5 + c)(1 - c) E_M}{(1 - c) E_F + (1 + c) E_M} E_M. \quad (4.29)$$

Чтобы получить подобные результаты для других случаев, следует перейти к применению асимптотических методов (см., например, [4.13]). Рассмотрим вначале пространственный случай.

Перепишем уравнение (4.15) в виде

$$E_{3D} = \frac{cE_F + [2\hat{E}_{11} + (5 + 4v_{12} + 8v_{12}^2) K_{23} + 6(\mu_{12} + \mu_{23})] + O(1/cE_F)}{6\{1 + [2\hat{E}_{11} + (7 + 12v_{12} + 8v_{12}^2) K_{23} + 2(\mu_{12} + \mu_{23})]/2cE_F\}}, \quad (4.30)$$

где

$$\hat{E}_{11} = E_{11} - cE_F. \quad (4.31)$$

Разлагая (4.30) в ряд по степеням E_M/cE_F , получаем

$$\frac{E_{3D}}{E_M} = \frac{1}{6} \frac{cE_F}{E_M} + \frac{\hat{E}_{11}}{6E_M} + \frac{(3 - 4v_{12} + 8v_{12}^2) K_{23}}{12E_M} + \frac{5}{6} \frac{\mu_{12} + \mu_{23}}{E_M} + O\left(\frac{E_M}{cE_F}\right). \quad (4.32)$$

Теперь при условии, что $cE_F \gg E_M$ и $cE_F \gg k_M$, соотношения (4.26) вместе с (4.31) дают

$$\begin{aligned} \hat{E}_{11} &= (1 - c) E_M + 4c(1 - c) \mu_M \frac{(v_F - v_M)^2}{c\mu_M/(k_M + \mu_M/3) + 1}, \\ v_{12} &= cv_F + (1 - c)v_M + \frac{c(1 - c)(v_F - v_M)[\mu_M/(k_M + \mu_M/3)]}{1 + [c\mu_M/(k_M + \mu_M/3)]}, \\ K_{23} &= \frac{k_M}{1 - c} + \frac{1 + 3c}{1 - c} \frac{\mu_M}{3}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\mu_{12} = \frac{1 + c}{1 - c} \mu_M, \quad \mu_{23} = \mu_M + \frac{2c(k_M + 1/3\mu_M)}{(1 - c)(k_M + 1/3\mu_M)} \mu_M.$$

Следует, однако, заметить, что приведенные формулы не справедливы для случая $c = 1$.

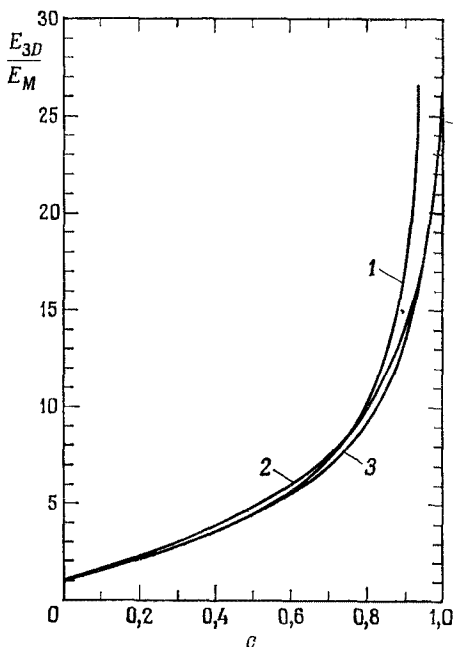


Рис. 4.5. Расчет модуля упругости макроскопически изотропного композита — эпоксидная матрица с произвольной ориентацией прямых стекловолокон в объеме; $E_F/E_M = 26,25$; $\nu_F = 0,20$; $\nu_M = 0,35$; 1 — по уравнению (4.35) с $\nu_F = \nu_M = 0,25$; 2 — по уравнению (4.29) с $\nu_F = \nu_M = 0,5$; 3 — по уравнению (4.15) с $\nu_F = 0,20$; $\nu_M = 0,35$.

Подстановка (4.33) в (4.32) завершает наш вывод. Однако полученные формулы довольно сложны, если коэффициенты Пуассона не заданы конкретно. Для случая $\nu_F = \nu_M = 1/4$ из (4.33) следует

$$\left. \begin{aligned} \hat{E}_{11} &= (1 - c) E_M, \\ \nu_{12} &= 1/4, \\ K_{23} &= \frac{2}{5} \frac{2+c}{1-c} E_M, \\ \mu_{12} &= \frac{2}{5} \frac{1+c}{1-c} E_M, \\ \mu_{23} &= \frac{1}{5} \frac{2+c}{1-c} E_M, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \nu_F &= \nu_M = 1/4, \\ E_F &\gg E_M \\ E_F &\gg k_M, \\ c &\neq 1. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Наконец, подставляя (4.34) в (4.32), получаем

$$\frac{E_{3D}}{E_M} \Big|_{\nu_F = \nu_M = 1/4} = \frac{1}{6} \frac{cE_F}{E_M} + \frac{1 + c/4 + c^2/6}{1 - c} + O\left(\frac{E_M}{cE_F}\right) \quad (4.35)$$

и еще раз напомним, что $c \neq 1$, ограничение, вытекающее из аппроксимации (4.33).

Сопоставление оценок по упрощенным формулам (4.29) и (4.35) с результатами, полученными на основании использования полных формул (4.26) и (4.15), показано на рис. 4.5. Как видно из рисунка, простые формулы (4.29) и (4.35) дают очень надежные оценки.

Рассмотрим предельный случай поведения композита, когда $E_M \rightarrow 0$. При этом расчет по формулам (4.29) и (4.35) приводит к разным результатам. Такое расхождение непротиворечиво, если учесть характер и последовательность введения ограничений, использованных при получении оценок на основе (4.29). Это — условие несжимаемости, введенное посредством $\nu_M \rightarrow 1/2$, и затем условие $E_M \rightarrow 0$. Анализ этих упрощений показывает, что изменение их последовательности приводит к появлению в (4.29) множителя $1/6$ вместо $1/5$. В свете сделанных замечаний для случая матрицы бесконечно малой жесткости правильным будет результат $E_{3D}|_{E_M=0} = (c/6)E_F$. Этот частный результат был получен Коксом [4.14] для соответствующей двумерной задачи.

Для двумерного случая запишем (4.24) в виде

$$E_{2D} = \frac{1}{u_1} (u_1^2 - u_2^2), \quad (4.36)$$

где

$$u_1 = 3/8 cE_F + \hat{u}_1, \quad u_2 = 1/8 cE_F + \hat{u}_2, \quad (4.37)$$

причем

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= 3/8 \hat{E}_{11} + \frac{\mu_{12}}{2} + \frac{(3 + 2\nu_{12} + 3\nu_{12}^2) \mu_{23} K_{23}}{2(\mu_{23} + K_{23})}, \\ \hat{u}_2 &= 1/8 \hat{E}_{11} - \frac{\mu_{12}}{2} + \frac{(1 + 6\nu_{12} + \nu_{12}^2) \mu_{23} K_{23}}{2(\mu_{23} + K_{23})}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Подставляя (4.37) в (4.36) и используя (4.38), выразим конечный результат в виде

$$\begin{aligned} \frac{E_{2D}}{E_M} &= \frac{1}{3} \frac{cE_F}{E_M} + \frac{1}{E_M} \left[\frac{\hat{E}_{11}}{3} + \frac{8}{9} \mu_{12} + \frac{4}{9} \frac{3 - 2\nu_{12} + 3\nu_{12}^2}{\mu_{12} + K_{23}} \mu_{23} K_{23} \right] + \\ &+ O\left(\frac{E_M}{cE_F}\right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Выражение (4.39) довольно громоздкое и далее приводится в частных формах, соответствующих конкретным значениям

коэффициента Пуассона. Для случая несжимаемости $\nu_F = \nu_M = 1/2$, и можно показать, что

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= 1/2, & \hat{E}_{11} &= (1 - c) E_M, \\ K_{23} &\rightarrow \infty, & \mu_{23} &= \mu_{12} \end{aligned}$$

с μ_{12} , заданным при помощи (4.26). Подстановка этих соотношений в (4.39) дает

$$\begin{aligned} \frac{E_{2D}}{E_M} \Big|_{\nu_F = \nu_M = 1/2} &= \frac{1}{3} \frac{cE_F}{E_M} + \frac{1-c}{3} + \frac{19}{27} \frac{E_F(1+c) + E_M(1-c)}{E_F(1-c) + E_M(1+c)} + \\ &+ O\left(\frac{E_M}{cE_F}\right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Для случая $\nu_F = \nu_M = 1/4$ подстановка (4.34) для жестких волокон в (4.39) приводит к соотношению

$$\frac{E_{2D}}{E_M} \Big|_{\nu_F = \nu_M = 1/4} = \frac{1}{3} \frac{cE_F}{E_M} + \frac{272 - 41c + 90c^2}{270(1-c)} + O\left(\frac{E_M}{cE_F}\right). \quad (4.41)$$

Следует обратить внимание на различие между членами нулевого порядка по E_M/cE_F в (4.40) и (4.41). При получении (4.40) не было необходимости в точной записи μ_{12} и μ_{23} в форме, соответствующей жестким волокнам. Поэтому E_F и E_M появляются в члене нулевого порядка в (4.40). Однако при выводе (4.41) формулы (4.34) уже соответствуют волокнам значительной жесткости, т. е. $E_F \gg E_M$ и $E_F \gg k_M$. Поэтому член нулевого порядка в (4.41) и не содержит E_F . Как (4.40), так и (4.41) не справедливы для $c = 0$ и $c = 1$, что следует из способа вывода этих уравнений.

Расчеты по (4.40) и (4.41) сопоставлены на рис. 4.6. Экспериментальные данные заимствованы из работы Халфина, Джерини и Уитни [4.15]. Как и ожидалось в случае плоского напряженного состояния, прогнозируемые результаты нечувствительны к изменению коэффициентов Пуассона обеих фаз.

Для анализа поведения композита с произвольной ориентацией волокон в плоскости и пространстве мы применили метод, следующий из схемы взаимопроникающей сетки, показанной на рис. 4.3. Для практики существенно, что при некоторой объемной доле волокон взаимодействия между ними уже необходимо учитывать. Такой вопрос не возникает только в случае, когда слои выпрямленных параллельных волокон, уложенные в одной плоскости под разными углами, образуют квазианотропный материал. Представленные результаты вполне применимы для описания подобной ситуации. Общие вопросы теории слоистых сред рассматриваются в следующей главе.

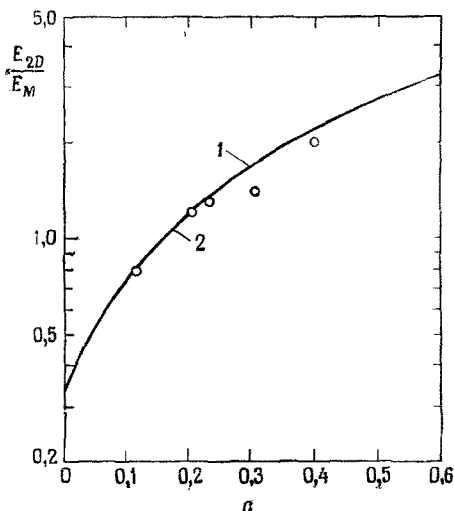


Рис. 4.6. Модуль упругости макроскопически изотропного композита — поликарбонатная матрица с произвольной ориентацией стекловолокон в плоскости. Сопоставление расчета с экспериментом (O из [4.15]); $E_F/E_M = 38$, $\nu_F = 0,22$, $\nu_M = 0,35$; 1 — расчет по уравнению (4.40) с $\nu_F = \nu_M = 0,5$; 2 — по уравнению (4.41) с $\nu_F = \nu_M = 0,25$.

И наконец, следует вспомнить еще об одном практическом моменте. А именно при моделировании композитов из хаотически ориентированных «рубленых» волокон при помощи развитого подхода не учитывается влияние неоднородности напряженного состояния у концов волокон. Однако, как следует из разд. 3.4, эффектами у концов волокон при очень больших отношениях длины к диаметру можно пренебречь.

4.5. СВОЙСТВА МАКРОСКОПИЧЕСКИ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ПЛАСТИНЧАТЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Решив задачу описания свойств систем с произвольно ориентированными волокнами, попробуем теперь применить оказавшийся удачным метод для определения эффективных свойств системы с произвольно ориентированными пластинчатыми включениями. Конечно, для этого следует тщательно проверить

полученные результаты, чтобы убедиться, сводятся ли они к выражениям, полученным в разд. 3.5 для системы с малой объемной долей включений.

Армирование в плоскости

Для начала рассмотрим плоскую задачу. Исследуемая среда представляется последовательностью изотропных слоев толщиной h_1 и h_2 , обладающих различными свойствами E_1, ν_1 и E_2, ν_2 соответственно. Рассматривая бесконечный слой, очевидно, можно считать несущественным влияние краевых эффектов, связанных с конечностью размеров в плоскости включений, составляющих этот слой.

Теперь обратимся к варианту задачи, относящемуся к плоскому напряженному состоянию. Итак, достаточно исследовать деформацию в плоскости системы двух слоев толщиной $h_1 + h_2 = h$, не подвергающейся нагружению по боковым поверхностям. Выражение эффективного модуля сдвига в плоскости тогда имеет вид

$$\mu = \frac{1}{h} (h_1 \mu_1 + h_2 \mu_2), \quad (5.1)$$

поскольку слои соединены параллельно. Для плоского напряженного состояния в координатах x, y общая форма соотношений напряжение — деформация имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Положим $\epsilon_{yy} = 0$; тогда среднее по сечению системы напряжение выражается в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{h} \left(h_1 \frac{E_1}{1-\nu_1^2} + h_2 \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \right) \epsilon_{xx}. \quad (5.3)$$

Среднее напряжение и деформация в (5.3) связаны с соответствующими эффективными свойствами выражением

$$\frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} = \frac{E}{1-\nu^2},$$

следовательно,

$$\frac{E}{1-\nu^2} = \frac{1}{h} \left(h_1 \frac{E_1}{1-\nu_1^2} + h_2 \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \right). \quad (5.4)$$

Для определения эффективных свойств E и ν достаточно соотношений (5.1), (5.4) и соотношения между упругими константа-

ми изотропного тела

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (5.5)$$

Следует напомнить, что E и ν есть эффективные характеристики изотропной среды в плоскости. Деформация в направлении, перпендикулярном плоскости x, y , определяется другими свойствами. Найдено, что

$$E = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \frac{c_1 c_2 E_1 E_2 (\nu_1 - \nu_2)^2}{c_1 E_1 (1 - \nu_2^2) + c_2 E_2 (1 - \nu_1^2)}, \quad (5.6)$$

$$\nu = \frac{c_1 \nu_1 E_1 (1 - \nu_2^2) + c_2 \nu_2 E_2 (1 - \nu_1^2)}{c_1 E_1 (1 - \nu_2^2) + c_2 E_2 (1 - \nu_1^2)}, \quad (5.7)$$

где $c_1 = h_1/h$, $c_2 = h_2/h$ суть объемные доли фаз. Очевидно, что очень хорошим приближением (5.6) для E является правило смеси; подобная аппроксимация (5.7) для ν не дает хорошего результата. Таким образом, решение плоской задачи для системы чередующихся изотропных слоев представляет собой простой способ получения непосредственной оценки ее эффективных свойств.

Армирование в пространстве

Сформулируем и решим задачу для системы произвольно ориентированных пластинчатых включений. Будем следовать решению Кристенсена [4.16]. Как и в предыдущем разделе, начнем с оценки свойств для случая параллельных слоев. Идеализированная система представлена на рис. 4.7, где чередующиеся слои представляют две фазы — более жесткую (включения) и

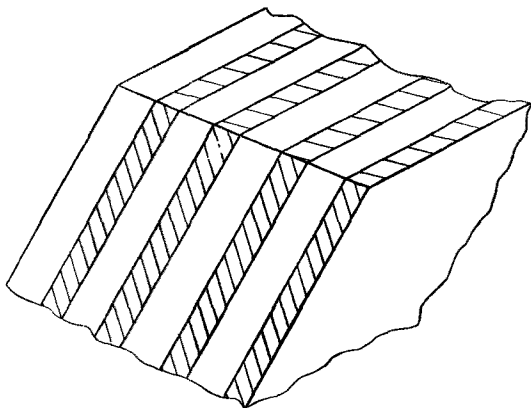


Рис. 4.7. Система с параллельными пластинчатыми включениями.

податливую (матрицу). Такая система трансверсально изотропна, и ее эффективная жесткость определяется соотношением напряжение — деформация (III-1.1), где ось 1 есть ось трансверсальной симметрии. Пусть опять h — суммарная толщина двух повторяющихся слоев, из которых слой толщиной h_1 характеризуется константами Ламе λ_1 и μ_1 , а слой толщиной h_2 — константами λ_2 и μ_2 . Задача нахождения эффективных свойств, изложенная в (III-1.1), была решена Постмой [4.17], получившим следующий результат:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{D} h^2 (\lambda_1 + 2\mu_1) (\lambda_2 + 2\mu_2), \\ C_{12} &= \frac{h}{D} [\lambda_1 h_1 (\lambda_2 + 2\mu_2) + \lambda_2 h_2 (\lambda_1 + 2\mu_1)], \\ C_{22} &= \frac{1}{D} \{h^2 (\lambda_1 + 2\mu_1) (\lambda_2 + 2\mu_2) + 4h_1 h_2 (\mu_1 - \mu_2) [(\lambda_1 + \mu_1) - (\lambda_2 + \mu_2)]\}, \\ C_{23} &= \frac{1}{D} \{h^2 \lambda_1 \lambda_2 + 2(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) (\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2)\}, \\ C_{66} &= \frac{h\mu_1\mu_2}{h_1\mu_2 + h_2\mu_1}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где

$$D = h[h_1(\lambda_2 + 2\mu_2) + h_2(\lambda_1 + 2\mu_1)]. \quad (5.9)$$

Процедура пространственного осреднения, примененная для нахождения эффективных свойств изотропной среды, идентична использованной в предыдущем разделе. Эффективные свойства k и μ задаются выражениями (4.12).

Подстановка C из (5.8) в (4.12) дает

$$\begin{aligned} 9Dk &= 3(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) + 2\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_1c_1(\lambda_2 + 2\mu_2) + \\ &+ 4\lambda_2c_2(\lambda_1 + 2\mu_1) + 4(\lambda_1c_1 + \lambda_2c_2)(\mu_2c_1 + \mu_1c_2) + \\ &+ 8c_1c_2(\mu_1 - \mu_2)^2 [(\lambda_1 + \mu_1) - (\lambda_2 + \mu_2)], \end{aligned} \quad (5.10)$$

где c_1 и c_2 — объемные доли, равные h_1/h и h_2/h соответственно и D задается (5.9).

Для удобства приведем здесь еще раз выражение для верхней оценки k изотропного материала (1.50):

$$\frac{k - k_2}{k_1 - k_2} \leq \frac{c_1}{1 + [(k_1 - k_2)c_2]/(k_2 + \frac{4}{3}\mu_1)}, \quad (5.11)$$

где $(\mu_1 - \mu_2)(k_1 - k_2) \geq 0$. Легко показать, что оценка по (5.10) дает меньшую величину, чем оценка, определенная по (5.11).

Интересно проверить случай вырождения (5.10) для малых объемных долей включений. Положим $c \ll 1$. Сохраняя только

члены нулевого и первого порядков по c_1 в (5.10), получаем

$$k = k_2 + c_1 \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + \sqrt[4]{3}\mu_1)}{k_1 + \sqrt[4]{3}\mu_1}. \quad (5.12)$$

Это выражение совпадает с оценкой (5.11) при малой объемной доле, хотя в общем случае оценки по (5.11) и (5.12) различаются. Этот результат, таким образом, полностью соответствует решению для системы с малой объемной долей пластинчатых включений, полученному в разд. 3.5.

Повторяя только что использованный прием для получения выражения объемного модуля, подставим соотношение (5.8) во второе соотношение (4.12). В результате выражение эффективного модуля сдвига μ через свойства фаз имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{30D}{h^2} \mu = & 9(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) + 28c_1c_2(\mu_1 - \mu_2)[(\lambda_1 + \mu_1) - (\lambda_2 + \mu_2)] - \\ & - 5\lambda_1\lambda_2 - 10(\lambda_1c_1 + \lambda_2c_2)(\mu_2c_1 + \mu_1c_2) - \\ & - 4\lambda_1c_1(\lambda_2 + 2\mu_2) - 4\lambda_2c_2(\lambda_1 + 2\mu_1) + \frac{12\mu_1\mu_2}{c_1\mu_2 + c_2\mu_1} \left(\frac{D}{h^2} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где D задается опять выражением (5.9).

Сначала исследуем (5.13) при $c_1 \ll 1$. В результате длинных алгебраических преобразований получим

$$\mu = \mu_2 + \frac{c_1(\mu_1 - \mu_2)}{15} \frac{9k_1 + 4(2\mu_1 + \mu_2)}{k_1 + \sqrt[4]{3}\mu_1} + 6 \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (5.14)$$

Соответствующая верхняя оценка для изотропного материала из (1.51) имеет вид

$$\frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \leq \frac{c_1}{1 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{10}{9k_1 + 8\mu_1} \right)^{-1}}} \quad (5.15)$$

для $(\mu_1 - \mu_2)(k_1 - k_2) \geq 0$. Можно показать, что оценка по (5.14) совпадает с верхней оценкой по (5.15), что опять согласуется с результатами разд. 3.5. Для случая высоких объемных долей включений легко показать, что оценка по (5.13) меньше соответствующей верхней оценки.

Для удобства инженерных расчетов получим далее полезные формулы для эффективного модуля E при одноосном нагружении среды с малой объемной долей включений. Соответствующее соотношение между E , k и μ имеет вид

$$E = \frac{9k\mu}{3k + \mu}. \quad (5.16)$$

Считая, что объемная доля включений мала, а их жесткость много выше жесткости матрицы, можем упростить соотношения

(5.12) и (5.14) и привести их к виду

$$k = k_M + \frac{2cE_P}{9(1-\nu_P)}, \quad (5.17)$$

$$\mu = \mu_M + \frac{c}{30} \frac{7-5\nu_P}{1-\nu_P^2} E_P, \quad (5.18)$$

где использованы более конкретные обозначения фаз (M — matrix, P — platelet), а c — объемное содержание включений. Подставляя (5.17) и (5.18) в (5.16), получаем

$$E = \frac{9 \left\{ \frac{E_M}{3(1-2\nu_M)} + \frac{2cE_P}{9(1-\nu_P)} \right\} \left\{ \frac{E_M}{2(1+\nu_M)} + \frac{7-5\nu_P}{30(1-\nu_P^2)} cE_P \right\}}{\frac{3E_M}{2(1-2\nu_M)(1+\nu_M)} + \frac{(9+5\nu_P)cE_P}{10(1-\nu_P^2)}}. \quad (5.19)$$

Перейдем далее к получению простого выражения, удобного для анализа. Для этого следует рассмотреть отдельно два варианта: $cE_P \leq E_M$ и $cE_P \geq E_M$.

Среда с $cE_P \ll E_M$

Разложим выражение (5.19) в ряд по степеням cE_P/E_M ; тогда имеем

$$\frac{E}{E_M} = 1 + \frac{1}{1-\nu_P^2} \frac{cE_P}{E_M} [(1+\nu_M)(7-5\nu_P) + 10(1-2\nu_M)(1+\nu_P) - (1-2\nu_M)(1+\nu_M)(9+5\nu_P)] + O\left(\frac{c^2 E_P^2}{E_M^2}\right). \quad (5.20)$$

Среда с $cE_P \gg E_M$, $cE_P \gg K_M$

Теперь, разложив (5.19) в ряд по степеням E_M/cE_P , получим

$$\frac{E}{E_M} = \frac{2(7-5\nu_P)}{3(1-\nu_P)(9+5\nu_P)} \frac{cE_P}{E_M} + \frac{10(1+\nu_P)}{9+5\nu_P} \left[\frac{1}{1+\nu_M} + \frac{7-5\nu_P}{10(1+\nu_P)(1-2\nu_M)} - \frac{7-5\nu_P}{(1+\nu_M)(1-2\nu_M)(9+5\nu_P)} \right] + O\left(\frac{E_M}{cE_P}\right). \quad (5.21)$$

Вычисление коэффициентов при членах разложения (5.20) и (5.21) для $\nu_P = \nu_M = 1/4$ дает

$$\frac{E}{E_M} = 1 + \frac{1}{2} \frac{cE_P}{E_M} + O\left(\frac{c^2 E_P^2}{E_M^2}\right), \quad (5.22)$$

$$\frac{E}{E_M} = \frac{184}{369} \frac{cE_P}{E_M} + \frac{1686}{1681} + O\left(\frac{E_M}{cE_P}\right). \quad (5.23)$$

Подстановка других значений коэффициентов Пуассона приводит к получению мало отличающихся результатов, обобщение которых дает выражение, пригодное для практического использования:

$$E \approx \frac{cE_P}{2} + E_M. \quad (5.24)$$

Соответствующий результат для случая малой объемной доли включений в виде волокон, полученный из (4.35), имеет вид

$$\frac{E}{E_M} \Big|_{\nu_F = \nu_M = 1/4} = \frac{cE_F}{6} + E_M. \quad (5.25)$$

Таким образом, увеличение жесткости среды при армировании пластинчатыми включениями почти в три раза больше, чем при армировании волокнами.

Среда с несжимаемыми фазами

Для получения простого результата в виде выражения (5.24) пришлось применить асимптотические методы. Теперь покажем, что точные результаты в очень простой форме можно получить в частном случае, когда обе фазы среды несжимаемы.

Положим $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$, тогда общее выражение (5.13) сводится к выражению

$$\mu = 3/5(c_1\mu_1 + c_2\mu_2) + \frac{2\mu_1\mu_2}{5(c_1\mu_2 + c_2\mu_1)}, \quad (5.26)$$

или в ином виде

$$\mu = 3/5c_1\mu_1 + \frac{(5 - 3c_1^2 - 6c_1c_2)\mu_1 + 3c_1c_2\mu_2}{5(c_1\mu_2 + c_2\mu_1)}\mu_2. \quad (5.27)$$

Для интерпретации этих результатов сначала заметим из (5.26), что правило смесей дает плохую оценку μ , если модули сдвига обеих фаз не очень близки. Для сопоставления с оценкой свойств среды, армированной волокнами, удобно записать (5.27) через модуль упругости при одноосном нагружении. Используя условие несжимаемости, получим

$$E = 3/5c_1E_1 + \frac{(5 - 3c_1^2 - 6c_1c_2)E_1 + 3c_1c_2E_2}{5(c_1E_2 + c_2E_1)}E_2. \quad (5.28)$$

Сравним это выражение с соответствующим результатом для среды, армированной волокнами, в случае несжимаемости фаз (4.29). И снова из этого сравнения видно, что эффект от армирования пластинчатыми частицами почти в три раза превышает армирующее действие волокон.

Для лучшего представления читателем характера модели среды с пластинчатыми включениями заметим, что если поменять фазы местами, то расчет по всем формулам, выведенным в разделе, приводит к тем же эффективным свойствам. Например, в формуле (5.26) для μ поменяем индексы 1 и 2. Результаты, т. е. значение μ остается неизменным. Аналогичные формулы для среды, армированной волокнами, после замены фаз дают совершенно иные оценки свойств. Представленные результаты можно, таким образом, применить к описанию свойств гетерогенного материала с взаимопроникающими фазами. В среде подобного типа обе фазы непрерывны и не существует геометрической характеристики поверхности раздела, согласно которой каждую из фаз можно охарактеризовать той или иной связностью.

С другой стороны, если мы попытаемся моделировать свойства эквивалентной изотропной среды в виде дискретных хаотически ориентированных зерен, состоящих из чередующихся слоев, полученный результат нужно расценивать как верхнюю границу свойств. Такая особенность следует из того, что при моделировании пришлось бы пренебречь граничными условиями на поверхностях зерен, а наш подход, использующий предписанные деформации, соответствует применению допустимого поля перемещений в теореме о минимуме потенциальной энергии. Этот вывод применим также и к результатам, полученным в предыдущем разделе, где было рассмотрено армирование волокнами. Если бы композит, армированный волокнами, представить состоящим из хаотически ориентированных частиц, содержащих волокна, а не в виде модели взаимопроникающей сетки (см. рис. 4.3), то результаты разд. 4.4 следовало бы рассматривать как характеризующие верхнюю границу свойств.

4.6. РЕЗЮМЕ И ВЫВОДЫ

Три главы (II—IV) были посвящены определению эффективных свойств различных типов линейно-упругих гетерогенных сред. Именно этот раздел механики композитов, а не другие, рассматриваемые в последующих главах, является центральным в книге. Почему же мы считаем вопросом первостепенной важности определение эффективных упругих свойств? Прежде всего это наиболее сильно развитая область механики гетерогенных сред. Это отнюдь не является случайным, а, очевидно, обуслов-

лено потребностями практики. Понимание роли, которую отдельные компоненты играют в формировании макроскопического поведения композита, позволяет обоснованно выбирать их оптимальные комбинации. Если бы этого не было, область анализа свойств гетерогенных материалов была бы всего лишь разделом теории упругости анизотропных сред. При этом задачи пришлось бы формулировать применительно к особенностям конкретных проектов, а для окончательной оценки проекта использовать анализ напряженного состояния.

Выражая свойства композита через свойства отдельных компонентов, мы приобретаем большую гибкость в проектировании материала и можем создать изделие, обладающее наилучшими свойствами. Такого рода исследование взаимосвязи поведения композита со свойствами отдельных компонентов, иногда называемое микромеханикой, обеспечило дополнительную степень свободы в выборе композитов, что в немалой степени способствовало успешному их внедрению. Конечно, не следует также забывать, что основная причина преимущества композитов заключается в возникновении комплекса свойств, не достижимого иначе, как путем соединения разнородных материалов. Без возможности оценивать вклад свойств компонентов в составе материала механика композитов была бы безнадежно эмпирической областью знаний на уровне выбора компонентов, составляющих материал. К счастью, в настоящее время этот этап развития уже остался позади.

Целью данного раздела является не суммирование всех полученных результатов, а лишь выделение основных выводов. В совокупности мы рассмотрели очень ограниченное число моделей и расчетов на их основе. Тем не менее оказался охваченным очень широкий спектр форм включений: сферическая, цилиндрическая и пластинчатая. Мы видели, насколько различны эффекты армирования для разных форм включений, когда дело касается эффективных модулей. Обратимся сначала к случаю, когда более жесткий компонент является включением, а податливый — матрицей. Когда включения ориентированы произвольно, так что эффективные свойства изотропны, наименьший армирующий эффект, как мы видели, наблюдается при использовании сферических включений, а наибольший — когда включения имеют пластинчатую форму. Цилиндрические включения в этом смысле занимают промежуточное положение. И наоборот, когда включением является более податливый компонент, сферическая форма включений ведет к наименьшему ухудшению свойств материала, а пластинчатая (напоминающая в предельном случае разрез в материале) — наибольшему.

Найденные оценки эффективных свойств обладают большой степенью определенности. Так, в случае изотропной среды оценки

эффективного объемного модуля k совпадают между собой и с расчетным значением, определенным при помощи полидисперсной модели среды со сферическими включениями. Таким образом, оценки k дают наиболее определенную информацию о свойстве композита, которую можно получить, не уточняя форму включений. Более того, полидисперсная модель среды со сферическими включениями подсказывает таким образом форму включений для оптимального сочетания компонентов в композите. Не столь обнадеживающим образом обстоит дело с эффективным модулем сдвига μ . За исключением случая малой объемной доли включений, ни одна из рассмотренных моделей не дает расчетных величин μ , совпадающих с нижней и верхней оценками. Однако некоторые из моделей дают значения, по крайней мере близкие к оценкам, хотя даже в лучшем случае возможность сближения оценок очень мала.

Для трансверсально изотропной среды наблюдаются точно такие же закономерности. Расчет по полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями дает значения, совпадающие с оценками для четырех из пяти независимых эффективных характеристик E_{11} , ν_{12} , K_{23} , μ_{12} . Этого обычно не наблюдается для модуля сдвига в плоскости изотропии μ_{23} ни для одной из рассмотренных геометрических моделей.

Мы уделили большое внимание полидисперсным моделям сред со сферическими и цилиндрическими включениями. Другая не менее примечательная и широко применяемая модель основана на методе самосогласования. Расчетам по этой модели фактически нельзя дать конкретную геометрическую интерпретацию, за исключением случая однофазной поликристаллической среды. Для многофазной среды эта модель допускает произвольное сопряжение фаз, что позволяет оценить среднюю деформацию в фазе для последующего использования в расчете эффективных свойств. При этом безразлично, является ли фаза непрерывной или нет, и допускается изменение геометрических характеристик при рассмотрении отдельной фазы как включения или как бесконечной среды. Не удивительно поэтому, что результаты расчета по этой модели в случае многофазной среды далеки от реальности. Этот вопрос обсуждался в разд. 2.5. Получение неприемлемых результатов является причиной того, что мы не будем применять далее эту модель для оценки свойств многофазных сред.

Отметим некоторые особенности, касающиеся диапазона применимости полидисперсных моделей. Они допускают изменение объемной доли включений c во всем возможном диапазоне $0 \leq c \leq 1$. Эти модели идеально подходят для описания композитов с включениями различных размеров. Однако наиболее серьезная проверка их применимости состоит в попытке опи-

сания композита с включениями одинакового размера. Такая ситуация вполне реальна, например, для волокнистых армированных композитов. Рассмотрим вначале случай сферических включений. В разд. 2.4 экспериментально определенные значения эффективного модуля сопоставлены с расчетом по полидисперсной модели среды со сферическими включениями и по связанной с ней трехфазной модели. Исследованный композит на основе полиэфирной смолы содержал стеклянные микросферы с очень узким распределением размеров. Как видно из рис. 2.4, экспериментальные и расчетные величины очень близки между собой, по крайней мере до величины объемного наполнения $c = 0,45$.

Модель со сферическими включениями «работает» до удивительно высоких значений c , если учесть, что «рыхлой» (кубической) упаковке сфер соответствует максимальное объемное наполнение $c = \pi/6 = 0,52$. Для «рыхлой» (кубической) упаковки волокон одинакового размера $c = \pi/4 = 0,79$. При технологии намотки типичным является объемное содержание волокон, близкое к $c = 2/3$. Сравнение армирования волокнами с только что обсужденными особенностями армирования сферическими частицами позволяет предположить, что модель композита с цилиндрическими включениями даст в обоих случаях более близкие к реальным оценки свойств композита при обычных объемных коэффициентах армирования. Это наблюдение совпадает с результатами, приведенными в разд. 4.3, где расчет по модели сопоставлен с численным решением для случая гексагональной упаковки волокон.

Конечно, результат подобных сопоставлений должен зависеть от отношения модулей упругости включений и матрицы. Чем относительно жестче включения, тем более ограничена разумная область применения полидисперсных моделей к описанию свойств композита, содержащего армирующие элементы одинакового размера. Следует отметить, что надежные экспериментальные данные для всех пяти независимых упругих констант получить трудно. Однако иногда встречаются сообщения, что экспериментально определенные константы превышают расчетные значения, полученные на основании полидисперсных моделей среды с цилиндрическими включениями. Этот допустимый эффект, по-видимому, объясняется нерегулярностью геометрии реальных композитов. Агломерация волокон в пряжи может вызывать и заметный объемный эффект, приводя к тому, что для трансверсальных свойств эффективная объемная доля включений больше, чем действительная. Такой же эффект наблюдается и в системах, армированных частицами.

Несмотря на подобные осложнения, модели композита, рассмотренные в разд. 2.4 и 3.3, остаются тем не менее единствен-

ными надежно обоснованными теоретическими моделями, позволяющими получить реальные оценки поведения практически применяемых систем композитов.

В литературе можно найти много случаев использования последовательной и параллельной моделей, соответствующих ограничениям по Рейссу и Фойгту, приведенным в разд. 4.1. Исследования показывают, что эти модели практически неприемлемы. Лишь в исключительных случаях с их помощью можно получить разумные приближения для эффективных свойств. Недостатки последовательной и параллельной моделей в отдельности часто пытаются исправить, объединяя их в различного рода комбинированные модели. Подобного рода прием, конечно, следует отнести к «подгонке», и он никак не заменяет обоснованного описания свойств композита.

Мы не ставили своей целью дать детальный обзор всей области исследования. До сих пор мы не упомянули даже о колоссальном объеме работ, проделанном в направлении статистического описания свойств композитов. Этот аспект механики композитов выходит за рамки нашей книги, однако в качестве типичных работ в этом направлении упомянем книгу Берана [4.18] и работы Крёнера [4.19], результаты которых включают корреляционные функции третьего порядка. Эффективные свойства можно определить и для условий динамического нагружения при больших длинах волн. Работа в этом направлении, включающая также статистическое описание среды, представлена Бозе и Малом [4.20].

Детерминистическое направление также представлено многочисленной литературой. Например, Уэлпол [4.21] получил оценки эффективных свойств сред с анизотропными включениями; он привел примеры оценки свойств поликристаллических агрегатов. Мы не дали обзора литературы, да это и не является нашей целью. Мы скорее выбрали те аспекты исследовательской работы, которые необходимы для построения разумно исчерпывающих подходов к рассматриваемой области с точки зрения детерминистической теории.

В настоящем исследовании использовано много идеализаций. Например, большинство результатов получено для случая комбинации двух фаз, а выражения для оценок приведены в общем виде. Композиты, применяемые на практике, часто представляя собой комбинацию трех или более компонентов. Как в этом случае подходить к задаче определения эффективных свойств? Ответ на этот вопрос не прост и не однозначен.

С высокой степенью достоверности можно решать любую задачу как последовательность задач о двухфазной среде. Это направление исследования относительно мало разработано. Другая идеализация лежит в основе большинства работ, исследую-

щих эффективные свойства сред, содержащих волокнистые или пластинчатые включения. Суть этой идеализации заключается в пренебрежении краевыми и кромочными эффектами. Несмотря на это, удалось получить сложные результаты о влиянии конечной длины волокон (разд. 3.4) для случая малых объемных долей выпрямленных параллельных волокон. Большая практическая целесообразность исследования подобных эффектов несомненна.

Важно заметить, что прочность — не менее существенная характеристика материала, чем жесткость. Внимание, которое уделено описанию жесткости, отнюдь не означает, что мы пытаемся создать обратное впечатление. Вопросы оценки прочности будут затронуты в разд. 6.2, но, как будет видно, этот раздел механики композитов не достиг столь высокого уровня развития, как описание эффективных жесткостей гетерогенных сред. Кроме того, следует отметить сходство математических задач, поставленных при определении эффективных модулей, с задачами в ряде других областей, такими, как описание диэлектрических, электромагнитных и термических свойств гетерогенных материалов. Последние как раз и являются предметом рассмотрения гл. IX.

ЗАДАЧИ

1. Подробно докажите, что σ^* в (1.4) самоуравновешено. Осуществляя это доказательство, объясните связь между напряжением упругой поляризации τ , тензором жесткости тела сравнения C_0 и деформацией ε .
2. Для случая макроскопической изотропии проверьте, являются ли выражения оценок для k (1.50) взаимозаменяемыми по отношению к инверсии фаз, т. е. при замене индексов $1 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 1$ выражение нижней оценки принимает вид выражения верхней оценки после инверсии фаз. Справедливо ли подобное предположение для выражений оценок эффективного модуля сдвига μ ?
3. Объясните, как подойти к решению задачи об определении оценок жесткостей композита, образованного волокнами одного размера с гексагональной упаковкой. Используйте литературные источники, перечисленные в главе.
4. Выведите формулы для определения объемного содержания сфер одинакового размера для случаев их кубической и гексагональной упаковки. Получите соответствующие формулы и для цилиндров одинакового размера при аналогичных видах упаковки.
5. Предсказание эффективных свойств композита можно осуществить при помощи эмпирического выражения, известного под названием уравнения Халфина — Цая. Обратитесь к литературе по композитам для ознакомления с этим уравнением и обсудите его ограничения и значение в сравнении с результатами, полученными в этой главе.
6. Получите частные приближенные формулы для оценки эффективных свойств композита по полидисперсной модели композита с цилиндрическими включениями при условии $cE_F/E_M \gg 1$ и $cE_F/k_M \gg 1$.
7. Выведите формулы (5.6) и (5.7) для свойств двухкомпонентной среды с пластинчатыми включениями при плоском напряженном состоянии. Для

частного примера определите отклонение результата расчета ν по (5.7) от расчета по правилу смеси.

8. Обсудите практические ограничения в использовании волокон и пластинчатых включений для хаотического армирования в объеме.
9. Обсудите способы получения выражений эффективных модулей для композита с арматурой в виде произвольно ориентированных волокон конечной длины. Примените совместно методы расчета, приведенные в разд. 3.4 для сред с параллельными волокнами конечной длины и в разд. 4.4 для сред с хаотически ориентированными волокнами бесконечной длины.

ЛИТЕРАТУРА

- 4.1. Paul B. Prediction of elastic constants of multiphase materials. — *Trans. ASME*, 1960, v. 218, p. 36.
- 4.2. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1963, v. 11, p. 127.
- 4.3. Walpole L. J. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems — I. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1966, v. 14, p. 151.
- 4.4. Love A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. — New York: Dover, 1944.
- 4.5. Hashin Z. On elastic behavior of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1965, v. 13, p. 119.
- 4.6. Hill R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I. Elastic behavior. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1964, v. 12, p. 199.
- 4.7. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. — *J. Appl. Mech.*, 1962, v. 29, p. 143.
- 4.8. Hashin Z., Rosen W. The elastic moduli of fiber reinforced materials. — *J. Appl. Mech.*, 1964, v. 31, p. 223. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1964, № 2, с. 223—232.]
- 4.9. Hashin Z. Theory of fiber reinforced materials. — NASA CR-1974, 1972.
- 4.10. Behrens E. Elastic constants of fiber-reinforced composites with transversely isotropic constituents. — *J. Appl. Mech.*, 1971, v. 38, p. 1062. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1971, № 4, с. 346.]
- 4.11. Chen C. H., Cheng S. Mechanical properties of anisotropic fiber-reinforced composites. — *J. Appl. Mech.*, 1970, v. 37, p. 186. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1970, № 1, с. 197—199.]
- 4.12. Christensen R. M., Waals F. M. Effective stiffness of randomly oriented fiber composites. — *J. Comp. Mater.*, 1972, v. 6, p. 518.
- 4.13. Christensen R. M. Asymptotic modulus results for composites containing randomly oriented fibers. — *Int. J. Solids and Structures*, 1976, v. 12, p. 537.
- 4.14. Cox H. L. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. — *Brit. J. Appl. Phys.*, 1952, v. 3, p. 72.
- 4.15. Halpin J. C., Jerina K., Whitney J. M. The laminate analogy for 2- and 3-dimensional composite materials. — *J. Comp. Mater.*, 1971, v. 5, p. 36.
- 4.16. Christensen R. M. Isotropic properties of platelet reinforced media. — *J. Engng. Mater. Tech.*, 1979, v. 101.
- 4.17. Postma G. W. Wave propagation in a stratified medium. — *Geophysics*, 1955, v. 20, p. 780.
- 4.18. Beran M. J. *Statistical Continuum Theories*. — New York: Wiley, 1968.
- 4.19. Kröner E. Bounds for effective elastic moduli of disordered materials. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1977, v. 25, p. 137.
- 4.20. Bose S. K., Mal A. K. Elastic waves in a fiber-reinforced composite. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1974, v. 22, p. 217.
- 4.21. Walpole L. J. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous system — II. — *J. Mech. and Phys. Solids*, v. 14, p. 289.

СЛОИСТЫЕ КОМПОЗИТЫ

В предыдущих главах было показано, как по известным свойствам компонентов рассчитать свойства композита. При этом, безусловно, подразумевалось, что разные по свойствам компоненты можно комбинировать так, что композит приобретает новые свойства. Однако почти не затрагивался вопрос о том, в каком виде лучше всего изготовить композит, наилучшим образом приспособленный для практического применения.

Обратимся к конкретному случаю и рассмотрим волокнистые композиты. Один из способов изготовления этих материалов состоит в пропитке смолой хаотически ориентированных коротких волокон, образующих рыхлый слой, напоминающий войлок. Для оценки жесткости такого композита можно применять метод, рассмотренный в разд. 4.4. Армирование короткими волокнами очень распространено, однако существует другой широко применяющийся технологический способ, который состоит в последовательной укладке пропитанных связующим однонаправленных монослоев, образующих в результате *слоистый композит*. В таком материале при условии, что в каждом монослое волокна выпрямлены и ориентированы в одном направлении высокие прочностные и жесткостные свойства волокон реализуются лучше, чем в композите с хаотически ориентированной короткой арматурой.

Существуют два основных способа изготовления слоистых композитов. Один основан на так называемой «мокрой» намотке волокнами, тогда как другой состоит в прессовании и отверждении предварительно пропитанных связующим монослоев волокнистой арматуры. Управляя последовательностью укладки слоев, можно получить слоистые композиты с различной ориентацией армирующих волокон, обладающие в плоскости укладки изотропными или анизотропными свойствами. Именно в возможности придания материалу анизотропии, оптимальной для каждого частного случая его применения в конструкции, и заключается главное преимущество волокнистых композитов. В следую-

щей главе мы углубим этот вопрос. В данной главе на некоторых примерах только покажем те возможности, которыми располагает конструктор при проектировании изделий из слоистых композитов.

Начнем с рассмотрения задачи об отыскании последовательности слоев, обеспечивающей получение композита с изотропными свойствами в плоскости укладки. Здравый смысл подсказывает, что для этого каждый последующий слой должен укладываться так, чтобы быть повернутым в плоскости относительно предыдущего на некоторый фиксированный угол. Однако только здравого смысла недостаточно для определения минимального числа слоев, укладка которых указанным способом образует изотропный в плоскости слоистый композит. Ответ на этот вопрос будет довольно неожиданным.

Для успешного применения слоистого композита в конструкциях необходимо прежде всего знать его свойства. Информации о характеристиках монослоя теперь уже недостаточно. Поскольку первоначально область применения слоистых композитов ограничивалась конструкциями типа тонкостенных пластин и оболочек, начнем с определения свойств, характеризующих поведение слоистых композитов именно в тонкостенных конструкциях. Вначале эта задача будет решена методами, характерными для классической теории тонкостенных однородных пластин.

Известно, что при нагружении слоистых композитов проявляются некоторые специфические эффекты, не характерные для однородных сред. В связи с этим в главе обсуждается и более сложная теория слоистых сред, свободная от некоторых упрощающих предположений классической теории. Изучение слоистых оболочек выходит за рамки наших задач.

Начнем с обсуждения основных характеристик монослоя и их взаимосвязей с некоторыми свойствами слоистого композита.

5.1. ПОВОРОТ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Для дальнейшего изложения полезно располагать правилами, позволяющими определять деформативные свойства композита в повернутой системе координат. Очевидная причина этого заключается в особенности структуры слоистого композита, слой которого повернуты один относительно другого на различные углы.

Начнем с повторения упругих соотношений напряжение — деформация из разд. 1.1:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.1)$$

В разд. 1.1 были введены матричные обозначения

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad (1.2)$$

где σ_i и ε_i определены через σ_{ij} и ε_{ij} в разд. 1.1.

В разд. 1.1 обсуждались различные типы симметрии сред. В данной главе нас интересует конкретный вид (1.2) для сред, обладающих симметрией относительно плоскости, а также для ортотропных сред. Если ось координат x_3 перпендикулярна плоскости симметрии материала, последний характеризуется 13 независимыми константами:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

При наличии трех взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии материал называется ортотропным и характеризуется девятью независимыми константами:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Запишем соотношения, обратные (1.1):

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j. \quad (1.5)$$

Для ортотропии вид матрицы S_{ij} идентичен виду матрицы C_{ij} (1.4). Запишем S_{ij} для ортотропного материала таким же образом, как и в разд. 3.1 для трансверсально изотропного:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Из симметрии матрицы S_{ij} следует, что

$$\nu_{ij}E_j = \nu_{ji}E_i \quad (1.7)$$

(суммирование по повторяющимся индексам i, j не производится). Еще раз напомним, что в обозначении коэффициентов Пуассона ν_{ij} первый индекс относится к направлению приложенной деформации, а второй — к направлению связанного с ней изменения поперечных размеров.

Для плоского напряженного состояния имеем

$$\sigma_3 = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_4 = \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_5 = \sigma_{31} = 0,$$

в результате чего в зависимости напряжение — деформация

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

остаются четыре независимые константы.

Соотношение, обратное (1.8), имеет вид

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Взаимосвязь между компонентами в (1.9) и константами C_{ij} по (1.2) легко установить, полагая $\sigma_3 = 0$. Это приводит к следующему результату:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - C_{13}^2/C_{33}, & Q_{12} &= Q_{21} = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}, \\ Q_{22} &= C_{22} - C_{23}^2/C_{33}, & Q_{66} &= C_{66}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Преобразование тензоров

Как уже отмечалось, в данной главе будет рассматриваться в основном ортотропный композит. Однако нам придется обратиться и к способу описания свойств среды с одной плоскостью симметрии в случае поворота системы координат относительно одной из осей, перпендикулярной плоскости симметрии. Закон преобразования тензора C_{ijkl} в (1.1) имеет вид

$$C'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{ko} a_{lp} C_{mnop}. \quad (1.12)$$

Примем, что $1', 2', 3'$ — новые оси системы координат $1, 2, 3$, повернутой относительно оси 3 ; тогда

$$\begin{aligned} C'_{11} &= m^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{66}) + 4mn (m^2 C_{16} + n^2 C_{26}) + n^4 C_{22}, \\ C'_{12} &= m^2 n^2 (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) - 2mn (m^2 - n^2) (C_{16} - C_{26}) + (m^4 + n^4) C_{12}, \\ C'_{13} &= m^2 C_{13} + n^2 C_{23} + 2mn C_{36}, \\ C'_{16} &= m^2 (m^2 - 3n^2) C_{16} - mn [m^2 C_{11} - n^2 C_{22} - (m^2 - n^2) (C_{12} + 2C_{66})] + \\ &\quad + n^2 (3m^2 - n^2) C_{26}, \\ C'_{22} &= n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{66}) - 4mn (m^2 C_{26} + n^2 C_{16}) + m^4 C_{22}, \\ C'_{23} &= n^2 C_{13} + m^2 C_{23} - 2mn C_{36}, \\ C'_{26} &= m^2 (m^2 - 3n^2) C_{26} - mn [n^2 C_{11} - m^2 C_{22} + \\ &\quad + (m^2 - n^2) (C_{12} + 2C_{66})] + n^2 (3m^2 - n^2) C_{16}, \\ C'_{33} &= C_{33}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$C'_{36} = (m^2 - n^2) C_{36} + mn (C_{23} - C_{13}),$$

$$C'_{44} = m^2 C_{44} - 2mn C_{45} + n^2 C_{55},$$

$$C'_{45} = (m^2 - n^2) C_{45} + mn (C_{44} - C_{55}),$$

$$C'_{55} = m^2 C_{55} + 2mn C_{45} + n^2 C_{44},$$

$$C'_{66} = m^2 n^2 (C_{11} + C_{22} - 2C_{12}) + 2mn (m^2 - n^2) (C_{22} - C_{16}) + (m^2 - n^2)^2 C_{66},$$

где $m = \cos \theta$, $n = \sin \theta$ и θ — угол поворота.

Теперь необходимо получить формулы преобразования для соотношений напряжение — деформация при плоском напряженном состоянии. Для ортотропного материала, обладающего только одной плоскостью симметрии, совпадающей с плоскостью $1, 2$ системы координат, соотношения напряжение — деформация (1.10) можно обобщить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

где

$$Q_{ij} = C_{ij} - C_{i3}C_{j3}/C_{33}. \quad (1.15)$$

Наличие компонент $Q_{16} = Q_{61}$, $Q_{26} = Q_{62}$ в (1.14) отражает взаимодействие между касательными или нормальными напряжениями и деформациями. Компоненты Q_{ij} и C_{ij} подчиняются при повороте системы координат одному и тому же закону преобразования (1.13) как компоненты тензора четвертого ранга. Следуя работе [5.1], преобразования (1.13) можно записать в очень компактной форме, что и будет сделано для Q_{ij} . С учетом следующих тождеств:

$$\begin{aligned} m^4 &= 1/8(3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta), & m^3n &= 1/8(2 \sin 2\theta + \sin 4\theta), \\ m^2n^2 &= 1/8(1 - \cos 4\theta), & mn^3 &= 1/8(2 \sin 2\theta - \sin 4\theta), \\ n^4 &= 1/8(3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Q_{ij} преобразуются к виду

$$\begin{bmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{22} \\ Q'_{12} \\ Q'_{66} \\ 2Q'_{16} \\ 2Q'_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & 2U_6 & U_3 & U_7 \\ U_1 & -U_2 & -2U_6 & U_3 & U_7 \\ U_4 & 0 & 0 & -U_3 & -U_7 \\ U_5 & 0 & 0 & -U_3 & -U_7 \\ 0 & 2U_6 & -U_2 & 2U_7 & -2U_3 \\ 0 & 2U_6 & -U_2 & -2U_7 & 2U_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ \cos 4\theta \\ \sin 4\theta \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= 1/8(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), & U_2 &= 1/2(Q_{11} - Q_{22}), \\ U_3 &= 1/8(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}), & U_4 &= 1/8(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}), \\ U_5 &= 1/8(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}), & U_6 &= 1/2(Q_{16} + Q_{26}), \\ & & U_7 &= 1/2(Q_{16} - Q_{26}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отметим ряд инвариантных свойств. Непосредственно из (1.17) следует, что

$$\begin{aligned} Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{12} &= Q_{11} + Q_{22} + 4Q_{12}, \\ Q'_{66} - Q'_{12} &= Q_{66} - Q_{12}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Эти инварианты совпадают с приведенными в [5.2].

Макроскопически изотропные свойства

Представим теперь, что слоистый композит образован регулярной последовательностью ортотропных слоев. На данном этапе рассмотрим только жесткость такого композита в плоско-

сти. Изгибные характеристики обсудим в следующем разделе. Предположим, что три или более одинаковых слоя уложены последовательно каждый с поворотом относительно предыдущего на некоторый одинаковый угол. Равнодействующие напряжений для такого слоистого композита записываются в виде, подобном (1.14):

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

где

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (Q_{ij})_k h_k, \quad (1.21)$$

а h_k — толщина k -го слоя. Рассмотрим для примера член A_{11} . Запишем (1.21) в виде

$$A'_{11} = \sum_{k=1}^N (Q'_{11})_k h_k \quad (1.22)$$

и определим значение константы A'_{11} в направлении i . Примем, что оси координат 1, 2 совпадают с главными направлениями ортотропии рассматриваемого слоя. Из (1.17) тогда следует, что

$$(Q'_{11})_k = U_1 + U_2 \cos 2\theta_k + U_3 \cos 4\theta_k, \quad (1.23)$$

где θ_k — угол между осью 1 слоя k и осью 1' слоистого композита. Обозначим общую толщину пакета слоев через h ; тогда $h_k = h/N$, если все слои одинаковы по толщине. Из (1.22) и (1.23) получим

$$A'_{11} = \frac{h}{N} \left\{ U_1 + U_2 \sum_{k=1}^N \cos 2\theta_k + U_3 \sum_{k=1}^N \cos 4\theta_k \right\}.$$

Пусть теперь любое направление по отношению к оси 1' будет задано углом φ . Тогда свойство слоистого композита в направлении, повернутом относительно 1' на угол φ , выражается следующим образом:

$$A''_{11} = \frac{h}{N} \left\{ U_1 + U_2 \sum_{k=1}^N \cos 2(\theta_k - \varphi) + U_3 \sum_{k=1}^N \cos 4(\theta_k - \varphi) \right\}. \quad (1.24)$$

Используя тригонометрические тождества, перепишем (1.24) в виде

$$\begin{aligned} A''_{11} = \frac{h}{N} \left\{ U_1 + U_2 \cos 2\varphi \sum_{k=1}^N \cos 2\theta_k + U_2 \sin 2\varphi \sum_{k=1}^N \sin 2\theta_k + \right. \\ \left. + U_3 \cos 4\varphi \sum_{k=1}^N \cos 4\theta_k + U_3 \sin 4\varphi \sum_{k=1}^N \sin 4\theta_k \right\}. \quad (1.25) \end{aligned}$$

Теперь угол между слоями в N -слойном пакете равен π/N , и типичная сумма, входящая в (1.25), имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \cos 2\theta_k = \cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \dots + \cos 2\pi.$$

Эту сумму можно записать и иначе:

$$\cos x + \cos 2x + \dots + \cos Nx = \frac{\sin(N + 1/2)x}{2 \sin(x/2)} - \frac{1}{2}. \quad (1.26)$$

Используя в (1.26) обозначение $x = 2\pi/N$, получим в результате

$$\sum_{k=1}^N \cos 2\theta_k = 0. \quad (1.27)$$

Таким же образом все другие суммы в (1.25) равны нулю для $N \geq 3$, и A''_{11} в (1.25) оказывается не зависящим от ϕ :

$$A''_{11} = \frac{h}{N} U_1. \quad (1.28)$$

Аналогично $A'_{ij} = \text{const}$ и не зависит от ориентации осей $1'$, $2'$. Легко показать, что полученный результат не справедлив для $N=2$. Таким образом, видно, что укладка трех и более одинаковых слоев каждого со сдвигом на одинаковый угол π/N относительно предыдущего дает слоистый композит, обладающий изотропными свойствами в плоскости укладки. На практике композит такого типа называют квазиизотропным, поскольку изотропия упругих свойств в плоскости укладки, как будет показано в следующем разделе, не обязательно сопровождается изотропией свойств, характеризующих сопротивление композита изгибу. Напомним еще раз на основании результатов, полученных в разд. 4.4 для композитов с хаотически ориентированными волокнами, что изотропия упругих свойств в плоскости определяется выражениями (4.22) и (4.23). Эти формулы применимы также и для рассматриваемого здесь квазиизотропного слоистого композита, составленного из трех или более слоев, уложенных под одинаковыми углами один относительно другого.

5.2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Определив правила преобразования упругих констант моно-слоя при переходе от одной системы координат к другой, повернутой на некоторый угол, перейдем к рассмотрению слоистых сред. Изложим далее полную теорию изгиба и растяжения сло-

стных пластин. Эта теория основана на тех же допущениях, что и классическая теория однородных пластин, и совпадает с ней в частном случае.

Определяющие соотношения

Рассмотрим k -й слой слоистого композита, находящийся в условиях плоского напряженного состояния. Зависимости напряжения — деформация этого слоя, записанные сокращенно:

$$[\sigma]_k = [Q]_k [\varepsilon]_k, \quad (2.1)$$

имеют развернутый вид (1.14). Согласно гипотезе Кирхгофа — Лява, уравнения перемещения слоя приводятся к виду

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x}, \\ v &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y}, \\ w &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где координата z нормальна к недеформированной срединной плоскости слоистого композита. Соотношения (2.2) — не более чем обычное требование, вытекающее из гипотезы плоских сечений при изгибе. Из соотношений между деформациями и перемещениями следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Деформации записываются в виде

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_{yy}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_{xy}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right), & \kappa_{xy} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Определим равнодействующие нормального и касательного напряжений:

$$(N_x, N_y, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}] dz \quad (2.6)$$

и

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{zx}^{(k)}, \sigma_{yz}^{(k)}] dz, \quad (2.7)$$

где $z=0$ на срединной плоскости пластины и h — общая толщина пластины. Изгибающие моменты определяются выражением

$$(M_x, M_y, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}] z dz. \quad (2.8)$$

Выписав уравнения равновесия, получим

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0. \quad (2.11)$$

Эти уравнения после интегрирования по z дают

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \quad (2.14)$$

где

$$q = \sigma_{zz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{zz} \left(-\frac{h}{2} \right), \quad (2.15)$$

и касательные напряжения на верхней и нижней плоскостях пластины стремятся к нулю. Теперь, умножив уравнение равновесия (2.9) на z и проинтегрировав, получим

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zx}^{(k)}}{\partial z} z dz = 0. \quad (2.16)$$

Подынтегральное выражение в (2.16) можно записать в виде

$$z \frac{\partial \sigma_{zx}^{(k)}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (z \sigma_{zx}^{(k)}) - \sigma_{zx}^{(k)}.$$

Как и ранее, предположим, что

$$\sigma_{zx}^{(k)} \Big|_{z=\pm h/2} = 0,$$

и запишем (2.16) с использованием (2.7) в виде

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (2.17)$$

Подобным же образом найдем, что

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \quad (2.18)$$

Окончательно взяв производные от (2.17) и (2.18) и подставив их в (2.14), получим

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (2.19)$$

Эти результаты совпадают с соответствующими результатами теории однородных пластин, за исключением определений равнодействующих для напряжений (2.6) — (2.8).

Наш следующий шаг состоит в выражении основных уравнений равновесия через перемещения. Подставив в выражения равнодействующих (2.6) и (2.8) соотношение (2.1), записанное в развернутом виде (1.14), получим

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & | & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & | & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & | & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & | & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & | & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & | & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ \varkappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

где

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} (1, z, z^2) dz. \quad (2.21)$$

Теперь следует заметить, что в общем случае совместное действие изгиба и растяжения в (2.20) отражается компонентами матрицы B_{ij} . В классической теории подобного взаимодействия нет. Ниже будет рассмотрен частный случай, когда члены B_{ij}

стремятся к нулю и эффекты взаимодействия отсутствуют. Преобразования A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} , связанные с поворотом системы координат, подобны уже определенным для Q_{ij} .

Чтобы записать уравнение равновесия через перемещения в развернутом виде, подставим (2.20) в (2.12), (2.13), (2.19). Полученные в результате уравнения имеют вид

$$A_{11}u_{0,xx} + 2A_{16}u_{0,xy} + A_{66}u_{0,yy} + A_{16}v_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})v_{0,xy} + A_{26}v_{0,yy} - B_{11}\omega_{,xxx} - 3B_{16}\omega_{,xxy} - (B_{12} + 2B_{66})\omega_{,xyy} - B_{26}\omega_{,yyy} = 0, \quad (2.22)$$

$$A_{16}u_{0,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{0,xy} + A_{26}u_{0,yy} + A_{66}v_{0,xx} + 2A_{26}v_{0,xy} + A_{22}v_{0,yy} - B_{16}\omega_{,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})\omega_{,xxy} - 3B_{26}\omega_{,xyy} - B_{22}\omega_{,yyy} = 0, \quad (2.23)$$

$$D_{11}\omega_{,xxxx} + 4D_{16}\omega_{,xxxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})\omega_{,xxyy} + 4D_{26}\omega_{,xyyy} + D_{22}\omega_{,yyyy} - B_{11}u_{0,xxx} - 3B_{16}u_{0,xxy} - (B_{12} + 2B_{66})u_{0,xyy} - B_{26}u_{0,yyy} - B_{16}v_{0,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})v_{0,xxy} - 3B_{26}v_{0,xyy} - B_{22}v_{0,yyy} = +q. \quad (2.24)$$

Теперь у нас есть три уравнения с неизвестными функциями перемещения $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $\omega(x, y)$. Эти уравнения, как уже было отмечено, связывают мембранные (в плоскости) и изгибные эффекты. Граничные условия, соответствующие рассматриваемой теории, включают определение одной функции из каждой из следующих пар: u_n или N_n , u_t или N_{nt} , $\omega_{,n}$ или M_n , ω или $M_{nt,t} + Q_n$, где n и t — нормальная и касательная координаты вдоль кромки пластины.

Теперь перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев.

Частные случаи

Изотропный монослой. Для изотропного монослоя имеем

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} = A, & A_{12} &= \nu A, & A_{22} &= A, \\ A_{16} &= A_{26} = 0, & A_{66} &= (1-\nu)A, & B_{ij} &= 0, \\ D_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D, & D_{12} &= \nu D, & D_{22} &= D, \\ D_{16} &= D_{26} = 0, & D_{66} &= (1-\nu)D. \end{aligned}$$

Здесь взаимодействие между изгибными и мембранными эффектами отсутствует.

Ортотропный монослой. Для пластины, состоящей из одного ортотропного слоя,

$$A_{ij} = Q_{ij}h, \quad B_{ij} = 0, \quad D_{ij} = \frac{Q_{ij}h^3}{12}.$$

Как и в предыдущем случае, взаимодействия между изгибными и мембранными эффектами нет.

Ортотропный монослой — частный случай. Система координат относительно главных осей ортотропии ориентирована так, что $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$. Поскольку $D_{16} = 0$, $D_{26} = 0$, взаимодействие между эффектами цилиндрического изгиба и кручения пластины отсутствует.

Симметричный слоистый композит. Если пакет слоев уложен так, что существует полная симметрия в толщинах отдельных слоев в их свойствах и ориентации относительно срединной плоскости пластины, то из (2.21) следует, что $B_{ij} = 0$, и нет взаимодействия между мембранными и изгибными эффектами. У такого слоистого композита константы A_{16} , A_{26} , D_{16} и D_{26} в зависимости от укладки слоев могут быть равны нулю. Например, для слоистого композита с продольно-поперечным армированием, у которого ортотропные слои уложены под углом 90° , $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$, если плоскости zx и yz совпадают с плоскостями симметрии материала. С другой стороны, для косоугольно армированного композита это условие не выполняется и члены, содержащие константы A_{16} , A_{26} , D_{16} и D_{26} , не равны нулю.

Асимметричные слоистые композиты. Безусловно, гораздо удобнее заниматься расчетом и проектированием симметричных слоистых пластин, однако иногда требования к конструкции диктуют необходимость применения слоистых композитов асимметричного строения. В этом случае не используются какие-либо упрощения, и приходится применять уравнение (2.20) в полной форме.

Несмотря на то что классическая теория пластин дает очень хорошие результаты при решении задач нагружения однородных пластин, ее применимость для анализа поведения слоистых композитов не столь очевидна. Для оценки границ применимости классической теории необходимо сравнить полученные с ее помощью решения с точными. Как будет показано в следующем разделе, такие точные решения существуют.

5.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ

Рассмотрим симметричный слоистый композит, составленный из N ортотропных слоев, плоскости симметрии которых параллельны плоскости координат. Предположим, что композит находится в плоском деформированном состоянии, когда деформация в направлении оси y отсутствует. Задача, таким образом, становится одномерной по координате x . Подобные одномерные

задачи называют задачами о цилиндрическом изгибе. Точное трехмерное решение для них получено Пагано [5.3] на основе обобщения решения Тимошенко и Гудбера [5.4].

Точное решение

В условиях плоской деформации

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{yz} = 0, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_{xy} = 0$$

соотношение напряжение — деформация имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{31} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{zz}$ и $\varepsilon_5 = \varepsilon_{zx}$. Выражение, обратное этому, имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{13} & 0 \\ R_{31} & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & R_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{C_{33}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}, & R_{13} &= \frac{-C_{13}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2} \\ R_{33} &= \frac{C_{11}}{C_{11}C_{33} - C_{13}^2}, & R_{55} &= \frac{1}{C_{55}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим задачу о нагружении слоистого композита нормальными напряжениями по верхней плоскости при условии, что другие поверхностные нагрузки отсутствуют. Примем, что

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} \Big|_{z=h/2} &= q_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \\ \sigma_{zx} \Big|_{z=h/2} &= 0, \\ \sigma_{zz} \Big|_{z=-h/2} &= \sigma_{zx} \Big|_{z=-h/2} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Конечно, при этом необходимо выполнить условие непрерывности напряжений и перемещений на поверхностях раздела слоев.

Выберем локальную систему координат в срединной плоскости каждого слоя. Пусть для i -го слоя

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(i)} &= f_i''(z) \sin \frac{\pi x}{l}, & \sigma_{zz}^{(i)} &= -\frac{\pi^2}{l^2} f_i(z) \sin \frac{\pi x}{l}, \\ \sigma_{zx}^{(i)} &= -\frac{\pi}{l} f_i'(z) \cos \frac{\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $f_i(z)$ — неизвестная функция, которую следует определить, а штрих обозначает производную по z . Уравнения равновесия имеют вид

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{zx,z} = 0, \quad \sigma_{zz,z} + \sigma_{zx,x} = 0. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) в (3.6), можно найти, что последние удовлетворяются тождественно, кроме одного уравнения совместности:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2}. \quad (3.7)$$

Доказательство того, что это уравнение сводится к следующему виду:

$$R_{11}^{(i)} f_i''''(z) - [2R_{55}^{(i)} + 2R_{13}^{(i)}] \lambda^2 f_i''(z) + R_{33}^{(i)} \lambda^4 f_i(z) = 0, \quad (3.8)$$

где $\lambda = \pi/l$, оставим читателю в качестве упражнения.

Найдено, что решение уравнения (3.8) относительно $f_i(z)$ имеет вид

$$f_i(z) = \sum_{j=1}^4 A_{ji} \exp(m_{ji} z_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.9)$$

где

$$\left. \begin{matrix} m_{1i} \\ m_{2i} \end{matrix} \right\} = \pm \lambda \left(\frac{a_i + b_i}{c_i} \right)^{1/2}, \quad \left. \begin{matrix} m_{3i} \\ m_{4i} \end{matrix} \right\} = \pm \lambda \left(\frac{a_i - b_i}{c_i} \right)^{1/2}, \quad (3.10)$$

$$a_i = 2R_{55}^{(i)} + 2R_{13}^{(i)},$$

$$b_i = [a_i^2 - 4R_{11}^{(i)} R_{33}^{(i)}]^{1/2}, \quad (3.11)$$

$$c_i = 2R_{11}^{(i)}$$

и где A_{ji} — константы, подлежащие определению.

Ниже записаны напряжения (3.12) и перемещения (3.13), соответствующие решению (3.9):

$$\sigma_{xx}^{(i)} = \sin \lambda x \sum_{j=1}^4 A_{ji} m_{ji}^2 \exp(m_{ji} z_i),$$

$$\sigma_{zz}^{(i)} = -\lambda^2 \sin \lambda x \sum_{j=1}^4 A_{ji} \exp(m_{ji} z_i), \quad (3.12)$$

$$\sigma_{zx}^{(i)} = -\lambda \cos \lambda x \sum_{j=1}^4 A_{ji} m_{ji} \exp(m_{ji} z_i);$$

$$u^{(i)} = \frac{\cos \lambda x}{\lambda} \sum_{j=1}^4 A_{ji} [R_{13}^{(i)} \lambda^2 - R_{11}^{(i)} m_{ji}^2] \exp(m_{ji} z_i), \quad (3.13)$$

$$w^{(i)} = \sin \lambda x \sum_{j=1}^4 A_{ji} \left[R_{13}^{(i)} m_{ji} - \frac{R_{33}^{(i)} \lambda^2}{m_{ji}} \right] \exp(m_{ji} z_i).$$

Выражения, соответствующие (3.12) и (3.13), даны в [5.3] для случая, когда плоскость yz является плоскостью трансверсальной изотропии, а не просто плоскостью ортотропии.

Условие непрерывности на поверхности раздела слоев вместе с граничными условиями на поверхности пластины (3.4) дают систему $4N$ уравнений относительно $4N$ неизвестных констант A_{ji} . Полученная система линейных алгебраических уравнений легко разрешима с помощью ЭЦВМ. Перед тем как показать некоторые частные результаты для задачи цилиндрического изгиба, необходимо получить соответствующие решения на основании классической теории, изложенной в разд. 5.2.

Гипотеза Кирхгофа — Лява

Из уравнений (2.22) и (2.24) имеем разрешающие уравнения классической теории:

$$\begin{aligned} A_{11}u_{0,xx} - B_{11}w_{0,xxx} &= 0, \\ D_{11}w_{0,xxxx} - B_{11}u_{0,xxx} &= q, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11}(1, z, z^2) dz. \quad (3.15)$$

Для $q = q_0 \sin \lambda x$ из (3.14) получим

$$u_0 = \frac{B_{11}q_0}{(A_{11}D_{11} - B_{11}^2)\lambda^3} \cos \lambda x, \quad w_0 = \frac{A_{11}q_0}{(A_{11}D_{11} - B_{11}^2)\lambda^4} \sin \lambda x. \quad (3.16)$$

Имеется единственная не равная нулю компонента деформации ϵ_{xx} :

$$\epsilon_{xx} = u_{0,x} - zw_{0,xx}$$

решение для которой имеет вид

$$\epsilon_{xx} = \frac{(A_{11}z - B_{11})q_0}{(A_{11}D_{11} - B_{11}^2)\lambda^2} \sin \lambda x. \quad (3.17)$$

Напряжение $\sigma_{xx}^{(i)}$ получается при умножении (3.17) на $C_{11}^{(i)}$. Гипотезы, положенные в основу классической теории, не позволяют определить σ_{zx} и σ_{zz} ; однако, зная $\sigma_{xx}^{(i)}$, эти напряжения можно найти прямым интегрированием уравнений равновесия.

Пример

Рассмотрим теперь пример, позволяющий сопоставить точное решение задачи о цилиндрическом изгибе с решением на основании классической теории. Допустим, что монослой обладает

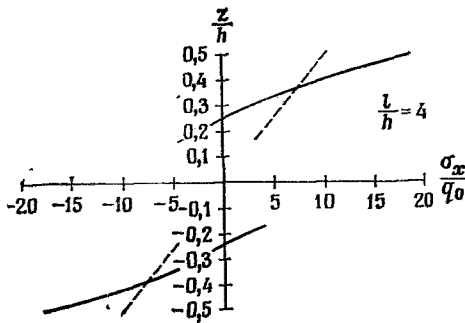


Рис. 5.1. Эпюра нормальных напряжений при изгибе трехслойного композита [5.3]; $l/h=4$. Обозначения: ———— теория упругости; - - - классическая теория.

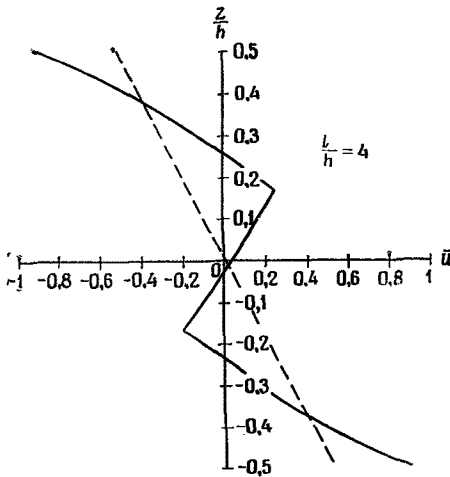


Рис. 5.2. Распределение по сечению безразмерного перемещения в плоскости в трехслойном слоистом композите [5.3]; $l/h=4$. Обозначения: ———— теория упругости; - - - классическая теория.

следующими свойствами:

$$\frac{E_L}{E_T} = 25, \quad \frac{\mu_{LT}}{E_T} = 0,5, \quad \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0,25, \quad \frac{\mu_{TT}}{E_T} = 0,2,$$

где индексы L и T относятся соответственно к продольному направлению (направлению волокон) и к направлению,

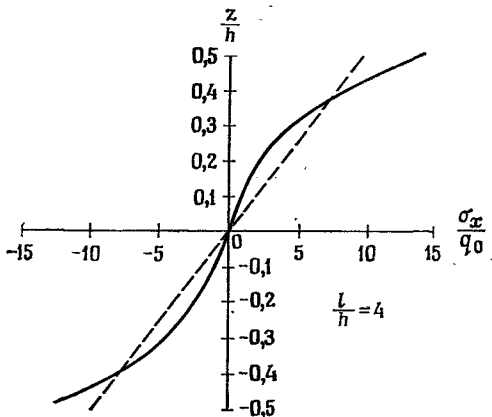


Рис. 5.3. Эпюры нормальных напряжений при изгибе однослойного композита [5.3]; $l/h = 4$. Обозначения: ————— теория упругости; - - - - классическая теория.

перпендикулярному волокнам. Приведенные характеристики монослоя позволяют рассчитать константы Q . Напряжения и перемещения в задаче удобно представить в приведенном виде:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}(l/2, z)}{q_0}, \quad \bar{u}_0 = \frac{E_T u_0(0, z)}{h q_0}.$$

На рис. 5.1 и 5.2 показано распределение напряжений σ_{xx} и перемещений u_0 для симметричного трехслойного композита, у которого направление L совпадает с направлением x для наружных слоев, а направление T параллельно x во внутреннем слое. В этом примере $l/h = 4$; таким образом, длина волны синусоидально изменяющейся нагрузки в восемь раз больше толщины пластины. Очевидно, что при такой длине волны классическая теория дает неадекватное решение. Для отношения $l/h = 10$ ошибка в определении максимального изгибного напряжения составляет приблизительно 14%. По мере возрастания l/h величина ошибки непрерывно убывает. Из рис. 5.1 видно, что разрыв в свойствах композита в направлении, перпендикулярном к плоскости, вызывает разрыв и в нормальных напряжениях при изгибе. Это, как видно из рис. 5.2, приводит к значительному искажению формы поперечного сечения. Далее будет показано, что такие эффекты характерны для слоистых композитов, а не для однородных пластин.

На рис. 5.3 представлены результаты расчетов для однослойной пластины с заданными свойствами, в которой волокна ориентированы в направлении x и $l/h = 4$. Очевидно, задача об одно-

родной пластине не является для классической теории столь же критической в смысле достоверности получаемых результатов, как рассмотренная задача о трехслойной пластине. При заданной длине волны синусоидально изменяющейся нагрузки классическая теория описывает поведение слоистого композита значительно хуже, чем поведение однородной пластины. Следует, однако, помнить, что приведенные результаты относятся лишь к частному случаю, когда композит составлен из трех слоев. При увеличении в композите числа слоев с изменяющейся от слоя к слою ориентацией волокон классическая теория при неизменном отношении l/h дает все более улучшающиеся оценки напряженного состояния.

5.4. УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ

В предыдущем разделе показано, что на уровне гипотез классической теории пластин описать поведение слоистых композитов труднее, чем поведение однородных пластин. Это побуждает нас исследовать возможности использования более совершенной теории для моделирования поведения слоистых композитов. Применительно к исследованию однородных пластин существует довольно много теорий более высокого порядка сложности, чем классическая. К числу наиболее сложных можно, наверное, отнести теорию, предложенную Ло, Кристенсенем и Ву [5.5]. Эти же авторы предложили вариант уточненной теории, моделирующей слоистый композит [5.6]. В данном разделе приведены некоторые результаты ее применения.

Поскольку мы рассматриваем слоистые композиты, обратимся до описания уточненной теории к хорошо известной теории, учитывающей межслойные сдвиговые деформации. Кинематические уравнения для этой теории имеют вид

$$\begin{aligned} u &= u^0(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v &= v^0(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w &= w^0(x, y). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Заметим, что эти уравнения в точности совпадают с соответствующими уравнениями классической теории (2.2). Подобная ситуация на первый взгляд может показаться парадоксальной, однако объясняется очень просто. В классической теории члены ψ_x и ψ_y уравнений (4.1) функционально зависят от $w^0(x, y)$, как показано в (2.2). Предположение о форме ψ_x и ψ_y является ограничением теории (учитывающей деформации межслойного сдвига), которое упрощает ее до уровня классической теории. Несмотря на возросшую общность теории, полученные с ее помощью оценки распределения изгибных напряжений для

слоистых композитов оказываются лишь незначительно улучшенными по сравнению с результатами классической теории. Поэтому следует ожидать, что для моделирования напряженного состояния слоистых композитов (см. рис. 5.1) необходимо учитывать эффекты более высокого порядка, чем это позволяло уравнения (4.1).

Продолжая предшествующие рассуждения, обратимся к рис. 5.2, из которого следует, что при нагружении возможно значительное искажение формы поперечного сечения слоистых композитов. В соответствии с этим примем такие кинематические допущения, которые позволяют описать искажение формы поперечного сечения. В результате подобных допущений получим следующие уравнения в перемещениях:

$$\begin{aligned} u &= u^0(x, y) + z\psi_x(x, y) + z^2\zeta_x(x, y) + z^3\varphi_x(x, y), \\ v &= v^0(x, y) + z\psi_y(x, y) + z^2\zeta_y(x, y) + z^3\varphi_y(x, y), \\ w &= w^0(x, y) + z\psi_z(x, y) + z^2\zeta_z(x, y). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь не приводится вывод теории, основанный на уравнении (4.2): он длинный и достаточно утомительный. При необходимости с ним можно подробно ознакомиться в [5.5] и [5.6]. В основу этого вполне строгого вывода положен вариационный принцип Лагранжа. В противоположность классической теории, основанной на соотношениях напряжение — деформация для плоского напряженного состояния, рассматриваемая уточненная теория использует полную трехмерную форму этих соотношений. Естественно, что для кинематических уравнений (4.2) полную трехмерную форму соотношений напряжение — деформация следует использовать при описании деформационных эффектов в направлении толщины композита.

Изложим основы уточненной теории, пригодной для описания поведения пластин из слоистых композитов. Перепишем соотношения напряжение — деформация (1.3), соответствующие композиту с одной плоскостью симметрии, в осях координат x , y , z :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Уравнения (4.2) содержат 11 обобщенных функций перемещения; 11 основных уравнений равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + N_{xy,y} + q_x &= 0, \\
 N_{y,y} + N_{xy,x} + q_y &= 0, \\
 Q_{x,x} + Q_{y,y} + q &= 0, \\
 M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x + m_x &= 0, \\
 M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y + m_y &= 0, \\
 R_{x,x} + R_{y,y} - N_z + m &= 0, \\
 P_{x,x} + P_{xy,y} - 2R_x + n_x &= 0, \\
 P_{y,y} + P_{xy,x} - 2R_y + n_y &= 0, \\
 S_{x,x} + S_{y,y} - 2M_z + n &= 0, \\
 \bar{M}_{x,x} + \bar{M}_{xy,y} - 3S_x + l_x &= 0, \\
 \bar{M}_{y,y} + \bar{M}_{xy,x} - 3S_y + l_y &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

где равнодействующие нагрузки определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_z & N_{xy} & Q_x & Q_y \\ M_x & M_y & M_z & M_{xy} & R_x & R_y \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} l \\ z \end{Bmatrix} [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz}] dz, \\
 \begin{bmatrix} P_x & P_y & P_{xy} \\ \bar{M}_x & \bar{M}_y & \bar{M}_{xy} \end{bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} z^2 \\ z^3 \end{Bmatrix} (\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy}) dz, \\
 [S_x \ S_y] &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 (\sigma_{xz} \ \sigma_{yz}) dz.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

В приведенных выражениях для краткости использованы обозначения типа $\sigma_x = \sigma_{xx}$ и т. д. Члены, соответствующие в (4.4) действующим нагрузкам, имеют вид

$$\begin{aligned}
 (q_x, n_x) &= \left[\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \left[l, \frac{h^2}{4} \right], \\
 (q_y, n_y) &= \left[\sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \left[l, \frac{h^2}{4} \right], \\
 (m_x, l_x) &= \left[\sigma_{xz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{xz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \left[\frac{h}{2}, \frac{h^3}{8} \right], \\
 (m_y, l_y) &= \left[\sigma_{yz} \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_{yz} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \left[\frac{h}{2}, \frac{h^3}{8} \right], \\
 m &= \frac{h}{2} \left[\sigma_z \left(\frac{h}{2} \right) + \sigma_z \left(-\frac{h}{2} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Вдоль кромок пластины можно задать граничные условия характеризующиеся одним из следующих 11 произведений:

$$\begin{array}{lll}
 N_n u_n^0, & N_{nt} u_t^0, & M_n \psi_n, \\
 M_{nt} \psi_t, & P_n \xi_n, & P_{nt} \xi_t, \\
 \bar{M}_n \varphi_n, & \bar{M}_{nt} \varphi_t, & Q_n \omega^0, \\
 R_n \psi_z, & & S_n \xi_z,
 \end{array} \quad (4.7)$$

где n и t обозначают направления, нормальное и касательное к кромкам пластины.

Уравнения и граничные условия, заданные посредством (4.4) — (4.7), не зависят от свойств материала пластины и, следовательно, справедливы как для однородных изотропных, так и для слоистых пластин.

Если рассматривать слоистые пластины, то можно использовать комбинацию соотношений (4.3) — (4.5) для того, чтобы выразить 11 основных уравнений равновесия через 11 неизвестных функций перемещения. Эти 11 уравнений в матричном виде приведены ниже:

$$[L_{ij}] \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ \omega^0 \\ \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ -q \\ m_x \\ m_y \\ -m \\ n_x \\ n_y \\ -n \\ l_x \\ l_y \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, 11, \quad (4.8)$$

где L_{ij} — симметричные дифференциальные операторы с коэффициентами, включающими характеристики каждого отдельного слоя. Выражения для L_{ij} слишком длинны, чтобы приводить их здесь полностью. При необходимости с ними можно ознакомиться в [5.6]. Ниже приведены только выражения, которые исполь-

зуются в следующем разделе:

$$\begin{aligned}
 L_{22} &= 2A_{66}\partial_{xx} + 4A_{26}\partial_{xy} + A_{22}\partial_{yy}, \\
 L_{26} &= 2A_{36}\partial_x + A_{23}\partial_y, \\
 L_{28} &= 2D_{66}\partial_{xx} + 4D_{26}\partial_{xy} + D_{22}\partial_{yy}, \\
 L_{66} &= -2D_{55}\partial_{xx} - 4D_{45}\partial_{xy} - 2D_{44}\partial_{yy} + A_{33}, \\
 L_{68} &= (2D_{36} - 4D_{45})\partial_x + (D_{23} - 4D_{44})\partial_y, \\
 L_{88} &= 2H_{66}\partial_{xx} + 4H_{26}\partial_{xy} + H_{22}\partial_{yy} - 4D_{44},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

где

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, K_{ij}, M_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6) C_{ij} dz \tag{4.10}$$

и ∂_{ij} — дифференциальные операторы по отношению к установленной системе координат, т. е. $\partial_{xy} = \partial^2/\partial x \partial y$. Форма других компонент L_{ij} подобна (4.9). Как видно из (4.10), существует семь различных функций характеристик A_{ij}, \dots, M_{ij} , входящих в уточненную теорию. Уравнение (4.10) позволяет на основании заданных свойств различных слоев отыскать путем прямого интегрирования эффективные свойства слоистого композита.

Для сопоставления оценок напряженного состояния по разработанной уточненной теории с точными решениями в [5.6] рассмотрен ряд задач о цилиндрическом изгибе. Один из результатов, относящихся к трехслойному композиту, описанному в разд. 5.3, приведен ниже. Решенная задача относится к цилиндрическому изгибу слоистого композита под действием синусоидально распределенной нагрузки, приложенной по верхней плоскости. Принята гипотеза о плоском деформированном состоянии. Отношение половины длины волны синусоидально меняющейся нагрузки к толщине композита то же, что и в примере в разд. 5.3, $l/h = 4,0$. Эпюры изгибных напряжений по толщине пластины приведены на рис. 5.4, где с рис. 5.1 вновь воспроизведены точное решение и расчет по классической теории.

Из рис. 5.4 следует, что уточненная теория обеспечивает гораздо лучшее приближение к точному решению, чем классическая. Более того, уточненная теория дает очень близкие к точному решению значения максимальных изгибных напряжений. Безусловно, приведенный пример характерен для весьма сильного ограничения на длину волны синусоидально меняющейся нагрузки, которая должна быть в восемь раз больше толщины композита. Как отмечено в предыдущем разделе, при увеличении длины волны решения на основании классической теории дают более удовлетворительные оценки напряженного состояния.

Классическая теория, без сомнения, пригодна для решения многих практических задач. Представленные результаты

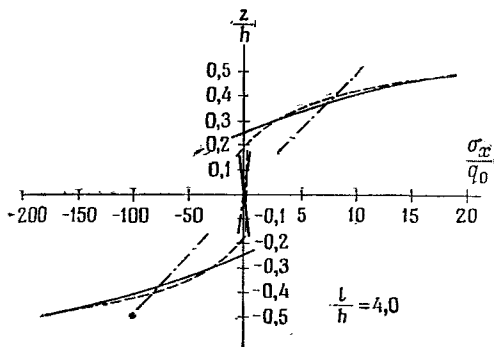


Рис. 5.4. Эпюра нормальных напряжений при изгибе трехслойного композита; $l/h = 4$. Данные из разд. 5.3 [5.6]. Обозначения: — точное решение теории упругости; — — — уточненная теория слоистых пластин; — · — классическая теория слоистых пластин.

показывают, что она неадекватна лишь при малых длинах волн и, следовательно, вблизи вырезов и других геометрических нерегулярностей. Более того, результаты этого и предшествующего разделов указывают, что такая задача характерна для слоистых композитов, а не для однородных пластин. В этих случаях необходимо использовать более точные модели по сравнению с теми, на которых основана классическая теория. С этой целью можно применить или теории высшего порядка, подобные описанной в данном разделе, или подробные численные решения трехмерной теории упругости.

Совершенно другая теория высшего порядка предложена Пагано [5.7]. В его подходе отдельные слои рассматриваются в рамках теории первого порядка, учитывающей сдвиговые деформации. На границе раздела слоев предполагается непрерывность перемещений и напряжений. Следует отметить, что описанная в данном разделе уточненная теория, основанная на непрерывности перемещений, также удовлетворяет и условию непрерывности напряжений на границе раздела слоев, если напряжения определены по методу, приведенному в [5.8]. Эта особенность подхода обсуждается в следующем разделе.

5.5. КРОМОЧНЫЕ ЭФФЕКТЫ

При нагружении слоистых композитов можно наблюдать необычные эффекты, никогда не проявляющиеся в однородных материалах. Достаточно обратиться к такому простому виду нагружения, как растяжение.

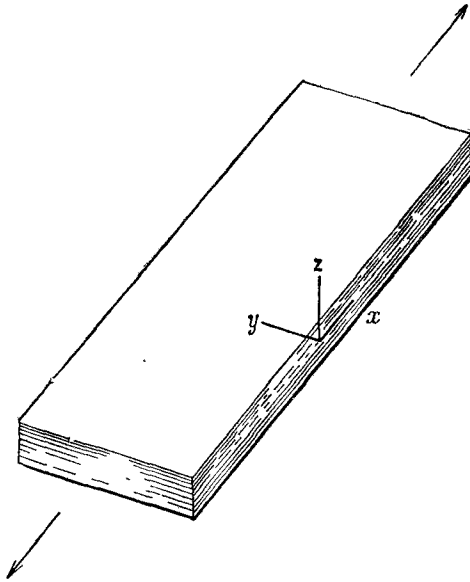


Рис. 5.5. К задаче о кромочном эффекте.

На рис. 5.5 схематически показан образец слоистого композита, нагруженный растягивающей силой. Если бы различно ориентированные слои этого образца в процессе изготовления не были жестко связаны друг с другом, то различия в их механических свойствах вызвали бы при одинаковой деформации всех слоев в направлении x разное их сокращение в поперечном направлении y . Более того, если плоскости симметрии слоев не совпадают с координатными плоскостями на рис. 5.5, то различаются также и перемещения слоев в направлении деформирования x . Однако у слоистых композитов, применяемых в инженерной практике, взаимные перемещения слоев стеснены, и, следовательно, при деформировании композита должны возникать межслойные напряжения, поддерживающие состояние неразрывности перемещений. Как мы увидим, эти напряжения существуют только в областях свободных кромок.

Допустим, что образец слоистого композита, показанный на рис. 5.5, имеет достаточно большой размер в направлении y , так что действием межслойных напряжений можно пренебречь. Именно учет конечности размеров образца, т. е. учет в анализе напряженного состояния у свободных кромок, требует введения межслойных напряжений в краевой зоне, необходимых для поддержания в слоистом композите состояния кинематической

совместности. Для однородного материала напряженное состояние при одноосном растяжении определяется точным решением уравнений равновесия. Перейдем к анализу усложнений, связанных со слоистой структурой среды.

Вначале не будем рассматривать задачу нагружения пластины конечной ширины, изображенной на рис. 5.5, а предположим, что ширина образца достаточно велика, тогда можно пренебречь взаимным влиянием кромок. Таким образом, обратимся к задаче о нагружении бесконечной плоскости. Пусть ϵ — деформация слоистого композита в направлении x , и требуется определить напряженное состояние в области вблизи свободной кромки. Будем решать двумерную задачу в плоскости yz (рис. 5.5). Получить точное аналитическое решение такой задачи, справедливое для слоистых композитов общего вида, чрезвычайно трудно. Постараемся решить задачу, применив рассмотренную в предыдущем разделе уточненную теорию слоистых пластин.

Рассмотрим нагружение слоистого ортогонально армированного композита с симметричной укладкой слоев относительно срединной плоскости. В этой задаче неизвестными, характеризующими поведение композита, являются перемещения v и w в направлениях y и z . В уточненной теории они заданы уравнениями (4.2). Для случая симметричного слоистого композита в этих уравнениях достаточно сохранить только члены, описывающие симметричную деформацию:

$$v = v^0 + z^2 \zeta_y, \quad w = z \psi_z. \quad (5.1)$$

В соответствии с (5.1) определяющие уравнения равновесия (4.8) имеют вид

$$\begin{aligned} L_{22}v^0 + L_{26}\psi_z + L_{28}\zeta_y &= -q_y, \\ L_{62}v^0 + L_{66}\psi_z + L_{68}\zeta_y &= m, \\ L_{82}v^0 + L_{86}\psi_z + L_{88}\zeta_y &= -n_y, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где q_y , m и n_y — заданные нагрузки на поверхности (4.6) и L_{22} , ..., L_{88} — дифференциальные операторы, определяемые выражениями (4.9). Подставляя (4.9) в (5.2), получим

$$\begin{aligned} A_{22}v^0_{,yy} + A_{23}\psi_{z,y} + D_{22}\zeta_{y,yy} &= 0, \\ A_{23}v^0_{,yy} - 2D_{44}\psi_{z,yy} + A_{33}\psi_z + (D_{23} - 4D_{44})\zeta_{y,y} &= 0, \\ D_{22}v^0_{,yy} + [D_{23} - 4D_{44}]\psi_{z,y} + H_{22}\zeta_{y,yy} - 8D_{44}\zeta_y &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где из условия свободных от нагрузок граней слоистого композита следует $q_y = m = n_y = 0$, а из (4.10) имеем

$$(A_{ij}, D_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z^4) C_{ij}(z) dz. \quad (5.4)$$

Поскольку ожидается, что решение должно вырождаться с удалением от свободных кромок, допустим, что

$$\begin{aligned} v^0 &= Ah \exp\left(\frac{-\lambda y}{h}\right), \\ \psi_z &= B \exp\left(\frac{-\lambda y}{h}\right), \\ \xi_y &= \frac{C}{h} \exp\left(\frac{-\lambda y}{h}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Подстановка (5.5) в (5.3) дает

$$\begin{aligned} + A_{22}\lambda A & & - A_{23}B & & + D_{22} \frac{\lambda}{h^2} C = 0, \\ - A_{23}\lambda A & \left[-2D_{44} \frac{\lambda^2}{h^2} + A_{33}\right]B & - [D_{23} - 4D_{44}] \frac{\lambda}{h^2} C = 0, \\ D_{22}\lambda^2 A & - [D_{23} - 4D_{44}]\lambda B & + \left[H_{22} \frac{\lambda^2}{h^2} - 8D_{44}\right]C = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Чтобы решение этой системы существовало, определитель коэффициентов должен быть равен нулю. Можно показать, что характеристическое уравнение, соответствующее этому условию, имеет вид

$$a\lambda^4 + 2b\lambda^2 + c = 0,$$

где a , b , c выражаются через коэффициенты (5.6). Таким образом, существуют два корня λ^2 и в общем два допустимых корня λ . Любой другой корень, который не приводит к вырожденному решению, следует отбросить. Найдя корни λ_k , из (5.6) получаем отношения B_k/A_k и C_k/A_k . Решения (5.1) записываются в виде

$$\begin{aligned} v &= \sum_k \left(hA_k + z^2 \frac{C_k}{h}\right) \exp\left(-\lambda_k \frac{y}{h}\right), \\ w &= z \sum_k B_k \exp\left(-\lambda_k \frac{y}{h}\right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $k = 1, 2$.

Члены (5.7) определяют возмущение поля деформаций вследствие кромочного эффекта, который накладывается на поле деформаций в направлении x . Предварительно выражение для v следует модифицировать соответствующим образом:

$$v = \sum_k \left(hA_k + z^2 \frac{C_k}{h}\right) \exp\left(-\lambda_k \frac{y}{h}\right) + \alpha y + \beta, \quad (5.8)$$

где α — подлежащий определению параметр, который обозначает поперечную деформацию на удалении от кромки, а β — параметр, соответствующий перемещению образца как жесткого тела (этот параметр будет далее опущен).

Из (4.7) граничные условия для свободных от действия напряжений кромок имеют вид

$$\begin{aligned} N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} |_{y=0} dz = 0, \\ P_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \sigma_{yy} |_{y=0} dz = 0, \\ R_y &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yz} |_{y=0} dz = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Теперь необходимо определить напряжения, входящие в (5.9). Сначала запишем соответствующие деформации

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (5.10)$$

Подставляя решения (5.7) и (5.8) в (5.10), получим выражение деформации, которое следует подставить в зависимости напряжение — деформация, полученные из (4.3):

$$\sigma_{yy} = C_{12}\varepsilon + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{yz} = C_{44}\varepsilon_{yz}, \quad (5.11)$$

где ε — деформация, приложенная в направлении x . Объединяя (5.10) и (5.11) с решением (5.8) и подставляя последнее в (5.7), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= C_{12}\varepsilon + C_{22}\alpha + \\ &+ \sum_k \left\{ C_{23}B_k - \frac{\lambda_k}{h} C_{22} \left(hA_k + z^2 \frac{C_k}{h} \right) \right\} \exp \left(-\lambda_k \frac{y}{h} \right), \\ \sigma_{yz} &= \frac{zC_{44}}{2h} \sum_k (2C_k - \lambda_k B_k) \exp \left(-\lambda_k \frac{y}{h} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Подстановка (5.12) в (5.9) дает искомое окончательное выражение

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \alpha C_{22} - C_{22} \sum_k \left[C_{23} B_k - \lambda_k C_{22} \left(A_k + z^2 \frac{C_k}{h^2} \right) \right] \right\} dz =$$

$$= -\varepsilon \int_{-h/2}^{h/2} C_{12} dz,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left\{ \alpha C_{22} - C_{22} \sum_k \left[C_{23} B_k - \lambda_k C_{22} \left(A_k + z^2 \frac{C_k}{h^2} \right) \right] \right\} dz = \quad (5.13)$$

$$= -\varepsilon \int_{-h/2}^{h/2} z^2 C_{12} dz,$$

$$\sum_k [2C_k - \lambda_k B_k] = 0.$$

Поскольку отношения B_k/A_k и C_k/A_k известны из (5.6), соотношения (5.13) представляют собой три уравнения с тремя неизвестными A_1 , A_2 и α .

После того как определены свойства различных слоев, коэффициенты в (5.4) находятся интегрированием. Следующий шаг — решение характеристического уравнения для соотношений (5.6). Далее все напряжения в слоистом композите определяются из решения системы уравнений, соответствующих граничным условиям. По существу, процедуру расчета напряженного состояния можно осуществить одним из двух способов. Применение уже упомянутого прямого способа в соответствии с (5.12) показало, что напряжения σ_{yz} и σ_{zz} претерпевают разрывы на границах раздела слоев. Этот результат закономерно следует из допущений теории, положенной в основу расчета, в которой предполагается наличие непрерывных полей перемещений и удовлетворяются уравнения равновесия, записанные через равнодействующие. Можно, конечно, принять, что на границах слоев действуют средние значения напряжений σ_{yz} и σ_{zz} , однако существует более подходящий способ точного решения поставленной задачи. Улучшенная процедура решения предложена Ло, Кристенсенем и Ву [5.8] в связи с разработкой уточненной теории слоистых пластин.

Лучше всего напряжения σ_{yz} и σ_{zz} , действующие не в плоскости слоев композита, определять непосредственно путем интегрирования уравнений равновесия, включающих напряжение σ_{yy} в плоскости, определенное при помощи выведенного ранее уточненного решения. Константы интегрирования для каждого слоя находятся из условия непрерывности напряжений на границах слоев. Получение искомого результата гарантировано самим

методом. Заметим, что это единственный путь определения в рамках классической теории слоистых сред составляющих напряженного состояния не в плоскости слоев.

Оставим анализ примера применения предложенного метода в качестве упражнения. Следует отметить, что задачи об определении напряженного состояния вблизи кромки слоистого композита могут быть гораздо более сложными, чем задача, рассмотренная здесь для случая ортогональной укладки слоев. Если оси симметрии композита не совпадают с направлением координатных осей (рис. 5.5), то деформированное состояние вблизи кромки определяется также компонентой перемещения в направлении x , а напряженное состояние зависит от компоненты напряжения σ_{zy} . При анализе слоистых композитов с несимметричной укладкой, кроме того, необходимо учитывать изгибные эффекты. Исследование задач об оценке напряженного состояния слоистых композитов вблизи свободных кромок проводилось рядом авторов. Упомянем в связи с этим работы [5.9] и [5.10]. В основном эти работы направлены на уточнение максимальных значений межслойных напряжений непосредственно на кромке пластины.

Каждое новое уточненное решение приводит к получению все больших значений максимумов этих напряжений. Анализ концентрации напряжений у свободных кромок методом конечных элементов обнаруживает, что с уменьшением размеров элемента напряжения возрастают. Основной вопрос заключается, очевидно, в том, чтобы показать, что в области вблизи кромки существует сингулярность напряжения.

В контексте рассматриваемой задачи о кромочном эффекте в слоистых композитах вряд ли имеет смысл пытаться косвенным способом показать наличие сингулярности напряжения. С позиций линейной теории упругости хорошо известно, что в углах прямоугольных областей на границах соединения разнородных материалов, как правило, имеют место сингулярности напряжения. Эти сингулярности позволяют рассматривать поставленную задачу методами, подобными применяемым в механике разрушения. Конечно, не следует забывать, что для слоистых волокнистых композитов не характерно наличие четко выраженных плоскостей раздела между слоями. Поэтому бессмысленно рассматривать любые напряженные состояния в масштабе, меньшем диаметра волокна.

С учетом сделанных замечаний представленное в данном разделе решение следует рассматривать только как доказательство существования кромочного эффекта. Величины напряжений, рассчитанные по приведенным формулам, непригодны для использования в расчетах реальных конструкций. Действительно, для практики неприемлема оценка напряженного состояния спо-

собами, в которых при описании поведения сингулярного или близкого к нему типа используются аппроксимации. Применение таких способов тем не менее полезно для получения качественных оценок, например при поиске такой последовательности укладки слоев композита, при которой в процессе нагружения межслойное нормальное напряжение будет сжимающим в отличие от укладок, для которых это напряжение растягивающее.

К настоящему времени с уверенностью можно утверждать, что в слоистых композитах имеет место эффект концентрации напряжений у свободных кромок, напряжения в этой области оказывают некоторое влияние на статическую прочность слоистых композитов и их влияние на долговременную прочность в условиях усталостного нагружения очень существенно.

ЗАДАЧИ

1. Проверьте инвариантные соотношения из разд. 5.1:

$$Q'_{11} + Q'_{22} + 2Q'_{12} = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12},$$

$$Q'_{66} - Q'_{12} = Q_{66} - Q_{12}.$$

2. Задана нормализованная матрица ортотропных свойств

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определите Q'_{ij} в системе координат, повернутой на 45° в плоскости ортотропии.

3. Слоистый композит с несимметричной укладкой с заданными свойствами A_{xx} , B_{xx} , D_{xx} [уравнение (2.21)] необходимо использовать в условиях действия однородного давления p и сжимающей нагрузки N_x в плоскости, заданной в единицах силы на единицу длины. Пластина имеет бесконечную протяженность в направлении y и длину L в направлении x . Кромки свободно оперты. Используя уравнения классической теории слоистых сред, определите максимальный прогиб пластины.
4. Обсудите условия, в которых более выгодно применение слоистых композитов с одной из двух схем армирования: продольно-поперечной и косоугольной.
5. Выведите уравнение совместности (3.8) из (3.7).
6. Примем, что свободные кромки слоистого композита параллельны оси x . В этом же направлении в композите действует однородная нормальная деформация. Композит должен быть составлен из трех слоев с ортогональной ориентацией волокон и одинаковой объемной долей волокон в каждом направлении. Как следует располагать слой (слои) с волокнами, уложенными в направлении x , — внутри пакета или снаружи? Объясните свое решение.
7. Сформулируйте в общих чертах теорию слоистых композитов, учитывающую деформации сдвига. Ознакомьтесь с литературой по этому предмету.

8. Каков наименьший порядок теории, учитывающей искривление поперечного сечения в задачах изгиба симметричных слоистых композитов? Термин *порядок теории* в данном контексте означает максимальную степень сохраняемых членов разложения в степенной ряд выражения для перемещений в направлении, перпендикулярном срединной плоскости. Теория какого порядка необходима для учета трансверсальных нормальных напряжений в задачах контакта гладкого жесткого индентора со слоистым композитом?
9. Объясните трудности в разработке теории, учитывающей распределение напряжений, а не распределение деформаций в поперечном сечении слоистого композита.

ЛИТЕРАТУРА

- 5.1. Tsai S. W., Pagano N. J. Invariant properties of composite materials. — In: Composite Materials Workshop, Technomic Publ. Co., Westport, Conn., 1968.
- 5.2. Hearmon R. F. S. An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity. — New York: Oxford University Press, 1961.
- 5.3. Pagano N. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. — J. Comp. Mater., 1969, v. 3, p. 398.
- 5.4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity, 3rd. — New York: McGraw-Hill, 1970. [Имеется перевод: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975, 576 с.]
- 5.5. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high order theory of plate deformation — Part 1: Homogeneous plates. — J. Appl. Mech., 1977, v. 44, p. 663.
- 5.6. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. A high order theory of plate deformation — Part 2: Laminated plates. — J. Appl. Mech., 1977, v. 44, p. 669.
- 5.7. Pagano N. J. Stress fields in composite laminates. — Int. J. Solids and Structures, 1978, v. 14, p. 385.
- 5.8. Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M. Stress solution determination for high order plate theory. — Int. J. Solids and Structures, 1978, v. 14, p. 655.
- 5.9. Pagano N. J. On the calculation of interlaminar normal stress in composite laminate. — J. Comp. Mater., 1974, v. 8, p. 65.
- 5.10. Pipes R. B., Pagano N. J. Interlaminar stresses in composite laminates — an approximate elasticity solution. — J. Appl. Mech., 1974, v. 41, p. 668.

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ, ПРОЧНОСТЬ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ

В данной главе изложены такие взаимосвязанные и в то же время самостоятельные темы, как расчет напряжений, оценка прочности и проектирование. Общей целью совместного рассмотрения этих тем является выделение информации, непосредственно применимой для расчета конструкций из композитов.

При проектировании конструкций из гетерогенных макроскопических изотропных материалов нет необходимости вносить какие-либо изменения по сравнению с проектированием из однородных изотропных материалов. Иной подход необходим к задаче проектирования из композитов, обладающих анизотропией свойств. Процесс проектирования из композитов многогранен. Уже недостаточно сделать конструкцию настолько массивной, чтобы она выдержала все мыслимые нагрузки. Современное проектирование должно опираться на комплексную информацию о свойствах конструкционных материалов и о нагрузках или связях, наложенных на конструкцию.

Умение определить в деталях напряженное и деформированное состояние элементов конструкций и сопоставить их с известными допустимыми величинами вознаграждается надежностью и работоспособностью конструкции. Поэтому очевидна необходимость в методах расчета, позволяющих достоверно оценить напряженно-деформированное состояние материала конструкции, и в рациональных критериях прочности или текучести. Результаты, полученные в предыдущей главе, содержат пример расчета для частного, но очень важного типа композитов — слоистых композитов. Однако приведенный пример не доведен до применения какого-либо критерия предельного состояния.

В следующих разделах главы рассматриваются оба аспекта проектирования (расчет напряжений и оценка несущей способности), иллюстрируемые в заключение двумя практическими примерами. Содержание данной главы изложено в основном применительно к волокнистым композитам. Это не исключает, однако, приложения изложенных методов и к другим типам гетерогенных сред.

6.1. КОНЦЕПЦИЯ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Для расчета напряженного состояния гетерогенные материалы идеализируются как эквивалентные гомогенные материалы. Применительно к композитам это означает переход к однородной, но анизотропной среде. Далее часто ограничиваются анализом механического поведения в рамках анизотропной упругости, хотя большую роль могут играть и неупругие эффекты. Теория упругости анизотропных сред является вполне самостоятельным разделом механики, и мы, естественно, не пытались на нескольких страницах дать исчерпывающую сводку ее результатов. Для изучения этого предмета можно обратиться к известным работам С. Г. Лехницкого [6.1] и Хирмона [6.2]. Однако будут рассмотрены некоторые специальные результаты, важные для изложения материала главы.

В частности, представляет интерес охарактеризовать свойства существенно анизотропных упругих слоев. Необходимость этого диктуется практикой создания композитов, представляющих собой высокомодульные выпрямленные параллельные волокна в податливой полимерной матрице. Разумеется, волокнистые композиты редко находят применение именно в таком виде. Как правило, изготавливается слоистый материал, представляющий собой пакет, образованный из существенно анизотропных слоев параллельных волокон, причем направления волокон в соседних слоях составляют различные углы в плоскости укладки. Тем не менее даже в составе слоистого материала поведение единичного слоя является во многом определяющим для свойств всего пакета и поэтому далее будет рассмотрено довольно подробно.

Рассмотрим поведение существенно анизотропной упругой среды, находящейся в условиях плоского напряженного или плоского деформированного состояния. Для изотропной среды такая задача описывается бигармонической функцией напряжений. Следует ожидать, что решение для анизотропии общего вида будет более сложным. Для начала обратимся, однако, к предельному случаю, когда материал обладает бесконечной жесткостью в одном направлении, т. е. образован бесконечно жесткими выпрямленными волокнами, уложенными в рассматриваемой плоскости. Из такого ограничения следует, что единственным возможным видом деформации является сдвиг, скажем ϵ_{12} где x_1 совпадает с направлением укладки бесконечно жестких волокон. Вспоминая, что задача об упругой деформации сдвига определяется гармоническими функциями, мы видим, что она значительно проще по сравнению с задачей для изотропного тела описываемой бигармоническими функциями. Представляется, что

при существенной анизотропии среды в постановке задачи должны быть некоторые упрощения по сравнению с постановкой задачи для среды с анизотропией общего вида или даже изотропной. Для доказательства справедливости этого предположения покажем, что на самом деле решение двумерной задачи о механическом поведении существенно анизотропной среды описывается гармонической функцией. Подобное упрощение постановки оказывается возможным главным образом благодаря введению *концепции пограничного слоя*. Применительно к композитам эта концепция впервые была предложена Эверстайном и Пипкином [6.3]. Мы в данном разделе будем следовать работе Спенсера [6.4].

Двумерная теория

Ограничимся рассмотрением двумерной задачи о плоском напряженном или плоском деформированном состоянии. В обоих случаях соотношения напряжение — деформация можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & M & 0 \\ M & N & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

где необходимо связать константы L , M , N и μ_L с более привычной для нас общей формой соотношений напряжение — деформация. В частности, для ортотропного материала эти соотношения в матричных обозначениях имеют вид

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad (1.2)$$

где C_{ij} даны в (V-1.4). В случае плоской деформации

$$L = C_{11}, \quad M = C_{12}, \quad N = C_{22}, \quad 2\mu_L = C_{66}, \quad (1.3)$$

и в случае плоского напряженного состояния

$$L = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \quad M = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, \quad (1.4)$$

$$N = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, \quad 2\mu_L = C_{66},$$

где (1, 2) — плоскость, в которой происходит деформирование. Члены C_{ij} связаны с техническими константами трансверсально изотропного материала соотношениями (III-1.7).

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

после объединения с (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (M + \mu_L) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu_L \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \mu_L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (M + \mu_L) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + N \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Положим

$$\frac{\mu_L}{L} = \varepsilon^2, \quad \frac{\mu_L}{M} = d^2, \quad \frac{\mu_L}{N} = c^2. \quad (1.7)$$

Тогда уравнения (1.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

До сих пор на свойства материала не были наложены никакие другие ограничения, кроме условия ортотропии. Однако на данном этапе было бы желательно охарактеризовать слой с вы-
прямленными параллельными волокнами, который при деформировании в направлении волокон обладает значительно большей жесткостью, чем при нагружении в других направлениях. В соответствии с этим необходимо, чтобы модули, входящие в предшествующую систему соотношений, отражали это обстоятельство. Пусть величина модуля L в (1.1) такова, что соответствует ориентации жестких волокон в направлении x . Поскольку модуль L очень велик по сравнению с другими модулями, то величину ε в (1.7) можно принять очень малой.

Рассмотрим физический смысл данной ситуации. Если волокна бесконечно жесткие, то единичное волокно, или направление, идеализирующее волокно, должно нести сосредоточенную нагрузку без возмущения близлежащей среды. Это направление можно назвать сингулярным. Теперь в случае, если волокна не бесконечно жесткие, композит в направлении волокон обладает существенно большей жесткостью, чем в других направлениях. Тогда можно ожидать, что область возмущения вблизи нагруженного волокна мала и в пределе исчезает как для сингулярного направления. Отсюда следует, что существуют возможности для передачи усилий вдоль узких зон, которые быстро «размываются» по мере удаления от боковой поверхности. Это обстоятельство можно учесть в таком варианте теории пограничного слоя, для которого координата, перпендикулярная волокну, «вытягивается» в зависимости от скорости изменения характеристик в этом направлении.

Действуя таким образом, растянем координату y , полагая

$$y = \varepsilon \eta. \quad (1.9)$$

После такой замены соотношения напряжение — деформация (1.1) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{xx}}{\mu_L} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon d^2} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu_L} &= \frac{1}{d^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon c^2} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\sigma_{xy}}{\mu_L} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Используя (1.9), уравнениям равновесия можно придать вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{d^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon^2 c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} &= 0.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Таким образом, члены низших порядков по ε дают

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0; \quad (1.12)$$

тогда эти выражения можно переписать в виде

$$\nabla^2 u = 0, \quad v = g(x) + \eta h(x), \quad (1.13)$$

где $g(x)$ и $h(x)$ подлежат определению, а ∇^2 — гармонический оператор в (1.12). Предполагается, что величина членов, содержащих d и c в (1.11), достаточно мала, так что пренебрежение некоторыми слагаемыми при выводе (1.12) вполне обоснованно. Такие условия гарантированы, если $d = O(1)$ и $c = O(1)$ или $O(\varepsilon)$. Остается только удостовериться из решения для пограничного слоя, что отброшенные слагаемые, входящие в (1.11) и (1.12), можно признать малыми.

Для обсуждения соответствия граничных условий физической картине, следующей из точной теории, можно обратиться к работе [6.4]. Далее рассмотрим граничные условия для некоторых примеров, представляющих интерес.

Действие сосредоточенной силы

Обратимся к простому примеру, иллюстрирующему применение метода пограничного слоя. Рассмотрим полуплоскость, нагруженную сосредоточенной силой (рис. 6.1):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -P\delta(y) \quad \text{при } x=0, \\ \sigma_{xy} &= 0 \quad \text{при любых границах.}\end{aligned}\quad (1.14)$$

Направление наибольшей жесткости соответствует координате x . Выберем систему координат так, чтобы в середине пограничного

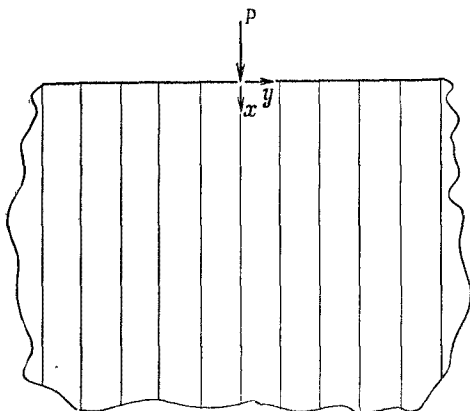


Рис. 6.1. К задаче о нагружении полуплоскости сосредоточенной силой

слоя $y=0$. Если бы характеристика L соответствовала абсолютной жесткости, то направление $y=0$ было бы *сингулярным направлением*, напряжение вдоль которого бесконечно.

Выражения напряжений (1.10) для низших порядков по ε имеют вид.

$$\frac{\sigma_{xx}}{\mu_L} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\sigma_{yy}}{\mu_L} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \frac{\sigma_{xy}}{\mu_L} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \quad (1.15)$$

Граничное условие (1.14), выраженное через вытянутую координату η , имеет вид

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{\varepsilon} P \delta(\eta) \text{ при } x=0.$$

Таким образом, по отношению к низшему порядку по ε граничные условия для σ_{xx} и σ_{xy} имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon \frac{P}{\mu_L} \delta(\eta) \text{ при } x=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Для $\eta \rightarrow \pm\infty$ должны выполняться условия $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$; таким образом,

$$\text{при } \eta \rightarrow \pm\infty \quad \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \rightarrow 0.$$

Кроме того, чтобы напряжения стремились к нулю при $x \rightarrow \infty$, необходимо удовлетворить условию

$$\text{при } x \rightarrow \infty \quad \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \rightarrow 0$$

Для удовлетворения предыдущих требований, наложенных на v (вместе с условием $v = 0$ при $y = 0$), и требования, чтобы v имело вид (1.13), необходимо, чтобы $v = 0$ было решением.

Далее, взяв производную в (1.13), получим уравнение для u

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее вышеупомянутым условиям при $x = 0$, $\eta \rightarrow \pm\infty$ и $x \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\varepsilon P}{\pi \mu_L} \frac{x}{(x^2 + \eta^2)}$$

а интеграл от него выражается в виде

$$u = \frac{-\varepsilon P}{2\pi \mu_L} \ln(x^2 + \eta^2) + A, \quad (1.16)$$

где A — константа.

Напряжения можно теперь найти с помощью (1.15):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= - \frac{P}{\varepsilon \pi} \frac{x}{(x^2 + \eta^2)}, \\ \sigma_{yy} &= 0, \\ \sigma_{xy} &= - \frac{P}{\pi} \frac{\eta}{(x^2 + \eta^2)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отметим, что σ_{xy} не равно нулю при $x = 0$, однако этот результат согласуется с теорией, поскольку σ_{xy} имеет более высокий порядок по $1/\varepsilon$, чем σ_{xx} .

Остается убедиться в том, что результирующая сила в любом сечении, нормальном к x , уравнивается приложенной силой P :

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xx} dy &= - \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xx} d\eta = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2 + \eta^2} dx = \\ &= \frac{P}{\pi} \left[\arctg \frac{\eta}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} = P; \end{aligned}$$

таким образом, установлен искомый результат.

В нашем распоряжении имеется точное решение этой задачи, а также проведенное Спенсером сравнение напряжений σ_{xx} при $y = 0$ для двух решений. Они отличаются друг от друга только значениями коэффициента, различие в которых составляет около 14% для типичного композита на основе углеродных волокон.

Если задачу, иллюстрируемую рис. 6.1, изменить так, чтобы сосредоточенная сила действовала в направлении y , то упрощение, связанное с введением пограничного слоя, неправомерно. Задачи подобного типа решены в [6.4].

Трещина в существенно анизотропной среде

Дадим теперь второй пример использования теории пограничного слоя. Задача относится к деформации существенно анизотропной среды с трещиной, причем жесткие волокна уложены параллельно трещине. Частная задача показана на рис. 6.2. На бесконечном расстоянии от трещины задано напряженное состояние чистого сдвига. Будем решать задачу методом суперпозиции двух решений: (а) для однородного напряженного состояния сдвига в среде без трещины, (б) для приложенного на поверхности трещины локального сдвигового напряжения противоположного знака, которое исчезает на большом расстоянии от трещины. Начнем с решения задачи (б).

Граничные условия имеют вид

$$\text{при } y=0 \quad -a < x < a \quad \begin{cases} \sigma_{xy} = -\tau, \\ \sigma_{yy} = 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

и напряжения и перемещения стремятся к нулю при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Чтобы это условие удовлетворялось на бесконечности в совокупности с требованием о том, что v должно иметь вид (1.13), необходимо, чтобы

$$v = 0. \quad (1.19)$$

Тогда из соотношений (1.10) напряжения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}}{\mu_L} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\sigma_{yy}}{\mu_L} &= \frac{1}{d^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\sigma_{xy}}{\mu_L} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Граничное условие для σ_{xy} (1.18) с учетом (1.20) принимает вид

$$\text{при } y=0, \quad |x| < a \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\varepsilon \frac{\tau}{\mu_L}. \quad (1.21)$$

Из условия антисимметрии также следует

$$\text{при } y=0, \quad |x| > a \quad u = 0. \quad (1.22)$$

В соответствии с (1.12) задача сводится к нахождению гармонической функции $u(x, \eta)$, удовлетворяющей (1.21) и (1.22) и стремящейся к нулю при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Из теории потенциала следует решение

$$u = -\varepsilon \frac{\tau}{\mu_L} [\rho \sin \varphi - (\rho_1 \rho_2)^{1/2} \sin^{1/2} (\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (1.23)$$

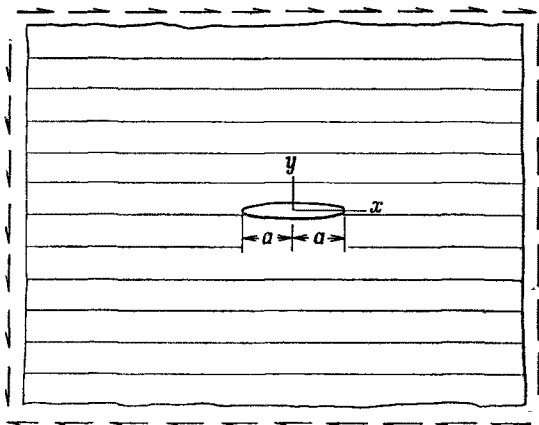


Рис. 6.2. К задаче о трещине.

где для удобства применены комплексные обозначения:

$$\begin{aligned} x + i\eta &= \rho e^{i\varphi}, \\ x - a + i\eta &= \rho_1 e^{i\varphi_1}, \\ x + a + i\eta &= \rho_2 e^{i\varphi_2}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Рассмотрим определение σ_{xx} из (1.20). Будем искать решение в явном виде для $y = 0$, $|x| < a$. В этом случае

$$\text{при } y = 0, |x| < a \quad \begin{cases} \varphi = 0, & \rho = x, \\ \varphi_1 = \pi, & \rho_1 = a - x, \\ \varphi_2 = 0, & \rho_2 = x + a, \end{cases}$$

и (1.23) сводится к следующему выражению:

$$u = -\varepsilon \frac{\tau}{\mu_L} (a^2 - x^2)^{1/2} \quad \text{при } y = 0, |x| < a. \quad (1.25)$$

Взяв производную от (1.25) и подставив в (1.20), окончательно получим

$$\sigma_{xx} = \frac{\tau}{\varepsilon} \frac{x}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \quad \text{при } y = 0, |x| < a. \quad (1.26)$$

Решение приводит к квадратному корню из сингулярности для напряжения на конце трещины. Другие компоненты напряжения также включают сингулярность. Таким образом, даже в решении для высокоанизотропных материалов проявляется классический квадратный корень из сингулярности. Метод решения, использованный здесь, и само решение далеко не столь сложны, как те, которые могли встретиться при прямом подходе в полной

формулировке задачи для упругой анизотропной среды. Другие задачи для трещин приведены в работе [6.4].

Метод пограничного слоя использовался в [6.5] для анализа напряженного состояния консольной балки из существенно анизотропного материала, нагруженной силой на конце. Эта задача немного сложнее той, которую мы рассмотрели, поскольку необходимо иметь дело с решениями как для пограничных слоев, так и для области между ними (где волокна считаются абсолютно нерастяжимыми). В рассмотренных примерах само решение методом пограничного слоя содержит всю искомую информацию.

Примеры из данного раздела иллюстрируют методы, которые можно использовать для описания напряженно-деформированного состояния анизотропного упругого тела. Если только не приняты специальные допущения, общая проблема состоит в решении задачи, поставленной полностью в рамках теории упругости анизотропного тела. Однако иногда прибегают к еще более общим допущениям. Например, для многих композитов на основе органических волокон установлена заметная разница в модулях при растяжении и сжатии даже в области малых деформаций. В связи с этим были разработаны специальные теории, приспособленные к описанию такого поведения (см., например, работу Берта [6.6]).

В следующем разделе обратимся к задаче выбора критерия предельного состояния материала, предполагая, что его напряженно-деформированное состояние уже известно в виде точных и приближенных аналитических или численных решений.

6.2. КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

Использование любого материала конструкционного назначения требует гарантии того, что он будет служить безопасно и эффективно. Таким образом, процесс проектирования должен включать в себя сопоставление напряженно-деформированного состояния для данного конкретного проекта с критерием прочности материала. *Критерии прочности* или предельного состояния часто записываются в напряжениях, но не обязательно соответствуют состоянию полного разрушения материала. Критерии предельного состояния могут характеризовать начальные проявления процесса разрушения, например текучесть, предшествующую полному разрушению. Таким образом, в связи со столь широкой интерпретацией критериев предельного состояния практически невозможно охарактеризовать их с высокой степенью определенности. Действительно, критерий предельного состояния для данного материала представляет собой, по существу, эмпирическую формулировку процесса выхода из строя или потери материалом

несущей способности. Несмотря на эти осложнения и оговорки, все-таки можно установить критерии предельного состояния, обладающие достаточной общностью и применимые на практике.

Критерии предельного состояния не выводятся, они устанавливаются или постулируются и затем проверяются по отношению к опыту эксплуатации. В области поведения изотропных материалов накоплен большой опыт применения критериев предельных состояний. Два наиболее общих критерия — это критерии Мизеса и Треска. Представляется логичным проверить, а затем и применить на практике эти критерии и для макроскопически изотропных композитов. К сожалению, когда используются анизотропные материалы, приходится сталкиваться с проблемами наиболее общего характера. Важно, таким образом, найти критерии, пригодные для описания поведения анизотропной среды. В частности, наибольший интерес для практики представляют критерии прочности для волокнистых композитов, которые и будут обсуждаться в данном разделе.

Обобщенный критерий Мизеса

Изложим вначале, вероятно, самое простое обобщение изотропного критерия предельного состояния для условий анизотропии. В частности, в работе Хилла [6.7] предложено обобщение критерия Мизеса на случай анизотропии

$$F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2L\sigma_4^2 + \\ + 2M\sigma_5^2 + 2N\sigma_6^2 = 1, \quad (2.1)$$

где использованы матричные обозначения (I-1.8). Константы F, \dots, N должны вычисляться из экспериментальных данных, относящихся к предельному состоянию материала при различных сочетаниях действующих напряжений. Для изотропии $F = G = H = L = M = N$, и выражение (2.1), записанное только через главные напряжения, приобретает известную форму критерия Мизеса. В этом обобщении критерия Мизеса предполагаются независимость наступления предельного состояния от гидростатических напряжений, а также отсутствие различия между состояниями растяжения и сжатия. Известно, что оба этих эффекта важны при оценке поведения композитов. Поэтому очевидна необходимость разработки более общего критерия предельного состояния.

Тензорный полиномиальный критерий

Достаточно общий критерий был рассмотрен Цаем и Ву [6.8]. Этот критерий можно выразить в следующем виде:

$$(F_i \sigma_i)^a + (F_{ij} \sigma_i \sigma_j)^b + (F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k)^c + \dots = 1, \quad (2.2)$$

где вновь использованы матричные обозначения тензоров с коэффициентами $F_i, F_{ij}, F_{ijk}, \dots$ и показателями степеней $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, которые должны определяться из условия наилучшего описания экспериментальных данных. Формула (2.2) представляет собой, конечно, обобщение на тензорные условия обычной скалярной полиномиальной формулы. Здесь F_i представляет собой тензор второго ранга: $F_i \sigma_i = \bar{F}_{kl} \sigma_{kl}$. Таким образом, F_i имеет шесть независимых компонент, а F_{ij} содержит 21 независимую компоненту. Все тензоры высших порядков имеют наиболее общий вид. С помощью показателей степеней в (2.2) не достигается никакое усиление общности; впредь будем полагать $\alpha = \beta = \dots = 1$. Дальнейшее упрощение тензоров $F_i, F_{ij} \dots$ в (2.2) следует из условий симметрии материала, которые мы и рассмотрим.

Ортотропия. Рассмотрим случай ортотропии и выберем систему координат так, чтобы ее плоскости были параллельны плоскостям симметрии материала. Член $F_i \sigma_i$ можно записать в развернутом виде:

$$F_i \sigma_i = F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6. \quad (2.3)$$

Слагаемые, включающие сдвиговые напряжения $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$, дают физически недопустимый эффект, обусловленный знаком касательного напряжения, если соответствующие коэффициенты не равны нулю; таким образом,

$$F_4 = F_5 = F_6 = 0. \quad (2.4)$$

Отметим, что это упрощение недопустимо, если плоскости координат повернуты относительно плоскостей симметрии материала. Далее, во втором слагаемом в (2.2) для смешанных членов, содержащих касательные и нормальные напряжения, вследствие независимости от знака касательных напряжений вновь следует,

$$\begin{aligned} F_{14} = F_{15} = F_{16} &= 0, \\ F_{24} = F_{25} = F_{26} &= 0, \\ F_{34} = F_{35} = F_{36} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Более того, предполагается, что сдвиговые напряжения не оказывают совместного влияния на предельное состояние, т. е. должно выполняться условие независимости от знака касательных напряжений:

$$F_{45} = F_{46} = F_{56} = 0. \quad (2.6)$$

Подставив (2.5) и (2.6) в (2.2), получим

$$\begin{aligned} (F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3) + (F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \\ + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} \sigma_5^2 + F_{66} \sigma_6^2) + \dots = 1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где, как уже отмечалось, все показатели степени положены равными 1. Поучительно рассмотреть упрощение тензорной полиномиальной формулы (2.7) до формулы (2.1), постулированной Хиллом в качестве обобщения критерия Мизеса. Для проведения этого упрощения сначала пренебрежем *эффектом Баушингера*, полагая в (2.7)

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0. \quad (2.8)$$

Далее введем ограничение для слагаемых (2.7), связанное с независимостью от действия гидростатического давления, полагая

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_p} (F_{ij} \sigma_i \sigma_j) = 0, \quad (2.9)$$

где

$$\sigma_p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Можно показать, что (2.9) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} F_{11} &= -(F_{21} + F_{31}), \\ F_{22} &= -(F_{12} + F_{32}), \\ F_{33} &= -(F_{13} + F_{23}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подстановка (2.8) и (2.10) в (2.7) приводит к тому, что в (2.7) остаются только слагаемые, входящие в формулу (2.1), т. е. *критерий Хилла*. Следовательно, критерий (2.1) основан на ряде упрощений. В частности, не учитывается эффект Баушингера, предполагается независимость от гидростатического давления и ортотропный материал характеризуется в координатных осях, параллельных плоскостям симметрии материала.

Из (2.7) следует, что в случае ортотропии F_i имеет три, а F_{ij} — девять независимых компонент.

Трансверсальная изотропия. Трансверсально изотропный материал — это частный случай ортотропного. Примем, что плоскость x_2x_3 является плоскостью изотропии. Тогда в силу симметрии $F_2 = F_3$ и $F_{12} = F_{13}$, $F_{22} = F_{33}$, $F_{55} = F_{66}$. Условие для сдвига дает $F_{44} = 2(F_{22} - F_{23})$. Эти дальнейшие упрощения, учитывающие ортотропию, приводят (2.7) к виду

$$\begin{aligned} [F_1 \sigma_1 + F_2 (\sigma_2 + \sigma_3)] + [F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} (\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2F_{12} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3) + \\ + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} (\sigma_5^2 + \sigma_6^2)] + \dots = 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ортотропия. Плоское напряженное состояние. Для плоского напряженного состояния по определению имеем

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0, \quad (2.12)$$

что позволяет свести (2.7) к виду

$$[F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2] + [F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{66} \sigma_6^2] + \dots = 1. \quad (2.13)$$

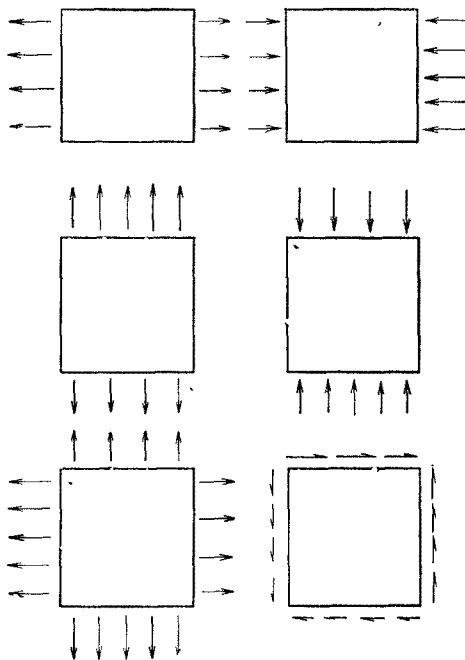


Рис. 6.3. Эксперименты для определения коэффициентов тензорного полиномиального критерия прочности для ортотропного материала в условиях плоского напряженного состояния.

В этом случае F_i имеет две, а F_{ij} — четыре компоненты. Трансверсальная изотропия не вносит дальнейших упрощений в этот случай, поскольку ось симметрии не перпендикулярна плоскости (1, 2). Таким образом, в (2.13) остаются шесть констант, подлежащих определению. На рис. 6.3 схематически представлена программа экспериментов для их определения.

Плоское напряженное состояние. Симметрия отсутствует. Рассмотрим случай, когда материал или не ортотропен, или если ортотропен, то координатные плоскости не параллельны плоскостям симметрии. Единственное упрощение соотношения (2.2) достигается здесь использованием выражения (2.12), что дает

$$[F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_6] + [F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + \\ + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{16}\sigma_1\sigma_6 + 2F_{26}\sigma_2\sigma_6] + \dots = 1. \quad (2.14)$$

На рис. 6.4 схематически показаны девять экспериментов, необходимых для определения констант, входящих в (2.14). В то

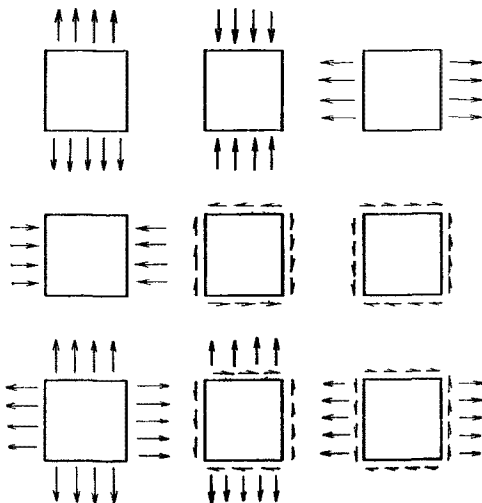


Рис. 6.4. Эксперименты для определения коэффициентов тензорного полиномиального критерия прочности для материала с анизотропией общего вида в условиях плоского напряженного состояния.

время как соотношение (2.13) учитывает симметрию свойств отдельного слоя, составленного из выпрямленных параллельных волокон, соотношение (2.14) не содержит каких-либо предположений относительно симметрии. Оно применимо к описанию композита с любым видом анизотропии, пока выполняются условия плоского напряженного состояния. В этом смысле результат (2.14) применим к слоистому композиту так же, как и к отдельному слою. Однако при рассмотрении слоистых композитов возникают некоторые осложнения. Не совсем ясно, например, как полиномиальный подход типа (2.14) моделирует сложные условия на границах слоев, которые могут вносить свой вклад в окончательную потерю несущей способности материала.

Коэффициенты, входящие в полиномиальный критерий, вычисляются из данных опыта. Результаты таких расчетов для критерия, содержащего члены вплоть до квадратичных и подробно описанного здесь, обсуждались в работе Ву [6.9]. В работе [6.10] продемонстрированы преимущества тензорного полиномиального выражения, в котором сохранены также члены третьей степени. Предполагается, что коэффициенты в тензорном полиномиальном представлении могут иметь различные значения в различных квадрантах или областях напряжений. При таком способе описания допустимо существование углов или вершин на поверхности предельного состояния.

Другие критерии; некоторые соображения

В практике проектирования используются и другие простые критерии предельного состояния, которые не обладают общностью тензорного полиномиального, но имеют некоторые другие преимущества. Это — *критерии максимальных напряжений и максимальных деформаций*. Оба они обычно используются для плоского напряженного состояния. Критерий максимальных напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} F_x^c &\leq \sigma_{xx} \leq F_x^T, \\ F_y^c &\leq \sigma_{yy} \leq F_y^T, \\ F'_{xy} &\leq \sigma_{xy} \leq F''_{xy}. \end{aligned}$$

Аналогично критерий максимальных деформаций имеет вид

$$\begin{aligned} E_x^c &\leq \epsilon_{xx} \leq E_x^T, \\ E_y^c &\leq \epsilon_{yy} \leq E_y^T, \\ E'_{xy} &\leq \epsilon_{xy} \leq E''_{xy}. \end{aligned}$$

Критерий максимальных деформаций можно выразить и в напряжениях, используя соответствующую форму соотношений напряжение — деформация. Благодаря своей простоте эти критерии широко используются, однако имеют практическое значение только для одномерных состояний, и необходимо проявлять осторожность при их использовании для многомерных напряженного или деформированного состояний.

До сих пор мы характеризовали прочность как макроскопическое свойство композитных материалов безотносительно к свойствам индивидуальных компонентов. В гл. II, III и IV было установлено много полезных способов предсказания макроскопических жесткостей композитов через модули отдельных компонентов. Можно было бы ожидать, что аналогичный подход осуществим и при оценке прочности композитов. Результатом было бы прогнозирование прочностных свойств композита через прочности компонентов. К сожалению, такой подход к оценке прочности композитов в настоящее время не столь сильно развит по сравнению с методами оценки жесткости. Тем не менее проблема прочности изучалась в специальных случаях и иногда утверждалось, что для однонаправленного волокнистого композита прочность при одноосном нагружении в направлении волокон достаточно хорошо описывается правилом смесей. Хотя подобный результат и можно применить к частным системам, совсем не очевидно, что он применим для более общего класса гетерогенных материалов.

К только что затронутой проблеме относится и анализ воздействия статистической изменчивости свойств компонентов композита на его макроскопическую прочность. В связи с оценкой прочности при одноосном нагружении однонаправленных композитов эта задача привлекла широкое внимание в следующей постановке. Если волокна идеально однородны без изменчивости геометрических характеристик или свойств образующего их материала, то прочность композита при одноосном нагружении должна непосредственно определяться через идеальную прочность материала волокон. Установлено, что в реальной ситуации прочность композита намного ниже, чем идеальная прочность материала волокна, измеренная в испытаниях образцов волокон очень малой длины. Причиной несоответствия является изменчивость свойств волокна по его длине, обусловленная технологическими операциями при его производстве или последующей переработке, вызывающими возникновение дефектов и разрывов отдельных волокон.

Эту проблему наилучшим образом можно исследовать в статистической постановке. К настоящему времени выполнено много таких работ. Наиболее ранняя в этом направлении работа была сделана Даниелсом [6.11], затем Колеманом [6.12], позже Цвебенем и Розеном [6.13]. Вероятно, наиболее общая формулировка задачи такого типа дана Харлоу и Фёниксом [6.14]. Подробное рассмотрение статистических теорий разрушения, представляющих вполне самостоятельную проблему, выходит за рамки данной книги. Здесь было просто отмечено быстрое развитие этой области и ее польза для совершенствования процесса проектирования.

Проблема, связанная с выбором критериев предельного состояния, весьма многогранна. Здесь затронуты лишь некоторые ее аспекты. Рассмотрим слоистый композит, составленный из отдельных слоев, уложенных под различными углами. При растяжении перпендикулярно плоскости укладки слоев прослойки связующего обычно начинают растрескиваться при значительно меньшем уровне деформации по сравнению с предельной деформацией слоя с выпрямленными параллельными волокнами при нагружении его вдоль волокон. Это обстоятельство указывает на то, что во многих реальных слоистых конструкциях связующее начинает разрушаться раньше, чем волокна. Обычно разрушение начинается с растрескивания связующего в отдельном слое, и такое явление принято называть *первым разрушением слоя*. Это еще не означает, что слоистый композит разрушился в целом или даже, что разрушилось значительное число волокон. Композит еще выдерживает нагрузку, и окончательное разрушение может произойти при более высоком уровне нагрузки по сравнению с

тем, при котором произошло первое разрушение слоя. Выбор между критерием, основанным на полном разрушении, или критерием, основанным на первом разрушении слоя или какой-то иной форме зарождающейся потери несущей способности композита, определяется принципами конструирования в каждой конкретной области применения.

При проектировании может оказаться, что работоспособность конструкции определяется не критерием статической прочности, а каким-либо другим более важным критерием. Например, одним из важнейших факторов при проектировании во многих практических случаях является усталость. При оценке усталостных свойств композитов необходимы данные, полученные на реальных образцах, изготовленных так, чтобы моделировать практические ситуации. Чувствительность к действию циклических нагрузок (усталость) сильно различается у различных композитов. Например, композиты с углеродными волокнами далеко не столь чувствительны к циклическим нагрузкам, как стекловолоконистые композиты.

Рост трещин в композитах может являться важной переменной проектирования. Чувствительность к распространению трещин в композитах вообще и в слоистых композитах в частности — это очень важная тема, намного более сложная, чем для однородных изотропных материалов. Трещина может прорасти в отдельном слое композита (при растрескивании связующего, упомянутом ранее), или пронизывать всю толщину материала, или иметь вид плоской области нарушения связи между слоями, которая ведет к расслоению композита. В общем задача описания процесса роста трещин в композитах связана с наиболее трудными проблемами анизотропии и гетерогенности.

Отдельные вопросы проектирования, связанные с выбором критерия предельного состояния, включают учет различных воздействий окружающей среды. Так как матрица, а иногда и арматура многих композитов изготавливаются из органических материалов, то их чувствительность к воздействию температур часто приобретает первостепенное значение в формировании эксплуатационных свойств композитов. Повышение температуры окружающей среды вызывает не только возникновение термических напряжений в композите, но приводит к изменению основных свойств его компонентов, изготовленных из органических материалов, и соответственно несущей способности композитов. В условиях пониженных температур многие материалы охрупчиваются, что делает чувствительность к трещинам важнейшим фактором проектирования.

Воздействие влаги на композиты сходно с воздействием повышенных температур. Диффузия влаги может привести к набу-

ханию органических материалов, что вызывает начальные напряжения в композитах; вследствие роста содержания влаги основные свойства компонентов также изменяются. Часто наличие влаги особенно ухудшает цельность химической связи на границах раздела фаз.

Среди других, относящихся к этой теме эффектов упомянем также усадочные напряжения, возникающие при термообработке изделия в процессе производства. Тщательное проектирование материала и изделия позволяет в принципе свести к минимуму перечисленные нежелательные эффекты.

Наконец, следует упомянуть проблему оценки несущей способности композитов в условиях динамических воздействий. Например, главное условие проектирования лопаток газовой турбины из композитов заключается в необходимости обеспечить их несущую способность при нагрузках, возникающих при высоких оборотах. Разрушение при высоких скоростях может сильно отличаться от разрушения в режиме квазистатического нагружения. Зависимость свойств органических материалов от времени и скорости играет большую роль в формировании сопротивления композитов. Могут быть важны и другие эффекты. Способность материала поглощать энергию в процессе разрушения называется *трещиностойкостью*. *Динамическая трещиностойкость* некоторых типов волокнистых композитов характеризует энергию, рассеиваемую в процессе выдергивания волокна из матрицы, т. е. разрушения связи на границе раздела фаз и последующего фрикционного взаимодействия.

Все рассмотренные выше эффекты можно связать со способностью композита противостоять эксплуатационным нагрузкам, и все они могут быть положены в основу критериев проектирования. Мы попытались дать аналитическую характеристику только критерия квазистатической прочности. Многие из других критериев также можно представить в полезном для практики аналитическом виде, допускающем применение в проектировании. Типичные задачи проектирования, как правило, включают в себя не один критерий проектирования, а целый спектр требований. Таким образом, окончательный проект часто представляет собой компромиссный вариант, удовлетворяющий различным критериям. Мы не дадим общий пример проектирования конструкций, который обычно не обходится без итерационного процесса для разработки окончательного варианта проекта. Однако два приводимых примера хорошо иллюстрируют необходимость взаимосвязи между расчетом напряжений и выбором критерия предельного состояния. Эти два примера показывают перспективы и возможности, открывающиеся в области проектирования с применением композитов.

6.3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ, АРМИРОВАННЫХ ВОЛОКНАМИ

В данном разделе коснемся некоторых аспектов проектирования сосудов давления из волокнистых композитов. Ограничимся рассмотрением сосудов давления, имеющих очень малую толщину стенки по сравнению с радиусами кривизны. При этом ограничении локальным эффектом радиуса кривизны можно пренебречь, и рассмотрение может быть основано на анализе поведения плоского слоистого материала. До перехода к расчету частных типов сосудов давления необходимо отметить, что система действующих нагрузок подразумевается детально известной. Проблема тогда состоит в том, чтобы решить, как спроектировать сосуд из композита для сопротивления действию заданной внутренней нагрузки.

Пусть заданы результирующие силы в плоскости на единицу длины, как показано на рис. 6.5, *a*. Ограничимся вначале отдельным слоем. Задача проектирования в простейшем случае состоит в том, чтобы найти такую ориентацию волокон, которая обеспечит сопротивление нагрузкам, изображенным на рис. 6.5, *a*. Первый шаг состоит в нахождении главных равнодействующих, соответствующих изображенным на рис. 6.5, *a*. Главные равнодействующие на рис. 6.5, *б* обозначены через N_1 и N_2 . Хотя интуитивно кажется, что волокна необходимо ориентировать в направлении наибольшего главного напряжения, это не обязательно так. Брендмайер [6.15] показал, что при использовании критерия разрушения (2.1), введенного Хиллом, оптимальное направление укладки волокон может составлять некоторый угол с направлением главной равнодействующей. Определяющим при этом является отношение сдвиговой прочности к прочности при поперечном растяжении. В любом случае не особенно полезно развивать этот пример далее, поскольку двухосное напряженное состояние, очевидно, связано с использованием многонаправленной ориентации волокнистых слоев, как это и будет показано далее.

Для случая нагружения с равнодействующими, показанными на рис. 6.5, *б*, возможно бесконечное разнообразие укладок слоев с различной ориентацией. Как указано выше, никоим образом не очевидно, что оптимальная ориентация арматуры связана только с главными направлениями. Термин *оптимальный проект* означает, что конструкция, выдерживающая заданные нагрузки, изготовлена из минимального количества материала. Естественно, что решение этой оптимальной задачи зависит от использованного критерия предельного состояния. Однако в практике принято ориентировать слои в главных направлениях. Относительное число индивидуальных слоев в двух направлениях опреде-

ляется отношением главных нагрузок N_1/N_2 . Общее число слоев должно быть таким, чтобы критерий предельного состояния удовлетворялся в напряжениях индивидуального слоя или в средних напряжениях по всей толщине слоистого материала. Рассмотрим далее пример проектирования, в котором наглядно показано, что оптимальная ориентация волокон может в принципе не совпадать с направлениями главных напряжений.

Цилиндрический сосуд

Рассмотрим цилиндрический сосуд давления с закрытыми торцами, как показано на рис. 6.6, а. В предположении тонкостенности осевые и окружные напряжения в цилиндрической части сосуда вдали от концов определяются следующим образом:

$$\sigma_{zz} = \frac{pa}{2h}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pa}{h}, \quad (3.1)$$

где h — толщина. Рассмотрим намотку по винтовой линии, схема которой показана на рис. 6.6, б. Допустим, что напряжения в направлении волокон в каждом слое велики по сравнению с другими компонентами напряжений, так что последними можно пренебречь. Если обозначить напряжение в направлении волокон через σ , как показано на рис. 6.6, в, то горизонтальная компонента уравнивающего напряжения равна $\sigma \cos^2 \varphi$. В результате приравнивания этой составляющей осевому напряжению получим

$$\sigma \cos^2 \varphi = pa/2h. \quad (3.2)$$

Аналогично в окружном направлении

$$\sigma \sin^2 \varphi = pa/h. \quad (3.3)$$

Объединение (3.2) с (3.3) дает

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = 2, \quad (3.4)$$

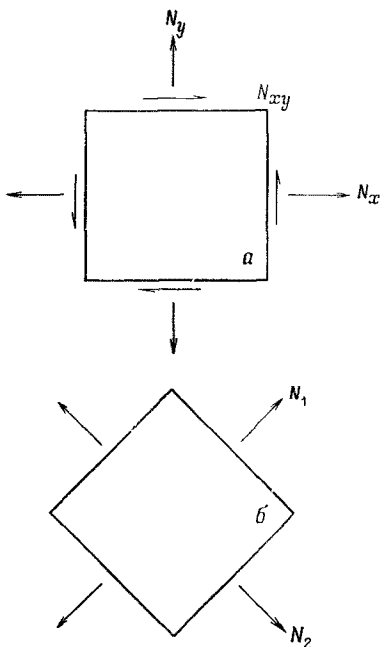


Рис. 6.5. Напряженное состояние стенки сосуда давления.

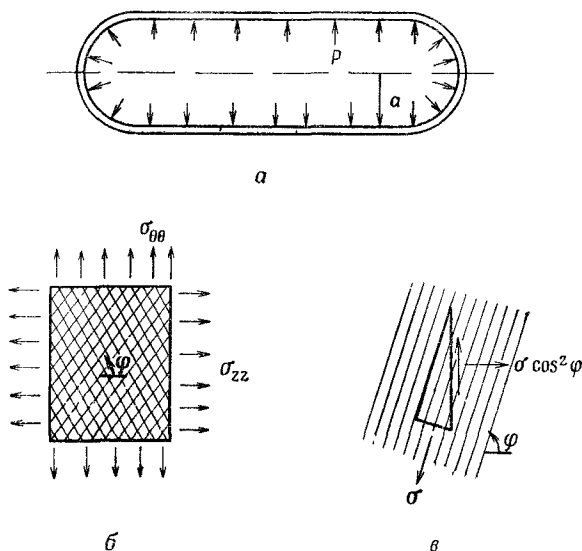


Рис. 6.6. Проект схемы укладки арматуры для сосуда давления.

и с точки зрения этого простого анализа угол оптимальной намотки $\varphi \approx 55^\circ$, очевидно, не совпадает с направлением главных напряжений. Сдвиговое усилие, показанное на рис. 6.6, в, уравнивается противоположно направленным сдвиговым усилием смежного слоя, так что общее сдвиговое усилие по всей толщине равно нулю. Чтобы удовлетворить критерию предельного состояния при заданной величине давления p , необходимо только использовать достаточное число слоев, намотанных по винтовой линии с заданным углом.

Осложнение в приведенном простом анализе состоит в том, что предположение об оптимальной схеме намотки для цилиндрической части сосуда давления не приводит к оптимальной схеме намотки для днищ. На практике такие сосуды, как изображенный на рис. 6.6, вначале наматываются с очень малым углом φ , который позволяет сформовать одновременно как цилиндрическую часть, так и днища. Затем витками волокон, уложенных по окружности, покрывается цилиндрическая часть сосуда для обеспечения дополнительной жесткости, необходимой для сопротивления окружным напряжениям (3.1). Таким образом, вновь практически осуществимый проект получается при ориентации волокон в слоистом композите в направлениях главных напряжений или насколько можно близко к ним ¹⁾.

¹⁾ Я признателен М. А. Хэмстаду и Е. М. Ву за полезное обсуждение данного вопроса.

Сферический сосуд

До сих пор мы не касались подробно критерия предельного состояния. Завершим раздел примером, который включает частный случай этого критерия. Для простоты рассмотрим сферический сосуд давления. По соображениям симметрии напряженное состояние изотропно и выражается формулой

$$\sigma = pa/2h, \quad (3.5)$$

где h — толщина стенки, a — радиус сосуда, p — давление; при выводе (3.5) вновь подразумевается условие тонкостенности. Ясно, что процедура оптимального расположения волокон приведет к квазиизотропному типу конструкции. Для проведения анализа полезно знать напряжения в отдельном однонаправленном слое, в частности, потому, что деформации в срединной плоскости оболочки совпадают с соответствующими деформациями в каждом таком слое. Применительно к плоскому напряженному состоянию соотношения между напряжениями и деформациями в изотропном теле имеют вид

$$\sigma = [E/(1 - \nu)] \varepsilon. \quad (3.6)$$

В случае когда волокна очень жесткие по сравнению с матрицей, эффективные свойства E и ν , как следует из разд. 4.4, определяются следующим образом:

$$E \approx cE_F/3, \quad \nu \approx 1/3, \quad (3.7)$$

где c — объемная доля волокон. Из (3.5)—(3.7) получим

$$\varepsilon = pa/(cE_F h). \quad (3.8)$$

Теперь при известных деформациях отдельного однонаправленного слоя уже можно применять критерий предельного состояния.

Если критерий относится к полному разрушению всех волокон в расчетном сечении конструкции, то для определения минимальной необходимой толщины сосуда h можно в (3.8) подставить предельные деформации волокон при разрушении ε_F . Наоборот, если необходимо предупредить растрескивание связующего, то должна быть выбрана иная предельно допустимая деформация ε_M , связанная с началом растрескивания связующего, по которой и нужно определять толщину стенки h . Обычно предельная деформация при растяжении однонаправленного композита в направлении, перпендикулярном волокнам, намного меньше, чем предельная деформация при растяжении вдоль волокон. Таким образом, если необходимо предотвратить растрескивание связующего, минимальную толщину сосуда h следует определить из (3.8) через величину предельно допустимой деформации ε_M . Интересно, что предельно допустимая деформация, определяемая

растрескиванием связующего, для сосудов давления часто становится критической характеристикой работоспособности изделия. Дело в том, что трещины в связующем образуют сеть микроскопических каналов, по которым происходит диффузия газов и паров из сосуда, приводящая к самым нежелательным последствиям.

Комбинированное армирование

Последнее, что следует упомянуть в этом разделе, — возможность совместного использования различных типов волокон в композите для совершенствования свойств конструкции. Такие композиты называются комбинированными (*гибридными*), и научные основы их применения никоим образом нельзя назвать четко разработанными. Очевидно, один вид волокон имеет меньшие предельные деформации разрушения, чем другой. По отношению к задаче о сферическом сосуде давления это просто означает, что волокна с меньшей предельной деформацией разрушаются первыми, после чего последует разрушение волокон с большей предельной деформацией. С точки зрения приведенного простого критерия очевидно, что разумное обоснование использования гибридных систем отсутствует, и конструкция должна быть изготовлена из композита на основе волокон того типа, которые в заданных условиях имеют лучшие характеристики. Однако преимущества применения гибридных композитов проявляются, когда проектирование ведется более чем по одной целевой функции. В частности, когда стоимость материала является одним из критериев проекта, введение малых количеств дорогостоящих волокон можно оправдать преимуществами, связанными с обеспечением лучших механических характеристик.

6.4. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МАХОВИКОВ ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

В качестве устройств для аккумуляции кинетической энергии могут использоваться маховики. Для многих практических приложений основная цель состоит в создании маховиков с максимальной массовой энергоемкостью, т. е. аккумулирующих максимальное количество кинетической энергии на единицу массы маховика. На первый взгляд для изготовления такой конструкции может показаться предпочтительным более плотный материал, поскольку кинетическая энергия пропорциональна массовой плотности. Однако такое предположение не вполне обоснованно. Максимальная скорость вращения маховика определяется некоторым критерием предельного состояния, обычно выраженным в напряжениях, возникающих под действием центро-

бежной объемной силы, которая в свою очередь пропорциональна плотности. Если критерий предельного состояния имеет первый порядок по напряжениям¹⁾, то энергия, запасаемая при максимальной скорости вращения, не будет зависеть от плотности материала. Тогда следует, что энергия, запасаемая на единицу массы, будет обратно пропорциональна плотности.

Таким образом, мы пришли к довольно удивительному заключению о том, что, используя критерий проектирования, состоящий в максимизации массовой энергоемкости, можно отдать предпочтение использованию по возможности наиболее легкого материала среди материалов, выдерживающих достаточно высокие напряжения. Изложим этот вывод иначе: для двух материалов, которые выдерживают одинаковые напряжения, материал, имеющий наименьшую плотность, обеспечивает максимальную массовую энергоемкость. Имеется много высокопрочных волокнистых композитов, очень легких по сравнению с металлами. Среди них можно выделить композиты с углеродными, органическими (арамидными) и высококачественными стеклянными волокнами. Очевидно, волокнистые композиты представляют заманчивые перспективы для проектирования маховиков. Мы будем далее следовать методике проектирования маховиков, приведенной в работе Кристенсена и Ву [6.16].

Часто приводятся доводы, что для изотропных материалов оптимальным должен быть проект маховика, в котором форма поперечного сечения такова, что в любой точке по радиусу в плоскости маховика возникают одинаковые напряжения. Таким образом, материал будет разрушаться в принципе одновременно во всех точках среды, и это считается свидетельством того, что к моменту разрушения обеспечивается наибольший запас энергии. Попробуем действовать таким же образом при анализе проектов маховиков из волокнистых композитов. Будем отыскивать проект, который обеспечивает одновременное разрушение материала во всех точках среды. В рамках этой задачи определим степень анизотропии композита и форму маховика, которые обеспечат наибольшую его удельную массовую энергоемкость.

Расчет

Ограничимся рассмотрением цилиндрически ортотропного материала, так как данная задача обладает осевой симметрией. Более того, рассмотрим маховики такой толщины, при которой можно принять, что напряженное состояние является плоским. Таким образом, залишем соотношения напряжение — деформация

¹⁾ Полиномиальный критерий первого порядка либо критерий максимальных напряжений. — *Прим. перев.*

в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= Q_r \varepsilon_{rr} + Q_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= Q_{\theta r} \varepsilon_{rr} + Q_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta},\end{aligned}\quad (4.1)$$

где r и θ — полярные координаты, причем вследствие существования упругого потенциала $Q_{\theta r} = Q_{r\theta}$ коэффициенты Пуассона определяются в виде

$$\nu_{r\theta} = \frac{Q_{r\theta}}{Q_r}, \quad \nu_{\theta r} = \frac{Q_{\theta r}}{Q_{\theta}}. \quad (4.2)$$

Теперь необходимо задаться критерием разрушения. Как обсуждалось в разд. 6.2, набор подходящих критериев весьма разнообразен. Здесь мы используем, вероятно, наиболее простой из возможных реалистичных критериев. В частности, будем считать, что везде в маховике

$$\varepsilon_{rr}(r) = \varepsilon_{\theta\theta}(r) = \varepsilon(\text{const}). \quad (4.3)$$

Физическая интерпретация этого критерия очень проста. Проект создается из условия разрушения волокон, а не матрицы композита. Другими словами, полагая, что величина ε из (4.3) равна уровню деформации волокон, при котором они разрушаются при одноосном растяжении, мы обеспечиваем положение, при котором в маховике одновременно достигается предельное состояние в волокнах, уложенных в радиальном и окружном направлениях. Как отмечалось в предыдущем разделе, растрескивание связующего может начаться при более низких уровнях напряжений (при меньших угловых скоростях). Таким образом, в соответствии с рассмотренными условиями выход маховика из строя определяется его полным разрушением (макроскопическим нарушением целостности), а не появляющимися при более низких скоростях признаками начала процесса разрушения.

В условиях плоского напряженного состояния уравнение совместности деформаций имеет вид

$$r \frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{dr} + \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr} = 0. \quad (4.4)$$

Очевидно, это определяющее уравнение удовлетворяется условием (4.3). Остается удовлетворить уравнению равновесия для режима установившегося состояния вращения:

$$\frac{d}{dr} (hr\sigma_{rr}) - h\sigma_{\theta\theta} + \rho\omega^2 hr^2 = 0, \quad (4.5)$$

где толщина диска — неизвестная функция радиуса: $h = h(r)$; ρ — плотность и ω — угловая скорость.

Из (4.1)—(4.3) и (4.5) получим

$$\left(r \frac{dh}{dr} + h\right) Q_r (1 + \nu_{r\theta}) \varepsilon - h Q_{\theta} (1 + \nu_{\theta r}) \varepsilon + \rho\omega^2 hr^2 = 0. \quad (4.6)$$

Этому уравнению можно придать иную форму:

$$\frac{dh}{h} = - (1 - \alpha) \frac{dr}{r} - \frac{\rho \omega^2 r dr}{Q_r (1 + \nu_{r\theta}) \varepsilon}, \quad (4.7)$$

где

$$\alpha = \frac{(1 + \nu_{\theta r}) Q_{\theta}}{(1 + \nu_{r\theta}) Q_r}. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.7) можно проинтегрировать, в результате получим

$$h = kr^{-(1-\alpha)} e^{-\lambda r^2}, \quad (4.9)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho \omega^2}{2Q_r (1 + \nu_{r\theta}) \varepsilon} \quad (4.10)$$

и k — постоянная интегрирования.

Поставим целью максимизировать кинетическую энергию, запасаемую на единицу массы маховика. Выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \iint h(r) r^2 (r d\theta dr), \quad (4.11)$$

где интеграл берется по всей плоскости диска. Аналогично выражение для общей массы имеет вид

$$M = \rho \iint h(r) (r d\theta dr). \quad (4.12)$$

Отношение, образованное из (4.11) и (4.12), имеет вид

$$\frac{T}{M} = \frac{\omega^2}{2} \frac{\int hr^3 dr}{\int hr dr}, \quad (4.13)$$

где выполнено интегрирование по r . Подставляя функцию толщины (4.9) в (4.13), получим

$$\frac{2}{\omega^2} \frac{T}{M} = \frac{\int_0^{\infty} r^{(2+\alpha)} e^{-\lambda r^2} dr}{\int_0^{\infty} r^{\alpha} e^{-\lambda r^2} dr}. \quad (4.14)$$

Задача свелась к вычислению интегралов. Положим

$$r^2 = u. \quad (4.15)$$

Подстановка (4.15) в (4.14) приводит к выражению

$$\frac{2}{\omega^2} \frac{T}{M} = \frac{\int_0^{\infty} u^{(1+\alpha)/2} e^{-\lambda u} du}{\int_0^{\infty} u^{(-1+\alpha)/2} e^{-\lambda u} du}. \quad (4.16)$$

Эти интегралы представляют собой обычную запись для гамма-функций, и (4.16) можно переписать в виде

$$\frac{2}{\omega^2} \frac{T}{M} = \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(3/2 + \alpha/2)}{\Gamma(1/2 + \alpha/2)}. \quad (4.17)$$

Теперь воспользуемся следующим тождеством для гамма-функций:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (4.18)$$

после чего (4.17) примет вид

$$\frac{2}{\omega^2} \frac{T}{M} = \frac{1}{2\lambda} (1 + \alpha). \quad (4.19)$$

Далее подставим определение α из уравнения (4.8) и λ из уравнения (4.10) в (4.19); получим

$$\frac{2\rho}{\varepsilon} \frac{T}{M} = (1 + \nu_{r\theta}) Q_r + (1 + \nu_{\theta r}) Q_{\theta}. \quad (4.20)$$

Наконец, подстановка (4.2) в (4.20) дает

$$\frac{2\rho}{\varepsilon} \frac{T}{M} = Q_r + Q_{\theta} + 2Q_{r\theta}. \quad (4.21)$$

Необходимо максимизировать правую часть (4.21) путем варьирования степени анизотропии. Уже найденное изменение толщины соответствует условию одновременного разрушения материала во всем диске. Проверка слагаемых в (4.21) показывает, что на самом деле дальнейшую оптимизацию невозможно провести. Комбинация членов $Q_r + Q_{\theta} + 2Q_{r\theta}$ представляет собой инвариант по отношению к повороту системы координат, хотя отдельные слагаемые изменяются в зависимости от ориентации слоя по отношению к данной системе координат. Это свойство инвариантности выведено в разд. 5.1, уравнение (V-1.19). Таким образом, независимо от того, является ли армирование окружным, радиальным или любой комбинацией направлений, достигается один и тот же максимум плотности энергии. Конечно, для достижения этого максимума удельной энергоемкости диск должен иметь переменную толщину, диктуемую соотношением (4.9), включающим весьма различные формы в зависимости от вида анизотропии.

Уравнение (4.21) можно переписать в ином виде, используя более привычные характеристики:

$$Q_r = \frac{E_r}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \quad Q_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \quad Q_{r\theta} = \frac{\nu_{\theta r}E_r}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \quad (4.22)$$

где E_r и E_θ — соответствующие модули Юнга. Подставив (4.22) в (4.21), получим

$$\frac{2\rho}{\varepsilon} \frac{T}{M} = \frac{1 + \nu_{\theta r}/\nu_{r\theta} + 2\nu_{\theta r}}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} E_r. \quad (4.23)$$

Соответствующие результаты для изотропного материала получаются из (4.23), если положить

$$\nu_{r\theta} = \nu_{\theta r} = \nu, \quad E_r = E;$$

здесь E и ν — упругие характеристики изотропного материала. Результат для изотропного (I) случая, таким образом, будет иметь вид

$$\left(\frac{T}{M}\right)_I = \frac{E\varepsilon}{(1 - \nu)\rho}. \quad (4.24)$$

Оценка результатов

Первый способ оценки только что полученных результатов состоит в рассмотрении предельных случаев. Наиболее очевиден предельный случай, когда волокна композита настолько жесткие по сравнению с матрицей, что вкладом последней можно пренебречь.

При пренебрежимо малом модуле сдвига матрицы $\mu_M = 0$, а также при использовании следствия из этого условия $\nu_r = \nu_M$ для случая радиального армирования получим

$$E_\theta = 0, \quad E_r = cE_F, \quad \nu_{r\theta} = \nu_F, \quad \nu_{\theta r} = 0, \quad (4.25)$$

где c — объемная доля волокон и индексами F и M обозначены свойства волокон и матрицы соответственно. Комбинируя (4.25) с (4.23), получим

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{T}{M} = \frac{1}{2}(cE_F). \quad (4.26)$$

При пренебрежимо малом модуле упругости матрицы схема двумерной хаотической ориентации волокон дает

$$E = 1/3cE_F, \quad \nu = 1/3. \quad (4.27)$$

Эти результаты следуют из разд. 4.4. Подстановка (4.27) в (4.24) приводит для изотропии к той же формуле (4.26), что, конечно, следует и из инвариантности характеристики материала,

содержащейся в правой части (4.21). Важно отметить, что (4.26) в точности совпадает с результатом, полученным при расчете вращающегося кольца.

Обсуждение проекта

Окончательные результаты оптимизации — это и соотношение (4.23), которое описывает кинетическую энергию, запасаемую на единицу массы, как функцию свойств материала, и соответствующее решение для профиля (4.9), которое также зависит от свойств материала. В процессе вывода получен примечательный результат. Поскольку для данного соотношения радиального и окружного армирования используется определяемая им оптимальная форма маховика, соответствующая энергоемкость оказалась одной и той же для целого спектра оптимальных форм. Следующая проблема состоит в том, как выбрать «наилучшую» из этих форм и связанную с ней анизотропию. Ответ на этот вопрос лежит в сфере практического проектирования.

Рассмотрим решение (4.9), определяющее профиль маховика. При $\alpha < 1$ преобладает радиальное армирование, и видно, что решение для профиля становится сингулярным при $r = 0$. С другой стороны, при $\alpha > 1$ преобладает окружное армирование, и из (4.9) видно, что $h = 0$ при $r = 0$. Только при $\alpha = 1$, что соответствует случаю равенства радиальной и окружной жесткостей, на $r = 0$ отсутствуют не представляющие интереса и невозможные в действительности условия проектирования.

Интересно отметить, что в случае преобладающего окружного армирования из (4.9) следует, что оптимальная форма предусматривает сечение с возрастающей толщиной с ростом радиуса вблизи начала координат, достигающей максимума на некотором определенном радиусе и затем сужающейся до нуля. Очевидно, случай равных объемных коэффициентов армирования в радиальном и окружном направлениях представляет собой наиболее реальную схему армирования.

Маховик с такой схемой армирования можно спроектировать, и этот проект обладает большей общностью по сравнению с проектом макроизотропного маховика. Однако результаты, полученные в предыдущем разделе для предельного случая, показывают, что в отношении максимальной энергоемкости безразлично, является ли материал маховика изотропным или обладает равными жесткостями в радиальном и окружном направлениях (последний случай соответствует не изотропии, а ортотропии).

Здесь необходимо поднять вопрос о том, имеет ли какие-либо преимущества маховик, армированный волокнами так, что его упругие характеристики эффективно изотропны, по сравнению с маховиком ободкового типа, армированного волокнами, уложен-

ными в окружном направлении. Для предельной оценки армирующего действия волокон, использованной в предыдущем разделе, обнаруживается, что эти две схемы армирования обеспечивают одну и ту же энергоемкость. Однако, во-первых, сплошной маховик имеет конструкционное преимущество перед кольцом — он более эффективно использует пространство, имея меньший неиспользуемый объем. Во-вторых, он, вероятно, более эффективен и устойчив в условиях разгона и торможения, поскольку крепление на валу маховика ободкового типа, снабженного спицами и ступицей, порождает ряд проблем.

Более важным вопросом, на который здесь надо ответить, является вопрос о том, в какой из схем армирования свойства матрицы используются наиболее эффективно (в отличие от постановки задачи в предыдущем разделе, для которой свойства матрицы не принимались во внимание). Для ответа на этот вопрос исследуем маховик, изготовленный укладкой отдельных однонаправленных слоев под различными углами в плоскости так, что обеспечиваются эффективные изотропные свойства. Асимптотическая оценка результирующего изотропного модуля, выведенная в разд. 4.4 (уравнение (IV-4.40)), имеет вид

$$E = \frac{c}{3} E_F + \frac{1-c}{3} E_M + \frac{19}{27} \frac{(1+c) E_F + (1-c) E_M}{(1-c) E_F + (1+c) E_M} E_M. \quad (4.28)$$

Подстановка (4.28) в (4.24) дает оценку энергоемкости через свойства как волокон, так и матрицы. В уравнение (4.28) подставлялись численные значения для композитов из органоволокон и эпоксидного связующего для двух отдельных случаев. Для объемной доли волокон $c = 2/3$ получены следующие результаты:

$$E/E_F = 0,24 \quad \text{для} \quad E_M/E_F = \frac{1}{190}.$$

$$E/E_F = 0,31 \quad \text{для} \quad E_M/E_F = \frac{5}{190}.$$

Первый результат соответствует очень податливой эпоксидной смоле, второй — жесткой. Для армирования только волокнами без связующего имеем

$$E/E_F = 0,22 \quad \text{для} \quad E_M/E_F = 0.$$

Очевидно, значительный эффект увеличения жесткости можно получить при использовании в качестве связующего жесткой эпоксидной смолы. Сопоставим полученные результаты с оценкой свойств конструкции типа кольца, рассчитанной по правилу смесей. Согласно расчету по правилу смесей, связующее при $E_M/E_F = 5/190$ увеличивает жесткость композита на 1,3% по сравнению с армированием только волокнами без связующего.

Сравним теперь этот результат с тем, что дает проект изотропного сплошного диска, в котором наличие связующего дает прирост жесткости в 38%. Здесь необходимо сделать предостережение. В слоистых системах с жестким связующим, обладающих изотропными свойствами, связующее будет разрушаться раньше волокон. Таким образом, свойства волокон не будут использованы

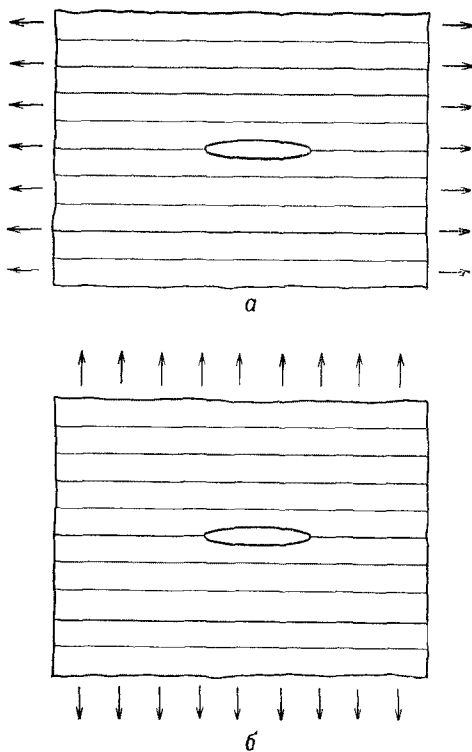


Рис. 6.7. Задача о трещине в теле, находящемся в условиях одноосного растяжения.

в полной мере. Однако эту ситуацию можно изменить на противоположную посредством перехода на менее жесткое связующее, такое, как в первом примере, с $E_M/E_F = 1/190$. В этом случае матрица все еще обеспечивает большее усиление, чем в конструкции типа кольца.

Существует много других конструкций маховиков из композитов. Наиболее распространенное из них — уже упомянутое кольцо, изготовленное окружной намоткой. Данный пример проекта, однако, служит прежде всего хорошей иллюстрацией ра-

ционального подхода к проектированию с использованием композитов. Эта область проектирования находится в стадии развития и содержит еще много нерешенных перспективных проблем.

ЗАДАЧИ

1. Можно ли использовать концепцию пограничного слоя из разд. 6.1 для решения задач теории трещин, показанных на рис. 6.7, а и б?
2. В концепции пограничного слоя из разд. 6.1 волокна подразумеваются очень жесткими по сравнению с матрицей. Выведите соответствующую форму линейных определяющих дифференциальных уравнений, когда волокна нерастяжимы (абсолютно жесткие).
3. Используя критерии предельного состояния, рассмотренные в разд. 6.2, выведите выражение (2.10) из (2.9).
4. Будут ли различаться двумерные критерии предельного состояния для тел, находящихся в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояния.
5. Пусть цилиндрические волокна одного размера образуют гексагональную упаковку, причем волокна абсолютно жесткие по сравнению с матрицей. Используя заданные геометрические характеристики, выведите коэффициент концентрации деформаций через объемную долю волокон для случая, когда композит находится в состоянии трансверсального растяжения.
6. Обсудите микромасштабные эффекты, которые вносят вклад в разрушение композитов — разрушение связи на границе раздела фаз, перенос нагрузки с разрушенных волокон и т. д.
7. Обсудите методы, которые можно использовать для оценки концентрации напряжений у вырезов в сосудах давления из композитов. Обладает ли эта проблема особенностями, связанными с использованием композитов в дополнение к обычным аспектам задачи для однородного изотропного материала?
8. В процедуре проектирования маховика в разд. 6.4 подразумевалось, что свойства не зависят от радиуса. Можно ли достичь каких-либо преимуществ, положив, что свойства зависят от радиуса?

ЛИТЕРАТУРА

- 6.1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977, 416 с.
- 6.2. Hearmon R. F. S. An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity. — New York: Oxford University Press, 1961.
- 6.3. Everstine G. C., Pipkin A. C. Stress channelling in transversely isotropic elastic composites. — ZAMP, 1971, v. 22, p. 825.
- 6.4. Spencer A. J. M. Boundary layers in highly anisotropic plane elasticity. — Int. J. Solids and Structures, 1974, v. 10, p. 1103.
- 6.5. Everstine G. C., Pipkin A. C. Boundary layers in fiber-reinforced materials. — J. Appl. Mech., 1973, v. 40, p. 518. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1973, № 2, с. 206.]
- 6.6. Bert C. W. Models for fibrous composites with different properties in tension and compression. — J. Eng. Mater. Technol., ASME, 1977, v. 99, p. 344. [Имеется перевод: Теоретические основы инженерных расчетов. — М.: Мир, № 4, 1977, с. 61.]

- 6.7. Hill R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. — Proc. Roy. Soc., 1948, v. A193, p. 281.
- 6.8. Tsai S. W., Wu E. M. A general theory of strength for anisotropic materials. — J. Comp. Mater., 1971, v. 5, p. 58.
- 6.9. Wu E. M. Phenomenological anisotropic failure criterion. — In: Composite Materials, v. 2 (G. P. Sendeckij, ed.). — New York: Academic, 1974. [Имеется перевод: Ву Э. М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. — В кн.: Композиционные материалы, т. 2/Под ред. Дж. Сендецки. — М.: Мир, 1978, с. 401—491.]
- 6.10. Tenpyson R. C., MacDonald D., Nanyaro A. P. Evaluation of the tensor polynomial failure criterion for composite materials. — J. Comp. Mater., 1978, v. 12, p. 63.
- 6.11. Daniels H. E. The statistical theory of the strength of bundles of threads. — I. — Proc. Roy. Soc., 1945, v. A183, p. 405.
- 6.12. Coleman B. D. Statistics and time dependence of mechanical breakdown in fibers. — J. Appl. Phys., 1958, v. 19, p. 968.
- 6.13. Zweben C., Rosen B. W. A statistical theory of material strength with application to composite materials. — J. Mech. and Phys. Solids, 1970, v. 18, p. 189.
- 6.14. Harlow D. G., Phoenix S. L. The chain-of-bundles probability model for the strength of fibrous materials. — I: Analysis and conjectures. — J. Comp. Mater., 1978, v. 12, p. 195.
- 6.15. Brandmaier H. E. Optimum filament orientation criteria. — J. Comp. Mater., 1970, v. 4, p. 422.
- 6.16. Christensen R. M., Wu E. M. Optimal design of anisotropic (fiber-reinforced) flywheels. — J. Comp. Mater., 1977, v. 11, p. 395.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

Изделия из композитов часто работают в таких условиях, когда не исключена возможность ударного нагружения. Динамический отклик конструкции на действие нагрузки подобного вида вызывает появление напряжений, которые могут привести конструкцию к разрушению. В связи с этим, чтобы правильно учесть эффекты, наиболее важные с точки зрения предельного состояния конструкции, необходимо знать динамические характеристики среды.

Динамическое поведение деформируемых гетерогенных сред можно в наиболее общем случае отнести к одному из двух видов. Если длина волны характерного отклика значительно больше по сравнению с масштабом неоднородности, то поведение гетерогенной среды описывается эффективными свойствами эквивалентной гомогенной среды. Методы расчета поведения конструкции и анализа распределения волн при этом не отличаются от соответствующих методов для конструкций из гомогенных материалов. В следующем разделе мы лишь слегка затронем этот вопрос.

К другому виду относят поведение сред, если длину волны отклика нельзя считать существенно большей по сравнению с характерным размером неоднородности. В этой ситуации могут возникать очень сложные динамические эффекты. Наличие поверхностей раздела фаз среды приводит к возникновению отраженных и преломленных волн. Очевидно, задача моделирования процесса распространения волн с учетом всех возможных волновых эффектов на всех поверхностях раздела фаз в типичном композите была бы очень трудной. Поэтому для исследования наиболее важных эффектов используются сильно схематизированные геометрические модели. В данной главе мы познакомимся с некоторыми из них.

К наиболее простым в применении геометрическим моделям относятся модели периодической слоистой упругой среды. Мы исследуем некоторые аспекты распространения волн, используя эту модель среды, считая, что она в какой-то степени отражает

поведение сред с более сложной структурой. Кроме того, рассмотрим пример подробного анализа поведения среды с дискретными включениями, образующими пространственную решетку. В задачах для слоистых сред и в задаче с дискретными включениями ограничимся рассмотрением только идеально периодических типов неоднородностей. В разд. 7.6 ограничение на периодичность будет ослаблено при обсуждении нескольких типов неупорядоченно гетерогенных сред. Для этого случая будет описан отсутствующий в средах с периодическими неоднородностями основной эффект затухания вследствие некогерентного рассеяния. И наконец, последний раздел главы посвящен рассмотрению задачи о динамической неустойчивости как пример применения теории смесей.

7.1. ВОЛНЫ В ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ГОМОГЕННОЙ СРЕДЕ

Начнем с анализа распространения волн в гетерогенных упругих средах при выполнении условия большой длины волны. Приняв такое допущение, можно считать, что рассматриваемая среда ведет себя как эквивалентная гомогенная. Поведение среды при бесконечной длине волны соответствует эффективному статическому. Определяющими свойствами являются эффективные модули C_{ijkl} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (1.1)$$

Пока не вводятся никакие ограничения на тип анизотропии, характеризующий гетерогенную среду, за исключением обычного требования к C_{ijkl} :

$$C_{ijkl} = C_{jkl i} = C_{ijlk} = C_{klij}.$$

Уравнения движения задаются в виде

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность среды, осредненная по объему. Будем анализировать распространение гармонических волн во времени. Выражение для перемещения плоской гармонической волны имеет вид

$$u_i = A_i \exp \left[i\omega \left(\frac{n_i x_i}{v} - t \right) \right], \quad (1.3)$$

где ω — вещественная круговая частота, \mathbf{n} — единичный вектор, задающий направление распространения, A — амплитуда и v — скорость распространения волны.

Записав (1.1) через соотношения между деформациями и перемещениями $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ и подставив в (1.2) вместе с выражением для u_i из (1.3), можно получить

$$\left[\frac{C_{ijkl}n_jn_l}{v^2} - \rho\delta_{ik} \right] A_k = 0. \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) имеют нетривиальное решение в случае равенства нулю детерминанта коэффициентов:

$$\left| \frac{C_{ijkl}n_jn_l}{v^2} - \rho\delta_{ik} \right| = 0. \quad (1.5)$$

Для заданного направления распространения волн \mathbf{n} соотношение (1.5) дает кубическое уравнение относительно скорости v . В общем случае оно имеет три различных корня для $v^{(k)}$ и три соответствующих взаимно ортогональных вектора перемещений $A_i^{(k)}$. Для изотропной среды различны только два корня $v^{(k)}$, представляющие фазовые скорости продольной и поперечной волн:

$$v^{(1)} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad v^{(2)} = v^{(3)} = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2}.$$

Волновые перемещения в анизотропной среде нельзя определить как продольные или поперечные, за исключением случаев, когда волна распространяется в направлении оси симметрии среды.

Зависимость скоростей трех волн от направления распространения является серьезным осложнением при анализе динамического поведения анизотропных сред. С эффектами подобного типа придется столкнуться и при решении двумерных задач, таких, как распространение изгибных колебаний в анизотропных пластинах. Это означает, что реакция пластины несимметрична даже несмотря на то, что приложенные нагрузки по своей природе осесимметричны, как, например, в случае сосредоточенного удара по пластине.

Существенной чертой представленного решения является отсутствие зависимости скоростей волны $v^{(k)}$ от частоты ω . Таким образом, плоские импульсные волны, содержащие некоторый спектр частот, могут распространяться в среде без искажения формы импульса. Если снять ограничение на длину волны в гетерогенной среде, окажется, что скорость распространения волны зависит от частоты. Это явление называется дисперсией. В последующих разделах главы мы детально познакомимся с этим фундаментальным эффектом.

Прежде чем рассматривать общий случай, не ограничиваясь только длинными волнами, полезно обратиться к другой крайности — распространению волн малой длины.

7.2. ПРОХОЖДЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В предыдущем разделе получено выражение скорости гармонической волны в анизотропной, но эффективно гомогенной среде. Скорость распространения волн в этом случае при условии большой длины волны зависит от эффективных модулей и средней плотности среды. Начнем с вывода точного выражения для скорости волны в частном случае.

Скорости волн

Рассмотрим периодическую слоистую упругую среду, как показано на рис. 7.1. Константы Ламе каждого повторяющегося слоя указаны на рисунке. Будем решать задачу о распространении плоской волны в направлении, перпендикулярном плоскости укладки слоев. Вследствие симметрии среды получим только две различающиеся скорости — скорость продольных волн и скорость трансверсальных сдвиговых волн. Согласно начальным условиям, рассматриваемая среда представляется чередующейся последовательностью слоев с различными свойствами, и, следовательно, ее эффективные статические свойства, характеризующие распространение продольных и сдвиговых волн, можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda + 2\mu &= \frac{h}{h_1/(\lambda_1 + 2\mu_1) + h_2/(\lambda_2 + 2\mu_2)}, \\ \mu &= \frac{h}{h_1/\mu_1 + h_2/\mu_2}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Эти константы представляют, конечно, только две из пяти независимых характеристик трансверсально изотропной среды, показанной на рис. 7.1. Весь комплекс эффективных констант такой среды приведен в разд. 4.5 книги.

Скорости волн, соответствующие свойствам (2.1), записываются выражениями

$$\begin{aligned}v_{\text{LONG}}^2 &= \frac{h^2}{[h_1/(\lambda_1 + 2\mu_1) + h_2/(\lambda_2 + 2\mu_2)](h_1\rho_1 + h_2\rho_2)}, \\ v_{\text{TRANS}}^2 &= \frac{h^2}{(h_1/\mu_1 + h_2/\mu_2)(h_1\rho_1 + h_2\rho_2)},\end{aligned}\tag{2.2}$$

где средняя плотность среды равна $(h_1\rho_1 + h_2\rho_2)/h$. Эти скорости волн и определяют распространение волн бесконечной длины в рассматриваемой задаче.

Известно, что в гомогенных средах фазовые скорости точно задаются выражениями $\sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $\sqrt{\mu/\rho}$ для продольной и сдвиговой волн соответственно. Используем эту информацию для

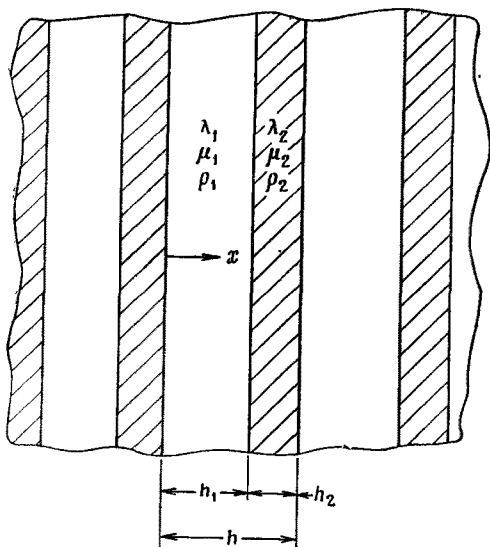


Рис. 7.1. Упругая слоистая среда.

вычисления скорости волны в слоистой среде (рис. 7.1). Конечно, нам известно, что часть любой волны, достигшая поверхности раздела, должна отразиться. На данном этапе будем иметь дело только со скоростью той части волны, которая прошла через границу раздела слоев. К вопросу отражения волн обратимся несколько позже. Скорость волны, которую мы рассчитаем, зная скорости волн в каждом из двух материалов слоев, образующих среду, определяет, следовательно, максимальную скорость, с которой неустановившееся возмущение может распространяться в гетерогенной слоистой среде.

Вначале рассмотрим распространение сдвиговых волн. Запишем выражение скорости волны в виде

$$v_{\text{TRANS}}^{\text{max}} = \frac{h_1 + h_2}{\Delta t}, \quad (2.3)$$

где Δt — время прохождения волной расстояния h . Зная скорости волн в каждом слое, выразим Δt :

$$\Delta t = \frac{h_1}{\sqrt{\mu_1/\rho_1}} + \frac{h_2}{\sqrt{\mu_2/\rho_2}}. \quad (2.4)$$

Подстановка (2.4) в (2.3) дает следующее выражение для скорости сдвиговой волны:

$$v_{\text{TRANS}}^{\text{max}} = \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2 / \rho_1 \rho_2} (h_1 + h_2)}{h_1 \sqrt{\mu_2 / \rho_2} + h_2 \sqrt{\mu_1 / \rho_1}} \quad (2.5)$$

Подобное выражение следует и для скорости распространения продольной волны. Легко доказать, что скорость волны по (2.5) больше, чем скорость v_{TRANS} по (2.2), соответствующая прохождению волн очень большой длины.

Теперь перед нами вырисовываются некоторые черты динамического поведения гетерогенной слоистой среды. Скорость распространения волны должна зависеть от длины волны и изменяться от минимального (при бесконечно большой длине волны) до максимального (при нулевой длине волны) значения в соответствии с выражениями (2.2) и (2.5). Аналогичные формулы можно вывести и для v_{LONG} . Пока, кроме знания нижнего и верхнего пределов, нам ничего не известно о зависимости скорости волны v от длины волны.

В следующем разделе рассмотрим вывод выражения, связывающего скорость и длину волны. В данный момент можно лишь сказать, что распространение неустановившегося возмущения, составленного из волн всех длин (от минимальной до максимальной), должно подчиняться очень сложным закономерностям. Несмотря на это серьезное осложнение, мы все-таки сумеем описать нестационарное поведение композитов в некоторых практических случаях.

Отражения волн

Обратимся теперь к задаче отражения волны на границе раздела фаз. Представим, что волна проходит из слоя 1 в слой 2 через поверхность раздела между ними. Из условия непрерывности напряжений и перемещений на границе слоев следует

$$\sigma_I + \sigma_R = \sigma_T, \quad u_I + u_R = u_T, \quad (2.6)$$

где индексом I обозначена падающая, R — отраженная и T — проходящая волны. Из условия баланса импульсов в обоих слоях следует

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial x} = \rho_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, \quad (2.7)$$

где x — направление распространения продольной или поперечной волны.

Примем, что решения для скорости материальной точки и напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_n &= A f(x \pm v_n t), \\ \sigma_n &= B f(x \pm v_n t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где A и B — амплитуды и v_n — фазовые скорости. Подстановка (2.8) в (2.7) дает

$$Bf'(x \pm v_n t) = \rho_n v_n A f'(x \pm v_n t), \quad (2.9)$$

где штрих обозначает производную. Из (2.9) следует

$$\sigma_n = \rho_n v_n \dot{u}_n. \quad (2.10)$$

Записав второе уравнение (2.6) через скорости и подставив в него их выражения из (2.10), получим

$$\frac{\sigma_R}{\rho_1 v_1} - \frac{\sigma_T}{\rho_2 v_2} = -\frac{\sigma_I}{\rho_1 v_1}. \quad (2.11)$$

Объединяя это уравнение с первым уравнением (2.6) и решая систему относительно σ_R и σ_T , получим для случая распространения сдвиговых волн:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_R}{\sigma_I} &= \frac{\sqrt{\rho_1 \mu_1} - \sqrt{\rho_2 \mu_2}}{\sqrt{\rho_1 \mu_1} + \sqrt{\rho_2 \mu_2}}, \\ \frac{\sigma_T}{\sigma_I} &= \frac{2\sqrt{\rho_1 \mu_1}}{\sqrt{\rho_1 \mu_1} + \sqrt{\rho_2 \mu_2}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подобные результаты следуют и для продольных волн.

Входящие в (2.12) члены вида $\sqrt{\rho_n \mu_n}$ называются *импедансами*. Когда импедансы в двух слоях совпадают, отражение волны не происходит и падающая волна полностью проходит через границу. Различие в величинах импедансов частично блокирует прохождение волн и вызывает множественные отражения.

Будем рассматривать это явление в основном с целью исследования механических эффектов, возникающих в каждом слое. Решая обобщенную нестационарную задачу, можно в принципе учесть все отраженные и проходящие волны на каждой поверхности раздела. Задача, конечно, громоздка, но разрешима с помощью вычислительной техники вплоть до некоторого предельного числа поверхностей раздела. С дальнейшим увеличением числа учитываемых в расчете границ возникает проблема точности численного решения. К счастью, как мы увидим в следующих двух разделах, есть более изящный подход к решению этой задачи.

7.3. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Перейдя к новому разделу, остановимся на точке зрения, совершенно противоположной той, которой мы придерживались ранее. Будем рассматривать прохождение гармонических во времени волн через слоистую среду. Решая эту задачу, получим

упомянутую в предыдущем разделе зависимость между скоростью волны и ее длиной. Задачи подобного рода уже давно представляют большой интерес для геофизиков. Одно из первых решений, учитывающих основные эффекты, получено С. М. Рытовым [7.1]. Данный раздел написан с использованием работ Сана, Ахенбаха и Германа [7.2] и Л. М. Бреховских [7.3].

Уравнения движения записываются в виде

$$G_n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad n = 1, 2, \quad (3.1)$$

где в случае распространения продольных волн $G_n = \lambda_n + 2\mu_n$, поперечных $G_n = \mu_n$. Направление перемещения u совпадает с направлением распространения продольных волн и перпендикулярно к направлению распространения поперечных волн. Сначала обратимся к случаю распространения волн в направлении нормали к плоскости укладки слоев.

Распространение волн перпендикулярно слоям

Исследуем прохождение плоской гармонической волны в направлении x в среде, показанной на рис. 7.1. Будем искать решение для бегущей волны в виде

$$u_n(x, t) = U_n(x) \exp \left[i\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \right], \quad (3.2)$$

которое можно записать в ином виде:

$$u_n(x, t) = U_n(x) \exp [i(\omega t + kx)], \quad (3.3)$$

где ω — круговая частота, которая полагается действительной величиной, v — скорость волны, k — волновое число и $U_n(x)$ принята строго периодической:

$$U_n(x + h) = U_n(x).$$

Частота, скорость волны и волновое число связаны выражением

$$k = \omega/v. \quad (3.4)$$

Вид решения (3.2) или (3.3) с периодической $U_n(x)$ соответствует типу волнового поведения, известному как *теория Флоке*. Найдем функцию $U_n(x)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению движения.

Известно, что решение уравнения (3.1) записывается через члены вида

$$\exp \left[i\omega \left(t \pm \frac{x}{v_n} \right) \right],$$

где v_n — фазовые скорости в материалах слоев. Запишем поэтому $U_n(x)$ как

$$\exp\left[i\omega\left(-\frac{x}{v} \pm \frac{x}{v_n}\right)\right],$$

тогда обобщенное решение $U_n(x)$ запишется в виде

$$U_n(x) = A_n \exp(i\alpha_1 x) + B_n \exp(i\alpha_2 x), \quad (3.5)$$

где

$$\alpha_1 = -\omega/v + \omega/v_n, \quad \alpha_2 = -\omega/v - \omega/v_n \quad (3.6)$$

и A_n и B_n — комплексные константы.

Далее необходимо потребовать, чтобы (3.5) было периодическим по x :

$$U_1(x)|_{x=h_1} = U_2(x)|_{x=-h_2},$$

что дает

$$\begin{aligned} & A_1 \exp\left[i\omega h_1 \left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1}\right)\right] + B_1 \exp\left[i\omega h_1 \left(-\frac{1}{v} - \frac{1}{v_1}\right)\right] = \\ & = A_2 \exp\left[-i\omega h_2 \left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_2}\right)\right] + B_2 \exp\left[i\omega h_2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подобным же образом условие периодичности напряжений приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{G_1}{v_1} A_1 \exp\left[i\omega \left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_1}\right) h_1\right] + \frac{G_1}{v_1} B_1 \exp\left[i\omega \left(-\frac{1}{v} - \frac{1}{v_1}\right) h_1\right] = \\ & = \frac{G_2}{v_2} A_2 \exp\left[-i\omega \left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_2}\right) h_2\right] + \frac{G_2}{v_2} B_2 \exp\left[i\omega \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_2}\right) h_2\right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Непрерывность напряжений и перемещений на $x = 0$ дает

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (3.9)$$

и

$$\frac{G_1}{v_1} A_1 + \frac{G_1}{v_1} B_1 = \frac{G_2}{v_2} A_2 + \frac{G_2}{v_2} B_2. \quad (3.10)$$

Для существования нетривиального решения системы уравнений (3.7) — (3.10) необходимо, чтобы определитель коэффициентов был равен нулю. Выполнение этого условия приводит к получению характеристического уравнения

$$\cos(\omega h/v) = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 - \chi \sin \lambda_1 \sin \lambda_2, \quad (3.11)$$

где

$$\lambda_n = \frac{\omega h_n}{v_n}, \quad \chi = \frac{\rho_1 G_1 + \rho_2 G_2}{2 \sqrt{\rho_1 \rho_2 G_1 G_2}}. \quad (3.12)$$

Выразив волновое число из (3.4), уравнение (3.11) можно переписать в виде

$$\cos kh = \cos \frac{vk h_1}{v_1} \cos \frac{vk h_2}{v_2} - \chi \sin \frac{vk h_1}{v_1} \sin \frac{vk h_2}{v_2}. \quad (3.13)$$

Решение (3.11) определяет функциональную зависимость скорости волны от частоты ω , а решение (3.13) — скорость волны как функцию волнового числа k . Длина волны есть $2\pi/k$; таким образом, мы установили связь скорости волны с длиной.

Теперь следует проверить, соответствует ли скорость волны из (3.11) при частоте $\omega=0$ результату (2.2), выведенному из эффективных статических свойств среды. Следует также вывести производную $d^2v/d\omega^2|_{\omega=0}$, которая является мерой вариации скорости волны v в диапазоне низких частот. Для этого разложим члены в (3.11) в степенной ряд по ω . Пусть разложение v имеет вид

$$v = v_0 + \frac{\alpha}{2} \omega^2 + \dots \quad (3.14)$$

Из разложения (3.11) до членов порядка $O(\omega^2)$ получим

$$\frac{\omega^2 h^2}{v_0^2} = \frac{\omega^2 h_1^2}{v_1^2} + \frac{\omega^2 h_2^2}{v_2^2} + 2\chi \frac{\omega^2 h_1 h_2}{v_1 v_2}. \quad (3.15)$$

Используя это соотношение, можно показать, что v_0 идентично выражению (2.2) в соответствующих случаях распространения продольных и поперечных волн. Запишем этот результат символически как

$$v_0^2 = \frac{G_{\text{STAT}}}{\rho_{\text{MEAN}}}.$$

Далее, сохраняя в разложении (3.11) члены вплоть до $O(\omega^4)$ и используя (3.15), найдем α для (3.14) в виде

$$\alpha = \frac{v_0^3 h_1^2 h_2^2}{3h^2 v_1^2 v_2^2} (1 - \chi^2). \quad (3.16)$$

Из (3.12) следует, что $\chi \geq 1$; таким образом, (3.14) и (3.16) указывают на снижение скорости волны при увеличении частоты в области низких частот.

Соотношения, подобные (3.11) и (3.13), связывающие скорость волны с частотой или волновым числом, называют *дисперсионными соотношениями*. О физической природе функциональной зависимости скорости от длины волны принято говорить, что указанная зависимость имеет дисперсионную природу. Другими словами, формы импульсов при их распространении не остаются неизменными, как в однородных упругих телах, потому, что волны различной длины рассеиваются по мере распространения импульса по-разному. Пример дисперсионных кривых приведем после того, как будут получены соответствующие результаты для распространения волн в плоскости укладки слоев.

Распространение волн в плоскости укладки слоев

Примем теперь, что направление движения волны повернуто на угол $\pi/2$ от показанного на рис. 7.1, так что волна распространяется в плоскости укладки. Система координат для рассматриваемой задачи приведена на рис. 7.2. Описываемый случай несколько более сложен по сравнению с предыдущим, поскольку оси координат, по которым изменяются свойства слоев и распространяются волны, не совпадают. Это, однако, не мешает нам получить сопоставимые результаты.

Применим разложение Гельмгольца для записи вектора перемещений в виде

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \psi, \quad (3.17)$$

где ∇ — оператор градиента. Уравнения движения для гомогенной среды удовлетворяются, если скалярный и векторный потенциалы подчиняются условию

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \ddot{\phi}, \\ \nabla^2\psi &= \frac{\rho}{\mu} \ddot{\psi}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Следует рассмотреть три различных случая: (1) горизонтально поляризованные сдвиговые волны; (2) вертикально поляризованные сдвиговые волны; (3) продольные волны. Под горизонтально поляризованной сдвиговой волной подразумевается волна с компонентами напряжения сдвига в плоскости x, y (рис. 7.2), тогда как вертикально поляризованная сдвиговая волна имеет компоненты напряжения сдвига в плоскости x, z .

Рассмотрим вначале горизонтально поляризованные сдвиговые волны. Пусть u_y — единственная ненулевая компонента перемещения. Тогда $u_y = u_y(x, z, t)$, и будем считать, что $\phi = 0$ в (3.18), а ψ_z — единственная ненулевая компонента ψ . Взяв производную от результирующего уравнения для ψ_z , получим

$$\nabla^2 u_y = \frac{\rho}{\mu} \ddot{u}_y. \quad (3.19)$$

Хотя можно было получить это уравнение прямым способом, мы применили для вывода векторный потенциал, свойствами которого нам еще придется воспользоваться в последующем. Примем, что начало координат расположено в центре каждого слоя, как показано на рис. 7.2. Решение (3.19) для гармонической волны, распространяющейся в каждом слое, имеет вид

$$u_y^{(n)} = [A_n \sin \eta_n z_n + B_n \cos \eta_n z_n] \exp[ik(x + vt)], \quad n = 1, 2,$$

где

$$\eta_n^2 = k_n^2 - k^2 \quad (3.20)$$

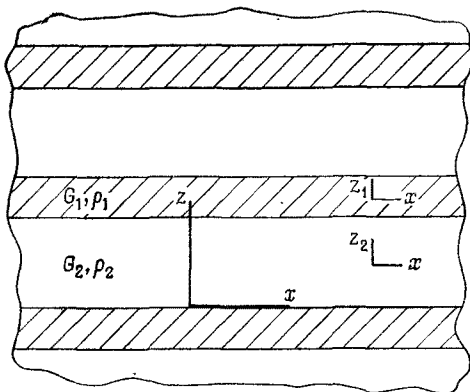


Рис. 7.2. Система координат в слоистой среде для случая распространения волн в направлении, параллельном плоскости укладки слоев.

с $k_n = \omega/v_n$. Для симметричного движения относительно $z_n = 0$ имеем $A_n = 0$, тогда как для антисимметричного $B_n = 0$.

В случае симметричного движения требование периодичности перемещения (и напряжения)

$$u_y^{(1)}|_{z_1=h_1/2} = u_y^{(2)}|_{z_2=-h_2/2}$$

удовлетворяется автоматически. Требования непрерывности перемещения и напряжения на поверхности раздела $z_1 = -h_1/2$, $z_2 = h_2/2$ дают характеристическое уравнение

$$\mu_1 \left(\frac{k_1^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\eta_1 h_1}{2} + \mu_2 \left(\frac{k_2^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\eta_2 h_2}{2} = 0. \quad (3.21)$$

Подобным же образом для антисимметричных членов найдено, что

$$\mu_2 \left(\frac{k_2^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\eta_1 h_1}{2} + \mu_1 \left(\frac{k_1^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\eta_2 h_2}{2} = 0. \quad (3.22)$$

Соотношения (3.21) и (3.22) задают связь между частотой ω и волновым числом k для определенных типов волн. Используя связь $\omega = kv$, из (3.21), (3.22) можно найти зависимость скорости волны от частоты.

Теперь перейдем к рассмотрению продольно и вертикально поляризованных сдвиговых волн. Запишем компоненты перемещения в виде

$$u_x = u_x(x, z, t), \quad u_y = 0, \quad u_z = u_z(x, z, t). \quad (3.23)$$

Скалярный потенциал $\varphi(x, z)$ в (3.17) имеет компоненты u_x и u_z , а векторный — компоненту $\psi_y(x, z)$ в ψ . Из первого выражения в (3.18) следует, что

$$\nabla^2 u_x = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \ddot{u}_x, \quad \nabla^2 u_z = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \ddot{u}_z \quad (3.24)$$

для волн расширения, определенных уравнением

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0. \quad (3.25)$$

Из второго выражения (3.18) следует, что

$$\nabla^2 u_x = \frac{\rho}{\mu} \ddot{u}_x, \quad \nabla^2 u_z = \frac{\rho}{\mu} \ddot{u}_z \quad (3.26)$$

для вихревых волн, определенных уравнением

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.27)$$

Обсудим сначала случай распространения волны расширения и примем

$$u_{1x} = \left[A_1 \cos \eta_1 \left(z - \frac{h_1}{2} \right) + B_1 \sin \eta_1 \left(z - \frac{h_1}{2} \right) \right] \exp [ik(x + vt)], \quad (3.28)$$

где

$$\eta_n^2 = \left[\frac{\omega^2}{(\lambda_n + 2\mu_n)/\rho} \right] - k^2. \quad (3.29)$$

Для слоя 2 примем

$$u_{2x} = \left[A_2 \cos \eta_2 \left(z + \frac{h_2}{2} \right) + B_2 \sin \eta_2 \left(z + \frac{h_2}{2} \right) \right] \exp [ik(x + vt)]. \quad (3.30)$$

Определим u_{1z} и u_{2z} из двух уравнений вида (3.25) для каждого слоя. Далее определим волны сдвига. Пусть

$$u_{1x} = \left[C_1 \cos \beta_1 \left(z - \frac{h_1}{2} \right) + D_1 \sin \beta_1 \left(z - \frac{h_1}{2} \right) \right] \exp [ik(x + vt)], \quad (3.31)$$

$$u_{2x} = \left[C_2 \cos \beta_2 \left(z + \frac{h_2}{2} \right) + D_2 \sin \beta_2 \left(z + \frac{h_2}{2} \right) \right] \exp [ik(x + vt)],$$

где

$$\beta_n^2 = \frac{\omega^2}{\mu_n/\rho} - k^2. \quad (3.32)$$

Определим u_{1z} и u_{2z} в двух слоях из уравнений вида (3.27).

Объединим результаты, полученные для двух типов волн. Незвестные амплитуды суммарного движения волны — это восемь констант $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ и D_2 . Условия на границе имеют вид

$$\text{при } z=0 \quad u_{1x} = u_{2x}, \quad u_{1z} = u_{2z}, \quad \sigma_{1z} = \sigma_{2z}, \quad \sigma_{1zx} = \sigma_{2zx}, \quad (3.33)$$

а требования периодичности выражаются в виде

$$\begin{aligned} u_{1x} |_{z=h_1} &= u_{2x} |_{z=-h_2}, & u_{1z} |_{z=h_1} &= u_{2z} |_{z=-h_2}, \\ \sigma_{1z} |_{z=h_1} &= \sigma_{2z} |_{z=-h_2}, & \sigma_{1zx} |_{z=h_1} &= \sigma_{2zx} |_{z=-h_2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Условия (3.33) и (3.34) образуют в совокупности систему восьми однородных уравнений относительно восьми неизвестных констант. Для получения решения определитель коэффициентов полагается равным нулю. Эта система естественно делится на две системы, связанные с продольными и трансверсальными волнами.

При описании движения продольной волны принимают, что $B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = 0$. Рассмотрим слагаемое, сохраняющееся в уравнениях в виде $u_{1x} \rightarrow D_1 \sin(z - h_1/2)$. Соответствующий член, связанный с деформацией сдвига, является нечетным относительно $z = h_1/2$; таким образом, средняя деформация сдвига по всему слою равна нулю. Аналогично при интегрировании по толщине осредненная сдвиговая деформация от всех других источников равна нулю. Найдено, что результирующее уравнение дисперсии для продольных волн имеет вид

$$\begin{aligned} 4(\mu_1 - \mu_2) K_1 K_2 + \omega^2 \rho_1 \left[\frac{\omega^2 \rho_1}{k^2} - 4(\mu_1 - \mu_2) \right] K_2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1 h_1}{2} + \\ + \omega^2 \rho_2 \left[\frac{\omega^2 \rho_2}{k^2} + 4(\mu_1 - \mu_2) \right] K_1 \operatorname{tg} \frac{\beta_2 h_2}{2} - \\ - \frac{\omega^4 \rho_1 \rho_2}{k^2} \left[L_1 \operatorname{tg} \frac{\beta_2 h_2}{2} + L_2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1 h_1}{2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= k^2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1 h_1}{2} + \eta_1 \beta_1 \operatorname{tg} \frac{\eta_1 h_1}{2}, \\ K_2 &= k^2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2 h_2}{2} + \eta_2 \beta_2 \operatorname{tg} \frac{\eta_2 h_2}{2}, \\ L_1 &= k^2 \operatorname{tg} \frac{\beta_1 h_1}{2} - \eta_2 \beta_2 \operatorname{tg} \frac{\eta_1 h_2}{2}, \\ L_2 &= k^2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2 h_2}{2} - \eta_2 \beta_2 \operatorname{tg} \frac{\eta_2 h_1}{2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

При описании движения вертикально поляризованных сдвиговых волн принимают $A_1 = A_2 = D_1 = D_2 = 0$, что приводит к механическому поведению, не сопровождающемуся осредненным изменением объема по всей толщине. Уравнение дисперсии для этого случая имеет вид

$$\frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1 h_1}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_2 h_2}{2} \right) + \left[1 + \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1} \right] \operatorname{tg} \frac{\beta_1 h_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta_2 h_2}{2} = 0. \quad (3.37)$$

Типичные дисперсионные кривые

Приведенные на рис. 7.3, 7.4 кривые соответствуют следующим исходным данным из [7.2]:

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} = 0,8, \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = 3, \quad v_1 = 0,3, \quad v_2 = 0,35.$$

Самые нижние ветви дисперсионной кривой распространения продольной волны в плоскости слоев и перпендикулярно плоскости показаны соответственно на рис. 7.3 и 7.4. Эти нижние ветви называют *акустическими модами*. Общее число ветвей дисперсионных кривых бесконечно.

Интересный эффект можно наблюдать при построении дисперсионных соотношений в виде спектра частот — зависимости частоты от волнового числа. Как показал Све [7.4], для случая распространения волн перпендикулярно плоскости слоев характерны зависимости, подобные показанным на рис. 7.5. Существуют полосы непропускания, т. е. для реальных значений волнового числа k некоторые частоты являются недопустимыми. Гетерогенная среда действует, таким образом, как *волновой фильтр*. С распространением гармонических волн в гетерогенных средах связан так называемый *эффект предельной частоты*. Предельная частота — это частота, при которой волновое число k претерпевает переход от реальных значений к мнимым или комплексным. Комплексное значение волнового числа предполагает существование нераспространяющейся стоячей волны.

На данном этапе следует объяснить еще один аспект волнового поведения. Заметим, что с высшими ветвями дисперсионных кривых связаны скорости, большие, чем фазовые скорости в любой составляющей гетерогенной среды. Эта особенность на первый взгляд кажется парадоксальной, если не понять, что перенос энергии осуществляется не со скоростью, определяемой дисперсионными соотношениями, а с групповой скоростью, определяемой как $v_g = d\omega/dk$. Последняя никогда не превышает фазовых скоростей в компонентах гетерогенной среды. Обсуждение этого явления можно найти у Бриллюэна [7.5].

7.4. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Теперь мы готовы к решению практических задач о распространении нестационарной волны в гетерогенной среде. В этом разделе обсудим распространение импульса в направлении, перпендикулярном плоскости укладки слоев. Существует много различных подходов к решению задач подобного типа. Некоторые из них перечислены в конце раздела. Мы будем следовать подходу,

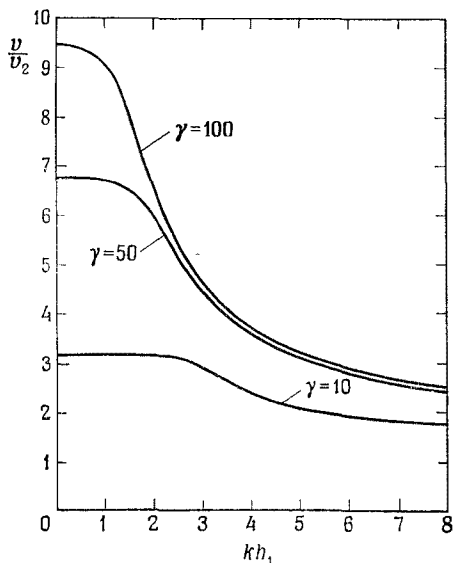


Рис. 7.3. Нижняя симметричная мода при распространении волн в направлении, параллельном плоскости укладки слоев [7.2]; $\gamma = \mu_1/\mu_2$; v/v_2 — фазовая скорость; kh_1 — волновое число.

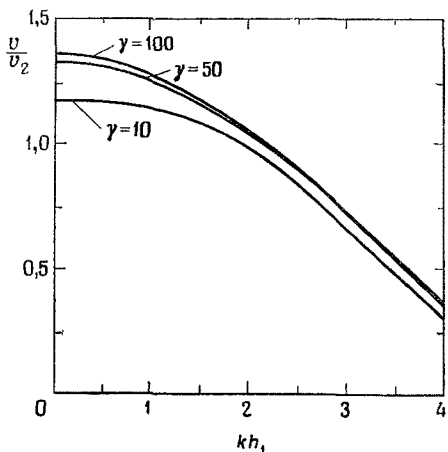


Рис. 7.4. Нижняя продольная мода при распространении волн в направлении, перпендикулярном плоскости укладки слоев [7.2].

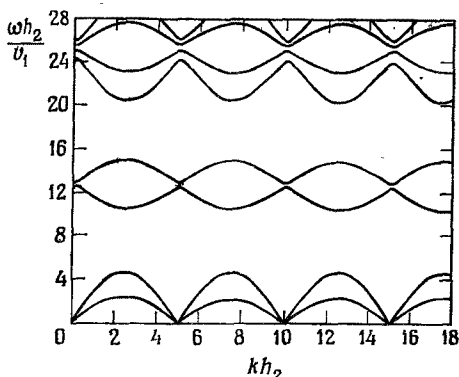


Рис. 7.5. Распространение волн в направлении, перпендикулярном плоскости укладки слоев, — эффект волнового фильтра [7.4]; $\omega h_2/v_1$ — частота; kh_2 — волновое число.

предложенному Коном [7.6]. Всякий аналитический метод основывается на некоторых аппроксимациях. В [7.6] используется синтез Фурье в сочетании с типичными математическими приемами, применимыми для низких частот. Этот подход, таким образом, применим лишь к описанию распространения длинных волн, однако мы покажем, что с его помощью можно моделировать и дисперсионные эффекты.

Обобщенное решение

Для распространения одномерной волны в гетерогенной среде запишем уравнение движения в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[G(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4.1)$$

где x — направление изменения свойств среды, а система координат и обозначения те же, что и на рис. 7.1. Свойство G можно отождествлять или с $\lambda + 2\mu$, или с μ для моделирования распространения соответственно продольных или сдвиговых волн. Перемещение u также идентифицируется в соответствии с одним из рассматриваемых случаев.

Начнем таким же образом, как в предыдущем разделе, предполагая, что решение имеет вид

$$u(x, t) = \hat{U}(x, k) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (4.2)$$

где ω — вещественная частота, k — вещественное волновое число и $\hat{U}(x, k)$ предполагается периодической:

$$\hat{U}(x + h, k) = \hat{U}(x, k),$$

где h — период изменения свойств. Напомним, что, как и в предыдущем разделе, частота ω , волновое число k и волновая скорость должны быть связаны в соответствии с (3.4).

Подстановка (4.2) в (4.1) дает

$$\left[\left(G \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dG}{dx} \frac{d}{dx} \right) + ik \left(2G \frac{d}{dx} + 2 \frac{dG}{dx} \right) + (ik)^2 G \right] \hat{U}(x, k) + \rho \omega^2 \hat{U}(x, k) = 0. \quad (4.3)$$

Для малых значений волнового числа k (большая длина волны) разложение $\hat{U}(x, k)$ в степенной ряд по (ik) дает

$$\hat{U}(x, k) = 1 + (ik) u_1(x) + (ik)^2 u_2(x) + \dots, \quad (4.4)$$

где пока мы без потери общности положили первый член разложения равным 1. Выражая частоту как функцию волнового числа, используем опять разложение в степенной ряд

$$\omega^2(k) = v_0^2 k^2 - \beta k^4 + \dots, \quad (4.5)$$

где v_0 и β следует определять из дисперсионных соотношений, чтобы моделировать распространение длинных волн. Подстановка (4.4) и (4.5) в (4.3) и приравнивание нулю коэффициентов ряда по степеням k^2 дают первые три формулы:

$$\begin{aligned} \left(G \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dG}{dx} \frac{d}{dx} \right) 1 &= 0, \\ \left(G \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dG}{dx} \frac{d}{dx} \right) u_1(x) + \frac{dG}{dx} &= 0, \\ \left(G \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dG}{dx} \frac{d}{dx} \right) u_2(x) + \left(2G \frac{d}{dx} + \frac{dG}{dx} \right) u_1(x) + G(x) + \rho(x) v_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для возмущений, распространяющихся в противоположных направлениях, запишем

$$u(x, t) = u^{(+)}(x, t) + u^{(-)}(x, t). \quad (4.7)$$

Используем *синтез Фурье* для выражения общей формулы $u^{(\pm)}$ и $u^{(\pm)}$ в виде

$$u^{(\pm)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(\pm)}(k) \hat{U}(x, k) \exp \{ i [kx \pm \omega(k)t] \} dk. \quad (4.8)$$

Таким образом, мы синтезируем импульс от волн всех длин, где $A^{(\pm)}$ и $A^{(\pm)}$ — функции волнового числа и $\omega(k)$ — квадратный корень выражения (4.5). Теперь подставим разложение $\hat{U}(x, k)$ из

(4.4) в (4.8):

$$u^{(\pm)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(\pm)}(k) [1 + (ik)u_1(x) + \dots] \exp\{i[kx \pm \omega(k)t]\} dk = \\ = \left[1 + u_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + \dots\right] U^{(\pm)}(x, t), \quad (4.9)$$

где

$$U^{(\pm)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(\pm)}(k) \exp\{i[kx \pm \omega(k)t]\} dk. \quad (4.10)$$

Теперь проверим, что $U^{(\pm)}(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 U^{(\pm)}(x, t)}{\partial t^2} = \left[v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \dots\right] U^{(\pm)}(x, t). \quad (4.11)$$

Подставив $U^{(\pm)}(x, t)$ из (4.10) в (4.11), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^{(\pm)}(k) [-\omega^2(k)] \exp\{i[kx \pm \omega(k)t]\} dk = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(\pm)}(k) [-v_0^2 k^2 + \beta k^4 + \dots] \exp\{i[kx \pm \omega(k)t]\} dk.$$

Далее подставим выражение $\omega^2(k)$ из (4.5) в подынтегральное выражение в левой части и проверим почленно совпадение левой и правой частей уравнения. Таким образом, решение имеет вид

$$u(x, t) = \left[1 + u_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + u_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right] U(x, t), \quad (4.12)$$

где $U(x, t)$ удовлетворяет (4.11) и $u_1(x)$ из (4.6) — условию

$$\left[G(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dG(x)}{dx} \frac{d}{dx}\right] u_1(x) + \frac{dG(x)}{dx} = 0. \quad (4.13)$$

Подобные же формулы существуют и для $u_2(x)$, и для членов высших порядков. Запишем (4.13) в виде

$$\frac{d}{dx} \left[G(x) \frac{du_1(x)}{dx} + G(x) \right] = 0$$

и проинтегрируем, тогда получим

$$G(x) \frac{du_1(x)}{dx} + G(x) = C, \quad (4.14)$$

где C — константа. Интегрируя еще раз, получим

$$u_1(x) = \int_{\text{const}}^x \left(\frac{C}{G(\eta)} - 1 \right) d\eta + D, \quad (4.15)$$

где D — константа, которую можно отбросить без потери общности. Нижний предел в (4.15) можно выбрать произвольно, и мы положим его равным нулю.

Для периодической функции $u_1(x)$: $u_1(x+h) = u_1(x)$ соотношение (4.15) должно иметь вид

$$u_1(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{G^{-1}G(\eta)} - 1 \right) d\eta.$$

где

$$G^{-1} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{G(\eta)} d\eta. \quad (4.16)$$

Нетрудно доказать периодичность выражения (4.15). Перепишем его в виде

$$u_1(x) = h \int_0^x \frac{1}{G(\eta)} d\eta / \int_0^h \frac{1}{G(\eta)} d\eta - x.$$

Эта формула, очевидно, периодична; более того,

$$u_1(nh) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

таким образом, для рассматриваемого порядка

$$u(x, t) = U(x, t) \quad \text{при} \quad x = nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь найдем локальное напряженное и деформированное состояние. Для деформации имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + u_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + u_2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right] U(x, t) \right\} = \\ &= \left(1 + \frac{du_1}{dx} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \left(u_1 + \frac{du_2}{dx} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots \end{aligned}$$

Подставив $u_1(x)$ из (4.15), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{1}{G^{-1}G(x)} \right] \frac{\partial U}{\partial x} + \dots \quad (4.17)$$

Таким образом, видно, что деформация является быстро меняющейся функцией x вследствие наличия члена типа $G(x)$. Заметим, что $U(x, t)$ определяет функцию $\partial u / \partial x$ в замкнутом виде. Локальное напряжение задается выражением $\sigma = G(x) (\partial u / \partial x)$, которое после подстановки (4.17) приводится к виду

$$\sigma = \frac{1}{G^{-1}} \frac{\partial U}{\partial x} + \dots \quad (4.18)$$

Итак, в отличие от деформации напряжение (в соответствии с принятыми допущениями) медленно изменяется с изменением x .

Подобное поведение согласуется с непрерывностью напряжений, тогда как деформация по сечению не обязательно непрерывна.

Посмотрим, можно ли вывести прямо основное уравнение для напряжений, не определяя их через перемещения. Из (4.18) следует, что можно записать обобщенное выражение для σ :

$$\sigma(x, t) = \alpha \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \gamma(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + \dots, \quad (4.19)$$

где коэффициент α не зависит от x , а $\gamma(x)$ зависит. Нетрудно показать из (4.11), что, оставляя в (4.19) только первый член, получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma(x, t)}{\partial t^2} = \left[v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \dots \right] \sigma(x, t). \quad (4.20)$$

Однако если в (4.19) удержать члены высших порядков, то уравнение (4.20) уже неприменимо, так как значение коэффициента $\gamma(x)$ зависит от его положения в разложении. Впредь сохраним в (4.19) только член низшего порядка, так что уравнение (4.20) можно будет применять.

Тогда общая форма решения для напряжения (ср. (4.10)) имеет вид

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A^{(+)}(k) \exp\{i[kx + \omega(k)t]\} + A^{(-)}(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\}] dk, \quad (4.21)$$

где члены $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ отличаются от соответствующих членов в выражении для перемещения. Введем безразмерные переменные $x/h = \xi$ и $tv_0/h = \tau$. Тогда функция $\sigma(\xi, \tau)$ запишется в виде

$$\sigma(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^{(+)}(k) \exp\left\{i\left[kh\xi + \omega(k) \frac{h}{v_0} \tau\right]\right\} + A^{(-)}(k) \exp\left\{i\left[kh\xi - \omega(k) \frac{h}{v_0} \tau\right]\right\} dk. \quad (4.22)$$

Задачи с начальными условиями

Будем решать задачу с начальным условием

$$\text{при } \tau = 0 \quad \sigma = \sigma_0 \delta(\xi), \quad d\sigma/d\tau = 0, \quad (4.23)$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака. Из (4.22) имеем

$$\left. \frac{d\sigma}{d\tau} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(k) [A^{(+)}(k) \exp(ikh\xi) - A^{(-)}(k) \exp(ikh\xi)] dk = 0,$$

из которого получаем $A^{(+)} = A^{(-)}$. Используя этот результат далее для удовлетворения первого условия (4.23), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^{(+)}(k) \exp(ikh\xi) dk = \pi\sigma_0\delta(\xi).$$

Применяя к этому уравнению преобразование Фурье, легко найдем $A^{(+)} = \sigma_0 h/2$. Таким образом, обобщенное решение имеет вид

$$\sigma(\xi, \tau) = \frac{\sigma_0 h}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[i\left(kh\xi + \omega(k)\frac{h}{v_0}\tau\right)\right] + \right. \\ \left. + \exp\left[i\left(kh\xi - \omega(k)\frac{h}{v_0}\tau\right)\right] \right\} dk. \quad (4.24)$$

Теперь необходимо найти $\omega(k)$ для подстановки в (4.24). Применяя к (4.5) биномиальную теорему, получим

$$\omega = v_0 k \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta}{v_0^2} k^2 + \dots\right). \quad (4.25)$$

Подстановка (4.25) с двумя удержанными членами разложения в решение (4.24) дает

$$\sigma(\xi, \tau) = \frac{h\sigma_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp[ikh(\xi + \tau)] \exp\left(-\frac{i\beta h k^3}{2v_0^2}\tau\right) + \right. \\ \left. + \exp[ikh(\xi - \tau)] \exp\left(\frac{i\beta h k^3}{2v_0^2}\tau\right) \right] dk. \quad (4.26)$$

Этот результат можно преобразовать к виду

$$\sigma(\xi, \tau) = \frac{h\sigma_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos\left[kh(\xi + \tau) - \frac{1}{2} \frac{\beta h k^3}{v_0^2}\tau\right] + \right. \\ \left. + \cos\left[kh(\xi - \tau) + \frac{1}{2} \frac{\beta h k^3}{v_0^2}\tau\right] \right\} dk.$$

Слагаемые, входящие в полученное уравнение, представляют собой функции Эйри, что позволяет записать

$$\sigma(\xi, \tau) = \frac{\sigma_0}{2(3\beta\tau/2v_0^2 h^2)^{1/3}} \left\{ \text{Ai}\left[\frac{-(\xi + \tau)}{(3\beta\tau/2v_0^2 h^2)^{1/3}}\right] + \right. \\ \left. + \text{Ai}\left[\frac{\xi - \tau}{(3\beta\tau/2v_0^2 h^2)^{1/3}}\right] \right\}, \quad (4.27)$$

где

$$\text{Ai}\left[\frac{y}{3(a)^{1/3}}\right] = \frac{(3a)^{1/3}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(ak^3 + yk) dk.$$

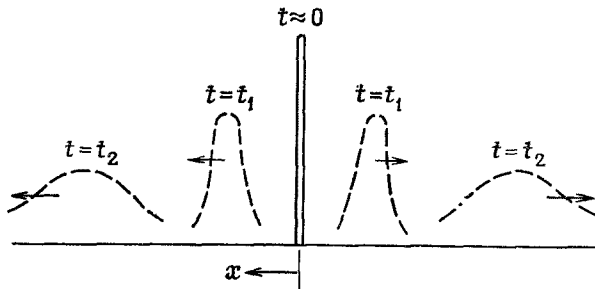


Рис. 7.6. Распространение импульса в дисперсионной среде. При $t = 0$ наблюдается наложение двух дельта-функций каждая величиной $\frac{1}{2}\delta(x)$.

Решение (4.27) по своей форме соответствует двум импульсам,двигающимся в противоположных направлениях. Из свойств функций Эйри следует, что импульсы по мере распространения затухают. После продвижения этих импульсов на достаточно большое расстояние их совместным действием можно пренебречь, что позволяет аппроксимировать (4.27) при помощи выражения

$$\sigma(\xi, \tau) \approx \frac{\sigma_0}{2(3\beta\tau/2v_0^2h^2)^{1/3}} \text{Ai}\left(\frac{\xi - \tau}{(3\beta\tau/2v_0^2h^2)^{1/3}}\right), \quad \varepsilon \geq 0, \quad (4.28)$$

для значений ξ вблизи главной части импульса.

Общий вид решения (4.27) схематически показан на рис. 7.6. По мере распространения импульсов вследствие дисперсии волн импульсы расширяются и сглаживаются. Это явление не связано с затуханием, поскольку общая волновая энергия остается постоянной. Влияние дисперсии на скорость волны проявляется в перераспределении энергии таким образом, что наблюдается эффект псевдозатухания. Длительную реакцию полупространства на воздействие напряжения на границе в виде единичной ступенчатой функции можно получить из (4.28) путем интегрирования

$$\sigma(\xi, \tau) = \frac{1}{3} - \int_0^\lambda \text{Ai}(\eta) d\eta, \quad (4.29)$$

где

$$\lambda = \frac{\xi - \tau}{(3\beta\xi/2v_0^2h^2)^{1/3}} \quad (4.30)$$

и константа интегрирования определяется из условия, что $\sigma \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$. При интегрировании выражения реакции (4.28) переменную τ в членах под корнем третьей степени заменяют на ξ , что допустимо для больших времен вблизи главной части импульса.

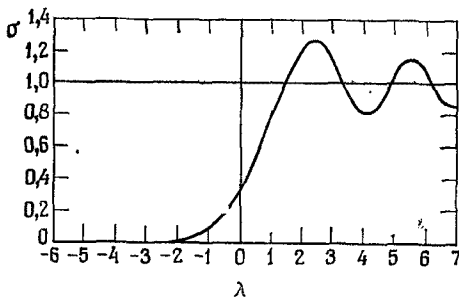


Рис. 7.7. Реакция на нестационарный импульс [7.7].
 λ — безразмерный параметр времени от момента поступления импульса.

Соотношение (4.29) было впервые получено Пеком и Гартманом [7.7], использовавшими метод, также основанный на синтезе Фурье для больших длин волн и названный ими *методом головного импульса*. Характер решения (4.29) показан на рис. 7.7. Как видно, напряжение отклика превышает уровень приложенного импульса (эффект выброса напряжения), что указывает на резонансное поведение среды. Из (4.29) и (4.30) следует, что характер решения, представленного на рис. 7.7, сохраняется во всех точках. Из (4.30) видно, что флуктуации импульса расширяются по мере распространения волны, однако величина выброса напряжения остается неизменной. Чтобы получить точные результаты для слоистой среды частного вида, необходимо определить β , v_0 и h в (4.30). В выражение отклика входят, таким образом, только скорость v_0 при нулевой частоте и дисперсионный параметр низшего порядка β из (4.5). Эти простые результаты указывают на эффективность применения метода синтеза Фурье.

Решения для дельта-функции и ступенчатой функции можно рассматривать как функции Грина, определяющие отклик на любой тип нестационарного нагружения. Тем не менее в соответствии с предположением, сделанным ранее при выводе, следует ожидать, что близкие к действительности результаты можно получить только для длинных волн.

Проведенный анализ указывает, что коротковолновые составляющие импульса рассеиваются по мере продвижения волны и отклик определяется главным образом волнами большой длины. Экспериментальная проверка теоретических оценок по выражениям типа (4.29) проделана Уиттьером и Пеком [7.8], получившими очень хорошее совпадение.

Параметр дисперсии β в разложении (4.5) можно рассчитать или определить экспериментально по измерению скорости волны при изменяющейся длине волны (частоты). Можно показать, что

для периодически слоистой упругой среды β определяется следующим выражением:

$$\beta = \frac{v_0^6 h_1^2 h_2^2 (\rho_1 G_1 - \rho_2 G_2)^2}{12 h^2 G_1^2 G_2^2}, \quad (4.31)$$

где толщины и свойства двух упругих слоев известны. Скорость волны при нулевой частоте v_0 рассчитывается по формулам (2.2), выведенным в разд. 7.2 для продольных и поперечных волн.

Теперь мы видим, что основным фактором, определяющим применимость представленного метода, является информация о дисперсном характере гармонических волн. Несмотря на то что анализ был проведен только для одного (частного) типа гетерогенной среды, в действительности все типы гетерогенных сред обладают свойством дисперсии. Именно эффект дисперсии вызывает уменьшение амплитуды и размывание волновых импульсов по мере их распространения. Решение для дельта-функции (4.28) очень отчетливо показывает эти эффекты. В следующем разделе мы применим метод суперпозиции Фурье для анализа поведения гетерогенных сред общего вида.

Существует довольно много различных способов описания эффектов распространения волн в гетерогенных средах. В данном разделе мы использовали простой и вместе с тем элегантный подход. Другой нашедший применение подход основан на разработанной Саном, Ахенбахом и Германом [7.2] теории эффективных жесткостей. В основу теории положено предположение о том, что в функции локального перемещения внутри фазы или ячейки входят в качестве слагаемого функции перемещения от координат из макроскопической задачи. Для получения разрешающих дифференциальных уравнений системы используется принцип Гамильтона. Коэффициенты при членах уравнений определяются свойствами материалов и геометрическими особенностями структуры гетерогенных сред. Эта теория детально развита, например, в работах Драмхеллера и Бедфорда [7.9, 7.10]. Общий обзор возможностей предложенной теории дан Ахенбахом [7.11], который отметил ее сходство с общими теориями микроструктуры, такими, как мультиполярная теория.

В теории взаимодействующих сред Хегемейер с коллегами разработали метод, основанный на асимптотических разложениях как напряжений, так и перемещений. Этот метод в первоначальной трактовке Хегемейера и Найфе [7.12] применялся во многих работах для анализа поведения не только слоистых, но и армированных волокнами сред. Были получены хорошие результаты как в сравнении с численными решениями, так и с результатами экспериментальных исследований.

Еще один подход, также использующий асимптотические разложения, предложен Бен-Амозом [7.13]. В работах Бедфорда и

Стерна [7.14] и Тирстена и Яханмира [7.15] выполнен анализ распространения волн с использованием теории смесей. Применение теории смесей рассматривается далее в разд. 7.6 и 7.7. Наконец, в связи с затронутыми выше дисперсионными соотношениями упомянем работы Немат-Нассера и Минагавы [7.16] по исследованию слоистых упругих сред и Мукхерджи и Ли [7.17] — слоистых вязкоупругих сред. В качестве полезных обзорных работ, посвященных распространению волн в композитах, рекомендуем статьи Ахенбаха [7.18] и Муна [7.19].

7.5. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Познакомившись с применением простого метода синтеза Фурье в предыдущем разделе, попытаемся применить его для сред более общего вида, чем слоистые. В частности, рассмотрим распространение нестационарного возмущения в трехмерно периодических средах. Трудности, связанные с возможной нерегулярностью сред, обсудим в следующем разделе. При изложении материала будем следовать работе Кона [7.20].

Для упругой среды со свойствами, зависящими от координат, запишем

$$\rho(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(\mathbf{r}) \epsilon_{kl}(\mathbf{r}, t)]. \quad (5.1)$$

Пусть $\rho(\mathbf{r})$ и $C_{ijkl}(\mathbf{r})$ — периодические функции: $f(\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\gamma}$ — периодический вектор трансляции, который можно задать таким образом, что среда будет одно-, двух- или трехмерно периодической. В соответствии с теорией Флоке предположим, что решение имеет вид

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \hat{U}_i(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (5.2)$$

где требуется, чтобы $\hat{U}_i(\mathbf{r}, \mathbf{k})$ была периодической, и \mathbf{k} — вещественное векторное волновое число. Подставляя (5.2) в (5.1), результирующие уравнения движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\rho(\mathbf{r}) \omega^2(\mathbf{k}) \hat{U}_i(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijlm}(\mathbf{r}) \frac{\partial \hat{U}_l(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial x_m} \right] + \\ &+ ik_m \left[\frac{\partial C_{ijlm}(\mathbf{r})}{\partial x_j} \hat{U}_l(\mathbf{r}, \mathbf{k}) + 2C_{ijlm}(\mathbf{r}) \frac{\partial \hat{U}_l(\mathbf{r}, \mathbf{k})}{\partial x_j} \right] - \\ &- k_m k_j C_{ijlm}(\mathbf{r}) \hat{U}_l(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{i} + k_2 \mathbf{j} + k_3 \mathbf{k}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы и C_{ijlm} обладает обычной симметрией свойств.

Разлагая $U_i(\mathbf{r}, t)$ в ряд для фиксированного направления вектора волнового числа \mathbf{k} , получим

$$\hat{U}_i(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = u_i^{(0)}(\mathbf{r}) + (ik)u_i^{(1)}(\mathbf{r}) + (ik)^2u_i^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots \quad (5.4)$$

В соответствии с (5.4) разложим в ряд частоту ω как функцию волнового числа для фиксированного направления \mathbf{k} :

$$\omega^2(k) = v_0^2(\theta, \varphi)k^2 - \beta(\theta, \varphi)k^4 + \dots, \quad (5.5)$$

где θ и φ — сферические координаты. В разд. 7.1 уже отмечалось, что в общем случае существуют три различные акустические скорости v_0 . Величины β и всех других коэффициентов, входящих в (5.5), также имеют по три различных значения. Сохраним в (5.5) только первые два члена. Волновую скорость v_0 при нулевой частоте и параметр дисперсии β можно рассчитать аналитически или определить экспериментальным путем. Будем считать эти параметры известными.

Запишем (5.3) в виде

$$\omega^2 \rho(\mathbf{r}) \hat{U}_i(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = m_{ij}(\mathbf{k}) \hat{U}_j(\mathbf{r}, \mathbf{k}), \quad (5.6)$$

где $m_{ij}(\mathbf{k})$ — дифференциальный оператор:

$$m_{ij} = m_{ij}^{(0)} + k_p m_{ijp}^{(1)} + k_p k_q m_{ijpq}^{(2)}, \quad (5.7)$$

где в свою очередь $m_{ij}^{(0)}$, $m_{ijp}^{(1)}$ и $m_{ijpq}^{(2)}$ прямо отождествляются с операторами в (5.3). Подставляя (5.4) и (5.5) в (5.3) и полагая коэффициенты при степенях k равными нулю, получаем

$$\begin{aligned} m_{ij}^{(0)} u_j^{(0)}(\mathbf{r}) &= 0, \\ m_{ij}^{(0)} u_j^{(1)}(\mathbf{r}) + k_p m_{ijp}^{(1)} u_j^{(0)}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Эти два уравнения можно составить из коэффициентов при $(k)^0$ и k . Теперь $m_{ij}^{(0)}$ — дифференциальный оператор, и, таким образом, можно записать

$$u_j^{(0)}(\mathbf{r}) = A_j, \quad (5.9)$$

где A_j зависит только от волнового числа. Подстановка $m_{ij}^{(0)}$ и $m_{ijp}^{(1)}$ из (5.6) и (5.3) во второе уравнение (5.8) дает

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[C_{ijklm}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_m} \right] u_i^{(1)}(\mathbf{r}) = -ik_m \left[\frac{\partial C_{ijklm}(\mathbf{r})}{\partial x_l} \right] A_l. \quad (5.10)$$

Из (5.2), (5.4) и (5.9) получим

$$u_i(\mathbf{r}, t) = [A_i + (ik)u_i^{(1)}(\mathbf{r}) + \dots] \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (5.11)$$

На основании (5.10) можно записать

$$u_i^{(1)} = \hat{u}_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) A_j, \quad (5.12)$$

где из (5.10) следует решение $\hat{u}_{ij}^{(1)}(\mathbf{r})$ в явном виде. Используя (5.12), запишем (5.11) в виде

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \left[\delta_{ij} + v_{ijl}^{(1)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_l} + \dots \right] A_j \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (5.13)$$

где

$$v_{ijl}^{(1)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_l} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = ik \hat{u}_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (5.14)$$

в направлении распространения волны.

Наконец, мы вплотную приблизились к установлению искомого фундаментального результата. Пусть

$$U_i(\mathbf{r}, t) = A_i \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (5.15)$$

Тогда (5.13) имеет вид

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \left[\delta_{ij} + v_{ijl}^{(1)}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_l} + \dots \right] U_j(\mathbf{r}, t). \quad (5.16)$$

Теперь применим синтез Фурье для нестационарного случая, записав (5.15) в виде

$$U_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_i(k) \exp[i(ky - \omega t)] dk, \quad (5.17)$$

где теперь y — направление распространения волны. Далее докажем, что уравнение для $U_i(\mathbf{r}, t)$ задается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U_i(y, t)}{\partial t^2} = \left(v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \dots \right) U_i(y, t). \quad (5.18)$$

Для доказательства подставим $U_i(\mathbf{r}, t)$ из (5.17) в (5.18):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} A_i(k) (-\omega^2) \exp[i(ky - \omega t)] dk = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} A_i(k) (-v_0^2 k^2 + \beta k^4 + \dots) \exp[i(ky - \omega t)] dk. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Соотношение (5.19) тождественно удовлетворяется при подстановке ω^2 из (5.5).

Таким образом, конечным результатом вывода являются выражения (5.16) и (5.18). Из (5.16) следует, что функция перемещения зависит от огибающей функции $U_i(\mathbf{r}, t)$, которая удовлетворяет уравнению (5.18), записанному для направления распространения волны. Параметры v_0 , β и другие в (5.18) должны быть определены в отдельности для каждого из трех возможных типов волн в любом заданном направлении. Для вывода выражений для тензоров напряжений и деформаций можно использо-

вать (5.16). Отметим, что функция $v_{ij}^{(1)}$ в (5.16) связана с $\hat{u}_{ij}^{(1)}$ в (5.14), которая в свою очередь выводится из (5.12). Однако это последнее уравнение в общем виде трудно решить при помощи способа, примененного в предыдущем разделе.

Для определения макроскопических эффектов используем огибающую функцию $U_i(\mathbf{r}, t)$. Это определение основано на синтезе Фурье для больших длин волн и учитывает эффекты дисперсии волны посредством введения параметра β в уравнение (5.18). Действительно, уравнение для огибающей функции $U_i(\mathbf{r}, t)$ (уравнение (5.18)) совпадает по форме с уравнением, которое было выведено в предыдущем разделе для задачи, рассматривающей слоистую среду частного вида. Однако уравнение (5.18) было выведено для трехмерно периодических гетерогенных сред общего вида. Далее, чтобы решить нестационарную задачу столь же общим способом, как и в предыдущем разделе, необходимо только определить v_0 и β для данного направления распространения волны и ее вида. Однако между общим решением в данном разделе и решением, полученным для распространения волны перпендикулярно плоскости укладки слоев, существует принципиальное различие. В последнем случае было найдено, что аппроксимация напряжения первыми членами разложения определяется из уравнения, подобного (5.18), т. е. локальное напряжение соответствует напряжению на макроуровне. А в общем решении, даже если учитывать только члены низших порядков в разложении, содержатся, как это можно показать, быстрые флуктуации переменных на микроуровне. Эта особенность связана с тем, что не все компоненты напряжения непрерывны на границах раздела фаз.

Представленная теория, учитывающая только два первых члена разложения (5.18), является простейшей теорией, которая описывает фундаментальные дисперсионные эффекты, связанные с гетерогенностью среды. В этом подходе, рассматривающем распространение длинных волн, мы не столкнулись в явном виде с отражениями и преломлениями волн на поверхностях раздела. Такие эффекты неявно учитываются при определении дисперсионных свойств среды. Однако, когда длина волны невелика по сравнению с характерным размером неоднородности, отражения волн следует учитывать в явном виде, и применение представленного подхода нецелесообразно. Решение задач подобного рода выходит за рамки нашего изложения. Следует, однако, отметить, что в случаях, когда неоднородности очень малы, рассмотренный подход для большой длины еще допускает учет эффектов в диапазоне частот $10^3 \div 10^6$ Гц. По этой причине во многих практических задачах частотный спектр волны по отношению к масштабу неоднородности таков, что допускает полное пренебрежение

дисперсионными эффектами, и волновая задача, по существу, сводится к уже рассмотренной в разд. 7.1 для эффективной однородной упругой среде.

7.6. ЗАТУХАНИЕ ВСЛЕДСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ СРЕДЫ

В предыдущих разделах главы был проанализирован эффект дисперсии при распространении волн в гетерогенных средах. В данном разделе будет рассмотрено совершенно иное явление — затухание.

Как обсуждалось в разд. 7.2, распространение гармонической волны в вязкоупругих средах сопровождается ее затуханием вследствие перехода механической энергии в тепловую. Однако в данном разделе мы будем иметь дело с распространением волн в гетерогенных упругих средах. Известно, что упругие среды представляют собой совершенно замкнутые системы. Тогда возникает вопрос: каким же образом эффект затухания может проявляться при сохранении в системе механической энергии? Ответ на него очень прост. В упругих средах общая механическая энергия сохраняется; однако может проявляться кажущееся затухание от некогерентного рассеяния на случайных неоднородностях. Таким образом, приходится иметь дело с описанием поведения гетерогенных сред нерегулярного типа. Случайная природа изменения свойств является главной причиной возникновения эффекта кажущегося затухания (далее для краткости просто эффекта затухания). В предыдущих разделах косвенно затрагивались эффекты рассеяния при изучении прохождения волны через периодически неоднородные среды. Однако в этом случае рассеянные волны оставались когерентными из-за периодичности среды, и, следовательно, эффект затухания не проявлялся.

Рассмотрим частную задачу о прохождении волн большой длины в упругой среде, содержащей малую объемную долю жестких сферических включений. Пусть включения распределены в среде хаотически, так что рассеянные волны некогерентны и энергия первичной гармонической волны уменьшается на величину рассеянной энергии. Приведенный расчет следует работе Муна и Моу [7.21], которые для оценки эффекта затухания использовали вместо прямого расчета метод теории смесей и вывели выражения рассеянной энергии из энергии первичной волны.

В рассматриваемой задаче малое объемное количество идеально жестких сферических частиц распределено произвольным образом в бесконечной упругой среде. Требование произвольного распределения следует из предположения о том, что вся рассеянная энергия отбирается у первичной волны. Несмотря на

то что содержание частиц в среде мало, их регулярная ориентация привела бы к тому, что рассеянные волны остались бы взаимно когерентными, усилили первичную волну и устранили эффект затухания. Примем, что длина гармонической во времени волны намного превышает среднее расстояние между частицами.

Эффект рассеяния

Вначале опишем в общих чертах задачу рассеяния для единичной частицы, как это сделано в работах Пао и Моу [7.22] и Моу [7.23]. Падающая гармоническая волна считается продольной. Обобщенное перемещение для волнового движения в упругой среде можно записать в сферических координатах в виде

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad (6.1)$$

где φ и ψ — скалярные потенциалы, удовлетворяющие волновому уравнению, \mathbf{e}_φ — единичный вектор, показанный на рис. 7.8. Падающая продольная волна определяется выражением

$$\varphi^I = \varphi_0 \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{v_L} - t \right) \right], \quad (6.2)$$

где v_L — продольная фазовая скорость и ω — частота. Решение для отраженной волны можно записать в виде

$$\varphi^R = \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(\alpha r) P_n(\cos \theta), \quad (6.3)$$

$$\psi^R = \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n(\beta r) P_n(\cos \theta).$$

где

$$\alpha = \omega/v_L, \quad \beta = \omega/v_T \quad (6.4)$$

с v_T , обозначающим скорость трансверсальной сдвиговой волны. Члены $P_n(\cos \theta)$ в (6.3) представляют собой полиномы Лежандра, а $h_n(\alpha r)$ и $h_n(\beta r)$ — сферические функции Бесселя. Коэффициенты A_n и B_n должны быть определены из граничных условий на поверхности жесткой сферы, т. е. из требования непрерывности перемещений: $u_r = U \cos \theta$, $u_\theta = -U \sin \theta$, где $U(t)$ — трансляционное перемещение сферы. Напряжение на поверхности сферы также должно быть связано с уравнением ее движения следующим образом:

$$\frac{4}{3} \rho_f \pi a^3 \frac{d^2 U}{dt^2} = 2\pi a^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) \sin \theta d\theta = F(t), \quad (6.5)$$

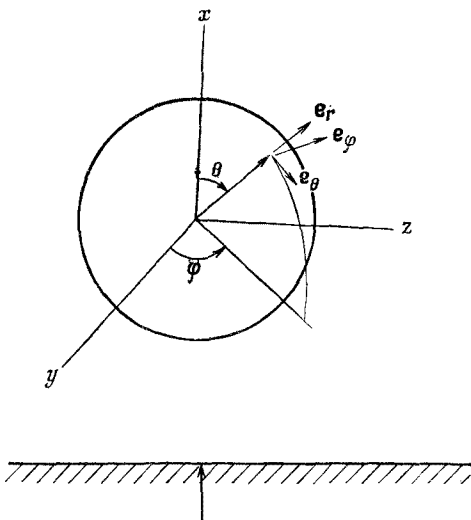


Рис. 7.8. Сферический рассеиватель. Стрелкой показано направление движения фронта гармонических волн.

где a — радиус и ρ_1 — плотность сферического включения. Силу $F(t)$, действующую на сферу, определим позднее. Перемещение сферы в рассматриваемой задаче должно быть гармоническим:

$$U(t) = \hat{U} \exp(i\omega t). \quad (6.6)$$

При условии большой длины волны $\alpha \ll 1$ и $\beta \ll 1$ в (6.4). Поэтому для удовлетворения граничных условий на жесткой сфере в (6.3) необходимо сохранить только члены с $n = 1$. Более того, при этом условии необходимо сохранить только первые члены в разложении сферических функций Бесселя в (6.3). Отсюда находим, что сила, действующая на сферу, выражается следующим образом:

$$F(\omega) = \frac{F(t)}{\exp(i\omega t)} = -\frac{\rho_M V_0}{\tau_0^2} \left\{ \frac{9[\hat{U}(\omega) - \hat{u}(\omega)]}{2\kappa^2 + 1} \left(1 - i\alpha \frac{2\kappa^3 + 1}{2\kappa^2 + 1} \right) - \alpha^2 f_1 \hat{U}(\omega) + \alpha^2 f_2 \hat{u}(\omega) \right\}, \quad (6.7)$$

где

$$f_1 = \frac{2 + 9\kappa + \kappa^2 + [18\kappa^3(\kappa + 2)] / [(2\kappa^2 + 1)^2] - [9\kappa(\kappa + 1)(2\kappa + 1)] / (2\kappa^2 + 1)}{2\kappa^2 + 1},$$

$$f_2 = \frac{9/2 + 9\kappa + 3\kappa^2 + [18\kappa^3(\kappa + 2)] / [(2\kappa^2 + 1)^2] - [9\kappa(\kappa + 1)(2\kappa + 1)] / (2\kappa^2 + 1)}{2\kappa^2 + 1}$$

и ρ_M — плотность окружающей частицу упругой среды, V_0 — объем включения, $u^I(x_i, t)$ — движение среды в точке с координатами включения при отсутствии последнего: $u^I = \hat{u} \exp(i\omega t)$; и, наконец, $\kappa = \beta/\alpha = v_L/v_T$, $\tau_0 = a/v_L$. Переменная u^I , конечно, обусловлена падающей волной φ^I в (6.2).

Теперь обратимся к случаю $\rho_I \gg \rho_M$, т. е. когда плотность материала включения намного больше плотности окружающей их среды (матрицы). При этом условии последними двумя членами в (6.7) можно пренебречь:

$$F(\omega) = \frac{-9\rho_M V_0}{\tau_0^2} \frac{\hat{U}(\omega) - \hat{u}(\omega)}{2\kappa^2 + 1} \left[1 - i\alpha \frac{2\kappa^3 + 1}{2\kappa^2 + 1} \right]. \quad (6.8)$$

Подставив (6.8) в уравнение движения (6.5) и записав результат через производные по времени, получим

$$\rho_I \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{9\rho_M (2\kappa^3 + 1)}{\tau_0 (2\kappa^2 + 1)^2} \left(\frac{dU}{dt} - \frac{du^I}{dt} \right) + \frac{9\rho_M}{\tau_0^2 (2\kappa^2 + 1)} (U - u^I) = 0. \quad (6.9)$$

Структура этого выражения очень интересна. Последний член характеризует упругую энергию, подобную энергии пружины, а скоростные члены в (6.9) описывают явление эффективной диссипации энергии из-за рассеяния энергии волны.

Основные соотношения теории смесей

Структура уравнения движения (6.9), как видно, такова, что поведение системы описывается теорией типа теории смесей. Тем самым движение системы сферическая частица — среда связано с движением каждой из фаз. В частности, были введены две переменные непрерывного поля перемещений $u_I(x, t)$ и $u_M(x, t)$, относящиеся соответственно к движению сферического включения и движению окружающей его матрицы. Переменная падающего поля u^I в (6.9) была связана с переменной материала матрицы $u_M(x, t)$ соотношением $u^I = u_M(x, t)$ и введено условие

$$U = u_I(x, t), \quad (6.10)$$

где индекс I обозначает включение. Разрешающее уравнение движения для включения (6.9) уже получено. Теперь следует найти соответствующее уравнение движения для матрицы. При этом для этого вариационный метод.

В частности, используем функцию Лагранжа

$$L = cL_I + T_M - V_M, \quad (6.11)$$

где c — объемная доля включений, а L_I — оператор Лагранжа, который дает соответствующие члены в уравнении движения (6.9), T_M и V_M — кинетическая и потенциальная энергии

матрицы. Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_I} - \frac{\partial L}{\partial u_I} + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_I} = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_M} - \frac{\partial L}{\partial u_M} + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_M} = 0, \quad (6.13)$$

где R — диссипативная функция (см. [7.24]). Используя соотношение

$$L_I = T_I - V_I, \quad (6.14)$$

где

$$T_I = \frac{1}{2} \rho_I \dot{u}_I^2, \quad V_I = \frac{9\rho_I (u_I - u_M)^2}{2\tau_0^2 (2\kappa^2 + 1)}, \quad (6.15)$$

$$R = - \frac{9\rho_I (2\kappa^2 + 1) (\dot{u}_I - \dot{u}_M)^2}{2\tau_0 (2\kappa^2 + 1)^2},$$

найдем, что (6.12), записанное для L_I , дает уравнение движения (6.9).

Теперь следует задать энергетические функции T_M и V_M для подстановки в функцию Лагранжа (6.11). Кинетическую энергию матрицы запишем в виде

$$T_M = \frac{1-c}{2} \rho_M \dot{u}_M^2. \quad (6.16)$$

Для того чтобы найти вид функции V_M , используем выражения эффективных модулей μ и k (II-2.23) и (II-2.26) системы с малым объемным содержанием сферических частиц. Эффективный модуль при малой объемной доле жестких включений записывается в виде

$$\lambda + 2\mu = (\lambda_M + 2\mu_M) \left[1 + \frac{3(3 - 5\nu_M)c}{4 - 5\nu_M} \right]. \quad (6.17)$$

Тогда выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$V_M = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_M}{\partial x} \right)^2,$$

где $\lambda + 2\mu$ то же, что и в (6.17).

Уравнения Лагранжа (6.12) и (6.13) с функцией Лагранжа и диссипативной функцией, определенными ранее, приводят к уравнениям движения в виде

$$\frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2} + 2\eta \left(\frac{\partial u_I}{\partial t} - \frac{\partial u_M}{\partial t} \right) + \Omega^2 (u_I - u_M) = 0, \quad (6.18)$$

$$\rho_M (1-c) \frac{\partial^2 u_M}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_M}{\partial x^2} = -\rho_I c \frac{\partial^2 u_I}{\partial t^2}, \quad (6.19)$$

где

$$\eta = \frac{9\rho_M(2\kappa^3 + 1)}{2\rho_I\tau_0(2\kappa^2 + 1)^2}, \quad \Omega^2 = \frac{9\rho_M}{\rho_I\tau_0^2(2\kappa^2 + 1)},$$

$\lambda + 2\mu$ задается выражением (6.17), $\kappa = v_L/v_T$ и $\tau_0 = a/v_L$. Член в правой части (6.19) характеризует эффективную объемную силу, возникающую вследствие движения включения и препятствующую движению матрицы.

Дисперсия и затухание

Теперь определим характеристики распространения гармонической волны в композитной среде, подчиняющейся уравнениям движения (6.18) и (6.19). Пусть

$$\begin{aligned} u_I(x, t) &= U_I \exp[i(\zeta x - \omega t)], \\ u_M(x, t) &= U_M \exp[i(\zeta x - \omega t)] \end{aligned} \quad (6.20)$$

и параметр ζ обязательно комплексный, так что

$$\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2. \quad (6.21)$$

Подстановка (6.20) в уравнения движения (6.18) и (6.19) приводит к системе однородных уравнений относительно U_I и U_M . Результирующее характеристическое уравнение дает решение для ζ в виде функции частоты ω . Найдено, что фазовая скорость $v = \omega/\zeta_1$ выражается в виде

$$v^2 = v_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \frac{c\rho_I}{\rho_{\text{MEAN}}} \right], \quad (6.22)$$

где

$$v_0^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_{\text{MEAN}}}, \quad \rho_{\text{MEAN}} = c\rho_I + (1 - c)\rho_M.$$

Соотношение (6.22) отражает дисперсионный эффект для зависимой от частоты скорости волны.

Найдено, что коэффициент затухания ζ_2 , который описывает ослабление волны в (6.20) через член $\exp(-\zeta_2 x)$, имеет вид

$$\zeta_2 = \frac{\rho_I}{\rho_{\text{MEAN}}} \left(\frac{\rho_I}{\rho_M} \right)^2 \frac{c}{2\omega_0} \frac{2\kappa^3 + 1}{9} \tau_0^3 \omega^4. \quad (6.23)$$

Это уравнение является основным результатом проделанного вывода. Используя его, можно оценить скорость затухания волн по мере их прохождения через среду с включениями. Зависимость от ω^4 есть не что иное, как *рассеяние Рэлея*.

Эффект затухания вызван исключительно рассеянием энергии на хаотически расположенных включениях. Мы смогли решить поставленную задачу полностью детерминистически, даже

с учетом хаотического расположения частиц. Этот результат предполагает возможность исследования в статистической постановке сред с произвольной структурой. В этом направлении выполнено много работ. Установлено, что эффект затухания волны можно исследовать, используя только статистический подход. В данном разделе это направление не было затронуто. Назовем лишь хорошо известную работу Карала и Келлера [7.25]. Другие подходы к решению рассмотренной задачи предложены в работах Мак-Коя [7.26] и Кристенсена [7.27].

7.7. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СМЕСЕЙ. ЗАДАЧА О ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КОЛОННАХ С «КИПЯЩИМ» СЛОЕМ

Теперь посмотрим, как гетерогенную среду, состоящую из жестких частиц, диспергированных в непрерывной упругой фазе, можно идеализировать в виде системы с взаимопроникающими фазами. Анализ этой системы дает пример практического применения теории смесей. В данном разделе используем эту теорию для исследования поведения суспензии.

Описание множества различных вариантов теорий смесей, предложенных в разное время, не является нашей целью. Типичные обобщенные теории предложены в работах Грина и Нахди [7.28], Боуэна и Гарсио [7.29], Ингрема и Эрингена [7.30]. Теории смесей применительно только к композитам разрабатывались Бедфордом и Стерном [7.14] и Тирстеном и Яхамиром [7.15]. Заметим лишь, что обобщенная формулировка теорий смесей включает в себя большое количество свойств и параметров взаимодействия. Например, в работе [7.15] для линейного случая анизотропии общего вида учтена 171 независимая константа материала. Трансверсальная изотропия среды предполагает наличие 20, а изотропия 8 констант. Определение свойств материала в теории смесей является центральной проблемой. Наибольший прогресс в этом направлении был, по-видимому, достигнут при использовании теории смесей для анализа поведения не твердых, а жидких систем. Пример, который будет далее рассмотрен, показывает полезность обобщенного подхода, развиваемого в данном разделе.

Будем рассматривать устойчивость «кипящего» слоя. Многие химические процессы осуществляются в среде, находящейся в так называемом псевдооживленном, или «кипящем», состоянии, когда жесткие частицы диспергированы в восходящем потоке (жидкости или газа) и вес частиц в потоке уравновешивается силой лобового сопротивления набегающему потоку. Оценка ус-

тойчивости взвешенного состояния диспергированных частиц представляет собой проблему довольно общего характера. Для анализа поведения псевдооживленного слоя применим критерий устойчивости по отношению к проходящей волне.

Анализ, приведенный ниже, полностью следует работе Андерсона и Джексона [7.31]. Приведем только формулировку теории смесей, которая предложена этими авторами в более ранней работе [7.32]. Как видно из предыдущего раздела, теория смесей идеализирует континуум так, что все фазы совместно находятся во всех материальных точках пространства. Таким образом, каждая фаза представляется как бы полностью непрерывной, а в многофазной среде возникают эффекты взаимодействия, компенсирующие кинематическое стеснение.

Изложим теперь теорию смесей, разработанную в [7.32] для задачи о псевдооживленном слое. Уравнение неразрывности жидкой фазы имеет вид

$$\dot{c}_f + (c_f u_k)_{,k} = 0, \quad (7.1)$$

где c_f — объемная доля жидкой фазы, u_k — скорость потока и точкой обозначена частная производная по времени. Уравнение неразрывности фазы частиц имеет вид

$$\dot{c}_p + (c_p v_k)_{,k} = 0, \quad (7.2)$$

где c_p — объемная доля фазы частиц, v_k — скорость фазы частиц и

$$c_f + c_p = 1. \quad (7.3)$$

Два векторных уравнения движения записываются в следующем виде:

$$\rho_f (\dot{u}_i + u_j u_{i,j}) = \sigma_{ij}^{(f)} - \frac{f_i}{c_f} + \rho_f g_i, \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_p c_p (\dot{v}_i + v_j v_{i,j}) - \rho_f c_f (\dot{u}_i + u_k u_{i,k}) = \\ = \frac{f_i}{c_f} + c_p (\rho_p - \rho_f) g_i + \sigma_{ij}^{(p)}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где g_i — сила тяжести на единицу массы, ρ_f и ρ_p — плотности, $\sigma_{ij}^{(f)}$ и $\sigma_{ij}^{(p)}$ — тензоры парциальных напряжений для жидкой фазы и фазы частиц соответственно, а f_i соответствует силе взаимодействия между жидкостью и частицами.

Члены f_i , $\sigma_{ij}^{(f)}$ и $\sigma_{ij}^{(p)}$ определяются из следующих уравнений состояния:

$$f_i = c_f \beta (u_i - v_i) + c_p C \rho_f \frac{d}{dt} (u_i - v_i), \quad (7.6)$$

$$\sigma_{ij}^{(f)} = -p \delta_{ij} + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i} - 2/3 u_{k,k} \delta_{ij}), \quad (7.7)$$

$$\sigma_{ij}^{(p)} = p' \delta_{ij} + \lambda' v_{k,k} \delta_{ij} + \mu' (v_{i,j} + v_{j,i} - 2/3 v_{k,k} \delta_{ij}), \quad (7.8)$$

где β — коэффициент лобового сопротивления частиц, S отражает массовый эффект и называется *виртуальным массовым коэффициентом*, λ , μ , λ' и μ' — объемные и сдвиговые вязкости, соответствующие двум фазам системы. Все перечисленные коэффициенты являются функциями объемного содержания каждой фазы. Символами p и p' обозначены реактивные давления в двух фазах. Читателя не должен смущать тот факт, что с фазой жестких частиц связаны такие характеристики, как вязкости λ' и μ' . Эти величины характеризуют эффекты взаимодействия в системе с парциальным напряжением $\sigma_{ij}^{(p)}$.

Разрешающие уравнения (7.4) — (7.6) по форме очень схожи с уравнениями, выведенными в предыдущем разделе для упругой среды со сферическими включениями. В основном различие обнаруживается в двух аспектах. Во-первых, вместо перемещений в качестве полевых переменных следует использовать скорости, и, во-вторых, объемные доли фаз в рассматриваемом случае не являются заданными, а приняты в качестве основных переменных. Уравнения (7.4) — (7.6) можно использовать для нахождения объемной доли частиц c_p как функции скорости стационарного потока. Предположим, что это уже сделано. В выводах, приведенных в [7.29], член, описывающий относительное ускорение в (7.6), записывается в виде

$$\frac{d}{dt}(u_i - v_i) = (\dot{u}_i + u_j u_{t,j}) - (\dot{v}_i + v_j v_{t,j}). \quad (7.9)$$

Устойчивость стационарного потока исследовалась путем введения малого гармонического волнового возмущения. Далее определим, затухает или нет это возмущение во времени. Для этой задачи приняты следующие полевые переменные:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= i\mathbf{u}_0 + \hat{\mathbf{u}}e^{st}e^{ikx}, & \mathbf{v} &= \hat{\mathbf{v}}e^{st}e^{ikx}, \\ c_f &= c_0 + \hat{c}e^{st}e^{ikx}, & p &= p_0 + \hat{p}e^{st}e^{ikx}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где направления x и единичного вектора \hat{i} совпадают с направлением движения потока с характеристиками стационарного состояния u_0 , c_0 и p_0 . Волновое возмущение имеет вид плоской волны с действительным волновым числом $k = 2\pi/\lambda$, обратно пропорциональным длине волны λ , распространяющейся в направлении x . Искомый параметр s в (7.10) определяет характеристики устойчивости системы. Считается, что давление фазы частиц p' есть заданная функция объемного содержания одной из фаз c_p или c_f . Соотношения (7.10) подставляются в уравнения (7.1), (7.2), (7.4), (7.5) с учетом (7.6) — (7.8). Полученные в результате восемь уравнений линеаризуются с использованием малости параметров возмущения $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{v}}$, \hat{c} и \hat{p} . Эта система восьми уравне-

ний однородна и, следовательно, позволяет найти s через характеристическое уравнение.

В работе [7.31] отмечено, что, исключив последовательно переменные, указанную систему восьми уравнений можно свести к одному уравнению относительно \hat{c} :

$$\hat{c} [As^2 + (B + dD + i2bF)s + (eD - b^2F + ibBE)] = 0, \quad (7.11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{c_f}{c_p} + \frac{C}{c_f c_p}, & B &= \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_f} \frac{c_f}{c_p} \frac{g}{\bar{u}}, \\ E &= 1 - 2c_f + c_f \frac{\beta'}{\beta}, & D &= \frac{\rho_p}{\rho_f} \frac{c_f}{c_p}, \\ F &= 1 + \frac{C}{c_f}, & b &= \frac{\bar{u}k}{c_f}, \\ d &= \frac{\lambda' + 4/3\mu'}{\rho_p c_p} k^2, & e &= \frac{\bar{p}}{\rho_p c_p} k^2, \end{aligned} \quad (7.12)$$

и

$$\bar{u} = c_f u_0, \quad \beta' = \frac{-v}{n} \frac{\partial \beta}{\partial c_f}, \quad \bar{p} = \frac{-v}{n} \frac{\partial p'}{\partial c_f}, \quad (7.13)$$

n — число частиц в единице объема и v — объем частицы. Все переменные в (7.12) и (7.13) вычислены при установившейся скорости потока u_0 и соответствующих объемных долях каждой фазы.

Корни уравнения (7.11) имеют вид

$$s = \xi \pm i\eta, \quad (7.14)$$

где действительная часть задается выражением

$$\xi = \frac{B}{2A} \left\{ - \left(1 + \frac{Dd}{B} \right) \pm \sqrt{\frac{[(1 + \omega)^2 + q^2]^{1/2} + (1 + \omega)}{2}} \right\}, \quad (7.15)$$

а мнимая — выражением

$$\eta = \frac{B}{2A} \left\{ \frac{2Fb}{B} \pm \sqrt{\frac{[(1 + \omega)^2 + q^2]^{1/2} - (1 + \omega)}{2}} \right\}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \frac{dD}{B} + \left(\frac{dD}{B} \right)^2 + 4 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left[F(A - F) - \frac{ADe}{b^2} \right], \\ q &= 4 \frac{b}{B} \left(AE - F - \frac{FDd}{B} \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Знак минус дает отрицательное значение ξ и, таким образом, соответствует затухающему во времени возмущению. Следовательно, с точки зрения анализа устойчивости интерес представляет

только положительный знак в (7.15). Хотя ξ в (7.14) и в формуле возмущения (7.10) определяет усиление или ослабление возмущения во времени, параметр η в (7.14), будучи подставлен в (7.10), дает скорость возмущения как η/k .

Параметр устойчивости ξ и скорость возмущения η/k из (7.15) должны в общем случае определяться численно. Однако, когда длина волны стремится к нулю или к бесконечности, предельные значения ξ и η можно рассчитать из аналитических зависимостей. На основании (7.15) и (7.12) получено

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} \xi &\rightarrow \frac{\bar{u}^2 k^2}{c_f^2 B} \left[AE^2 + F(1 - 2E) + \frac{De}{b^2} \right] = 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\eta}{k} &\rightarrow \frac{\bar{u}}{c_f} E, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \xi &\rightarrow \frac{\bar{u}^2 \rho_p c_p}{c_f^2 (\lambda' + \frac{1}{3}\mu')} D \left(F - \frac{De}{b^2} \right), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\eta}{k} &\rightarrow \frac{2\bar{u}F}{c_f A}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где отношение e/b^2 из (7.12) не зависит от волнового числа. Мы видим, таким образом, что для возмущений с очень большой длиной волны скорость прироста возмущения стремится к нулю, а скорость его распространения — к постоянному предельному значению. Для очень малых длин волн и скорость прироста, и скорость распространения возмущения приближаются к постоянным предельным значениям.

Андерсон и Джексон [7.31] определили точные значения или оценки всех коэффициентов, характеризующих свойства для проведения расчетов. Они установили, что в исследованных диапазонах возмущение всегда неустойчиво. Однако для типичных систем жидкость — взвешенные в потоке твердые частицы параметр устойчивости возмущения столь мал, что возмущение должно пройти большое расстояние прежде, чем достигнет значительной величины. Поэтому, если принять во внимание размеры аппаратов, применяемых в химической промышленности, оценка неустойчивости таких систем не имеет практического значения.

Иначе обстоит дело с системами газ — взвешенные в потоке твердые частицы («кипящий» слой). В [7.31] показано, что возмущение в таких системах возрастает почти в сто раз быстрее, чем в системах с жидкой фазой. Оценки предельной неустойчивости «кипящего» слоя находятся в соответствии с опытом эксплуатации промышленных установок. Возможность получения таких оценок свидетельствует о значительном успехе в применении теории смесей.

Рассмотренная в данном разделе теория смесей была далее развита Медлином, Уонгом и Джексонсом [7.33] и Медлином и Джексонсом [7.34] для изучения неустойчивости кипящего слоя конечной высоты и других эффектов. В этих работах показано, что конвективные неустойчивости могут развиваться в виде циркуляционного движения.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что скорость распространения короткой волны v_{TRANS}^M (уравнение (2.5)) больше, чем скорость длинной волны v_{TRANS} (уравнение (2.2)).
2. Используя формулы отражения и прохождения волны (2.12), выведите следующее выражение для отражения от второй поверхности раздела после прохождения волны через две поверхности в двухфазной периодически слоистой среде:

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_I} = \frac{2\sqrt{\rho_1 G_1}(\sqrt{\rho_2 G_2} - \sqrt{\rho_1 G_1})}{(\sqrt{\rho_1 G_1} + \sqrt{\rho_2 G_2})^2}.$$

3. Выведите выражения для v_0 и α в разложении скорости волны в ряд

$$v = v_0 + \frac{\alpha}{2} \omega^2 + \dots$$

из уравнения дисперсии (3.13).

4. Выведите выражение (4.31) для члена β в разложении

$$\omega^2(k) = v_0^2 k^2 - \beta k^4 + \dots$$

5. Обсудите экспериментальную процедуру, с помощью которой можно непосредственно определить коэффициент β в разложении, приведенном в предыдущей задаче. Какое оборудование для этого потребуется?
6. Как можно получить оценку скорости волны очень большой длины v_0 в упругой среде с жесткими сферическими включениями одинакового размера при их кубической упаковке? Является ли такая среда макроскопически изотропной?
7. Дайте численную оценку решения для распространения импульса (4.28), чтобы показать, как меняется форма импульса по мере его распространения. Выберите сами численные значения для различных членов, входящих в выражение, таким образом, как будто бы они представляют реальную задачу.
8. Опишите в общих чертах метод, позволяющий вывести формулу, характеризующую эффект затухания (рассмотренный в разд. 7.6), без применения соотношений теории смесей, приведенных в данном разделе.

ЛИТЕРАТУРА

- 7.1. Рытов С. М. Акустические свойства мелкослоистой среды. — Акуст. журнал, 1956, т. 2, вып. 1, с. 71—80.
- 7.2. Sun C.-T., Achenbach J. D., Herrmann G. Continuum theory for a laminated medium. — J. Appl. Mech., 1968, v. 35, p. 467. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1968, № 3, с. 38.]

- 7.3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973, 344 с.
- 7.4. Sve S. Time-harmonic waves traveling obliquely in a periodically laminated medium. — *J. Appl. Mech.*, 1971, v. 38, p. 477. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1971, № 2, с. 182.]
- 7.5. Brillouin L. *Wave Propagation in Periodic Structures*. — New York: Dover, 1963.
- 7.6. Kohn W. Propagation of low-frequency elastic disturbances in a composite material. — *J. Appl. Mech.*, 1974, v. 41, p. 97.
- 7.7. Peck J. C., Gurtman G. A. Dispersive pulse propagation parallel to the interfaces of a laminated composite. — *J. Appl. Mech.*, 1969, v. 36, p. 479. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1969, № 3, с. 102.]
- 7.8. Whittier J. S., Peck J. C. Experiments on dispersive pulse propagation in laminated composites and comparison with theory. — *J. Appl. Mech.*, 1969, v. 36, p. 485. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1969, № 3, с. 108.]
- 7.9. Drumheller D. S., Bedford A. Wave propagation in elastic laminates using a second-order microstructure theory. — *Int. J. Solids and Structures*, 1974, v. 10, p. 61.
- 7.10. Bedford A., Drumheller D. S. The propagation of stress waves into a laminated half space using a second-order microstructure theory. — *Int. J. Solids and Structures*, 1975, v. 11, p. 841.
- 7.11. Achenbach J. D. *A theory of Elasticity with Microstructure for Directionally Reinforced composites*. — New York: Springer-Verlag, 1975.
- 7.12. Hegemeier G. A., Nayfeh A. N. A continuum theory for wave propagation in laminated composites. Case 1: Propagation normal to the laminates. — *J. Appl. Mech.*, 1973, v. 40, p. 503. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1973, № 2, с. 189.]
- 7.13. Ben-Amoz M. On wave propagation in laminated composites. — I. — Propagation parallel to the laminates. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1975, v. 13, p. 43.
- 7.14. Bedford A., Stern M. A multi-continuum theory for composite elastic materials. — *Acta Mech.*, 1972, v. 14, p. 85.
- 7.15. Tiersten H. F., Jahanmir M. A theory of composites modeled as interpenetrating solid continua. — *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 1977, v. 65, p. 154.
- 7.16. Nemat-Nasser S., Minagawa S. Harmonic waves in layered composites: comparison among several schemes. — *J. Appl. Mech.*, 1975, v. 42, p. 699.
- 7.17. Mukherjee S., Lee E. H. Dispersion relations and mode shapes for waves in laminated viscoelastic composites by variational methods. — *Int. J. Solids and Structures*, 1978, v. 14, p. 1.
- 7.18. Achenbach J. D. Waves and vibrations in directionally reinforced composite. — In: *Composite Materials*, v. 2 (G. P. Sendeckyj, ed.). — New York: Academic, 1974. [Имеется перевод: Ахенбах Дж. Д. Колебания и волны в направленно армированных композитах. — В кн.: Композиционные материалы, т. 2/Под ред. Дж. Сендецкого. — М.: Мир, 1978, с. 354—400.]
- 7.19. Moon F. C. Wave propagation and impact in composite materials. — In: *Composite Materials*, v. 7 (C. C. Chamis, ed.). — New York: Academic, 1974. [Имеется перевод: Мун Ф. Удар и распространение волн в композиционных материалах. — В кн.: Композиционные материалы, т. 7, ч. 1/Под ред. К. К. Чамиса. — М.: Машиностроение, 1978, с. 264—334.]
- 7.20. Kohn W. Propagation of low frequency elastic disturbances in a three-dimensional composite material. — *J. Appl. Mech.*, 1975, v. 42, p. 159.
- 7.21. Moon F. C., Mow C. C. Wave propagation in a composite material containing dispersed rigid spherical inclusions. — *Rand Corporation Report RM-6139-PR*, 1970.
- 7.22. Pao Y. H., Mow C. C. Scattering of plane compressional waves by a spherical obstacle. — *J. Appl. Phys.*, 1963, v. 34, p. 493.
- 7.23. Mow C. C. Transient response of a rigid spherical inclusion in an elastic medium. — *J. Appl. Mech.*, 1965, v. 32, p. 637.

- 7.24. Goldstein H. *Classical Mechanics*. — Addison-Wesley: Reading, Mass., 1959. [Имеется перевод Гольдштейн Г. *Классическая механика*, 2-е изд. — М.: Наука, 1975.]
- 7.25. Karal F. C., Keller J. B. Elastic, electromagnetic and other waves in a random medium. — *J. Math. Phys.*, 1964, v. 5, p. 537.
- 7.26. McCoy J. J. On the dynamic response of disordered composites. — *J. Appl. Mech.*, 1973, v. 40, p. 511. [Имеется перевод: *Прикладная механика*, — М.: Мир, 1973, № 2, с. 197.]
- 7.27. Christensen R. M. Wave propagation in layered elastic media. — *J. Appl. Mech.*, 1975, v. 42, p. 153.
- 7.28. Green A. E., Naghdi P. M. On basic equations for mixtures. — *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1969, v. 22, p. 427.
- 7.29. Bowen R. M., Garcia D. J. On the thermodynamics of mixtures with several temperatures — *Int. J. Eng. Sci.*, 1970, v. 8, p. 63.
- 7.30. Ingram J. D., Eringen A. C. A continuum theory of chemically reacting media. — II. Constitutive equations of reacting fluid mixtures. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1967, v. 5, p. 289.
- 7.31. Anderson T. B., Jackson R. Fluid mechanical description of fluidized beds. — *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1968, v. 7, p. 12.
- 7.32. Anderson T. B., Jackson R. A Fluid mechanical description of fluidized beds. — *Ind Eng. Chem Fundam.*, 1967, v. 6, p. 527.
- 7.33. Medlin J., Wong H.-W., Jackson R. Fluid mechanical description of fluidized beds. Convective instabilities in bounded beds. — *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1974, v. 13, p. 247.
- 7.34. Medlin J., Jackson R. Fluid mechanical description of fluidized beds. The effects of distribution thickness on convective instabilities. — *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, 1975, v. 14, p. 315.

НЕУПРУГИЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ

В предыдущих главах книги для описания свойств композитов применялась линейная теория упругости. Везде, за исключением последнего раздела гл. VII, относящегося к теории смесей, задачи рассмотрены исключительно в линейно-упругой постановке. Выбор теории упругости отражает не только ее значение как основополагающей теории, но и полезность как средства развития методов проектирования конструкций. Однако отнюдь не все конструкционные гетерогенные материалы можно описывать с позиций линейной теории упругости. Поведение элементов конструкций из композитов часто характеризуется *физической* или *геометрической нелинейностью*. Более того, многие композиты обладают существенно неупругими свойствами. В данной главе обсуждаются некоторые случаи подобного поведения.

Обычно рассматриваются следующие основные состояния материала: упругость, вязкоупругость и невязкая пластичность. Применение теории невязкой пластичности, как правило, наиболее оправданно для металлов, находящихся в состоянии пластического течения. В связи с широким использованием композитов на основе металлической матрицы или арматуры затронем некоторые проблемы, относящиеся к описанию подобных материалов. В частности, это задача о деформации системы волокон в металлической матрице, поведение которой подчиняется законам теории пластичности, и задача о разрушении пористого материала на основе металлической матрицы.

Теория вязкоупругости используется для описания механического поведения полимеров в области температур выше температуры стеклования. Все полимеры проявляют эффекты вязкоупругости, учет которых может быть важен во многих практических ситуациях. Так как полимеры часто применяются в качестве компонентов, то стоит рассмотреть и некоторые аспекты вязкоупругого поведения. Завершается глава анализом задач, для которых характерны произвольно большие деформации.

8.1. ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОРИСТЫХ СРЕД

Рассмотрим поведение пористого, типа вспененного, материала под действием гидростатического давления, вызывающего уменьшение объема пор. Если материал упругий, то для расчета эффективного объемного модуля k можно воспользоваться решением, полученным при помощи полидисперсной модели среды со сферическими включениями. Если включение представляет собой сферическую полость (пору), то из (II-3.17) получим решение для k в виде

$$k = k_M - \frac{ck_M}{1 - (1-c)k_M/(k_M + 4/3\mu_M)} \quad (1.1)$$

где c — доля объема, занимаемая порами, и k_M и μ_M — упругие модули материала матрицы. Эта формула, описывающая сжимаемость пористой среды, справедлива только в условиях малых деформаций по отношению к начальному состоянию.

Нас интересует состояние пористой среды в условиях больших деформаций, при которых, как это установлено экспериментально, значительная часть пор закрывается и можно ожидать, что большую роль сыграет нелинейность материала. Будем, в частности, рассматривать упруго-идеально-пластическое поведение, т. е. поведение, определяющееся уравнениями невязкой пластичности. Обратимся к полидисперсной модели среды со сферическими включениями из разд. 2.3 и представим материал с изолированными порами как материал с единичной пустотелой сферой. Приведенный анализ следует анализу Кэрролла и Холта [8.1].

Рассмотрим пустотелую сферу, имеющую, как показано на рис. 8.1, начальные внутренний a_0 и наружный b_0 радиусы. К внешней поверхности сферы прикладывается монотонно возрастающее давление p . Материал сферы изотропный упруго-идеально-пластический с модулем сдвига μ . Кроме того, будем считать, что материал несжимаем как упруго, так и пластически и что условия достижения предельного состояния определяются критерием текучести Мизеса и Треска.

Предположение о несжимаемости значительно упрощает решение. Так как задача сферически симметрична, деформацию можно определить в виде

$$r^3 = r_0^3 - B, \quad (1.2)$$

где r_0 — начальное положение некоторой материальной точки и r — ее положение после деформации при условии сохранения объема. Параметр B можно связать с пористостью, которая

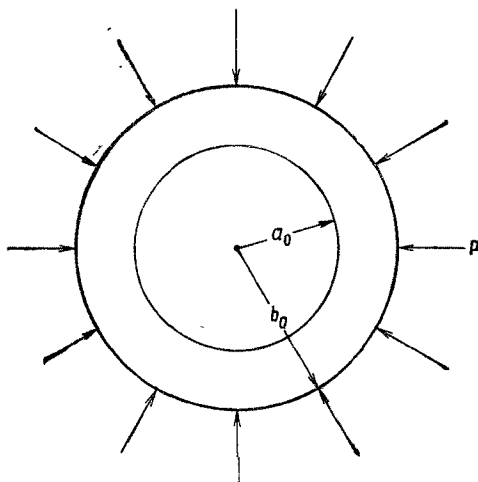


Рис. 8.1. Сферическая ячейка.

определяется следующим образом:

$$\alpha = \frac{b^3}{b^3 - a^3}, \quad (1.3)$$

где a и b — внутренний и наружный радиусы сферы после деформации, а начальная пористость имеет вид

$$\alpha_0 = \frac{b_0^3}{b_0^3 - a_0^3}. \quad (1.4)$$

Из (1.2) — (1.4) получим

$$a^3 = a_0^3 \frac{\alpha - 1}{\alpha_0 - 1}, \quad b^3 = \frac{a_0^3 \alpha}{\alpha_0 - 1}, \quad (1.5)$$

$$B = a_0^3 \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0 - 1}.$$

При нагружении материал вначале ведет себя линейно-упруго, поэтому проведем расчет для начальной области деформирования. Девиаторные напряжения имеют вид

$$s_{rr} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4\mu B}{3r^3}, \quad (1.6)$$

$$s_{\theta\theta} = s_{\varphi\varphi} = 2\mu \frac{u}{r} = -\frac{2\mu B}{3r^3},$$

где u — бесконечно малое радиальное перемещение. Тогда суммарные напряжения выражаются соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma(r) + \frac{4\mu B}{3r^3}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma(r) - \frac{2\mu B}{3r^3},\end{aligned}\quad (1.7)$$

где σ — член, отражающий действие гидростатического напряжения.

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad (1.8)$$

а граничные условия

$$\begin{aligned}\text{при } r=a \quad \sigma_{rr} &= 0, \\ \text{при } r=b \quad \sigma_{rr} &= -p.\end{aligned}\quad (1.9)$$

Подставляя (1.7) в (1.8), интегрируя, удовлетворяя граничным условиям и, наконец, используя выражение для B из (1.5), получим

$$p = \frac{4\mu(\alpha_0 - \alpha)}{3\alpha(\alpha - 1)}. \quad (1.10)$$

Хотя соотношения напряжение — деформация соответствуют линейной теории упругости, граничные условия рассматриваемой задачи удовлетворяются на границах деформированного тела (1.9).

Решение (1.10) применимо до предела текучести, который достигается в некоторой точке среды. Функция текучести записывается в виде

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k, \quad (1.11)$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге. Можно показать, что действующее напряжение достигает предела текучести вначале на внутренней поверхности сферы при следующем значении пористости:

$$\alpha_1 = \frac{\mu\alpha_0 + k}{\mu + k}. \quad (1.12)$$

При дальнейшем нагружении за пределом текучести в материале будут существовать две области: пластическая и упругая. Граница раздела упругой и пластической областей движется к наружной поверхности с ростом нагрузки. Положим, что радиус границы раздела между упругой и пластической областями равен d . Тогда уравнение равновесия в пластической области имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{4k}{r} = 0. \quad (1.13)$$

Это уравнение интегрируется, причем константа интегрирования определяется из граничных условий на внутреннем радиусе. На границе раздела получим

$$\sigma_{rr}|_{r=d}^p = -4k \ln \frac{d}{a}. \quad (1.14)$$

В упругой области решение, удовлетворяющее граничным условиям на внешнем радиусе, имеет вид

$$\sigma_{rr}|_{r=d}^e = -p + \frac{4\mu B}{3} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{b^3} \right). \quad (1.15)$$

На границе раздела упругой и пластической областей $r = d$ упругое решение также должно удовлетворять условию текучести, что приводит к соотношению

$$\mu B/d^3 = k. \quad (1.16)$$

Исключая $\sigma_{rr}|_{r=d}$ и d из (1.14)–(1.16) и используя (1.15), получим

$$p = \frac{4}{3} \left[\mu + k - \frac{\mu \alpha_0}{\alpha} + k \ln \frac{\mu (\alpha_0 - \alpha)}{k (\alpha - 1)} \right]. \quad (1.17)$$

Эта формула применима вплоть до момента, когда упругопластическая граница раздела достигает наружной поверхности, т. е. до $d = b$. При этом из (1.5) и (1.6) получим значение пористости

$$\alpha_2 = \frac{\mu \alpha_0}{\mu + k}. \quad (1.18)$$

Когда граница раздела между упругой и пластической областями достигает наружной поверхности, сфера будет полностью находиться в пластическом состоянии.

Далее получим решение для полностью пластического состояния полый сферы. Из решения уравнения равновесия (1.13) и удовлетворения граничных условий (1.9) следует

$$p = 4k \ln \frac{b}{a}, \quad (1.19)$$

или после подстановки (1.5)

$$p = \frac{4k}{3} \ln \frac{\alpha}{\alpha - 1}. \quad (1.20)$$

Это решение не зависит, как видно, от начальной пористости α_0 .

Полное решение задачи в виде соотношения давление — пористость представлено выражениями (1.10), (1.17) и (1.20) и значениями параметров в точках перехода между решениями при пористости, определяемой из (1.12) и (1.18). Давления, соответствующие точкам перехода, определяются следующим образом:

$$p_1 = \frac{k}{3\alpha_1}, \quad p_2 = \frac{k}{3} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1}. \quad (1.21)$$

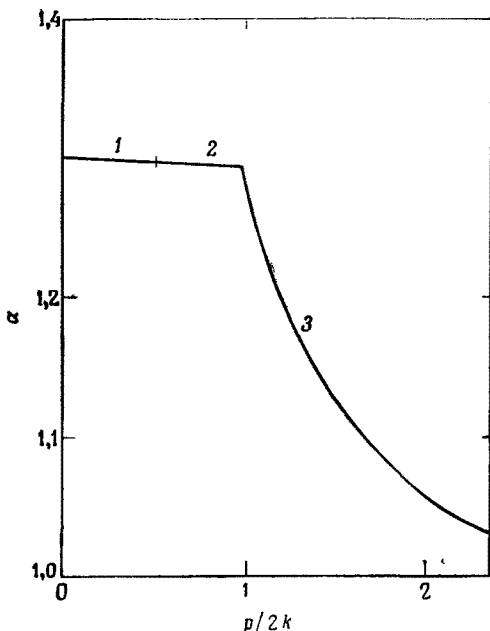


Рис. 8.2. Диаграмма, характеризующая смыкание ячеек при действии гидростатического давления; пористый алюминий; $k/\mu = 3/496$. Цифрами обозначены области: 1 — упругая, 2 — упругопластическая, 3 — пластическая; α — пористость; $p/2k$ — давление.

На рис. 8.2 показаны кривые пористость — давление для алюминия при начальной пористости около 1,30. Из рисунка видно, что при деформировании в пластической области практически завершается смыкание пор. Приведенное решение, очевидно, будет справедливо до тех пор, пока закрытие пор не уплотнит материал до такой степени, что станут важными эффекты сжимаемости матрицы. Учет сжимаемости и динамических эффектов сделан в работе Батчера, Кэрролла и Холта [8.2]. Наиболее ранняя работа в этом направлении выполнена Чедвиком [8.3]. В связи с рассматриваемой задачей можно упомянуть также работу Чу и Хашина [8.4].

Метод расчета, использующий теорию невязкой пластичности, хорошо подходит для решения задачи о закрытии пор при действии на материал гидростатического давления. Однако при других напряженных состояниях, например при сдвиге, возможен изгиб и выпучивание стенок пор, особенно при больших объемных долях пор. Для решения таких задач необходимы специальные

методы. Более того, даже в данной задаче неустойчивость в процессе пластического деформирования может сыграть важную роль для материала с тонкостенными ячейками.

8.2. ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛОКНИСТЫХ СРЕД

Волокнистые композиты часто изготавливаются на основе металлической матрицы. Использование металла связано со значительным проигрышем в весе по сравнению с полимерной матрицей, однако оно имеет некоторые другие преимущества. Главное преимущество металлической матрицы заключается в ее высокой термостойкости по сравнению с большинством полимеров. Механическое поведение композитов с металлической матрицей существенно отличается от механического поведения композитов на основе полимерной матрицы. Разберем одну фундаментальную задачу, которая прояснит эти различия.

Интересующая нас задача относится к поведению однонаправленного волокнистого композита на основе металлической матрицы при нагружении в направлении волокон. Обратимся к полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями из разд. 3.2, в которой композит моделируется единичным составным цилиндром. Рассмотрим такой цилиндр, образованный упругим волокном, внедренным в концентрический цилиндр из материала, поведение которого описывается уравнениями теории невязкой пластичности. Будем рассматривать только осесимметричные деформированные состояния; таким образом, допустимы осевое растяжение, сопровождающееся сокращением в поперечном направлении, или деформированное состояние, вызванное давлением, приложенным по боковой поверхности. В частности, попытаемся связать поведение композита со свойствами его компонентов. Такой же целью мы в основном руководствовались, анализируя поведение композитов в упругой постановке. Решение задачи с учетом пластического поведения будет, как мы увидим ниже, намного сложнее. Тем не менее удастся получить некоторые значительные результаты, используя подход, разработанный Двораком и Рао [8.5].

Будем действовать таким же образом, как и в предыдущем разделе: решим краевые задачи и проследим за развитием отдельных областей — упругой и пластической. Однако примененный в данном случае более общий метод и позволит получить намного более общие результаты. Пусть матрица является упруго-идеально-пластической, а функция текучести определяется критерием Мизеса. Это приводит к тому, что композит в целом описывается как пластическое упрочняющееся тело.

Функция текучести

Как обычно, положим, что координата x_1 совпадает с направлением волокон. Обозначим средние действующие на композит напряжения в декартовой системе координат через σ_{ij} . Инварианты напряжения применительно к трансверсальной изотропии имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11}, & I_2 &= 1/2 (\sigma_{22} + \sigma_{33}), & I_3 &= \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2, \\ I_4 &= 1/2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2\sigma_{23}^2, \\ I_5 &= 1/2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})(\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2) + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Начальная функция текучести составного цилиндра определяется тогда в следующем виде:

$$f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = 0.$$

В процессе нагружения от исходного состояния матрица деформируется совершенно упруго вплоть до достижения максимальным напряжением предела текучести. Течение обычно начинается на границе волокно — матрица, так же как и в задаче из предыдущего раздела, в которой течение начиналось на внутренней поверхности сферической оболочки. Предполагается, что пластическая область в матрице является цилиндрической, а ее внутренняя граница совпадает с границей раздела фаз волокно — матрица. В цилиндрических координатах ненулевыми напряжениями являются только σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и σ_{zz} . Напряжения на границе раздела в упругой области матрицы можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{I}, \tag{2.3}$$

где

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

где A_{ij} — функции упругих свойств волокон и матрицы и их объемной доли. Выражение критерия Мизеса (I-3.6) можно, используя (2.3), записать в виде

$$\Gamma \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \Gamma - Y^2 = 0, \tag{2.6}$$

где Y — предел текучести материала матрицы при одноосной деформации, а \mathbf{C} — матрица вида

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Верхний индекс T означает транспонирование. Функция текучести (2.6) изображается эллипсом в плоскости I_1, I_2 . Необходимо проявить осторожность и не перепутать функцию текучести (2.6) материала матрицы на поверхности раздела с функцией текучести (2.2) композита в целом.

ДевИАторные напряжения имеют вид

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{rr} \\ s_{\theta\theta} \\ s_{zz} \end{bmatrix} = {}^{2/3}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{I}. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) уравнение (2.6) можно записать как

$${}^{3/2}\mathbf{s}^T\mathbf{s} - Y^2 = 0. \quad (2.8)$$

Соотношение (2.7) можно записать также в следующем виде

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{\theta\theta} \\ s_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{I}, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A}. \quad (2.10)$$

Поскольку $s_{kk} = 0$, соотношение (2.9) определяет также s_{rr} .

Положим, что составной цилиндр нагружен до некоторого состояния, такого, что $I_1 = I_1^L$, $I_2 = I_2^L$, где s^L — девИАторные напряжения на границе раздела. При разгрузке появятся остаточные напряжения s^R , которые в соответствии с (2.9) имеют вид

$$\mathbf{s}^R = \mathbf{s}^L - \mathbf{P}\mathbf{I}^L, \quad (2.11)$$

где член $\mathbf{P}\mathbf{I}^L$ обусловлен упругой разгрузкой. Теперь найдем такой путь разгрузки, чтобы остаточные напряжения равнялись нулю, $\mathbf{s}^R = \mathbf{0}$. Это состояние разгрузки определяется следующим образом:

$$\mathbf{P}\mathbf{I}^R = -(\mathbf{s}^L - \mathbf{P}\mathbf{I}^L), \quad (2.12)$$

где \mathbf{I}^R — остаточные напряжения в композите. Для вывода (2.12) использованы (2.9) и (2.11). Решение (2.12) относительно \mathbf{I}^R дает

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^L - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{s}^L. \quad (2.13)$$

Решив (2.13) относительно s^L , получим окончательно

$$s^L = P(I^L - \alpha), \quad (2.14)$$

где

$$\alpha = I^R. \quad (2.15)$$

Интерпретация (2.14) очень проста. Для девиаторных напряжений s^L в пластическом состоянии соответствующие остаточные напряжения α в составном цилиндре определяются требованием возвращения поверхности раздела к начальному состоянию. Следовательно, по отношению к этому состоянию функция текучести (2.6) записывается в виде

$$(I - \alpha)^T A^T C A (I - \alpha) - Y^2 = 0. \quad (2.16)$$

Мы получили очень важный результат. Первоначальная функция текучести (2.6) материала матрицы, выраженная через средние напряжения в составном цилиндре, приобретает вид (2.16). Записанная через эти средние напряжения функция текучести выглядит так, как будто материал подвергается кинематическому упрочнению (определение см. в разд. 1.3). Отсюда следует, что функция текучести (2.2) для составного цилиндра должна описывать кинематическое упрочнение; таким образом, (2.2) принимает следующий общий вид:

$$f(I_1 - \alpha_1, I_2 - \alpha_2, I_3, I_4, I_5) = 0.$$

Правило упрочнения

Следующий шаг состоит в формулировке правила упрочнения, которое определяет параметр кинематического упрочнения α как функцию истории нагружения. Приращение нагрузки можно записать как сумму двух частей:

$$\begin{bmatrix} dI_1 \\ dI_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha_1 \\ d\alpha_2 \end{bmatrix} + d\mu \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial I_2} \\ \frac{\partial f}{\partial I_1} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Последний член в (2.17) характеризует нейтральное нагружение по поверхности нагружения, и нам необходимо определить $d\mu$. На рис. 8.3 изображена поверхность нагружения общего вида. Предполагается, что вектор $d\alpha$ направлен по радиусу, проведенному из центра эллипса, описываемого функцией нагружения, как показано на рис. 8.3. Для обоснования этого предположения необходимо сравнение с экспериментальными данными или с численным решением. Картина, показанная на рис. 8.3, в точности соответствует закону упрочнения (1-3.11), приведенному в разд. 1.3. Отметим, что здесь использована запись приращения в виде дифференциала, а не запись, содержащая скорости,

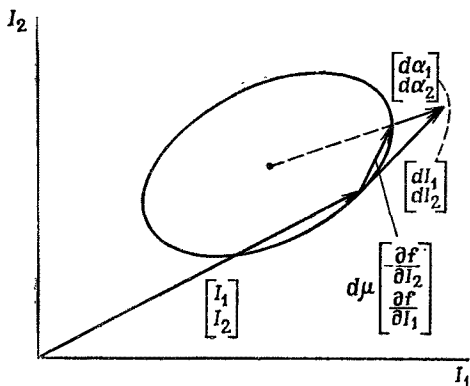


Рис. 8.3. Вид поверхности нагружения.

как в разд. 1.3. Величину $d\mu$ можно найти из условия, что вектор $d\alpha$ направлен по радиусу, как показано на рис. 8.3. Это условие выполняется, если потребовать, чтобы два вектора

$$\begin{bmatrix} I_1 - \alpha_1 + dI_1 \\ I_2 - \alpha_2 + dI_2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} I_1 - \alpha_1 - d\mu \frac{\partial f}{\partial I_2} \\ I_2 - \alpha_2 + d\mu \frac{\partial f}{\partial I_1} \end{bmatrix}$$

были коллинеарными. Полагая их векторное произведение равным нулю, получаем

$$d\mu = \frac{(I_1 - \alpha_1) dI_2 - (I_2 - \alpha_2) dI_1}{(I_1 - \alpha_1) (\partial f / \partial I_1) + (I_2 - \alpha_2) (\partial f / \partial I_2)}. \quad (2.18)$$

Далее, определяя $d\alpha$ из (2.17) с учетом (2.18), получаем движение поверхности нагружения в зависимости от параметра кинематического упрочнения.

Закон течения

Чтобы завершить решение задачи, необходимо рассмотреть последний вопрос о детальной формулировке закона течения. Закон течения (I-3.7) применительно к данному случаю имеет вид

$$d\epsilon^p = d\lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial I_1} \\ \frac{\partial f}{\partial I_2} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

где ϵ^p — пластическая составляющая деформации с компонентами $\epsilon_1 = \epsilon_{zz}$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_{rr}$. Предполагается, что в процессе нагружения радиальная компонента $d\alpha$, соответствующая изменению

нагрузки $d\mathbf{l}$, вызывает однородные приращения напряжения в матрице

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{rr}^M \\ d\sigma_{\theta\theta}^M \\ d\sigma_{zz}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha_2 \\ d\alpha_2 \\ d\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

и в волокнах

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{rr}^F \\ d\sigma_{\theta\theta}^F \\ d\sigma_{zz}^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\alpha_2 \\ d\alpha_2 \\ d\sigma_{zz}^F \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Соотношения (2.20) и (2.21) отражают просто тот факт, что продольное напряжение в волокнах может быть весьма большим по сравнению с другими компонентами напряжения в обеих фазах, величины которых имеют примерно один и тот же порядок по отношению к напряжению в волокнах σ_{zz}^F .

Для равновесия составного цилиндра в продольном направлении при приращении $d\alpha$ необходимо соблюдение баланса сил

$$d\sigma_{zz}^F + (1 - c) d\sigma_{zz}^M = d\alpha_1, \quad (2.22)$$

где c — объемная доля волокон. Из (2.20) и (2.22) следует

$$cd\sigma_{zz}^F = d\alpha_1 - (1 - c) d\alpha_2. \quad (2.23)$$

Решая (2.23) относительно $d\sigma_{zz}^F$ в явном виде и обратив полученный результат для приращения продольных деформаций, получим

$$de_1 = \frac{1}{E_F} \left[\frac{d\alpha_1}{c} - \left(\frac{1-c}{c} + 2\nu_F \right) d\alpha_2 \right], \quad (2.24)$$

где E_F и ν_F — упругие свойства волокон, а последний член в (2.24) отражает действие напряжения по боковой поверхности.

Приращение пластической деформации можно записать в виде

$$de_1^p = de_1 - [\kappa_{11} \ \kappa_{12}] d\alpha, \quad (2.25)$$

где $[\kappa_{11} \ \kappa_{12}]$ — упругие податливости составного цилиндра. Подставляя (2.24) в (2.25) и затем приравнявая de_1^p из (2.19) к de_1^p из (2.25), получим решение для скалярного множителя:

$$d\lambda = \frac{1}{\partial F / \partial I_1} \left[\left(-\frac{2\nu_F + (1-c)/c}{E_F} - \kappa_{11} \right) d\alpha_2 + \left(\frac{1}{cE_F} - \kappa_{12} \right) d\alpha_1 \right]. \quad (2.26)$$

Теперь мы располагаем полным описанием пластической деформации составного цилиндра. Закон течения представлен

соотношениями (2.19) и (2.26), а параметр кинематического упрочнения определяется из (2.17) и (2.18). Таким образом, мы привели полностью весь аналитический аппарат, позволяющий получить решение задачи о пластическом деформировании.

Важно отметить, что в этой задаче до сих пор не вводилось допущение о том, что изменение объема пластической области стремится к нулю. В противоположность обычному предположению оно на самом деле не стремится к нулю. Подробный расчет показывает, что распространение пластической зоны в упруго-идеально-пластической матрице представляет собой физический механизм, который обуславливает поведение композита как кинематически упрочняющегося тела. Как отмечено Двораком и Рао [8.5], вполне возможно, что в инженерных материалах, которые в микромасштабе упруго-идеально-пластические, деформационное упрочнение может быть связано с распространяющимися зонами пластического поведения. Тогда такие материалы должны быть гетерогенными как зернистые металлы.

Результаты расчетов с помощью рассмотренного простого теоретического подхода сравнивались Двораком и Рао [8.5] с численным решением на ЭЦВМ, учитывающим все локальные эффекты. Сравнение показало полную приемлемость подхода даже при более сложном пути нагружения. Предложенное описание макроскопического поведения упругопластического композита в чем-то необычно. В большинстве решений исследуются только локальные аспекты пластического деформирования в гетерогенных материалах. В приведенном решении макроскопическое поведение композита связано со свойствами и локальным поведением отдельных фаз.

Изучению текучести и последующего разрушения композитов посвящено много работ, см., например, работы Друккера [8.6], Малхерна, Роджерса и Спенсера [8.7]; ссылки на основные работы по пластическому поведению композитов можно найти также в [8.5]:

8.3. ВЯЗКОУПРУГИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТОВ

Вязкоупругое поведение композитов часто обуславливается входящими в их состав компонентами из полимерных материалов. Тем не менее во многих случаях поведение композитов описывают просто как упругое. Однако на практике встречаются ситуации, когда такое упрощение неправомерно, и обязательно следует учитывать влияние времени и эффект памяти. Этот и следующий разделы посвящены анализу вязкоупругих эффектов в гетерогенных средах.

Упруго-вязкоупругая аналогия

Анализируя эффективные свойства композитов, мы получили целый ряд решений в упругой постановке. Сейчас перед нами стоит вопрос: можно ли эти решения преобразовать в вязкоупругие? Рассмотрим вначале результаты точных упругих решений для эффективных свойств, отложив на время анализ верхней и нижней оценок. Выражения для эффективных упругих свойств можно прямо преобразовать в выражения для вязкоупругих свойств, используя принцип упруго-вязкоупругой аналогии из разд. 1.2. Другими словами, точное решение для эффективной упругой характеристики можно интерпретировать как преобразованное вязкоупругое решение, если заменить эту характеристику соответствующей преобразованной вязкоупругой, умноженной на параметр преобразования Лапласа. С некоторыми общими проблемами, связанными с этой темой, можно познакомиться в работе Хашина [8.8].

Проиллюстрируем описанную процедуру простым примером. Эффективный объемный модуль для полидисперсной модели среды со сферическими включениями определяется по формуле (II-3.17). Приведем ее здесь:

$$\frac{k - k_M}{k_I - k_M} = \frac{c}{1 + [(1 - c)(k_I - k_M)] / (k_M + 1/3\mu_M)}. \quad (3.1)$$

Положим, что s — параметр преобразования Лапласа. Заменяем каждый модуль в (3.1) s -кратным преобразованием Лапласа соответствующей вязкоупругой функции релаксации:

$$\frac{\bar{k} - \bar{k}_M}{\bar{k}_I - \bar{k}_M} = \frac{c}{1 + [(1 - c)(\bar{k}_I - \bar{k}_M)] / (\bar{k}_M + 1/3\bar{\mu}_M)}. \quad (3.2)$$

Применим преобразование Лапласа к каждой из исходных функций релаксации $k_I(t)$, $k_M(t)$ и $\mu_M(t)$, подставим результат в (3.2) и после обращения $\bar{k}(s)$ получим эффективную функцию релаксации $k(t)$.

В случае комплексных модулей принцип упруго-вязкоупругой аналогии, разобранный в разд. 1.2, даже более прост в применении; заменяя каждый модуль в (3.1) соответствующим комплексным модулем, получим

$$\frac{k^* - k_M^*}{k_I^* - k_M^*} = \frac{c}{1 + [(1 - c)(k_I^* - k_M^*)] / (k_M^* + 1/3\mu_M^*)}. \quad (3.3)$$

Описание двухфазных комплексных модулей с учетом зависимости от частоты имеет вид

$$\begin{aligned}\mu_M &= \mu'_M(\omega) + i\mu''_M(\omega), \\ k_M^* &= k'_M(\omega) + ik''_M(\omega), \\ k_I^* &= k'_I(\omega) + ik''_I(\omega).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Подстановка этих выражений в (3.3) приводит к эффективным комплексным модулям $k^* = k'(\omega) + ik''(\omega)$. Эта простая процедура применима ко всем строго полученным решениям для эффективных свойств.

Полезную частную формулу для эффективных комплексных свойств можно вывести в случае малых тангенсов потерь для всех фаз. Эта процедура приведена в работах Хашина [8.8] и Шепери [8.9]. Положим, что эффективные упругие свойства записываются в следующем виде:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}(\kappa_i, c_i) \quad (3.5)$$

для N фаз с упругими модулями κ_i и объемными долями c_i . Впредь с этого момента будет подразумеваться зависимость \mathbf{C} от объемных долей c_i . Соответствующее вязкоупругое решение тогда имеет вид

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}(\kappa_i^*), \quad (3.6)$$

или подробно

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}(\kappa'_i + i\kappa''_i). \quad (3.7)$$

Предположим, что можно разложить (3.7) в кратный степенной комплексный ряд. В частности, для каждой компоненты тензора примем $\kappa''_i \ll \kappa'_i$. Раскладывая в ряд по κ''_i , получим.

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}(\kappa'_i) + \sum_{i=1}^N (\kappa_i^* - \kappa'_i) \frac{\partial \mathbf{C}(\kappa'_i)}{\partial \kappa'_i} + \dots \quad (3.8)$$

Сохраняя в разложении только выписанные члены, получим следующее выражение:

$$\mathbf{C}^* \approx \mathbf{C}(\kappa'_i) + i \sum_{i=1}^N \kappa''_i \frac{\partial \mathbf{C}(\kappa'_i)}{\partial \kappa'_i}. \quad (3.9)$$

Операции дифференцирования, входящие в (3.8) и (3.9), необходимо выполнить покомпонентно. Полученное решение имеет очень простой вид для использования, так как содержит только упругую функцию $\mathbf{C}(\kappa_i)$ и ее производные, а действительная и мнимая части в окончательном результате уже разделены.

Нижняя и верхняя оценки

Определяют ли оценки эффективных свойств, полученные методами теории упругости, соответствующие границы диапазона вязкоупругих характеристик? Ответ на этот вопрос должен быть, вообще говоря, отрицательным. По крайней мере нам не известно, что влияет на переход от упругих оценок к вязкоупругим. Оценки эффективных вязкоупругих свойств можно найти только для некоторых очень частных ситуаций, а именно когда непрерывная однородная вязкоупругая фаза содержит или поры, или абсолютно жесткие включения. Более того, вязкоупругий материал должен быть изотропным с коэффициентом Пуассона, который является вещественной константой. Это означает, что функции релаксации при сдвиге и объемной деформации материала должны быть пропорциональными. Только для таких весьма ограниченных случаев применимы соответствующие вязкоупругие теоремы о минимуме. Приведенные далее результаты взяты из работы Кристенсена [8.10].

Для упомянутых условий действительны две теоремы о минимуме в теории вязкоупругости, одна из которых выражается через функцию релаксации при сдвиге, а другая — через функцию ползучести при сдвиге. Теоремы о минимуме в теориях упругости и вязкоупругости аналогичны, и поэтому решения для нижней и верхней упругих оценок можно интерпретировать и как решения для вязкоупругих оценок. Например, положим, что упругая оценка имеет вид

$$\mu/\mu_M \leq F_1(c, \nu_M), \quad (3.10)$$

где c — объемная доля пор или абсолютно жестких включений, а ν_M и μ_M — свойства другой фазы. Теоремы о минимуме в теории вязкоупругости допускают преобразование упругого решения (3.10) в вязкоупругое решение

$$\mu(t) \leq F_1(c, \nu_M) \mu_M(t). \quad (3.11)$$

Аналогично упругое решение для податливостей при сдвиге может иметь вид

$$J/J_M \leq F_2(c, \nu_M), \quad (3.12)$$

а соответствующее вязкоупругое решение

$$J(t) \leq F_2(c, \nu_M) J_M(t). \quad (3.13)$$

Мы видим, что найдены верхние оценки функций ползучести и релаксации. Ни одно из приведенных решений нельзя обратить так, чтобы получить нижнюю оценку другого свойства, так как $\mu(t)$ и $J(t)$ не взаимно обратные величины, как в теории упругости, где $\mu = 1/J$. В некоторых работах сообщалось о том, что можно получить нижние оценки $\mu(t)$ и $J(t)$, но это неверно или

по крайней мере недостаточно строго обосновано. Соответствующие оценки для вязкоупругих комплексных модулей и податливостей обсуждаются в [8.10].

Рассмотрим далее частные аспекты вязкоупругого поведения гомогенной изотропной среды, содержащей поры или жесткие включения. Положим вновь, что среда характеризуется постоянным вещественным значением коэффициента Пуассона. Решение для эффективного упругого свойства можно записать в следующем виде:

$$\frac{\mu}{\mu_M} = f(c, \nu_M), \quad (3.14)$$

где вновь c — объемная доля пор или жестких включений. Используя принцип упруго-вязкоупругой аналогии, получим решение для эффективного вязкоупругого комплексного модуля

$$\mu^*/\mu_M^* = f(c, \nu_M). \quad (3.15)$$

Записав тангенс потерь в виде

$$\varphi = \arctg(\mu''/\mu'), \quad \varphi_M = \arctg(\mu_M''/\mu_M'), \quad (3.16)$$

из (3.15) и (3.16) получим

$$\varphi = \varphi_M. \quad (3.17)$$

Таким образом, для вязкоупругого композита, содержащего поры или жесткие включения, эффективные фазовые углы тангенса потерь композита и матрицы равны. Этот результат впервые получен Хашином [8.8]. Аналогичный результат можно получить и для анизотропных композитов. Полезная обзорная статья о вязкоупругих композитах написана Шепери [8.9].

Распространение волн

Рассмотрим вязкоупругий композит и вычислим его эффективные вязкоупругие свойства в качестве иллюстрации уже полученных результатов. Известно, что для увеличения вязкости разрушения стеклообразных материалов, таких, как, например, полистирол, в них добавляется малое количество мелкодиспергированного каучука. При такой модификации полимера материалы, вероятно, испытывают гораздо меньшее хрупкое разрушение. Имеется много различных объяснений этого эффекта; в данной главе мы обсудим один из возможных механизмов этого явления. На рис. 8.4 показана схематическая картина дисперсии каучука в стеклообразном полимере. Видно, что частицы каучука сами содержат большую объемную долю стеклообразного полимера. Будем моделировать вязкоупругие комплексные модули композита в целом. Примем, что стеклообразный полимер

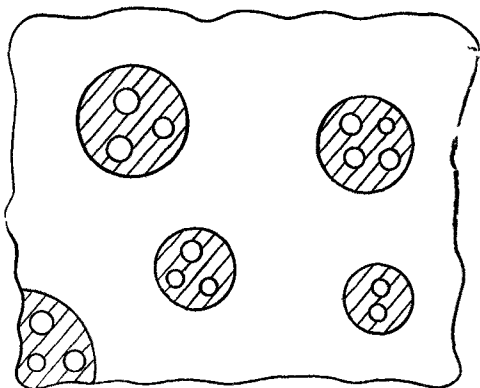


Рис. 8.4. Структура стеклообразного полимера, модифицированного каучуком.

идеально-упругий, а свойства частиц каучука характеризуются вязкоупругим комплексным модулем, который представляет интерес в условиях высокочастотного нагружения, соответствующего прохождению волн. Для простоты, чтобы получить только качественную картину, будем считать обе фазы несжимаемыми.

Напомним вначале формулу для эффективного модуля сдвига μ (II-2.23) для композита с малой объемной долей включений. В случае несжимаемости эта формула переписывается в виде

$$\frac{\mu}{\mu_M} = 1 - \frac{5(1 - \mu_I/\mu_M)}{3 + 2(\mu_I/\mu_M)} c, \quad c \ll 1. \quad (3.18)$$

Положим, что модуль сдвига стеклообразного полимера равен μ_G , а каучука μ_R ; тогда

$$\frac{\mu}{\mu_G} = 1 - \frac{5(1 - \mu_R/\mu_G)}{3 + 2(\mu_R/\mu_G)} c, \quad (3.19)$$

где c — объемная доля частиц каучука. Используя принцип упруго-вязкоупругой аналогии, мы можем непосредственно превратить эту формулу в вязкоупругое решение, но в начале найдем решения, отвечающие морфологии, изображенной на рис. 8.4.

В соответствии со схемой, приведенной на рис. 8.4, рассмотрим частицы каучука как частицы с внедренной в них стеклообразной фазой. Так как каучук существенно податлив, то стеклообразные частицы можно считать сравнительно жесткими. Тогда из (3.18) эффективные свойства μ_{RP} каучуковых частиц с включениями полимера определяются по формуле

$$\mu_{RP}/\mu_R = 1 + \frac{5}{2} \hat{c}, \quad (3.20)$$

где \hat{c} — объемная доля жестких стеклообразных включений в каучуковых частицах. Далее эти каучуковые частицы, содержащие жесткие включения, поместим в стеклообразный полимер. Можно показать, что объемная доля каучуковых частиц с включениями вычисляется по формуле

$$\frac{\text{Объем каучуковой фазы с включениями}}{\text{Общий объем}} = \frac{c}{1 - \hat{c}(1 - c)}.$$

Из (3.18) эффективный модуль сдвига для рассматриваемого случая имеет вид

$$\frac{\mu}{\mu_G} = 1 - \frac{5(1 - \mu_{RP}/\mu_G)}{3 + 2(\mu_{RP}/\mu_G)} \frac{c}{1 - \hat{c}(1 - c)}, \quad (3.21)$$

где μ_{RP} определяется согласно (3.20).

Учитывая, что частицы каучука очень податливы, $\mu_R/\mu_G \ll 1$, из формул (3.19) и (3.21) получим

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu_G} &= 1 - \frac{5}{3} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{\mu_R}{\mu_G}\right) c \quad (\text{каучук без включений}), \\ \frac{\mu}{\mu_G} &= 1 - \frac{5}{3} \left[1 - \frac{5}{3} \left(1 + \frac{5}{2} \hat{c}\right) \frac{\mu_R}{\mu_G}\right] \frac{c}{1 - \hat{c}(1 - c)} \quad (\text{каучук с жесткими включениями}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Соотношения (3.22) можно непосредственно превратить в формулы для вязкоупругой среды уже рассмотренным ранее способом. Стеклообразный полимер будем считать упругим, а свойства частиц каучука будем характеризовать комплексным модулем

$$\mu_R^* = \mu_R' + i\mu_R''.$$

Подставив μ_R^* в (3.22), получим

$$\begin{aligned} \frac{\mu^*}{\mu_G} &= 1 + i \frac{25}{9} \frac{\mu_R''}{\mu_G} c \quad (\text{каучук без включений}), \\ \frac{\mu^*}{\mu_G} &= 1 + i \frac{25}{9} \frac{\mu_R''}{\mu_G} c \frac{1 + 5/2 \hat{c}}{1 - \hat{c}(1 - c)} \quad (\text{каучук с жесткими включениями}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

с упрощениями, соответствующими уже введенным при переходе от (3.22) к (3.23).

Выражения для тангенсов потерь, соответствующие (3.23), имеют вид

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi &= \frac{25}{9} \frac{\mu_R''}{\mu_G} c \quad (\text{каучук без включений}), \\ \text{tg } \varphi &= \frac{25}{9} \frac{\mu_R''}{\mu_G} c \frac{1 + 5/2 \hat{c}}{1 - \hat{c}(1 - c)} \quad (\text{каучук с жесткими включениями}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Как видно, тангенс потерь значительно увеличивается из-за наличия жестких стеклообразных включений в каучуковой фазе. Для реальных объемных долей $c = 0,10$ и $\epsilon = 0,50$. Последняя дробь в правой части (3.24) равна четырем. Использование величины $\epsilon = 0,5$ в предыдущих формулах, относящихся к малым долям включений, просто означает, что основные эффекты были недооценены.

Практическое значение полученных решений состоит в следующем. Возникновение и рост трещин в динамических условиях, по-видимому, имеют тесную связь с характером распространения волны в материале. Тангенс потерь — основная характеристика, определяющая распространение волн в вязкоупругих материалах. Именно эта величина характеризует скорость затухания движущихся волн (см. уравнения (I-2.19), (I-2.20)). В материалах с большими тангенсами потерь динамические эффекты быстро затухают. Поэтому из решения (3.24) следует, что материал с включениями в фазе каучука будет значительно более эффективным в отношении затухания волны. Таким образом, несмотря на то что в двух случаях, рассмотренных в (3.24), использованы одни и те же количества каучука и стеклообразного полимера, композиция, в которой частицы каучука содержат стеклообразные включения, обеспечивает значительно более эффективное управление свойствами материала. Эти результаты вполне согласуются с практическими наблюдениями.

Мы видим, что решения (3.23), (3.24) приводят к простым, имеющим конкретный смысл результатам, которые позволяют рассчитать основные характеристики для последующего анализа распространения волн в вязкоупругих материалах. Аналогичные формулы нетрудно вывести и без упрощающих предположений, которые были использованы здесь только с целью достижения наглядности.

8.4. ВЯЗКОУПРУГАЯ СУСПЕНЗИЯ

В предыдущем разделе мы рассмотрели пример гетерогенного вязкоупругого твердого тела. Вязкоупругое описание в точности соответствует поведению как твердых тел, так и текучих жидкостей. Конечно, при малых деформациях нет необходимости делать принципиальное различие в описании поведения твердого тела и жидкости. Это различие проявляется только в условиях больших деформаций. Рассмотрим сначала интересующую нас задачу течения суспензии при малых деформациях, а затем перейдем к обобщению результатов на модель текущей жидкости.

Малые деформации

Суспензия — это простейший тип гетерогенной среды, в поведении которой проявляются вязкоупругие эффекты. Рассмотрим, в частности, разбавленную суспензию упругих сферических частиц в ньютоновской вязкой среде (матрице). Обе фазы будем считать несжимаемыми. Отметим, что ни одна из фаз суспензии сама по себе не вязкоупругая, но тем не менее эффективные свойства суспензии, как будет показано, вязкоупругие.

В качестве отправной точки используем решение для упругой среды с упругими сферическими включениями (II-2.23):

$$\frac{\mu}{\mu_M} = 1 - \frac{5(1 - \mu_I/\mu_M)}{3 + 2(\mu_I/\mu_M)} c, \quad c \ll 1, \quad (4.1)$$

для несжимаемых материалов. Используем принцип упруго-вязкоупругой аналогии для превращения (4.1) в соответствующую вязкоупругую формулу. Для упругих частиц модуль μ_I непосредственно характеризует поведение включения. Для матрицы, которая в данном случае является ньютоновской вязкой жидкостью, в соответствии с разд. 1.2 получим

$$\mu_M \rightarrow i\omega\eta,$$

где η — коэффициент вязкости и ω — частота. Обобщение (4.1) на модель суспензии дает

$$\frac{\mu^*(\omega)}{i\omega\eta} = 1 - \frac{5(1 + i\mu_I/\omega\eta)}{3 - 2i(\mu_I/\omega\eta)} c. \quad (4.2)$$

Комплексные податливости получим прямо из (4.2):

$$J^*(\omega) = \frac{1}{\mu^*(\omega)}. \quad (4.3)$$

Наша первая цель состоит в определении соответствующих функций ползучести и релаксации. Функцию ползучести, как и в разд. 1.2, можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$J(t) = \tilde{J}(t) + t/\hat{\eta}. \quad (4.4)$$

В книге Гросса [8.11] показано, что функция ползучести $J(t)$ связана с комплексной податливостью следующим образом:

$$\frac{d\tilde{J}(t)}{dt} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty J'(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (4.5)$$

где $J^*(\omega) = J'(\omega) + iJ''(\omega)$. Подставив $J'(\omega)$ из (4.2) и (4.3) в (4.5), получим

$$\tilde{J}(t) = \frac{25c}{4\mu_I} (1 - e^{-(t/\hat{\eta})}), \quad (4.6)$$

где

$$\xi = 3/2 (\eta/\mu_f). \quad (4.7)$$

Для того чтобы получить $\hat{\eta}$ в (4.4), возьмем предел

$$\frac{dJ(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\eta^*(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty}}, \quad (4.8)$$

где $\eta^*(\omega) = \mu^*(\omega)/i\omega$. Найдено, что

$$\hat{\eta} = (1 + 5/2c) \eta. \quad (4.9)$$

Функция ползучести (4.4) для суспензии полностью определена через вязкость матрицы, модуль и объемную долю упругих сферических частиц при помощи соотношений (4.6) и (4.9).

Функция релаксации для суспензии определяется следующим образом:

$$\bar{\mu}(s) = 1/(s^2 \bar{J}(s)). \quad (4.10)$$

Это соотношение получено из (I-2.6), где использованы формулы преобразования Лапласа с параметром преобразования s . Подставив (4.6), (4.9) и $J(t)$ из (4.4) в (4.10), после выполнения всех операций преобразования получим

$$\mu(t) = (1 - 5/3c) \eta \delta(t) + 25/9c \mu_f e^{-t/\tau}, \quad (4.11)$$

где

$$\tau = 3/2 \eta/\mu_f, \quad (4.12)$$

а $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Появление дельта-функции в выражении для функции релаксации неудивительно. Матрица, будучи вязкой жидкостью, не обладает эффектом мгновенной упругости. Для описания поведения такой среды применяются дельта-функции. Теперь мы располагаем полным описанием эффективных вязкоупругих свойств суспензии при малых деформациях. В действительности установлено, что в макроскопическом поведении суспензии проявляются вязкоупругие эффекты, хотя ни одна ее фаза сама по себе не вязкоупругая. Ясно, что основным фактором, обуславливающим проявление материалом эффектов вязкоупругой памяти, является способность одновременно рассеивать и накапливать энергию. Рассмотренный тип суспензии характеризуется и той, и другой способностью; это и объясняет появление вязкоупругих эффектов.

Неньютоновское течение

Резонно поставить вопрос: можно ли только что полученные решения для малых деформаций обобщить на случай больших деформаций, т. е. для текущей суспензии? Действительно, это обобщение можно выполнить, и далее мы перейдем к рассмотрению

метода и результатов, которые получены в работе Кристенсена [8.12]. Ключ к обобщению лежит, как мы видели ранее, в способности суспензии запасать энергию. Материалы, которые запасают энергию, допускают существование функции свободной энергии и термодинамический вывод уравнений состояния. Такой метод был представлен в явном виде в работе Колемана [8.13], посвященной вязкоупругим материалам.

Ограничимся условиями медленного течения и начнем с вывода некоторых основных соотношений, описывающих течение однородных вязкоупругих жидкостей. Затем применим полученное решение к модели эквивалентного однородного поведения суспензии. Представим разложение свободной энергии в прямоугольных декартовых координатах в виде

$$\rho A = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \Delta(t - \tau_1, t - \tau_2) \dot{G}_{ij}(\tau_1) \dot{G}_{ij}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \gamma(t - \tau_1, t - \tau_2) \dot{G}_{ii}(\tau_1) \dot{G}_{jj}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots, \quad (4.13)$$

где

$$G_{ij}(\tau) = C_{ij}(\tau) - \delta_{ij}, \quad C_{ij}(\tau) = \frac{\partial x_k(\tau)}{\partial x_i(t)} \frac{\partial x_k(\tau)}{\partial x_j(t)}, \quad (4.14)$$

«точкой» обозначена производная по указанному аргументу и $x_i(t)$ — положение частицы. Символ t относится к текущему, а τ — к прошедшему времени. Членами высших порядков в (4.13) пренебрегаем в связи с предположением о медленном течении. Следуя термодинамическому методу Колемана [8.13], можно показать, что формула свободной энергии приводит к следующему уравнению состояния:

$$\sigma_{ij}(t) = -p\delta_{ij} + 4 \int_{-\infty}^t \Delta(t - \tau, 0) \dot{G}_{ij}(\tau) d\tau - \\ - 4 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \Delta(t - \tau_1, t - \tau_2) \dot{G}_{ik}(\tau_1) \dot{G}_{kj}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 - \\ - 4 \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \gamma(t - \tau_1, t - \tau_2) \dot{G}_{ij}(\tau_1) \dot{G}_{kk}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (4.15)$$

где использована симметрия величин $\Delta(\tau_1, \tau_2)$ и $\gamma(\tau_1, \tau_2)$ по их аргументам.

Общее нелинейное уравнение состояния (4.15) должно отвечать условиям малых деформаций в частном случае. Выражение

(4.15) при ограничении условиями малости деформаций имеет вид линейного вязкоупругого соотношения, в которое входит член, содержащий однократный интеграл в (4.15). Чтобы получить результат применительно к интересующей нас модели суспензии, функция релаксации $4\Delta(t - \tau, 0)$ в (4.15) должна быть идентична функции релаксации (4.11); таким образом,

$$4\Delta(t, 0) = \alpha\delta(t) + \beta e^{-(t/\tau)}, \quad (4.16)$$

где

$$\alpha = (1 - 5/3c)\eta, \quad \beta = 25/9c\mu_I, \quad \tau = 3/2 \frac{\eta}{\mu_I}. \quad (4.17)$$

Нас интересует задача течения при простой деформации сдвига, которая определяется следующим образом:

$$x_1(t) = X_1 + k(t)X_2, \quad x_2(t) = X_2, \quad x_3(t) = X_3, \quad (4.18)$$

где $k(t)$ определяет скорость течения, а X_i — фиксированные координаты. Можно показать, что деформированное состояние (4.18), соответствующее (4.14), задается посредством

$$[G_{ij}(\tau)] = \begin{bmatrix} 0 & [k(\tau) - k(t)] & 0 \\ [k(\tau) - k(t)] & [k(\tau) - k(t)]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Далее ограничимся условиями установившегося простого сдвигового течения и допустим, что все начальные переходные процессы закончились. Можно показать, что в этом состоянии вклад в члены низших порядков вносят только интегралы из (4.15), включающие $\Delta(\cdot)$. Члены в (4.15), зависящие от $\gamma(\cdot)$, имеют более высокий порядок, и поэтому ими можно пренебречь. Более того, ввиду экспоненциального характера $\Delta(t, 0)$ в уравнении (4.16) аргументы $\Delta(t - \tau_1, t - \tau_2)$ в (4.15) приобретают аддитивную форму $\Delta(2t - \tau_1 - \tau_2)$, где $\Delta(t)$ определено в (4.16). Найдено, что решение для установившегося состояния должно иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p - \beta\tau^2\kappa^2, & \sigma_{22} &= -p - 3\beta\tau^2\kappa^2, \\ \sigma_{12} &= (\alpha + \beta\tau)\kappa, & \sigma_{33} &= -p, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где κ — скорость сдвига. Подставив α , β и τ из (4.17), получим (4.20) в явном виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p - \frac{25}{4}c \frac{\eta}{\mu_I} \kappa^2, & \sigma_{22} &= -p - \frac{75}{4}c \frac{\eta}{\mu_I} \kappa^2, \\ \sigma_{12} &= (1 + 5/2c)\eta\kappa, & \sigma_{33} &= -p. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Мы видим, что сдвиговое течение суспензии связано с возникновением не только сдвиговых, но и нормальных напряжений. Из решения следует, что нормальные напряжения непосредственно обусловлены способностью суспензии запасать энергию путем деформирования упругих частиц. Если частицы абсолютно жесткие, $\mu_l \rightarrow \infty$, то из (4.21) следует, что эффект возникновения нормальных напряжений не проявляется.

Члены высших степеней по κ можно оставить во многих слагаемых в (4.21). Однако, это было бы непоследовательным, если учесть вид функции релаксации Δt . Дело в том, что другие слагаемые высших степеней в разложении исходного выражения (4.13) также приводят к появлению членов порядка κ^4 и выше в составляющих нормального и порядка κ^3 в составляющей касательного напряжения в (4.21). Таким образом, данный метод можно использовать только для вывода характеристик медленного течения суспензии как асимптотического приближения к нулевой скорости сдвига. Тем не менее знание того, что нормальные напряжения просто существуют, или, более определенно, известны их величины, выраженные через свойства суспензии, уже представляет собой ценную информацию. Характеристика времени релаксации для суспензии $\tau = 3\eta/2\mu_l$ также представляет практический интерес.

Свойства суспензии подобного типа при течении изучались многими авторами методом интегрирования уравнений Навье — Стокса в условиях «ползущего» течения и удовлетворения граничным условиям на поверхности деформированной сферы. Вероятно, наиболее законченная работа подобного рода выполнена Годдардом и Миллером [8.14]. Полученные ими выражения для нормальных напряжений имеют тот же вид и величину, что и (4.21), но с другими коэффициентами.

Лил [8.15] подверг критике термодинамический подход как средство описания поведения суспензии. Он утверждает, что задачу можно решить только такими методами, как непосредственное интегрирование фундаментальных уравнений баланса импульса. Разумеется, точный фундаментальный метод решения подобных задач отсутствует, а все существующие подходы изобилуют допущениями и гипотезами. Вместе с тем понимание механического поведения вязкоупругих материалов было бы крайне ограничено без рассмотренного термодинамического вывода. Наша точка зрения состоит в том, что существует много разнообразных математических подходов для моделирования поведения материалов. Ни один из них не является единственно наилучшим. Осуществление всех выводов с разумной математической строгостью и точно в соответствии со сделанными допущениями является важнейшим требованием, предъявляемым к каждому подходу.

8.5. БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ ВОЛОКНИСТЫХ СРЕД

Следует ожидать, что задачи, в которых рассматриваются большие деформации гетерогенных материалов, должны быть гораздо более сложными, чем для малых деформаций. Трудность более общей постановки заключается не только в нелинейной кинематике, но и в том, что общие и точные формулы уравнений состояний, применимые в нелинейных условиях, неопределенны. Конечно, имеется множество нелинейных уравнений состояния, предложенных для описания различных эффектов. Однако согласования между наиболее общими и наиболее гибкими формами пока не достигнуто. Тем не менее существует ряд нелинейных задач, для которых общие решения можно получить независимо от уравнений состояния. К ним относится класс задач, связанных с описанием поведения волокнистых композитов.

В данном разделе обратимся к анализу задач о поведении материалов, армированных нерастяжимыми волокнами. В разд. 6.1 была развита теория пограничного слоя применительно к очень жестким волокнам. Здесь мы продвинемся в идеализации свойств арматуры еще на один шаг и предположим, что волокна бесконечно жесткие в продольном направлении. Исследования армирования нерастяжимым кордом проводились Адкинсом и Ривлином [8.16] начиная с 1955 года. Предложенный ими подход обобщен в работе Грина и Адкинса [8.17]. Двумерная теория, которую мы разберем здесь, была частично разработана Малхерном, Роджерсом и Спенсером [8.18] в рамках теории пластичности и, наконец, в общей форме Пипкином и Роджерсом [8.19]. Общие исследования в этой области сделаны Пипкином [8.20] и Роджерсом [8.21]; в дальнейшем изложении будем следовать первой из этих двух работ.

Постановка задачи

Рассмотрим армирование среды однородными начально параллельными прямыми *нерастяжимыми волокнами*. Как и в большей части книги, обратимся к анализу макроскопического поведения композита, не затрагивая поведения его компонентов. Условие нерастяжимости в одном (начальном) направлении, выраженное через осредненные полевые переменные, представляет собой ограничение на отклик материала на нагрузку. По существу, подобный тип одномерного ограничения есть аналог трехмерного ограничения, накладываемого предположением о несжимаемости. Этот факт подводит нас ко второму важному допущению — допущению о несжимаемости. Третье важное допущение — предположение о двумерном плоском деформированном состоянии, при

котором

$$x = x(X, Y), \quad y = y(X, Y), \quad z = Z, \quad (5.1)$$

где начальные положения в материале обозначены через \mathbf{X} и положения после деформации $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$. Введенные допущения налагают жесткие ограничения на тип возможных деформаций. Тем не менее будет показано, что и в этих условиях возможно возникновение деформаций, имеющих важное значение в механике композитов.

Будем называть множество материальных точек в направлении нерастяжимости *волокном*. Положим, что первоначально волокна прямые и параллельны направлению X . Тогда после деформации волокно есть кривая, состоящая из материальных точек. Поле угловых ориентаций волокон относительно направления X обозначим через $\theta(x, y)$, где для начального направления $\theta_0 = 0$.

Введем базисные векторы \mathbf{a} и \mathbf{n} , такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta, \\ \mathbf{n} &= -\mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{j} \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где \mathbf{i} и \mathbf{j} — единичные векторы в направлениях X и Y соответственно. Отметим, что

$$\frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{n}(\theta), \quad \frac{d\mathbf{n}(\theta)}{d\theta} = -\mathbf{a}(\theta). \quad (5.3)$$

Направления, обозначенные через \mathbf{n} , называются нормальными; они перпендикулярны волокнам.

Положим, что ∇ — оператор градиента относительно \mathbf{x} . Кривизна волокон и кривизна нормалей определяются следующим образом:

$$\frac{1}{r_a} = \mathbf{a} \cdot \nabla \theta, \quad \frac{1}{r_n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \theta, \quad (5.4)$$

где r_a и r_n — радиусы кривизны. Перемножая в различных комбинациях (5.3) и (5.4) и пользуясь циклической перестановкой, получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{n}}{r_a}, & (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{n} &= -\frac{\mathbf{a}}{r_a}, \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{n}}{r_n}, & (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} &= -\frac{\mathbf{a}}{r_n}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Эти результаты представляют собой известные формулы Серре — Френе, связывающие кривизны с производными единичных векторов.

Рассмотрим далее градиент деформаций, определенный как $F_{ik} = \partial x_i / \partial X_k$. Очевидно, ограничения в задачах накладываются в виде условий для компонент тензора градиента деформаций.

Волокна, как мы знаем, не могут растягиваться или сокращаться. Однако предположение о несжимаемости требует, чтобы элементы площади, нормальные к волокнам, сохранялись неизменными. Далее, требование отсутствия деформации в направлении Z означает, что расстояния между волокнами остаются неизменными. Таким образом, ни вдоль волокон, ни в направлении нормали к ним не может быть никаких изменений. Тогда остается только один возможный вид деформации — простой сдвиг в плоскости, параллельной направлению волокон. Исходя из этого, мы свяжем между собой сопутствующую (деформированную) и недеформированную системы координат следующим выражением:

$$\mathbf{x} = (X + kY) \mathbf{a} + Y \mathbf{n} + Z \mathbf{k}, \quad (5.6)$$

где k — сдвиговая дисторсия. Производные выражения (5.6) по направлениям, соответствующим недеформированной системе координат, дают

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_0 \cdot \nabla_0) \mathbf{x} &= \mathbf{a}, \\ (\mathbf{n}_0 \cdot \nabla_0) \mathbf{x} &= \mathbf{n} + k \mathbf{a}, \\ (\mathbf{k}_0 \cdot \nabla_0) \mathbf{x} &= \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где ∇ — оператор градиента относительно недеформированной системы координат, \mathbf{a}_0 , \mathbf{n}_0 и \mathbf{k}_0 — единичные векторы в направлениях недеформированной системы координат. Из соотношений (5.7) получим компоненты градиента деформаций в виде

$$F_{i,k} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta + k \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta + k \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Функции k и θ определяют градиент деформаций в материале. Это функции координат: $k = k(\mathbf{x})$ и $\theta = \theta(\mathbf{x})$ или $k = k(\mathbf{X})$ и $\theta = \theta(\mathbf{X})$. Но k и θ не могут быть независимыми функциями координат, так как они выводятся на основе зависимости $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$. Таким образом, необходимо удовлетворить условиям совместности, которые можно найти из тождества

$$F_{iK,L} = F_{iL,K}. \quad (5.9)$$

Отсюда и из (5.7) следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial Y} = \frac{\partial (\mathbf{n} + k \mathbf{a})}{\partial X}. \quad (5.10)$$

Подставив компоненты (5.8) в (5.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\cos \theta)}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} (-\sin \theta + k \cos \theta), \\ \frac{\partial (\sin \theta)}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial X} (\cos \theta + k \sin \theta). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Далее, используя циклическую перестановку, получим

$$\frac{\partial(\theta - k)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial Y} - k \frac{\partial\theta}{\partial X} = 0. \quad (5.12)$$

Первое соотношение (5.12) дает

$$k = \theta + f(Y). \quad (5.13)$$

Таким образом, сдвиговая деформация зависит от угла θ и от некоторой функции, постоянной вдоль направления волокна. Отметим, что второе соотношение (5.12) можно записать в виде

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\theta = 0, \quad (5.14)$$

где из (5.6) следует

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial Y} - k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X},$$

таким образом,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial Y} - k \frac{\partial}{\partial X}.$$

Так как угол θ определяет также ориентацию нормалей, из (5.14) следует, что нормали суть прямые линии. Этот результат имеет фундаментальное значение для построения решений в деформациях.

Наконец, чтобы завершить построение теории, необходимо определить уравнения равновесия. Прежде всего напряжения должны соответствовать введенным ограничениям. В тензорных обозначениях напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = T a_i a_j - p \delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (5.15)$$

где p — гидростатическое давление, T — напряжения в волокнах и τ_{ij} — дополнительные напряжения, т. е. та часть, которая обусловлена сдвиговой деформацией среды, ограниченной в направлении X_3 . В безындексных (диадных) обозначениях запишем это соотношение в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = T \mathbf{a} \mathbf{a} - p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (5.16)$$

Другая удобная форма записи имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = T \mathbf{a} \mathbf{a} - p (\mathbf{I} - \mathbf{a} \mathbf{a}) + S (\mathbf{a} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{a}) + S_3 \mathbf{k} \mathbf{k}, \quad (5.17)$$

где T — суммарное напряжение в направлении волокон. В этой формуле $S_3 - p$ есть напряжение, вызванное ограничением в направлении X_3 , S — амплитуда сдвигового напряжения, причем и S , и S_3 — функции или функционалы от сдвиговой деформации. Таким образом, чтобы определить S и S_3 , необходимо использовать уравнения состояния для сдвиговой деформации. При принятых допущениях нет ограничений на тип уравнения состояния — оно может описывать упругое, вязкоупругое, пластическое или любое иное поведение материала. Общий вид решения во

многих случаях можно найти и без определения уравнения состояния.

После подстановки напряжения (5.17) в уравнение равновесия $\nabla \cdot \sigma = 0$ получаем определяющее уравнение для относительных напряжений p и T . Используя формулы Серре — Френе (5.5), формулы дивергенции $\nabla \cdot \mathbf{a} = 1/r_n$ и $\nabla \cdot \mathbf{n} = -1/r_a$ и вспоминая, что из (4.15) следует равенство нулю кривизны $1/r_n$, получим два определяющих уравнения равновесия в виде

$$\mathbf{a} \cdot \nabla T = \frac{2S}{r_a} - \mathbf{n} \cdot \nabla S, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p - \frac{p}{r_a} = \frac{T}{r_a} + \mathbf{a} \cdot \nabla S. \quad (5.19)$$

Таким образом, если считать, что кинематика задачи известна, то (5.18) можно проинтегрировать, получая при этом поле T , для чего необходимо определить значения для одной точки каждого волокна. При известном T можно найти p путем интегрирования (5.19) вдоль нормалей, где значение p определяется в одной точке вдоль каждой нормали.

Ключевой элемент этой процедуры, содержащей интегрирование для нахождения напряжений, состоит в знании кинематики деформированного состояния. Во многих примерах, как будет показано, можно определить деформированное состояние независимо от решения полной системы уравнений равновесия. В этом состоит резкое отличие от решений, основанных на привычных теориях, где в общем случае нельзя определить деформированное состояние без точного удовлетворения уравнениям равновесия. Частный случай, рассматриваемый здесь, является прямым следствием сильных ограничений задачи. Далее увидим на примере, содержащем граничные условия как в напряжениях, так и в перемещениях, что деформированное состояние можно определить из рассмотрения равновесия, выраженного через результирующие силы.

Деформация консоли

Отыщем деформированное состояние консоли (рис. 8.5), нагруженной силой на конце. Консоль в точке $X = 0$ жестко заделана. Линия заделки представляет собой линию нормали до деформирования и должна остаться линией нормали после деформирования. Линии волокон, перпендикулярные к линиям нормали, должны остаться нормальными к жесткой заделке после деформации. Таким образом, вдоль линии заделки сдвиговые деформации отсутствуют и $\theta = 0$. Из (5.13) следует, что $f(Y) = 0$, и, таким образом, сдвиг k в этом сечении везде равен θ . Следовательно, вдоль линии нормали, которая должна быть прямой, сдвиговая деформация постоянна, и соответственно с этим вдоль

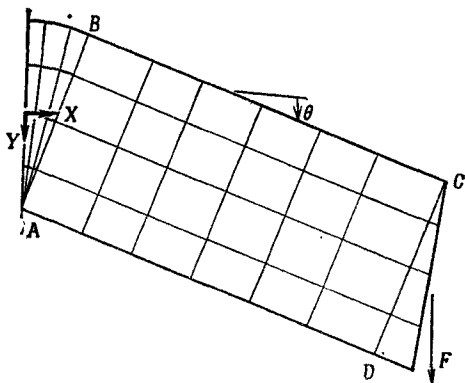


Рис. 8.5. Деформация консольной пластины.

линии нормали постоянно сдвиговое напряжение. Общая сдвиговая сила в сечении, перпендикулярном линии нормали, равна $hS(\theta)$, где h — толщина. Для сохранения равновесия эта величина должна быть равна соответствующей компоненте нагрузки, приложенной на конце; таким образом,

$$hS(\theta) = F \cos \theta. \quad (5.20)$$

Если определено уравнение состояния $S(\theta)$, то решением (5.20) является только одно значение θ ; таким образом, часть консоли, обозначенная на рис. 8.5 через $ABCD$, находится в состоянии однородного сдвига. Чтобы линии нормали и линии волокон оставались перпендикулярными, область деформаций вблизи заделки должна принять веерообразную форму, как показано на рис. 8.5. Мы не располагаем достаточной информацией для обсуждения характера деформации в области нагруженного конца (рис. 8.5). Общее решение этой задачи относительно деформации резко отличается от решения для изгиба по элементарной теории. Действительно, согласно элементарной теории, нерастяжимость волокон требует, чтобы деформации при нагружении полосы отсутствовали.

Напряжения можно теперь найти при помощи (5.18) и (5.19), но решение практически само собой очевидно. Сдвиговые напряжения однородны в большей части пластины. Однако на верхней и нижней поверхностях граничные условия соответствуют нулевым напряжениям. Таким образом, наружные поверхности пластины должны находиться под действием сингулярных напряжений. Это становится очевидным из следующих соображений: для равновесия в направлении, перпендикулярном слоям волокон, необходимы бесконечные нормальные напряжения, которые действуют на бесконечно малой толщине, но обуславливают появле-

ние сдвиговых напряжений на противоположных сторонах, которые меняются уже на конечную величину. По существу, эти рассуждения наводят на мысль об эффекте пограничного слоя, подобном рассмотренному в разд. 5.1 в рамках линейной теории.

В работах, на которые мы ссылались в начале раздела, теоретические вопросы развиты в гораздо более общем виде, чем это сделано здесь. В частности, существуют решения для концентрической укладки волокон, для разрывов в наклоне радиальных линий и линий нормали, для случаев неединственности решений и т. д.

В книге Спенсера [8.22] рассмотрены многие задачи деформирования материалов, армированных нерастяжимыми волокнами, причем особое место отведено моделям деформирования, подчиняющимся теории пластичности.

ЗАДАЧИ

1. Выполните расчет, подобный проведенному в разд. 8.1, рассмотрев случай цилиндрических пор. Воспользуйтесь полидисперсной моделью среды с цилиндрическими включениями.
2. Рассмотрите поведение пористого материала, идеализируемого как жестко-идеально-пластический в условиях сдвиговой деформации. Определите критическую нагрузку пластического разрушения материала и проанализируйте полученное выражение.
3. Рассмотрите идеализированный материал, состоящий из параллельных упруго-идеально-пластических волокон в упругой матрице. Каковы были бы макроскопические характеристики напряженно-деформированного состояния композита при одноосном растяжении в направлении волокон?
4. Рассмотрите систему выпрямленных параллельных волокон в упруго-идеально-пластической матрице при квадратной упаковке. При каком уровне напряжений — выше или ниже или том же самом, что и в материале матрицы, — в композите при сдвиговом деформировании будет наблюдаться неограниченное течение? Рассмотрите случаи малых и больших объемных долей волокон. Каким должен быть эффект деформационного упрочнения матрицы композита? Используйте работу [8.6].
5. Соотношения (3.11) и (3.13) дают верхнюю оценку эффективных функций релаксации и ползучести соответственно. Запишите соответствующие формулы для оценок сверху функций комплексного модуля и податливости и примените их для нахождения верхних и нижних оценок одной из этих характеристик.
6. Найдите действительную и мнимую части комплексного модуля сдвига вязкоупругой среды с малой объемной долей вязкоупругих сферических включений. Начните с соответствующей упругой формулы (3.18).
7. Придайте результату, полученному при решении задачи 6, частную форму для случая сферических включений в упругой матрице. Сравните найденное выражение комплексного модуля с соответствующим выражением, введенным в разд. 8.4 для упругих включений в вязкой матрице.
8. Рассмотрите деформацию первоначально плоской армированной параллельными нерастяжимыми волокнами пластины, одна из поверхностей которой приведена в контакт с жесткой цилиндрической поверхностью. Получите решение для напряженного состояния. Используйте работу [8.20].

ЛИТЕРАТУРА

- 8.1. Carroll M. M., Holt A. C. Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials. — *J. Appl. Phys.*, 1972, v. 43, p. 1626.
- 8.2. Butcher B. M., Carroll M. M., Holt A. C. Shock-wave compaction of porous aluminum. — *Int. J. Mech. Sci.*, 1974, v. 45, p. 3864.
- 8.3. Chadwick P. Compression of a spherical shell of work hardening material. — *Int. J. Mech. Sci.*, 1963, v. 5, p. 165.
- 8.4. Chu T. Y., Hashin Z. Plastic behavior of composites and porous media under isotropic stress. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1971, v. 9, p. 971.
- 8.5. Dvorak G. J., Rao M. S. M. Axisymmetric plasticity theory of fibrous composites. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1976, v. 14, p. 361.
- 8.6. Drucker D C Engineering and continuum aspects of high-strength materials. — In: *High Strength Materials* (V. F. Zakay, ed.). — New York: Wiley, 1965.
- 8.7. Mulhern J. F., Rogers T. G., Spencer A. J. M. A continuum theory of a plastic-elastic fibre-reinforced material. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1969, v. 7, p. 129.
- 8.8. Hashin Z. Complex moduli of viscoelastic composites — I. General theory and application to particulate composites. — *Int. J. Solids and Structures*, 1970, v. 6, p. 539
- 8.9. Schapery R. A. Viscoelastic behavior and analysis of composite materials. — In: *Composite Materials*, v. 2 (G. P. Sendeckyj, ed.). — Academic, 1974. [Имеется перевод: Шепери Р. А. Вязкоупругое поведение композиционных материалов. — В кн.: Композиционные материалы, т. 2/Под ред. Дж. Сендецки. — М.: Мир, 1978, с. 102—195.]
- 8.10. Christensen R. M. Viscoelastic properties of heterogeneous media. — *J. Mech. and Phys. Solids*, 1969, v. 17, p. 23.
- 8.11. Gross B. *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. — Paris: Hermann, 1953.
- 8.12. Christensen R. M. A special theory of viscoelastic fluids for application to suspensions. — *Acta Mech.*, 1973, v. 16, p. 183.
- 8.13. Coleman B. D. Thermodynamics of materials with memory. — *Arch. Ration. Mech. and Anal.*, 1964, v. 17, p. 1.
- 8.14. Goddard J. D., Miller C. Nonlinear effects in the rheology of dilute suspensions. — *J. Fluid Mech.*, 1967, v. 28, p. 657.
- 8.15. Leal G. L. — *Appl. Mech. Rev.*, 1974, v. 27, review no. 8537.
- 8.16. Adkins J. E., Rivlin R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. — X. Reinforcement by inextensible cords. — *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 1955, v. A248, p. 201.
- 8.17. Green A. E., Adkins J. E. *Large Elastic Deformations*, 2nd ed. — Oxford, 1970. [Имеется перевод: Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965, 455 с.]
- 8.18. Mulhern J. F., Rogers T. G., Spencer A. J. M. A continuum model for fibre-reinforced plastic materials. — *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1967, v. A301, p. 473.
- 8.19. Pipkin A. C., Rogers T. G. Plane deformations of incompressible fiber-reinforced materials. — *J. Appl. Mech.*, 1971, v. 38, p. 634. [Имеется перевод: Прикладная механика. — М.: Мир, 1971, № 3, с. 54.]
- 8.20. Pipkin A. C. Finite deformations of ideal fiber-reinforced composites. — In: *Composite Materials*, v. 2 (G. P. Sendeckyj, ed.). — New York: Academic, 1974. [Имеется перевод: Пипкин А. С. Конечные деформации идеальных волокнистых композитов. — В кн.: Композиционные материалы, т. 2/Под ред. Дж. Сендецки. — М.: Мир, 1978, с. 287—353.]
- 8.21. Rogers T. G. Finite deformations of strongly anisotropic materials. — In: *Theoretical Rheology* (J. F. Hutton, J. R. A. Pearson, K. Walters, eds.). — New York: Academic, 1975.
- 8.22. Spencer A. J. M. *Deformations of Fibre-Reinforced Materials*. — New York: Oxford University Press, 1972.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ТЕРМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

В заключительной главе вновь возвратимся к задаче расчета эффективных свойств гетерогенной среды. Определению эффективных упругих характеристик посвящены первые главы книги. Совершенно ясно, что подобная задача может быть поставлена и в отношении других свойств среды: термических, электрических, магнитных. В данной главе ввиду тесной взаимосвязи механических и термических явлений в гетерогенных средах подробно рассмотрим термические свойства.

В частности, определим теплоемкости, эффективные коэффициенты теплопроводности и термического расширения для некоторых распространенных типов гетерогенных сред, используя для расчета ту же процедуру осреднения, что и в разд. 2.1.

Вначале необходимо привести основные соотношения теории термоупругости, отражающие взаимосвязь механических и термических свойств.

9.1. ТЕРМОУПРУГОСТЬ. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Приступая к анализу термических свойств, целесообразно рассмотреть определяющие соотношения. Под термином *определяющие соотношения* здесь понимаются согласующиеся со строго выведенной теорией соответствующие формулы, в которых появляются эти свойства. Таким образом, необходимо обратиться к термодинамическому выводу теории термоупругости. На данном этапе предположим, что свойства среды однородны. В последующих разделах рассмотрим особенности термического поведения гетерогенного материала.

Термодинамический метод и результаты, полученные с его помощью, широко известны и используются во многих работах. Здесь мы повторим некоторые из них с целью придания законченности изложению. С общим выводом можно ознакомиться по книгам Трусделла и Тупина [9.1] и Трусделла и Нолла [9.2].

Начнем с установления *уравнения локального баланса энергии* в виде

$$\rho r - \rho \dot{U} + \sigma_{ij} d_{ij} - q_{i,i} = 0, \quad (1.1)$$

где ρ — массовая плотность, r — функция источника или стока тепла на единицу массы, U — внутренняя энергия на единицу массы, σ_{ij} — тензор напряжений, d_{ij} — тензор скоростей деформаций и q_i обозначает вектор потока тепла. Как обычно, точкой сверху обозначена скорость изменения во времени. Неравенство для *производства энтропии* (неравенство Клаузиуса — Дюгема) имеет вид

$$T \rho \dot{S} - \rho r + q_{i,i} - q_i \left(\frac{T_{,i}}{T} \right) \geq 0, \quad (1.2)$$

где T — абсолютная температура и S — энтропия на единицу массы

Применение термодинамического потенциала Гельмгольца

У нас есть определенные основания для использования другой формы уравнения баланса энергии (1.1). В частности, введем *преобразование Лежандра*

$$\rho U = \rho A + T \rho S, \quad (1.3)$$

где A — *свободная энергия* (термодинамический потенциал Гельмгольца) на единицу массы. Подставляя (1.3) в (1.1), получаем

$$\rho r - \rho [\dot{A} + \dot{T}S + T\dot{S}] + \sigma_{ij} d_{ij} - q_{i,i} = 0. \quad (1.4)$$

Функцию источника тепла ρr можно исключить при помощи (1.2) и (1.4), что приводит к неравенству

$$-\rho S \dot{T} - \rho \dot{A} + \sigma_{ij} d_{ij} - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0. \quad (1.5)$$

Ограничимся здесь условием малости деформаций. Положим также, что $T = T_0 + \theta$, где T_0 — некоторая заданная исходная температура и θ/T_0 — бесконечно малая величина того же порядка, $O(\varepsilon)$, что и тензор малых деформаций ε_{ij} . При этих ограничениях (1.5) принимает вид

$$-\rho S \dot{\theta} - \rho \dot{A} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - q_i \frac{\theta_{,i}}{T_0} \geq 0. \quad (1.6)$$

В условиях бесконечно малого отклонения от данного состояния массовую плотность ρ можно считать равной ρ_0 , соответствующей начальному состоянию. Для простоты мы, однако, сохраним обозначение ρ .

Далее запишем свободную энергию ρA в виде степенного ряда по ε_{ij} и θ :

$$\rho A = \rho A_0 + D_{ij}\varepsilon_{ij} - \beta\theta + 1/2 C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} - \varphi_{ij}\varepsilon_{ij}\theta - 1/2 C_v\theta^2 + O(\varepsilon^3), \quad (1.7)$$

где ρA_0 , D_{ij} , β , C_{ijkl} , φ_{ij} и C_v — константы, физический смысл которых мы установим позже. В соответствии с условиями малости отклонения от начального состояния сохраним в (1.7) выписанные члены вплоть до порядка $O(\varepsilon^2)$.

Подстановка (1.7) в (1.6) дает

$$(-D_{ij} - C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \varphi_{ij}\theta + \sigma_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij} + (\beta + C_v\theta + \varphi_{ij}\varepsilon_{ij} - \rho S)\dot{\theta} - q_{i,i} \frac{\theta_{,i}}{T_0} \geq 0, \quad (1.8)$$

где использовано условие $C_{ijkl} = C_{klij}$. Для выполнения неравенства (1.8) при всех значениях $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и $\dot{\theta}$ необходимо, чтобы коэффициенты при них равнялись нулю, что приводит к следующим уравнениям состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= D_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \varphi_{ij}\theta, \\ \rho S &= \beta + \varphi_{ij}\varepsilon_{ij} + C_v\theta. \end{aligned} \quad (1.9)$$

С учетом (1.9) в неравенстве (1.8) остается только

$$-q_{i,i}(\theta_{,i}/T_0) \geq 0. \quad (1.10)$$

Мы видим, что сохранение первых членов в разложении свободной энергии (1.7) приводит просто к постоянным значениям D_{ij} и β для напряжения и энтропии в (1.9). Эти члены будут в дальнейшем опущены. Тензор C_{ijkl} — это, конечно, тензор упругих модулей. Величине φ_{ij} удобно придать другую форму. Положим

$$\varphi_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}. \quad (1.11)$$

Тогда из (1.9) получим

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl}\theta), \quad (1.12)$$

откуда следует, что α_{kl} — тензор *коэффициентов термического расширения*.

Подставляя только что найденные результаты в линеаризованное соответствующим образом уравнение баланса энергии (1.4), получим

$$\rho r - T_0\varphi_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - T_0C_v\dot{\theta} - q_{i,i} = 0. \quad (1.13)$$

Остается только найти уравнение состояния для вектора потока тепла q_i . В соответствии с условиями малости отклонения от начального состояния запишем закон теплопроводности Фурье

$$q_i = -k_{ij}\theta_{,j}, \quad (1.14)$$

где k_{ij} — тензор *коэффициентов теплопроводности*. Подстановка (1.14) в (1.10) приводит к неравенству

$$k_{ij}\theta_{,i}\theta_{,j}/T_0 \geq 0, \quad (1.15)$$

откуда следует, что k_{ij} — симметричный положительно определенный тензор.

Наконец, подставляя закон теплопроводности (1.14) в (1.13), получим

$$\rho r - T_0 \varphi_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - T_0 C_v \dot{\theta} + k_{ij} \theta_{,ij} = 0. \quad (1.16)$$

Примем это уравнение в качестве стандартного уравнения теплопроводности для однородных, но анизотропных материалов. В случае отсутствия теплопроводности и при $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ это уравнение сводится к виду $\rho r - C_v \dot{\theta} = 0$; таким образом, C_v — константа пропорциональности в соотношении между изменениями температуры и тепловой энергии и $T_0 C_v / \rho$ — *удельная теплоемкость при постоянной деформации*. Слагаемое в (1.16), включающее φ_{ij} , отражает взаимосвязь между термическими и механическими эффектами.

Предыдущие результаты применительно к изотропным материалам сводятся к следующим формулам: уравнение состояния в напряжениях принимает вид

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2\mu \epsilon_{ij}, \\ \sigma_{kk} &= 3k (\epsilon_{kk} - 3\alpha\theta), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где μ и k — объемный модуль и модуль сдвига соответственно; *энтропия* определяется формулой

$$\rho S = \varphi \delta_{ij} \epsilon_{ij} + C_v \theta, \quad (1.18)$$

тогда как *вектор теплового потока* записывается в следующем виде:

$$q_i = -k\theta_{,i}; \quad (1.19)$$

здесь не следует путать коэффициент теплопроводности k с объемным модулем k . Окончательно уравнение теплопроводности принимает привычный вид:

$$\rho r - T_0 \varphi \dot{\epsilon}_{kk} - T_0 C_v \dot{\theta} + k\theta_{,ii} = 0, \quad (1.20)$$

где $\varphi = k\alpha$, причем здесь k — объемный модуль, входящий в (1.17).

Применение термодинамического потенциала Гиббса

Кроме только что приведенного подхода, основанного на использовании свободной энергии, имеется и другой подход. Вместо преобразования (1.3) для энергии положим, что

$$\rho U = \rho G + T\rho S + \sigma_{ij} d_{ij}, \quad (1.21)$$

где G — *термодинамический потенциал Гиббса* на единицу массы. Это преобразование позволяет сделать определяющими переменными теории напряжение и температуру, а не деформацию и температуру, как в предыдущем выводе. Подставим (1.21) в уравнение баланса энергии (1.1) и, согласно имеющемуся образцу, проделаем те же преобразования, что и в предыдущем выводе. Относительно некоторого исходного уровня разложим ρG в ряд аналогично (1.7), но теперь по степеням напряжения и температуры:

$$\rho G = -\frac{1}{2} S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \alpha_{ij} \sigma_{ij} \theta - \frac{1}{2} C_p \theta^2 + O(\varepsilon^3). \quad (1.22)$$

Оставим в разложении только выписанные члены. Члены более низкого, чем квадрат, порядка, как это показано ранее, не вносят ничего в теоретическое построение и поэтому не удерживаются.

Из (1.22) и определяющих термодинамических соотношений находим определяющие уравнения состояния:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \theta, \quad (1.23)$$

где S_{ijkl} — тензор упругих податливостей. Уравнение состояния для энтропии имеет вид

$$\rho S = C_p \theta + \alpha_{ij} \sigma_{ij}, \quad (1.24)$$

а уравнение теплопроводности:

$$\rho r - T_0 \alpha_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - T_0 C_p \dot{\theta} + k_{ij} \theta_{,ij} = 0, \quad (1.25)$$

где вновь применен закон теплопроводности Фурье. Отметим, что в уравнения (1.22) и (1.11) входит одна и та же величина α_{ij} . В сочетании с (1.11) уравнение (1.23) можно переписать следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} (\sigma_{kl} + \varphi_{kl} \theta). \quad (1.26)$$

Наконец, отметим, что $T_0 C_p / \rho$ в (1.25) имеет смысл *удельной теплоемкости при постоянном напряжении*. Нетрудно установить и соответствующие формулы для изотропного тела.

Теперь мы располагаем сводкой основных формул, необходимых для проведения анализа термических свойств гетерогенных сред. Наша цель состоит в выводе соответствующих формул для эффективных коэффициентов теплопроводности k_{ij} , эффективных коэффициентов термического расширения α_{ij} и эффективных удельных теплоемкостей C_p и C_v для некоторых распространенных композитов.

9.2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Закон теплопроводности Фурье, определенный в предыдущем разделе, имеет вид

$$q_i = -k_{ij} \theta_{,j}. \quad (2.1)$$

Для установившегося состояния при отсутствии взаимосвязи между механическими и термическими эффектами уравнение теплопроводности (1.16) сводится к уравнению

$$k_{ij}\theta_{,ij} = 0. \quad (2.2)$$

Эффективные коэффициенты теплопроводности гетерогенного материала определим как коэффициенты, входящие в соотношение

$$\bar{q}_i = -k_{ij}\bar{\theta}_{,j}, \quad (2.3)$$

где \bar{q}_i и $\bar{\theta}_{,j}$ — объемные средние величин q_i и $\theta_{,j}$ в представительном элементе объема. Здесь (2.3) относится к макроскопически анизотропному материалу, причем k_{ij} зависит от направления, для которого определяется теплопроводность. Ограничимся рассмотрением двухфазного композита. Для этого случая можно записать

$$\bar{q}_i = \bar{q}'_i c_I + c_M \bar{q}_M, \quad (2.4)$$

где c_I и c_M — объемные доли двух фаз, к которым относится объемное осреднение, выраженное соотношением (2.4). Из (2.3) и (2.4) получим

$$\bar{q}_i = -c_I k_I \theta'_{,j} - c_M k_M \bar{\theta}^M_{,j}. \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) в (2.3) приводит к соотношению

$$-c_I k_I \bar{\theta}'_{,j} - c_M k_M \bar{\theta}^M_{,j} = -k_{ij} \bar{\theta}_{,i}. \quad (2.6)$$

По аналогии с (2.5) запишем

$$\bar{\theta}_{,j} = c_I \bar{\theta}'_{,j} + c_M \bar{\theta}^M_{,j}. \quad (2.7)$$

Подставив выраженное из (2.7) $\bar{\theta}^M_{,j}$ в (2.6), получим

$$k_{ji} \bar{\theta}_{,i} - k_M \bar{\theta}_{,j} = c_I (k_I - k_M) \bar{\theta}'_{,j}. \quad (2.8)$$

Таким образом, чтобы получить решение относительно k_{ij} для заданного состояния $\bar{\theta}_{,j}$, необходимо определить только средний градиент температуры во включении, т. е. в фазе, обозначенной индексом I .

Полидисперсная модель среды со сферическими включениями

Вначале решим задачу для трехфазной модели среды со сферическими частицами, описанной в разд. 2.4 и иллюстрированной рис. 9.1. На бесконечно большом расстоянии от начала координат должно выполняться следующее условие:

$$\theta|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \beta x_3, \quad (2.9)$$

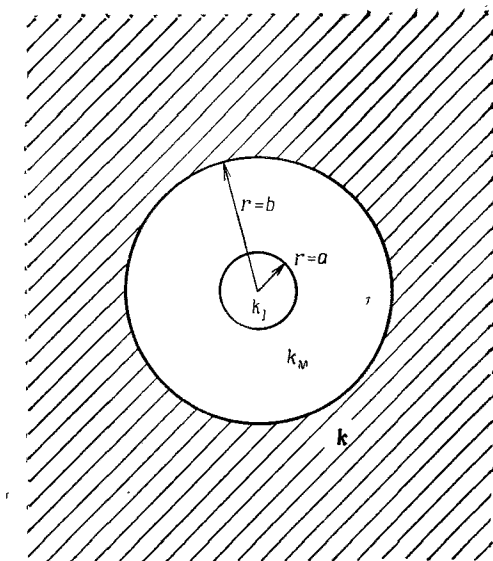


Рис. 9.1. Трехфазная модель среды со сферическим включением. Заштрихована среда с неизвестными эффективными свойствами.

где x_j — декартовы координаты и β — градиент температуры. Отметим, что в данном контексте в (2.8) используется условие

$$\bar{\theta}_{,j} = \beta \delta_{3j}.$$

Определяющие соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \theta^I &= 0, & 0 \leq r \leq a; \\ \nabla^2 \theta^M &= 0, & a \leq r \leq b; \\ \nabla^2 \theta &= 0, & b \leq r \leq \infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Переходя к сферическим координатам с осевой симметрией относительно x_3 , получим

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Таким образом, при $r \rightarrow \infty$ $\theta(r, \theta) \rightarrow \beta r \cos \theta$. Нетрудно показать, что решение имеет вид

$$\begin{aligned} \theta^I &= A_I r \cos \theta, & 0 \leq r \leq a; \\ \theta^M &= \left(A_M r + \frac{B^M}{r^2} \right) \cos \theta, & a \leq r \leq b; \\ \theta &= \left(A r + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, & b \leq r \leq \infty. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Необходимо удовлетворить следующим условиям непрерывности:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a \quad \theta^I &= \theta^M, \quad k_I \frac{\partial \theta^I}{\partial r} = k_M \frac{\partial \theta^M}{\partial r}, \\ \text{при } r = b \quad \theta^M &= \theta, \quad k_M \frac{\partial \theta^M}{\partial r} = k \frac{\partial \theta}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Используя решение (2.11) и условия (2.12), получим следующее решение для k :

$$k = k_M \left[1 + \frac{c}{(1-c)/3 + k_M/(k_I - k_M)} \right], \quad (2.13)$$

где c — объемная доля включений. Формула (2.13) для эффективного коэффициента теплопроводности была выведена Хашин и Штрикманом [9.3]. Хотя этот результат установлен здесь применительно к трехфазной модели (рис. 9.1), Хашин и Штрикман показали, что он в точности соответствует и полидисперсной модели среды со сферическими включениями, описанной в разд. 2.3. Приведенная формула совпадает с формулой для эффективного объемного модуля. Более того, Хашин и Штрикман [9.3] показали, что выражение (2.13) можно интерпретировать как нижнюю оценку k для произвольных геометрических характеристик фаз (но при макроскопической изотропии) при $k_I > k_M$ или как верхнюю оценку при $k_M > k_I$. Этот результат согласуется с выводами, которые мы сделали при анализе механических свойств в гл. IV. Точная формула (2.13) впервые получена Кернером [9.4] применительно к электропроводности. Она применима также для оценки констант магнитной и диэлектрической проницаемости.

Анизотропная среда

Обратимся к случаю макроскопически анизотропной гетерогенной среды. Введем единственное ограничение. Пусть существует такая характерная ось, что в любом сечении, нормальном к ней, структура гетерогенного материала определяется однозначно. Положим, что распределение температуры в осевом направлении во всех фазах имеет вид

$$\theta = \beta x_1. \quad (2.14)$$

Определяющее уравнение $\nabla^2 \theta = 0$ удовлетворяется для всех фаз тривиально. Из (2.3) получим

$$\bar{q}_1 = -k_{11} \bar{\theta}_{,1}. \quad (2.15)$$

где k_{11} — эффективная теплопроводность в осевом направлении. Очевидно,

$$\bar{q}_1 = \sum_{n=1}^N c_n q_1^{(n)} \quad (2.16)$$

для N фаз с объемными долями c_n . Из (2.15) и (2.16) в сочетании с $q_i = -k\beta$ для каждой фазы получим решение

$$k_{11} = \sum_{n=1}^N c_n k_n, \quad (2.17)$$

т. е. теплопроводность в осевом направлении определяется по правилу смеси.

В заключение при помощи полидисперсной модели среды с цилиндрическими включениями, описанной в разд. 3.2, оценим теплопроводность. Ввиду трансверсальной изотропии среды, описываемой этой моделью, можно записать

$$q_i = -k_{ij}T_{,j}, \quad (2.18)$$

где только две компоненты k_{ij} независимы:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{,1} \\ \theta_{,2} \\ \theta_{,3} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

и x_1 — осевое направление. Решение (2.17) для k_{11} уже имеется. Коэффициент теплопроводности k_{22} можно определить аналогично тому, как это было сделано в случае сферических включений. Найдено, что

$$k_{22} = k_M \left[1 + \frac{c}{k_M(k_I - k_M) + (1-c)/2} \right], \quad (2.20)$$

где c — объемная доля цилиндрических включений.

Формулу (2.20) на основании именно полидисперсной модели среды со сферическими включениями вывел Хашин [9.5].

9.3. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕРМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

В данном разделе выведем формулы для коэффициента термического расширения двухфазных композитов. Случай, когда фаз больше двух, рассмотрен в следующем разделе в связи с удельными теплоемкостями. Приведенный здесь вывод основывается на работе Левина [9.6], использованной в обзоре Розена и Хашина [9.7].

Рассмотрим две задачи, в одной из которых в представительном элементе объема задано напряжение, а в другой — температура. Для тела, ограниченного поверхностью S , запишем заданное напряжение в виде

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_i = \sigma_{ij}^0 n_j \\ \theta = 0 \end{array} \right\} \text{ на } S. \quad (3.1)$$

Напряжения, осредненные по объему, имеют вид

$$\bar{\sigma}'_{ij} = \sigma^0_{ij}, \quad \bar{\theta} = 0, \quad (3.2)$$

где σ^0_{ij} — однородное напряжение, а штрих введен для того, чтобы задачу с заданным напряжением отличить от задачи с заданной температурой, которая будет рассмотрена позже. Соотношение между осредненными напряжением и деформацией имеет вид

$$\varepsilon'_{ij} = S_{ijkl} \sigma^0_{kl}, \quad (3.3)$$

где S_{ijkl} — эффективные податливости гетерогенной среды, которые будем считать известными.

Рассмотрим далее задачу с заданной температурой

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_i = 0 \\ \theta = \theta_0 \end{array} \right\} \text{ на } S, \quad (3.4)$$

откуда средние по объему величины равны

$$\bar{\sigma}_{ij} = 0, \quad \bar{\theta} = \theta_0. \quad (3.5)$$

Соответствующая осредненная деформация имеет вид

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \alpha_{ij} \theta_0, \quad (3.6)$$

где α_{ij} — известные коэффициенты термического расширения.

Возьмем далее произведение σ'_{ij} из задачи с заданными напряжениями на ε_{ij} из задачи с заданной температурой и запишем

$$\int_V \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_V (\sigma'_{ij} u_{i,j}) dv, \quad (3.7)$$

где V — объем и где использовано уравнение равновесия $\sigma'_{ij,j} = 0$. При помощи теоремы Остроградского — Гаусса получим

$$\int_V \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \int_S \sigma'_{ij} u_i n_j ds, \quad (3.8)$$

где n_j — единичный вектор нормали к поверхности. Но на поверхности S должно выполняться условие $\sigma'_{ij} = \sigma^0_{ij}$, и, таким образом, (3.8) сводится к соотношению

$$\int_V \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \sigma^0_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} V. \quad (3.9)$$

Подстановка (3.6) в (3.9) приводит к формуле

$$\int_V \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} dv = \sigma^0_{ij} \alpha_{ij} \theta_0 V. \quad (3.10)$$

По определению имеем

$$\bar{\sigma}'_{ij} = \sum_{n=1}^N c_n \bar{\sigma}'_{ij}{}^{(n)}. \quad (3.11)$$

Здесь временно рассматривается случай N фаз с объемной долей каждой фазы c_n . Запишем далее линейное преобразование между $\bar{\sigma}'_{ij}{}^{(n)}$ и σ_{kl}^0 :

$$\bar{\sigma}'_{ij}{}^{(n)} = B_{ijkl}^{(n)} \sigma_{kl}^0, \quad (3.12)$$

где $B_{ijkl}^{(n)}$ можно определить из решения задачи с заданными напряжениями. Подстановка (3.12) в (3.11) дает

$$\bar{\sigma}'_{ij} = \sum_{n=1}^N c_n B_{ijkl}^{(n)} \sigma_{kl}^0. \quad (3.13)$$

Но из (3.2) следует, что $\bar{\sigma}'_{ij} = \sigma_{ij}^0$; таким образом, (3.13) сводится к соотношению

$$\sum_{n=1}^N c_n B_{ijkl}^{(n)} = I_{ijkl} = 1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (3.14)$$

Используя далее выражения (3.13) и (3.6), перепишем (3.10) в виде, учитывающем вклад каждой фазы:

$$\sum_{n=1}^N B_{ijkl}^{(n)} \sigma_{kl}^0 \alpha_{ij}^{(n)} \theta_0 V^{(n)} = \sigma_{ij}^0 \alpha_{ij} \theta_0 V. \quad (3.15)$$

Решая (3.15) относительно α_{ij} , получим

$$\alpha_{ij} = \sum_{n=1}^N c_n \alpha_{kl}^{(n)} B_{klilj}^{(n)}, \quad (3.16)$$

где $c_n = V^{(n)}/V$.

По определению имеем соотношение

$$\bar{\varepsilon}'_{ij} = \sum_{n=1}^N c_n \bar{\varepsilon}'_{ij}{}^{(n)}, \quad (3.17)$$

которое преобразуется после подстановки (3.3) к виду

$$S_{ijkl} \sigma_{kl}^0 = \sum_{n=1}^N c_n S_{ijkl}^{(n)} \bar{\sigma}'_{kl}{}^{(n)}. \quad (3.18)$$

Подставив $\bar{\sigma}'_{kl}{}^{(n)}$ из (3.12) в (3.18), получим

$$S_{ijkl} = \sum_{n=1}^N c_n S_{ijmn}^{(n)} B_{mnkl}^{(n)}. \quad (3.19)$$

Используя теперь (3.14) и исключая $B_{mnkl}^{(n)}$ из (3.16) и (3.19), найдем решение относительно α_{ij} . Полученных трех определяющих

уравнений достаточно для анализа двухфазного композита с неизвестными α , $B_{ijkl}^{(1)}$ и $B_{ijkl}^{(2)}$. Из (3.14) найдем

$$c_2 B_{ijkl}^{(2)} = 1/2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - c_1 B_{ijkl}^{(1)}. \quad (3.20)$$

Подставив это выражение в (3.19), получим

$$S_{ijkl} - S_{ijkl}^{(2)} = c_1 [S_{ijmn}^{(1)} - S_{ijmn}^{(2)}] B_{mnkl}^{(1)}. \quad (3.21)$$

Пусть

$$P_{klmn} (S_{mnr}^{(1)} - S_{mnr}^{(2)}) = I_{klrs}, \quad (3.22)$$

тогда из (3.20) следует

$$c_1 B_{klij}^{(1)} = P_{klmn} (S_{mni} - S_{mni}^{(2)}). \quad (3.23)$$

Из (3.16) и (3.20) с учетом $\alpha_{ij}^{(2)} = \alpha_{ji}^{(2)}$ имеем

$$\alpha_{ij} = (\alpha_{kl}^{(1)} - \alpha_{kl}^{(2)}) c_1 B_{klij}^{(1)} + \alpha_{ij}^{(2)}. \quad (3.24)$$

Подставив $c_1 B_{klij}^{(1)}$ из (3.23) в (3.24), получим в явном виде следующую формулу:

$$\alpha_{ij} = (\alpha_{kl}^{(1)} - \alpha_{kl}^{(2)}) P_{klmn} (S_{mni} - S_{mni}^{(2)}) + \alpha_{ij}^{(2)}. \quad (3.25)$$

Применим полученный результат к частному случаю изотропных фаз. Тогда

$$\alpha_{ij}^{(n)} = \alpha_n \delta_{ij}, \quad S_{ijkk}^{(n)} = \sigma_{ij} / 3k_n. \quad (3.26)$$

С учетом этих формул α_{ij} в (3.25) приобретает вид

$$\alpha_{ij} = (\alpha_1 - \alpha_2) \delta_{kl} P_{klmn} [S_{mni} - S_{mni}^{(2)}] + \alpha_2 \delta_{ij}. \quad (3.27)$$

Из (3.22) получим

$$P_{kkmn} = \frac{3\delta_{mn}}{1/k_1 - 1/k_2}$$

или после подстановки в (3.27) с учетом (3.26) имеем

$$\alpha_{ij} = (\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\delta_{mn}}{1/k_1 - 1/k_2} \left(3S_{mni} - \frac{\delta_{ij}}{k_2} \right) \alpha_2 \delta_{ij}. \quad (3.28)$$

Для макроскопически изотропного композита из (3.28) получим выражение

$$\alpha = \alpha_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1/k_1 - 1/k_2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k_2} \right], \quad (3.29)$$

которое можно переписать в эквивалентной форме:

$$\alpha = \bar{\alpha} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1/k_1 - 1/k_2} \left[\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} \right) \right], \quad (3.30)$$

где

$$\bar{\alpha} = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2, \quad \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{c_1}{k_1} + \frac{c_2}{k_2}. \quad (3.31)$$

Эти очень простые формулы позволяют рассчитать *эффективный коэффициент термического расширения*. Однако для их использования необходимо теоретическим или экспериментальным путем определить объемные модули k .

В качестве самостоятельного упражнения предлагается вывести из (3.28) формулы для коэффициентов термического расширения трансверсально изотропной среды

$$\alpha_{\text{АХ}} = \bar{\alpha} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1/k_1 - 1/k_2} \left[\frac{3(1 - 2\nu_{12})}{E_{11}} - \left(\frac{1}{k} \right) \right], \quad (3.32)$$

$$\alpha_{\text{ТР}} = \bar{\alpha} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1/k_1 - 1/k_2} \left[\frac{3}{2K_{23}} - \frac{3\nu_{12}(1 - 2\nu_{12})}{E_{11}} - \left(\frac{1}{k} \right) \right], \quad (3.33)$$

где $\bar{\alpha}$ и $(1/k)$ определяются все теми же формулами (3.31), а E_{11} , K_{23} и ν_{12} — эффективные упругие характеристики: модуль среды при одноосном нагружении, объемный модуль среды при плоской деформации и коэффициент Пуассона (когда нагрузка приложена вдоль оси симметрии среды) соответственно.

Почти очевидно, что если определены оценки эффективных механических свойств, то можно получить верхнюю и нижнюю оценки эффективного коэффициента (ов) термического расширения.

9.4. УДЕЛЬНЫЕ ТЕПЛОЕМОСТИ

Перейдем к задаче определения удельных теплоемкостей гетерогенной среды. Попутно получим более общие, чем в предыдущем разделе, формулы для коэффициента термического расширения. Вновь обратимся к работе Розена и Хашина [9.7]. Воспользуемся энергетическим методом, примененным Шепери в [9.8] для вывода эффективного коэффициента термического расширения.

Постановка задачи

Определим *термоупругую потенциальную энергию* следующим образом:

$$U_P = \frac{1}{V} \left[\int_V A \, dv - \int_V F_i u_i \, dv - \int_{S_\sigma} \sigma_i u_i \, ds \right], \quad (4.1)$$

где V — объем области, F_i — компоненты объемной силы, S_σ — часть поверхности, на которой заданы граничные условия в напряжениях, A — определенная в разд. 9.1 свободная энергия (на единицу объема), которая в результате незначительной модификации примет вид ¹⁾

$$A = 1/2 C_{ijkl}(x_j) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \varphi_{ij}(x_j) \varepsilon_{ij} \theta - 1/2 c_v(x_j) \frac{\theta^2}{T_0}, \quad (4.2)$$

¹⁾ Отметим, что здесь члены, включающие c_v и c_p , имеют противоположный знак по сравнению с соответствующими членами работы [9.7].

где $c_v = T_0 C_v$, а величина C_v определена в разд. 9.1. Член c_v/ρ — это удельная теплоемкость при постоянной деформации. Коэффициент φ_{ij} при смешанном произведении связан с коэффициентом термического расширения соотношением (1.11).

Дополнительная термоупругая энергия записывается аналогичным образом:

$$U_C = -\frac{1}{V} \left[\int_V G dv + \int_{S_u} \sigma_i u_i ds \right], \quad (4.3)$$

где S_u — часть поверхности, на которой заданы граничные условия в перемещениях, а G — термодинамический потенциал Гиббса (см. разд. 9.1), определенный в виде

$$G = -\frac{1}{2} S_{ijkl} (x_j) \sigma_{ij} \sigma_{kl} - \alpha_{ij} (v_j) \sigma_{ij} \theta - \frac{1}{2} c_p (x_j) \frac{\theta^2}{T_0}, \quad (4.4)$$

где c_p/ρ — удельная теплоемкость при постоянном напряжении.

Предлагаем в качестве упражнения, используя соотношение

$$A = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + G$$

и термоупругие уравнения состояния, доказать, что

$$c_p - c_v = T_0 C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}. \quad (4.5)$$

Можно показать, что термоупругие энергии U_P и U_C минимальны для полей напряжений и перемещений, являющихся решениями задачи, по сравнению с любыми другими допустимыми полями. Допустимые поля определены в разд. 1.1, и, конечно, термоупругие принципы минимума потенциальной и дополнительной энергии аналогичны соответствующим принципам, рассмотренным в разд. 1.1. Осредненные по объему значения A и G имеют вид

$$\frac{1}{V} \int_V A dv = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \bar{\varphi}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} c_v \frac{\theta^2}{T_0}, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{V} \int_V G dv = -\frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{ij} \bar{\sigma}_{ij} \theta - \frac{1}{2} c_p \frac{\theta^2}{T_0}, \quad (4.7)$$

где теперь φ_{ij} , α_{ij} , c_p и c_v обозначают эффективные свойства гетерогенной среды и V — объем представительного элемента объема.

Пусть заданы граничные условия в напряжениях

$$\sigma_i = \sigma_{ij}^0 n_j \text{ на } S, \quad (4.8)$$

где σ_{ij}^0 — однородное напряженное состояние, n_j — компоненты единичного вектора нормали. При отсутствии объемных сил,

$F_i = 0$, получим

$$U_P = -1/2 \sigma_{ij}^0 \bar{\epsilon}_{ij} - 1/2 \Phi_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} \theta - 1/2 c_v \frac{\theta^2}{T_0}, \quad (4.9)$$

$$U_C = 1/2 \sigma_{ij}^0 \bar{\epsilon}_{ij} + 1/2 \alpha_{ij} \sigma_{ij}^0 \theta + 1/2 c_p \frac{\theta^2}{T_0}.$$

Аналогично для граничных условий в перемещениях

$$u_i = \epsilon_{ij}^0 x_j \text{ на } S, \quad (4.10)$$

где ϵ_{ij}^0 — однородные деформации, получим

$$U_P = 1/2 \bar{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^0 - 1/2 \Phi_{ij} \epsilon_{ij}^0 \theta - 1/2 c_v \frac{\theta^2}{T_0}, \quad (4.11)$$

$$U_C = -1/2 \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}^0 + 1/2 \alpha_{ij} \bar{\sigma}_{ij} \theta + 1/2 c_p \frac{\theta^2}{T_0}.$$

Принцип минимума потенциальной и дополнительной энергий состоит в утверждении, что

$$U_P \leq \tilde{U}_P, \quad U_C \leq \tilde{U}_C, \quad (4.12)$$

где U_P и U_C — энергии, вычисленные для допустимых полей напряжений. Доказательство этих принципов можно найти в работе Розена [9.9].

Для того чтобы показать, что

$$U_C = -U_P, \quad (4.13)$$

можно воспользоваться соотношением (4.5) в задаче с граничными условиями в напряжениях (4.8). Объединяя (4.12) и (4.13), получим $-U_C \leq -U_C \leq U_P$. Используя (4.1) и (4.3), представим эти условия в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{V} \int_V \left\{ 1/2 S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \sigma_{ij} \theta + 1/2 c_p \frac{\theta^2}{T_0} \right\} dv &\leq \\ &\leq -1/2 S_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 - \alpha_{ij} \sigma_{ij}^0 \theta - 1/2 c_p \frac{\theta^2}{T_0} \leq \\ &\leq \frac{1}{V} \int_V \left\{ 1/2 C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \Phi_{ij} \epsilon_{ij} \theta - 1/2 c_v \frac{\theta^2}{T_0} \right\} dv - \frac{1}{V} \sigma_{ij}^0 \int_V \epsilon_{ij} dv, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где использованы допустимые напряжения в левой и допустимые перемещения в правой частях неравенства; S_{ijkl} , α_{ij} и c_p — эффективные свойства.

Аналогично для задачи с граничными условиями в перемещениях (4.10) можно найти

$$\begin{aligned} -\frac{1}{V} \int_V \left\{ 1/2 S_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \sigma_{ij} \theta + 1/2 c_p \frac{\theta^2}{T_0} \right\} dv + \frac{1}{V} \epsilon_{ij}^0 \int_V \sigma_{ij} dv &\leq \\ &\leq 1/2 C_{ijkl} \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl}^0 - \Phi_{ij} \epsilon_{ij}^0 \theta - 1/2 c_v \frac{\theta^2}{T_0} \leq \\ &\leq \frac{1}{V} \int_V \left\{ 1/2 C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - \Phi_{ij} \epsilon_{ij} \theta - 1/2 c_v \frac{\theta^2}{T_0} \right\} dv. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Разумеется, соотношения (4.14) и (4.15) при $\theta = 0$ в точности совпадают с результатами классической теории. Для определения c_p и c_v необходимо использовать только одно из этих соотношений, так как имеется другое независимое соотношение (4.5).

Макроскопически изотропная среда

Ограничимся рассмотрением макроскопически изотропных композитов; к анизотропному случаю вернемся позже. Пусть на границе тела приложены напряжения $\sigma_{ij}^0 = \sigma_0 \delta_{ij}$, и пусть допустимые напряжения имеют вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij}. \quad (4.16)$$

В задаче с заданными на поверхности перемещениями положим

$$u_i^0 = \varepsilon_0 \delta_{ij} x_j = \varepsilon_0 x_i,$$

и пусть допустимые перемещения имеют вид

$$u_i = \varepsilon_0 x_i. \quad (4.17)$$

Подставив (4.16) и (4.17) в (4.14), получим

$$\begin{aligned} -1/2 \bar{S}_{ijkl} \sigma_0^2 - \bar{\alpha}_{ii} \sigma_0 \theta - 1/2 \bar{c}_p \frac{\theta^2}{T_0} &\leq -\frac{\sigma_0^2}{2k} - 3\alpha \sigma_0 \theta - 1/2 c_p \frac{\theta^2}{T_0} \leq \\ &\leq 1/2 \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_0^2 - \bar{\varphi}_{ii} \varepsilon_0 \theta - 1/2 \bar{c}_v \frac{\theta^2}{T_0} - 3\sigma_0 \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где свойства осреднены по объему, например

$$\bar{\alpha}_{ii} = \int_V \alpha_{ii}(x_i) dv.$$

Минимизируем верхнюю оценку (4.18) по ε_0 . Тогда верхнюю оценку (4.18) можно переписать в виде

$$-\frac{\sigma_0^2}{2k} - 3\alpha \sigma_0 \theta - \frac{1}{2} c_p \frac{\theta^2}{T_0} \leq -\frac{(3\sigma_0 + \bar{\varphi}_{ii} \theta)^2}{2\bar{C}_{ijkl}} - \frac{1}{2} \bar{c}_v \frac{\theta^2}{T_0}. \quad (4.19)$$

Объединяя в (4.19) коэффициенты при одинаковых степенях σ_0/θ , получим

$$A \left(\frac{\sigma_0}{\theta} \right)^2 + (\alpha - B) \left(\frac{\sigma_0}{\theta} \right) + (\gamma - C) \geq 0, \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{c_p - \bar{c}_v}{6T_0}, \quad A = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{k} - \frac{9}{\bar{C}_{ijkl}} \right), \\ B &= \frac{\varphi_{ii}}{\bar{C}_{ijkl}}, \quad C = \frac{\bar{\varphi}_{ii} \bar{\varphi}_{jj}}{6\bar{C}_{ijkl}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Аналогично из нижней оценки (4.18) можно получить

$$A' \left(\frac{\sigma_0}{\theta} \right)^2 - (\alpha - B') \left(\frac{\sigma_0}{\theta} \right) - (\gamma - C') \geq 0, \quad (4.22)$$

где

$$A' = 1/6 (\bar{S}_{ijkl} - 1/k), \quad B' = 1/3 \bar{\alpha}_{ii}, \quad C' = 1/6 (\overline{C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}}). \quad (4.23)$$

Для $\theta/\sigma_0 = 0$ из (4.20) и (4.22) получим оценки Рейсса и Фойгта

$$9\bar{C}_{ijkl} \leq 1/k \leq \bar{S}_{ijkl}.$$

Для $\sigma_0/\theta = 0$ получим элементарные оценки

$$\frac{\bar{\Phi}_{ii} \bar{\Phi}_{jj}}{\bar{C}_{mmmm}} \leq \frac{c_p - \bar{c}_v}{T_0} \leq \overline{C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}}.$$

Из (4.20) и (4.22) также следует, что

$$\begin{aligned} (\alpha - B)^2 - 4A(\gamma - C) &\leq 0, \\ (\alpha - B')^2 + 4A'(\gamma - C') &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Эти два неравенства содержат два неизвестных α и γ , где γ связано с c_p посредством (4.21). Поведение соотношений (4.24) иллюстрируется на рис. 9.2. Точка пересечения парабол определяется выражением

$$\gamma = C' - \frac{1}{4A'} (\alpha - B')^2. \quad (4.25)$$

Подставив это значение γ в первое соотношение (4.24) в форме равенства, получим

$$\alpha^2 (A + A') - 2\alpha (AB' + A'B) + [A(B')^2 + A'B^2 + 4AA'(C - C')] = 0.$$

Используя это соотношение, получим оценки α в виде

$$\begin{aligned} \alpha^{\pm} &= \frac{AB' + A'B}{A + A'} \pm \\ &\pm \frac{1}{A + A'} \{ AA' [4(A + A')(C' - C)] - (B - B')^2 \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для изотропных фаз (4.26) сводится к выражению

$$\begin{aligned} \alpha^{\pm} &= \frac{1}{(1/\bar{k}) - 1/k} \left\{ \frac{\bar{k}\alpha}{\bar{k}} \left[\left(\frac{1}{k} \right) - \frac{1}{\bar{k}} \right] + \bar{\alpha} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\bar{k}} \right) \pm \right. \\ &\left. \pm \psi \left[\left(\frac{1}{k} \right) - \frac{1}{\bar{k}} \right]^{1/2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\bar{k}} \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\psi = \left\{ \left[\left(\frac{1}{k} \right) - \frac{1}{\bar{k}} \right] \left[\overline{(k\alpha^2)} - \frac{(k\bar{\alpha})^2}{\bar{k}} \right] - \left[\bar{\alpha} - \frac{(k\bar{\alpha})}{\bar{k}} \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.28)$$

Можно показать, что для двух фаз $\psi = 0$, и обе оценки в (4.27) совпадают друг с другом и с (3.29). Отметим также, что $\psi = 0$

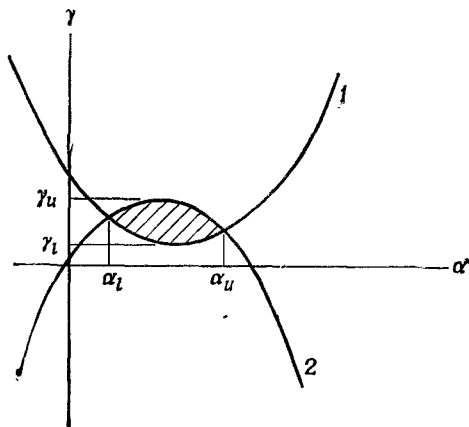


Рис. 9.2. Графическое представление соотношений (4.24). Кривая 1 соответствует $(\alpha - B)^2 - 4A(\gamma - C) \leq 0$, кривая 2 соответствует $(\alpha - B')^2 + 4A'(\gamma - C') \geq 0$; индексы l, u обозначают соответственно наименьшее и наибольшее значения.

всякий раз, когда $k_n \alpha_n = \text{const}$ для всех фаз, что приводит в данном случае к равенству $k\alpha = k_n \alpha_n$.

Продолжим теперь вывод формул для удельных теплоемкостей двухфазного композита. Подставив решение для α (3.29) в выражение (4.25) и затем разрешив его относительно c_p , используя при этом γ из (4.21), получим

$$\frac{c_p - \bar{c}_v}{T_0} = 9 \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{1/k_2 - 1/k_1} \right)^2 \left[\frac{1}{k} - \left(\frac{\bar{1}}{k} \right) \right]. \quad (4.29)$$

Из решения (4.29) для c_p можно с помощью (4.5) получить решение для c_v :

$$c_p - c_v = 3k\alpha^2 T_0.$$

На этом завершается рассмотрение эффективных удельных теплоемкостей макроскопически изотропных двухфазных композитов. Обратимся далее к случаю двухфазной трансверсально изотропной среды.

Трансверсально изотропная среда

В качестве допустимых полей положим

$$u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0. \quad (4.30)$$

Подставив (4.30) в (4.14), получим верхнюю и нижнюю оценки:

$$\begin{aligned} -1/2 \bar{S}_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 - \bar{\alpha}_{ij} \sigma_{ij}^0 \theta - 1/2 \bar{c}_p \frac{\theta^2}{T_0} &\leq \\ &\leq -1/2 S_{ijkl} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 - \alpha_{ij} \sigma_{ij}^0 \theta - 1/2 c_p \frac{\theta^2}{T_0} \leq \\ &\leq 1/2 \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 - \bar{\Phi}_{ij} \varepsilon_{ij}^0 \theta - 1/2 \bar{c}_v \frac{\theta^2}{T_0} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Как и в предыдущем случае, определим ε_{ij}^0 так, чтобы минимизировать верхнюю оценку (4.31). Тогда верхняя оценка (4.31) примет вид

$$\begin{aligned} 1/2 (S_{ijkl} - \bar{\Lambda}_{ijkl}) \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 + (-\bar{\Lambda}_{ijkl} \bar{\Phi}_{kl} + \alpha_{ij}) \sigma_{ij}^0 \theta + \\ + \left(\frac{c_p - \bar{c}_v}{2T_0} - 1/2 \bar{\Lambda}_{ijkl} \bar{\Phi}_{ij} \bar{\Phi}_{kl} \right) \theta^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$\bar{\Lambda}_{ijmn} \bar{C}_{mnkl} = I_{ijkl}. \quad (4.33)$$

Полагая, что $\sigma_{\beta\gamma}$ — единственная ненулевая компонента тензора σ_{ij}^0 , из (4.32) получим

$$A \left(\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\theta} \right)^2 + (\alpha_{\beta\gamma} - B) \left(\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\theta} \right) + (\gamma - C) \geq 0, \quad (4.34)$$

где отсутствует суммирование по повторяющимся индексам и

$$\begin{aligned} A &= 1/2 (S_{\beta\gamma\beta\gamma} - \bar{\Lambda}_{\beta\gamma\beta\gamma}), \\ B &= \bar{\Lambda}_{\beta\gamma ij} \bar{\Phi}_{ij}, \\ C &= 1/6 \bar{\Lambda}_{ijkl} \bar{\Phi}_{ij} \bar{\Phi}_{kl}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

γ определяется из (4.21). Подобным образом для нижней оценки (4.31) имеем

$$A' \left(\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\theta} \right)^2 - (\alpha_{\beta\gamma} - B') \left(\frac{\sigma_{\beta\gamma}}{\theta} \right) - (\gamma - C') \geq 0, \quad (4.36)$$

где

$$\begin{aligned} A' &= 1/2 (S_{\beta\gamma\beta\gamma} - \bar{\Lambda}_{\beta\gamma\beta\gamma}), \\ B' &= \bar{\alpha}_{\beta\gamma}, \\ C' &= 1/6 \bar{C}_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Из неравенств (4.34) и (4.36) получим

$$\begin{aligned} (\alpha_{\beta\gamma} - B)^2 - 4A(\gamma - C) &\leq 0, \\ (\alpha_{\beta\gamma} - B')^2 + 4A'(\gamma - C') &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Действуя таким же образом, как и при выводе (4.25), получим решение для γ из любого из двух соотношений (4.38),

взятых в форме равенств; оба они приводят к одинаковому результату:

$$\gamma = C' - \frac{1}{4A'} (\alpha_{\beta\gamma} - B')^2. \quad (4.39)$$

Используя теперь γ из (4.21), получим

$$\frac{c_p - \bar{c}_v}{T_0} = \frac{C_{ijkl}\alpha_{ij}\alpha_{kl}}{S_{\beta\gamma\beta\gamma} - \bar{\Lambda}_{\beta\gamma\beta\gamma}} - \frac{3[\alpha_{\beta\gamma} - \bar{\alpha}_{\beta\gamma}]^2}{S_{\beta\gamma\beta\gamma} - \bar{\Lambda}_{\beta\gamma\beta\gamma}}. \quad (4.40)$$

Для нахождения c_p можно использовать любую компоненту $\alpha_{\beta\gamma}$. Полагая, что x_1 совпадает с направлением оси монотропии, и используя компоненту α_{11} , из (4.40) получим

$$\frac{c_p - \bar{c}_v}{T_0} = \frac{C_{ijkl}\alpha_{ij}\alpha_{kl}}{S_{1111} - \bar{\Lambda}_{1111}} - \frac{3[\alpha_{11} - \bar{\alpha}_{11}]^2}{S_{1111} - \bar{\Lambda}_{1111}}. \quad (4.41)$$

Из (4.33) следует

$$\bar{\Lambda}_{11mm}\bar{C}_{mm11} = I_{1111} = 1, \quad (4.42)$$

и для применения соотношения (4.41) необходимо определить $\bar{\Lambda}_{1111}$. Для изотропных материалов, вообще говоря, справедливо $S_{ijmn}C_{mnlk} = I_{ijkl}$, и для $i = j = k = l = 1$ имеем

$$S_{11mn}C_{mn11} = 1. \quad (4.43)$$

Следовательно, (4.42) и (4.43) имеют одинаковый вид. Далее нам известно, что для изотропного материала $S_{1111} = 1/E$. Таким образом, видно, что для двухфазных изотропных материалов

$$\bar{\Lambda}_{1111} = c_1/E_1 + c_2/E_2. \quad (4.44)$$

При этих условиях также получим

$$C_{ijkl}\alpha_{ij}\alpha_{kl} = C_{1111}\alpha^2 = 3k\alpha^2. \quad (4.45)$$

Подставив (4.44) и (4.45) в (4.41), придем к окончательному результату

$$\frac{c_p - \bar{c}_v}{3T_0} = c_1 k_1 \alpha_1^2 + c_2 k_2 \alpha_2^2 - \frac{(\alpha_{11} - c_1 \alpha_1 - c_2 \alpha_2)^2}{\frac{1}{E_{11}} - \frac{c_1}{E_1} - \frac{c_2}{E_2}}, \quad (4.46)$$

где E_{11} — эффективный модуль Юнга двухфазного трансверсально изотропного материала для направления вдоль оси монотропии, α_{11} — эффективный коэффициент термического расширения в том же направлении, определенный согласно (3.32). Удельную теплоемкость при постоянной деформации можно определить из (4.5) в сочетании с выражением (4.46) для c_p .

9.5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной главе, посвященной эффективным термическим свойствам, мы привели только точные результаты в рамках линейной теории. Аппроксимациям эмпирических закономерностей посвящено весьма много работ. Исследования в этой области имеют действительно богатую историю. Максвелл [9.10] и Рэлей [9.11] получили приближенные решения для электропроводности непрерывной фазы, содержащей цилиндрические и сферические включения другой фазы.

При описании теплопроводности мы касались только случаев сферических и расположенных параллельно друг к другу цилиндрических включений. Нетрудно убедиться, что включения более общего вида можно рассмотреть, используя эллипсоидальную форму включений, как это было сделано в разд. 3.5, или при помощи моделей с произвольно ориентированными волокнами или пластинчатыми включениями, как в разд. 4.4 и 4.5. Такая работа была выполнена Полдером и Ван Сантенем [9.12], определившими диэлектрические постоянные среды с малой объемной долей произвольно ориентированных эллипсоидов. Общий подход к задаче теплопроводности среды при малой объемной доле включений приведен в работах Рочи и Аквивоса [9.13, 9.14].

Как упоминалось ранее, оценки для характеристик теплопроводности можно вывести способом, сходным и более простым, чем тот, которым мы пользовались для оценки упругих свойств в гл. IV. Ссылки на работы в этом направлении можно найти в исчерпывающем обзоре Хэйла [9.15], посвященном эффективным «физическим» свойствам. Для этих характеристик имеются процедуры нахождения верхней и нижней оценок, использующие n -точечные корреляционные функции, обеспечивающие большую информацию о структуре фаз, чем просто определение объемных долей. Работы этого типа выполнены Бераном [9.16], Миллером [9.17], использовавшими идеализированную геометрическую ячейку, а также Элсайдом и Мак-Коем [9.18].

Интересно, что в случае двух фаз для расчета эффективных коэффициентов термического расширения и удельных теплоемкостей не требуется введение моделей с частными геометрическими характеристиками. Эти свойства зависят только от типа симметрии эквивалентной гомогенной среды. Однако они зависят также и от эффективных упругих свойств, которые должны быть известны либо из экспериментальных данных, либо из теоретического расчета, основанного на частной геометрической модели.

Следует также отметить, что для определения эффективных термоупругих свойств применялся метод самосогласования, обсужденный в разд. 2.5 (см., например, работы Будянского [9.19] и Лоуза [9.20]).

Важно упомянуть, что цикл термообработки может вызвать в композитах на основе полимеров эффекты усадки, которые аналогичны эффектам, вызванным термоупругими напряжениями. Кроме того, влага или пары из внешней среды могут диффундировать в композиты и вызвать эффекты набухания. Задача диффузии влаги аналогична задаче теплопроводности, а обусловленное эффектом набухания напряженное состояние сходно с напряженным состоянием, вызванным термическими эффектами.

ЗАДАЧИ

1. Исходя из представления о термодинамическом потенциале Гиббса, данном в разд. 9.1, проведите полный вывод уравнений состояния для деформации и энтропии. Получите также соответствующую форму уравнения энергетического баланса.
2. Используя трехфазную модель из разд. 3.3, выведите формулу (2.20) для коэффициента теплопроводности в трансверсальной плоскости.
3. Из общего соотношения (3.28) выведите формулы (3.32) и (3.33) для коэффициентов термического расширения трансверсально изотропной среды.

4. Выведите соотношение

$$c_p - c_v = T_0 C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}$$

связывающее между собой удельные теплоемкости при постоянном объеме с тензором жесткости и коэффициентами термического расширения.

5. Композит, образованный двумя материалами, имеет одну непрерывную фазу, а другую — в виде дискретных включений. При какой форме включений — сферической, волокнистой или пластинчатой — значения коэффициентов теплопроводности и термического расширения будут наибольшими и наименьшими? Примите, что композит макроскопически изотропен.
6. Проблема диффузии влаги в волокнистые композиты может быть связана с формулировкой ограничений, которые следует учитывать при проектировании. Выведите полную систему определяющих уравнений, используя аналогию между диффузией влаги и теплопроводностью, включая вызванные ими напряженные состояния.
7. Рассмотрите композит, образованный непрерывной фазой с малой объемной долей сферических включений. Используя решение для эффективного объемного модуля при данных условиях, получите решение для эффективного коэффициента термического расширения в виде

$$\alpha = \alpha_M + f(\) c,$$

где $f(\)$ зависит от свойств обеих фаз.

8. Многие типы волокон анизотропны. Выделите метод, при помощи которого можно определить коэффициенты термического расширения для системы из выпрямленных параллельных трансверсально изотропных волокон в изотропной матрице.
9. Композитный материал подвергается действию однородной возрастающей температуры. Как можно найти оценку межфазных напряжений, нарушающих связь на границах раздела фаз, в случае композита, образованного распределенными в непрерывной матрице сферическими включениями?

ЛИТЕРАТУРА

- 9.1. Truesdell C., Toupin R. A. — In: *Handbuch der Physik* (S. Flügge, ed.). — Berlin: Springer, 1960, v. 3, No. 1.
- 9.2. Truesdell C., Noll W. — In: *Handbuch der Physik* (S. Flügge, ed.). — Berlin: Springer, 1965, v. 3, No. 3.
- 9.3. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. — *J. Appl. Phys.*, 1962, v. 33, p. 3125.
- 9.4. Kerner E. H. The electrical conductivity of composite materials. — *Proc. Phys. Soc.*, 1956, v. B69, p. 802.
- 9.5. Hashin Z. Theory of fiber-reinforced materials. — NASA CR-1974, 1972.
- 9.6. Левин В. М. О коэффициентах температурного расширения неоднородных материалов. — *Изв. АН СССР, МТТ*, 1967, с. 88–94.
- 9.7. Rosen B. W., Hashin Z. Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1970, v. 8, p. 157.
- 9.8. Schapery R. A. Thermal expansion coefficients of composite materials based on energy principles. — *J. Comp. Mater.*, 1968, v. 2, p. 380.
- 9.9. Rosen B. W. Thermoelastic energy functions and minimum energy principles for composite materials. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1970, v. 8, p. 5.
- 9.10. Maxwell J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. — New York: Dover, 1954.
- 9.11. Rayleigh L. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. — *Philos. Mag.*, 1892, v. 34, p. 481.
- 9.12. Polder D., Van Santen J. H. The effective permeability of mixtures of solids. — *Physica*, 1946, v. 12, p. 257.
- 9.13. Rocha A., Acrivos A. On the effective thermal conductivity of dilute dispersions: General theory for inclusions of arbitrary shape. — *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1973, v. 26, p. 217.
- 9.14. Rocha A., Acrivos A. On the effective thermal conductivity of dilute dispersions: Highly conducting inclusions of arbitrary shape. — *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1973, v. 26, p. 441.
- 9.15. Hale D. K. The physical properties of composite materials. — *J. Mater. Sci.*, 1976, v. 11, p. 2105.
- 9.16. Beran M. J. Use of the variational approach to determine bounds for the effective permeability in random media. — *Nuovo Cim.*, 1965, v. 38, p. 771.
- 9.17. Miller M. N. Bounds on the effective electrical, thermal and magnetic properties of heterogeneous materials. — *J. Math. Phys.*, 1969, v. 10, p. 1988.
- 9.18. Elsayed M. A., McCoy J. J. Effective properties of three phase materials. — *Fibre Sci. Tech.*, 1974, v. 7, p. 281.
- 9.19. Budiansky B. Thermal and thermoelastic properties of isotropic composites. — *J. Comp. Mater.*, 1970, v. 4, p. 286.
- 9.20. Laws N. The overall thermoelastic moduli of transversely isotropic composites according to the self-consistent method. — *Int. J. Eng. Sci.*, 1974, v. 12, p. 79.

ДОПОЛНЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ АРМИРОВАНИЯ

А. И. Бейль, Н. П. Жмудь

Метод расчета эффективных характеристик сред с малой объемной долей включений, основанный на использовании решения задачи об единичном включении в бесконечной среде, имеет давнюю историю. Он предложен применительно к сферическим включениям для процессов, описываемых гармоническими уравнениями, и описан в 1870 г. Максвеллом в его знаменитой книге «A Treatise on Electricity and Magnetism», а затем использован в 1905 г. Эйнштейном при расчете эффективной вязкости суспензии жестких сферических частиц в несжимаемой вязкой жидкости. Соответствующая задача для упругой среды с упругими включениями рассмотрена в работах Хашина и Дьюи. Решения обобщенных задач для эллипсоидальных включений (введение формфактора) получены Фрике в задаче Максвелла, Джеффри в задаче Эйнштейна, Эшелби в задаче Хашина.

Метод расчета эффективных характеристик сред с включениями сферической или цилиндрической формы, образующими регулярную решетку, предложен в 1892 г. Рэлеем для процессов, описываемых гармоническим уравнением. Расчет эффективных упругих характеристик сред с регулярной решеткой цилиндрических включений рассмотрен в работах Г. А. Ванина на основе решения двоякопериодической задачи теории упругости. Расчет эффективных упругих свойств слоистых сред, начатый Фойгтом и Рейссом, был развит в работах В. В. Болотина, С. Г. Лехницкого и ряда других авторов, указанных в дополнительной литературе.

Предложено и исследовано много упрощенных инженерных подходов, перечислить которые здесь не представляется целесообразным. Развитие статистических моделей представляет собой отдельную тему.

В данной книге рассмотрены только детерминированные модели гетерогенных сред с эллиптическими включениями и как

частные вырожденные случаи — с включениями сферической, цилиндрической (вытянутый эллипсоид) и пластинчатой (сплюснутый эллипсоид) формы. Для несферических включений обсуждены только два вида ориентации: параллельное расположение соответствующих осей и хаотически равновероятное в пространстве или плоскости.

Приведены главным образом расчетные формулы для эффективных характеристик гетерогенных сред, составленных из линейно-упругих изотропных компонентов. Для случаев, когда один из компонентов является абсолютно жестким ($k \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow \infty$ или $1/k \rightarrow 0$, $1/\mu \rightarrow 0$), несжимаемым ($k \rightarrow \infty$, $\nu = 1/2$ или $1/k \rightarrow 0$) или абсолютно податливым, как в пористой среде ($\mu \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ или $1/\mu \rightarrow \infty$, $1/k \rightarrow \infty$), соответствующие формулы получаются простым вырождением. Пользуясь аналогией между упругими характеристиками несжимаемых твердых тел и вязкостью жидкостей, можно при некоторых ограничениях получить соответствующие результаты для гетерогенных вязких сред. Упруго-вязкоупругая аналогия позволяет рассчитать вязкоупругие характеристики. Приведенные в книге формулы для эффективных коэффициентов теплопроводности можно переписать для эффективных коэффициентов диффузии, диэлектрической и магнитной проницаемостей, пользуясь физическими аналогиями.

В табл. I—IV представлены общие виды функциональных зависимостей от конкретных аргументов, сгруппированные по исходным расчетным моделям, с номерами соответствующих развернутых формул в тексте. Дадим далее краткую характеристику особенностей рассмотренных в книге моделей.

Основные допущения, принятые при построении сред с малой объемной долей ($c \ll 1$) включений (табл. I), состоят в следующем. Метод решения основан на том, что основные возмущения соответствующих полей переменных относятся к области, непосредственно прилегающей к включению. Считается, что частицы достаточно удалены друг от друга, так что при вычислении средних по объему значений соответствующих полей интегральное возмущение рассчитывается с использованием в качестве подынтегрального выражения решения задачи для бесконечной среды с единичным включением, а интеграл по конечному объему заменяется несобственным. Значение этого интеграла приписывается конечному объему, соответствующему данному.

Расчетные формулы характеристик сред с малой объемной долей включений кроме своего непосредственного назначения служат еще и критерием проверки на вырождаемость более сложных зависимостей для сред с произвольной объемной долей включений. Следует отметить, что при заданной допустимой

погрешности по мере уменьшения различия между свойствами матрицы и включения диапазон применимости формул расширяется, т. е. их можно использовать и при больших объемных долях.

В частности, многие рекомендованные в литературе конечные расчетные формулы, полученные при помощи более сложных моделей, представляют собой решения задачи для цилиндрических включений, выведенные описанным выше методом.

Следующие два типа моделей разработаны для расчета эффективных характеристик сред с произвольной объемной долей включений. При построении этих моделей введены существенные упрощающие предположения. Они основаны на стремлении избежать решения задачи для сложной многосвязной области и использовать простые решения для простых составных тел. В первой из этих моделей (табл. II) предполагается, что включение окружено оболочкой из матрицы, так что ее внешние границы эквидистантны. Отношение объема включения к суммарному объему составного тела равно s . Чтобы заполнить пространство такими составными телами, предполагается, что в промежутках помещены геометрически подобные составные тела меньшего размера, в оставшихся промежутках — тела еще меньшего размера и т. д. вплоть до бесконечно малых. Эта модель названа при переводе *полидисперсной*. На основании вариационных принципов теории упругости получены верхние и нижние оценки упругих характеристик, которые для объемного модуля совпадают, а для модуля сдвига (для среды с цилиндрическими включениями — в плоскости изотропии) образуют вилку Хашина — Штрикмана.

В трехфазной модели (табл. III) единичное составное тело, аналогичное использованному в полидисперсной модели, помещено в бесконечную среду с неизвестными искомыми эффективными характеристиками. Модель позволяет получить единственное решение для модуля сдвига в плоскости изотропии. В рассмотренных моделях упругое взаимодействие соседних включений не учитывается, что не позволяет корректно оценить концентрацию напряжений около включений.

В качестве элемента для построения моделей макроскопически изотропных и монотропных сред, образованных хаотически ориентированными в плоскости или в пространстве волокнистыми или пластинчатыми (дискообразными) включениями (табл. IV), используется гетерогенный элемент среды с эффективными характеристиками, составленный из матрицы и параллельно ориентированных включений.

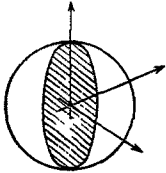
Следующей по сложности является модель среды с регулярной решеткой включений. В книге рассмотрен только очень част-

ный случай такой же модели для расчета упругих характеристик. Принято, что идеально-жесткие включения сферической формы образуют кубическую упаковку, причем объемная доля включений бесконечно близка к предельной для данной упаковки. Это позволяет получить только асимптотические оценки характеристик.

Аналогичная модель для цилиндрических включений, свободная от перечисленных ограничений, детально исследована в работах Г. А. Ванина [6, 7]. Моделям этого класса, позволяющим учесть концентрацию напряжений, а также моделям, усложненным локальными нерегулярностями, дефектами и т. д., по-видимому, принадлежит будущее, так как они могут послужить мостом к структурной теории прочности, описывающей предельное состояние композитов на уровне элементов — частиц разной формы, волокон, элементарных слоев.

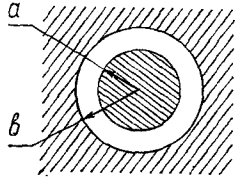
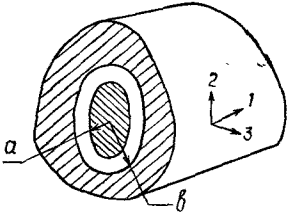
Таблицы, расположенные в порядке усложнения рассмотренных моделей, позволяют не только лучше ориентироваться в материале книги, но и свидетельствуют о прогрессе в решении основной задачи теории армирования — определении взаимосвязи между свойствами индивидуальных компонентов, их формой, расположением и эффективными свойствами гетерогенных сред.

Модели сред с малой объемной долей включений ($\bar{c} \ll 1$)

| Вид включения | Свойства компонентов | | Ограничения | Эффективные характеристики среды | | Номер формулы |
|--|----------------------|-----------------------------|--|---|---|---------------|
| | Включение | Матрица | | | | |
| Сфера  $a = b = d$ | упругое | упругая | | Модуль сдвига | $\mu = f(\mu_P, \mu_M, \nu_M, c)$ | (II-2.23) |
| | идеально-жесткое | упругая | | Объемный модуль | $k = f(k_P, k_M, \mu_M, c)$ | (II-2.26) |
| | | несжимаемая | | Модуль сдвига | $\mu = f(\mu_M, c)$ | (II-2.24) |
| | | несжимаемая вязкая жидкость | | Сдвиговая вязкость | $\eta = f(\eta_M, c)$ | (II-2.25) |
| | идеально-жесткое | упругая | Нерегулярное расположение включений; большая длина волны | Фазовая скорость | $v = f(\lambda, \mu, \rho_P, \rho_M, \omega, \nu_L, \nu_T, a, c)$ | (VII-6.22) |
| Коэффициент затухания | | | | $\zeta_2 = f(\lambda, \mu, \rho_P, \rho_M, \omega, \nu_L, \nu_T, a, c)$ | (VII-6.23) | |

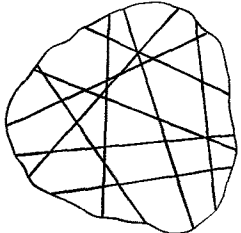
| Вид включения | Свойства компонентов | | Эффективные характеристики среды | | Номер формулы |
|---|--|---|--------------------------------------|--|-------------------------|
| | Включения | Матрица | | | |
| <p>Составная сфера</p>  | упругое | упругая | Объемный модуль | $k = f(k_p, \mu_p, \mu_M, c)$ | (II-3.17) |
| | | | Коэффициент термического расширения | $\alpha = f(\alpha_p, \alpha_M, k_p, k_M, k)$ | (IX-3.30) |
| | Удельная теплоемкость | $c_p - \bar{c}_v = f(\alpha_p, \alpha_M, k_p, k_M, k, c)$ | (IX-4.29) | | |
| <p>поры</p> <p>$C_{ijkl} = 0$</p> | | упруго-пластическая | Зависимость пористости от давления | | (VIII-1.10, 1.17, 1.20) |
| <p>Составной цилиндр бесконечной длины</p>  | упругое | упругая | Модуль Юнга | $E_{11} = f(E_p, E_M, \nu_p, \nu_M, \mu_M, c)$ | (III-2.5) |
| | | | Объемный модуль | $K_{23} = f(k_p, k_M, \mu_p, \mu_M, c)$ | (III-2.8) |
| | | | Модуль сдвига | $\mu_{12} = f(\mu_M, \mu_p, c)$ | (III-2.9) |
| | | | Коэффициент Пуассона | $\nu_{12} = f(\nu_p, \nu_M, k_p, k_M, \mu_M, c)$ | (III-2.7) |
| | | | Теплопроводности | $\bar{k}_{11} = \sum_{i=1}^N c_n \bar{k}_n$ | (IX-2.17) |
| | | | | $\bar{k}_{22} = f(\bar{k}_p, \bar{k}_M, c)$ | (IX-2.20) |
| | | | Коэффициенты термического расширения | $\alpha_{11} = f(\alpha_p, \alpha_M, k_p, k_M, E_{11}, c)$ | (IX-3.32) |
| | | | | $\alpha_{22} = f(\alpha_p, \alpha_M, k_p, k_M, K_{23}, E_{11}, \nu_{12}, c)$ | (IX-3.33) |
| Удельная теплоемкость | $c_p - \bar{c}_v = f(\alpha_p, \alpha_M, k_p, k_M, E_p, E_M, E_{11}, c)$ | (IX-4.46) | | | |

Трехфазные модели ($0 \leq c \leq 1$)

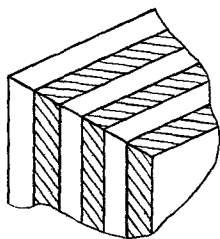
| Вид включения | Свойства компонентов | | Эффективные характеристики среды | | Номер формулы |
|--|----------------------|---------|--|------------------|---------------|
| | Включение | Матрица | | | |
| <p>Составная сфера в эквивалентной среде с искомыми эффективными свойствами</p>  | упругое | упругая | <p>Модуль сдвига</p> $A \left(\frac{\mu}{\mu_M} \right)^2 + 2B \left(\frac{\mu}{\mu_M} \right) + C = 0$ $A, B, C = f(\mu_P, \mu_M, \nu_P, \nu_M, c)$ | (II-4.12) | |
| | | | <p>Теплопроводность</p> $\bar{k} = f(\bar{k}_P, \bar{k}_M, c)$ | (IX-2.13) | |
| <p>Составной цилиндр бесконечной длины в эквивалентной среде с искомыми эффективными свойствами</p>  | упругое | упругая | <p>Модуль сдвига</p> $A \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_M} \right)^2 + 2B \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_M} \right) + C = 0$ $A, B, C = f(\mu_P, \mu_M, \nu_P, \nu_M, c)$ | (III-3.14, 3.15) | |
| | | | | | |

Модели сред, хаотически армированных упругими включениями

Дополнение. Основные расчетные формулы теории армирования

| Вид включений | Армирование | Ограничения | Эффективные характеристики среды | | Номер формулы |
|--|------------------|---|----------------------------------|---|---------------|
| волокнистые $0 \leq c \leq 1$  | в плоскости | | Модуль Юнга | $E = f(E_{11}, K_{23}, \mu_{12}, \mu_{23}, \nu_{12})$ | (IV-4.24) |
| | | | Коэффициент Пуассона | $\nu = f(E_{11}, K_{23}, \mu_{12}, \mu_{23}, \nu_{12})$ | (IV-4.25) |
| | | $\nu_I = \nu_M = 1/2$ | Модуль Юнга | $E = f(E_I, E_M, c)$ | (IV-4.40) |
| | | $\nu_I = \nu_M = 1/4$ | | | (IV-4.41) |
| | пространственное | | Модуль Юнга | $E = f(E_{11}, K_{23}, \mu_{12}, \mu_{23}, \nu_{12})$ | (IV-4.15) |
| | | | Коэффициент Пуассона | $\nu = f(E_{11}, K_{23}, \mu_{12}, \mu_{23}, \nu_{12})$ | (IV-4.16) |
| | | $\nu_I = \nu_M = 1/2$ | Модуль Юнга | $E = f(E_I, E_M, c)$ | (IV-4.29) |
| | | | Модуль сдвига | $\mu = f(\mu_I, \mu_M, c)$ | (IV-4.28) |
| | | $cE_I \gg E_M$ $cE_I \gg k_M$ $\nu_I = \nu_M = 1/4$ | Модуль Юнга | $E = f(E_I, E_M, c)$ | (IV-4.35) |
| | | | | | |

пластинчатые



| | | | | |
|------------------|--|----------------------|--------------------------------------|-----------|
| в плоскости | $0 \leq c \leq 1$ | Модуль Юнга | $E = f(E_P, E_M, \nu_P, \nu_M, c)$ | (IV-5.6) |
| | | Коэффициент Пуассона | $\nu = f(E_P, E_M, \nu_P, \nu_M, c)$ | (IV-5.7) |
| пространственное | $\nu_I = \nu_M = 1/2$ $0 \leq c \leq 1$ | Модуль Юнга | $E = f(E_P, E_M, c)$ | (IV-5.28) |
| | | Модуль сдвига | $\mu = f(\mu_P, \mu_M, c)$ | (IV-5.26) |
| | $c \ll 1$ | Объемный модуль | $k = f(k_P, k_M, \mu_P, c)$ | (IV-5.12) |
| | | Модуль сдвига | $\mu = f(\mu_P, \mu_M, k_P, c)$ | (IV-5.14) |
| | $c \ll 1$ $E_I \gg E_M$ | Объемный модуль | $k = f(E_P, \nu_P, k_M, c)$ | (IV-5.17) |
| | | Модуль Юнга | $E = f(E_P, E_M, \nu_P, \nu_M, c)$ | (IV-5.19) |
| | | Модуль сдвига | $\mu = f(E_P, \nu_P, \mu_M, c)$ | (IV-5.18) |
| | $cE_I \ll E_M$ | Модуль Юнга | $E = f(E_P, E_M, \nu_P, \nu_M, c)$ | (IV-5.20) |
| | $cE_I \ll E_M$ $cE_I \gg k_M$ | Модуль Юнга | $E = f(E_P, E_M, \nu_P, \nu_M, c)$ | (IV-5.21) |

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974, 448 с.
2. Ашкенази Е. К. Прочность анизотропных древесных и синтетических материалов. — М.: Лесная промышленность, 1966, 167 с.
3. Бидерман В. Л. Пластинки и оболочки из ориентированных стеклопластиков. — В кн.: Прочность, устойчивость, колебания. Т. 2. — М.: Машиностроение, 1968, с. 211—242.
4. Болотин В. В., Гольденблат И. И., Смирнов А. Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. — М.: Стройиздат, 1972, 191 с.
5. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980, 375 с.
6. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. — Киев: Наукова думка, 1971, 232 с.
7. Ван Фо Фы Г. А. Конструкции из армированных пластмасс. — Киев: Техника, 1971, 220 с.
8. Волков С. Д., Ставров В. П. Статистическая механика композитных материалов. — Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1978, 210 с.
9. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях. — М.: Мир. Пер. с англ., под ред. Бувевича Ю. А., 1980, 224 с.
10. Гольденблат И. И., ред. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. — М.: Высшая школа, 1970, 407 с.
11. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. — М.: Наука, 1970, 280 с.
12. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. — М.: Машиностроение, 1965, 272 с.
13. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.: Физматгиз, 1957, 463 с.
14. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. — М.: Изд-во МГУ, 1976, 368 с.
15. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980, 512 с.
16. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970, 940 с.
17. Ляв А. Математическая теория упругости. — М. — Л.: ОНТИ, 1935, 674 с.
18. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопrotивление полимерных и композитных материалов, 3-е изд. — Рига: Зинатне, 1980, 572 с.
19. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975, 872 с.
20. Новожилов В. В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958, 370 с.
21. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977, 144 с.
22. Огибалов П. М., Суворова Ю. В. Механика армированных пластиков. — М.: Изд-во МГУ, 1965, 479 с.
23. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. — Л.: Наука, 1980, 280 с.
24. Рабинович А. Л. Введение в механику армированных полимеров. — М.: Наука, 1970, 482 с.
25. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979, 744 с.
26. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977, 384 с.

27. Рейнер М. Реология. — М.: Наука, 1965, 224 с.
28. Роценс К. А. Технологическое регулирование свойств древесины. — Рига: Зинатне, 1979, 224 с.
29. Седов Л. И. Механика сплошных сред. — М.: Наука, т. 1, 1976, 536 с.; т. 2, 1976, 574 с.
30. Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. — Рига: Зинатне, 1971, 238 с.
31. Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Структурная теория армированных пластиков. — Рига: Зинатне, 1978, 192 с.
32. Тарнопольский Ю. М., Розе А. В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. — Рига: Зинатне, 1969, 274 с.
33. Тарнопольский Ю. М., Скудра А. М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. — Рига: Зинатне, 1966, 256 с.
34. Упрочнение металлов волокнами. — М.: Наука, 1973, 207 с.
35. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. — М.: Наука, 1977, 400 с.
36. Копьев И. М., Овчинский А. С. Разрушение металлов, армированных волокнами. — М.: Наука, 1977, 240 с.
37. Рикардс Р. Б., Тетере Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. — Рига: Зинатне, 1974, 310 с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адкинс (Adkins J. E.) 281, 288
Акривос (Acrivos A.) 43, 65, 70, 73—
75, 309, 311
Амбарцумян С. А. 322
Андерсон (Anderson T. B.) 249, 251,
252, 255
Ахенбах (Achenbach J. D.) 220, 227,
228, 237, 238, 253, 254
Ашкенази Е. К. 322
- Батчер (Butcher B. M.) 261, 288
Бедфорд (Bedford A.) 237, 238, 248,
254
Бен-Амос (Ben-Amoz M.) 237, 254
Беран (Beran M.) 144, 146, 309, 311
Беренс (Behrens E.) 121, 146
Берт (Bert C. W.) 188, 211
Бидерман В. Л. 322
Бозе (Bose S. K.) 144, 146
Болотин В. В. 312, 322
Боуэн (Bowen R. M.) 248, 250, 255
Брендмайер (Brandmaier H. E.) 198,
212
Бреннер (Brenner H.) 65, 75
Бреховских Л. М. 220, 254
Бриллюэн (Brillouin L.) 227, 254
Будянский (Budiansky B.) 63, 75,
309, 311
Бувич Ю. А. 322
Булавс Ф. Я. 323
Бунаков В. А. 322
Буше (Boucher S.) 100, 102, 103, 104
Бэтчелор (Batchelor G. K.) 17, 36,
67, 72, 73, 75
- Вальс (Waals F. M.) 121, 146
Ван-дер-Поль (van der Pol C.) 57,
58, 62, 74
Ванин Г. А. (Ван Фо Фы) 312, 322
Ван-Сантен (Van Santen J. H.) 309,
311
Васильев В. В. 322
Волков С. Д. 322
Ву (Wu E. M.) 165, 166, 168—170,
175, 178, 189, 193, 200, 203, 212
- Гарсия (Garcia D. J.) 248, 250, 255
Гартман (Gurtman G. A.) 236, 254
Герман (Herrmann G.) 220, 227, 228,
237, 253
Германс (Hermans J. J.) 89, 104, 119,
120
Годдард (Goddard J. D.) 280, 288
Голдстейн (Goldstein H.) 246, 255
Грин А. (Green A. E.) 13, 35, 248,
255, 281, 288
Грин Дж. (Green J. T.) 72, 73, 75
Гросс (Gross B.) 18, 36, 276, 288
Гудьер (Goodier J. N.) 50, 160, 178
- Даниелс (Daniels H. E.) 195, 212
Дворак (Dvorak G. J.) 262, 268, 288
Джексон (Jackson R.) 249, 251—253,
255
Джерина (Jerina K.) 132, 146
Джеффри (Jeffery G. B.) 312
Драмхеллер (Drumheller D. S.) 237,
254
Друккер (Drucker D. C.) 28, 268,
287, 288
Дьюи (Dewey J. M.) 50, 74, 312
- Закей (Zakay V. F.) 288
Зейтц (Seitz F.) 36
Зерна (Zerna W.) 13, 35
- Ильюшин А. А. 322
Инграм (Ingram J. D.) 248, 255
- Карал (Karal F. C., Jr.) 248, 255
Карне (Carne T. G.) 99, 104
Качанов Л. М. 26, 36
Келлер (Keller J. B.) 248, 255
Кернер (Kerner E. H.) 57, 58, 62, 74,
118, 120, 296, 311
Ковин (Cowin S. C.) 41, 74
Кокс (Cox H. L.) 131, 146
Колеман (Coleman B. D.) 195, 212,
278, 288
Кон (Kohn W.) 229, 238, 254

- Копьев И. М. 323
 Королев В. Н. 322
 Крёнер (Kröner E.) 62, 75, 144, 146
 Кригер (Krieger I. M.) 71, 73—75
 Кристенсен (Christensen R. M.) 18,
 19, 36, 62, 74, 89, 104, 123, 129,
 135, 146, 165, 166, 168—170, 175,
 178, 203, 212, 248, 255, 271, 272,
 278, 288
 Кэрролл (Carroll M. M.) 257, 261, 288

 Ландау Л. Д. 68, 75
 Левин В. М. 99, 104, 297, 311
 Лехницкий С. Г. 180, 211, 312, 322
 Ли (Lee E. H.) 238, 254
 Лил (Leal G. L.) 280, 288
 Лифшиц Е. М. 68, 75
 Ло (Lo K. H.) 62, 74, 89, 104, 165,
 166, 168—170, 175, 178
 Ломакин В. А. 322
 Лоуз (Laws N.) 309, 311
 Лурье А. И. 322
 Ляв (Love A. E. H.) 111, 146, 322

 Мак-Дональд (MacDonad D.) 193,
 212
 Мак-Кой (McCoy J. J.) 248, 255, 309,
 311
 Мак-Лафлин (McLaughlin R.) 64, 75
 Максвелл (Maxwell J. C.) 309, 311,
 312
 Мал (Mal A. K.) 144, 146
 Малмейстер А. К. 322
 Малхерн (Mulhern J. F.) 268, 281,
 288
 Медлин (Medlin J.) 253, 255
 Мендельсон (Mendelson A.) 26, 36
 Миллер К. (Miller C.) 280, 288
 Миллер М. (Miller M. N.) 309, 311
 Минагава (Minagawa S.) 238, 254
 Моу (Mow C. C.) 242, 243, 254, 255
 Муки (Muki R.) 99, 104
 Мукхерджи (Mukherjee S.) 238, 254
 Мун (Moon F. C.) 238, 242, 254

 Найфе (Nayfeh A. H.) 237, 254
 Наниаро (Nanyaro A. P.) 193, 212
 Нахди (Naghdi P. M.) 26, 36, 248,
 255
 Немат-Нассер (Nemat-Nasser S.) 238,
 254
 Новацкий В. 322
 Новичков Ю. Н. 322

 Новожилов В. В. 322
 Нолл (Noll W.) 289, 311

 Образцов Н. Ф. 322
 Овчинский А. С. 323
 Огибалов П. М. 322

 Пагано (Pagano N. J.) 152, 160, 163,
 164, 170, 176, 178
 Пайпс (Pipes R. B.) 176, 178
 Пао (Pao Y. H.) 243, 254
 Пауль (Paul V.) 107, 146
 Пек (Peck J. C.) 236, 254
 Петрашень Г. И. 322
 Пипкин (Pipkin A. C.) 18, 36, 181,
 188, 211, 281, 287, 288
 Пирсон (Pearson J. R. A.) 288
 Победря Б. Е. 322
 Полдер (Polder D.) 309, 311
 Постма (Postma G. W.) 136, 146
 Прагер (Prager W.) 26, 28, 36

 Рабинович А. Л. 322
 Работнов Ю. Н. 322
 Рао (Rao M. S. M.) 262, 268, 288
 Рассел (Russel W. B.) 43, 74, 90, 97,
 104
 Рейнер М. (Reiner M.) 323
 Ривлин (Rivlin R. S.) 281, 288
 Рикардс Р. Б. 323
 Ричард (Richard T. G.) 61, 74
 Роджерс (Rogers T. G.) 268, 281, 288
 Розе А. В. 323
 Розен (Rosen B. W.) 83, 85, 104, 117,
 146, 195, 212, 297, 301, 303, 311
 Ропенс К. А. 323
 Роча (Rocha A.) 309, 311
 Рытов С. М. 220, 253
 Рэлей (Rayleigh Lord) 309, 311, 312

 Сан (Sun C. T.) 220, 227, 228, 237,
 253
 Све (Sve C.) 227, 254
 Седов Л. И. 323
 Сендецки (Sendeckyj G. P.) 212, 254,
 288
 Скудра А. М. 323
 Смирнов А. Ф. 322
 Смит (Smith J. C.) 62, 74
 Сокольников (Sokolnikoff I. S.) 10—
 12, 35
 Спенсер (Spencer A. J. M.) 181, 183,
 185, 188, 211, 268, 281, 287, 288

- Ставров В. П. 322
 Стерн (Stern M.) 238, 248, 254
 Суворова Ю. В. 322
- Тамуж В. П. 322**
 Тарнопольский Ю. М. 323
 Теннисон (Tennyson R. C.) 193, 212
 Терерс Г. А. 322, 323
 Тимошенко С. П. 160, 178
 Тирстен (Tiersten H. F.) 238, 248, 254
 Трусделл (Truesdell C.) 289, 311
 Тупин (Tourpin R. A.) 289, 311
 Турнбалл (Turnbull D.) 36
- Уитни (Whitney J. M.) 132, 146**
 Уиттьер (Whittier J. S.) 236, 254
 Уолтерс (Walters W.) 288
 Уонг (Wong H. W.) 253, 255
 Уэлпол (Walpole L. J.) 107, 144, 146
- Фёникс (Phoenix S. L.) 195, 212**
 Франкель (Frankel N. A.) 65, 70, 75
 Фрике (Fricke H.) 312
- Халфин (Halpin J. C.) 132, 145, 146**
 Хэппель (Happel J.) 65, 75
 Харлоу (Harlow D. G.) 195, 212
 Хаттон (Hutton J. F.) 288
 Хашин (Hashin Z.) 52, 55, 74, 83, 85, 104, 107, 115, 117, 119, 146, 261, 269, 270, 272, 288, 296, 297, 301, 311, 312
 Хегемејер (Hegemeier G. A.) 237, 254
 Хершей (Hershey A. V.) 62, 74
 Хилл (Hill R.) 26, 36, 63, 75, 85, 104, 107, 115, 146, 189, 191, 198, 212
- Хирмон (Hearmon R. F. S.) 152, 178, 180, 211
 Ходж (Hodge P. G., Jr.) 26, 28, 36
 Холт (Holt A. C.) 257, 261, 288
 Хэйл (Hale D. K.) 309, 311
 Хэмстад (Hamstad M. A.) 200
- Цай (Tsai S. W.) 145, 152, 178, 189, 212**
 Цвебен (Zweben C.) 195, 212
- Чамис (Chamis C. C.) 254**
 Чедвик (Chadwick P.) 261, 288
 Чен (Chen H. S.) 73, 75
 Чен (Chen C. H.) 121, 146
 Ченг (Cheng S.) 121, 146
 Чу (Chu T. Y.) 261, 288
- Шепери (Shapery R. A.) 270, 272, 288, 301, 311**
 Шермергор Т. Д. 323
 Штернберг (Sternberg E.) 99, 104
 Штрикман (Shtrikman S.) 107, 146, 296, 311
- Эверстайн (Everstine G. C.) 181, 188, 211**
 Эйнштейн (Einstein A.) 51, 70, 74, 312
 Элсайд (Elsayed M. A.) 309, 311
 Эринген (Eringen A. C.) 248, 255
 Эшелби (Eshelby J. D.) 30, 36, 44, 74, 90, 91, 92, 93, 94, 101, 102, 104, 312
- Яханмир (Jahanmir M.) 238, 248, 254**

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Акустическая мода 227
Амплитуда волны 25, 214
Аналогия
— упруго-вязкая 17
— упруго-вязкоупругая 24, 269
Армирование в плоскости 126, 134
— пространственное 122, 135
— хаотическое 100
- Вектор теплового потока 292
Взаимопроникающие сетки 42
Включение 42
— пластинчатое 76
— сферическое 37
— цилиндрическое 76
— эллипсоидальное 90
Волна гармоническая 214
— импульсная 215
— нестационарная 227
— поперечная 215, 216
— продольная 215, 216
— сдвиговая 216
Волновое число 220
Волновой фильтр 227
Волокно конечной длины 90
— нерастяжимое 281, 282
Вязкость 17
— суспензии 51
— эффективная 22, 71
Вязкоупругость 18
— композитов 268
- Гетерогенность 39
Гипотеза Кирхгофа — Лява 155
— континуума 38
— эквивалентной гомогенности 39
Гомогенность 39
— макроскопическая 40
— статистическая 40
— эквивалентная 39
— эффективная 39
Границы упругих свойств по Рейссу 107
— — — — Фойгту 107
Граничные условия 15
- Деформация средняя 40
Дисперсионные кривые 227
Длина волны 213
Допустимое поле перемещений 15
- Закон Гука 11
— теплопроводности Фурье 291
— течения 266
- Изгиб консоли 285
— цилиндрический 159
Изотропия пластичности 27
— упругости 14
Импеданс 219
- Композит гибридный 202
— слоистый 147
— — антисимметричный 159
— — симметричный 159
Константы Ламе 14
Концепция пограничного слоя 181
Коэффициент (ы) виртуальный массовый 250
— затухания 25, 247
— Пуассона 15
— — допустимые значения 81
— теплопроводности 292
— — эффективный 294
— термического расширения 291
— — — эффективный 301
Критерий максимальных деформаций 194
— — напряжений 194
— Мизеса 28
— — обобщенный 189
— предельного состояния 188
— прочности 188
— тензорный полиномиальный 189
— Треска 28
— Хилла 191
- Масштаб неоднородности 39
Матрица 42
— пластическая 262

- Метод головного импульса 236
 — самосогласования 64
 Модель композита полидисперсная 314
 — — — со сферическими частицами 51, 294
 — — — с цилиндрическими частицами 82, 297
 — — — трехфазная
 — — — со сферическими частицами 56
 — — — с цилиндрическими частицами 86
 — — хаотически армированная
 — — — волокнами 122
 — — — пластинчатыми включениями 133
 Модуль (и) комплексный 20
 — объемный 15
 — — — эффективный 51
 — — — при плоском деформированном состоянии 79
 — сдвига 15
 — — — эффективный 46
 — — — эффективные 38
 — Юнга 15
 — — — эффективный 78
 Монослой изотропный 158
 — ортотропный 158, 159
 Монотропия *см.* Трансверсальная изотропия
- Нагружение нейтральное 27
 Напряжение среднее 40
 — упругой поляризации 108
 Напряженное состояние допустимое 16
 — — плоское 191, 192
 Начальные условия 233
 Нелинейность геометрическая 256
 — физическая 256
 Неоднородность 39
 Неравенство Клаузуса — Дюгема 290
 — производства энтропии 290
 — энергетическое 28
- Обозначения безындексные 18
 — матричные 12
 — сокращенные 12
 Ортотропия прочности 190, 191
 — упругости 13
 Отражение волны 216, 218
- Параметры возмущения 250
 Первое разрушение слоя 195
 Податливость комплексная 22, 276
 — упругая 16, 80
 Порядок теории 178
 Постулат Друккера 28
 Потенциал бигармонический 112
 — векторный 223
 — гравитационный 112
 — скалярный 223
 — термодинамический
 — — Гельмгольца 290
 — — Гиббса 293
 Правило Прагера 29
 — смеси 85
 — упрочнения 28, 265
 — Циглера 29
 Представительный элемент объема 40
 Преобразование Лежандра 290
 — тензоров 151
 Принцип вариационный Лагранжа 166
 — виртуальной работы 108
 — Гамильтона 237
 — Эшелби 30
 Проект маховика 202
 — оптимальный 198
 — сосуда давления 198
- Разгрузка 27
 Разложение Гельмгольца 223
 Рассеяние некогерентное 214
 — Рэлея 247
- Симметрия среды 12
 Сингулярное направление 184
 Синтез Фурье 230
 Скорость распространения волны 25, 214, 216
 Соотношения дисперсионные 222
 — Коши 11
 — напряжение — деформация
 — — — вязкоупругости 18
 — — — пластичности 30
 — — — упругости 14
 — определяющие
 — — теории пластин 155
 — — термоупругости 289
 Сосредоточенная сила 183
 Средняя деформация 40
- Тангенс потерь 22, 274

- Тензор жесткости 11
 — коэффициентов теплопроводности 292
 — — термического расширения 291
 — параметров упрочнения 29
 — упругих податливостей 16
 — эффективных коэффициентов
 — — — теплопроводности 294
 — — — термического расширения 301
 Теорема о минимуме дополнительной энергии 16
 — — — потенциальной энергии 16
 Теория армирования 312
 — вязкоупругости 18
 — невязкой пластичности 25, 27, 30
 — пластичности 25
 — скоростного типа (пластичности) 25
 — слоистых пластин
 — — — классическая 154
 — — — уточненная 165
 — смазки 66
 — смесей 245, 248
 — упругости 10
 — Флоке 220, 238
 Трансверсальная изотропия прочности 191
 — — упругости 13
 Трещина в анизотропном теле 186
 Трещиностойкость динамическая 197
 Удельная теплоемкость при постоянной деформации 292
 — — — постоянном напряжении 293
 — — изотропной среды 304
 — — трансверсально изотропной среды 306
 — — эффективная 301
 Упрочнение изотропное 29
 — кинематическое 29
 Уравнение (я) баланса импульсов 11
 — Лагранжа 246
 — локального баланса энергии 290
 — Навье — Стокса 17
 — неразрывности 17
 — Прандтля — Рейсса 28
 — равновесия 11
 — совместности деформаций 11
 — Халфина — Цая 145
 Условия непрерывности на границе раздела 40
 Фазовая скорость 215
 Формула (ы) Серре — Френе 282, 285
 — Эйнштейна 51
 — Эшелби 35
 Функция источника тепла 290
 — Лагранжа 245
 — нагружения 26
 — ползучести 19, 276
 — релаксации 18
 — текучести 26, 263
 Энергия деформирования 12
 — дополнительная 16
 — — термоупругая 302
 — потенциальная 15
 — — термоупругая 301
 — свободная 290
 Энтропия 292
 Эффект (ы) Баушингера 191
 — дисперсии 25
 — затухания 25
 — кромочный 170
 — ньютоновские 72, 277
 — предельной частоты 227
 — рассеяния 243
 Эффективные жесткости 38, 40

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5

Предисловие 7

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД 9

1.1. Теория упругости 10

Краевая задача 11

Энергия деформирования 12

Частные виды симметрии 12

Теоремы о минимуме 15

Аналогия с механикой вязкой жидкости 17

Обозначения 18

1.2. Теория вязкоупругости 18

Соотношения напряжение — деформация 18

Вязкоупругие жидкости 22

Упруго-вязкоупругая аналогия 24

Распространение волн 24

1.3. Теория пластичности 25

Уравнения состояния 26

Функции текучести 27

Закон течения 28

Упрочнение 28

1.4. Принцип Эшелби 30

Литература 35

Глава II. ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ СРЕДЫ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ 37

2.1. Принцип эквивалентной гомогенности 38

Осреднение по объему 40

Среды с малой объемной долей включений 43

Энергетические методы 45

2.2. Модель среды с малой объемной долей включений 46

Модуль сдвига 46

Объемный модуль 51

2.3. Полидисперсная модель 51

Объемный модуль 52

Модуль сдвига 55

2.4. Трехфазная модель 56

2.5. Метод самосогласования 62

2.6. Модель среды с объемной долей включений, близкой к предельной 64

2.7. Некоторые общие замечания 70

Задачи 73

Литература 74

Глава III. ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ СРЕД С ВКЛЮЧЕНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И ПЛАСТИНЧАТОЙ ФОРМЫ 76**3.1. Трансверсально изотропная среда 77**

Жесткости 77

Податливости 80

Допустимые значения коэффициентов Пуассона 81

3.2. Полидисперсная модель среды с цилиндрическими включениями 82

Модуль Юнга 83

Другие свойства 84

3.3. Трехфазная модель среды с цилиндрическими включениями 86**3.4. Влияние длины волокон 90**

Постановка задачи 90

Сдвиговые свойства 93

Модуль Юнга и другие константы 96

3.5. Среда с малой объемной долей пластинчатых включений 99

Задачи 103

Литература 104

Глава IV. НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ; ДАЛЬНЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ 105**4.1. Макроскопически изотропная среда 106**

Верхняя оценка 107

Поле деформаций 110

Численные оценки 113

4.2. Трансверсально изотропная среда 115**4.3. Анализ выражений для эффективных модулей 116****4.4. Свойства макроскопически изотропных волокнистых сред 122**

Пространственное армирование 122

Армирование в плоскости 126

Асимптотические оценки 127

4.5. Свойства макроскопически изотропных сред с пластинчатыми включениями 133

Армирование в плоскости 134

Армирование в пространстве 135

Среда с несжимаемыми фазами 139

4.6. Резюме и выводы 140

Задачи 145

Литература 146

Глава V. СЛОИСТЫЕ КОМПОЗИТЫ 147

- 5.1. Поворот координатных осей 148
 - Преобразование тензоров 151
 - Макроскопически изотропные свойства 152
- 5.2. Классическая теория слоистых пластин 154
 - Определяющие соотношения 155
 - Частные случаи 158
- 5.3. Цилиндрический изгиб 159
 - Точное решение 160
 - Гипотеза Кирхгофа — Лява 162
 - Пример 162
- 5.4. Уточненная теория 165
- 5.5. Кромочные эффекты 170
 - Задачи 177
 - Литература 178

Глава VI. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ, ПРОЧНОСТЬ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ 179

- 6.1. Концепция пограничных слоев в теории упругости анизотропных тел 180
 - Двумерная теория 181
 - Действие сосредоточенной силы 183
 - Трещина в существенно анизотропной среде 186
- 6.2. Критерии предельного состояния 188
 - Обобщенный критерий Мизеса 189
 - Тензорный полиномиальный критерий 189
 - Другие критерии; некоторые соображения 194
- 6.3. Проектирование сосудов давления, армированных волокнами 198
 - Цилиндрический сосуд 199
 - Сферический сосуд 201
 - Комбинированное армирование 202
- 6.4. Проектирование маховиков из волокнистых композитов 202
 - Расчет 203
 - Оценка результатов 207
 - Обсуждение проекта 208
- Задачи 211
- Литература 211

Глава VII. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН 213

- 7.1. Волны в эквивалентной гомогенной среде 214
- 7.2. Прохождение и отражение волн в слоистых средах 216
 - Скорости волн 216
 - Отражения волн 218

- 7.3. **Дисперсионные соотношения** 219
 Распространение волн перпендикулярно слоям 220
 Распространение волн в плоскости укладки слоев 291
 Типичные дисперсионные кривые 227
- 7.4. **Нестационарные волны в слоистой среде** 227
 Обобщенное решение 229
 Задачи с начальными условиями 233
- 7.5. **Нестационарные волны в трехмерно периодической среде** 238
- 7.6. **Затухание вследствие случайных неоднородностей среды** 242
 Эффект рассеяния 243
 Основные соотношения теории смесей 245
 Дисперсия и затухание 247
- 7.7. **Применение теории смесей. Задача о динамической неустойчивости в колоннах с «кипящим» слоем** 248
 Задачи 253
 Литература 253

Глава VIII. НЕУПРУГИЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ 256

- 8.1. **Пластическая деформация пористых сред** 257
- 8.2. **Пластическая деформация волокнистых сред** 262
 Функция текучести 263
 Правило упрочнения 265
 Закон течения 266
- 8.3. **Вязкоупругие свойства композитов** 268
 Уруго-вязкоупругая аналогия 269
 Нижняя и верхняя оценки 271
 Распространение волн 272
- 8.4. **Вязкоупругая суспензия** 275
 Малые деформации 276
 Неньютоновское течение 277
- 8.5. **Большие деформации волокнистых сред** 281
 Постановка задачи 281
 Деформация консоли 285
 Задачи 287
 Литература 288

Глава IX. ЭФФЕКТИВНЫЕ ТЕРМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА 289

- 9.1. **Термоупругость. Уравнения состояния** 289
 Применение термодинамического потенциала Гельмгольца 290
 Применение термодинамического потенциала Гиббса 292

9.2. Теплопроводность 293

Полидисперсная модель со сферическими включениями 294

Анизотропная среда 296

9.3. Коэффициент термического расширения 297**9.4. Удельные теплоемкости 301**

Постановка задачи 301

Макроскопически изотропная среда 304

Трансверсально изотропная среда 306

9.5. Обсуждение результатов 309

Задачи 310

Литература 311

ДОПОЛНЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ АРМИРОВАНИЯ 312**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА 322****ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ 324****ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ 327**

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Ричард М. Кристенсен

**ВВЕДЕНИЕ
В МЕХАНИКУ КОМПОЗИТОВ**

Научный ред. П. Я. Корсоюцкая
Мл. научн. ред. Р. И. Пяткина
Художник В. Н. Конюхов
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Н. И. Манохина
Корректор А. Я. Шехтер

ИБ № 2803

Сдано в набор 18.05.81. Подписано к печати 08.01.82.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Гарнитура лите-
ратурная. Печать высокая. Объем 10,50 бум. л. Усл. печ. л.
21,0. Усл. кр.-отт. 22,04. Уч.-изд. л. 18,29. Изд. № 1/1422.
Тираж 5300 экз. Зак. 1162. Цена 3 р. 10 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП
1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие орде-
на Трудового Красного Знамени Ленинградского объедине-
ния «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполи-
графпрома при Государственном комитете СССР по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052,
г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.