Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО, Л. Д. АКУЛЕНКО, Б. Н. СОКОЛОВ

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

32.81
Ч-49
УДК 62-50

Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н., **Управление колебаниями.**— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.— 384 с.

Монография посвящена проблемам управления динамическими колебательными системами. Разработаны методы и дано решение задач оптимального управления колебаниями. Развиты приближенные методы оптимального управления, опирающиеся на сочетание теории оптимального управления и теории колебаний (методы малого параметра, метод усреднения). Получен ряд точных и приближенных решений задач об оптимальном движении линейных и нелинейных систем, содержащих колебательные и вращательные звенья. В качестве приложений исследованы проблемы управления движением при помощи малых сил, управляемые вращения твердого тела вокруг центра масс, управление маятниковыми системами и грузоподъемными машинами, оптимизация параметров колебательных систем и др.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров, аспирантов, специализирующихся в области процессов управления, механики, теории колебаний, прикладной математики.

Табл. 1, илл. 65, библ. 270.

Ч $\frac{30501-062}{053(02)-80}$ 181-80. 1502000000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Управляемые динамические колебательные системы широко распространены в различных областях техники, механики, радиоэлектроники и т. д. Эти объекты обычно описываются системами линейных или нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащими управляющие воздействия и имеющими решения колебательного или вращательного типа. Проблема построения оптимального управления для таких систем может быть поставлена и исследована в рамках теории оптимального управления и, прежде всего, на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина. Разработке приближенных методов оптимального управления и решению задач управления для колебательных систем посвящены исследования Н. Н. Красовского, Н. Н. Моисеева, В. А. Троицкого и других.

Задачи оптимального управления для колебательных систем со многими степенями свободы представляют, как правило, значительные математические и вычислительные трудности. Эти трудности обусловлены высоким порядком систем, нелинейностью, осциллирующим характером решений. Применение вычислительных методов, эффективных для построения программных управлений, затруднено в случае необходимости построения синтеза оптимального управления.

Поэтому представляются актуальными, с одной стороны, разработка эффективных приближенных методов оптимального управления, и с другой стороны — получение точных оптимальных решений для характерных «опорных» задач. Первый из этих подходов состоит в сочетании методов теории управления с известными и хорошо разработанными приближенными (асимптотическими) методами теории колебаний: методом малого параметра, методом усреднения Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского и другими. Второй подход предполагает построение на основе точных «опорных» решений некоторых квазиоптимальных законов управления, простых для реализации и близких к оптимальным.

Настоящая монография посвящена проблемам управления колебательными динамическими системами и основана на указанных выше подходах. В ней разрабатываются приближенные методы построения управления для систем, содержащих колебательные и вращательные звенья. На основе этих методов дано решение ряда задач оптимального управления движением при помощи малых сил, задач управления колебаниями, исследованы управляемые вращения твердого тела вокруг центра масс. Построен ряд точных решений типичных задач оптимального перемещения и разгона колебательных систем при различных ограничениях на управляющие воздействия и фазовые координаты. На основе полученных решений предложены квазиоптимальные управления в более сложных ситуациях. Рассмотрен ряд прикладных задач управления колебаниями, связанных с грузоподъемными машинами и системами амортизации.

Книга состоит из восьми глав.

В главах 1 — 5 рассмотрены приближенные методы оптимального управления системами, содержащими малый параметр. Главы 6 — 8 посвящены точным решениям и их приложениям.

В первой главе исследуются, в основном, задачи оптимального управления для слабо управляемых систем, т. е. систем, подверженных действию малых управляющих сил. Предложен метод приближенного решения, дано его обоснование. Приведены примеры, относящиеся к динамике полета и к вращению твердого тела относительно центра масс, в которых методами малого параметра построено приближенное оптимальное управление.

В главах 2 — 5 развивается и применяется методика исследования управляемых колебательных систем с вращающейся фазой. Влияние малых управляющих и возмущающих факторов рассматривается на большом интервале времени, на котором фазовые координаты системы изменяются существенно. Предполагаемый подход основан на асимптотическом методе усреднения и разделении быстрых и медленных движений. Он позволяет уменьшить размерность краевой задачи принципа максимума и проводить ее интегрирование в медленном времени на относительно коротком интервале. Таким способом построены в форме программы и синтеза приближенные оптимальные управления нелинейными системами, содержащими колебательные и вращательные звенья.

Во второй главе указанная методика асимптотического решения развивается для квазилинейных управляемых колебательных систем с медленно изменяющимися параметрами. В третьей главе исследуется общая задача оптимального управления существенно нелинейными колебательными системами с вращающейся фазой при малых управляющих воздействиях. В обеих главах исследованы как задачи с фиксированным моментом окончания процесса, так и задачи типа быстродействия. Приведены примеры, среди которых — задача об управляемой эволюции орбиты в центральном поле.

Методы второй и третьей глав применяются в четвертой и пятой главах.

Четвертая глава посвящена задачам оптимального по быстродействию управления колебаниями посредством перемещения положения равновесия системы. Здесь считается, что управляющим воздействием является малая скорость перемещения положения равновесия.

Асимптотический подход оказался полезным при решении задач оптимального управления движением твердого тела вокруг центра масс. В пятой главе, на основе методики третьей главы, исследован ряд таких задач при различных ограничениях на управляющие моменты, а также при наличии возмущающих воздействий. Решены задачи оптимального по быстродействию торможения вращений спутника и его переориентации.

Шестая и седьмая главы посвящены исследованию и точному решению ряда конкретных задач оптимального управления колебательными системами. Здесь построены оптимальные по быстродействию законы перемещения (в шестой главе) и разгона до заданной скорости (в седьмой главе) колебательной системы типа маятника при различных ограничениях на скорость и ускорение точки его подвеса. При этом накладывается условие гашения колебаний в конце процесса управления. Построены как точные оптимальные решения, так и квазиоптимальные решения, удобные для технической реализации и более простые по структуре.

В шестой главе решение задачи об оптимальном перемещении получено как при ограничениях на скорость точки подвеса, так и при воздействии ограниченной управляющей силы. Первое ограничение предполагает возможность мгновенного изменения скорости точки подвеса, второе учитывает инерционность подвеса.

В седьмой главе решены задачи оптимального по быстродействию разгона и торможения колебательной системы при различных вариантах ограничений на скорость и ускорение точки подвеса, в том числе и при смешанных ограничениях. Построены управления, сообщающие системе поступательное движение в заданном направлении.

Восьмая глава посвящена некоторым прикладным вопросам управления механическими колебаниями. Здесь на основе сочетания режимов, полученных в шестой и седьмой главах, построен способ перемещения маятника на заданное расстояние с изменением длины его подвеса. Рассмотрены некоторые задачи управления грузоподъемными машинами. Освещаются вопросы оптимальной амортизации механических систем в случае ударных воздействий и при прохождении через резонанс.

Монография основана на исследованиях, выполненных авторами в Отделе механики управляемых систем Института проблем механики АН СССР. Использованы также отдельные результаты, полученные сотрудниками и аспирантами Отдела. В ходе написания книги весь этот материал был значительно переработан и дополнен.

Авторы выражают глубокую благодарность А. Ю. Ишлинскому, Н. Н. Красовскому, Н. Н. Моисееву, Д. Е. Охоцимскому за полезные обсуждения некоторых результатов и Н. И. Ерофееву, который привлек их внимание к задачам оптимального управления грузоподъемными машинами. Авторы благодарят Р. П. Солдатову за большую помощь при оформлении рукописи.

ГЛАВА 1

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В главе 1 рассмотрены некоторые способы применения теории малого параметра к задачам оптимального управления. § 1 имеет вводный характер: здесь приводятся постановка задачи оптимального управления и необходимые условия принципа максимума, рассматриваются различные способы выделения малого параметра. В § 2 рассмотрен класс слабо управляемых систем, развит алгоритм приближенного решения задачи по степеням малого параметра, исследовано явление локальной оптимальности управлений. Оценка точности метода по функционалу, траектории и управлению содержится в § 3. В § 4 изложен пример приближенного решения задачи оптимального управления для слабо управляемой системы. В § 5 метод малого параметра применяется для построения синтеза в одной задаче управления движением твердого тела вокруг центра масс. В § 6 приведены некоторые общие замечания о применении метода возмущений в задачах оптимального управления. Результаты §§ 2, 4 были впервые опубликованы в работе [226], § 3 — в статье [138], § 5 — в статьях [17, 22].

§ 1. Постановка задачи

1. **Задача оптимального управления.** Исследуется управляемый процесс, описываемый системой дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad x(t_0) = a. \tag{1.1.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор фазовых координат, точкой обозначено дифференцирование по времени t, $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — m-мерный вектор управляющих функций, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — заданная n-мерная вектор-функция, t_0 — начальный момент времени, a — вектор начального фазового состояния.

На управление наложено ограничение

$$u(t) \in U, \quad t \geqslant t_0, \tag{1.1.2}$$

где U — заданное замкнутое множество в m-мерном пространстве. Функции $u(t)$ предполагаются кусочно непрерывными. Граничные условия в конце процесса управления заданы в виде

$$h(x(T),\ T) = 0, \quad q(x(T),\ T) = 0 \tag{1.1.3}$$

и минимизируемый функционал (критерий качества) имеет вид

$$J = F(x(T),\ T). \tag{1.1.4}$$

Здесь $h(x, t)$ и $F(x, t)$ — заданные скалярные функции, $q(x, t) = (q_1, \ldots, q_r)$ — заданная r-мерная вектор-функция, причем $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Функции h, q предполагаем непрерывно дифференцируемыми по x, t, а F — дважды непрерывно дифференцируемой. Первое равенство (1.1.3) служит условием, определяющим момент времени T окончания процесса. Предполагается, что функция h такова, что при допустимых траекториях $x(t)$ она монотонно зависит от t (в некотором интервале времени), и поэтому условие $h = 0$ определяет для каждой допустимой траектории единственный момент времени $T \geqslant t_0$. Второе (векторное) равенство (1.1.3) представляет собой дополнительные краевые условия в момент T (если $r = 0$, то эти условия отсутствуют). Все эти условия предполагаются независимыми и непротиворечивыми.

Отметим, что разбиение граничных условий в (1.1.3) на условие окончания процесса $h = 0$ и дополнительные граничные условия $q = 0$ довольно условно и неединственно; не всегда удается выделить условие окончания процесса, для которого имеет место монотонность h по t. Однако такое разбиение удобно для приближенного или численного решения, и оно будет предполагаться выполненным. В частности, для задачи с фиксированным временем окончания процесса T_* имеем $h = t - T_*$.

Задача оптимального управления состоит в определении управления $u(t)$ и соответствующей оптимальной траектории $x(t)$, которые при $t_0 \leqslant t \leqslant T$ удовлетворяют уравнениям и граничным условиям (1.1.1), (1.1.3), ограничениям на управление (1.1.2) и доставляют минимум функционалу J из (1.1.4).

2. Принцип максимума. Применим к поставленной задаче оптимального управления принцип максимума Л. С. Понтрягина [176], представляющий собой необходимые условия оптимальности.

Введем дополнительные фазовые координаты x_0 и x_{n+1}, определяемые уравнениями с начальными условиями

$$\dot{x}_0 = f_0, \quad \dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_0(t_0) = 0, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0,$$
$$f_0 = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}, f\right). \tag{1.1.5}$$

Здесь и далее $\partial/\partial x$ — оператор градиента по фазовым координатам x, d/dt — полная производная вдоль траекторий системы (1.1.1), скобки означают скалярное произведение векторов. Очевидно, что $x_{n+1} \equiv t$, и поэтому аргумент t у функций f, f_0, h, q, F можно заменить на x_{n+1}. Тогда система (1.1.1) будет автономной, а функционал (1.1.4) примет вид $J = x_0(T)$.

Относительно гладкости правых частей системы (1.1.1), (1.1.5) предполагается, что функции f, f_0 определены и непрерывны по совокупности переменных x, x_{n+1}, u и непрерывно дифференцируемы по x, x_{n+1} для всех x, x_{n+1}, $u \in U$.

Введем вектор сопряженных переменных $\psi(t) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, а также сопряженные переменные $\psi_{n+1}(t)$ и $\psi_0(t)$, причем положим, как обычно, $\psi_0 \equiv -1$. Функция Гамильтона H' и сопряженные уравнения для системы (1.1.1), (1.1.5) примут вид

$$H' = (\psi, f) + \psi_{n+1} - f_0 = \left(\psi - \frac{\partial F}{\partial x}, f\right) + \psi_{n+1} - \frac{\partial F}{\partial t},$$
$$\dot{\psi}_k = -\frac{\partial H'}{\partial x_k} = -\left(\psi - \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + \tag{1.1.6}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x_k} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial F}{\partial x}, f\right)\right], \quad k = 1, \ldots, n.$$

С учетом краевых условий (1.1.3) условия трансверсальности запишутся в виде (момент окончания процесса T не фиксирован)

$$
\begin{gathered}
\psi = \lambda \frac{\partial h}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial x}, \\
\psi_{n+1} = \lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial t}, \\
H' = 0 \text{ при } t = T.
\end{gathered} \tag{1.1.7}
$$

Здесь λ, λ_i — неизвестные постоянные параметры. Подставим условия (1.1.7) в равенство (1.1.6) для H', которое затем разрешим относительно λ

$$
\lambda = \left(\frac{dF}{dt} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{dq_i}{dt} \right) \left(\frac{dh}{dt} \right)^{-1} \quad \text{при } t = T. \tag{1.1.8}
$$

Полные производные по t здесь имеют тот же смысл, что и в равенстве (1.1.5). Введем видоизмененные сопряженные переменные и гамильтониан

$$
\begin{gathered}
p = \psi - \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad p = (p_1, \ldots, p_n), \\
H = (p, f) = H' - \psi_{n+1} - \frac{\partial F}{\partial t}.
\end{gathered} \tag{1.1.9}
$$

Отметим, что выражение в квадратных скобках (1.1.6) равно $d(\partial F/\partial x_k)/dt$. Тогда уравнения (1.1.6) и условия (1.1.7) можно с учетом (1.1.9) записать в виде

$$
\begin{gathered}
\dot{p}_k = -\left(p, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \qquad H = (p, f), \\
p = \lambda \frac{\partial h}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \text{ при } t = T.
\end{gathered} \tag{1.1.10}
$$

Согласно принципу максимума, задача оптимального управления свелась к краевой задаче для двух n-мерных вектор-функций $x(t)$ и $p(t)$. Оптимальное управление $u(t)$ определяется из условия супремума функции H' по u, что эквивалентно условию супремума функции H из (1.1.10), т. е.

$$
H(p(t), x(t), t, u(t)) = \sup_{u \in U} H(p(t), x(t), t, u). \tag{1.1.11}
$$

Система уравнений краевой задачи задается дифференциальными соотношениями (1.1.4), (1.1.10), а краевые условия — равенствами (1.1.1), (1.1.3), (1.1.10). Неизвестная управляющая вектор-функция u исключается при помощи равенства (1.1.11). Параметр λ определяется равенством (1.1.8), а момент времени T и параметры λ_i неизвестны и определяются в процессе решения краевой задачи.

3. Задачи управления с малым параметром. Решение задач оптимального управления строится обычно при помощи принципа максимума Л. С. Понтрягина, метода динамического программирования, классического вариационного исчисления или других методов теории оптимальных процессов. При этом точное решение задач оптимального управления может быть построено сравнительно редко, лишь для определенных классов задач. Большое развитие получили численные методы оптимального управления, см., например, книги и обзоры [43, 44, 56, 57, 73, 79, 101, 117, 118, 120, 143, 149, 150, 175, 179, 205, 209, 231—233, 235] и другие. Однако даже при использовании современных ЭВМ численное построение оптимальных управлений для сложных динамических систем представляет значительные трудности, особенно в том случае, когда требуется найти управление в виде синтеза.

В то же время многие прикладные задачи оптимального управления в явном или неявном виде содержат малые параметры, характеризующие относительную малость тех или иных воздействий или факторов. Поэтому могут быть развиты эффективные приближенные или асимптотические методы построения оптимальных управлений, основанные на идее малого параметра. При этом могут быть использованы такие широко известные методы теории колебаний, как методы теории возмущений, метод усреднения, асимптотические методы разделения медленных и быстрых движений и т. д. (см., например, [29, 46, 58, 64, 121, 139, 148, 154]). С помощью этих методов удается в ряде случаев получить приближенное оптимальное управление в форме программы или синтеза. Отметим, что полученные при помощи приближенных методов результаты можно также применять при построении начального приближения для численных методов.

Введение малого параметра ε оправдано в тех случаях, когда невозмущенная задача (при $\varepsilon = 0$) может быть решена аналитически или численно значительно более просто, чем возмущенная. Например, это имеет место, когда система близка к линейной или неуправляемой, или в ней выявляются медленные и быстрые переменные, допускающие разделение движений.

Рассмотрим некоторые способы вхождения малого параметра ε в задачу оптимального управления (1.1.1)—(1.1.4). Пусть функции f, h, q и F могут быть представлены в виде разложений

$$\blacksquare\ f = f^0(x, t, u) + \varepsilon f^1(x, t, u) + \varepsilon^2 + \ldots,$$
$$h = h^0(x, t) + \varepsilon h^1(x, t) + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$q = q^0(x, t) + \varepsilon q^1(x, t) + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$F = F^0(x, t) + \varepsilon F^1(x, t) + \varepsilon^2 \ldots,\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].\ \square^{*)} \quad (1.1.12)$$

Точками обозначены высшие члены разложений. Соответствующая невозмущенная задача оптимального управления описывается соотношениями (1.1.1)—(1.1.4), (1.1.12), в которых полагается $\varepsilon = 0$. Предполагается, что решение этой задачи существует, единственно и может быть построено. Тогда возникает вопрос об оценке погрешности, вызванной отбрасыванием возмущающих членов порядка ε в (1.1.12), а также проблема построения приближенного решения задачи оптимального управления с учетом малого параметра, т. е. вычисление поправок к невозмущенному решению.

Этот естественный прием исследования широко используется при линеаризации систем, когда функция f^0 в (1.1.12) содержит линейные члены по x, u, а нелинейности входят в виде возмущений. Подобные задачи рассматривались, например, в работах [17, 22, 28, 99, 104, 105, 117, 201, 241, 247, 252].

Примеры подобного подхода для нелинейной порождающей задачи оптимального синтеза будут изложены в § 5 данной главы.

Другой случай возникает тогда, когда в (1.1.12) функция f^0 не зависит от управляющего воздействия u

*) Значок $\square$ перед номером формулы означает, что данный номер относится к группе формул, перед первой из которых стоит значок $\blacksquare$.

[226]. Соответствующую систему естественно назвать слабоуправляемой: при $\varepsilon=0$ она превращается в неуправляемую, а отличие между управляемым и неуправляемым движениями, вообще говоря, будет порядка ε. Таким системам посвящены §§ 2—4.

Если интервал движения управляемой системы неограничен (асимптотически растет) при $\varepsilon \to 0$ (например, $T \sim \varepsilon^{-1}$), то даже малые управляющие воздействия могут привести к существенному изменению фазовых переменных. Такая ситуация характерна для многих задач управления колебательными системами, когда малые управляющие силы вызывают большие изменения амплитуды или энергии колебаний или вращений в течение длительного времени (за много периодов колебаний). Для исследования таких систем можно эффективно использовать асимптотические методы нелинейной механики (методы усреднения), изложенные в монографиях [46, 47, 64, 145, 148]. Применению асимптотических методов типа усреднения к задачам оптимального управления посвящено большое число работ, например, [1—3, 9—13, 15, 16, 20, 21, 23, 24, 69, 81, 130, 148, 155, 156, 172—174, 184, 229, 230, 245, 262]. Проблемам управления колебательными системами с малым параметром, разработке асимптотических методов построения оптимального управления в таких системах посвящена значительная часть данной монографии (главы 2—5).

В последнее время получило развитие также исследование сингулярно возмущенных задач оптимального управления [35, 71, 80, 253, 257, 258, 261, 263, 265, 267]. Управляемая система (1.1.1) называется сингулярно возмущенной, если при $\varepsilon=0$ ее порядок уменьшается. Такая ситуация возникает, если некоторые (например, первые s) из компонент вектора f могут быть представлены в виде

$$f_i = \varepsilon^{-1} f_i^{-1}(x, t, u) + f_i^0(x, t, u) + \varepsilon \ldots, \quad (1.1.13)$$
$$i = 1, \ldots, s; \qquad 1 \leqslant s < n.$$

Формально полагая $\varepsilon=0$ в (1.1.1), (1.1.13), приходим к системе, содержащей s конечных уравнений

$$f_i^{-1}(x, t, u) = 0, \qquad i = 1, \ldots, s,$$

и $n-s$ дифференциальных уравнений. Для исследования подобных задач оптимального управления обычно используют асимптотические методы типа пограничного слоя и теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных [62, 154, 204]. Отметим, что множество U в (1.1.2) также может зависеть от переменных x, t и от малого параметра. В ряде случаев простым преобразованием в пространстве управлений его можно перевести в постоянное множество. Например, пусть множество $U(x, t, \varepsilon)$ задано неравенствами

$$|u_i| \leqslant c_i(x, t, \varepsilon), \qquad i = 1, \ldots, m,$$

где c_i — известные положительные функции. При помощи преобразования $u_i = c_i u_i'$ $i = 1, \ldots, m$, где u_i' — новые управления, это множество переводится в постоянное множество $|u_i'| \leqslant 1$. Ниже множество U предполагается постоянным.

Возможны и более сложные случаи вхождения малого параметра в задачу оптимального управления (1.1.1)—(1.1.4), когда для решения требуется комбинировать различные методы малого параметра.

§ 2. Слабо управляемые системы

1. Вывод уравнений движения и приближенное решение задачи. Будем рассматривать задачу управления (1.1.1)—(1.1.4) в предположении, что функции f, h, q, F и вектор a разлагаются в ряды по малому параметру ε

$$\blacksquare \quad \begin{aligned} f &= f^0(x, t) + \varepsilon f^1(x, t, u) + \ldots, \\ h &= h^0(x, t) + \varepsilon h^1(x, t) + \ldots, \\ q &= q^0(x, t) + \varepsilon q^1(x, t) + \ldots, \\ F &= F^0(x, t) + \varepsilon F^1(x, t) + \ldots, \\ a &= a^0 + \varepsilon a^1 + \ldots, \qquad \varepsilon \ll 1. \end{aligned} \qquad \square \quad (1.2.1)$$

Верхние индексы указывают номер членов в разложениях, а нижние — номер компонент векторов. Так как функция f при $\varepsilon = 0$ не зависит от u, то система (1.1.1) при $\varepsilon = 0$ будет неуправляемой. Ее общее решение будем считать известным. При $\varepsilon \ll 1$ систему (1.1.1) естественно назвать слабо управляемой.

Если функция f^0 зависит от u, то при $\varepsilon=0$ система не вырождается в неуправляемую и для нее, вообще говоря, существует оптимальное управление нулевого приближения. Разложение по малому параметру позволит уточнить это управление. Рассматриваемый далее случай интересен тем, что в нулевом приближении управление вообще нельзя определить в принципе. Отметим, что возможен также и промежуточный случай: функция f^0 зависит лишь от некоторых компонент вектора управляющих функций.

Переходим к построению приближенного решения поставленной задачи оптимального управления для слабо управляемой системы (1.1.1)—(1.1.4), (1.2.1). Искомые величины x, p, T, λ, λ_i и J ищем в виде разложений

$$\blacksquare\; x = x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \ldots,$$
$$p = p^0(t) + \varepsilon p^1(t) + \ldots, \quad T = T^0 + \varepsilon T^1 + \ldots,$$
$$\lambda = \lambda^0 + \varepsilon\lambda^1 + \ldots, \; \lambda_i = \lambda_i^0 + \varepsilon\lambda_i^1 + \ldots,$$
$$J = J^0 + \varepsilon J^1 + \ldots, \qquad i = 1, \ldots, r. \; \square \quad (1.2.2)$$

Подставим равенства (1.2.1), (1.2.2) в уравнения (1.1.1), (1.1.3), (1.1.4), (1.1.8), (1.1.10), разложим полученные соотношения в ряды по ε и приравняем коэффициенты при степенях $\varepsilon^0=1$ и ε. В нулевом приближении получим

$$\blacksquare \quad \dot{x}^0 = f^0(x^0, t), \quad x^0(t_0) = a^0,$$
$$h^0(x^0(T^0), T^0) = 0, \quad q^0(x^0(T^0), T^0) = 0,$$
$$J^0 = F^0(x^0(T^0), T^0),$$
$$\dot{p}_k^0 = -\left(p^0, \frac{\partial f^0(x^0(t), t)}{\partial x_k}\right),$$
$$p^0(T) = \lambda^0 \frac{\partial h^0}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial x} - \frac{\partial F^0}{\partial x},$$
$$\lambda^0 = \left\{\frac{\partial F^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}, f^0\right) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \left[\frac{\partial q_i^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, f^0\right)\right]\right\} \times$$
$$\times \left[\frac{\partial h^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, f^0\right)\right]^{-1} \text{ при } t = T^0, \; k = 1, \ldots, n. \quad \square \quad (1.2.3)$$

Для равенств (1.1.1), (1.1.3), (1.1.4) выпишем еще уравнения первого приближения с учетом соотношений (1.2.3)

$$\blacksquare \quad \dot{x}_k^1 = \left(\frac{\partial f_k^0(x^0(t), t)}{\partial x}, x^1\right) + f^1(x^0(t), t, u(t)), \quad x^1(t_0) = a^1,$$

$$\left[\frac{\partial h^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, f^0\right)\right] T^1 + \left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + h^1 = 0,$$

$$\left[\frac{\partial q_i^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, f^0\right)\right] T^1 + \left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + q_i^1 = 0,$$

$$J^1 = \left[\frac{\partial F^0}{\partial t} + \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}, f^0\right)\right] T^1 + \left(\frac{\partial F^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right) + F_1,$$

$$i = 1, \ldots, r. \qquad \square \quad (1.2.4)$$

В последних трех равенствах (1.2.4) все функции от x, t берутся при значениях $x = x^0(T^0)$, $t = T^0$.

Перейдем к анализу уравнений (1.2.3), (1.2.4). Общее решение системы нулевого приближения $\dot{x} = f^0(x, t)$ из (1.2.3) предполагается известным и заданным в явном виде

$$x = \varphi(t, c), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \quad c = (c_1, \ldots, c_n). \quad (1.2.5)$$

Здесь φ — вектор-функция, c — вектор произвольных постоянных. Разрешая равенство (1.2.5) относительно постоянных c, получим

$$g(x, t) = c, \quad g = (g_1, \ldots, g_n). \quad (1.2.6)$$

Функции g_k являются независимыми первыми интегралами системы нулевого приближения.

Для траектории $x^0(t)$ в нулевом приближении имеем задачу Коши, задаваемую первыми двумя равенствами (1.2.3). Ее решение выражается через функции φ, g, введенные равенствами (1.2.5), (1.2.6)

$$x^0(t) = \varphi(t, c), \quad c = g(a^0, t_0). \quad (1.2.7)$$

Момент T^0 окончания процесса и функционал J^0 в этом приближении определяются третьим и пятым равенствами (1.2.3). Будем считать, что четвертое равенство (1.2.3), т. е. краевые условия $q = 0$ нулевого приближения выполняются автоматически. Это тождество можно рассматривать как дополнительное условие, наложенное на функцию $q^0(x, t)$.

Введем матрицы размера $n\times n$

$$\Phi(t, c)=\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial c_j}\right\|,\quad G(t, c)=\left\|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right\| \tag{1.2.8}$$

при

$$x=\varphi(t, c),\qquad i, j=1, \ldots, n.$$

Равенства (1.2.5), (1.2.6) задают преобразования, переводящие вектор c в x и обратно. Матрицы (1.2.8), как матрицы Якоби для этих взаимно обратных преобразований, связаны соотношением $\Phi=G^{-1}$. Ранг матриц равен n.

Функция x^1 удовлетворяет линейной неоднородной системе (1.2.4). Соответствующая однородная система является системой в вариациях для уравнений нулевого приближения (1.2.3), которой удовлетворяет x^0. Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [103], матрица Φ из (1.2.8) представляет собой фундаментальную матрицу для системы в вариациях. Пользуясь этим, запишем при помощи метода вариации произвольных постоянных общее решение неоднородной системы (1.2.4)

$$x^1=\Phi(t, c)\,b+\Phi(t, c)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\tau, c)\,f^1\big(x^0(\tau), \tau, u(\tau)\big)\,d\tau.$$

Определим вектор b произвольных постоянных при помощи начального условия для x^1 из (1.2.4) и пользуясь равенством $\Phi^{-1}=G$, получим

$$x^1(t)=\Phi(t, c)\,G(t_0, c)\,a^1+ \\ +\Phi(t, c)\int_{t_0}^{t}G(\tau, c)\,f^1(x^0(\tau), \tau, u(\tau))\,d\tau. \tag{1.2.9}$$

Выразим еще величину T^1 из третьего равенства (1.2.4) и затем подставим ее в четвертое равенство (1.2.4)

$$\left[\left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right)+q_i^1\right]\left[\frac{\partial h^0}{\partial t}+\left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, f^0\right)\right]= \\ =\left[\left(\frac{\partial h^0}{\partial x}, x^1(T^0)\right)+h^1\right]\left[\frac{\partial q_i^0}{\partial t}+\left(\frac{\partial q_i^0}{\partial x}, f^0\right)\right],\qquad i=1, \ldots, r. \tag{1.2.10}$$

Вектор p^0, как следует из (1.2.3), удовлетворяет линейной однородной системе, которая является сопряженной по отношению к упоминавшейся выше системе в вариациях. Поэтому (см. [103]) фундаментальная матрица для нее равна $(\Phi^{-1})' = G'$, где штрих означает транспонированную матрицу. Следовательно, общее решение системы (1.2.3) для p^0 имеет вид (в векторной и скалярной записи соответственно)

$$p^0 = G'(t, c)\,s, \qquad s = (s_1, \ldots, s_n),$$
$$p_k^0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_k} s_i, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{1.2.11}$$

Здесь s — вектор произвольных постоянных. Подставляя решение (1.2.11) в условие (1.2.3) для $p^0(T^0)$ и учитывая равенство $(G')^{-1} = \Phi'$, получим

$$s = \Phi'(T^0, c)\left(\lambda^0 \frac{\partial h^0}{\partial x} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \frac{\partial q_i^0}{\partial x} - \frac{\partial F^0}{\partial x}\right) \quad \text{при } t = T^0. \tag{1.2.12}$$

Перейдем к определению управления в первом приближении (в нулевом приближении система неуправляема). Подставим в функцию H из (1.1.10) представления (1.2.1) и (1.2.2) и разложим эту функцию в ряд по ε

$$H = (p, f) = (p^0, f^0(x^0, t)) + \varepsilon\left[\left(p^0, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^0}{\partial x_i} x_i^1\right) + (p^1, f^0(x^0, t)) + (p^0, f^1(x^0, t, u))\right] + \cdots$$

Точками обозначены члены порядков выше первого. Из выписанных слагаемых лишь последнее зависит от u. Поэтому определение максимума H по u в (1.1.11) сводится в первом приближении к максимизации этого последнего слагаемого

$$(p^0(t), f^1(x^0(t), t, u(t))) = \sup_{u \in U} (p^0(t), f^1(x^0(t), t, u)). \tag{1.2.13}$$

Управление $u(t)$, определяемое соотношением (1.2.13), может и не быть близко к оптимальному в смысле метрики в пространстве C (т. е. по максимуму модуля разности). Однако оно будет приближенно оптимальным в смысле минимизируемого функционала. В самом деле, из известных формул для первой вариации функционала [181] следует, что функционалы для двух различных управлений отличаются на величину того же порядка, что и функции H для этих управлений. Но при соблюдении условия (1.2.13) функция H для управления $u(t)$ будет отличаться от максимума функции H, достигаемого при выборе оптимального управления, на величину порядка отброшенных членов, т. е. порядка ε^2. Такой же порядок малости $O(\varepsilon^2)$ будет иметь и отличие по функционалу между приближенным и точным оптимальными управлениями. Отметим, что отличие по функционалу между любыми двумя допустимыми управлениями в слабо управляемой системе (1.1.1), (1.2.1) составляет величину порядка ε. Строгое обоснование алгоритма и оценка точности погрешности построенного решения излагаются далее в § 3.

Отметим, что согласно (1.2.13) управление $u(t)$ зависит только от решений нулевого приближения $x^0(t)$ и $p^0(t)$. Подставляя решение (1.2.11), условие (1.2.13) можно переписать в виде

$$(G's, f^1) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} s_i f_j^1 \left(x^0(t), t, u\right) \to \sup_{u \in U}. \qquad (1.2.14)$$

2. Описание алгоритма. Полученные соотношения позволяют получить приближенное решение поставленной задачи оптимального управления. При этом траектория $x(t)$, а также момент T и функционал J определяются в первом приближении (с учетом двух членов разложений (1.2.2), т. е. с погрешностью порядка ε^2), а сопряженные переменные $p(t)$ и постоянные λ, λ_i — в нулевом приближении. Аналогично изложенному выше могут быть построены указанные величины в более высоком приближении по степеням малого параметра ε.

Определение решения первого приближения сводится к следующим этапам.

1. Находим общее решение системы нулевого приближения, т. е. функции φ, g из (1.2.5), (1.2.6), а также матрицы Φ, G из (1.2.8).

2. В нулевом приближении траектория $x^0(t)$ определяется равенствами (1.2.7), момент T^0 и функционал J^0 — третьим и пятым равенствами (1.2.3). Четвертое равенство (1.2.3) считаем выполненным по условию.

3. Функция $p^0(t)$ определяется равенствами (1.2.11), а вектор s — равенством (1.2.12), в которое следует подставить λ^0 из (1.2.3). Правую часть равенства (1.2.3) для λ^0 и (1.2.12) следует брать при $x = x^0(T^0)$, $t = T^0$. Таким образом, равенства (1.2.3), (1.2.11), (1.2.12) определяют функцию $p^0(t)$ с точностью до r произвольных постоянных λ_i^0, которые будут найдены ниже.

4. Подставив $x^0(t)$ и $p^0(t)$ в условие (1.2.13) или (1.2.14) и вычислив супремум по u, найдем управление $u(t)$ также с точностью до r неизвестных постоянных λ_i^0.

5. Подставим $x^0(t)$ и $u(t)$ в равенство (1.2.9) и найдем $x^1(t)$ и, в частности, $x^1(T^0)$ с точностью до тех же постоянных.

6. Подставим $t = T^0$, $x = x^0(T^0)$ и найденное значение $x^1(T^0)$ в соотношение (1.2.10). Получим в общем случае r трансцендентных уравнений для определения постоянных λ_i^0, которые входят в $x^1(T^0)$. Разрешая эти уравнения (предполагаем, что решение существует), найдем постоянные λ_i^0. Теперь функции $p^0(t)$, $u(t)$, $x^1(t)$ и постоянная λ^0, найденные в этапах 3 — 5, полностью определены.

7. Поправку T^1 к моменту окончания процесса и J^1 к функционалу найдем последовательно из третьего и пятого равенств (1.2.4), в которые нужно подставить уже известные значения $x = x^0(T^0)$, $t = T^0$ и $x^1(T^0)$.

3. Дополнительные замечания.

Замечание 1.2.1. Рассмотрим решение поставленной задачи еще в том важном случае, когда краевые условия $q = 0$ в конце процесса отсутствуют (кроме условия $h = 0$, служащего для определения момента окончания процесса). В этом случае размерность r вектора q из (1.1.3) равна нулю, и поэтому в равенствах §§ 1, 2 следует опустить члены, содержащие q_i, $\dot{q}_i^0$ и постоянные λ_i, λ_i^0. Соотношения (1.2.10) также нужно опустить. Приближенное решение задачи в этом случае значительно упрощается, так как опускается одна из самых сложных его частей — решение системы уравнений (этап 6). При выполнении этапов 3 — 5 функции $p^0(t)$, $u(t)$, $x^1(t)$ теперь определяются однозначно. В остальном схема решения остается той же.

Замечание 1.2.2. Рассмотрим еще задачу о минимизации интегрального функционала

$$J = \int_{t_0}^{T} f_*(x, t, u)\,dt,$$

$$f_*(x, t, u) = f_*^0(x, t, u) + \varepsilon f^1(x, t, u) + \ldots,$$

где f_* — заданная функция. Уравнения, краевые условия и ограничения по-прежнему задаем в виде (1.1.1)—(1.1.2), причем имеют место разложения (1.2.1). Если f_*^0 не зависит от u, то введем новую фазовую координату и функционал соотношениями

$$\dot{x}_* = f_* = f_*^0(x, t) + \varepsilon f_*^1(x, t, u) + \ldots, \quad x_*(t_0) = 0,$$
$$J_* = J = x_*(T).$$

Если же f_*^0 зависит явно от u, то полагаем

$$\dot{x}_* = \varepsilon f_* = \varepsilon f_*^0(x, t, u) + \ldots, \quad x_*(t_0) = 0,$$
$$J_* = \varepsilon J = x_*(T).$$

Увеличим на единицу размерность вектора x за счет добавления к нему новой компоненты x_*. Тогда исходная задача, эквивалентная задаче минимизации функционала J_*, полностью сведется к рассмотренному выше в § 2 случаю. По методике § 2 можно определить минимум функционала J_* с погрешностью порядка ε^2. Для исходного функционала J погрешность решения составит величину поряда ε^2 в случае, когда f_*^0 не зависит от u, и величину порядка ε, когда f_*^0 явно зависит от u.

Рассмотрению некоторых задач оптимального управления указанного типа для слабо управляемых систем с интегральным функционалом посвящена работа [106]. В ней получены оценки погрешности приближенного решения для случая интегрального функционала, содержащего положительно определенную квадратичную форму от управления.

Замечание 1.2.3. Изложенный подход можно применять для построения приближенных аналитических решений задач оптимального управления в случае слабо управляемых систем. При этом значение параметра ε может фактически быть не очень малым. Следует отметить, что задачи управления механическими объектами часто относятся к рассмотренному выше типу слабо управляемых систем. Параметр ε здесь характеризует отношение управляющих сил к неуправляемым силам.

Замечание 1.2.4. Изложенным методом малого параметра можно получать исходное (начальное) приближение для последующего решения задачи оптимального управления на ЭВМ различными численными методами.

В частности, метод малого параметра применяется в сочетании с численным методом последовательных приближений, предложенным в работе [122] и развитым в [123], см. также [231]. Малый параметр при этом может вводиться в систему (1.1.1) искусственно, например, одним из следующих способов:

$$\dot{x} = f(x,\ t,\ \varepsilon u), \quad \dot{x} = \varepsilon f(x,\ t,\ u),$$

так, чтобы она была слабо управляемой при $\varepsilon \ll 1$. Построив решение при малом ε, затем постепенно (шагами) увеличивают ε до $\varepsilon = 1$, решая численно при каждом значении ε задачу оптимального управления. При этом в качестве начального приближения в расчетах используется полученное оптимальное управление для предыдущего значения ε. Таким образом часто удается добиться сходимости численного метода в тех случаях, когда его непосредственное применение при $\varepsilon = 1$ не дает желаемого результата.

4. Локальная оптимальность. Так как первые интегралы (1.2.6) системы нулевого приближения предполагаются известными, то их можно взять в качестве новых искомых функций в системе (1.1.1). Другими словами, равенства (1.2.5), (1.2.6) можно рассматривать как прямое и обратное преобразования от вектора переменных x к вектору новых переменных c, причем вектор c будет постоянным лишь в нулевом приближении. Такое преобразование применяется в небесной механике, где переменные типа c называются оскулирующими элементами.

Рассмотрим решение пп. 1, 2 § 2, считая, что в качестве фазовых координат выбраны первые интегралы системы нулевого приближения (т. е. оскулирующие переменные c из (1.2.6)) и что эти переменные затем по-прежнему обозначены через x. Ход решения п. п. 1, 2 § 2 останется неизменным, но появятся некоторые упрощения, связанные с выбором фазовых координат. Так как новые фазовые координаты тождественно постоянны в нулевом приближении, то в соотношениях п. п. 1, 2 § 2 следует положить $f^0 \equiv 0$. При этом, как легко видеть, функции φ, g из (1.2.5), (1.2.6) и матрицы (1.2.8) равны

$$\begin{gathered}\varphi(t, c) = c, \quad g(x, t) = x; \\ \Phi(t, c) = G(t, c) = E.\end{gathered} \tag{1.2.15}$$

Здесь E — единичная матрица. Соотношения (1.2.7), (1.2.9), (1.2.11), (1.2.13) примут вид

$$\begin{gathered}x^0(t) = a^0, \quad x^1(t) = a^1 + \int_{t_0}^{t} f^1(a^0, \tau, u(\tau))\, d\tau, \\ p^0(t) = s, \quad (s, f^1(a^0, t, u)) \to \sup \text{ по } u \in U.\end{gathered} \tag{1.2.16}$$

Остальные равенства п. 1 § 2 также можно упростить, подставляя в них соотношения (1.2.15), (1.2.16).

Сделаем еще два предположения. Во-первых, будем считать, что краевые условия $q = 0$ в конце процесса отсутствуют. Это, как указано в замечании 1.2.1 из п. 3, дает возможность опустить в равенствах п. 1 § 2 все члены, содержащие λ_i^0 и q_i^0, и упростить ход решения. Во-вторых, считаем, что выполнено одно из двух условий: либо функция F^0 не зависит явно от t, либо h^0 не зависит явно от x, т. е. справедливо равенство

$$\frac{\partial F^0}{\partial t} \frac{\partial h^0}{\partial x} = 0. \tag{1.2.17}$$

Условие (1.2.17) выполнено, например, если $h(x, t) = t - T_*$, где T_* — заданное число. Тогда момент T окончания процесса, определяемый первым условием (1.1.3), фиксирован и равен T_*, причем $T^0 = T_*$, $T^1 = 0$.

Учитывая сделанные предположения и равенства (1.2.15)—(1.2.17), найдем λ^0 из соотношения (1.2.3) и затем s из (1.2.12)

$$\lambda^0 = \frac{\partial F^0}{\partial t}\left(\frac{\partial h^0}{\partial t}\right)^{-1}, \quad s = -\frac{\partial F^0}{\partial x} \tag{1.2.18}$$

при $x = x^0(T^0)$, $t = T^0$.

Подставим равенство (1.2.18) для s в последнее условие (1.2.16)

$$(s, f^1(a^0, t, u)) = -\left(\frac{\partial F^0}{\partial x}, f^1(a^0, t, u)\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial F^0}{\partial t} - \frac{dF^0}{dt}\right). \tag{1.2.19}$$

Здесь полная производная вычисляется в силу уравнения (1.1.1) с учетом членов первого порядка малости, т. е. при $f = \varepsilon f^1$. Не уменьшая точности решения (с погрешностью в малых высшего порядка), эту производную можно заменить производной в силу точных уравнений (1.1.1).

Приближенное оптимальное управление, согласно последнему условию (1.2.16), доставляет максимум левому из выражений (1.2.19). Так как производная $\partial F^0/\partial t$ не зависит явно от u, то согласно равенствам (1.2.19), управление может определяться из условия минимальности полной производной dF^0/dt.

Управление, которое в каждый момент времени минимизирует скорость dF^0/dt изменения минимизируемого функционала F^0, часто называется локально оптимальным. Таким образом, выше показано, что в слабо управляемой системе локально оптимальное управление при сформулированных выше предположениях является приближенно оптимальным управлением. Другими словами, значения функционала для точного оптимального и локально оптимального управления отличаются на величину порядка ε^2.

Замечание 1.2.5. Локально оптимальные управления находятся обычно весьма просто. Для этого достаточно записать полную производную dF^0/dt как функцию оскулирующих переменных, управления и времени, а затем найти ее минимум по $u \in U$. Управление при этом получается в виде функции от оскулирующих фазовых координат и, возможно, времени, т. е. в форме синтеза. После этого траектория может определяться либо аналитически, либо численным интегрированием задачи Коши. Благодаря своей простоте локально оптимальные управления неоднократно использовались в задачах управляемого движения космических аппаратов с малой тягой, см., например, [73, 130]. При этом роль нулевого приближения играет кеплерово движение, а роль первых интегралов уравнений нулевого приближения — обычно оскулирующие элементы. Локально оптимальные управления применялись и в качестве начального приближения при численных расчетах оптимальных траекторий. Полученные выше результаты указывают, при каких условиях и в каком смысле локально оптимальные управления действительно близки к оптимальным управлениям.

§ 3. Оценка точности метода малого параметра для слабо управляемых систем

1. **Постановка задачи.** Исследуем вопросы обоснования и оценки точности методики построения приближенного решения, развитой в § 2. Задача оптимального управления (1.1.1)—(1.1.4), (1.2.1) рассматривается при упрощающем предположении, что краевые условия $q = 0$ в (1.1.3) отсутствуют (см. замечание 1.2.1).

Систему уравнений движения (1.1.1) представим в виде

$$\dot{x} = f^0(x,\ t) + \varepsilon f^1(x,\ t,\ u), \quad x(t_0) = a. \qquad (1.3.1)$$

Здесь f^1 — некоторая функция, содержащая все последующие члены разложения (1.2.1). В общем случае функция f^1 может непрерывно зависеть от малого параметра ε. Однако для обоснования первого приближения эта зависимость несущественна и далее не указывается. Аналогично, возможная зависимость от аргумента ε условия $h = 0$ в (1.1.3) и функционала (1.1.4) в явном виде также не выписывается, т. е.

$$h(x,\ t) = 0, \quad J = F(x,\ t) \quad \text{при} \quad t = T. \qquad (1.3.2)$$

Функция $u(t)$ называется допустимым управлением, если она измерима и $u(t) \in U$ для всех $t \geqslant t_0$, где U — замкнутое ограниченное фиксированное множество. Обозначим через $x_u^\varepsilon(t)$ соответствующее решение задачи Коши (1.3.1) при фиксированном допустимом управлении $u(t)$ и $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$, а через T_u^ε — первый момент времени, когда траектория $x_u^\varepsilon(t)$ достигнет поверхности $h(x,\ t) = 0$ из (1.3.2), т. е. T_u^ε — наименьший корень уравнения

$$h\left(x_u^\varepsilon(t),\ t\right) = 0, \quad T_u^\varepsilon \geqslant t_0. \qquad (1.3.3)$$

Здесь $\varepsilon_0 > 0$ — заданная постоянная. Сформулируем теперь в новых обозначениях вариационную задачу: для заданного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ найти функцию $u^\varepsilon(t)$ — оптимальное управление, реализующее минимум функционала (1.3.2)

$$J_u^\varepsilon = F\left(x_u^\varepsilon\left(T_u^\varepsilon\right), T_u^\varepsilon\right), \qquad u(t) \in U, \tag{1.3.4}$$

на классе допустимых управлений.

Предположим, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует оптимальное в смысле (1.3.4) управление $u^\varepsilon(t)$. Обозначим через $x^\varepsilon(t)$, T^ε оптимальную траекторию и момент окончания оптимального процесса соответственно. Необходимые условия оптимальности в данном случае имеют следующий вид. Существует вектор-функция $p^\varepsilon(t)$ такая, что удовлетворяется уравнение

$$\dot{p}^\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x} H\left(p^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t), t, u^\varepsilon(t), \varepsilon\right) \tag{1.3.5}$$

и условие трансверсальности

$$p^\varepsilon\left(T^\varepsilon\right) = \frac{\dot{F}}{\dot{h}} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \text{ при } t = T^\varepsilon. \tag{1.3.6}$$

Здесь H — функция Гамильтона, достигающая максимума по аргументу u при фиксированных других аргументах, т. е.

$$H\left(p^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t), t, u^\varepsilon(t), \varepsilon\right) = \max_{u \in U} H\left(p^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t), t, u, \varepsilon\right), \tag{1.3.7}$$

$$H(p, x, t, u, \varepsilon) \equiv (p, f^0(x, t)) + \varepsilon(p, f^1(x, t, u)).$$

В (1.3.6) $\dot{F}$ и $\dot{h}$ означают полные производные по t вдоль траекторий системы (1.3.1), аналогично (1.1.5). Изложим кратко для задачи (1.3.1), (1.3.2) процедуру малого параметра § 2. Положим формально в (1.3.1) $\varepsilon = 0$; получим задачу Коши: $\dot{x} = f^0(x, t)$, $x(t_0) = a$. Обозначим ее решение через $x^0(t)$ и найдем момент времени T^0 как первый корень уравнения $h(x^0(t), t) = 0$. Далее положим $\varepsilon = 0$ в правых частях (1.3.5), (1.3.6); получим задачу Коши

$$\dot{p} = -A^*(t)\, p,$$
$$p(T^0) = \left[\frac{\dot{F}(x^0(t), t)}{\dot{h}(x^0(t), t)} \frac{\partial h(x^0(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial F(x^0(t), t)}{\partial x}\right]_{t=T_0}. \tag{1.3.8}$$

Здесь $A(t) = \partial f^0(x^0(t),\ t)/\partial x$ — матрица $n \times n$ с компонентами $\partial f_i^0(x^0(t),\ t)/\partial x_j$, $A^*(t)$ — транспонированная ей матрица. Решение задачи (1.3.8) обозначим через $p^0(t)$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} g^\varepsilon(t,\ u) &= (p^\varepsilon(t),\ f^1(x^\varepsilon(t),\ t,\ u)), \\ g^0(t,\ u) &= (p^0(t),\ f^1(x^0(t),\ t,\ u)). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Из общих соображений следует, что на ограниченном интервале времени справедливы оценки

$$x^\varepsilon(t) = x^0(t) + O(\varepsilon), \quad p^\varepsilon(t) = p^0(t) + O(\varepsilon).$$

Так как при этом $g^\varepsilon(t,\ u) = g^0(t,\ u) + O(\varepsilon)$, то естественно искать приближенное к оптимальному $u^\varepsilon(t)$ управление $u^0(t)$ из соотношения (см. (1.3.7), (1.3.9))

$$g^0(t,\ u^0(t)) = \max_{u \in U} g^0(t,\ u). \tag{1.3.10}$$

Здесь $u^0(t)$ — управляющая функция, реализующая максимум (1.3.10). Из леммы (см. [65], стр. 172) следует, что существует измеримая функция $u^0(t)$, для которой равенство (1.3.10) выполняется почти всюду. Эта функция будет допустимым управлением. Функция $u^0(t)$, определяемая из (1.3.10), может быть неединственной; в этом случае берется произвольная измеримая функция, удовлетворяющая (1.3.10). Ниже оценивается близость по функционалу управлений $u^0(t)$ и $u^\varepsilon(t)$.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть выполнены следующие условия:

1) функции $f^0(x,\ t)$ и $f^1(x,\ t,\ u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x и непрерывны по t, u;

2) функция $h(x,\ t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, t; функция $\varphi^0(t) \equiv h(x^0(t),\ t)$ обращается в нуль в момент $T^* > t_0$, причем $\varphi^0(t) \neq 0$ для $t \in [t_0,\ T^0]$ и

$$\dot{\varphi}^0(T^0) \neq 0; \tag{1.3.11}$$

3) существует такая постоянная $b > 0$, что для всех $\varepsilon \in [0,\ \varepsilon_0]$, для всех допустимых управлений и для любых $t \in [t_0,\ T^*]$, где T^* — некоторый момент времени, бо́льший T^0, справедливо неравенство

$$|x_u^\varepsilon(t)| \leqslant b; \tag{1.3.12}$$

4) функция $F(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, t;

5) для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует оптимальное управление $u^\varepsilon(t)$.

Тогда справедливы утверждения.

Лемма 1.3.1. Для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и для любых допустимых $u(t)$ имеет место оценка

$$\left|x_u^\varepsilon(t) - \left[x^0(t) + \varepsilon x_u^1(t)\right]\right| \leqslant b_1\varepsilon^2, \qquad t \in [t_0, T^*], \tag{1.3.13}$$

где $x_u^1(t)$— решение задачи Коши

$$\dot{x}_u^1 = A(t)\, x_u^1 + f^1\left(x^0(t), t, u(t)\right), \qquad x_u^1(t_0) = 0. \tag{1.3.14}$$

Здесь b_1 — постоянная, не зависящая от выбора $u(t)$.

Доказательство леммы 1.3.1 проводится с помощью стандартных рассуждений, используемых при оценке близости приближенного решения регулярно возмущенной задачи Коши (см., например, [224]). Двукратная дифференцируемость функций f^0 и f^1 по x (условие 1)) позволяет представить решение $x_u^\varepsilon(t)$ с точностью до членов порядка ε^2; уравнение (1.3.14) также получается разложениями метода теории возмущений. Факт равномерности оценки (1.3.13) устанавливается при помощи условия (1.3.12).

Лемма 1.3.2. Для любого допустимого управления $u(t)$ и достаточно малого значения ε^*, $0 < \varepsilon^* \leqslant \varepsilon_0$, существует момент времени T_u^ε такой, что траектория $x_u^\varepsilon(t)$ достигает терминальной поверхности $h(x, t) = 0$, причем $T_u^\varepsilon \leqslant T^*$.

Смысл и доказательство леммы 1.3.2 достаточно очевидны. Все траектории системы (1.3.1) лежат в ε-окрестности траектории $x^0(t)$, которая вследствие (1.3.11) с ненулевой скоростью пересекает терминальную поверхность (1.3.2) в момент времени T^0. Поэтому при достаточно малых ε^* все траектории системы (1.3.1) также достигают терминальной поверхности в момент времени T_u^ε, отличающийся от T^0 на величину порядка $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$.

Лемма 1.3.3. Для $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ и всех допустимых $u(t)$ справедлива равномерная оценка

$$\left|T_u^\varepsilon - \left(T^0 + \varepsilon T_u^1\right)\right| \leqslant b_2\varepsilon^2. \tag{1.3.15}$$

Здесь T_u^1 — постоянный коэффициент, равный

$$T_u^1 = -\left(\frac{\partial h}{\partial x^0}, x_u^1\right)\frac{1}{\dot{\varphi}^0(t)} \quad \text{при } t = T^0, \qquad (1.3.16)$$

а постоянная b_2 не зависит от выбора ε и $u(t)$.

Доказательство леммы 1.3.3 проводится на основании оценки (1.3.13) и условия (1.3.11). Из (1.3.3) следует уравнение для T_u^ε

$$h\left(x_u^\varepsilon\left(T_u^\varepsilon\right), T_u^\varepsilon\right) = \\ = \varphi^0\left(T_u^\varepsilon\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x} h\left(x^0\left(T_u^\varepsilon\right), T_u^\varepsilon\right), x_u^1\left(T_u^\varepsilon\right)\right) + O\left(\varepsilon^2\right) = 0. \qquad (1.3.17)$$

Решение T_u^ε уравнения (1.3.17) строится в виде $T_u^\varepsilon = T^0 + \varepsilon T_u^1 + \varepsilon^2 \ldots$; в результате подстановки в (1.3.17) для T_u^1 получается выражение (1.3.16). Равномерность оценки (1.3.15) устанавливается на основе непрерывной дифференцируемости функции $\varphi^0(t)$ и условий (1.3.11), (1.3.12).

Лемма 1.3.4. Для всех допустимых управлений $u(t)$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ справедлива оценка (b_3 — постоянная)

$$\left|J_u^\varepsilon - \left[F\left(x^0\left(T^0\right), T^0\right) - \varepsilon\left(p^0\left(T^0\right), x_u^1\left(T^0\right)\right)\right]\right| \leqslant b_3\varepsilon^2. \qquad (1.3.18)$$

Доказательство леммы 1.3.4 основано на двукратной дифференцируемости функции $F(x, t)$ (условие 4)) и оценке (1.3.13). Действительно,

$$J_u^\varepsilon = F\left(x^0\left(T^0\right), T^0\right) + \\ + \varepsilon\left[\dot{F}\left(x^0\left(T^0\right), T^0\right) T_u^1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x^0}, x_u^1\left(T^0\right)\right)\right] + b_4\varepsilon^2.$$

Здесь b_4 — постоянная, не зависящая от $u(t)$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$. Использование выражений (1.3.16) для T_u^1 и (1.3.8) для $p^0(T^0)$ приводит к оценке (1.3.18).

Лемма 1.3.5. Равномерно по $t \in [t_0, T^*]$ при достаточно малом значении ε справедлива равномерная оценка

$$|p^\varepsilon(t) - p^0(t)| \leqslant b_5\varepsilon, \quad b_5 = \mathrm{const} \geqslant 0. \qquad (1.3.19)$$

Доказательство леммы 1.3.5 следует непосредственно из оценки решения системы (1.3.5), (1.3.6) на основании двукратной дифференцируемости функций f, h и F и при помощи оценок (1.3.13), (1.3.15).

Обозначим теперь через $T^{0\varepsilon} = \min\{T^0, T^\varepsilon\}$, где T^ε — оптимальное время процесса. Аналогично предыдущим утверждениям можно установить оценку $|T^0 - T^\varepsilon| \leqslant b_6\varepsilon$, где b_6 — постоянная.

Лемма 1.3.6. Для $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ и $t \in [t_0, T^{0\varepsilon}]$ существует постоянная $b_7 \geqslant 0$ такая, что

$$0 \leqslant g^0(t, u^0(t)) - g^0(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant 2b_7\varepsilon. \qquad (1.3.20)$$

Доказательство леммы 1.3.6 строим при помощи оценок (1.3.13), (1.3.19) и условия 1). Из них следует существование некоторой постоянной $b_7 \geqslant 0$ такой, что

$$|g^\varepsilon(t, u) - g^0(t, u)| \leqslant b_7\varepsilon, \quad t \in [t_0, T^{0\varepsilon}], \quad u \in U.$$

Отсюда находим

$$g^\varepsilon(t, u^\varepsilon(t)) - g^0(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant b_7\varepsilon,$$
$$g^0(t, u^0(t)) - g^\varepsilon(t, u^0(t)) \leqslant b_7\varepsilon.$$

Кроме того, из (1.3.7) следует

$$g^\varepsilon(t, u^0(t)) - g^\varepsilon(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant 0.$$

Складывая последние три неравенства, получим

$$g^0(t, u^0(t)) - g^0(t, u^\varepsilon(t)) \leqslant 2b_7\varepsilon.$$

Отсюда, так как функция $u^0(t)$ удовлетворяет условию (1.3.10), следует оценка (1.3.20).

3. Теорема 1.3.1. При выполнении условий 1)—5) для $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ справедлива оценка

$$0 \leqslant J^\varepsilon_{u^0} - J^\varepsilon_{u^\varepsilon} \leqslant \alpha\varepsilon^2, \quad \alpha \geqslant 0, \qquad (1.3.21)$$

где α — постоянная.

Доказательство теоремы 1.3.1 следует из установленных лемм 1.3.1—1.3.6. Обозначим

$$\Delta x^1(t) = x^1_{u^0}(t) - x^1_{u^\varepsilon}(t).$$

Тогда из оценок (1.3.18) для $u = u^0$ и $u = u^\varepsilon$ получим

$$J^\varepsilon_{u^\varepsilon} - J^\varepsilon_{u^0} = \varepsilon\left(p^0(T^0), \Delta x^1(T^0)\right) + O(\varepsilon^2) =$$
$$= \varepsilon\int_{t_0}^{T^0}\left[\left(\dot p^0(t), \Delta x^1(t)\right) + \left(p^0(t), \Delta\dot x_1(t)\right)\right]dt + O(\varepsilon^2).$$

Подставим теперь в подынтегральное выражение равенства

$$\dot p^0 = -A^*p^0,$$
$$\Delta\dot x^1 = A\Delta x^1 + f^1(x^0(t), t, u^0(t)) - f^1(x^0(t), t, u^\varepsilon(t)).$$

Получим соотношение

$$J^\varepsilon_{u^\varepsilon} - J^\varepsilon_{u^0} = \varepsilon\int_{t_0}^{T^{0\varepsilon}}\left[g^0(t, u^0(t)) - g^0(t, u^\varepsilon(t))\right]dt +$$
$$+ \int_{T^{0\varepsilon}}^{T^0}\left[g^0(t, u^0(t)) - g^0(t, u^\varepsilon(t))\right]dt + O(\varepsilon^2). \qquad (1.3.22)$$

В первом интеграле (1.3.22) подынтегральное выражение имеет порядок ε в силу леммы 1.3.6. Во втором интеграле промежуток интегрирования имеет порядок ε, а подынтегральное выражение заведомо равномерно ограничено. Отсюда следует справедливость оценки (1.3.21).

Изложенное выше доказательство следует работе [138]. Независимо аналогичный результат приведен в [164]. Оценка (1.3.21) показывает, что найденное согласно процедуре § 2 приближение $u^0(t)$ к оптимальному управлению $u^\varepsilon(t)$ приводит к отличию $O(\varepsilon^2)$ в смысле минимизируемого функционала

§ 4. Пример слабо управляемой системы

1. Постановка задачи о полете на максимальную дальность. В качестве примера приложения общего подхода § 2 рассмотрим модельную задачу о полете на максимальную дальность в атмосфере. Численное решение этой задачи было получено методом последовательных приближений в работе [122], а излагаемое ниже приближенное аналитическое решение построено в [226]. Летательный аппарат (материальная точка) совершает плоское движение в атмосфере. Обозначим через v_0 его начальную скорость, через g — постоянное ускорение силы тяжести, через m — массу аппарата и выберем величины $l = v_0^2 g^{-1}$, $v_0 g^{-1}$ и m в качестве единиц длины, времени и массы соответственно. Связь между размерными и безразмерными переменными примет вид

$$t^* = v_0 g^{-1} t, \quad x_i^* = l x_i, \quad x_j^* = v_0 x_j, \quad v^* = v_0 v,$$
$$v = \left(x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}, \quad i = 1, 2; \quad j = 3, 4. \tag{1.4.1}$$

Здесь t — время, x_1 — горизонтальная координата (дальность), x_2 — вертикальная координата (высота); x_3, x_4 — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, v — модуль скорости. Величины без звездочек безразмерны, а звездочками обозначены соответствующие размерные величины. Помимо веса на аппарат действуют аэродинамические силы: сила сопротивления R и подъемная сила Y, равные

$$R = \frac{1}{2} \rho^* v^{*2} S^* C_x, \quad Y = \frac{1}{2} \rho^* v^{*2} S^* C_y. \tag{1.4.2}$$

Сила R направлена против скорости аппарата, а Y — перпендикулярно ей. Здесь ρ^* — плотность атмосферы, S^* — характерная площадь тела, C_x, C_y — аэродинамические коэффициенты, зависящие от угла атаки α. Пусть управление может осуществляться углом α, а также площадью S^*, которая может принимать два значения: S_1^* и S_2^*, причем $S_1^* < S_2^*$. Последняя возможность качественно моделирует изменение геометрии крыла или выдвижение закрылков.

Перепишем равенства (1.4.2), вводя безразмерные переменные

$$R = \varepsilon m g \rho v^2 S C_x, \quad Y = \varepsilon m g \rho v^2 S C_y,$$
$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \quad S = \frac{S^*}{S_1^*}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_0^* v_0^2 S_1^*}{2mg}. \tag{1.4.3}$$

Здесь ρ_0^* — плотность атмосферы на начальной высоте, ρ — безразмерная плотность, S — безразмерная величина, принимающая значение $S_1 = 1$ и $S_2 = S_2^*/S_1^* > 1$, а безразмерный параметр ε характеризует отношение аэродинамических сил к силе тяжести. Запишем уравнения движения аппарата в безразмерных переменных (1.4.1), проектируя силы (1.4.3) на оси x_1, x_2:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -\varepsilon\rho v S\,(C_x x_3 + C_y x_4), \quad v = \left(x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}, \tag{1.4.4}$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -1 + \varepsilon\rho v S\,(C_y x_3 - C_x x_4).$$

Начальные условия зададим в виде ($t_0 = 0$)

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = \cos\theta_0,\ x_4 = \sin\theta_0, \quad v = 1\ (0 < \theta_0 < \pi/2). \tag{1.4.5}$$

Здесь θ_0 — заданный начальный угол наклона траектории (начальная скорость в безразмерных переменных равна единице). Поставим вариационную задачу: достичь максимальной дальности полета x_1 в момент, когда высота x_2 вновь обратится в нуль. Управляющими функциями являются угол атаки $\alpha(t)$, от которого зависят C_x и C_y (эти зависимости конкретизируются ниже), и величина $S(t)$, принимающая дискретные значения S_1 и S_2. Сформулированная задача укладывается в общую постановку §§ 1, 2, если параметр ε является малым, что и предполагается в дальнейшем.

2. Построение приближенного решения. В обозначениях (1.2.1) имеем

$$h^0 = x_2, \quad h^1 = 0, \quad F^0 = -x_1, \quad F^1 = 0, \tag{1.4.6}$$

а краевые условия $q = 0$ из (1.1.3) здесь отсутствуют, т. е. $r = 0$. Функции f_k^0 и f_k^1 при $k = 1, 2, 3, 4$ равны коэффициентам при $\varepsilon^0 = 1$ и ε в правых частях системы (1.4.4). При решении следуем общей схеме, изложенной в § 2, см. п. п. 2, 3.

1. Положим $\varepsilon = 0$ в уравнениях (1.4.4) и найдем общее решение системы нулевого приближения, описывающее движение без сопротивления

$$x_1 = c_3 t + c_1, \quad x_2 = c_4 t + c_2 - {}^1\!/_2 t^2, \quad x_3 = c_3, \quad x_4 = c_4 - t. \tag{1.4.7}$$

Правые части эти равенств есть функции φ_k из (1.2.5). Разрешая равенства (1.4.7) относительно постоянных c_i, получим первые интегралы (1.2.6) системы нулевого приближения

$$g_1 = x_1 - x_3 t, \quad g_2 = x_2 - x_4 t - {}^1/_2 t^2, \qquad g_3 = x_3, \quad g_4 = x_4 + t. \tag{1.4.8}$$

При помощи равенств (1.4.7), (1.4.8) составим матрицы (1.2.8)

$$\Phi = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad G = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{1.4.9}$$

2. Фазовые координаты в нулевом приближении (1.2.7) найдем, определяя в решении (1.4.7) произвольные постоянные при помощи начальных условий (1.4.5). Получим

$$x_1^0 = t\cos\theta_0, \quad x_2^0 = t\sin\theta_0 - t^2/2, \qquad x_3^0 = \cos\theta_0, \quad x_4^0 = \sin\theta_0 - t. \tag{1.4.10}$$

Подставим решение (1.4.10) в условие окончания процесса $x_2 = 0$ и найдем время T^0, а затем определим минимизируемый функционал J^0 — дальность со знаком минус

$$T^0 = 2\sin\theta_0, \quad J^0 = -x_1(T^0) = -\sin 2\theta_0. \tag{1.4.11}$$

3. По формуле (1.2.3) найдем постоянную λ^0, используя решение (1.4.10), равенства (1.4.6) для h^0, F^0, (1.4.11) для T^0 и учитывая, что $r = 0$:

$$\lambda^0 = -x_3^0(T^0)\left[x_4^0(T^0)\right]^{-1} = \operatorname{ctg}\theta_0. \tag{1.4.12}$$

Теперь по формуле (1.2.12) найдем постоянный вектор s, используя соотношения (1.4.9), (1.4.12)

$$s_1 = 1, \ s_2 = \operatorname{ctg}\theta_0, \ s_3 = T^0 = 2\sin\theta_0, \qquad s_4 = T^0\operatorname{ctg}\theta_0 = 2\cos\theta_0. \tag{1.4.13}$$

Сопряженный вектор нулевого приближения p^0 определим при помощи соотношений (1.2.11), (1.4.9), (1.4.13)

$$p_1^0 = 1, \quad p_2^0 = \operatorname{ctg}\theta_0, \quad p_3^0 = T^0 - t, \quad p_4^0 = (T^0 - t)\operatorname{ctg}\theta_0. \tag{1.4.14}$$

4. Теперь из соотношения (1.2.13) с использованием (1.4.4), (1.4.14) получим, что управляющие функции оп-

ределяются из условия максимальности по α, S следующего выражения:

$$\varepsilon\rho v S\,(T^0 - t)\left[\operatorname{ctg}\theta_0\,(C_y x_3^0 - C_x x_4^0) - (C_x x_3^0 + C_y x_4^0)\right].$$

Подставляя сюда решение (1.4.10) и учитывая, что $t \leqslant T^0 = 2\sin\theta_0$, полученному условию можно придать вид

$$S\left(C_x - C_y\,\frac{\cos 2\theta_0 + t\sin\theta_0}{\sin 2\theta_0 - t\cos\theta_0}\right) \to \min_{\alpha,S}. \qquad (1.4.15)$$

Если на угол атаки α не наложено ограничений, то для выполнения условия (1.4.15) необходимо потребовать, чтобы первая производная выражения (1.4.15) по α равнялась нулю. Отсюда получим (штрих означает производную по α)

$$\frac{C_y'(\alpha)}{C_x'(\alpha)} = \frac{\sin 2\theta_0 - t\cos\theta_0}{\cos 2\theta_0 + t\sin\theta_0}. \qquad (1.4.16)$$

Вторая производная (1.4.15) по α должна быть при этом неотрицательна. При помощи равенства (1.4.16) это условие запишем в виде

$$C_x'' - (C_x'/C_y')\,C_y'' = C_y'\,(C_x'/C_y')' \geqslant 0. \qquad (1.4.17)$$

Таким образом, управление $\alpha(t)$ определяется из условия (1.4.15), для выполнения которого необходимо выполнение условий (1.4.16), (1.4.17). Если условия (1.4.16), (1.4.17) определяют α единственным образом, то это $\alpha(t)$ и будет искомым. Когда α найдено, управление S выбирается в зависимости от знака коэффициента при S в (1.4.15). С учетом равенства (1.4.16) условию для выбора S можно придать вид

$$S = S_1 = 1 \text{ при } A > 0, \qquad S = S_2 > S_1 \text{ при } A < 0,$$

$$A = C_x - C_y\,(C_x'/C_y'). \qquad (1.4.18)$$

3. Анализ решения. Дадим геометрическую интерпретацию условия (1.4.16). Пусть $\theta(t)$ — угол наклона траектории нулевого приближения к горизонтальной оси. Согласно (1.4.10) имеем

$$\operatorname{tg}\theta = x_4^0/x_3^0 = (\sin\theta_0 - t)/\cos\theta_0. \qquad (1.4.19)$$

Нетрудно проверить, что равенство (1.4.16) с учетом (1.4.19) можно записать в эквивалентном виде

$$C'_y/C'_x = \operatorname{tg}(\theta + \theta_0). \qquad (1.4.20)$$

Функции $C_x(\alpha)$, $C_y(\alpha)$ определяют параметрически уравнение поляры аппарата — кривой в плоскости C_x, C_y. Равенство (1.4.20) показывает, что при оптимальном выборе угла атаки $\alpha(t)$ касательная к поляре аппарата в любой момент времени составляет с осью C_x угол $\theta + \theta_0$.

Для конкретизации дальнейших вычислений зададим аэродинамические характеристики в виде

$$\begin{aligned} C_x &= 1 - \cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha, \\ C_y &= K \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha. \end{aligned} \qquad (1.4.21)$$

Здесь α_0, K — постоянные, причем, как нетрудно проверить, K равно максимальному качеству аппарата $\max(C_y/C_x)$, а α_0 — угол атаки, при котором оно достигается. Зависимости (1.4.21) принимались в работе [122] при численном расчете задачи о полете на максимальную дальность. Они обладают следующими свойствами, типичными для некоторых симметричных тел: 1) функции C_x, C_y периодичны по α с периодом π; 2) $C_x(\alpha)$ — четная, а $C_y(\alpha)$ — нечетная функции от α; 3) при малых α функции (1.4.21) имеют обычный вид $C_x = C_1 + C_2\alpha^2$, $C_y = C_3\alpha$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные. Поляра аппарата, имеющего характеристики (1.4.21), представляет собой эллипс.

Подставляя соотношения (1.4.21) в условия (1.4.16) — (1.4.18), получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg} 2\alpha = K \operatorname{tg} 2\alpha_0 \frac{\cos 2\theta_0 + t \sin \theta_0}{\sin 2\theta_0 - t \cos \theta_0}, \\ &\frac{\cos 2\alpha_0}{\cos 2\alpha} \geqslant 0, \quad A = 1 - \frac{\cos 2\alpha_0}{\cos 2\alpha}. \end{aligned} \qquad (1.4.22)$$

Первое равенство (1.4.22) с учетом неравенства из (1.4.22) однозначно определяет угол атаки α на интервале $[0, \pi)$. Прибавление к α углов, кратных π, несущественно в силу отмеченной периодичности функций (1.4.21). Последнее равенство (1.4.22) определяет S согласно (1.4.18).

Пусть для определенности $\alpha_0 < \pi/4$, $\theta_0 < \pi/4$ (другие случаи рассматриваются аналогично). Учитывая еще неравенство $t \leqslant T^0 = 2 \sin \theta_0$, из первого равенства (1.4.22) найдем, что $\operatorname{tg} 2\alpha \geqslant 0$. Принимая во внимание второе соотношение (1.4.22), убедимся в том, что $0 \leqslant 2\alpha \leqslant \pi/2$. Угол α и величина S примут вид

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(K \operatorname{tg} 2\alpha_0 \frac{\cos 2\theta_0 + t \sin \theta_0}{\sin 2\theta_0 - t \cos \theta_0} \right),$$
$$S = S_1 \text{ при } \alpha < \alpha_0, \ S = S_2 \text{ при } \alpha > \alpha_0. \tag{1.4.23}$$

Таким образом, управляющие функции полностью определены. Угол $\alpha(t)$ согласно (1.4.22) монотонно возрастает от $\alpha(0)$ до $\pi/4$. Отметим, что углу атаки $\alpha = \pi/4$ отвечает согласно (1.4.21) максимальное значение коэффициента подъемной силы C_y. Кусочно постоянная функция $S(t)$ имеет, очевидно, не более одного переключения. В конце процесса, так как $\alpha(T^0) = \pi/4 > \alpha_0$, величина S принимает свое наибольшее значение S_2. Если $\alpha(0) \geqslant \alpha_0$, то точка переключения вообще отсутствует и $S = S_2$ всюду, а если $\alpha(0) < \alpha_0$, то на начальном участке траектории $S = S_1$. Чем больше качество K, тем раньше наступает переключение и тем большие значения принимает угол α в один и тот же момент времени.

Приведенные результаты хорошо согласуются с результатами работы [122]. В работе [122] получено численное решение поставленной задачи для случая постоянной атмосферы и в широком диапазоне (от 0,1 до 3) изменения параметров ε, K. Сравнение оптимального закона управления $\alpha(t)$ из работы [122] при $\alpha_0 = \theta_0 = 10°$ с законом (1.4.23) показывает, что при $\varepsilon = 0{,}1$ эти законы практически совпадают, и даже при $\varepsilon = 0{,}5$ отличие между ними составляет примерно 10% во всем диапазоне изменения K. Момент переключения, определяемый условием (1.4.23), также хорошо согласуется с результатами расчетов (примерно с той же точностью).

Приближенное аналитическое решение (1.4.22) получено при произвольной зависимости плотности атмосферы от высоты. Задавая эту зависимость, при помощи квадратуры (1.2.9) нетрудно найти и поправку к траектории, обусловленную действием аэродинамических сил. Отметим, что траектория и функционал при этом будут определены с погрешностью порядка ε^2, т. е. на порядок ε точнее, чем управление.

§ 5. Приближенный синтез управления вращениями твердого тела

1. Постановка задачи оптимального торможения. В качестве примера применения метода малого параметра (теории возмущений) для приближенного построения синтеза рассмотрим управляемые вращения твердого тела, близкого к динамически симметричному. Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$
\begin{aligned}
I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\,\omega_2\omega_3 &= b_1u_1 + N_1, \quad \omega_1(0) = \omega_1^0,\\
I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\,\omega_1\omega_3 &= b_2u_2 + N_2, \quad \omega_2(0) = \omega_2^0,\\
I_3\dot{\omega}_3 &= b_3u_3 + N_3, \quad \omega_3(0) = \omega_3^0.
\end{aligned}
\tag{1.5.1}
$$

Здесь постоянные I, I_3 — главные центральные моменты инерции твердого тела при отсутствии возмущений ($0 < I_3 \leqslant 2I$), ω_i — проекции вектора угловой скорости на главные центральные оси инерции, b_iu_i — управляющие моменты, $b_i = \mathrm{const} > 0$, u_i — управляющие функции, подчиненные ограничению

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant 1. \tag{1.5.2}$$

Проекции момента возмущающих сил $N_i = N_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ есть достаточно гладкие функции переменных ω_i в некоторой окрестности начала координат, включающей шар

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \leqslant \omega_0^2, \quad \omega_0 = \left(\omega_1^{02} + \omega_2^{02} + \omega_3^{02}\right)^{1/2}.$$

В частности, если тело близко к динамически симметричному, т. е.

$$I_1 = I(1 + \delta_1),\ I_2 = I(1 + \delta_2),\ \delta_{1,2} \ll 1,$$

то функции N_i содержат гироскопические возмущения вида $I(\delta_1 - \delta_2)\omega_1\omega_2$. Конкретные модели возмущающих моментов N_i ($i = 1, 2, 3$) рассматривается ниже. Далее предполагается, что величина возмущений мала по сравнению с моментом сил управления. Это предположение можно формализовать введением малого числового параметра ε, полагая $N_i = \varepsilon b_i f_i$, $i = 1, 2, 3$.

Для возмущенной управляемой системы (1.5.1), (1.5.2) поставим задачу оптимального по быстродействию торможения вращений. Требуется перевести фазовую точку системы из начального состояния (1.5.1) в начало координат $\omega_i(T) = 0$, $i = 1, 2, 3$, за минимальное время T. Для этого необходимо найти закон управления в виде синтеза $u_i = u_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, оптимальную фазовую траекторию ω_i как функцию времени t и начальных данных ω_i^0, а также минимальное значение времени торможения как функцию начальных данных: $T = T(\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0)$.

Отметим, что исследованию управляемых движений твердого тела относительно центра масс посвящено значительное число работ (см. главу 5). Приведенная постановка задачи оптимального торможения представляет самостоятельный интерес, но может рассматриваться и как составная часть более общей задачи управления, например, переориентации твердого тела в абсолютном пространстве. Выбранное ограничение на управление (1.5.2) соответствует двигателям ограниченной суммарной мощности [73] или верньерным двигателям ограниченной тяги [34].

Линейным преобразованием переменных система (1.5.1) приводится к удобному для дальнейших исследований виду

$$\begin{aligned}
&\dot z_1 + D_1 z_2 z_3 = u_1 + \varepsilon f_1(z_1, z_2, z_3), \qquad z_1(0) = z_1^0,\\
&\dot z_2 = D_2 z_1 z_3 = u_2 + \varepsilon f_2(z_1, z_2, z_3), \qquad z_2(0) = z_2^0, \qquad (1.5.3)\\
&\qquad \dot z_3 = u_3 + \varepsilon f_3(z_1, z_2, z_3), \qquad z_3(0) = z_3^0.
\end{aligned}$$

Здесь переменные z_i, функции f_i и параметры D_1, D_2 определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
&z_1 = I\omega_1 b_1^{-1}, \quad z_2 = I\omega_2 b_2^{-1}, \qquad z_3 = I_3\omega_3 b_3^{-1},\\
&N_i - \varepsilon b_i f_i \qquad (i = 1, 2, 3), \quad D_{1,2} = \frac{I_3 - I}{II_3}\,\frac{b_{2,1}}{b_{1,2}}\,b_3.
\end{aligned} \qquad (1.5.4)$$

Поставленная задача синтеза содержит малый параметр ε, и для ее решения нужно сначала найти порождающее решение, соответствующее $\varepsilon = 0$. В общем случае для произвольных D_1, D_2 явно решить задачу синтеза для системы (1.5.3) при $\varepsilon = 0$ не удается. В случае же равенства $D_1 = D_2 = D$ невозмущенная система (1.5.3) при $\varepsilon = 0$ становится управляемой системой с инвариантной нормой, допускающей при $u_i = 0$ первый интеграл

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \mathrm{const}.$$

Синтез оптимального управления при $\varepsilon = 0$ в этом случае может быть найден явно [34], что дает возможность построить приближенное решение для $\varepsilon \ll 1$ методом возмущений. Отметим, что согласно (1.5.4) рассматриваемый случай $D_1 = D_2 = D$ реализуется либо при $b_1 = b_2$, либо при равенстве моментов инерции $I = I_3$ (тогда имеем $D_1 = D_2 = 0$).

2. **Синтез оптимального торможения для невозмущенной системы.** Исследуем систему (1.5.2), (1.5.3) при $\varepsilon = 0$ в предположении, что $D_1 = D_2 = D$, т. е. рассмотрим задачу управления вида

$$\dot z_1 + Dz_2z_3 = u_1, \quad \dot z_2 - Dz_1z_3 = u_2, \quad \dot z_3 = u_3, \qquad z(0) = z^0,\ z(T) = 0,\ T \to \min,\ |u| \leqslant 1. \tag{1.5.5}$$

Через z и u обозначены векторы с компонентами (z_1, z_2, z_3) и (u_1, u_2, u_3) соответственно, символ $|\cdot|$ означает модуль вектора.

Решение задачи (1.5.5) получается при помощи простого приема. Умножим каждое из уравнений (1.5.5) на $z_i l^{-1}$, где $l = |z|$, и сложим все уравнения. Получим скалярное уравнение

$$\dot l = (u,\ \eta),\ \ \eta = zl^{-1},\ l(0) = |z^0| \equiv l^0. \tag{1.5.6}$$

Из (1.5.6) с учетом соотношений $|u| \leqslant 1$, $|\eta| = 1$ следует

$$-1 \leqslant \dot l \leqslant 1.$$

В левом из полученных неравенств знак равенства достигается при управлении

$$u_0^* = -\eta, \quad |\eta| = 1, \tag{1.5.7}$$

которое, очевидно, и является оптимальным по быстродействию.

Подстановка функции (1.5.7) в уравнение (1.5.6) приводит к равенству $\dot l = -1$, откуда следует

$$l = l^0(1 - tT_0^{-1}), \quad T_0 = l^0. \tag{1.5.8}$$

Здесь T_0 — время оптимального быстродействия. Подставим теперь функцию u_0^* (1.5.7) в уравнения (1.5.5). Получим систему с заданными начальными условиями, для которой известен один из интегралов (1.5.8). Ее решение ищем в виде $z = l\eta$, где $\eta(t)$ — неизвестная вектор-функция, удовлетворяющая условию $|\eta(t)| = 1$. Подставляя $z_i = l(t)\eta_i$ в уравнения (1.5.5) и учитывая (1.5.8), для неизвестных функций η_i получим уравнения

$$\dot{\eta}_1 + Dl\eta_2\eta_3 = 0, \quad \dot{\eta}_2 - Dl\eta_1\eta_3 = 0, \quad \dot{\eta}_3 = 0, \qquad \eta_i(0) = \eta_i^0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.5.9}$$

Введем в системе (1.5.9) новую независимую переменную σ

$$\sigma = Dz_3^0 t\left(1 - {}^1/_2 tT_0^{-1}\right) \tag{1.5.10}$$

и воспользуемся выражением (1.5.8) для l. Тогда с учетом $\eta_3 = \mathrm{const}$ система (1.5.9) для η_1, η_2 сведется к линейной системе с постоянными коэффициентами. Интегрируя, найдем

$$\begin{aligned} &\eta_1 = l_\perp^0 (l^0)^{-1} \cos(\sigma + \sigma_0), \quad \cos\sigma_0 = z_1^0 \left(l_\perp^0\right)^{-1}, \\ &\eta_2 = l_\perp^0 (l^0)^{-1} \sin(\sigma + \sigma_0), \quad \sin\sigma_0 = z_2^0 \left(l_\perp^0\right)^{-1}, \\ &\eta_3 = z_3^0 (l^0)^{-1}, \quad l_\perp = \left(z_1^2 + z_2^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

Отметим, что скорость изменения фазы σ колебаний вектора (η_1, η_2) обращается в нуль при $t = T_0$ вместе с величиной l модуля вектора z. Таким образом, решение задачи оптимального быстродействия для невозмущенной системы (1.5.2), (1.5.5) полностью построено в виде (1.5.7), (1.5.8), (1.5.10), (1.5.11). Простым пересчетом по формулам (1.5.4) получается решение в исходных переменных ω_1, ω_2, ω_3. Зависимость фазовой переменной z_1, а также величин l, $l_\perp$ и $\sigma + \sigma_0$ от времени t качественно представлена на рис. 1.1.

3. Приближенное построение оптимального синтеза. Подставим управление u_0^* из (1.5.7) в возмущенную систему (1.5.3). Для величины $l = |z|$ получим уравнение

$$\dot{l} = -1 - \varepsilon(\eta, f), \quad l(0) = l^0.$$

Так как $|(\eta, f)| \leqslant |f|$, то вследствие ограниченности функции $f = (f_1, f_2, f_3)$ в окрестности начала координат величина l достигнет нуля за некоторое время T, отличное от $T_0 = l^0$ на величину порядка ε. Следовательно, синтез управления (1.5.7) обеспечивает торможение тела за время T, близкое к T_0.

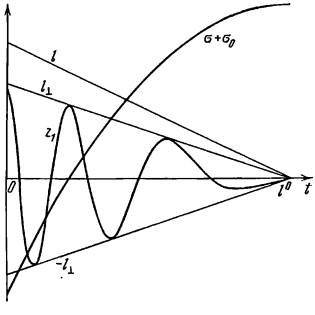


Рис. 1.1.

Построение синтеза оптимального управления с учетом возмущающих моментов с некоторой заданной степенью точности по малому параметру ε можно осуществить при помощи метода динамического программирования. Для этого построим приближенное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана [43, 53]:

$$\min_{|u|\leqslant 1}\left(\frac{\partial T}{\partial z},\ u - G + \varepsilon f\right) = -1,$$
$$G = (Dz_2z_3,\ -Dz_1z_3,\ 0),\quad T(0, \varepsilon) \equiv 0. \tag{1.5.12}$$

Здесь $T = T(z,\ \varepsilon)$ — функция Беллмана — минимальное значение функционала (времени торможения) для процесса, начинающегося в фазовой точке z; G — вектор гироскопических моментов, $\partial T/\partial z$ — вектор частных производных функции T по z. Таким образом, в левой части уравнения (1.5.12) стоит скалярное выражение, минимизация по u которого приводит к оптимальному управлению вида

$$u^*(z, \varepsilon) = -\frac{p}{|p|}, \quad p = \frac{\partial T}{\partial z} = \left(\frac{\partial T}{\partial z_1}, \frac{\partial T}{\partial z_2}, \frac{\partial T}{\partial z_3}\right). \quad (1.5.13)$$

Подставляя (1.5.13) в соотношение (1.5.12), получим задачу Коши для нелинейного уравнения в частных производных

$$|p| + (p, G) + \varepsilon(p, f) = 1, \; T(0, \varepsilon) \equiv 0. \quad (1.5.14)$$

Решение задачи (1.5.14) в предположении, что функция f достаточное число раз дифференцируема в l^0-окрестности начала координат $z = 0$, строится разложениями по степеням параметра ε

$$T(z, \varepsilon) = T_0(z) + \varepsilon T_1(z) + \ldots + \varepsilon^k T_k(z) + \ldots, \quad T_k(0) = 0, \; k = 0, 1, 2, \ldots \quad (1.5.15)$$

В соответствии с методикой теории возмущений представление (1.5.15) подставляется в (1.5.14). Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε позволяет получить последовательность уравнений в частных производных с нулевыми условиями. В дальнейшем будем использовать обозначение

$$p_k = \frac{\partial T_k}{\partial z}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (1.5.16)$$

При $k = 0$, что соответствует невозмущенной системе (1.5.5), получим нелинейную задачу Коши вида

$$|p_0| + (p_0, G) = 1, \; T_0(0) = 0. \quad (1.5.17)$$

Решение задачи (1.5.17) доставляет функция

$$T_0(z) = |z| = l, \; p_0 = \eta = z l^{-1} \quad (1.5.18)$$

из (1.5.8), для которой $|p_0| = 1$, $(p_0, G) = 0$ (см. формулу (1.5.12) для G). Функция (1.5.18) всюду непрерывна и непрерывно дифференцируема в каждой точке, кроме точки $z = 0$, где производные не определены. Однако уравнение (1.5.17) формально удовлетворяется и в точке $z = 0$. Таким образом, выражение (1.5.18) есть функция Беллмана невозмущенной задачи оптимального управления (1.5.5), а $p_0 = \eta$. Из (1.5.13), (1.5.15), (1.5.18) получим нулевое приближение для управления, совпадающее с (1.5.7): $u^*(z, 0) = u_0^*(z) = -\eta$.

Отметим, что так как $|p_0| = 1$, то проведенное в уравнении (1.5.14) разложение вблизи $T = T_0(z)$ справедливо при достаточно малых ε.

Следующее уравнение, определяющее функцию $T_1(z)$ в (1.5.15), является линейным с известной неоднородностью

$$(p_1, p_0) + (p_1, G) = F_1, \ F_1(z) = (p_0, f(z)), \ T_1(0) = 0. \tag{1.5.19}$$

Здесь вектор G дан формулой (1.5.12), а p_0 — формулой (1.5.18). Решение задачи Коши (1.5.19) можно построить методом характеристик [170]. Семейство характеристик строится однозначно, так как сумма квадратов коэффициентов при частных производных здесь отлична от нуля:

$$(p_0 + G)^2 = 1 + D^2 (z_1^2 + z_2^2) z_3^2 \geqslant 1.$$

Уравнения характеристик задаются соотношениями

$$\frac{dz_1}{\eta_1 + Dz_2z_3} = \frac{dz_2}{\eta_2 - Dz_1z_3} = \frac{dz_3}{\eta_3} = \frac{dT}{-F_1(z)}. \tag{1.5.20}$$

Общий интеграл первых двух уравнений (1.5.20) удобно представить в форме, аналогичной (1.5.11)

$$\begin{gathered} z_1 = \alpha l \cos ({}^1/_2 D\beta l^2 + \tau) \equiv \varphi_1(l, \alpha, \beta, \tau), \\ z_2 = -\alpha l \sin ({}^1/_2 D\beta l^2 + \tau) \equiv \varphi_2(l, \alpha, \beta, \tau), \\ z_3 = \beta l \equiv \varphi_3(l, \alpha, \beta, \tau), \\ \alpha, \beta, \tau = \text{const}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{gathered} \tag{1.5.21}$$

Из соотношений (1.5.21) постоянные α, β, τ могут быть выражены как функции вектора z следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha = l_\perp l^{-1}, \ \beta = z_3 l^{-1}, \ \cos\tau = (z_1 \cos s - z_2 \sin s)(l_\perp)^{-1}, \\ \sin\tau = -(z_1 \sin s + z_2 \cos s)(l_\perp)^{-1}, \\ l_\perp = (z_1^2 + z_2^2)^{1/2}, \ s = {}^1/_2 D z_3 l. \end{gathered} \tag{1.5.22}$$

Теперь на основании последнего соотношения (1.5.20) и выражений (1.5.21) искомое решение T_1 задачи Коши

(1.5.19) записывается в виде квадратуры

$$T_1(z) = -\int_0^l F_1(\varphi(y, \alpha, \beta, \tau))\,dy, \qquad (1.5.23)$$

в которую должны быть подставлены компоненты φ_1, φ_2, φ_3 вектор-функции φ из (1.5.21) и выражения (1.5.22) для α, β, τ.

Уравнения для последующих коэффициентов $T_k(z)$ ($k \geqslant 2$) разложения (1.5.15) имеют вид, аналогичный (1.5.19):

$$(p_k,\ p_0 + G) = F_k(z), \quad T_k(0) = 0. \qquad (1.5.24)$$

Функции $F_k(z)$ в правой части (1.5.24) на каждом шаге известны в результате вычислений функций $T_1(z), \ldots$ $\ldots, T_{k-1}(z)$ на предыдущих шагах. Они выражаются через производные $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$, а в конечном итоге при помощи квадратур от функций $f_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) и их производных. Аналогично (1.5.23) записывается решение задачи Коши (1.5.24)

$$T_k(z) = -\int_0^l F_k(\varphi(y, \alpha, \beta, \tau))\,dy, \qquad (1.5.25)$$

где величины α, β, τ имеют вид (1.5.22). Если вектор-функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема по z в l^0-окрестности начала координат k раз, то первые $k+1$ членов представления (1.5.15) дают искомое выражение для функции Беллмана $T(z, \varepsilon)$ задачи (1.5.14) с погрешностью порядка ε^{k+1}, т. е.

$$T(z, \varepsilon) = |z| + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^j T_j(z) + O(\varepsilon^{k+1}). \qquad (1.5.26)$$

Переходим к построению вектор-функции оптимального управления $u^*(z, \varepsilon)$. Подставляя (1.5.26) в (1.5.13), получим

$$u^*(z, \varepsilon) = -\frac{p}{|p|} = -\frac{\eta + \varepsilon p_1 + \ldots + \varepsilon^k p_k + O(\varepsilon^{k+1})}{|\eta + \varepsilon p_1 + \ldots + \varepsilon^k p_k + O(\varepsilon^{k+1})|} =$$
$$= -\eta + \varepsilon u_1^*(z) + \ldots + \varepsilon^k u_k^*(z) + O(\varepsilon^{k+1}). \qquad (1.5.27)$$

Здесь использовано равенство $p_0 = \eta$ (см. (1.5.18)) и обозначение (1.5.16). В качестве k-го приближения к оптимальному управлению будем рассматривать выражение

$$u_{(k)}(z, \varepsilon) = -\frac{\eta + \varepsilon p_1 + \ldots + \varepsilon^k p_k}{|\eta + \varepsilon p_1 + \ldots + \varepsilon^k p_k|}, \qquad (1.5.28)$$

получающееся в результате подстановки первых $k+1$ членов ряда (1.5.26) в формулу (1.5.13). Выражение (1.5.28) удовлетворяет ограничению $|u_{(k)}| \leqslant 1$ из (1.5.2). Однако разложение функции $u_{(k)}$ в степенной ряд по ε содержит члены высших порядков по ε. Если же разложить (1.5.28) в ряд по ε (см. (1.5.27)) и ограничиться первыми $k+1$ членами, то получим другую аппроксимацию управления

$$u^{(k)}(z, \varepsilon) = -\eta + \varepsilon u_1^*(z) + \ldots + \varepsilon^k u_k^*(z) \equiv$$
$$\equiv -\eta + \varepsilon U^{(k)}(z, \varepsilon). \quad (1.5.29)$$

Выражение (1.5.29), вообще говоря, не удовлетворяет ограничению (1.5.2), однако погрешность удовлетворения этому ограничению составляет, очевидно, величину $O(\varepsilon^{k+1})$. При построении приближений к оптимальной фазовой траектории удобнее использовать аппроксимацию (1.5.29) вместо (1.5.28), что не уменьшит порядка точности вычислений.

В первом приближении из формул (1.5.27), (1.5.29) получим

$$u^*(z, \varepsilon) = -\frac{\eta + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2)}{|\eta + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2)|} =$$
$$= -\eta + \varepsilon[p_1 - \eta(\eta, p_1)] + O(\varepsilon^2) =$$
$$= -\eta + \varepsilon U^{(1)}(z) + O(\varepsilon^2). \quad (1.5.30)$$

4. Приближенное вычисление оптимальной траектории. Подстановка аппроксимации для оптимального управления $u^{(k)}(z, \varepsilon)$ из (1.5.29) в уравнения (1.5.3) приводит к задаче Коши $(k+1)$-го приближения

$$\dot z_1 + Dz_2 z_3 = -\eta_1 + \varepsilon U_1^{(k)}(z, \varepsilon) + \varepsilon f_1(z), \quad z_1(0) = z_1^0,$$
$$\dot z_2 - Dz_1 z_3 = -\eta_2 + \varepsilon U_2^{(k)}(z, \varepsilon) + \varepsilon f_2(z), \quad z_2(0) = z_2^0,$$
$$\dot z_3 = -\eta_3 + \varepsilon U_3^{(k)}(z, \varepsilon) + \varepsilon f_3(z), \quad z_3(0) = z_3^0,$$
$$(1.5.31)$$

в которой опущены члены порядка ε^{k+1} в оптимальном управлении. Это приводит к погрешности того же порядка в определении оптимальной траектории. Поэтому фазовая точка z будет находиться в ε^{k+1}-окрестности начала координат $z=0$ в момент времени $T(z^0, \varepsilon)$, являющийся временем оптимального быстродействия.

Переходим к определению приближенной оптимальной фазовой траектории с погрешностью $O(\varepsilon^{k+1})$, т. е. к решению системы (1.5.31) с указанной точностью. Для упрощения записи введем вектор-функции

$$L^{(k)}(z, \varepsilon) = U^{(k)}(z, \varepsilon) + f(z). \tag{1.5.32}$$

В силу (1.5.29) функция $L^{(k)}$ является многочленом степени $k-1$ от ε. Запишем уравнение для величины $|z| = l$, вытекающее из (1.5.31), (1.5.32)

$$\dot{l} = -1 + \varepsilon(\eta, L^{(k)}(z, \varepsilon)), \quad l(0) = l^0. \tag{1.5.33}$$

Из ограниченности $L^{(k)}$ и равенства $|\eta| = 1$ вытекает, что при достаточно малом ε величина l монотонно убывает и обращается в нуль. Таким образом, приближения к оптимальному управлению обеспечивают приведение системы в начало координат (торможение твердого тела). Время торможения для приближений (1.5.28), (1.5.29) отличается от оптимального времени $T(z^0, \varepsilon)$ на величины порядка ε^{k+1} и может быть с указанной точностью определено из (1.5.26).

Решение системы (1.5.31) будем искать в виде $z = l\eta$ (см. п. 2). С учетом (1.5.33) для вектора η получим аналогично (1.5.9) систему

$$\begin{gathered}
\dot{\eta}_1 + Dl\eta_2\eta_3 = \varepsilon\Phi_1^{(k)}(\eta, l, \varepsilon), \quad \eta_1(0) = \eta_1^0, \\
\dot{\eta}_2 - Dl\eta_1\eta_3 = \varepsilon\Phi_2^{(k)}(\eta, l, \varepsilon), \quad \eta_2(0) = \eta_2^0, \\
\dot{\eta}_3 = \varepsilon\Phi_3^{(k)}(\eta, l, \varepsilon), \quad \eta_3(0) = \eta_3^0, \\
\Phi^{(k)}(\eta, l, \varepsilon) = l^{-1}\left[L^{(k)}(l\eta, \varepsilon) - \eta\left(\eta, L^{(k)}(l\eta, \varepsilon)\right)\right]. \ \square
\end{gathered} \tag{1.5.34}$$

Функции l, η могут быть построены (с заданной степенью точности по ε) разложениями по ε, аналогично § 2, или последовательными приближениями.

Изложим рекуррентную схему последовательных приближений. Пусть известно решение системы (1.5.33), (1.5.34) в $(j-1)$-м приближении, т. е. функции $l_{(j-1)}(t, \varepsilon)$, $\eta_{(j-1)}(t, \varepsilon)$. Тогда j-е приближение для l и η_3 находится квадратурами, вытекающими из (1.5.33), (1.5.34)

$$l_{(j)}(t, \varepsilon) = \\ = l^0 - t + \varepsilon \int_0^t (\eta_{(j-1)}(\tau, \varepsilon), L^{(k)}(l_{(j-1)}(\tau, \varepsilon) \times \\ \times \eta_{(j-1)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon))\, d\tau, \quad (1.5.35)$$

$$\eta_{3(j)}(t, \varepsilon) = \eta_3^0 + \varepsilon \int_0^t \Phi_3^{(k)}(\eta_{(j-1)}(\tau, \varepsilon), l_{(j-1)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\, d\tau.$$

Для определения функций η_1, η_2 в j-м приближении в левые части уравнений (1.5.34) для η_1, η_2 подставляются величины (1.5.35). В правые части этих уравнений, содержащие множитель ε, подставим $(j-1)$-е приближения для l, η. Получаем

$$\dot\eta_{1(j)} + Dl_{(j)}(t, \varepsilon)\, \eta_{3(j)}(t, \varepsilon)\, \eta_{2(j)} = \varepsilon \Phi_{1(j-h)}^{(h)}(t, \varepsilon),$$

$$\dot\eta_{2(j)} - Dl_{(j)}(t, \varepsilon)\, \eta_{3(j)}(t, \varepsilon)\, \eta_{1(j)} = \varepsilon \Phi_{2(j-1)}^{(k)}(t, \varepsilon), \quad (1.5.36)$$

$$\eta_{1(j)}(0) = \eta_1^0, \quad \eta_{2(j)}(0) = \eta_2^0.$$

Через $\Phi_{1(j-1)}^{(k)}$, $\Phi_{2(j-1)}^{(h)}$ здесь обозначены компоненты вектор-функции $\Phi^{(k)}$ из (1.5.34), в которую вместо η, l подставлены $(j-1)$-е приближения $\eta_{(j-1)}(t, \varepsilon)$, $l_{(j-1)}(t, \varepsilon)$.

Решение соответствующей (1.5.36) однородной системы имеет вид, аналогичный (1.5.11)

$$\eta_{1(j)}^0 = c_{1j} \cos s_j - c_{2j} \sin s_j, \quad \eta_{2(j)}^0 = c_{1j} \sin s_j + c_{2j} \cos s_j, \quad (1.5.37)$$

$$s_j(t, \varepsilon) = D \int_0^t l_{(j)}(\tau, \varepsilon)\, \eta_{3(j)}(\tau, \varepsilon)\, d\tau.$$

Применяя метод вариации постоянных c_{1j}, c_{2j}, получим на основании (1.5.37) искомые решения неоднородной системы (1.5.36) в виде квадратур

■ $$\eta_{1(j)}(t, \varepsilon) = \eta_1^0 \cos s_j - \eta_2^0 \sin s_j + \\ + \int_0^t [\Phi_{1(j-1)}^k(\tau, \varepsilon) \cos [s_j(t, \varepsilon) - s_j(\tau, \varepsilon)] - \\ - \Phi_{2(j-1)}(\tau, \varepsilon) \sin [s_j(t, \varepsilon) - s_j(\tau, \varepsilon)]]\, d\tau,$$

$$\eta_{2(j)}(t, \varepsilon) = \eta_1^0 \sin s_j + \eta_2^0 \cos s_j + \\ + \int_0^t \{\Phi_{1(j-1)}(\tau, \varepsilon) \sin [s_j(t, \varepsilon) - s_j(\tau, \varepsilon)] + \\ + \Phi_{2(j-1)}(\tau, \varepsilon) \cos [s_j(t, \varepsilon) - s_j(\tau, \varepsilon)]\}\, d\tau. \quad \square \qquad (1.5.38)$$

Схема последовательных приближений (1.5.35)—(1.5.38) позволяет построить функции $l_{(j)}(t, \varepsilon)$, $\eta_{(j)}(t, \varepsilon)$ со сколь угодно высоким значением индекса $j = 1, 2, \ldots$ В качестве нулевого приближения берутся функции l и η, определенные в (1.5.8), (1.5.10), (1.5.11).

Так как в системе (1.5.31) уже отброшены члены порядка ε^{k+1} и выше, то в процессе итераций во всех вычислениях члены таких порядков также следует опустить. По этой же причине процесс итераций следует оборвать на $(k-1)$-м шаге, взяв в качестве k-го приближения для оптимальной траектории функцию $z_{(k)}(t, \varepsilon) = l_{(k)}(t, \varepsilon)\eta_{(k)}(t, \varepsilon)$.

Обоснование схемы последовательных приближений и оценка погрешности метода по степеням малого параметра ε получаются известным способом на основе теории об операторе сжатия (см., например, [100, 224]). Подстановка функций $z_{(k)}(t, \varepsilon)$ в (1.5.27)—(1.5.30) дает приближенное выражение оптимального управления в форме программы (как функции от t, ε) с погрешностью $O(\varepsilon^{k+1})$. Таким образом, приближенное решение задачи оптимального быстродействия для системы (1.5.3) с заданной степенью точности по ε полностью построено. Простым расчетом при помощи соотношений (1.5.4) получается искомое решение задачи оптимального по быстродействию торможения вращений твердого тела в исходных переменных ω_1, ω_2, ω_3.

5. **Пример.** Рассмотрим конкретную механическую модель момента возмущающих сил N_i, $i = 1, 2, 3$, в системе (1.5.1). Пусть твердое тело близко к динамически симметричному, а коэффициенты b_1, b_2 в (1.5.1) также близки друг к другу. Другими словами, имеем

$$I_1 = I(1 + \varepsilon\delta_1), \quad b_1 = b(1 + \varepsilon\beta_1), \quad \varepsilon \ll 1, \\ I_2 = I(1 + \varepsilon\delta_2), \quad b_2 = b(1 + \varepsilon\beta_2). \qquad (1.5.39)$$

Здесь I_1, I_2 — главные центральные моменты инерции тела вокруг осей, соответствующих индексам 1, 2; через

I обозначено некоторое среднее или невозмущенное значение момента инерции, например $I = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$; величина b имеет аналогичный смысл, а δ_1, δ_2, β_1, β_2 — безразмерные величины порядка единицы. Кроме того, предположим, что на твердое тело действует малый тормозящий момент сил вязкого трения с компонентами

$$\nu_i = -\varepsilon \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{ij}\omega_j, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.5.40}$$

по главным осям инерции. Здесь Λ_{ij} — неотрицательно определенная матрица постоянных коэффициентов.

Уравнения управляемого движения твердого тела (динамические уравнения Эйлера) в рассматриваемом случае имеют вид (см. (1.5.1))

$$\begin{gathered} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = b_1u_1 + \nu_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = b_2u_2 + \nu_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = b_3u_3 + \nu_3. \end{gathered} \tag{1.5.41}$$

Приведем уравнения (1.5.41) к виду (1.5.1). Получим

$$\begin{aligned} &I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\,\omega_2\omega_3 = \\ &\qquad = b_1' u_1 + \frac{I}{I_1}\nu_1 + \left(I_3 - I - \frac{I_3 - I_2}{I_1} I\right)\omega_2\omega_3, \\ &I\dot{\omega}_2 + (I - I_3)\,\omega_1\omega_3 = \\ &\qquad = b_2' u_2 + \frac{I}{I_2}\nu_2 + \left(I - I_3 - \frac{I_1 - I_3}{I_2} I\right)\omega_1\omega_3, \\ &\qquad I_3\dot{\omega}_3 = b_3u_3 + \nu_3 + (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2, \\ &\qquad b_1' = b_1 I I_1^{-1}, \quad b_2' = b_2 I I_2^{-1}. \quad \square \end{aligned} \tag{1.5.42}$$

Воспользуемся формулами (1.5.39) и (1.5.40), относя к возмущениям N_i гироскопические и диссипативные моменты из правой части системы (1.5.42)

$$\begin{aligned} N_1 &= \nu_1 + \varepsilon[(I_3 - I)\delta_1 + I\delta_2]\,\omega_2\omega_3 + O(\varepsilon^2), \\ N_2 &= \nu_2 + \varepsilon[(I - I_3)\delta_2 - I\delta_1]\,\omega_1\omega_3 + O(\varepsilon^2), \\ N_3 &= \nu_3 + \varepsilon I(\delta_1 - \delta_2)\,\omega_1\omega_2 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{1.5.43}$$

Выполняя преобразования (1.5.4), приведем систему (1.5.42), (1.5.43) к виду (1.5.3). При этом будем иметь в обозначениях (1.5.3), (1.5.4)

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_1 z_2 z_3 - \sum_{j=1}^{3} \lambda_{1j} z_j,\\
f_2 &= a_2 z_1 z_3 - \sum_{j=1}^{3} \lambda_{2j} z_j,\\
f_3 &= a_3 z_1 z_2 - \sum_{j=1}^{3} \lambda_{3j} z_j.
\end{aligned}
\tag{1.5.44}
$$

Здесь постоянные a_i, λ_{ij} с точностью до малых величин порядка ε равны

$$
\begin{aligned}
a_1 &= [(I_3 - I)\,\delta_1 + I\delta_2]\,(II_3)^{-1}\, b_3,\\
a_2 &= [(I - I_3)\,\delta_2 - I\delta_1]\,(II_3)^{-1}\, b_3,\\
a_3 &= \frac{\delta_1 - \delta_2}{I}\frac{b^2}{b_3}, \quad \lambda_{ij} = \frac{\Lambda_{ij} b_j}{b_i I_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.
\end{aligned}
\tag{1.5.45}
$$

Поставим задачу вычислить функцию Беллмана $T(z, \varepsilon)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, т. е. определить коэффициент $T_1(z)$ разложения (1.5.26). Согласно (1.5.44), функцию $F_1 = (p_0, f)$, определенную в (1.5.18), (1.5.19), можно разбить на два слагаемых, обусловленных гироскопическими и диссипативными возмущениями

$$
\begin{aligned}
F_1(z) &= F_{1\gamma}(z) + F_{1\nu}(z),\\
F_{1\gamma}(z) &= (a_1 + a_2 + a_3)\frac{z_1 z_2 z_3}{l},\\
F_{1\nu}(z) &= -\frac{1}{l}\sum_{i,j}^{3} \lambda_{ij} z_i z_j.
\end{aligned}
\tag{1.5.46}
$$

Аналогично разбиению (1.5.46) функция $T_1(z)$ из (1.5.23) представляется в виде $T_1(z) = T_{1\gamma}(z) + T_{1\nu}(z)$. Для функции $T_{1\gamma}(z)$ на основе (1.5.21)—(1.5.23) и (1.5.46) получается выражение в виде квадратуры [22]

$$■\quad T_{1\gamma}(z) = -{}^1/_2(a_1+a_2+a_3)\,z_3 l^{-3}\Big\{\big[(z_2^2-z_1^2)\cos\theta_1 + 2z_1z_2\sin\theta_1\big]\int_0^l y^2\sin(\theta_2 y^2)\,dy + \big[2z_1z_2\cos\theta_1-(z_2^2-z_1^2)\sin\theta_1\big]\int_0^l y^2\cos(\theta_2 y^2)\,dy\Big\},$$

$$\theta_1 = Dz_3 l,\quad \theta_2 = Dz_3 l^{-1},\quad l=|z|. \quad \square \qquad (1.5.47)$$

Второе слагаемое в T_1 — функция $T_{1\nu}(z)$ — вычисляется подобно (1.5.47) и выражается в элементарных функциях. Имеем

$$T_{1\nu}(z) = -\sum_{i,j=1}^{3}\lambda_{ij}\alpha_{ij}(l,\eta^*),\quad l=|z|. \qquad (1.5.48)$$

Здесь коэффициенты α_{ij} равны [17]

$$■\quad \alpha_{11} = \frac{\eta_1^{*2}+\eta_2^{*2}}{4}l^2 + \frac{\eta_1^{*2}-\eta_2^{*2}}{4D\eta_3^*}\sin 2\sigma - \frac{\eta_1^*\eta_2^*}{2D\eta_3^*}(1-\cos 2\sigma),$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{\eta_2^{*2}-\eta_1^{*2}}{4D\eta_3^*}(1-\cos 2\sigma) - \frac{\eta_1^*\eta_2^*}{2D\eta_3^*}\sin 2\sigma,$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \eta_1^* D^{-1}\sin\sigma - \eta_2^* D^{-1}(1-\cos\sigma),$$

$$\alpha_{22} = \frac{\eta_1^{*2}+\eta_2^{*2}}{4}l^2 + \frac{\eta_2^{*2}-\eta_1^{*2}}{4D\eta_3^*}\sin 2\sigma + \frac{\eta_1^*\eta_2^*}{2D\eta_3^*}(1-\cos 2\sigma),$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = -\eta_1^* D^{-1}(1-\cos\sigma) - \eta_2^* D^{-1}\sin\sigma,$$

$$\alpha_{33} = {}^1/_2\eta_3^* l^2,\quad \sigma = D\eta_3^* l^2,\quad l=|z|. \qquad \square\ (1.5.49)$$

Компоненты единичного вектора $\eta^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*)$ выражаются через компоненты фазового вектора $z = l\eta$ формулами

$$\eta_1^* = \eta_1\cos s - \eta_2\sin s,\quad \eta_2^* = -\eta_2\cos s - \eta_1\sin s,$$
$$\eta_3^* = \eta_3,\quad s = {}^1/_2 Dz_3 l. \qquad (1.5.50)$$

На основе п. 3 функция $T = l + \varepsilon(T_{1\gamma} + T_{1\nu})$, где коэффициенты $T_{1\gamma}$, $T_{1\nu}$ определяются согласно (1.5.47)—(1.5.50), является с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ функцией Беллмана задачи оптимального по быстродействию торможения вращений системы (1.5.41) в предположениях (1.5.39), (1.5.40). Оптимальный закон торможения в первом приближении как функция фазовых координат может быть получен на основе (1.5.30) при помощи вектора производных $p_1 = \partial T_1/\partial z$. Дальнейшее исследование движения управляемой системы (1.5.41) в первом приближении по ε, т. е. вычисление фазовой траектории $z_{(1)}(t, \varepsilon)$ может быть осуществлено при помощи методики п. 4.

Отметим одно качественное свойство полученного решения. Так как Λ_{ij} — неотрицательно определенная матрица, то таким же свойством обладает и матрица λ_{ij} (см. (1.5.45)). Следовательно, квадратичная форма (1.5.46) для $F_{1\nu}$ неположительна, и поэтому соответствующая поправка $\varepsilon T_{1\nu}$ к времени быстродействия также неположительна. Таким образом, наличие моментов диссипативных сил может лишь уменьшить время торможения твердого тела.

§ 6. Замечания о методе возмущений для вариационных задач

1. Метод возмущений для классической вариационной задачи. Выше изложены некоторые варианты метода возмущений для задач оптимального управления. Рассмотрим применение обычного метода возмущений в такой задаче оптимального управления, в которой ограничения на управление несущественны и которая по существу эквивалентна некоторой задаче классического вариационного исчисления. Пусть уравнения движения управляемой системы имеют вид

$$\dot{x} = f(x, t, u, \varepsilon), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.6.1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат, u — m-мерный вектор управляющих функций, ε — параметр, f — заданная n-мерная функция своих аргументов, t_0 и T — заданные моменты начала и окончания процесса. В эти моменты должны выполняться краевые условия

$$\begin{aligned} g_i(x(t_0), \varepsilon) &= 0, \quad i = 1, \ldots, r;\ 0 \leqslant r \leqslant n, \\ h_j(x(T), \varepsilon) &= 0, \quad j = 1, \ldots, s;\ 0 \leqslant s \leqslant n, \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

где g_i, h_j — заданные функции. Числа r, s удовлетворяют ограничениям (1.6.2), а в остальном произвольны. Требуется выбрать управляющую функцию $u(t)$ на интервале $[t_0, T]$ так, чтобы удовлетворить условиям (1.6.2) и доставить минимум интегральному функционалу

$$J = \int_{t_0}^{T} G(x(t), t, u(t), \varepsilon)\, dt \to \min. \qquad (1.6.3)$$

Заданные скалярная функция G и функции f, g_i, h_j в (1.6.1)—(1.6.3) считаем достаточно гладкими и такими, что задача оптимального управления (1.6.1)—(1.6.3) без ограничений на управление допускает единственное решение в некотором интервале $[0, \varepsilon_0]$ изменения параметра ε.

Приведем необходимые условия оптимальности. Обозначим через $p(t)$ n-мерный вектор сопряженных переменных, удовлетворяющий системе уравнений

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad (1.6.4)$$

и условиям трансверсальности

$$\begin{aligned} p(t_0) &= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial g_i(x(t_0), \varepsilon)}{\partial x}, \\ p(T) &= \sum_{j=1}^{s} \mu_j \frac{\partial h_j(x(T), \varepsilon)}{\partial x}. \end{aligned} \qquad (1.6.5)$$

Здесь λ_i, μ_i — неопределенные множители Лагранжа. Функция Гамильтона H задачи (1.6.1)—(1.6.3) имеет вид

$$H(p, x, t, u, \varepsilon) = (p, f(x, t, u, \varepsilon)) - G(x, t, u, \varepsilon). \qquad (1.6.6)$$

Условие ее максимальности по u при отсутствии ограничений на управление приводит к соотношениям

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \left(p, \frac{\partial f}{\partial u_i}\right) - \frac{\partial G}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad (1.6.7)$$

служащим для исключения u из системы (1.6.1), (1.6.4).

Представим зависящие от ε функции f, G, g_i, h_j в виде разложений

$$\begin{aligned} f(x, t, u, \varepsilon) &= f^0(x, t, u) + \varepsilon f^1(x, t, u) + \ldots \\ G(x, t, u, \varepsilon) &= G^0(x, t, u) + \varepsilon G^1(x, t, u) + \ldots \end{aligned}$$

$$g_i(x, \varepsilon) = g_i^0(x) + \varepsilon g_i^1(x) + \ldots, \quad i = 1, \ldots, r,$$
$$h_j(x, \varepsilon) = h_j^0(x) + \varepsilon h_j^1(x) + \ldots, \quad j = 1, \ldots, s. \quad \square \tag{1.6.8}$$

Будем искать решение краевой задачи (1.6.1), (1.6.2), (1.6.4)—(1.6.7) согласно методу возмущений в виде

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= x^0(t) + \varepsilon x^1(t) + \ldots \\ u(t, \varepsilon) &= u^0(t) + \varepsilon u^1(t) + \ldots \\ p(t, \varepsilon) &= p^0(t) + \varepsilon p^1(t) + \ldots \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Верхние индексы в (1.6.8), (1.6.9) указывают номер коэффициентов разложений. Подставим разложения (1.6.8), (1.6.9) в соотношения (1.6.1), (1.6.2), (1.6.4)—(1.6.7) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В нулевом приближении получим

■ $$\dot{x}^0 = f^0(x^0, t, u^0),$$
$$\dot{p}^0 = \frac{\partial G^0(x^0, t, u^0)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(p^0, f^0(x^0, t, u^0)),$$
$$g_i^0(x^0(t_0)) = h_j^0(x^0(T)) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r; \ j = 1, \ldots, s),$$
$$p^0(t_0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i^0(x^0(t_0))}{\partial x}, \qquad p^0(T) = \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 \frac{\partial h_j^0(x^0(T))}{\partial x},$$
$$\left(p^0, \frac{\partial f^0(x^0, t, u^0)}{\partial u_i}\right) - \frac{\partial G^0(x^0, t, u^0)}{\partial u_i} \equiv 0, \quad \square \tag{1.6.10}$$

где λ_i^0, μ_j^0 — некоторые постоянные коэффициенты.

Из соотношений первого приближения запишем лишь равенства, получаемые из уравнений (1.6.1) и краевых условий (1.6.2). Имеем уравнения в вариациях и условия на концах для вектора x^1

$$\dot{x}^1 = \frac{\partial f^0(x^0, t, u^0)}{\partial x} x^1 + \frac{\partial f^0(x^0, t, u^0)}{\partial u} u^1 + f^1(x^0, t, u^0),$$
$$\left(\frac{\partial g_i^0(x^0(t_0))}{\partial x}, x^1(t_0)\right) + g_i^1(x^0(t_0)) = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$
$$\left(\frac{\partial h_j^0(x^0(T))}{\partial x}, x^1(T)\right) + h_j^1(x^0(T)) = 0, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{1.6.11}$$

Здесь $\partial f^0/\partial x$, $\partial f^0/\partial u$ — матрицы соответствующих частных производных. Используя условия трансверсальности из (1.6.10) и краевые условия (1.6.11), устанавливаем справедливость равенств

$$(p^0(t_0), x^1(t_0)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{h=1}^{n} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i^0(x^0(t_0))}{\partial x_h} x_h^1(t_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial g_i^0(x^0(t_0))}{\partial x_h} x_h^1(t_0)\right] = -\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 g_i^1(x^0(t_0)) \tag{1.6.12}$$

Аналогично имеем

$$(p^0(T), x^1(T)) = -\sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 h_j^1(x^0, T). \tag{1.6.13}$$

В силу (1.6.12), (1.6.13) имеем равенство

$$I \equiv \int_{t_0}^{T} \frac{d(p^0, x^1)}{dt} dt = (p^0, x^1)\Big|_{t_0}^{T} =$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 g_i^1(x^0(t_0)) - \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 h_j^1(x^0(T)). \tag{1.6.14}$$

С другой стороны, используя уравнения (1.6.10) для p^0 и (1.6.11) для x^1, интеграл (1.6.14) представим в виде

$$I = \int_{t_0}^{T} \left[\left(\dot p^0, x^1\right) + \left(p^0, \dot x^1\right)\right] dt = \int_{t_0}^{T} \left[\left(\frac{\partial G^0}{\partial x}, x^1\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial (p^0, f^0)}{\partial x}, x^1\right) + \left(p^0, \frac{\partial f^0}{\partial x} x^1\right) + \left(p^0, \frac{\partial f^0}{\partial u} u^1\right) + (p^0, f^1)\right] dt. \tag{1.6.15}$$

Используя последнее соотношение (1.6.10), получим из (1.6.15)

$$I = \int_{t_0}^{T} \left[\left(\frac{\partial G^0}{\partial x}, x^1\right) + \left(\frac{\partial G^0}{\partial u}, u^1\right) + (p^0, f^1)\right] dt. \tag{1.6.16}$$

Сопоставляя (1.6.14) и (1.6.16), имеем равенство

$$\int_{t_0}^{T} \left[\left(\frac{\partial G^0}{\partial x}, x^1 \right) + \left(\frac{\partial G^0}{\partial u}, u^1 \right) \right] dt = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 g_i^1 (x^0(t_0)) - \\ - \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 h_j^1 (x^0(T)) - \int_{t_0}^{T} (p^0, f^1)\, dt. \qquad (1.6.17)$$

Вычислим функционал (1.6.3) с точностью до членов порядка ε включительно

$$J = \int_{t_0}^{T} \left[G^0 + \varepsilon \left(\frac{\partial G^0}{\partial x}, x^1 \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial G^0}{\partial u}, u^1 \right) + \varepsilon G^1 \right] dt. \qquad (1.6.18)$$

Из равенств (1.6.17), (1.6.18) получим

$$J = \int_{t_0}^{T} G^0 dt + \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{T} [G^1 - (p^0, f^1)] \Bigg|_{\substack{x=x^0(t) \\ u=u^0(t)}} dt + \\ + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^0 g_i^1 (x^0(t_0)) - \sum_{j=1}^{s} \mu_j^0 h_j^1 (x^0(T)) \right\}. \qquad (1.6.19)$$

Заметим, что в равенствах (1.6.15)—(1.6.19) в качестве аргументов функций f^0, f^1, G^0, G^1 и их производных везде фигурируют функции нулевого приближения $x = x^0(t)$ и $u = u^0(t)$.

Формула (1.6.19) показывает, что слагаемое порядка ε в минимизируемом функционале не зависит от управления и траектории первого приближения $u^1(t)$, $x^1(t)$. Указанный факт означает, что если погрешность порядка ε^2 по функционалу и краевым условиям приемлема, то нет необходимости искать поправки u^1, x^1 из условий оптимальности (минимума квадратичных по ε слагаемых в функционале). Эти функции достаточно выбрать так, чтобы в первом приближении удовлетворить лишь краевым условиям, т. е. равенствам (1.6.11). Величина функционала может быть подсчитана с погрешностью порядка ε^2 по формуле (1.6.19), исходя только из нулевого приближения.

2. Заключительные замечания. Отмеченное свойство характерно для таких задач, в которых имеет место внутренний экстремум, т. е. ограничения на управление отсутствуют. При наличии ограничений изменение управления на величины порядка ε вызывает, вообще говоря, изменение функционала на величину того же порядка малости.

Сказанное можно наглядно проиллюстрировать на элементарном примере минимизации функции многих переменных. Пусть $F(z, \varepsilon)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области $z \in D_\varepsilon$ при достаточно малых $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$. Область D_ε предполагается выпуклой, а ее зависимость от ε непрерывна и такова, что при изменении ε на $\Delta\varepsilon$ граница области D_ε смещается на величину порядка $\Delta\varepsilon$. Требуется найти минимум $F(z, \varepsilon)$ по z при $z \in D_\varepsilon$. Для функции F имеет место разложение

$$F(z, \varepsilon) = F^0(z) + \varepsilon F^1(z) + \ldots \tag{1.6.20}$$

Предположим, что функция $F^0(z)$ в D_0 обладает тем свойством, что ее второй дифференциал положителен в точке внутреннего минимума $F^0(z)$, если такая точка существует.

Будем искать решение поставленной задачи при малых ε методом возмущений, полагая

$$z = z^0 + \varepsilon z^1 + \ldots \tag{1.6.21}$$

Подставляя (1.6.21) в (1.6.20) и разлагая полученную функцию в ряд по ε, найдем

$$F(z, \varepsilon) = F^0(z^0) + \varepsilon \left[F^{0\prime}_z(z^0) z^1 + F^1(z^0)\right] + O(\varepsilon^2). \tag{1.6.22}$$

Пусть точка $z = z^0$, в которой достигается минимум $F^0(z)$ при $z \in D_0$, есть внутренняя точка области D_0 (случай внутреннего экстремума). Тогда $F^{0\prime}_z(z^0) = 0$ и члены порядка ε в (1.6.22) не зависит от z^1. Для определения z^1 при этом необходимо учитывать слагаемые $O(\varepsilon^2)$ в (1.6.22). Если же z^0 лежит на границе области D_0 (краевой экстремум), то, вообще говоря, $F^{0\prime}_z(z^0) \neq 0$. При этом поправка z^1 влияет на член порядка ε в (1.6.22) и выбирается из условия минимума этого члена в заданной ограниченной области. Первый случай ($F^{0\prime}_z(z^0) = 0$, внутренний экстремум) аналогичен классической вариационной задаче, рассмотренной в п. 1 данного параграфа. Второй случай (краевой экстремум) характерен для общей задачи оптимального управления с ограничениями. В самом деле, пусть минимизируемый функционал задан в виде $J = F(x(T), \varepsilon)$. Тогда, отождествляя z с $x(T)$, а область D_ε — с областью достижимости системы за время T при фиксированной начальной точке, сведем задачу оптимального управления к рассмотренной выше задаче о минимуме функции $F(z, \varepsilon)$. При этом случай краевого экстремума будет иметь место, если минимум $F(x(T), \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ достигается на границе области достижимости. Для слабо управляемой системы, рассмотренной в § 2—4, область достижимости системы D_ε при $\varepsilon \to 0$ стягивается в точку z^*. Поэтому здесь случай краевого экстремума имеет место всегда, если только эта точка z^* не совпадает с точкой минимума по z функции $F(z, \varepsilon)$.

Указанные выше соображения полезно иметь в виду при применении метода возмущений к задачам оптимального управления.

ГЛАВА 2

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

В главе 2 развивается метод разделения быстрых и медленных движений (метод усреднения) для решения задач оптимального управления квазилинейными колебаниями на асимптотически большом интервале времени. Предполагается, что колебательная система является одночастотной и приводится к стандартной форме управляемых систем с вращающейся фазой.

В § 1 рассматриваются колебательные системы и способы их приведения к стандартному виду. § 2 содержит методику решения задач с закрепленным временем. Задачи управления типа оптимального быстродействия исследуются в § 3. Ряд задач оптимального управления колебаниями квазилинейных систем с одной и несколькими степенями свободы, содержащих медленно изменяющиеся параметры, решен в § 4. В основу главы 2 положены работы [10—12].

§ 1. Управляемые квазилинейные колебательные системы

1. Одночастотная управляемая система общего вида. Рассмотрим управляемую систему, содержащую медленную x и быструю y переменные

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(\tau, x, y, u), \quad \tau = \varepsilon t + \tau_0, \quad x(t_0) = x^0, \\ \dot{y} &= Y_0(\tau, x, y) + \varepsilon Y(\tau, x, y, u), \quad y(t_0) = y^0. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Здесь x, X — n-мерные векторы; y, Y_0, Y — векторы размерности r; u — m-мерный вектор управления, подчиненный ограничению $u \in U$, где U — замкнутое множество; τ — «медленное время», которое можно включить в состав вектора x; ε — малый параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Смысл выделения медленного времени τ, согласно (2.1.1), будет ясен из дальнейшего. Постоянные t_0, x^0, y^0 в

(2.1.1) — начальные данные. Предполагается, что правые части системы (2.1.1) определены и имеют необходимые для дальнейшего производные в некоторой достаточно широкой области изменения своих аргументов. Отметим, что функции X, Y, а также параметры x^0, y^0 могут зависеть от ε непрерывным образом. Однако эта зависимость для упрощения записи далее не указывается. Формально система (2.1.1) слабо управляема (см. §§ 1—3 главы 1), так как при $\varepsilon = 0$ она становится неуправляемой

$$\dot{y}_0 = Y_0(\tau,\ x,\ y_0), \qquad x,\ \tau = \text{const}. \tag{2.1.2}$$

Однако движение системы (2.1.1), в отличие от главы 1, исследуется на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$, на котором медленные переменные x и τ успевают измениться существенно, на величины порядка единицы. Быстрые переменные изменятся, вообще говоря, на величины порядка ε^{-1}.

Предположим, что невозмущенная система (2.1.2) для y_0 имеет общее решение, содержащее вращающиеся и колеблющиеся переменные, которое также может зависеть от параметров x и τ [63, 64, 4—6, 18]

$$\begin{gathered} y_0 = (\Pi/2\pi)\psi + \varphi(\psi,\ c,\ x,\ \tau), \\ \psi = \nu(\tau)(t - t_0) + \psi_0, \qquad c,\ x,\ \tau = \text{const}. \end{gathered} \tag{2.1.3}$$

Здесь Π — постоянный r-вектор с составляющими, равными нулю для колеблющихся переменных и отличными от нуля для вращающихся переменных; ψ — невозмущенная скалярная фаза; $\nu(\tau)$ — собственная частота системы (2.1.2), зависящая только от параметра τ, $\nu(\tau) \geqslant \nu_0 > 0$, ν_0 — постоянная; ψ_0 — фазовая постоянная; c — $(r-1)$-мерный вектор независимых параметров семейства; φ — 2π-периодическая вектор-функция фазы ψ. Таким образом, параметрами семейства (2.1.3) являются c и ψ_0. Естественно предположить, что правая часть системы (2.1.1) есть периодическая функция вращающихся переменных y_i с периодами Π_i.

Приведем систему (2.1.1) к стандартному виду управляемых систем с вращающейся фазой, используя формулы (2.1.3) в качестве замены исходных переменных x, y, τ на переменные x, c, ψ, τ. Это преобразование не зависит от управления u. Дифференцируя (2.1.3) по t в силу исходной системы (2.1.1), получим систему уравнений для медленных переменных x, c и фазы ψ

$$\begin{aligned} &\dot{x} = \varepsilon X(\tau,\ x,\ y_0(\psi,\ c,\ x,\ \tau),\ u), && x(t_0) = x^0, \\ &\dot{c} = \varepsilon C(\tau,\ x,\ c,\ \psi,\ u), && c(t_0) = c^0, \\ &\dot{\psi} = \nu(\tau) + \varepsilon \Psi(\tau,\ x,\ c,\ \psi,\ u), && \psi(t_0) = \psi^0. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Здесь функции C и Ψ находятся как решение линейной алгебраической системы с 2π-периодическими по ψ коэффициентами

$$\frac{\partial y_0}{\partial \psi}\Psi + \frac{\partial y_0}{\partial c}C = \\ = Y(\tau,\ x,\ y_0,\ u) - \frac{\partial y_0}{\partial x}X(\tau,\ x,\ y_0,\ u) - \frac{\partial y_0}{\partial \tau}. \tag{2.1.5}$$

Так как y_0 — общее решение (2.1.2), то определитель системы (2.1.5) отличен от нуля всюду в рассматриваемой области изменения переменных τ, x, c, ψ. Начальные значения c^0, ψ^0 в (2.1.4) выражаются через x^0, y^0 в силу преобразования, обратного (2.1.3).

Объединяя векторы x и c в один вектор медленных переменных a, полученную систему (2.1.4) с вращающейся фазой ψ запишем в стандартном виде

$$\begin{aligned} &\dot{a} = \varepsilon f(\tau,\ a,\ \psi,\ u), && a(t_0) = a^0, \\ &\dot{\psi} = \nu(\tau) + \varepsilon F(\tau,\ a,\ \psi,\ u), && \psi(t_0) = \psi^0. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Здесь f, F — достаточно гладкие функции своих аргументов, 2π-периодические относительно ψ. Размерность векторов a и f будем считать произвольной и обозначать через n. Отметим, что так как частота ν — скаляр и не зависит от вектора a, то такие колебательные системы принято называть одночастотными квазилинейными [46, 144, 139].

Медленные переменные a в небесной механике принято называть оскулирующими. Зависимость $\nu(\tau)$ может быть задана сложным образом, например, в виде

$$\nu(\tau) = \Omega(z(\tau)), \quad \dot{z} = \varepsilon Z(z), \quad z(t_0) = z^0,$$

где z — вектор произвольной размерности, Ω — заданная функция.

Далее в §§ 2, 3 задачи оптимального управления рассматриваются для систем вида (2.1.6) на интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1}$, на котором вектор a получает приращение порядка единицы, а фаза ψ изменяется на величину $\sim \varepsilon^{-1}$. К допустимым управлениям будем относить кусочно непрерывные функции со значениями $u(t) \in U$, подстановка которых в (2.1.6) приводит к системе, решение которой существует и единственно на рассматриваемом промежутке времени.

2. Управляемые квазилинейные колебательные системы с медленно изменяющимися параметрами. Рассмотрим колебательную систему с многими степенями свободы, приведенную к нормальной форме

$$\ddot{y}_i + \nu_i^2(\tau) y_i = Y_i(\tau, x) + \varepsilon f_i(\tau, y, \dot{y}, x, u), \qquad i = 1, \ldots, r,$$
$$y(t_0) = y^0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}^0, \tag{2.1.7}$$
$$\dot{x} = \varepsilon X(\tau, y, \dot{y}, x, u), \qquad x(t_0) = x^0.$$

Здесь y — r-вектор колеблющихся переменных, $\nu_i \geqslant \nu_i^0 > 0$ — частоты колебаний; x — n-вектор медленных переменных, например, параметров системы. Вектор-функция Y есть внешнее воздействие; f, X — возмущающие функции. Система (2.1.7) является формально частным случаем системы (2.1.1).

Применим преобразование типа (2.1.3) к каждой переменной y_i. Для системы (2.1.7) это преобразование имеет вид

$$y_i = a_i \sin \psi_i + Y_i(\tau, x) \nu_i^{-2}(\tau), \quad \dot{y}_i = a_i \nu_i(\tau) \cos \psi_i, \tag{2.1.8}$$

где a_i — новые медленные переменные, ψ_i — фазы, $i = 1, \ldots, r$. После замены (2.1.8) система (2.1.7) примет вид

$$\blacksquare \quad \dot{a}_i = \varepsilon \frac{f_i}{\nu_i} \cos \psi_i - \varepsilon \frac{\nu_i'}{\nu_i} a_i \cos^2 \psi_i - \varepsilon \left(\frac{Y_i}{\nu_i^2} \right)' \sin \psi_i,$$

$$\dot{\psi}_i = \nu_i - \varepsilon \frac{f_i}{\nu_i a_i} \sin \psi_i + \varepsilon \frac{\nu_i'}{\nu_i} \cos \psi_i \sin \psi_i - \frac{\varepsilon}{a_i} \left(\frac{Y_i}{\nu_i^2} \right)' \cos \psi_i,$$

$$\dot{x} = \varepsilon X, \quad a_i(t_0) = a_i^0, \ \psi_i(t_0) = \psi_i^0, \ x(t_0) = x^0. \qquad \square \tag{2.1.9}$$

Здесь в функции f, X подставлены выражения (2.1.8), а начальные значения a^0 и ψ^0 вычисляются согласно замене (2.1.8). Штрих в (2.1.9) означает полную производную по τ, например,

$$Y_i' = \frac{\partial Y_i}{\partial \tau} + \frac{\partial Y_i}{\partial x} X. \tag{2.1.10}$$

Система (2.1.9) содержит r быстрых переменных фаз ψ_i и является, вообще говоря, многочастотной системой. Применение метода усреднения к таким системам приводит к значительным трудностям, связанным с переменностью частот ν_i и возникновением резонансов. Отметим, что даже в случае $\nu_i = \mathrm{const}$ при $r > 1$ могут возникать резонансные явления, если правые части системы (2.1.9) разлагаются в бесконечные ряды Фурье по фазам (см. [31—33, 46, 47, 145]).

В дальнейшем система (2.1.9) исследуется при условии, что все функции $\nu_i(\tau)$ совпадают, т. е. система является одночастотной. Заметим, что если частоты $\nu_i(\tau)$ отличаются друг от друга на величины порядка ε, то эти отличия можно включить в возмущения f_i из (2.1.7) и по-прежнему считать, что все $\nu_i(\tau)$ совпадают. К классу одночастотных систем приводятся уравнения возмущенного движения точки в центральном гравитационном и в центральном линейном силовом поле, уравнения колебаний маятников с одной степенью свободы и другие. В предположении, что все ν_i совпадают, $\nu_i \equiv \nu (i = 1, \ldots$ $\ldots, r)$, система (2.1.9) приводится к виду (2.1.6). Для этого нужно выделить одну из фаз, например ψ_1, а остальные фазы ψ_i, $i \geqslant 2$, представить в виде $\psi_i = \psi_1 + \theta_i$, где θ_i — расстройки фаз, которые являются новыми медленными переменными типа a_i.

Систему (2.1.7) при выполнении условия одночастотности ($\nu_i = \nu$, $i = 1, \ldots, r$) можно привести к стандартному виду (2.1.6) и другим способом. Вместо (2.1.8) сделаем замену переменных

$$\begin{gathered} y_i = a_i \sin \varphi + b_i \cos \varphi + Y_i \nu^{-2}, \\ \dot{y}_i = \nu (a_i \cos \varphi - b_i \sin \varphi), \qquad i = 1, \ldots, r, \\ \varphi = \int_{t_0}^{t} \nu (\varepsilon t' + \tau_0)\, dt'. \end{gathered} \tag{2.1.11}$$

Здесь a_i, b_i — новые медленные переменные, $\varphi=\varphi(t)$ — известная монотонная функция t. Уравнения для a_i, b_i получаются дифференцированием замены (2.1.11) в силу системы (2.1.7) и в векторной форме имеют вид

$$\blacksquare\quad \dot a = \varepsilon f \nu^{-1}\cos\varphi + \varepsilon\nu'\nu^{-1}(a\cos\varphi - b\sin\varphi)\cos\varphi - \\ - \varepsilon(Y\nu^{-2})'\sin\varphi, \qquad a(t_0)=a^0,$$

$$\dot b = -\varepsilon f\nu^{-1}\sin\varphi - \varepsilon\nu'\nu^{-1}(a\cos\varphi - b\sin\varphi)\sin\varphi - \\ - \varepsilon(Y\nu^{-2})'\cos\varphi, \qquad b(t_0)=b^0. \quad \square \qquad (2.1.12)$$

Здесь a, b, f и Y — r-мерные векторы с компонентами a_i, b_i, f_i, Y_i; φ — известная скалярная функция из (2.1.11), штрих означает производную в смысле (2.1.10). Начальные значения a^0 и b^0 в (2.1.12) получаются согласно (2.1.11)

$$a^0 = \nu^{-1}(\varepsilon t_0+\tau_0)\dot y^0,$$
$$b^0 = y^0 - \nu^{-2}(\varepsilon t_0+\tau_0)Y(\varepsilon t_0+\tau_0,\ x^0). \qquad (2.1.13)$$

Уравнения (2.1.12), (2.1.13) и уравнение (2.1.7) для x, в правые части которых подставлены выражения для y и $\dot y$ из (2.1.11), образуют одночастотную управляемую систему в стандартной форме вида (2.1.6). Фаза ψ из (2.1.6) в данном случае определяется квадратурой (2.1.11) для φ, что отвечает равенству $F=0$ в (2.1.6).

3. Примеры. Рассмотрим механические модели, описываемые уравнениями типа (2.1.1) (или (2.1.7)) и приводящиеся к стандартной форме (2.1.6).

1. Рассмотрим вертикальные колебания груза массы m, подвешенного на упругой нити в поле тяжести. Длина нити в нерастянутом состоянии плавно изменяется по заданному закону $l=l(\tau)$, где $\tau=\varepsilon t$ — медленное время. Пусть y — вертикальная координата груза, т. е. истинная длина нити (в растянутом состоянии), εN — внешняя малая управляющая сила, E — модуль Юнга материала нити, S — площадь ее поперечного сечения, g — ускорение силы тяжести. Уравнение колебаний груза имеет вид

$$m\ddot y + ESl^{-1}(y-l) = mg - \varepsilon N, \qquad l = l(\varepsilon t). \qquad (2.1.14)$$

Характерной единицей времени движения системы (2.1.14) является период свободных колебаний при

$l=\text{const}$, величина которого равна $2\pi(ml)^{1/2}(ES)^{-1/2}$. Плавность изменения длины нити l означает малость ее относительного изменения за период колебаний. Уравнение (2.1.14) относится к типу (2.1.7).

2. Рассмотрим теперь плоские колебания математического маятника переменной длины l, точка подвеса которого может перемещаться в вертикальной плоскости с некоторым ускорением.

Обозначим через w_x и w_y проекции этого ускорения на горизонтальную и вертикальную оси, через φ — угол отклонения маятника от вертикали и предположим, что схода со связи нет, т. е. натяжение нити все время положительно. Получим уравнение движения системы

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=-\frac{1}{l}(w_x\cos\varphi+w_y\sin\varphi)-2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi}. \quad (2.1.15)$$

Введем безразмерные величины t_*, $W_{x,y}$, σ

$$t_*=\nu_0 t,\quad W_{x,y}=w_{x,y}g^{-1},\quad \nu_0=g^{1/2}l_0^{-1/2},\quad \sigma=ll_0^{-1}. \quad (2.1.16)$$

Здесь ν_0 — частота малых колебаний при некотором $l=l_0$. Обозначая штрихом производную по безразмерному времени t_*, приведем уравнение (2.1.15) с учетом (2.1.16) к виду

$$\varphi''+\sigma^{-1}\sin\varphi=-\sigma^{-1}(W_x\cos\varphi+W_y\sin\varphi)-2\sigma'\sigma^{-1}\varphi'. \quad (2.1.17)$$

Здесь роль управления играют проекции ускорения точки подвеса W_x, W_y, а σ — безразмерная длина подвеса (см. (2.1.16)).

Рассмотрим различные способы введения малого параметра в уравнение (2.1.17). Пусть длина σ есть заданная функция $\sigma(\tau)$ медленного безразмерного времени $\tau=\varepsilon t_*$, где малый параметр ε характеризует относительное изменение длины за период колебаний маятника. Будем считать, что управляющие ускорения малы по сравнению с ускорением силы тяжести, т. е. в безразмерных переменных (2.1.16) имеем $W_{x,y}=\delta u_{x,y}$, где $\delta\ll 1$; u_x, u_y — порядка единицы. Время T процесса управления считаем большим, т. е. $T\sim\varkappa^{-1}$, где $\varkappa\ll 1$. Обозначим через Φ максимальную амплитуду колебаний угла φ. Возмущающие члены в правой части уравнения (2.1.17) имеют порядки δ и $\varepsilon\Phi$ соответственно. Если $\Phi \sim 1$, то при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ уравнение (2.1.17) переходит в существенно нелинейное уравнение маятника. Случай нелинейных невозмущенных уравнений рассматривается в главах 3, 4. Здесь же, ограничиваясь квазилинейными системами, будем считать Φ малым и потребуем, чтобы возмущения порядков δ и $\varepsilon\Phi$ за время $\sim \varkappa^{-1}$ приводили к изменению амплитуды на величину порядка Φ. Это накладывает условия $\delta\varkappa^{-1} \leqslant \Phi$, $\varepsilon\varkappa^{-1} \leqslant 1$. Кроме того потребуем, чтобы главный нелинейный член $\sim \Phi^3$, получающийся при разложении $\sin\varphi$ по φ, не превосходил возмущающих членов в правой части уравнения (2.1.17). Это приводит к условиям $\Phi^3 \leqslant \delta$, $\Phi^2 \leqslant \varepsilon$. Указанным ограничениям, наложенным на малые параметры ε, δ, $\varkappa$, Φ, следует удовлетворять при исследовании конкретных задач.

Ниже примем, что $\delta \sim \varepsilon^{3/2}$, $\Phi \sim \varepsilon^{1/2}$, $\varkappa \sim \varepsilon$. Нетрудно проверить, что все наложенные условия выполнены. Таким образом, положим

$$\varphi = \varepsilon^{1/2}\varphi_*, \qquad W_{x,y} = \varepsilon^{3/2}u_{x,y}, \qquad \sigma = \sigma(\tau), \qquad \tau = \varepsilon t. \qquad (2.1.18)$$

Здесь ε — малый параметр, φ_*, u_x, u_y — величины порядка единицы. После подстановки (2.1.18) и отбрасывания малых величин высших порядков уравнение (2.1.17) примет вид квазилинейной одночастотной системы (2.1.7)

$$\varphi_*'' + \sigma^{-1}\varphi_* = \frac{\varepsilon}{\sigma}\sigma^{-1}\varphi_*^3 - \varepsilon\sigma^{-1}\left(u_x + u_y\varepsilon^{1/2}\varphi_*\right) - \\ - 2\varepsilon\sigma_\tau'\sigma^{-1}\varphi_*'. \qquad (2.1.19)$$

Здесь отброшены слагаемые порядка ε^2 и выше.

Рассмотрим частный случай перемещения точки подвеса в вертикальной плоскости. Если ускорение точки подвеса (w_x, w_y) направлено вдоль прямой, наклоненной под постоянным углом δ к горизонту (рис. 2.1), то $w_x = Wg\cos\delta$, $w_y = Wg\sin\delta$, а уравнение (2.1.17) имеет вид

$$\varphi'' + \sigma^{-1}\sin\varphi = -\sigma^{-1}W\cos(\varphi - \delta) - 2\sigma'\sigma^{-1}\varphi'. \qquad (2.1.20)$$

Здесь W — управляющая функция. В предположениях (2.1.18), т. е. при $\varphi \sim \varepsilon^{1/2}$, $W \sim \varepsilon^{3/2}$, $\sigma = \sigma(\tau)$ уравнение (2.1.20) аналогично (2.1.17) приводится к управляемой стандартной системе вида (2.1.6) или (2.1.7).

3. Рассмотрим управляемые вращения динамически симметричного твердого тела. Уравнения движения тела относительно центра масс имеют вид

$$\begin{aligned} J\dot{\omega}_1 + (J_3 - J)\,\omega_2\omega_3 &= u_1, \quad \omega_1(0) = \omega_1^0, \\ J\dot{\omega}_2 - (J_3 - J)\,\omega_1\omega_3 &= u_2, \quad \omega_2(0) = \omega_2^0, \qquad (2.1.21) \\ J_3\dot{\omega}_3 &= u_3, \quad \omega_3(0) = \omega_3^0 \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь ω_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции вектора угловой скорости на связанные оси; J, J_3 ($J \neq J_3$) — главные центральные моменты инерции, предполагаемые далее постоянными (J — экваториальный, J_3 — осевой моменты инерции); ω_i^0 — начальные данные. Управляющие моменты u_i считаются независимыми и ограниченными: $|u_i| \leqslant u_i^0$, $u_i^0 > 0$. Условие малости управляющих воздействий означает, что их работа за время оборота тела мала по сравнению с начальным значением E^0 кинетической энергии E, т. е.

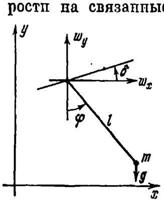


Рис. 2.1.

$$u^0 \ll E^0, \quad u^0 = \left(u_1^{02} + u_2^{02} + u_3^{02}\right)^{1/2},$$
$$E = \frac{1}{2} J\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{1}{2} J_3\omega_3^2. \qquad (2.1.22)$$

Это предположение позволяет ввести малый параметр в уравнениях движения (2.1.21) при помощи перехода к безразмерным переменным и параметрам по формулам

$$\omega_i = \omega^0\omega_i', \quad I = J_3J^{-1}, \quad t' = \omega_0 t. \qquad (2.1.23)$$

Здесь в качестве постоянной ω^0 взято начальное значение модуля угловой скорости вращения. Величина I удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant I \leqslant 2$. Делением уравнений (2.1.21) на J и введением новых переменных согласно (2.1.23) приведем систему (2.1.21) к виду (2.1.1)

$$\frac{d\omega_1'}{dt'} + (I-1)\,\omega_2'\omega_3' = \varepsilon u_1', \quad \omega_1'(0) = \omega_1'^0,$$
$$\frac{d\omega_2'}{dt'} - (I-1)\,\omega_1'\omega_3' = \varepsilon u_2', \quad \omega_2'(0) = \omega_2'^0, \qquad (2.1.24)$$
$$I\frac{d\omega_3'}{dt'} = \varepsilon u_3', \quad \omega_3'(0) = \omega_3'^0, \qquad \varepsilon = \frac{u^0}{J\omega^{02}}.$$

Здесь $\omega_i'^0$ — начальные значения переменных ω_i', вычисляемые согласно (2.1.21), (2.1.23), причем $\omega_i'^0 \leqslant 1$.

Малый параметр $\varepsilon \ll 1$ в системе (2.1.24) введен согласно соотношению (2.1.22). Ограничения на управляющие функции u_i' примут вид:

$$|u_i'| \leqslant u_i'^0, \; u_i'^0 = u_i^0/u^0 < 1. \qquad (2.1.25)$$

Далее штрихи в системе (2.1.24) для упрощения записи опускаем.

Рассмотрим случай, в котором уравнения (2.1.24) приводятся к виду (2.1.6). Пусть требуется стабилизировать угловую скорость осевого вращения ω_3 около некоторого заданного значения $\omega_3^* \neq 0$. Это можно осуществить, например, при помощи управляющего воздействия

$$u_3 = -u_3^0 \operatorname{sign}(\omega_3 - \omega_3^*). \qquad (2.1.26)$$

Тогда функция ω_3 определяется из третьего уравнения (2.1.24) и оказывается медленной переменной $\omega_3 = \omega_3(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$. После подстановки функции $\omega_3(\tau)$ в первые два уравнения (2.1.24) получаем

$$\begin{aligned} &\dot\omega_1 + \nu(\tau)\omega_2 = \varepsilon u_1, \qquad \nu(\tau) = (I-1)\omega_3(\tau),\\ &\dot\omega_2 - \nu(\tau)\omega_1 = \varepsilon u_2. \end{aligned} \qquad (2.1.27)$$

Система (2.1.27) заменой типа (2.1.3)

$$\omega_1 = -\Omega \sin\psi, \qquad \omega_2 = \Omega\cos\psi$$

приводится к стандартной форме с вращающейся фазой (2.1.6)

$$\dot{\Omega} = \varepsilon(-u_1 \sin\psi + u_2\cos\psi), \quad \Omega(0) = \Omega^0 = \left(\omega_1^{02} + \omega_2^{02}\right)^{1/2},$$
$$\dot{\psi} = \nu(\tau) - \varepsilon\Omega^{-1}(u_1\cos\psi + u_2\sin\psi), \qquad (2.1.28)$$
$$\sin\psi^0 = -\omega_1^0/\Omega^0, \quad \cos\psi^0 = \omega_2^0/\Omega^0.$$

При помощи замены, подобной (2.1.11)

$$\omega_1 = a\cos\varphi - b\sin\varphi, \quad \omega_2 = a\sin\varphi + b\cos\varphi,$$
$$\varphi(t) = \int_0^t \nu(\varepsilon t')\,dt' \qquad (2.1.29)$$

систему (2.1.28) можно привести к другой стандартной форме, а именно к виду (2.1.12). Получим

$$\dot{a} = \varepsilon(u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi), \qquad a(0) = \omega_1^0,$$
$$\dot{b} = \varepsilon(-u_1\sin\varphi + u_2\cos\varphi), \quad b(0) = \omega_2^0. \qquad (2.1.30)$$

В последующих параграфах главы 2 и в главе 4 ставятся и решаются задачи оптимального управления для ряда управляемых систем типа (2.1.6), в частности, для систем, приведенных выше.

§ 2. Построение оптимального управления в задачах с фиксированным временем

1. Постановка задачи управления. Рассматривается управляемая система стандартного вида (2.1.6). Пусть требуется в некоторый фиксированный момент времени $t = T$, где $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, $\Theta = \mathrm{const}$, выбором допустимого управления привести фазовую точку (a, ψ) системы (2.1.6) на многообразие, определяемое соотношениями

$$M(a(T), \psi(T)) = 0, \quad M = (M_1, \ldots, M_l), \quad l \leqslant n+1, \qquad (2.2.1)$$

таким образом, чтобы достигал минимума интегральный функционал

$$J = g(a(T), \psi(T)) + \varepsilon\int_{t_0}^{T} G(\tau, a, \psi, u)\,dt \to \min_{u\in U}. \qquad (2.2.2)$$

Заданные функции M, g и G предполагаются достаточно гладкими по всем аргументам и 2π-периодичными по ψ.

Предположим, что поставленная задача оптимального управления имеет решение и применим к ней принцип максимума [176]. Имеем

$$\begin{gathered}H(p(t), q(t), a(t), \psi(t), \tau, u^*(t), \varepsilon) = \\ = \max_{u \in U} H(p(t), q(t), a(t), \psi(t), \tau, u, \varepsilon), \\ H \equiv \varepsilon(p, f) + q(\nu + \varepsilon F) - \varepsilon G.\end{gathered} \tag{2.2.3}$$

Здесь H — функция Гамильтона задачи, p — n-вектор, сопряженный медленной переменной a; q — скалярная переменная, сопряженная ψ; $t \in [t_0, T]$. Предположим, что особые управления отсутствуют, т. е. первое соотношение (2.2.3) позволяет однозначно определить оптимальное управление u^* как функцию переменных p, q, a, ψ и τ

$$u^* = u(\tau, a, \psi, p, q). \tag{2.2.4}$$

Функция u предполагается достаточно гладкой и 2π-периодической по ψ. Подставим выражение для оптимального управления u^* (2.2.4) в первое соотношение (2.2.3). Получим

$$H^*(p, q, a, \psi, \tau, \varepsilon) = H(p, q, a, \psi, \tau, u(\tau, a, \psi, p, q), \varepsilon). \tag{2.2.5}$$

Согласно второму соотношению (2.2.3) функцию H^* можно представить в виде

$$H^* = q\nu(\tau) + \varepsilon h^*(\tau, a, \psi, p, q). \tag{2.2.6}$$

Здесь h^* представляет собой коэффициент при ε в (2.2.3), в который подставлена функция u^* (2.2.4).

В дальнейшем будут использованы следующие равенства частных производных функции Гамильтона H из (2.2.3) по p, q, a, ψ, вычисленных при u^* из (2.2.4), частным производным функции H^* из (2.2.5)

$$\begin{gathered}\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial p} = \varepsilon f^*, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial q} = \nu + \varepsilon F^*, \\ \left.\frac{\partial H}{\partial a}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial a} = \varepsilon \frac{\partial h^*}{\partial a}, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial \psi}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial \psi} = \varepsilon \frac{\partial h^*}{\partial \psi}.\end{gathered} \tag{2.2.7}$$

Эти равенства справедливы, если замкнутое ограниченное множество U не зависит от x, а вектор u^* из (2.2.4), доставляющий максимум функции Гамильтона в (2.2.5), единствен, что предполагалось выше. Равенства (2.2.7) в этом случае следуют из известных свойств дифференцируемости функции максимума, см., например, [78], стр. 34—35. Вычислим производные $\partial h^*/\partial a$, $\partial h^*/\partial\psi$. Как следует из (2.2.3), (2.2.5), (2.2.6),

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^*}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}[(p, f^*) + qF^* - G^*], \\ \frac{\partial h^*}{\partial \psi} &= \frac{\partial}{\partial \psi}[(p, f^*) + qF^* - G^*]. \end{aligned} \qquad (2.2.8)$$

Здесь f^*, F^*, G — известные функции аргументов p, q, a, ψ, τ; они получаются подстановкой функции u^* (2.2.4) в f, F, G соответственно и обладают необходимыми свойствами гладкости и периодичности по ψ.

Используя соотношения (2.2.7), (2.2.8), выпишем каноническую систему уравнений краевой задачи принципа максимума

$$\blacksquare \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f^*(\tau, a, \psi, p, q), \\ \dot{\psi} &= \nu(\tau) + \varepsilon F^*(\tau, a, \psi, p, q), \\ \dot{p} &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial a}[(p, f^*) + qF^* - G^*], \\ \dot{q} &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial \psi}[(p, f^*) + qF^* - G^*]. \ \square \end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

Согласно (2.1.6), (2.2.1) и (2.2.2) начальные и граничные условия, определяющие решение краевой задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} &a(t_0) = a^0, \ \psi(t_0) = \psi^0, \quad M(a(T), \psi(T)) = 0, \\ &p(T) = \frac{\partial}{\partial a}[(\lambda, M) - g]_{t=T}, \quad q(T) = \frac{\partial}{\partial \psi}[(\lambda, M) - g]_{t=T}. \end{aligned} \qquad (2.2.10)$$

Здесь λ — постоянный l-вектор, исключаемый в процессе решения краевой задачи (2.2.9), (2.2.10) (см. §§ 1, 2 главы 1). Решение поставленной краевой задачи принципа максимума может быть неединственно; тогда оптимальное управление u^* выбирается из условия минимума функционала J (2.2.2).

Отметим, что для квазилинейной колебательной системы (2.1.7), записанной в оскулирующих переменных (2.1.11), также может быть поставлена аналогичная (2.2.1), (2.2.2) задача оптимального управления и выписаны необходимые условия оптимальности принципа максимума.

2. Каноническая замена переменных. Так как гамильтонова система (2.2.9) есть стандартная система с вращающейся фазой, то к ней применим метод усреднения по переменной ψ. Как известно, метод усреднения связан с заменой переменных, исключающих фазу из правой части уравнений системы с заданной степенью точности по ε для $t \sim \varepsilon^{-1}$. При гладкости правой части такая замена определяется решением некоторой последовательности дифференциальных уравнений в частных производных. Интегрирование указанных уравнений приводит к произвольным функциям медленных переменных, видом которых можно распорядиться из соображений удобства исследования новой (усредненной) системы [63]. Для исследования задачи Коши в случае малого периодического по времени t гамильтониана вида $\varepsilon h(p, x, t)$ (x — координата, p — импульс, ε — малый параметр) авторы работ [210, 59] распорядились указанной неоднозначностью так, чтобы усредненная система также имела каноническую форму. Тогда усредненный гамильтониан даст первый интеграл системы, а это позволяет сделать качественные выводы относительно поведения системы на большом интервале времени t.

Система (2.2.9) имеет гамильтонову форму с гамильтонианом (2.2.6). Поэтому представляется естественным развить аналогичный метод канонического усреднения по фазе ψ. Этот прием для ряда довольно сложных случаев системы (2.1.6) позволяет существенно упростить построение решения краевой задачи принципа максимума (2.2.9)—(2.2.10). Действительно, порядок усредненной системы уменьшается на два; медленные переменные интегрируются независимо от быстрой переменной — фазы; среднее значение q постоянно, так как усредненный гамильтониан не зависит от фазы. Если усредненный гамильтониан не зависит от τ, то он также сохраняется. В результате усреднения порядок интегрируемой системы может быть уменьшен на три, причем система остается автономной. В частности, для системы с одной степенью свободы решение краевой задачи часто приводится к квадратурам и конечным уравнениям относительно независимых параметров — постоянных интегрирования.

Переходим к построению усредненной системы. Будем строить такую унивалентную каноническую замену [68, 126] переменных (a, ψ, p, q) на новые (усредненные) переменные $(\xi, \varphi, \eta, \beta)$, характеризуемую производящей функцией $S(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon)$

$$p = \frac{\partial S}{\partial a}, \quad q = \frac{\partial S}{\partial \psi}, \quad \xi = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial \beta}, \tag{2.2.11}$$

чтобы новый (усредненный) гамильтониан K не зависел от усредненной фазы φ. При этом в нулевом приближении (при $\varepsilon = 0$) старые и новые переменные должны совпадать.

Производящая функция S и новый гамильтониан K связаны соотношением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^*\left(\frac{\partial S}{\partial a}, \frac{\partial S}{\partial \psi}, a, \psi, \tau, \varepsilon\right) = K(\eta, \beta, \xi, \tau, \varepsilon), \tag{2.2.12}$$

где $H^*(p, q, a, \psi, \tau, \varepsilon)$ — гамильтониан системы (2.2.9). Уравнение (2.2.12) с учетом представлений (см. (2.2.6), (2.2.11))

$$\begin{gathered} S = (a, \eta) + \psi\beta + \varepsilon\sigma(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon), \\ p = \eta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \ q = \beta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \psi}, \\ \xi = a + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \ \varphi = \psi + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}, \\ K = \nu(\tau)\beta + \varepsilon k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon) \end{gathered} \tag{2.2.13}$$

приводится к виду

$$\nu(\tau)\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} + h^*\left(\tau, a, \psi, \eta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \beta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \psi}\right) + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \\ = k\left(\tau, a + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \eta, \beta, \varepsilon\right). \tag{2.2.14}$$

Из соотношения (2.2.14) искомые функции σ и k могут быть определены в виде рядов по параметру ε

$$\begin{gathered}\sigma(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon)=\sigma_0(\tau, a, \psi, \eta, \beta)+\varepsilon\sigma_1+\varepsilon^2\sigma_2+\ldots,\\ k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon)=k_0(\tau, \xi, \eta, \beta)+\varepsilon k_1+\varepsilon^2 k_2+\ldots\end{gathered} \qquad (2.2.15)$$

Подставим разложения (2.2.15) в (2.2.14) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, предполагая достаточную гладкость функции h^*, периодической по ψ с периодом 2π. Учитывая представления (2.2.13), получим зацепляющуюся последовательность дифференциальных соотношений. В частности, для σ_0, k_0 имеем

$$\nu(\tau)\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi}+h^*(\tau, a, \psi, \eta, \beta)=k_0(\tau, a, \eta, \beta). \qquad (2.2.16)$$

Уравнению (2.2.16) удовлетворяют функции k_0, σ_0 вида

$$\begin{gathered}k_0(\tau, \xi, \eta, \beta)=\langle h^*\rangle(\tau, \xi, \eta, \beta)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h^*(\tau, \xi, \psi, \eta, \beta)\,d\psi,\\ \sigma_0(\tau, a, \psi, \eta, \beta)= \qquad (2.2.17)\\ =-\frac{1}{\nu(\tau)}\int[h^*(\tau, a, \psi, \eta, \beta)-\langle h^*\rangle(\tau, a, \eta, \beta)]\,d\psi.\end{gathered}$$

Здесь и далее символом $\langle\cdot\rangle$ обозначаются средние значения по фазе ψ за период 2π. Для последующих неизвестных коэффициентов k_i, σ_i $(i\geqslant 1)$ справедливы аналогичные (2.2.17) выражения

$$\begin{gathered}k_i(\tau, \xi, \eta, \beta)=\langle h_i^*\rangle(\tau, \xi, \eta, \beta),\\ \sigma_i(\tau, a, \psi, \eta, \beta)= \qquad (2.2.18)\\ =-\frac{1}{\nu(\tau)}\int\left[h_i^*(\tau, a, \psi, \eta, \beta)-\langle h_i^*\rangle(\tau, a, \eta, \beta)\right]d\psi.\end{gathered}$$

Функции h_i^* в (2.2.18) определяются через найденные на предыдущих шагах коэффициенты, например, для

$i = 1, 2$ получим

$$h_1^*(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = \\ = \frac{\partial \sigma_0}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial \eta}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial a}\right) + \frac{\partial h^*}{\partial \beta}\frac{\partial \sigma_0}{\partial \psi} - \left(\frac{\partial k_0}{\partial a}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}\right),$$

$$h_2^*(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial \eta}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial a}\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial \eta^2}\frac{\partial \sigma_0}{\partial a}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial a}\right) + \frac{\partial h^*}{\partial \beta}\frac{\partial \sigma_1}{\partial \psi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^*}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial \psi}\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial^2 h^*}{\partial \eta \partial \beta}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial a}\right)\frac{\partial \sigma_0}{\partial \psi} - \left(\frac{\partial k_0}{\partial a}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial \eta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 k_0}{\partial a^2}\frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}\right) - \\ - \left(\frac{\partial k_1}{\partial a}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}\right). \qquad (2.2.19)$$

Таким образом, для построения усредненной системы $(j+1)$-го приближения нужно вычислить первые $j+1$ коэффициентов разложений (2.2.15) при помощи выражений (2.2.18), (2.2.19). Так как в усредненной системе будут при этом отброшены члены порядка ε^{j+2}, то ее интегрирование приведет, вообще говоря, к погрешности $O(\varepsilon^{j+1})$ на рассматриваемом промежутке времени $t \in [t_0, T]$, $T \equiv \Theta\varepsilon^{-1}$. Для вычисления исходных переменных a, ψ, p, q с такой же погрешностью $O(\varepsilon^{j+1})$ требуется после интегрирования усредненной системы определить только j коэффициентов σ_i $(i = 0, 1, \ldots, j-1)$. Использование σ_j в разложении (2.2.15) приводит согласно (2.2.13) к так называемому улучшенному $(j+1)$-му приближению решения исходной системы — оно удовлетворяет исходной системе с погрешностью $O(\varepsilon^{j+2})$ [46, 63]. Отметим, что общее решение усредненной системы может быть построено квадратурами на основе известного общего решения первого приближения [63].

Пусть по формулам (2.2.17)—(2.2.19) вычислены коэффициенты разложений (2.2.15) для σ_i, k_i при $i=0, 1, \ldots, j$. Производящая функция S и усредненный гамильтониан K из (2.2.13) тем самым вычислены с точностью до членов $O(\varepsilon^{j+1})$ включительно. Отбрасывая члены порядка ε^{j+2} в функции $K = \nu\beta + \varepsilon k$, получим в новых переменных каноническую систему

$$\frac{d\xi}{d\theta}=\frac{\partial k_{(j)}}{\partial \eta},\quad \frac{d\eta}{d\theta}=-\frac{\partial k_{(j)}}{\partial \xi},$$
$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\nu}{\varepsilon}+\frac{\partial k_{(j)}}{\partial \beta},\quad \beta=\mathrm{const},\quad \theta=\varepsilon t. \tag{2.2.20}$$

Здесь функция $k_{(j)}$ есть сумма первых $j+1$ членов разложения (2.2.15) функции k

$$k_{(j)}(\tau,\xi,\eta,\beta,\varepsilon)=k_0(\tau,\xi,\eta,\beta)+\varepsilon k_1+\ldots+\varepsilon^j k_j. \tag{2.2.21}$$

Уравнения (2.2.20) называют системой $(j+1)$-го приближения для усредненных переменных ξ, η, φ, β. Ее интегрирование проводится на ограниченном интервале времени $\theta\in[\theta_0,\Theta]$, $\theta_0=\varepsilon t_0$. Отметим, что медленные переменные ξ, η, β и быстрая фаза φ определяются системой (2.2.20) с одинаковой погрешностью $O(\varepsilon^{j+1})$. Правые части системы (2.2.20) не зависят от фазы φ. Система $2n$ уравнений (2.2.20) для ξ, η, в которых переменная β рассматривается как параметр, интегрируется независимо, после чего фаза φ определяется квадратурой.

Решение системы (2.2.20) будем строить на основе общего решения первого приближения.

3. Решение первого приближения. Рассмотрим систему первого приближения, получающуюся из (2.2.20) при $j=0$. Согласно определению функций h^* и k_0 (см. (2.2.6), (2.2.17)) и на основании соотношений (2.2.7), (2.2.8) следует, что уравнения первого приближения приводятся к виду

$$\frac{d\xi}{d\theta}=\langle f^*\rangle,$$
$$\frac{d\eta}{d\theta}=\frac{\partial}{\partial\xi}[\langle G^*\rangle-(\eta,\langle f^*\rangle)-\beta\langle F^*\rangle]. \tag{2.2.22}$$

Здесь $\langle f^*\rangle$, $\langle G^*\rangle$, $\langle F^*\rangle$ есть функции от $\tau=\theta+\tau_0$, ξ, η, β, полученные в результате подстановки в f, G, F управления u^* из (2.2.4), усреднения по ψ и замены (2.2.13) при $\varepsilon=0$. Таким образом, эти функции получаются усреднением по ψ соответствующих уравнений для a, p в (2.2.9) с последующей заменой a, p, q на ξ, η, β. Как и в уравнения (2.2.20), в правые части системы (2.2.22) β входит как параметр.

Предположим, что общее решение системы (2.2.22) известно:

$$\xi=\xi_1(\theta,\ \xi^0,\ \eta^0,\ \beta),\qquad \eta=\eta_1(\theta,\ \xi^0,\ \eta^0,\ \beta). \tag{2.2.23}$$

Здесь ξ^0, η^0 — n-векторы постоянных интегрирования, которые выбраны так, чтобы

$$\xi_1(\theta_0,\ \xi^0,\ \eta^0,\ \beta)=\xi^0,\qquad \eta_1(\Theta,\ \xi^0,\ \eta^0,\ \beta)=\eta^0. \tag{2.2.24}$$

Фаза φ в первом приближении по ε определяется из (2.2.20) при $k_{(j)}=k_0$ в виде квадратуры. Используя соотношения (2.2.7), (2.2.17), (2.2.20), получим

$$\varphi=\varphi_1(\theta,\ \xi^0,\ \varphi^0,\ \eta^0,\ \beta)=\varphi^0+\varepsilon^{-1}\varphi_{-1}(\theta)+\varphi_0(\theta,\ \xi^0,\ \eta^0,\ \beta). \tag{2.2.25}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi^0=\mathrm{const},\quad \varphi_{-1}(\theta)=\int_{\theta_0}^{\theta}\nu(\theta'+\tau_0)\,d\theta',\quad \tau=\theta+\tau_0,$$
$$\varphi_0(\theta,\xi^0,\eta^0,\beta)=\int_{\theta_0}^{\theta}\langle F^*\rangle(\tau',\xi_1,\eta_1,\beta)\,d\theta', \tag{2.2.26}$$

где φ^0 — постоянная интегрирования, определяемая начальным условием, φ_{-1} — известная функция θ порядка 1, φ_0 — добавка порядка единицы к фазе, вызванная возмущением частоты в (2.1.6).

Таким образом, общее решение системы уравнений первого приближения построено в виде (2.2.23)—(2.2.26). Возвращаясь к исходным переменным p, q, a, ψ, выбором постоянных ξ^0, η^0, φ^0, β необходимо удовлетворить начальным и краевым условиям (2.2.10). Воспользуемся формулами (2.2.13) для замены переменных и выражениями первого приближения (2.2.23), (2.2.25) для ξ, η, φ. Подставляя указанные выражения в (2.2.10) и отбрасывая члены $O(\varepsilon)$, получим систему уравнений относительно неизвестных ξ^0, η^0, φ^0, β, λ

$$\xi^0=a^0,\quad \varphi^0=\psi^0,$$
$$M(\xi(\Theta,\xi^0,\eta^0,\beta),\quad \varphi_1(\Theta,\xi^0,\eta^0,\beta,\varepsilon))=0, \tag{2.2.27}$$
$$\eta^0=\frac{\partial}{\partial\xi}[(\lambda,M)-g]_{\theta=\Theta},\quad \beta=\frac{\partial}{\partial\varphi}[(\lambda,M)-g]_{\theta=\Theta}.$$

Отметим, что при выводе формул (2.2.27) проведено разложение по ψ в окрестности значения $\psi=\varphi_1\sim\varepsilon^{-1}$,

$\psi=\varphi_1+O(\varepsilon)$ (см. (2.2.25)), которое справедливо вследствие гладкости и периодичности функций M, g и G по ψ.

Так как по предположению поставленная задача оптимального управления имеет решение для всех $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$, то существует решение системы (2.2.27), быть может, не единственное. Как следует из (2.2.24), (2.2.27), величины ξ^0, φ^0 определяются однозначно. Из последних двух уравнений (2.2.27) (n-мерного и скалярного), линейных относительно l-вектора λ ($l\leqslant n+1$), определяется λ как функция неизвестных η^0, β и параметров a^0, β^0. Подставляя λ в оставшиеся $n+1-l$ уравнений, получаем систему $n+1$ уравнений относительно $n+1$ неизвестных параметров η^0, β^0. Если решение η^0, $\beta=\beta_1$ единственно, то построенные функции (2.2.23), (2.2.25) определяют оптимальное решение задачи с погрешностью $O(\varepsilon)$. Если же нелинейная система относительно η^0, β допускает более одного решения, то оптимальное решение (траектория и управление) отбирается из условия минимума (среди этих решений) функционала (2.2.2), вычисленного с погрешностью $O(\varepsilon)$

$$J_1=g(\xi_1,\varphi_1)|_{\theta=\Theta}+\int_{\theta_0}^{\Theta}\langle G^*\rangle(\tau,\xi_1,\eta_1,\beta_1)\,d\theta. \quad (2.2.28)$$

Здесь функция $\langle G^*\rangle$ определена выше (см. (2.2.23)), τ дано в (2.2.26). Подстановка функций ξ_1, η_1, φ_1 и параметра β_1 в выражение (2.2.4) для u^* дает оптимальное управление первого приближения в виде программы

$$u^*=u(\tau,\ \xi_1,\ \varphi_1,\ \eta_1,\ \beta_1). \quad (2.2.29)$$

Отметим, что функции ξ_1, φ_1, η_1 зависят от θ и от начальных данных θ_0, a^0, ψ^0, а также от параметров ε, Θ, τ_0; величина β_1 от θ не зависит. Чтобы получить приближенное оптимальное управление в форме синтеза, нужно в (2.2.29) сделать замену θ, a^0, ψ^0 на θ, a, ψ.

Таким образом, построенные выражения для переменных ξ_1, φ_1, η_1, β_1, функционала J_1 из (2.2.28) и оптимального управления u^* из (2.2.29) дают решение первого приближения поставленной задачи оптимального управления (2.1.6), (2.2.1), (2.2.2).

4. Построение высших приближений. Переходим теперь к построению решения краевой задачи $(j+1)$-го приближения (2.2.9), (2.2.10), удовлетворяющего уравнениям и краевым условиям с погрешностью $O(\varepsilon^{j+1})$ для $t \in [t_0, T]$. Это решение может быть построено при помощи формул (2.2.13) на основе построенной в (2.2.15)—(2.2.19) функции σ и решения усредненной системы $(j+1)$-го приближения (2.2.20) для ξ, φ, η, β. Усредненные переменные ξ, φ, η, удовлетворяющие системе (2.2.20) с погрешностью $O(\varepsilon^{j+1})$ для $\theta \in [\theta_0, \Theta]$, могут быть найдены на основе известного общего решения (2.2.23) системы первого приближения (2.2.22).

Действительно, будем искать общее решение системы (2.2.20) в виде разложений

$$\xi_{(j+1)}(\theta,\ \xi^0,\ \eta^0,\ \beta,\ \varepsilon) = \xi_1 + \varepsilon\xi_2 + \ldots + \varepsilon^j\xi_{j+1}, \qquad \beta = \mathrm{const},$$
$$\eta_{(j+1)}(\theta,\ \xi^0,\ \eta^0,\ \beta,\ \varepsilon) = \eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \ldots + \varepsilon^j\eta_{j+1}. \tag{2.2.30}$$

Подставим (2.2.30) в уравнения (2.2.20), разложим их правые части по степеням ε вплоть до ε^j и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε^0, ε^1, ..., ε^j. Получим зацепляющуюся последовательность дифференциальных уравнений. На первом шаге имеем систему (2.2.22). Для $i \geqslant 2$ получаем линейные неоднородные уравнения с однородными краевыми условиями

$$\frac{d\xi_i}{d\theta} = \frac{\partial^2 k_0}{\partial\xi_1\partial\eta_1}\xi_i + \frac{\partial^2 k_0}{\partial\eta_1^2}\eta_i + f_i^{\xi}(\theta, \xi^0, \eta^0, \beta),$$
$$\frac{d\eta_i}{d\theta} = -\frac{\partial^2 k_0}{\partial\xi_1^2}\xi_i - \frac{\partial^2 k_0}{\partial\xi_1\partial\eta_1}\eta_i + f_i^{\eta}(\theta, \xi^0, \eta^0, \beta), \tag{2.2.31}$$
$$\xi_i(\theta_0, \xi^0, \eta^0, \beta) = 0, \quad \eta_i(\theta, \xi^0, \eta^0, \beta) = 0.$$

Здесь n-мерные вектор-функции f_i^{ξ}, f_i^{η} на каждом шаге известны: они определяются через коэффициенты k_0, k_1, ..., k_{i-1} и найденные на предыдущих шагах функции ξ_1, η_1, ..., ξ_{i-1}, η_{i-1}. Например,

$$f_2^{\xi} = \frac{\partial k_1}{\partial\eta_1}, \quad f_2^{\eta} = -\frac{\partial k_1}{\partial\xi_1},$$

$$f_3^{\xi} = \frac{\partial k_2}{\partial\eta_1} + \frac{\partial}{\partial\eta_1}\left[\left(\frac{\partial k_1}{\partial\xi_1}, \xi_2\right) + \left(\frac{\partial k_1}{\partial\eta_1}, \eta_2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 k_0}{\partial\xi_1^2}\xi_2, \xi_2\right) + \left(\frac{\partial^2 k_0}{\partial\xi_1\partial\eta_1}\xi_2, \eta_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 k_0}{\partial\eta_1^2}\eta_2, \eta_2\right)\right],$$

$$f_3^\eta = -\frac{\partial k_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left[\left(\frac{\partial k_1}{\partial \xi_1}, \xi_2\right) + \left(\frac{\partial k_1}{\partial \eta_1}, \eta_2\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 k_0}{\partial \xi_1^2}\xi_2, \xi_2\right) + \left(\frac{\partial^2 k_0}{\partial \xi_1 \partial \eta_1}\xi_2, \eta_2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 k_0}{\partial \eta_1^2}\eta_2, \eta_2\right)\right]. \quad \square \tag{2.2.32}$$

Производные функций $k_0, k_1, \ldots, k_j$ в (2.2.31), (2.2.32) берутся при $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$, т. е. на решении (2.2.23). Заметим, что если в (2.2.31) положить $f_i^\xi = f_i^\eta \equiv 0$, то полученная однородная система будет системой в вариациях для гамильтоновой системы (2.2.20) первого приближения. Общее решение этой системы (2.2.22) дается равенствами (2.2.23). Поэтому фундаментальную матрицу Z однородной системы (2.2.31) при $f_i^\xi, f_i^\eta \equiv 0$ получим, дифференцируя решение (2.2.23) по параметрам ξ^0, η^0 в виде матрицы $2n \times 2n$

$$Z(\theta, \xi^0, \eta^0, \beta) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi^0} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \eta^0} \\ \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \xi^0} & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial \eta^0} \end{matrix} \right\|. \tag{2.2.33}$$

Используя метод вариации произвольных постоянных, запишем общее решение системы (2.2.31) при $i \geqslant 2$ через матрицу Z (2.2.33)

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = Z(\theta) \int_{\theta_0}^{0} Z^{-1}(\theta') \begin{pmatrix} f_i^\xi \\ f_i^\eta \end{pmatrix} d\theta' + Z(\theta) \begin{pmatrix} c_i^\xi \\ c_i^\eta \end{pmatrix}. \tag{2.2.34}$$

Решение (2.2.34) представим в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_i^1(0) \\ \eta_i^1(0) \end{pmatrix} + Z(\theta) \begin{pmatrix} c_i^\xi \\ c_i^\eta \end{pmatrix}. \tag{2.2.35}$$

Учитывая равенства

$$\frac{\partial \xi_1(\theta_0)}{\partial \xi^0} = \frac{\partial \eta_1(\Theta)}{\partial \eta^0} = I, \quad \frac{\partial \xi_1(\theta_0)}{\partial \eta^0} = \frac{\partial \eta_1(\Theta)}{\partial \xi^0} = 0, \tag{2.2.36}$$

вытекающие из (2.2.24), получим значения коэффициентов c_i^ξ, c_i^η в (2.2.35)

$$c_i^\xi = 0, \quad c_i^\eta = -\eta_i^1(\Theta), \quad i = 1, \ldots, j+1. \tag{2.2.37}$$

В соотношениях (2.2.35)—(2.2.37) для сокращения записи опущена зависимость от параметров ξ^0, η^0, β, а через I обозначена единичная $(n \times n)$-матрица. Формулы (2.2.32)—(2.2.37) определяют искомые коэффициенты разложения (2.2.30), т. е. решение $(j+1)$-го приближения, удовлетворяющее краевым условиям

$$\xi_{(j+1)}(\theta_0, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon) = \xi^0, \quad \eta_{(j+1)}(\Theta, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon) = \eta^0. \tag{2.2.38}$$

Выпишем еще выражение для усредненной быстрой переменной — фазы φ. Подставим в правую часть уравнения (2.2.20) для φ функцию $k_{(j)}$ из (2.2.21) и функции $\xi_{(j+1)}$, $\eta_{(j+1)}$ из (2.2.30). Разложим это уравнение по степеням ε вплоть до степени ε^{j+1} и проинтегрируем по θ. Используя выражения (2.2.25) для функции первого приближения φ_1, получим

$$\varphi_{(j+1)} = \varphi^0 + \varepsilon^{-1}\varphi_{-1} + \varphi_0 + \varepsilon\varphi_2 + \ldots + \varepsilon^j\varphi_{j+1}. \tag{2.2.39}$$

Здесь φ^0 — постоянная интегрирования, $\varepsilon^{-1}\varphi_{-1} \sim \varepsilon^{-1}$ есть сингулярная по ε часть φ_1, а $\varphi_0 \sim 1$; эти функции определены в (2.2.26). Заметим, что функции φ_0, φ_2, … …, φ_{j+1} зависят от θ и постоянных ξ^0, η^0, β, подлежащих дальнейшему определению из краевых условий (2.2.10).

Переходим к вычислению с необходимой точностью порядка ε^j исходных переменных a, ψ, p, q, которые связаны с усредненными переменными ξ, φ, η, β соотношениями (2.2.13). Коэффициенты σ_i разложения (2.2.15) известны и имеют вид (2.2.17), (2.2.18). Функции (2.2.30), (2.2.39) отличаются от точных значений усредненных переменных ξ, φ, η, β на величины порядка ε^{j+1}. Подставляя их в (2.2.13) и отбрасывая члены порядка ε^{j+1} и выше, представим формулы преобразования в виде

$$\begin{aligned} a &= \xi_{(j+1)} - \varepsilon\frac{\partial\sigma_{(j)}}{\partial\eta}, & \psi &= \varphi_{(j+1)} - \varepsilon\frac{\partial\sigma_{(j)}}{\partial\beta}, \\ p &= \eta_{(j+1)} + \varepsilon\frac{\partial\sigma_{(j)}}{\partial a}, & q &= \beta + \varepsilon\frac{\partial\sigma_{(j)}}{\partial\psi}. \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

Здесь через $\sigma_{(j)}$ обозначена сумма первых j членов разложения (2.2.15)

$$\sigma_{(j)}(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon) = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \ldots + \varepsilon^{j-1}\sigma_{j-1}. \tag{2.2.41}$$

Искомые величины a, ψ, p, q будем строить в виде

$$\begin{aligned} a_{(j+1)} &= a_1 + \varepsilon a_2 + \ldots + \varepsilon^j a_{j+1}, \\ \psi_{(j+1)} &= \psi_1 + \varepsilon\psi_2 + \ldots + \varepsilon^j\psi_{j+1}, \\ p_{(j+1)} &= p_1 + \varepsilon p_2 + \ldots + \varepsilon^j p_{j+1}, \\ q_{(j+1)} &= q_1 + \varepsilon q_2 + \ldots + \varepsilon^j q_{j+1}. \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

Подставим в (2.2.40) представление (2.2.41) и выражения (2.2.30), (2.2.39), (2.2.42), разложим полученные равенства в ряды по ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим следующие выражения для коэффициентов разложений (2.2.42)

$$\begin{gathered} a_1 = \xi_1, \quad \psi_1 = \varphi_1, \quad p_1 = \eta_1, \quad q_1 = \beta, \\ a_2 = \xi_2 - \frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta_1}, \; \psi_2 = \varphi_2 - \frac{\partial\sigma_0}{\partial\beta}, \; p_2 = \eta_2 + \frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi_1}, \\ q_2 = \frac{\partial\sigma_0}{\partial\varphi_1}, \quad \sigma_0 = \sigma_0(\tau, \xi_1, \varphi_1, \eta_1, \beta). \end{gathered} \tag{2.2.43}$$

Здесь функция σ_0 дана формулой (2.2.17). Последующие коэффициенты вычисляются аналогично. Таким образом, построено решение (2.2.42) $(j+1)$-го приближения. Его можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{(j+1)} &= \xi_1 + \varepsilon A_j(\theta, \varphi_1, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon), \\ \psi_{(j+1)} &= \varphi_1 + \varepsilon\Psi_j(\theta, \varphi_1, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon), \\ p_{(j+1)} &= \eta_1 + \varepsilon P_j(\theta, \varphi_1, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon), \\ q_{(j+1)} &= \beta + \varepsilon Q_j(\theta, \varphi_1, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Решение (2.2.44), в котором ξ_1, η_1 даны в виде (2.2.23), а φ_1 — соотношением (2.2.25), для медленных переменных a, p, q содержит плавные функции t, на которые налагаются малые быстрые вибрации с амплитудой $\sim\varepsilon$ и частотой $\nu(\tau)$. Чтобы выделить эти вибрации, в добавках (2.2.44) указана 2π-периодическая зависимость от быстрой переменной φ_1, которая содержит член $\varepsilon^{-1}\varphi_{-1}$ (см. (2.2.25), (2.2.26)), изменяющийся за время

$t \sim \varepsilon^{-1}$ на величину порядка ε^{-1}. Отметим, что формулы (2.2.44) определяют общее решение системы (2.2.9) в рассматриваемом приближении.

Теперь необходимо распорядиться постоянными ξ^0, φ^0, η^0, β так, чтобы удовлетворить краевым условиям (2.2.10) с погрешностью $O(\varepsilon^{j+1})$. В соответствии с замечанием после формул (2.2.27) будем считать, что l-мерный вектор λ исключен при помощи каких-либо l из условий трансверсальности (2.2.10). После этого краевые условия (2.2.10) запишем в виде

$$\begin{gathered} a(t_0) = a^0, \quad \psi(t_0) = \psi^0, \\ N(a(T), \psi(T), p(T), q(T)) = 0. \end{gathered} \tag{2.2.45}$$

Здесь N — вектор-функция размерности $n+1$, первые l компонентов которой совпадают с компонентами вектор-функции M из (2.2.1), а остальные компоненты получены из условий трансверсальности после исключения λ. Подставляя выражения (2.2.44) в (2.2.45) и отбрасывая члены порядка ε^{j+1}, получим систему $2(n+1)$ уравнений относительно $2(n+1)$ неизвестных постоянных ξ^0, φ^0, η^0, β

$$\begin{gathered} \blacksquare \quad \xi^0 + \varepsilon A_j(\theta_0, \varphi^0, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon) = a^0, \\ \varphi^0 + \varepsilon \Psi_j(\theta_0, \varphi^0, \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon) = \psi^0, \\ N(\xi_1(\Theta, \xi^0, \eta^0, \beta) + \varepsilon A_j(\Theta, \varphi_1(\Theta), \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon), \\ \varphi_1(\Theta) + \varepsilon \Psi_j(\Theta, \varphi_1(\Theta), \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon), \\ \eta^0 + \varepsilon P_j(\Theta, \varphi_1(\Theta), \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon), \\ \beta + \varepsilon Q_j(\Theta, \varphi_1(\Theta), \xi^0, \eta^0, \beta, \varepsilon)) = 0, \\ \varphi_1(\Theta) = \varphi^0 + \varepsilon^{-1}\varphi_{-1}(\Theta) + \varphi_0(\Theta, \xi^0, \eta^0, \beta). \ \square \end{gathered}$$

Параметры ξ^0, φ^0, η^0, β^0 ищем в виде разложений по степеням ε

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \xi_1^0 + \varepsilon\xi_2^0 + \ldots + \varepsilon^j\xi_{j+1}^0, \\ \varphi^0 &= \varphi_1^0 + \varepsilon\varphi_2^0 + \ldots + \varepsilon^j\varphi_{j+1}^0, \\ \eta^0 &= \eta_1^0 + \varepsilon\eta_2^0 + \ldots + \varepsilon^j\eta_{j+1}^0, \\ \beta &= \beta_1 + \varepsilon\beta_2 + \ldots + \varepsilon^j\beta_{j+1}. \end{aligned} \tag{2.2.47}$$

Подставляя представления (2.2.47) в (2.2.46), разлагая по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε^i при $i=0, 1, \ldots, j$, получим для каждого i систему уравнений относительно коэффициентов разложений (2.2.47). Отметим, что вследствие 2π-периодичности и гладкости функций A_j, Ψ_j, P_j, Q_j и N относительно φ_1 оказывается возможным разложение в ε-окрестности значения $\varphi_1(\Theta) \sim \varepsilon^{-1}$. На первом шаге имеем решение, определенное из системы (2.2.27)

$$\xi_1^0 = a^0, \quad \varphi_1^0 = \psi^0, \quad \eta_1^0, \quad \beta_1. \tag{2.2.48}$$

Будем предполагать, что решение (2.2.48) является единственным и простым (соответствующий якобиан отличен от нуля) для всех значений $\varphi_1(\Theta)$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ решение (2.2.47) системы (2.2.46) существует и единственно. Этот факт следует из известных теорем о неявных функциях. Последующие коэффициенты ξ_i^0, φ_i^0, $i \geqslant 2$ разложений (2.2.47) определяются явными соотношениями типа (2.2.48) через коэффициенты, вычисленные на предыдущих шагах. Для нахождения величин η_i^0, β_i получаем линейную неоднородную систему с матрицей, определитель которой отличен от нуля, а правые части определяются через известные коэффициенты.

Таким образом, развитая методика при выполнении указанных выше требований гладкости позволяет на асимптотически большом интервале времени $t \in [t_0, T]$, $T = \Theta\varepsilon^{-1}$ определить решение краевой задачи принципа максимума (2.2.9), (2.2.10) с любой заданной степенью точности по малому параметру. Оптимальная фазовая траектория a, ψ дается соотношениями (2.2.41). Программное управление и минимальное значение функционала с погрешностью $O(\varepsilon^{j+1})$ согласно (2.2.4), (2.2.2), (2.2.44) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{j+1}^* &= u\left(\tau, a_{(j+1)}, \psi_{(j+1)}, p_{(j+1)}, q_{(j+1)}\right), \\ J_{j+1} &= g\left(a_{(j+1)}(T), \psi_{(j+1)}(T)\right) + \\ &\quad + \varepsilon \int_{t_0}^{T} G\left(\tau, a_{(j+1)}, \psi_{(j+1)}, u_{j+1}^*\right) dt. \end{aligned} \tag{2.2.49}$$

Оптимальное управление в форме синтеза получается при помощи формул (2.2.49), если в выражениях для $p_{(j+1)}$, $q_{(j+1)}$ сделать замену $\theta_0 \to \theta$, $a^0 \to a$, $\psi^0 \to \psi$.

Отметим, что в прикладных задачах управления обычно достаточно ограничиться первым приближением, алгоритм вычисления которого задается соотношениями (2.2.23)—(2.2.29).

Отметим некоторое различие в терминологии, принятой в главах 1, 2. Первым приближением метода возмущений на конечном интервале времени (глава 1) называется разложение решения, учитывающее члены порядка ε в уравнениях движения, что приводит к погрешности порядка ε^2. Первое приближение метода усреднения также учитывает члены порядка ε, что, однако, дает погрешность порядка ε на большом интервале времени $\sim \varepsilon^{-1}$.

5. Пример управляемой системы с одной степенью свободы. В качестве примера приложения развитой выше методики рассмотрим некоторые задачи оптимального управления колебательными системами с одной степенью свободы типа (2.1.7). Уравнение движения скалярно и имеет вид

$$\ddot{x} + \nu^2(\tau)x = \varepsilon f(\tau, x, \dot{x}, u), \qquad \tau = \varepsilon t,$$

$$x(0) = x^0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}^0. \qquad (2.2.50)$$

Здесь u — скалярное управление, $\nu(\tau) \geqslant \nu_0 > 0$ — частота. Возмущающая функция f предполагается достаточно гладкой. После замены (2.1.8), в данном случае имеющей вид

$$x = a\sin\psi, \qquad \dot{x} = \nu(\tau)a\cos\psi, \qquad a \geqslant 0, \qquad (2.2.51)$$

уравнение (2.2.50) приводится к системе (см. (2.1.9))

$$\dot{a} = \varepsilon\nu^{-1}(\tau)[f(\tau, a\sin\psi, a\nu(\tau)\cos\psi, u) - a\nu'(\tau)\cos\psi]\cos\psi,$$

$$\dot{\psi} = \nu(\tau) + \varepsilon a^{-1}\nu^{-1}(\tau)\,[a\nu'(\tau)\cos\psi -$$
$$- f(\tau, a\sin\psi, a\nu(\tau)\cos\psi, u)]\sin\psi,$$
$$a(0) = a^0 = [x^{02} + \dot{x}^{02}\nu^{-2}(0)]^{1/2},$$

$$\psi(0) = \psi^0, \quad \sin\psi^0 = \frac{x^0}{a^0}, \quad \cos\psi^0 = \frac{\dot{x}^0}{a^0\nu(0)}. \ \square \qquad (2.2.52)$$

Функцию f считаем линейной по u вида

$$f(\tau,\ x,\ \dot{x},\ u) = f_0(\tau,\ x,\ \dot{x}) + D(\tau)u, \qquad |D(\tau)| \geqslant D_0 > 0.$$

Рассмотрим следующие постановки задач оптимального управления

$$\text{А.}\quad |u| < \infty, \quad J = k\frac{a^2(T)}{2} + \varepsilon\int_0^T G(\tau)\,u^2\,dt, \quad G \geqslant G_0;$$

$$\text{Б.}\quad |u| < \infty, \quad a(T) = a^*, \quad J = \varepsilon\int_0^T G(\tau)\,u^2 dt; \tag{2.2.53}$$

$$\text{В.}\quad |u| \leqslant u_0, \quad J = \pm {}^1/_2 a^2(T).$$

Здесь $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, $k > 0$, $G_0 > 0$, $a^* \geqslant 0$, $\Theta > 0$ — постоянные; $G(\tau)$, $D(\tau)$ — заданные функции. В вариантах А, Б ограничения на управление отсутствуют, а в вариантах А, В отсутствуют краевые условия. Функция Гамильтона для задач А, Б имеет вид

$$H = q\nu + \varepsilon\nu^{-1}(v + Du)w - \varepsilon Gu^2,$$
$$v(\tau,\ a,\ \psi) = f_0 - a\nu'\cos\psi, \tag{2.2.54}$$
$$w(a,\ \psi,\ p,\ q) = p\cos\psi - qa^{-1}\sin\psi.$$

Функция H из (2.2.54) максимальна по u при

$$u^* = 1/2\nu^{-1}(\tau)D(\tau)w(a,\ \psi,\ p,\ q)G^{-1}(\tau). \tag{2.2.55}$$

Исходная краевая задача принципа максимума вида (2.2.9), (2.2.10) для вариантов А, Б из (2.2.53) описывается уравнениями и краевыми условиями

■ $$\dot{a} = \frac{\varepsilon v}{\nu}\cos\psi + \frac{\varepsilon D^2 w}{2\nu^2 G}\cos\psi,$$

$$\dot{\psi} = \nu - \frac{\varepsilon v}{\nu a}\sin\psi - \frac{\varepsilon D^2 w}{a\nu^2 G}\sin\psi,$$

$$\dot{p} = -\frac{\varepsilon}{\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial a} + \frac{D^2 q}{2a^2\nu G}\sin\psi\right)w - \frac{\varepsilon q v}{\nu a^2}\sin\psi,$$

$$\dot{q} = -\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(vw + \frac{D^2 w^3}{4\nu G}\right),$$

$$a(0) = a^0, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad q(T) = 0,$$

$$\text{А.}\ p(T) = -ka(T), \qquad \text{Б.}\ a(T) = a^*. \ \square \tag{2.2.56}$$

Переходим к построению решения первого приближения, которое дает качественную картину процесса управления и обеспечивает ошибку порядка ε на большом интервале времени. Соответствующая (2.2.56) усредненная краевая задача первого приближения имеет вид (см. 2.2.22), (2.2.27))

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\nu} f_{0c}(\tau, \xi) - \frac{1}{2}\frac{\nu'}{\nu}\xi + \frac{D^2}{4\nu^2 G}\eta, \quad \xi(0) = a^0,$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu'}{2} - \frac{\partial f_{0c}(\tau, \xi)}{\partial \xi}\right]\eta, \quad \beta = 0, \qquad (2.2.57)$$

$$\text{А. } \eta(\Theta) = \eta^0 = -k\xi(\Theta), \qquad \text{Б. } \xi(\Theta) = a^*.$$

Здесь ξ, η, β — усредненные медленные переменные; в обозначениях п.п. 2—4 имеем $\vartheta_0 = \tau_0 = 0$, поэтому $\tau = \theta$. После решения краевой задачи (2.2.57) для переменных ξ, η усредненная фаза φ находится квадратурой согласно (2.2.25)—(2.2.27)

$$\varphi = \psi^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \nu(\tau')\,d\tau' - \int_0^\tau f_{0s}(\tau', \xi(\tau'))\frac{d\tau'}{\xi(\tau')}. \qquad (2.2.58)$$

В (2.2.57), (2.2.58) обозначено

$$\begin{Bmatrix} f_{0c} \\ f_{0s} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, \xi\sin\psi, \xi\nu\cos\psi)\begin{Bmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{Bmatrix} d\psi. \qquad (2.2.59)$$

Отметим, что интегрирование уравнений (2.2.57) сводится к квадратурам, если их правые части не зависят от τ. Решение краевой задачи (2.2.57) находится полностью также в случае, когда функция f_{0c} линейно зависит от ξ. Тогда уравнение для переменной η линейно по η и не содержит ξ. Его решение находится явно квадратурой и подставляется в линейное уравнение для ξ, которое интегрируется в квадратурах.

Приведем решение краевой задачи (2.2.57) для частного случая

$$f_0 = -2\chi\dot{x} + \mu x^3, \qquad \nu, \chi, \mu = \text{const}, \qquad D = G \equiv 1.$$

В соответствии с (2.2.54), (2.2.59) имеем

$$f_{0c} = -\nu\chi\xi, \qquad f_{0s} = (3/8)\mu\xi^3. \qquad (2.2.60)$$

Подставляя (2.2.60) в (2.2.57), интегрируя и удовлетворяя начальному условию (2.2.56) для a, получим

$$\xi(\tau) = \left(a^0 - \frac{\eta^0}{8\nu^2\chi} e^{-\chi\Theta}\right) e^{-\chi\tau} + \frac{\eta^0}{8\nu^2\chi} e^{-\chi(\Theta-\tau)},$$

$$\eta(\tau) = \eta^0 e^{-\chi(\Theta-\tau)}, \quad \beta = 0. \tag{2.2.61}$$

Здесь параметр η^0 определяется из условий на правом конце (2.2.57). Для задачи А имеем

$$\eta^0 = -ka^0e^{-\chi\Theta}\left[1 + \frac{k}{8\nu^2\chi}(1 - e^{-2\chi\Theta})\right]^{-1}. \tag{2.2.62}$$

Рассмотрим решение (2.2.61), (2.2.62) для задачи А. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \eta^0 = -8\nu^2\chi a^0 e^{-\chi\Theta}(1 - e^{-2\chi\Theta}), \tag{2.2.63}$$

то из краевого условия (2.2.57) для η получим $\xi(\Theta \to 0$ при $k \to +\infty$.

Для задачи Б параметр η^0 в решении (2.2.61) определяется из условия $\xi(\Theta) = a^*$ (см. (2.2.57)). Получим

$$\eta^0 = 8\nu^2\chi(a^* - a^0e^{-\chi\Theta})(1 - e^{-2\chi\Theta})^{-1}. \tag{2.2.64}$$

Отметим, что значение η^0 из (2.2.64) при $a^* = 0$ равно пределу (2.2.63) для задачи А.

Усредненная фаза управляемых колебаний для задач А, Б согласно (2.2.58), (2.2.60) представляется в виде

$$\psi(t) = \psi^0 + \int_0^t \Omega(\varepsilon t')\,dt', \quad \Omega(\tau) = \nu - \frac{3\varepsilon\mu}{8\nu}\xi^2(\tau), \tag{2.2.65}$$

где $\Omega(\tau)$ имеет смысл возмущенной частоты.

Оптимальное программное управление в силу (2.2.29), (2.2.61), (2.2.65) равно

$$u^* = \frac{\eta^0}{2\nu} e^{-\chi(\Theta-\tau)} \cos\varphi(t). \tag{2.2.66}$$

Для определения управления в форме синтеза согласно п. 3 в (2.2.66) нужно подставить выражение (2.2.62) или (2.2.64), в которых нужно сделать замены Θ на $\Theta - \tau$, a^0 на a, а также $\varphi(t)$ на ψ.

Минимальные значения функционала J для постановок А, Б в соответствии с (2.2.53), (2.2.66) равны

$$\begin{aligned} &\text{А.}\quad J_1 = \frac{\eta^{02}}{2}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{8\nu^2\chi}\left(1 - e^{-2\chi\Theta}\right)\right], \\ &\text{Б.}\quad J_1 = \frac{\eta^{02}}{16\nu^2\chi}\left(1 - e^{-2\chi\Theta}\right). \end{aligned} \tag{2.2.67}$$

Как следует из (2.2.62) — (2.2.64), величины (2.2.67) для задачи А (при $k \to \infty$) и для задачи Б (при $a^* = 0$) совпадают. Таким образом, задача А при $k \to \infty$ эквивалентна задаче Б для $a^* = 0$.

Рассмотрим задачу В (2.2.53). Гамильтониан системы (2.2.52)

$$H = q\nu + \varepsilon\nu^{-1}(v + Du)w$$

максимален по u, $|u| \leqslant u_0$, при

$$u^* = u_0 \operatorname{sign} w. \tag{2.2.68}$$

Максимальное значение функции Гамильтона равно (функции v и w определены в (2.2.54))

$$H^* = q\nu + \varepsilon\nu^{-1}(vw + Du_0|w|).$$

Начальные и граничные условия (2.2.10) соответствующей краевой задачи принципа максимума имеют вид

$$a(0) = a^0, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad p(T) = \mp a(T), \quad q(T) = 0. \tag{2.2.69}$$

Выпишем усредненную краевую задачу (2.2.22), (2.2.27) для случая В. Используя формулы (2.2.69) и выполняя усреднение, получим

$$\begin{aligned} &\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{\nu}\left[f_{0c}(\tau, \xi) - \frac{\nu'}{2}\xi + \frac{2}{\pi}Du_0 \operatorname{sign}\eta\right], \\ &\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu'}{2} - \frac{\partial f_{0c}(\tau, \xi)}{\partial \xi}\right]\eta, \\ &\xi(0) = a^0 > 0, \quad \eta(\Theta) = \mp\xi(\Theta), \quad \beta = 0. \end{aligned} \tag{2.2.70}$$

Здесь усредненная амплитуда неотрицательна, $\xi \geqslant 0$ (см. (2.2.51)). Оптимальное управление (2.2.68) с учетом равенств (2.2.54) и соотношений $p = \eta$, $q = 0$, $\psi = \varphi$, справедливых в первом приближении, равно

$$u^* = u_0 \operatorname{sign}[\eta(\tau)\cos\varphi(t)]. \tag{2.2.71}$$

Как следует из вида уравнения (2.2.70) для η, функция $\eta(\tau)$ знакопостоянна при $\xi(\Theta) \neq 0$.

Для анализа краевой задачи (2.2.70) отметим следующее свойство функции f_{0c} из (2.2.59), вытекающее из требования гладкости функции $f_0(\tau, x, \dot{x})$ и замены переменных (2.2.51). Это свойство заключается в том, что $f_{0c} \sim \xi$ при всех τ и достаточно малых ξ. Отсюда следует, что знак правой части первого уравнения (2.2.70) при малых ξ определяется знаком η.

Опираясь на это свойство, исследуем решение краевой задачи (2.2.70) для функционала В из (2.2.53). Сначала рассмотрим случай знака «—» в функционале, отвечающий максимизации амплитуды колебаний, и покажем, что при этом краевая задача (2.2.70) удовлетворяется при $\eta(\Theta) > 0$. В этом случае $\eta(\tau) > 0$ для $\tau \in [0, \Theta]$, и правая часть первого уравнения (2.2.70) положительна по крайней мере для малых ξ, что обеспечивает положительность $\xi(\tau)$ при всех $\tau \in [0, \Theta]$. Так как $\xi(\Theta) > 0$, то краевое условие (2.2.70) $\eta(\Theta) = \xi(\Theta)$ удовлетворяется за счет нормировки функции $\eta(\tau)$. Таким образом, усредненная оптимальная траектория $\xi(\tau)$ определяется как решение задачи Коши для первого уравнения (2.2.70) при $\operatorname{sign}\eta = 1$. Оптимальное управление (2.2.71) имеет вид $u^* = u_0 \operatorname{sign}\cos\varphi(t)$ или в форме синтеза $-u^* = u_0 \operatorname{sign}\dot{x}$.

Случай знака «+» в функционале (2.2.53) отвечает минимизации амплитуды колебаний. Предположим сначала, что в конце процесса $\xi(\Theta) > 0$. Тогда из (2.2.70) имеем $\eta(\Theta) < 0$ и, следовательно, $\eta(\tau) < 0$ для всех $\tau \in [0, \Theta]$. Краевая задача будет удовлетворена, если решение задачи Коши для первого уравнения (2.2.70) при $\operatorname{sign}\eta = -1$ обладает свойством $\xi(\tau) > 0$ для всех $\tau \in [0, \Theta]$. В этом случае оптимальное управление имеет вид $u^* = -u_0 \operatorname{sign}\cos\varphi(t)$ или $u^* = -u_0 \operatorname{sign}\dot{x}$ при всех $\tau \in [0, \Theta]$. Если же при подстановке $\operatorname{sign}\eta = -1$ в первое уравнение (2.2.70) получим, что $\xi(\tau^*) = 0$ в некоторый момент $\tau^* \in (0, \Theta)$, то имеем случай особого управления: здесь $\eta \equiv 0$ на части интервала движения, на которой оптимальное управление u^* из (2.2.71) не определено. В этом случае достигается абсолютный (нулевой) минимум функционала первого приближения

$J_1 = {}^1\!/_2\xi^2(\Theta) = 0$. В качестве функции $\operatorname{sign}\eta$ в первом уравнении из (2.2.70) можно взять произвольную кусочно постоянную функцию такую, чтобы решение $\xi(\tau)$ удовлетворяло условию $\xi(\Theta) = 0$, например, функцию

$$\operatorname{sign}\eta(\tau) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant \tau \leqslant \tau^*, \\ 0, & \tau^* < \tau \leqslant \Theta. \end{cases} \qquad (2.2.72)$$

Оптимальное управление, реализующее абсолютный минимум функционала, неединственно и может быть взято в виде (2.2.71), (2.2.72).

Отметим, что исследование других задач при помощи развитой в § 2 методики содержится в § 4 главы 2, а также в главе 4.

§ 3. Задачи типа оптимального быстродействия

1. Постановка задач оптимального управления с нефиксированным временем. Рассматривается задача оптимального управления системой в стандартной форме с вращающейся фазой типа (2.1.6). В отличие от постановки задачи § 2 будем считать, что момент окончания процесса T не задан, а выбирается из условия достижения фазовой точкой многообразия, задаваемого соотношениями

$$M(\tau, a)|_{t=T} = 0, \qquad M = (M_1, \ldots, M_l), \qquad 1 \leqslant l \leqslant n. \qquad (2.3.1)$$

В качестве минимизируемого функционала возьмем скалярную функцию конечного значения медленных переменных

$$J = g(\tau, a)|_{t=T} \to \min_{u \in U}. \qquad (2.3.2)$$

Ограничения на управление имеют тот же вид, что и в §§ 1, 2. Отметим, что расширением размерности вектора a к виду (2.3.2) приводится интегральный функционал типа (2.2.2). В частности, если многообразие (2.3.1) имеет вид $a(T) = a_*$, где a_* — заданный вектор, а $g = \tau$, то получаем задачу максимального быстродействия в заданную точку по медленным переменным. Существенным предположением в рассмотренной постановке является отсутствие зависимости функций M и g от быстрой переменной — фазы ψ. Это допущение естественно и обычно удовлетворяется в прикладных задачах с малыми управляющими воздействиями. При такой постановке время быстродействия, как правило, имеет порядок $T = \Theta\varepsilon^{-1} \sim \varepsilon^{-1}$, что позволяет применить метод усреднения аналогично § 2. Заметим, что так как для квазилинейной системы (2.1.6) фаза ψ определяется с той же степенью точности, что и медленный вектор a, то принципиально предлагаемая ниже методика позволяет рассматривать случаи, когда функции M и g зависят от ψ. Однако в этом случае может иметь место большое число ($\sim \varepsilon^{-1}$) точек пересечения фазовой траектории a, ψ с многообразием (2.3.1), что затрудняет решение. Сделанное же выше предположение приводит к тому, что число этих точек не зависит от ε при $\varepsilon \to 0$.

Предположим, что решение задачи оптимального управления (2.1.6), (2.3.1), (2.3.2) существует и единственно. Выпишем соответствующую краевую задачу принципа максимума, аналогичную (2.2.9), (2.2.10)

$$\blacksquare \quad \begin{gathered} \dot{a} = \varepsilon f^*(\tau, a, \psi, p, q), \\ \dot{\psi} = \nu(\tau) + \varepsilon F^*(\tau, a, \psi, p, q), \\ \dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial h^*}{\partial a}, \quad \dot{q} = -\varepsilon \frac{\partial h^*}{\partial \psi}, \\ a(t_0) = a^0, \quad \psi(t_0) = \psi^0, \quad M(\tau, a)|_T = 0, \\ p(T) = \frac{\partial}{\partial a}[(\lambda, M) - g)]_T, \quad q(T) = 0. \quad \square \end{gathered} \tag{2.3.3}$$

Здесь функция h^* определяется соотношением

$$\max_{u \in U} H = \max_{u \in U} \{q\nu + \varepsilon[(p, f) + qF]\} \equiv q\nu + \varepsilon h^*, \tag{2.3.4}$$

а максимальное значение H^* в конце интервала удовлетворяет равенству

$$H^*|_T = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}[g - (\lambda, M)]_T. \tag{2.3.5}$$

Будем считать, что функция (2.2.4)

$$u^* = u(\tau, a, \psi, p, q), \tag{2.3.6}$$

определяемая соотношением (2.3.4) и периодическая по ψ с периодом 2π, является достаточно гладкой, так что правые части стандартной системы (2.3.3) удовлетворяют условиям применимости метода усреднения. Равенство (2.3.5) замыкает совокупность начальных и краевых условий для определения неизвестных параметров задачи. Таковыми являются $2(n+1)$ постоянных интегрирования системы (2.3.3), l-вектор λ и оптимальное время T окончания процесса управления.

2. Построение канонической усредненной системы. Согласно равенствам (2.2.7) система дифференциальных уравнений (2.3.3) имеет гамильтонову форму, и к ней дословно применима методика канонического усреднения § 2. В результате ее применения для коэффициентов разложений производящей функции $S=(a,\eta)+\psi\beta+ +\varepsilon\sigma$ и соответствующего усредненного гамильтониана $K=\nu\beta+\varepsilon k(\tau,\ \xi,\ \eta,\ \beta,\ \varepsilon)$ получаются явные выражения (см. (2.2.13), (2.2.15), (2.2.17), (2.2.19)). Таким образом, каноническое преобразование (2.2.11) от исходных a, ψ, p, q к новым (усредненным) переменным ξ, φ, η, β может быть построено с любой степенью точности по малому параметру, ограничиваемой лишь гладкостью правых частей системы (2.3.3).

Рассмотрим кратко процедуру построения решения краевой задачи (2.3.3), (2.3.5). Для этой цели выпишем усредненную систему (2.2.20) с краевыми условиями

$$\blacksquare\quad \frac{d\xi}{d\theta}=\frac{\partial}{\partial\eta}k(\tau,\xi,\eta,\beta,\varepsilon),\quad \xi(\theta_0)=\xi^0,$$

$$\frac{d\eta}{d\theta}=-\frac{\partial}{\partial\xi}k(\tau,\xi,\eta,\beta,\varepsilon),\quad \eta(\Theta)=\eta^0,$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\nu(\tau)}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial\beta}k(\tau,\xi,\eta,\beta,\varepsilon),\quad \varphi(\theta_0)=\varphi^0,$$

$$\beta=\mathrm{const},\quad \theta=\varepsilon t. \qquad \square \quad (2.3.7)$$

Задавшись желаемой точностью, ограничимся в разложении функции k в (2.3.7) нужным числом членов (см. § 2). Степень точности j для сокращения записи не указывается.

Пусть решение краевой задачи (2.3.7) задано в виде

$$\xi=\xi(\theta,\Theta,\xi^0,\eta^0,\beta,\varepsilon),\qquad \eta=\eta(\theta,\Theta,\xi^0,\eta^0,\beta,\varepsilon),$$

$$\varphi=\varphi^0+\int_{\theta_0}^{\theta}\left[\frac{\nu(\tau')}{\varepsilon}+\frac{\partial}{\partial\beta}k(\tau',\xi,\eta,\beta,\varepsilon)\right]d\theta'. \qquad (2.3.8)$$

Преобразование от переменных (2.3.8) к исходным переменным a, ψ, p, q с нужной степенью точности по параметру ε представим в виде (подобном (2.2.40), (2.2.44))

$$
\begin{aligned}
a &= \xi + \varepsilon A(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon),\\
p &= \eta + \varepsilon P(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon),\\
\psi &= \varphi + \varepsilon \Psi(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon),\\
q &= \beta + \varepsilon Q(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon).
\end{aligned}
\tag{2.3.9}
$$

Здесь A, Ψ, P, Q — известные достаточно гладкие функции, 2π-периодические по φ.

Подставляя выражения (2.3.9) в начальные и краевые условия (2.3.3), (2.3.5) и учитывая уравнения (2.3.7), которым удовлетворяет решение (2.3.8), для определения неизвестных параметров ξ^0, φ^0, η^0, β получим систему

$$
\begin{aligned}
&\xi^0 + \varepsilon A(\tau^0, \xi^0, \varphi^0, \eta(\theta_0), \beta, \varepsilon) = a^0 && (n),\\
&\varphi^0 + \varepsilon \Psi(\tau^0, \xi^0, \varphi^0, \eta(\theta_0), \beta, \varepsilon) = \psi^0 && (1),\\
&M(\tau_\Theta, \xi(\Theta + \varepsilon A(\tau_\Theta, \xi(\Theta), \varphi(\Theta), \eta^0, \beta, \varepsilon)) = 0 && (l),\\
&\eta^0 + \varepsilon P(\tau_\Theta, \xi(\Theta), \varphi(\Theta), \eta^0, \beta, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial a}[(\lambda, \mu) - g]_\Theta && (n),\\
&\beta + \varepsilon Q(\tau_\Theta, \xi(\Theta), \varphi(\Theta), \eta^0, \beta, \varepsilon) = 0 && (1),\\
&H^*|_\Theta = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}[g - (\lambda, M)]_\Theta && (1),\\
&\tau = \theta + \tau_0 \in [\tau^0, \tau_\Theta]. \quad \square && (2.3.10)
\end{aligned}
$$

Здесь у функций (2.3.8) указана зависимость лишь от первого аргумента. В скобках в формулах (2.3.10) указано число соответствующих скалярных уравнений.

3. Краевая задача первого приближения. Как и в § 2, решение задачи произвольного приближения строится сравнительно просто на основе решения первого приближения. Поэтому ниже рассматривается, в основном, первое приближение.

Краевая задача первого приближения описывается соотношениями, аналогичными (2.2.24) — (2.2.27)

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \langle f_0^* \rangle (\tau, \xi, \eta), \quad \xi(\theta_0) = a^0, \quad M(\tau_\Theta, \xi(\Theta)) = 0,$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = -\frac{\partial}{\partial \xi}(\eta, \langle f_0^* \rangle (\tau, \xi, \eta)), \quad \eta^0 = \frac{\partial}{\partial \xi}[(\lambda, M) - g]_\Theta,$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\nu(\tau)}{\varepsilon} + \langle F_0^* \rangle (\tau, \xi, \eta), \quad \varphi(\theta_0) = \psi^0, \quad \beta = 0. \tag{2.3.11}$$

Здесь функция $\langle f_0^* \rangle$ равна $\langle f^* \rangle (\tau, \xi, \eta, \beta)$ при $\beta = 0$, а именно

$$\langle f_0^* \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(\tau, \xi, \psi, \eta, 0)\, d\psi. \tag{2.3.12}$$

Аналогично (2.3.12) определяется функция $\langle F_0^* \rangle$.

Пусть для заданного значения Θ решение краевой задачи первого приближения (2.3.11) построено и единственно

$$\xi = \xi(\theta, \Theta), \ \eta = \eta(\theta, \Theta), \ \beta = 0, \ \varphi = \varphi(\theta, \Theta, \varepsilon). \tag{2.3.13}$$

Здесь функция φ определяется квадратурой аналогично (2.2.26), (2.2.27).

При решении краевой задачи (2.3.11) определяются также параметры $\eta^0(\Theta)$, $\lambda(\Theta)$, $\beta = 0$.

Исходные переменные связаны с решением первого приближения (2.3.13) соотношениями (см. (2.2.15))

$$a = \xi + O(\varepsilon), \ p = \eta + O(\varepsilon), \ \psi = \varphi + O(\varepsilon), \ q = O(\varepsilon). \tag{2.3.14}$$

Для определения неизвестного параметра Θ подставим в последнее краевое условие (2.3.10) гамильтониан (2.3.4) и выражения (2.3.14)

$$(\eta^0(\Theta), f^*(\tau_\Theta, \xi(\Theta, \Theta), \varphi(\Theta, \Theta, \varepsilon), \eta^0(\Theta), 0)) + O(\varepsilon) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \tau_\Theta}[g(\tau_\Theta, \xi(\Theta, \Theta)) - (\lambda(\Theta), M(\tau_\Theta, \xi(\Theta, \Theta)))]. \tag{2.3.15}$$

Рассмотрим сначала приближенное уравнение, получающееся из (2.3.15) после отбрасывания членов $O(\varepsilon)$.

Покажем, что это трансцендентное относительно Θ уравнение допускает много корней. Их число при некоторых дополнительных предположениях стремится к бесконечности как ε^{-1} при $\varepsilon \to 0$, а расстояние между соседними корнями порядка ε.

Рассмотрим уравнение (2.3.15), в котором отброшено слагаемое $O(\varepsilon)$, и функция f^* заменена на $\langle f_0^* \rangle$ из (2.3.12). Предположим, что такое уравнение допускает простой вещественный корень Θ_0, и перепишем уравнение (2.3.15) без члена $O(\varepsilon)$ в виде

$$(\eta^0, \langle f_0^* \rangle)_\Theta - \frac{\partial}{\partial \tau}[g - (\lambda, M)]_\Theta = -(\eta^0, f^* - \langle f_0^* \rangle)_\Theta. \tag{2.3.16}$$

Здесь аргументы для краткости не указаны (см. (2.3.15)). Правая часть уравнения (2.3.16) как функция Θ является вследствие зависимости от φ (см. (2.2.26), (2.2.27)) быстро осциллирующей с частотой $\sim \varepsilon^{-1}$, с амплитудой порядка единицы и с малым средним $\sim \varepsilon$. Так как функция аргумента Θ, стоящая в левой части уравнения, по предположению обращается в нуль при $\Theta = \Theta_0$, то отсюда следует справедливость сделанного выше утверждения о поведении корней уравнения (2.3.16). Изменение правой (осциллирующей) и левой частей уравнения (2.3.16) как функций Θ представлено на рис. 2.2.

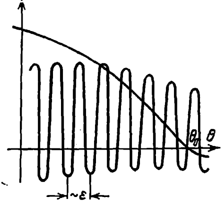


Рис. 2.2.

Рассмотрим теперь исходное уравнение (2.3.15) с учетом члена $O(\varepsilon)$. Так как по предположению корень Θ_0 усредненного уравнения — простой, то учет членов порядка ε приведет к изменению корня Θ_0 на величину также порядка ε. Поэтому установленные свойства корней справедливы и для точного уравнения (2.3.15). Отсюда следует неединственность решения краевой задачи принципа максимума.

Отметим, что искомые корни Θ уравнения (2.3.15) определяются с достаточной для построения первого приближения погрешностью $O(\varepsilon)$, если член $O(\varepsilon)$ в этом уравнении опустить. Решение задачи оптимального управления может быть получено из условия минимума приближенного значения функционала (2.3.2) по множеству корней уравнения (2.3.16)

$$J_0^* = \min_{\Theta} g(\tau_\Theta, \xi(\Theta, \Theta)), \quad \tau_\Theta = \Theta + \tau_0. \qquad (2.3.17)$$

Условие (2.3.17) служит для определения параметра Θ в решении первого приближения.

4. Определение параметра Θ. Не уменьшая точности по медленным переменным и функционалу, величину Θ, как и другие величины, достаточно определить с погрешностью порядка ε. Тогда допустимое множество значений $\{\Theta\}$ можно считать непрерывным, потому что в ε-окрестности любого такого значения, как установлено в п. 3, находится корень точного уравнения.

Перепишем уравнение (2.3.16) в виде

$$\left(\eta^0, \langle f_0^* \rangle\right)_\Theta - \frac{\partial}{\partial \tau} [g - (\lambda, M)]_\Theta + \nu(\tau_\Theta) \varkappa = 0. \qquad (2.3.18)$$

Здесь правая часть уравнения (2.3.16) заменена слагаемым $\nu(\tau_\theta)\varkappa$. В уравнении (2.3.16) эта правая часть была быстро осциллирующей функцией Θ с амплитудой порядка единицы и малым ($\sim \varepsilon$) средним. Далее, учитывая отмеченную возможность выбора Θ из непрерывного интервала, можно считать $\varkappa$ не зависящим от Θ параметром, принимающим значения в интервале $[\varkappa_1, \varkappa_2]$, включающем точку $\varkappa = 0$. Не нарушая точности, будем поэтому рассматривать уравнение (2.3.18) как связь между параметрами Θ и $\varkappa$ и искать минимум функционала (2.3.17) при условии (2.3.18). Считая Θ функцией $\varkappa$, потребуем, чтобы величина фунционала J_0 (2.3.17) достигала минимума по $\varkappa \in [\varkappa_1, \varkappa_2]$

$$J_0(\varkappa) = g(\tau_\Theta(\varkappa), \xi(\Theta(\varkappa), \Theta(\varkappa))) \to \min_{\varkappa}. \qquad (2.3.19)$$

Предположим далее, что функция J_0 из (2.3.19) является гладкой. Тогда необходимое условие минимума имеет вид

$$\frac{dJ_0(\varkappa)}{d\varkappa} = \left[\frac{\partial g}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}, \frac{d\xi(\Theta, \Theta)}{d\Theta}\right)\right]_{\Theta(\varkappa)} \frac{d\Theta}{d\varkappa} = 0. \qquad (2.3.20)$$

Пусть соотношение (2.3.19) между Θ и $\varkappa$ осуществляет взаимно однозначное соответствие, т. е.

$$\frac{d\Theta}{d\varkappa} = \left(\frac{d\varkappa}{d\Theta}\right)^{-1} = \nu^2 \left\{\nu' \left[\left(\eta^0, \langle f_0^*\rangle\right) - \frac{\partial g}{\partial \tau} + \left(\lambda, \frac{\partial M}{\partial \tau}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \nu \frac{d}{d\Theta}\left[\left(\eta^0, \langle f_0^*\rangle\right) - \frac{\partial g}{\partial \tau} + \left(\lambda, \frac{\partial M}{\partial \tau}\right)\right]\right\}^{-1}_{\Theta(\varkappa)} \neq 0. \quad (2.3.21)$$

С учетом (2.3.21) условие (2.3.20) приводится к виду

$$\frac{dg_0(\Theta)}{d\Theta} = \left.\frac{\partial g}{\partial \tau}\right|_\Theta + \left(\left.\frac{\partial g}{\partial \xi}\right|_\Theta, \frac{d\xi(\Theta, \Theta)}{d\Theta}\right) = 0, \quad (2.3.22)$$
$$g_0(\Theta) = g(\tau_\Theta, \xi(\Theta, \Theta)).$$

Так как согласно (2.3.11)

$$\left.\frac{\partial g}{\partial \xi}\right|_\Theta = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(\lambda, M) - \eta^0\right]_\Theta,$$

то для искомой производной (2.3.22) имеет место представление

$$\frac{dg_0(\Theta)}{d\Theta} = \left.\frac{\partial g}{\partial \tau}\right|_\Theta - \left(\eta^0, \langle f_0^*\rangle\right)_\Theta + \left(\lambda, \left.\frac{\partial M}{\partial \xi}\right|_\Theta \frac{d\xi(\Theta, \Theta)}{d\Theta}\right). \quad (2.3.23)$$

Подставим в правую часть (2.3.23) выражение для $\left(\eta^0, \langle f_0^*\rangle\right)_\Theta$, определяемое уравнением (2.3.18)

$$\frac{dg_0(\Theta)}{d\Theta} = \left.\frac{\partial g}{\partial \tau}\right|_\Theta + \left(\lambda, \left.\frac{\partial M}{\partial \xi}\right|_\Theta \frac{d\xi(\Theta, \Theta)}{d\Theta}\right) + \left[\nu\varkappa - \frac{\partial g}{\partial \tau} + \right.$$
$$\left. + \left(\lambda, \frac{\partial M}{\partial \tau}\right)\right]_\Theta = \left(\lambda, \frac{dM_0(\Theta)}{d\Theta}\right) + \nu(\tau_\Theta)\varkappa,$$
$$M_0(\Theta) = M(\tau_\Theta, \xi(\Theta, \Theta)).$$

Согласно (2.3.11) $M_0(\Theta) = 0$ тождественно по Θ, поэтому $dM_0/d\Theta = 0$. В результате для производной (2.3.22) находим выражение

$$g_0'(\Theta) = \nu(\tau_\Theta)\varkappa. \quad (2.3.24)$$

С учетом (2.3.24) необходимое условие минимума (2.3.20) имеет вид

$$J_0'(\varkappa) = \Theta'(\varkappa)\nu(\tau_\Theta)\varkappa = 0. \quad (2.3.25)$$

Здесь функции $\Theta(\varkappa)$ и $\tau_\Theta = \Theta + \tau_0$ определяются из уравнения (2.3.18). Так как $\nu \geqslant \nu_0 > 0$, то на основании предположения (2.3.21) из (2.3.25) следует, что $\varkappa=0$ является точкой возможного экстремума для J_0. При условии

$$\Theta'(0)>0 \tag{2.3.26}$$

значение $\varkappa=0$ — точка локального минимума функции $J_0(\varkappa)$.

Пользуясь выражением (2.3.25), запишем условие глобального минимума функции $J_0(\varkappa)$ в точке $\varkappa=0$

$$J_0(\varkappa)-J_0(0)=\int\limits_0^{\varkappa}\nu\left(\Theta(\varkappa')+\tau_0\right)\frac{d\Theta(\varkappa')}{d\varkappa'}\varkappa'd\varkappa'\geqslant 0. \tag{2.3.27}$$

Полученное неравенство может быть преобразовано при помощи соотношения (2.3.18), записанного следующим образом

$$-\rho(\Theta(\varkappa))+\nu(\Theta(\varkappa)+\tau_0)=0, \tag{2.3.28}$$

$$\rho(\Theta)=\left[\frac{\partial g}{\partial\tau}-\left(\lambda,\frac{\partial M}{\partial\tau}\right)-\left(\eta^0,\langle f_0^*\rangle\right)\right]_\Theta,\quad \lambda=\lambda(\Theta).$$

При помощи равенств (2.3.28) неравенство (2.3.27) может быть записано в виде

$$\int\limits_{\Theta(0)}^{\Theta}\rho(\Theta')\,d\Theta'\geqslant 0. \tag{2.3.29}$$

Здесь функция $\rho(\Theta)$ известна, если построено решение краевой задачи (2.3.13) первого приближения для всех Θ. Через $\Theta(0)$ обозначен корень уравнения (2.3.18) для $\varkappa=0$.

5. **Заключительные замечания.** Если условие (2.3.29) выполнено, то $\Theta(0)$ является оптимальным значением момента окончания процесса управления в первом приближении. Тем самым завершается процедура построения оптимального решения первого приближения для случая гладких систем. Алгоритм решения задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи (2.3.11) относительно $2n$ переменных ξ, η на ограниченном интервале изменения независимой переменной $\theta\in[\theta_0,\ \Theta(0)]$. С погрешностью $O(\varepsilon)$ минимальное значение функционала (2.3.2) равно (2.3.19) при $\varkappa=0$, а оптимальное управление получается подстановкой найденных выражений (2.3.13) для $a=\xi$, $\psi=\varphi$, $p=\eta$, $q=0$ в функцию (2.3.6).

Как отмечалось ранее, если функция $\langle f_0^* \rangle$ не зависит от τ, то интегрирование канонической системы (2.3.11) значительно упрощается, так как она консервативна и имеет первый интеграл $k_0 = \left(\eta, \langle f_0^* \rangle (\xi, \eta)\right) = \text{const}$. Решение задач оптимального управления колебательными системами с одной степенью свободы в этом случае приводится к квадратурам. Если же функции g и M не зависят от τ, то 0 — корень уравнения $k_0 = 0$ при $\theta = \Theta(\varkappa)$.

При построении более высоких приближений допустимые значения Θ образуют, вообще говоря, дискретное множество $\{\Theta\}$. В этом случае оптимальное значение Θ находится из условия минимума функционала (2.3.2), вычисленного с соответствующей точностью, по дискретному множеству $\{\Theta\}$.

Как отмечалось выше, решение краевой задачи принципа максимума для высших приближений строится при фиксированном значении Θ аналогично § 2 на основе первого приближения. Постоянные интегрирования определяются в виде разложений (2.2.47) из краевых условий типа (2.2.46).

При построении оптимальных управлений в §§ 2, 3 предполагалось, что функция u^* из (2.2.4) или (2.3.6) определяется условиями (2.2.3) или (2.3.4) однозначно и является достаточно гладкой 2π-периодической по ψ функцией. При этих предположениях возможно применение известных схем усреднения по быстрой фазе ψ, что привело к упрощению краевой задачи принципа максимума.

Задачи оптимального управления с ограничениями на управляющую функцию u вида $u \in U$ часто приводят к разрывным (в частности, релейным) функциям времени. В этих случаях значения u в моменты разрывов определяются неоднозначно. Наличие разрывов у правых частей уравнений принципа максимума ограничивает применимость метода усреднения. Усреднению систем с разрывными правыми частями посвящены работы [188, 244].

Изложенная в §§ 2, 3 методика формально может быть использована также и в задачах с разрывными управлениями (для построения первого приближения). Основная трудность при этом связана с возможностью особых или скользящих управлений, которые требуют специального рассмотрения. Один из таких примеров рассмотрен в п. 5 § 2. Ниже будут приведены асимптотические решения ряда других задач с разрывными оптимальными управлениями.

6. Управляемая колебательная система с одной степенью свободы. Рассмотрим некоторые постановки задач оптимального управления колебаниями квазилинейной системы (2.2.50), приведенной к стандартной форме (2.2.52). Как и в п. 5 § 2, рассматривается случай линейной по u функции $f = f_0(\tau, x, \dot{x}) + D(\tau)u$. Конечное многообразие (2.3.1) будем задавать в разрешенном относительно амплитуды колебаний a виде

$$M(\tau, a) = a - \alpha(\tau), \quad \alpha(\tau) \geqslant \alpha_0 > 0. \tag{2.3.30}$$

Здесь $\alpha(\tau)$ — заданная функция. Возьмем интегральный критерий качества управления

$$J = \varepsilon \int_0^T [\gamma(\tau) + G(\tau) u^2]\, dt, \qquad \tau = \varepsilon t, \quad \gamma \geqslant \gamma_0 > 0, \quad G \geqslant G_0 > 0. \tag{2.3.31}$$

Первый член в функционале (2.3.31) учитывает потери времени, а второй характеризует расход ресурсов управления. Введением дополнительной медленной переменной b, изменяющейся согласно уравнению

$$\dot{b} = \varepsilon[\gamma(\tau) + G(\tau)u^2], \quad b(0) = 0, \tag{2.3.32}$$

функционал (2.3.31) приводится к виду (2.3.2), причем $g = b$. Отметим, что b — циклическая переменная. Поэтому сопряженная ей переменная p_1 постоянна и, вследствие условия трансверсальности (2.3.3) имеем $p_1 \equiv -1$. В результате оптимальное управление u^* определяется прежним выражением (2.2.55), а функция Гамильтона отличается от H из (2.2.54) на величину $-\gamma(\tau)$.

Рассмотрим усредненную краевую задачу первого приближения согласно (2.3.11), (2.3.18). Уравнения для усредненных переменных ξ, η, отвечающих a, p, имеют вид (2.2.57). Начальные и краевые условия согласно (2.3.11) запишутся в виде

$$\xi(0) = a^0, \quad \xi(\Theta) = \alpha(\Theta), \quad \varphi(0) = \psi^0, \quad b(0) = 0. \tag{2.3.33}$$

Условие (2.3.18), связывающее параметр $\varkappa$ и момент окончания процесса Θ, задается соотношением

$$\left[\frac{\eta^0}{\nu}\left(f_{0c}-\frac{\nu'\xi}{2}\right)+\frac{D^2\eta^{02}}{4\nu^2G}\right]_\Theta-\left(\gamma+\frac{D^2\eta^{02}}{8\nu^2G}\right)_\Theta-$$
$$-\eta^0\alpha'(\tau_\Theta)+\nu(\tau_\Theta)\varkappa=0,\quad \tau_\Theta=\Theta. \qquad (2.3.34)$$

Здесь первое слагаемое отвечает правой части уравнения (2.2.57) для ξ, а второе — усредненному уравнению (2.3.32) при $p_1=-1$.

Функционал J из (2.3.31), подлежащий минимизации по $\varkappa$ (см. (2.3.19)), при помощи (2.3.32) приводится к форме

$$J_0(\varkappa)=\int\limits_0^\Theta\left(\gamma+\frac{D^2\eta^2}{8\nu^2G}\right)d\theta. \qquad (2.3.35)$$

Здесь подставлено выражение (2.2.55) для u^*, а также $p=\eta$, $q=0$ и проведено усреднение по ψ.

Таким образом, требуется проинтегрировать при заданном значении Θ систему уравнений (2.2.57) для условий (2.3.33), а затем определить величину Θ из (2.3.34) при значении $\varkappa$, доставляющем минимум функции (2.3.35).

Рассмотрим частный случай, когда (см. п. 5 § 2)

$$\dot f_0=-2\chi\dot x+\mu x^3,\quad G=D=1,\ \nu,\ \gamma,\ \alpha,\ \chi,\ \mu=\mathrm{const}. \qquad (2.3.36)$$

Решение краевой задачи (2.2.57), (2.3.33) имеет вид (2.2.61), где

$$\eta^0=8\nu^2\chi(\alpha-a^0e^{-\chi\Theta})(1-e^{-2\chi\Theta})^{-1}. \qquad (2.3.37)$$

Разрешим квадратное уравнение (2.3.34) относительно η^0 и подставим полученную зависимость $\eta^0(\varkappa)$ в равенство (2.3.37). После этого получим квадратное уравнение относительно величины $z=e^{-\chi\Theta}$, положительное решение которого имеет вид

$$z_{1,2}=e^{-\chi\Theta_{1,2}}=\frac{a_0}{2c_{1,2}}+\left[\left(\frac{a_0}{2c_{1,2}}\right)^2+1-\frac{\alpha}{c_{1,2}}\right]^{1/2},\quad z_{1,2}\leqslant 1,$$
$$c_{1,2}(\varkappa)=\frac{1}{2}\left[\alpha\pm\left(\alpha^2+\frac{\gamma-\nu\varkappa}{2\nu^2\chi^2}\right)^{1/2}\right]. \qquad (2.3.38)$$

Здесь в выражении для $c_{1,2}$ знак плюс соответствует положительному значению η^0 в (2.3.37), т. е. задаче увеличения амплитуды колебаний (при этом $\alpha=a(T)>a^0$), а минус — ее уменьшению ($\alpha < \alpha^0$). При $\alpha = a^0$ имеем $z_{1,2} = 1$, что отвечает $\Theta_{1,2} = 0$. Формула (2.3.38) определяет зависимость $\Theta(\varkappa)$. Допустимые значения параметра $\varkappa$ определяются условиями положительности подкоренных выражений в (2.3.37).

Докажем, что оптимальному решению отвечает значение $\varkappa = 0$. Для этого согласно условию (2.3.25) достаточно доказать неравенство $\Theta'(\varkappa) > 0$ для всех допустимых $\varkappa$, что эквивалентно неравенству $dz_i/d\varkappa < 0$, $i = 1, 2$ (см. (2.3.38)). Так как $dc_1/d\varkappa < 0$, а $dc_2/d\varkappa > 0$, то $z_i'(\varkappa) < 0$ для $i = 1, 2$, если $dz_1/dc_1 > 0$ или $dz_2/dc_2 < 0$. Производная dz_i/dc_i согласно (2.3.38) равна

$$\frac{dz_i}{dc_i} = \frac{c_i^{-1}\left[B_i - {}^1/_2 A_i^2 - A_i\left({}^1/_4 A_i^2 + 1 - B_i\right)^{1/2}\right]}{2\left({}^1/_4 A_i^2 + 1 - B_i\right)^{1/2}}, \tag{2.3.39}$$

$$A_i = a^0 c_i^{-1}, \quad B_i = \alpha c_i^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим сначала для определенности задачу увеличения амплитуды колебаний: $a^0 < \alpha$. С учетом выбора знака в (2.3.38) имеем $c_1 > {}^1/_2\alpha$. Параметры A_1, B_1 в (2.3.39) при этом удовлетворяют неравенствам: $0 < A_1 < B_1 \leqslant 2$. Можно показать, что при этом условии производная (2.3.39) положительна: $dz_1/dc_1 > 0$. Для задачи об уменьшении амплитуды колебаний рассмотрим частный случай полного гашения колебаний $\alpha = 0$. Так как при этом в (2.3.38), (2.3.39) имеем $B_2 = 0$, $A_2 < 0$, $c_2 < 0$, то из (2.3.39) получим $dz_2/dc_2 < 0$.

Тем самым в обоих случаях доказана оптимальность значения $\varkappa = 0$. Подставляя $\varkappa = 0$ в (2.3.38), имеем искомое оптимальное значение $\Theta = \Theta(0)$ момента окончания процесса управления. Выражения (2.2.61), (2.2.66), (2.3.37) определяют оптимальное управление и траекторию. Минимальное значение функционала в первом приближении согласно (2.3.35), (2.2.67) равно

$$J_0(0) = \gamma\Theta(0) + \frac{\eta^{02}}{16\nu^2\chi}\left[1 - e^{-2\chi\Theta(0)}\right].$$

Сравним полученное решение задачи с функционалом (2.3.31) без ограничений на управление u с решением задачи быстродействия для той же системы при ограничениях вида $|u| \leqslant u_0$. Для простоты рассмотрим случай $\chi = 0$ в (2.3.36). В этом случае искомые величины можно получить предельным переходом при $\chi \to 0$. Однако проще вновь построить решение на основе усредненной системы (2.2.57). Подставляя в систему (2.2.57) равенства (2.2.60), $\chi = 0$, (2.3.36) и интегрируя ее при краевых условиях (2.3.33), получим

$$\xi = {}^1/_4\nu^{-2}\eta^0\tau + a^0, \quad \eta = \eta^0 = -4\nu^2(a^0 - \alpha)\Theta^{-1}. \quad (2.3.40)$$

Уравнение (2.3.34) в данном случае имеет вид $\eta^{02} = 8\nu^2(\gamma - \nu\varkappa)$. Подставляя в него η^0 из (2.3.40) и полагая $\varkappa = 0$, находим момент окончания оптимального процесса

$$\Theta = \Theta(0) = \nu|a^0 - \alpha|(2/\gamma)^{1/2}. \quad (2.3.41)$$

Оптимальное управление в первом приближении определяется формулами (2.2.66) при $\chi = 0$, (2.3.40), (2.3.41) и равно

$$u^* = {}^1/_2\nu^{-1}\eta^0\cos\psi = (2\gamma)^{1/2}[\operatorname{sign}(\alpha - a^0)]\cos\psi. \quad (2.3.42)$$

Решим теперь задачу быстродействия для рассмотренной выше системы. Вместо функционала (2.3.31) имеем функционал и ограничения

$$J = \Theta \to \min, \quad |u| \leqslant u_0, \quad (2.3.43)$$

а все остальные условия — те же, что и выше. Следуя ходу решения задачи из п. 5 § 2, получим усредненную краевую задачу первого приближения (2.2.70) в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{2u_0}{\pi\nu}\operatorname{sign}\eta, \quad \eta = \mathrm{const}, \qquad \xi(0) = a^0, \quad \xi(\Theta) = \alpha. \quad (2.3.44)$$

Краевая задача (2.3.44) имеет решение в том и только в том случае, если $\operatorname{sign}\eta = \operatorname{sign}(\alpha - a^0)$:

$$J = \Theta = \frac{\pi\nu}{2u_0}|\alpha - a^0|. \quad (2.3.45)$$

Уравнение (2.3.18) в данном случае имеет вид

$$\frac{2u_0}{\pi\nu}|\eta| - 1 + \nu\varkappa = 0$$

и удовлетворяется при произвольном η за счет выбора $\varkappa$.

Управление первого приближения согласно (2.2.71), (2.3.45) равно

$$u^* = u_0\operatorname{sign}[(\alpha - a^0)\cos\psi]. \quad (2.3.46)$$

Пусть времена окончания процесса для обеих постановок одинаковы. Приравнивая выражения $\Theta(0)$ из (2.3.41) и Θ из (2.3.45), находим

$$u_0=(\pi/2)(\gamma/2)^{1/2}. \qquad (2.3.47)$$

Вычислим квадратичный функционал, характеризующий расход ресурсов, для обеих решенных задач. Для первой задачи (2.3.31) на основе соотношений (2.3.41), (2.3.42) получим

$$I_1=\int_0^{\Theta(0)} u^{*2}d\tau=\gamma\Theta(0)=\nu(2\gamma)^{1/2}(a^0-\alpha). \qquad (2.3.48)$$

Вычисление интеграла (2.3.48) проводится аналогично (2.3.35). Для второй задачи (2.3.43) на основании (2.3.46), (2.3.47) получим

$$I_2=\int_0^{\Theta} u^{*2}d\tau=\frac{\pi^2\nu}{8}(2\gamma)^{1/2}|a^0-\alpha|. \qquad (2.3.49)$$

Сравнивая интегралы (2.3.48), (2.3.49), находим, что $I_2/I_1=\pi^2/8>1$, т. е. управление в первой задаче более экономично расходует квадратичный ресурс управления. Интересно отметить, что точно такой же результат $I_2/I_1=\pi^2/8$ получается и для функционалов вида

$$I=\int_0^{\Theta}|u^*|\,d\tau,$$

представляющих собой расход импульса управления. Таким образом, управление, полученное при решении первой задачи, более экономично расходует интегральные ресурсы управления.

§ 4. Управляемые колебательные системы с медленно изменяющимися параметрами

1. Маятник переменной длины. Рассмотрим задачу оптимального по быстродействию изменения амплитуды малых колебаний плоского маятника за счет перемещения точки подвеса вдоль горизонтальной направляющей (см. рис. 2.1). Исходные предположения и уравнения движения приведены в п. 3 § 1 главы 2. Полагая $u_v=0$ в уравнении (2.1.19) и опуская звездочки, получим уравнение управляемых колебаний в виде

$$\ddot{\varphi}+\sigma^{-1}\varphi=\varepsilon\sigma^{-1}(^1/_6\varphi^3-u-2\sigma'\dot{\varphi}),$$
$$\varphi(0)=\varphi^0,\quad \dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}^0. \tag{2.4.1}$$

Здесь точка означает производную по безразмерному времени t, штрих — производную по медленному времени $\tau=\varepsilon t$, $\sigma(\tau)$ — медленно изменяющаяся безразмерная длина маятника, u — управляющая функция, ограниченная неравенствами $u_1\leqslant u\leqslant u_2$.

Заменой (2.2.51) вида $\varphi=a\sin\psi$, $\dot{\varphi}=a\sigma^{-1/2}\cos\psi$ уравнение (2.4.1) приводится к стандартной форме (2.2.52)

■ $$\dot{a}=-\varepsilon(u-{}^1/_6a^3\sin^3\psi+{}^3/_2\sigma^{-1/2}\sigma'a\cos\psi)\sigma^{-1/2}\cos\psi,$$
$$\dot{\psi}=\sigma^{-1/2}+$$
$$+\varepsilon(u-{}^1/_6a^3\sin^3\psi+{}^3/_2\sigma^{-1/2}\sigma'a\cos\psi)\sigma^{-1/2}a^{-1}\sin\psi,$$
$$a(0)=a^0,\quad \psi(0)=\psi^0. \quad\square \tag{2.4.2}$$

Поставим для системы (2.4.2) задачу оптимального быстродействия, аналогичную (2.3.43)

$$M=a(\Theta)-\alpha=0,\quad J=\Theta\to\min,\quad u_1\leqslant u\leqslant u_2. \tag{2.4.3}$$

Управление u с ограничениями (2.4.3) можно представить в виде

$$u={}^1/_2(u_2+u_1)-{}^1/_2(u_2-u_1)v,\quad |v|\leqslant 1.$$

Применяя методику усреднения § 3 и следуя решению примера (2.3.41) из п. 5 § 3, получим аналогично (2.3.42) оптимальное управление в виде

$$v^*=\operatorname{sign}[(\alpha-a^0)\cos\psi],\quad \cos\psi=\sigma^{1/2}a^{-1}\dot{\varphi}.$$

Приближенную зависимость амплитуды колебаний $\xi(\tau)$ получим в виде

$$\xi=a^0\sigma^{-3/4}+\frac{u_2-u_1}{\pi}\operatorname{sign}(\alpha-a^0)\,\sigma^{-3/4}\int_0^\tau\sigma^{1/4}(\tau')\,d\tau',$$
$$\sigma(\tau)=\frac{l(\tau)}{l_0}.$$

Время оптимального быстродействия Θ определяется из условия $\xi(\Theta) = \alpha$, т. е. является корнем уравнения

$$\alpha\sigma^{3/4}(\Theta) - a^0 = \frac{u_2 - u_1}{\pi} \operatorname{sign}(\alpha - a^0) \int\limits_0^{\Theta} \sigma^{1/4}(\tau)\, d\tau. \tag{2.4.4}$$

Отметим, что это уравнение не для всяких законов изменения длины маятника $\sigma(\tau)$ при заданных параметрах a^0, α, l_0, $u_{1,2}$ имеет решение. Действительно, рассмотрим частную задачу гашения колебаний при убывающей с постоянной скоростью длине подвеса, т. е.

$$\alpha = 0, \quad \sigma = 1 - V\tau, \quad V = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда уравнение (2.4.4), определяющее Θ, имеет вид

$$a^0 = \frac{4}{5} \frac{u_2 - u_1}{\pi V} [1 - (1 - V\Theta)^{5/4}].$$

Максимум по Θ выражения в квадратной скобке равен единице, что соответствует $\sigma(\Theta) = 0$. Поэтому условие разрешимости последнего уравнения для Θ есть $a^0 \leqslant 4(u_2 - u_1)(5\pi V)^{-1}$. Очевидно, что при $V \leqslant 0$ (длина маятника не уменьшается) задача гашения колебаний всегда имеет решение.

2. Управляемые вращения динамически симметричного твердого тела. Рассмотрим теперь задачу оптимального по быстродействию гашения экваториальной составляющей угловой скорости динамически симметричного твердого тела при помощи малых управляющих моментов. Уравнения движения в оскулирующих переменных (2.1.29) имеют вид (2.1.30). Считается, что управление u_3 выбрано в соответствии с (2.1.26), что обеспечивает достижение заданной величины $\overset{*}{\omega}_3 \neq 0$ осевой составляющей угловой скорости ω_3. Требуется выбрать функции $u_{1,2}$, приводящие в нуль экваториальную составляющую угловой скорости за минимальное время, т. е.

$$a(T) = b(T) = 0, \quad T \to \min.$$

Исследуем задачу для некоторых конкретных систем управления, отвечающих изображенным на рис. 2.3 областям U возможных значений управления.

А. Управление при помощи одной фиксированной пары двигателей (рис. 2.3, *а*), область U — отрезок.

Б. Управление при помощи двух фиксированных пар (рис. 2.3, *б*), область U — прямоугольник.

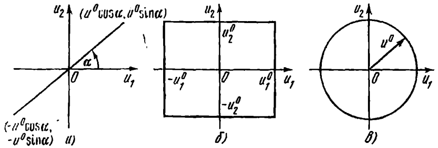


Рис. 2.3.

В. Управление при помощи пары поворотных (верньерных) двигателей (рис. 2.3, *в*), область U — круг.

А. В этом случае (см. рис. 2.3, *а*) введем скалярное управление u_0

$$u_1 = u_0 \cos\alpha, \quad u_2 = u_0 \sin\alpha,$$
$$|u_0| \leqslant u^0 = \mathrm{const}, \ \alpha = \mathrm{const}. \tag{2.4.5}$$

Так как правая часть системы (2.1.30) не зависит от фазовых переменных a, b, то отвечающие им сопряженные переменные равны p_a, $p_b = \mathrm{const}$. Оптимальное управление u_0 для системы (2.1.30) получим при помощи (2.3.4), (2.3.6), (2.4.5)

$$u_0^* = u^0 \operatorname{sign}\cos(\varphi - \alpha + \gamma),$$
$$\cos\gamma = p_a p^{-1}, \quad \sin\gamma = p_b p^{-1}, \quad p = \left(p_a^2 + p_b^2\right)^{1/2}. \tag{2.4.6}$$

Подставляя (2.4.5), (2.4.6) в систему (2.1.30) и усредняя по фазе φ, получим уравнения для усредненных фазовых переменных с постоянными правыми частями

$$\dot{a} = \varepsilon 2\pi^{-1} u^0 \cos\gamma, \quad a(0) = \omega_1^0, \quad a(T) = 0,$$
$$\dot{b} = \varepsilon 2\pi^{-1} u^0 \sin\gamma, \quad b(0) = \omega_2^0, \quad b(T) = 0. \tag{2.4.7}$$

Здесь и далее для усредненных переменных сохранены прежние обозначения.

Разрешая краевую задачу (2.4.7), получим единственное решение

$$\cos\gamma = -\omega_1^0/\omega_\perp^0, \quad \sin\gamma = -\omega_2^0/\omega_\perp^0,$$
$$\omega_\perp = \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)^{1/2}, \quad \Theta = \varepsilon T = \frac{\pi}{2}\frac{\omega_\perp^0}{u^0}. \tag{2.4.8}$$

Условие трансверсальности (2.3.18) для решения (2.4.8), как и в примерах (2.3.41) из п. 5 § 3 и (2.4.3) из п. 1 § 4, удовлетворяется за счет выбора параметра $\varkappa$. Само же решение (2.4.8) единственно и от этого параметра не зависит.

Подставим формулы (2.4.8) и (2.4.6) в (2.4.5), положим в них $\varphi = 0$, а затем заменим начальные значения ω_1^0, ω_2^0 на текущие. Получим управление в форме синтеза

$$u_1^* = -u^0 \cos\alpha \,\mathrm{sign}\,(\omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha),$$
$$u_2^* = -u^0 \sin\alpha \,\mathrm{sign}\,(\omega_1 \cos\alpha + \omega_2 \sin\alpha). \tag{2.4.9}$$

Отметим, что уравнения фазовой траектории (2.4.7) и время быстродействия Θ из (2.4.8) в первом приближении от параметра α не зависят, что объясняется эффектом усреднения по осевому вращению тела.

Б. Аналогичное решение получается в случае, когда система управления создает моменты сил вдоль каждой из связанных осей (см. рис. 2.3, *б*)

$$|u_1| \leqslant u_1^0, \quad |u_2| \leqslant u_2^0, \quad u_1^0, u_2^0 = \mathrm{const} > 0.$$

При помощи изложенного выше подхода определяем

$$u_1^* = u_1^0 \,\mathrm{sign}\cos(\varphi + \gamma), \quad u_1^* = u_2^0 \,\mathrm{sign}\sin(\varphi + \gamma),$$
$$\cos\gamma = p_a p^{-1}, \quad \sin\gamma = p_b p^{-1}, \quad p_{a,b} = \mathrm{const}. \tag{2.4.10}$$

После усреднения краевая задача принципа максимума принимает вид, тождественный (2.4.7), с заменой

$$u^0 = u_1^0 + u_2^0. \tag{2.4.11}$$

Выражения для γ и Θ совпадают с (2.4.8), где также нужно сделать замену (2.4.11). Из формул (2.4.10) аналогично (2.4.9) получим синтез оптимального управления в виде

$$u_1^* = -u_1^0 \operatorname{sign} \omega_1, \quad u_2^* = -u_2^0 \operatorname{sign} \omega_2.$$

В. В случае поворотного двигателя область U задана неравенством

$$u_1^2 + u_2^2 \leqslant u^{02}, \quad u^0 = \mathrm{const} > 0.$$

Применяя развитую выше методику, совершенно аналогично находим

$$u_1^* = -u^0 \omega_1 \omega_\perp^{-1}, \quad u_2^* = -u^0 \omega_2 \omega_\perp^{-1},$$

$$\Theta = \varepsilon T = \omega_\perp^0 / u^0, \quad \omega_\perp = \omega_\perp^0 - u^0 \tau = \omega_\perp^0 \left(1 - \tau \Theta^{-1}\right), \tag{2.4.12}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_1^0}{\omega_\perp^0} \omega_\perp \sin \varphi, \quad \omega_2 = \frac{\omega_2^0}{\omega_\perp^0} \omega_\perp \cos \varphi, \quad \varphi = \int_0^t \nu(\varepsilon t')\, dt'.$$

Здесь $\nu(\tau)$ определено в (2.1.27). Отметим, что полученное оптимальное решение (2.4.12) является точным, т. е. оно справедливо для случая, когда параметр ε в (2.1.24) не мал. Без затруднений он переносится также на случай переменного ограничения $u^0 = u^0(t)$. При этом управления и фазовая траектория остаются прежними (2.4.12). Время оптимального быстродействия T определяется из условия обращения функции $\omega_\perp(t)$ в нуль, т. е. из уравнения

$$\omega_\perp(T) = 0, \quad \omega_\perp(t) = \omega_\perp^0 - \int_0^t u^0(t')\, dt'. \tag{2.4.13}$$

Предполагается, что уравнение (2.4.13) имеет положительное решение.

3. Управление движением плоского осциллятора. Исследуем при помощи развитой выше методики задачу оптимального управления квазилинейной колебательной системой с двумя степенями свободы. Рассмотрим движение плоского осциллятора массы m под действием малых векторов управляющего (w) и возмущающего (f') воздействий. В полярных координатах (r, φ), где r — расстояние до центра притяжения ($r > 0$), φ — полярный угол, уравнения движения примут вид [126, 136]

$$\begin{gathered}\dot r = v_r,\qquad \dot v_r = v_\varphi^2 r^{-1} - crm^{-1} + w_r m^{-1} + f_r' m^{-1},\\ \dot \varphi = v_\varphi r^{-1},\quad \dot v_\varphi = -v_r v_\varphi r^{-1} + w_\varphi m^{-1} + f_\varphi' m^{-1},\\ r(0) = r^0,\quad v_r(0) = v_r^0,\quad \varphi(0) = \varphi^0,\quad v_\varphi(0) = v_\varphi^0.\end{gathered}\tag{2.4.14}$$

Здесь v_r, v_φ — радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости; w_r, w_φ — составляющие вектора управлений; f_r', f_φ' — то же для вектора возмущающих воздействий; $c>0$ — коэффициент возвращающей силы; r^0, v_r^0, φ^0, v_φ^0 — начальные данные. Пусть $l>0$ — некоторая характерная для системы (2.4.14) величина, имеющая размерность длины, например, r^0. Введем новые безразмерные переменные по формулам

$$\begin{gathered}t = \nu^{-1} t_* \quad (\nu = c^{1/2} m^{-1/2}),\\ r = r_* l,\quad v_r = v_{r*}\nu l,\quad v_\varphi = v_{\varphi *}\nu l.\end{gathered}\tag{2.4.15}$$

После замены (2.4.15) система (2.4.14) будет иметь прежний вид, но перед величинами w и f' будет стоять множитель $(\nu^2 lm)^{-1} = (cl)^{-1}$. Предположим, что имеют место равенства

$$w_{r,\varphi} = \varepsilon cl u_{r,\varphi},\quad f_{r,\varphi}' = \varepsilon cl f_{r,\varphi},\tag{2.4.16}$$

где u, f — безразмерные управляющие и возмущающие функции порядка единицы, ε — малый параметр.

Отметим, что к системе (2.4.14) приводятся уравнения малых пространственных колебаний маятника постоянной длины (сферический маятник) с управляемым положением подвеса.

Опуская звездочку в обозначениях (2.4.15) и используя равенства (2.4.16), перепишем возмущенные уравнения движения плоского осциллятора (2.4.14) в виде

$$\begin{gathered}\dot r = v_r,\qquad \dot v_r = v_\varphi^2 r^{-1} - r + \varepsilon u_r + \varepsilon f_r,\\ \dot\varphi = v_\varphi r^{-1},\quad \dot v_\varphi = -v_r v_\varphi r^{-1} + \varepsilon u_\varphi + \varepsilon f_\varphi.\end{gathered}\tag{2.4.17}$$

Начальные значения переменных в (2.4.17) берутся из (2.4.14) и по порядку величин равны единице. Возмущающие функции f_r, f_φ могут зависеть от r, v_r, v_φ и 2π-периодичны по угловой переменной φ.

Система (2.4.17) имеет вид (2.1.1). Приведем ее к стандартному виду управляемой системы с вращающейся фазой (2.1.6). Для этого воспользуемся известным общим решением невозмущенной системы, взяв следующий набор интегралов движения

$$\begin{gathered} {}^1/_2\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)+{}^1/_2 r^2=E, \quad r v_\varphi=N, \\ r^2=E z, \quad \varphi=\delta+\operatorname{arctg}\left[(\operatorname{tg} \psi+\omega)\left(1-\omega^2\right)^{-1/2}\right]. \end{gathered} \tag{2.4.18}$$

Здесь E — интеграл полной энергии колебаний, N — кинетический момент, δ — угловая постоянная, ψ — фаза колебаний. Величины z, ω и ψ в (2.4.18) равны

$$\begin{gathered} z=1+\omega \sin 2\psi, \quad \omega=\left(1-N^2 E^{-2}\right)^{1/2}, \\ \psi=t+\psi_0 \quad \left(\psi_0=\mathrm{const}\right). \end{gathered} \tag{2.4.19}$$

Из (2.4.18), (2.4.19) следует, что

$$E(1-\omega) \leqslant r^2 \leqslant E(1+\omega).$$

Величины E, N (или ω), δ, ψ_0 есть постоянные интегрирования. В справедливости интегралов (2.4.18), (2.4.19) можно убедиться дифференцированием в силу невозмущенной системы (2.4.17) при $\varepsilon=0$.

Формулы (2.4.18), (2.4.19) дают явные выражения для функций $r=r(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$. Дифференцированием по t получаем радиальную и трансверсальную составляющие вектора скорости

$$\dot{r}=v_r(t)=\omega E^{1/2} z^{-1/2} \cos 2\psi,$$
$$v_\varphi=N r^{-1}=N(E z)^{-1/2}.$$

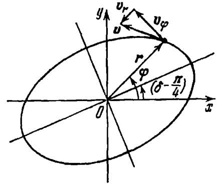


Рис. 2.4.

Траектории невозмущенной системы представляют собой эллипсы (рис. 2.4), наибольшая ось которых составляет угол $\delta-\pi/4$ с Ox.

Выберем теперь в качестве новых переменных величины E, N, δ, ψ. При помощи методики п. 1 § 1 данной главы получим управляемую систему с вращающейся фазой типа (2.1.6)

$$\blacksquare \quad \dot{E} = \varepsilon v_r (u_r + f_r) + \varepsilon v_\varphi (u_\varphi + f_\varphi), \quad \dot{N} = \varepsilon r (u_\varphi + f_\varphi),$$

$$\dot{\delta} = -\frac{(1-\omega^2)^{1/2}}{\omega z} \cos\psi (\cos\psi + \omega \sin\psi) \left(\frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{N}}{N} \right),$$

$$\dot{\psi} = 1 - \varepsilon \frac{\omega + \sin 2\psi}{2\omega (Ez)^{1/2}} (u_r + f_r) - \varepsilon \frac{N \cos 2\psi}{2\omega (E^3 z)^{1/2}} (u_\varphi + f_\varphi),$$

$$E(0) = E^0, \quad N(0) = N^0, \quad \delta(0) = \delta^0, \quad \psi(0) = \psi^0. \ \square \quad (2.4.20)$$

Начальные условия (2.4.20) находятся при помощи соотношений (2.4.18), (2.4.19) и условий (2.4.14)

$$E^0 = \tfrac{1}{2}\left(v_r^{02} + v_\varphi^{02}\right) + \tfrac{1}{2} r^{02}, \quad N^0 = r^0 v_\varphi^0,$$

$$\delta^0 = \varphi^0 - \operatorname{arctg}\left[(\operatorname{tg}\psi^0 + \omega^0)(1 - \omega^{02})^{-1/2}\right], \quad (2.4.21)$$

$$\sin 2\psi^0 = (r^{02} - E^0)/\omega^0.$$

Величины ψ^0 и δ^0 из (2.4.21) определяются с точностью до π. Правая часть системы (2.4.20) периодична по ψ с периодом π. Вместо какой-либо из переменных E или N можно взять медленную переменную ω, которая изменяется согласно уравнению

$$\dot{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{N}{E} \right)^2 \left(\frac{\dot{E}}{E} - \frac{\dot{N}}{N} \right), \quad \omega(0) = \omega^0 = \left(1 - \frac{N^{02}}{E^{02}} \right)^{1/2}.$$

Ниже предполагается, что медленная переменная ω изменяется в пределах $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$, где $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < 1$, т. е. траектория точки есть невырожденный эллипс.

Рассмотрим задачу оптимального управления типа (2.2.1), (2.2.2) с закрепленным временем $T = \Theta\varepsilon^{-1}$. А именно, зададим единственное граничное условие и функционал в виде

$$E(T) = E_*, \quad J = \int_0^\Theta \left(u_r^2 + u_\varphi^2 \right) d\tau \to \min_{(u_r, u_\varphi)}. \quad (2.4.22)$$

Здесь $E_* \geqslant 0$ — заданное значение энергии колебаний, $\tau = \varepsilon t$.

Заметим, что функционал (2.4.22) часто имеет смысл энергии, расходуемой на управление. Далее для определенности будем рассматривать систему (2.4.20) для возмущающих функций (f_r, f_φ) вида $f_r = \sigma r^3$, $f_\varphi \equiv 0$, $\sigma = \mathrm{const}$, характеризующих кубическую нелинейность возвращающей силы.

Из условия максимума функции Гамильтона находим (см. (2.2.3), (2.2.4))

$$\begin{aligned} u_r^* &= \tfrac{1}{2}(p_E v_r + p_\delta f_{\delta r} + p_\psi f_{\psi r}), \\ u_\varphi^* &= \tfrac{1}{2}(p_E v_\varphi + p_N r + p_\delta f_{\delta\varphi} + p_\psi f_{\psi\varphi}). \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Здесь p_E, p_N, p_δ, p_ψ — соответствующие сопряженные переменные, а $f_{\delta r}$, $f_{\delta\varphi}$, $f_{\psi r}$, $f_{\psi\varphi}$ — коэффициенты при u_r и u_φ в уравнениях (2.4.20) для δ, ψ.

Укажем априорные свойства краевой задачи принципа максимума. Отметим, что правые части системы (2.4.20) не зависят от δ. Поэтому и функция Гамильтона задачи (2.4.20) — (2.4.22) не зависит от δ, а вследствие нулевого граничного условия имеем $p_\delta \equiv 0$. Так как ψ не входит в соотношения (2.4.22), то из условия (2.2.27) вытекает, что в рассматриваемом первом приближении $p_\psi \equiv 0$. Тогда, усредняя по ψ согласно (2.2.17), получим выражение для гамильтониана первого приближения

$$k_0 = {}^1/_4 \xi \left(\eta_E^2 + \eta_N^2\right) + {}^1/_2 \mu \eta_E \eta_N.$$

Здесь использованы соотношения (2.4.20), (2.4.23), а также равенства

$$\begin{gathered} \langle v_r^2 \rangle = \xi\left(1 - \mu\xi^{-1}\right), \quad \langle r^2 \rangle = \xi, \quad \langle v_\varphi^2 \rangle = \mu, \\ \langle v_\varphi r \rangle = \mu, \quad \langle v_r r^3 \rangle = 0, \quad p_\psi = p_\delta = 0, \end{gathered}$$

в которых ξ, μ — усредненные значения E, N, а η_E, η_N — соответствующие усредненные сопряженные переменные. Так как

$$\frac{d\eta_N}{d\tau} = -\frac{\partial k_0}{\partial \mu} = -\frac{1}{2}\eta_E \eta_N, \quad \eta_N(\Theta) = 0,$$

то $\eta_N \equiv 0$. После этого усреднения краевая задача с гамильтонианом k_0 интегрируется в элементарных функциях

$$\begin{gathered} \xi(\tau) = \left[\sqrt{E^0} - \tau\Theta^{-1}\left(\sqrt{E^0} - \sqrt{E_*}\right)\right]^2, \\ \mu(\tau) = N^0 \frac{E_*}{E^0}\left[1 + \frac{\Theta - \tau}{\Theta}\left(\sqrt{\frac{E^0}{E_*}} - 1\right)\right]^2, \quad \eta_N \equiv 0, \\ \eta_E(\tau) = \frac{4}{\Theta}\left(\sqrt{\frac{E^0}{E_*}} - 1\right)\left[1 + \frac{\Theta - \tau}{\Theta}\left(\sqrt{\frac{E^0}{E_*}} - 1\right)\right]^{-1}. \end{gathered} \tag{2.4.24}$$

Если подставить найденные функции (2.4.24) в усредненные уравнения (2.4.20), то переменные δ, ψ в первом приближении определяются квадратурами. При помощи формул (2.4.23), (2.4.24), (2.4.18), (2.4.19) находим выражения для оптимальных управлений в первом приближении

$$\begin{aligned} u_r^* &= {}^1/_2\eta_E v_r = {}^1/_2\eta_E\omega\xi^{1/2}\cos 2\psi\,(1+\omega\sin 2\psi)^{-1/2}, \\ u_\varphi^* &= {}^1/_2\eta_E v_\varphi = {}^1/_2\eta_E\mu\xi^{-1/2}(1+\omega\sin 2\psi)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

Отметим, что управление (2.4.25) коллинеарно вектору скорости, т. е. направлено по касательной к траектории. Чтобы соотношения (2.4.25) определяли программное управление в виде $u_r^*(t)$, $u_\varphi^*(t)$, в них нужно подставить $\eta_E(\tau)$ из (2.4.24), а также определить фазу $\psi(t)$ в первом приближении согласно (2.2.25), (2.2.26). В результате вычислений получим

$$\psi = t - \frac{3\varepsilon\sigma}{4}\int_0^t \xi^2(\varepsilon t')\,dt' + \psi^0. \tag{2.4.26}$$

Отметим, что коэффициент σ, характеризующий нелинейность возвращающей силы, не вошел в решение (2.4.24), но фигурирует в формуле (2.4.26) для фазы ψ. Этот результат аналогичен результату, полученному в п. 5 § 2 главы 2 для одномерного осциллятора с нелинейным кубическим возмущением. Коэффициенты соответствующих формул (2.2.65) и (2.4.26) отличаются в два раза, что обусловлено числом степеней свободы систем.

Аналогично изложенному на основе усредненного гамильтониана h_0 могут быть исследованы в первом приближении и другие задачи оптимального управления элементами орбиты (2.4.18), (2.4.19) с функционалом (2.4.22). Заметим, что в некоторых случаях удается свести решение задачи оптимального управления с дополнительными ограничениями на управляющие функции к конечным уравнениям относительно неизвестных параметров усредненной краевой задачи. Ряд результатов, связанных с построением оптимального управления одночастотными колебательными системами с несколькими степенями свободы, получен в работе [12].

ГЛАВА 3

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В главе 3 развивается асимптотическая методика решения задач оптимального управления существенно нелинейными колебаниями и вращениями в случае малых управляющих воздействий. Однако вследствие существенной нелинейности, т. е. зависимости частоты от медленного вектора, система уравнений соответствующей краевой задачи не имеет стандартного вида. При некоторых дополнительных предположениях эту трудность удается преодолеть, привести уравнения к стандартной форме и развить алгоритм приближенного построения оптимального управления. В §§ 1, 2 рассмотрены задачи с закрепленным временем, в § 3 — задачи типа оптимального быстродействия. Развитые приемы позволяют, в частности, решить ряд задач оптимального управления колебаниями и вращениями маятниковых систем (§ 4). В § 5 проводится исследование некоторых задач оптимального управления элементами плоской орбиты при помощи двигателей малой тяги. Основы излагаемой в данной главе методики были даны в работе [24] и затем развиты в статьях [13, 15, 230].

§ 1. Метод усреднения для управляемых нелинейных систем с вращающейся фазой

1. Приведение уравнений управляемых нелинейных колебаний к стандартному виду. Рассмотрим управляемую систему довольно общего вида, содержащую медленную x и быструю y векторные переменные, аналогичную (2.1.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, u), & x(t_0) &= x^0, \\ \dot{y} &= Y_0(x, y) + \varepsilon Y(x, y, u), & y(t_0) &= y^0. \end{aligned} \qquad (3.1.1)$$

Здесь все введенные величины имеют тот же смысл, что и соответствующие им в системе (2.1.1). В отличие от § 1 главы 2 медленное время τ включено в состав вектора x. Предположим, что система (3.1.1) при $\varepsilon=0$ имеет общее решение в виде одночастотных вращательно-колебательных движений (2.1.3). Однако в отличие от (2.1.3) будем предполагать, что фаза ψ представляется в виде $\psi=\omega(c,\ x)(t-t_0)+\psi_0$, где частота ω, в отличие от $\nu(\tau)$ из главы 2, зависит от медленных фазовых переменных. Преобразованиями, аналогичными (2.1.3)—(2.1.5), система (3.1.1) приводится к стандартному виду управляемых систем с вращающейся фазой (2.1.6) с частотой $\omega(a)$. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f(a,\ \psi,\ u), & a(t_0) &= a^0,\\ \dot{\psi} &= \omega(a)+\varepsilon F(a,\ \psi,\ u), & \psi(t_0) &= \psi^0. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Здесь ε — малый параметр, u — m-мерный вектор управляющих функций, a — медленный n-вектор фазовых переменных, ψ — скалярная фаза, ω — частота, удовлетворяющая условию $\omega(a)\geqslant\omega_0>0$, где ω_0 — постоянная, f, ω, F — достаточно гладкие функции своих аргументов, 2π-периодические по ψ. На управляющие функции наложено ограничение $u(t)\in U$, где U — фиксированное замкнутое множество. Систему (3.1.2) рассматриваем на интервале времени $t\in[t_0,\ T]$, где $T=\Theta\varepsilon^{-1}$, $\Theta=\mathrm{const}>0$. Заметим, что функции f, F в (3.1.2) могут быть гладкими функциями параметра ε. Излагаемая ниже методика полностью применима и в этом случае, но в целях сокращения записи зависимость f, F от ε не указывается.

Рассмотрим ряд примеров управляемых механических систем вида (3.1.1), приводящихся к одночастотной системе стандартного вида (3.1.2).

А. Вращательно-колебательная система. Рассмотрим слабо управляемую систему с одной степенью свободы и медленно изменяющимися параметрами

$$\begin{gathered} \ddot{y}+Q(x,\ y,\ \dot{y})=\varepsilon q(x,\ y,\ \dot{y},\ u), \quad y(t_0)=y^0, \quad \dot{y}(t_0)=\dot{y}^0,\\ \dot{x}=\varepsilon X(x,\ y,\ \dot{y},\ u), \quad x(t_0)=x^0, \quad u\in U. \end{gathered} \tag{3.1.3}$$

Здесь y и $\dot{y}=dy/dt$ — одномерные координата и скорость, x — управляемый вектор медленно изменяющихся параметров системы, u — вектор управляющих функций. Предположим, что при $\varepsilon = 0$, $x = \mathrm{const}$ невозмущенное уравнение для y допускает двухпараметрическое семейство решений, описывающих вращения

$$y_0 = \psi + \varphi(a, \psi, x), \quad \dot{y}_0 = \omega(a, x)(1 + \partial\varphi/\partial\psi), \quad \psi = \omega(a, x)(t - t_0) + \psi_0 \tag{3.1.4}$$

или колебания

$$y_0 = \varphi(a, \psi, x), \quad \dot{y}_0 = \omega(a, x)\partial\varphi/\partial\psi, \quad \psi = \omega(a, x)(t - t_0) + \psi_0. \tag{3.1.5}$$

Здесь ψ — вращающаяся фаза, $\omega(a, x) \geqslant \omega_0 > 0$ — частота вращений или колебаний, φ — 2π-периодическая функция ψ, a — амплитуда или энергия колебаний. В случае вращений функции Q, q и X в (3.1.3) должны быть 2π-периодичны относительно y. Решения (3.1.4), (3.1.5) содержат две произвольные постоянные a и ψ_0.

Преобразуем систему (3.1.3) к виду (3.1.2). Будем считать равенства $y = y_0$ и $\dot{y} = \dot{y}_0$, где y_0 и $\dot{y}_0$ как функции a, ψ, x определены в (3.1.4), (3.1.5), формулами замены переменных y, $\dot{y}$, x на a, ψ, x. Дифференцируя эти равенства по t в силу возмущенной системы (3.1.3), получим уравнения

$$\frac{\partial y_0}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial y_0}{\partial \psi}\dot{\psi} + \left(\frac{\partial y_0}{\partial x}, \dot{x}\right) = \dot{y}(a, \psi, x),$$

$$\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial \psi}\dot{\psi} + \left(\frac{\partial \dot{y}_0}{\partial x}, \dot{x}\right) + Q(x, y_0, \dot{y}_0) = \varepsilon q(x, y_0, \dot{y}_0, u),$$

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y_0, \dot{y}_0, u).$$

Через $\partial/\partial x$ обозначен оператор градиента по переменным x. Разрешим первые два уравнения полученной системы относительно $\dot{a}$ и $\dot{\psi}$, воспользовавшись тождествами

$$\dot{y}_0 = \omega\frac{\partial y_0}{\partial \psi}, \quad \omega^2\frac{\partial^2 y_0}{\partial \psi^2} + Q\left(x, y_0, \omega\frac{\partial y_0}{\partial \psi}\right) = 0,$$

выражающими тот факт, что (3.1.4), (3.1.5) — решения системы (3.1.3) при $\varepsilon = 0$. В результате получим управляемую систему с вращающейся фазой вида (3.1.2)

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{W}\left[\frac{q}{\omega}\frac{\partial y_0}{\partial\psi} + \left(\left(\frac{\partial^2 y_0}{\partial\psi^2}\frac{\partial y_0}{\partial x} - \frac{\partial y_0}{\partial\psi}\frac{\partial^2 y_0}{\partial\psi\partial x}\right),\ X\right)\right],$$

$$\dot{\psi} = \omega(a, x) + \frac{\varepsilon}{W}\left[\frac{q}{\omega}\frac{\partial y_0}{\partial a} - \left(\left(\frac{\partial y_0}{\partial a}\frac{\partial^2 y_0}{\partial\psi\partial x} - \frac{\partial^2 y_0}{\partial\psi\partial a}\frac{\partial y_0}{\partial x}\right),\ X\right)\right], \tag{3.1.6}$$

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y_0, \dot{y}_0, u), \quad a(t_0) = a^0, \quad \psi(t_0) = \psi^0, \quad x(t_0) = x^0.$$

Здесь 2π-периодическая по ψ функция $W = W(a, \psi, x)$ есть якобиан преобразования, равный

$$W(a, \psi, x) = \frac{\partial y_0}{\partial a}\frac{\partial^2 y_0}{\partial\psi^2} - \frac{\partial y_0}{\partial\psi}\frac{\partial^2 y_0}{\partial\psi\partial a}, \quad W \neq 0.$$

Функции q и X в (3.1.6) есть функции следующих аргументов

$$q = q(x,\ y_0,\ \omega\partial y_0/\partial\psi,\ u),$$
$$X = X(x,\ y_0,\ \omega\partial y_0/\partial\psi,\ u).$$

Начальные условия для переменных a и ψ в (3.1.6) определяются через начальные данные (3.1.3) при помощи соотношений

$$y^0 = y_0(a^0, \psi^0, x^0), \quad \dot{y}^0 = \omega(a^0, x^0)(\partial/\partial\psi)y_0(a^0, \psi^0, x^0).$$

Таким образом, стандартная управляемая система с вращающейся фазой вида (3.1.2) полностью построена.

Отметим, что к системе вида (3.1.3) приводит исследование ряда механических систем, невозмущенная функция Лагранжа L для которых равна

$$L = {}^1/_2 m(x, y)\dot{y}^2 - \Pi(x, y).$$

Здесь $m \geqslant m_0 > 0$ — инерционная характеристика системы, y — обобщенная координата, $\dot{y}$ — обобщенная скорость, x — векторный параметр; первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию, Π — потенциальная энергия. В этом случае функция Q из (3.1.3) имеет вид

$$Q(x, y, \dot{y}) = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial m}{\partial y}\dot{y}^2 + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\right).$$

Б. Система, близкая к консервативной. Рассмотрим теперь колебательную систему, близкую к консервативной

$$\ddot{y} + Q(x, y) = \varepsilon q(x, y, \dot{y}, u), \quad \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \dot{y}, u). \quad (3.1.7)$$

В этом случае стандартную систему (3.1.6) можно получить на основе известных интегралов невозмущенной системы [64]

$$\blacksquare \quad \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \Pi(x, y) = a, \quad \dot{y} = \pm\sqrt{2}\,[a - \Pi(x, y)]^{1/2},$$

$$\psi = \omega(a, x)\int\frac{dy}{\dot{y}(a, y, x)} \equiv \Psi(x, a, y),$$

$$\Pi(x, y) = \int Q(x, y)\,dy,$$

$$\omega(a, x) = \frac{2\pi}{T_0(a, x)}, \quad T_0(a, x) = \int\frac{dy}{\dot{y}(a, y, x)}. \quad \square \qquad (3.1.8)$$

Здесь интеграл для периода $T_0(a, x)$ в случае колебательных движений берется по замкнутой траектории в плоскости y, $\dot{y}$, а для вращательных движений — по произвольному отрезку траектории, для которого приращение координаты y составляет 2π. Потенциал $\Pi(x, y)$ в (3.1.8) в случае вращений должна быть 2π-периодической функцией y, для чего необходимо, чтобы среднее по y за период 2π от функции $Q(x, y)$ было равно нулю.

Для a, x и ψ находим уравнения

$$\begin{gathered}\dot{a} = \varepsilon[q\dot{y} + (\partial\Pi/\partial x, X)], \quad \dot{x} = \varepsilon X,\\ \dot{\psi} = \omega(a, x) + \\ + \varepsilon\{q\dot{y}\,\partial\Psi/\partial a + ([\partial\Psi/\partial x + \dot{y}(\partial\Psi/\partial a)\partial\Pi/\partial x], X)\}.\end{gathered} \qquad (3.1.9)$$

В этих уравнениях правые части определены явно через медленные переменные a, x и быструю переменную y при помощи соотношений (3.1.8). Чтобы получить правые части системы (3.1.9) в виде функций от a, x, ψ, нужно выразить y, $\dot{y}$ через эти переменные при помощи формул замены (3.1.8). При этом правые части системы (3.1.9) будут 2π-периодическими функциями ψ.

В. Система типа маятника. В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 2.1 и представляющую собой маятник переменной длины. Точка подвеса маятника перемещается по наклонной прямой, лежащей в вертикальной плоскости и составляющей постоянный угол δ с горизонтом. Уравнение движения системы имеет вид (2.1.20). Предположим, что безразмерное ускорение точки подвеса W и скорость изменения безразмерной длины σ маятника в (2.1.20) являются малыми

$$W = \varepsilon u, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{dt_*} = \varepsilon v. \tag{3.1.10}$$

Здесь ε — малый параметр, u и v — управляющие функции порядка единицы, t_* — безразмерное время (аргумент) в уравнении (2.1.20). Объединяя соотношения (3.1.10) и (2.1.20), придем к системе типа (3.1.7), где

$$x = \sigma, \quad y = \varphi, \quad Q = \sigma^{-1} \sin \varphi,$$
$$q = -\sigma^{-1} u \cos(\varphi - \delta) - 2\sigma^{-1} v \varphi'.$$

Невозмущенные колебательные и вращательные движения полученной системы при $\varepsilon = 0$ выражаются известным образом через эллиптические функции.

Пусть угол φ в системе (2.1.20), (3.1.10) мал, так что возможна линеаризация по углу φ, $\sin\varphi \approx \varphi$. В случае, когда безразмерная длина σ — заданная функция медленного времени $\tau = \varepsilon t_*$, имеем квазилинейную управляемую систему, рассмотренную в п. 1 § 4 главы 2. Если же σ — фазовая переменная, подчиняющаяся уравнению (3.1.10), где v — управление, то даже при малых φ система (2.1.20), (3.1.10) остается существенно нелинейной системой (3.1.7), в которой $Q = \sigma^{-1}\varphi$. В этом случае частота ω будет зависеть от фазовой переменной σ.

Отметим вообще, что если параметры линейной колебательной системы (осциллятора) управляемы, то соответствующая система оказывается существенно нелинейной. Примером может служить маятник (плоский или сферический) с управляемой длиной подвеса, который даже в случае малых колебаний приводит, как следует из рассмотренного выше примера, к существенно нелинейной системе.

Г. Быстрые вращения. Рассмотрим вращательную систему вида (3.1.7)

$$\ddot{y} + Q(x, y) = q(x, y, \dot{y}, u), \quad \dot{x} = X(x, y, \dot{y}, u) \quad (3.1.11)$$

в предположении, что начальная угловая скорость вращений $\dot{y}^0$ велика. Так как потенциальная энергия П (см. (3.1.8)) является для вращательной системы ограниченной периодической функцией y, то кинетическая энергия невозмущенной системы (3.1.11) значительно превосходит потенциальную. Движение в этом случае близко к равномерному вращению [148, 7, 8]. Укажем, при каких условиях имеет место соответствующая асимптотика. Вводя новый аргумент $\theta = \dot{y}^0 t$, получим из (3.1.11)

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -\frac{Q(x, y)}{(\dot{y}^0)^2} + \frac{1}{(\dot{y}^0)^2}\, q\left(x, y, \dot{y}^0 \frac{dy}{d\theta}, u\right),$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\dot{y}^0}\, X\left(x, y, \dot{y}^0 \frac{dy}{d\theta}, u\right).$$

Здесь $dy/d\theta$ — величина порядка единицы, а $\dot{y}^0$ — большая величина; примем, что $\dot{y}^0 \sim \varepsilon^{-1}$, член $Q(\dot{y}^0)^{-2}$ имеет тогда порядок ε^{-2}, а порядок по ε членов $q(\dot{y}^0)^{-2}$, $X(\dot{y}^0)^{-1}$ в полученной системе определяется зависимостью функций q, X от $\dot{y}$ и может быть различным. Например, если в (3.1.11) функции $q\dot{y}^{-1}$ и X ограничены при $\dot{y} \to \infty$, то главные по ε члены в полученной системе будут порядка ε, и система примет вид системы (3.1.3) или (3.1.7) при $Q \equiv 0$. В обозначениях (3.1.3), (3.1.7) она запишется в форме

$$y = \varepsilon q(x, y, \dot{y}, u), \quad \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \dot{y}, u). \quad (3.1.12)$$

Полученные уравнения (3.1.12) приводятся сразу к стандартной форме (3.1.2), если положить $y = \psi$, $\dot{y} = a$.

Д. Нелинейный осциллятор с медленно изменяющимися параметрами. Рассмотрим нелинейную колебательную систему с одной степенью свободы, положение равновесия которой $y = s$ может медленно изменяться в соответствии с некоторым законом управления. Уравнения движения возьмем в виде

$$m\ddot{y}+F(y-s)=0, \quad \dot{s}=\varepsilon u. \tag{3.1.13}$$

Здесь y — абсолютное положение массы m вдоль оси y, s — регулируемое по скорости перемещения положение точки равновесия, $-F(y-s)$ — нелинейная возвращающая сила, действующая на массу m при возникновении относительного рассогласования $y-s$, причем $F(0)=0$. Система (3.1.13) является частным случаем системы (3.1.7) и приводима к стандартной форме (3.1.9). Ряд задач оптимального управления для системы (3.1.13) решен в главе 4.

Е. Управляемые движения в ньютоновском силовом поле. Важным примером существенно нелинейного колебательного движения, приводящего к исследованию системы стандартного вида (3.1.2), является управляемое движение точки в центральном гравитационном поле под действием малой тяги [73, 88, 130, 159]. Управляемое движение с малой тягой может быть исследовано при помощи методики данной главы как в плоском, так и в пространственном случаях. Решение некоторых задач оптимального управления элементами плоской орбиты в центральном поле при наличии малой тяги содержится в § 5 главы 3.

Ж. Управление вращениями твердого тела относительно центра масс. Ряд задач, представляющих значительный прикладной интерес, приводит к исследованию управляемых движений твердого тела относительно центра масс (проблемы стабилизации, ориентации и т. д.). Уравнения движения свободного тела под действием малых управляющих моментов приводятся к стандартному виду (3.1.2). Поэтому развиваемая далее в главе 3 методика усреднения дает возможность исследовать ряд важных задач управления движением твердого тела относительно центра масс. Некоторые задачи управления вращениями твердого тела, допускающие квазилинейную трактовку, были решены в § 5 главы 1 и в § 4 главы 2. Далее в главе 5 при помощи асимптотических методов будут исследованы существенно нелинейные задачи оптимального управления для динамически-симметричного и трехосного твердого тела.

2. Постановка задачи оптимального управления с закрепленным временем и принцип максимума. Переходим к постановке задачи оптимального управления системой (3.1.2) на фиксированном асимптотически большом промежутке времени $t: t \in [t_0, T]$, $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, $\Theta = \text{const} > 0$. Пусть требуется перевести медленный вектор a из начального состояния a^0 в конечное, определяемое соотношениями типа (2.2.1)

$$M(a(T)) = 0, \; M = (M_1, \ldots, M_l), \; 0 \leqslant l \leqslant n-1, \quad (3.1.14)$$

таким образом, чтобы достигал минимума функционал

$$J = g(a(T)) \to \min, \; u(t) \in U. \quad (3.1.15)$$

Функции M и g предполагаются достаточно гладкими и такими, что при всех значениях $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ решение задачи оптимального управления (3.1.2), (3.1.14), (3.1.15) существует и единственно, причем особые управления отсутствуют. К приведенной постановке при помощи обычного приема введения дополнительной медленной переменной сводится и задача с интегральным функционалом (2.2.2). Отметим, что в отличие от постановки (2.2.1), (2.2.2) функции M и g считаются не зависящими от ψ.

Для исследования поставленной задачи оптимального управления в предположении существования ее решения воспользуемся необходимыми условиями принципа максимума. Выпишем функцию Гамильтона

$$H = \varepsilon(p, f) + q(\omega + \varepsilon F). \quad (3.1.16)$$

Предположим, что из принципа максимума для управления $u^*(t)$

$$H(p(t), q(t), a(t), \psi(t), u^*(t), \varepsilon) = \\ = \max_{u \in U} H(p(t), q(t), a(t), \psi(t), u, \varepsilon) \quad (3.1.17)$$

оптимальное управление определяется однозначно в виде достаточно гладкой функции своих аргументов, 2π-периодической по ψ

$$u^* = u(a, \psi, p, q). \quad (3.1.18)$$

Переменные p и q, сопряженные a и ψ соответственно, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений и условиям трансверсальности на правом конце (при $t = T$)

$$\dot{p} = -q\frac{\partial \omega}{\partial a} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial a}[(p, f) + qF],$$

$$\dot{q} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \psi}[(p, f) + qF], \tag{3.1.19}$$

$$p(T) = \frac{\partial}{\partial a}[(\lambda, M) - g]_T, \quad q(T) = 0.$$

Здесь λ — l-вектор множителей Лагранжа.

Система уравнений и граничных условий (3.1.2), (3.1.14), (3.1.19), в которые подставлено $u = u^*$ из (3.1.18), образует двухточечную задачу принципа максимума. Среди ее решений находится искомое (по предположению, единственное) решение задачи оптимального управления. Если решение краевой задачи единственно, то оно и является оптимальным. Если же краевая задача имеет более одного решения, то должно быть выбрано оптимальное, дающее минимум функционалу (3.1.15). Как будет показано ниже, полученная двухточечная задача допускает, как правило, много решений, число которых имеет порядок ε^{-1} (см. § 3 главы 2).

Важно отметить, что система уравнений (3.1.2), (3.1.19), (3.1.18), в отличие от соответствующей квазилинейной системы (2.2.9) или (2.3.3), не имеет стандартного вида системы (3.1.2) с одной вращающейся фазой. Вектор p в (3.1.19) формально не является медленным: его производная не обращается тождественно в нуль при $\varepsilon = 0$, так как $\omega' \neq 0$. Указанные два обстоятельства — неединственность решения краевой задачи и отличие системы от стандартного вида — существенно усложняют исследование краевой задачи и построение асимптотического решения задачи оптимального управления.

Отметим, что применению методов усреднения в задачах оптимального управления был посвящен ряд работ, выполненных в 60 — 70-е годы. На возможность использования этих методов для приближенного построения управлений в колебательных системах обращалось внимание в книгах [148, 150]. Исследовались системы с медленно меняющимся управлением [148]. Рассматривались некоторые классы линейных управляемых систем с малым параметром [262]. В работе [130] методами усреднения исследовались оптимальные траектории с малой тягой. Ряд работ был посвящен управляемым системам в стандартной форме вида $\dot{x} = \varepsilon X(t, x, u)$, что соответствует системе (3.1.2) при $\omega \equiv 1$, $F \equiv 0$. Укажем здесь работы [1—3, 155, 156, 172—174], посвященные применению метода усреднения и его модификаций (частичное усреднение) к подобным системам. В работе [81] исследованы управляемые квазилинейные системы вида (3.1.2), в которых ω — постоянный вектор, а интервал времени фиксирован. Метод усреднения для существенно нелинейных управляемых систем с вращающейся фазой (3.1.2) был предложен в работе [24]. Методика исследования квазилинейных колебаний систем с медленно изменяющимися параметрами, развитая в работах [10—12], изложена выше в главе 2. В данной главе рассматриваются существенно нелинейные управляемые системы (3.1.2), асимптотическое исследование которых сопряжено с преодолением указанных выше особенностей.

3. Вывод стандартной системы с вращающейся фазой. Пользуясь граничным условием $q(T) = 0$ из (3.1.19), приведем систему дифференциальных уравнений (3.1.2), (3.1.19) при u^* из (3.1.18) к стандартному виду. Для этого заметим, что исходная система (3.1.2) автономна и поэтому гамильтонова система (3.1.2), (3.1.19) допускает первый интеграл [176]

$$H^* = \varepsilon(p, f^*) + q(\omega + \varepsilon F^*) = C = \text{const}. \qquad (3.1.20)$$

Здесь звездочка означает, что в соответствующие функции подставлено $u = u^*$ согласно (3.1.18). Величина H^* вдоль траекторий системы равна постоянной C. Предположим, что векторы $a(T)$ и $p(T)$, определяемые согласно (3.1.2), (3.1.14), (3.1.19), ограничены для всех $\varepsilon > 0$. Тогда из краевых условий (3.1.19) и из (3.1.20) следует, что $C = \varepsilon(p, f^*)_T$, т. е. $C = \varepsilon h$, где постоянная $h \sim 1$ равна

$$h = (p, f^*)_T, \quad f^* = f(a, \psi, p, q) \qquad (3.1.21)$$

и ограничена при $\varepsilon \to 0$. Из (3.1.20) следует, что

$$q = \varepsilon\omega^{-1}[h - (p, f^*) - qF^*], \quad \omega \geqslant \omega_0 > 0, \qquad (3.1.22)$$

т. е. формально $q \sim \varepsilon$. Соотношение (3.1.22), рассматриваемое как уравнение относительно q, при условии ограниченности частной производной правой части по q для

$q=\varepsilon=0$ можно однозначно разрешить в виде

$$q=\varepsilon\omega^{-1}[h-(p, f_0^*)]+\varepsilon^2 q_2(h, a, \psi, p, \varepsilon),\qquad f_0^*=f^*(a, \psi, p, 0). \tag{3.1.23}$$

Здесь q_2 — некоторая ограниченная 2π-периодическая по ψ функция. Уменьшим порядок решаемой системы (3.1.2), (3.1.19), подставив в нее выражение (3.1.23) для q, где h — параметр. Получим краевую задачу меньшей размерности, зависящую от неизвестного параметра h, вида

$$\blacksquare\quad \dot a=\varepsilon f_0^*(a, \psi, p)+\varepsilon^2 f_2(h, a, \psi, p, \varepsilon),$$
$$\dot p=-\varepsilon\frac{\omega'(a)}{\omega(a)}\left[h-\left(p, f_0^*(a, \psi, p)\right)\right]-$$
$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial a}\left(p, f_0^*(a, \psi, p)\right)+\varepsilon^2 P_2(h, a, \psi, p, \varepsilon),$$
$$\dot\psi=\omega(a)+\varepsilon F_1(h, a, \psi, p, \varepsilon),$$
$$a(t_0)=a^0,\quad \psi(t_0)=\psi^0,\ M(a(T))=0,$$
$$p(T)=\frac{\partial}{\partial a}\,[(\lambda,\ M)-g]_T. \qquad \square \tag{3.1.24}$$

Здесь f_2, P_2 и F_1 — ограниченные функции, 2π-периодические относительно ψ. Таким образом, получена система (3.1.24) в стандартной форме, решение которой строится при заданном значении h тем же способом, что и в главе 2 для случая квазилинейной системы. Начальные и краевые условия (3.1.24) следуют из (3.1.14), (3.1.19). Пусть решение краевой задачи (3.1.24) существует и единственно в некотором интервале $h\in[h_1, h_2]$

$$a=a(t, h, \varepsilon),\quad \psi=\psi(t, h, \varepsilon),\quad p=p(t, h, \varepsilon). \tag{3.1.25}$$

Параметр h находится из условия $q(T, h, \varepsilon)=0$, где функция q определяется согласно (3.1.23). Это условие, согласно (3.1.21), (3.1.25) имеет вид

$$h=\left(p(T, h, \varepsilon), f_0^*(a(T, h, \varepsilon), \psi(T, h, \varepsilon),\ p(T, h, \varepsilon))\right). \tag{3.1.26}$$

По предположению относительно существования решения задачи оптимального управления (3.1.2), (3.1.14), (3.1.15), уравнение (3.1.26) имеет хотя бы один вещественный корень. Если этот корень $h=h^*$, ограниченный при $\varepsilon \to 0$, найден, то после подстановки его в (3.1.25) полностью определяются функции a, ψ, p. Подстановка последних и $h=h^*$ в (3.1.23) позволяет также найти функцию q. В результате получается искомое решение краевой задачи (3.1.2), (3.1.14), (3.1.18), (3.1.19).

Из вида уравнения (3.1.26) следует, что параметр h определяется, вообще говоря, неоднозначно, так как правая часть уравнения (3.1.26) является быстро осциллирующей функцией h. Частота осцилляций есть величина порядка ε^{-1}, а амплитуда — порядка единицы. Покажем это. Сначала дифференцированием по h оценим величину производной $\partial\psi(T, h, \varepsilon)/\partial h$. Используя уравнения (3.1.24) и существенную нелинейность системы ($\omega'(a) \sim 1$), получим оценку в главном члене

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial h}\right|_{t=T} = \frac{\partial}{\partial h}\int\limits_0^T \dot{\psi}\,dt \sim \frac{\partial}{\partial h}\int\limits_0^T \omega(a)\,dt = \int\limits_{t_0}^T \left(\frac{\partial\omega}{\partial a}, \frac{\partial a}{\partial h}\right)dt \sim \frac{1}{\varepsilon}.$$

Здесь учтено очевидное равенство $\partial\psi(t_0, h, \varepsilon)/\partial h = \partial\psi^0/\partial h = 0$. Ниже будет приведено условие (3.1.36), гарантирующее указанную оценку. Из полученной оценки и 2π-периодичности функции f_0^* по ψ вытекают отмеченные выше свойства быстрой осцилляции правой части уравнения (3.1.26) по h. Типичная картина, возникающая при исследовании уравнения (3.1.26), представлена на рис. 3.1. Здесь приведены графики обеих частей уравнения (3.1.26), как функций h. Штриховой кривой представлена функция $(p, \langle f_0^* \rangle)_T$, где $\langle f_0^* \rangle$ — среднее от f_0^* по фазе ψ.

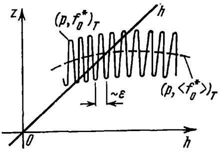


Рис. 3.1.

В дальнейшем предполагаем, что точка пересечения этой кривой с прямой $z=h$ существует и лежит внутри интервала $[h_1, h_2]$, в котором определено решение (3.1.25) краевой задачи (3.1.24) (см. рис. 3.1). Тогда уравнение (3.1.26) допускает, как правило, много корней $\{h_\nu\}$ —

число их порядка ε^{-1} при достаточно малом $\varepsilon > 0$, а расстояние между соседними корнями — порядка ε.

Таким образом, как установлено, краевая задача принципа максимума (3.1.2), (3.1.14), (3.1.18), (3.1.19) допускает много, порядка ε^{-1}, решений, отвечающих различным корням $\{h_\nu\}$. Оптимальное значение h^* выделяется из условия минимума функционала (3.1.15)

$$J^* = \min_{h \in \{h_\nu\}} J(h), \quad J(h) = g(a(T, h, \varepsilon)). \qquad (3.1.27)$$

Тогда решение задачи оптимального управления (3.1.2), (3.1.14), (3.1.15) определяется функциями (3.1.23), (3.1.25), управлением (3.1.18) и величиной J^* из (3.1.27).

Указанные трудности, связанные с решением краевой задачи и трансцендентного уравнения (3.1.26), а также с последующей оптимизацией по дискретному множеству $\{h_\nu\}$, преодолеваются ниже при выполнении некоторых дополнительных предположений. Ход рассуждений аналогичен § 3 главы 2, где рассматривалась задача типа оптимального быстродействия для квазилинейных систем.

4. Усредненная краевая задача первого приближения. Переходим к построению решения первого приближения краевой задачи (3.1.24) при фиксированном значении параметра h. Введем в рассмотрение усредненные переменные ξ, η и φ, которые удовлетворяют уравнениям и краевым условиям

$$\blacksquare \cdot \frac{d\xi}{d\tau} = \langle f_0^* \rangle (\xi, \eta), \quad \xi(\tau_0) = a^0, \quad M(\xi(\Theta)) = 0,$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -\frac{\omega'(\xi)}{\omega(\xi)}\left[h - (\eta, \langle f_0^* \rangle)\right] - \frac{\partial}{\partial \xi}(\eta, \langle f_0^* \rangle),$$

$$\eta(\Theta) = \frac{\partial}{\partial \xi}[(\lambda, M) - g]_\Theta, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon^{-1}\omega(\xi),$$

$$\varphi(\tau_0) = \psi^0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \tau_0 = \varepsilon t_0, \quad \Theta = \varepsilon T,$$

$$\langle f_0^* \rangle (\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0^*(\xi, \psi, \eta)\, d\psi. \quad \square \qquad (3.1.28)$$

Известно [46, 63], что в случае задачи Коши решение усредненной системы уравнений (3.1.28) близко к решению исходной системы (3.1.24) в следующем смысле. Пусть задана система уравнений (3.1.24) с параметром h

и начальными условиями $a(t_0) = a^0$, $p(t_0) = p^0$, $\psi(t_0) = \psi^0$. Тогда при условиях близости

$$|p^0 - \eta^0| \leqslant c\varepsilon, \quad |h - \chi| \leqslant c\varepsilon, \quad c = \text{const} > 0$$

и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для всех $t \in [t_0, T]$ справедливы неравенства

$$|a - \xi| \leqslant d\varepsilon, \quad |p - \eta| \leqslant d\varepsilon, \quad |\psi - \varphi| \leqslant d,$$
$$d = \text{const} > 0. \tag{3.1.29}$$

Здесь ξ, η, φ — решение усредненной системы (3.1.28) при $\xi(\tau_0) = a^0$, $\eta(\tau_0) = \eta^0$, $\varphi(\tau_0) = \psi^0$, $h = \chi$.

Для обоснования аналогичных (3.1.29) оценок для краевых задач предположим, что решение задачи (3.1.28) при $h \in [h_1, h_2]$ существует, единственно и обладает следующим свойством устойчивости. Пусть добавление малых слагаемых порядка ε в правые части граничных условий (3.1.28) приводит к малому, того же порядка малости ε, изменению решений задачи (3.1.28).

В самом деле, функции a, p будут отличаться на величины порядка ε от функций ξ_1, η_1, удовлетворяющих усредненной системе (3.1.28) и тем же начальным данным при $t = t_0$, что и функции a, p. В момент T, следовательно, функции $\xi_1(\varepsilon t)$, $\eta_1(\varepsilon t)$ удовлетворяют краевым условиям (3.1.28) с ошибкой порядка ε и, согласно требуемому свойству устойчивости, отличаются от решения ξ, η краевой задачи (3.1.28) на величины порядка ε. Поэтому отличие между функциями a, p и ξ, η будет составлять величину порядка ε, т. е. оценки (3.1.29) справедливы для решений краевых задач (3.1.24), (3.1.28) при фиксированном h.

5. Исследование структуры решений усредненной краевой задачи. Докажем, что система (3.1.28) имеет первый интеграл

$$\omega^{-1}(\xi)\left[h - \left(\eta, \langle f_0^* \rangle (\xi, \eta)\right)\right] = \beta = \text{const}. \tag{3.1.30}$$

Постоянство β проверяется непосредственным дифференцированием соотношения (3.1.30) по τ в силу системы

(3.1.28). Получим

$$\frac{d\beta}{d\tau}=\frac{(\eta,\langle f_0^*\rangle)-h}{\omega^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi},\langle f_0^*\rangle\right)-\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial(\eta,\langle f_0^*\rangle}{\partial\xi},\langle f_0^*\rangle\right)+$$
$$+\frac{1}{\omega}\left(\left[\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\frac{h-(\eta,\langle f_0^*\rangle)}{\omega}+\frac{\partial}{\partial\xi}(\eta,\langle f_0^*\rangle)\right],\ \langle f_0^*\rangle\right)\equiv 0.$$

Здесь использовано равенство $\partial(\eta,\langle f_0^*\rangle)/\partial\eta=\langle f_0^*\rangle$, вытекающее из (2.2.7) и определения (3.1.28) функции $\langle f_0^*\rangle$. Сравнивая (3.1.30) и (3.1.23), видим, что $\langle q\rangle = \varepsilon\beta$, где $\beta=\mathrm{const}$ с погрешностью $O(\varepsilon)$ на рассматриваемом интервале времени.

Воспользовавшись равенством (3.1.30), приведем систему (3.1.28) к виду

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\langle f_0^*\rangle(\xi,\eta),\quad \xi(\tau_0)=a^0,\quad M(\xi(\Theta))=0,$$
$$\frac{d\eta}{d\tau}=-\beta\frac{\partial\omega(\xi)}{\partial\xi}-\frac{\partial}{\partial\xi}(\eta,\langle f_0^*\rangle),\quad \eta(\Theta)=\frac{\partial}{\partial\xi}[(\lambda,M)-g]_\Theta,\tag{3.1.31}$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\varepsilon^{-1}\omega(\xi),\quad \varphi(\tau_0)=\psi^0.$$

Система (3.1.31) является гамильтоновой с функцией Гамильтона

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\langle H^*\rangle(\eta,\varepsilon\beta,\xi,\varepsilon)\right]_{\varepsilon=0}=$$
$$=(\eta,\langle f_0^*\rangle(\xi,\eta))+\beta\omega(\xi)=h=\mathrm{const},\tag{3.1.32}$$

которая есть интеграл системы (3.1.31). Постоянство (3.1.32) с очевидностью следует также из (3.1.30). Константы β и h связаны соотношением (3.1.30) (или (3.1.32)). Предполагаем, что эти соотношения определяют взаимно однозначное соответствие между β и h. Интервал $h\in[h_1,\ h_2]$ при этом отображается на итервал $\beta\in[\beta_1,\ \beta_2]$, в котором краевая задача (3.1.31) будет иметь единственное решение, что следует из соответствующего свойства задачи (3.1.28). Предполагаем также, что точка $\beta=0$ лежит в интервале $[\beta_1,\ \beta_2]$. Решение краевой задачи (3.1.31) вследствие автономности системы представим в виде

$$\begin{gathered}\xi=\xi\left(\tau-\tau_0,\quad \Theta-\tau_0,\, a^0,\, \beta\right),\\ \eta=\eta\left(\tau-\tau_0,\, \Theta-\tau_0,\, a^0,\, \beta\right),\\ \varphi=\psi^0+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\omega(\xi)\,d\tau_1.\end{gathered}\tag{3.1.33}$$

Параметр β должен удовлетворять уравнению (3.1.26), в правую часть которого подставим выражения для a, ψ, p, согласно (3.1.29), (3.1.33)

$$\begin{gathered}a(t,\,h,\,\varepsilon)=\xi+O(\varepsilon),\quad p(t,\,h,\,\varepsilon)=\eta+O(\varepsilon),\\ \psi(t,\,h,\,\varepsilon)=\psi^0+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\omega(\xi)\,d\tau_1+O(1),\end{gathered}\tag{3.1.34}$$

а в левую — величину h согласно (3.1.32). Получим соотношение

$$\Phi\left(\xi,\,\eta,\,\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\omega(\xi)\,d\tau_1+O(1)\right)\Bigg|_{\tau=\Theta}=\beta+O(\varepsilon).\tag{3.1.35}$$

Здесь функции ξ, η определены в (3.1.33) и введено обозначение

$$\Phi(\xi,\,\eta,\,\psi)=\frac{1}{\omega(\xi)}\left(\eta,\,f_0^*(\xi,\,\psi,\,\eta)-\langle f_0^*\rangle(\xi,\,\eta)\right).$$

Функция Φ периодична по ψ с периодом 2π и имеет нулевое среднее по ψ.

Пусть выполнено условие

$$\frac{d}{d\beta}\left[\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\omega\left(\xi\left(\tau-\tau_0,\,\Theta-\tau_0,\,a^0,\,\beta\right)\right)d\tau\right]\Bigg|_{\beta=0}=\gamma_0\neq 0.\tag{3.1.36}$$

Тогда при достаточно малых значениях ε левая часть уравнения (3.1.35) в некоторой окрестности значения $\beta=0$ есть быстро осциллирующая функция с частотой $\sim\gamma_0\varepsilon^{-1}$, амплитудой порядка единицы и с малым средним

$\sim \varepsilon$. Поэтому в некотором интервале значений β, включающем точку $\beta = 0$, уравнение (3.1.25) (аналогично уравнению (3.1.26)) имеет много корней, отличающихся друг от друга на величины порядка ε. Обозначим этот интервал через $[\beta', \beta'']$, причем $\beta = O \in [\beta', \beta''] \subset [\beta_1, \beta_2]$. Любая точка $\beta \in [\beta', \beta'']$ обладает тем свойством, что в ее ε-окрестности находится корень β_ν уравнения (3.1.35), отвечающий корню h_ν уравнения (3.1.26). Связь между β_ν и h_ν — взаимно однозначная и задается формулами (3.1.30), (3.1.32).

6. Выделение оптимального решения. Для определения искомого значения β^* (или h^*) обратимся к условию (3.1.27). Наряду с функционалом $J(h)$ из (3.1.27) рассмотрим его приближенное значение $J_0(\beta)$, которое получим в результате подстановки $a = \xi + O(\varepsilon)$ из (3.1.34), ξ из (3.1.33) в функцию g (см. (3.1.27)). Получим

$$J_0(\beta) = g(\xi(\Theta - \tau_0, \Theta - \tau_0, a^0, \beta)), \quad J(h) = J_0(\beta) + O(\varepsilon). \tag{3.1.37}$$

Здесь связь между h и β определена формулами (3.1.30), (3.1.32). Так как функции g и ξ, по предположению, являются гладкими, то $J_0(\beta)$ — гладкая функция β.

Рассмотрим следующую задачу на минимум

$$J_0^* = \min_\beta J_0(\beta), \quad \beta \in [\beta', \beta''], \tag{3.1.38}$$

где, в отличие от (3.1.27), параметр β пробегает весь интервал значений. Из близости функционалов J_0, J см. (3.1.37), и гладкости $J_0(\beta)$ следует, что минимумы (3.1.27), (3.1.38) отличаются на величину порядка ε, т. е. $J_0^* - J^* = O(\varepsilon)$.

Следовательно, определив решение β^0, J_0^* задачи (3.1.38), получим приближенное решение исходной задачи в следующем смысле. В ε-окрестности найденного β^0 найдется β_ν, отвечающее некоторому корню h_ν уравнения (3.1.26), для которого в силу установленных выше свойств имеем

$$J(h_\nu) = J_0(\beta_\nu) + O_1(\varepsilon) = J_0(\beta^0) + O_2(\varepsilon) = \\ = J_0^* + O_2(\varepsilon) = J^* + O_3(\varepsilon), \tag{3.1.39}$$

где O_1, O_2, O_3 — малые порядка ε. Другими словами, отличие приближенного решения от точного минимума по функционалу составляет величину порядка ε, причем в ε-окрестности найденного β^0 имеется точный корень β^* трансцендентного уравнения (3.1.35).

Таким образом, приходим к задаче минимизации гладкой функции $J_0(\beta)$ на интервале (см. (3.1.38)). Дифференцируя (3.1.37) по β, получим

$$J_0'(\beta) = \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)_\Theta. \tag{3.1.40}$$

Учитывая красвые условия (3.1.31) для ξ, η и равенство $(\partial\xi/\partial\beta)_{\tau_0} = \partial a^0/\partial\beta = 0$, получим из (3.1.40)

$$J_0'(\beta) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(\lambda, M) - \eta\right], \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)_\Theta =$$

$$= -\left(\eta, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)_\Theta = -\int_{\tau_0}^{\Theta} \frac{d}{d\tau}\left(\eta, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) d\tau.$$

Здесь использовано равенство $[\partial(\lambda, M)/\partial\beta]_\Theta = 0$, вытекающее из того факта, что условие $(M)_\Theta = 0$ выполняется при всех β.

Дифференцируя подынтегральное выражение и используя уравнение (3.1.31) для η, преобразуем J_0' к виду

$$J_0'(\beta) = \int_{\tau_0}^{\Theta} \left\{\left(\left[\beta \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}(\eta, \langle f_0^* \rangle)\right], \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) - \left(\eta, \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)\right)\right\} d\tau.$$

Используем теперь выражение для производной

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \frac{\partial \langle f_0^* \rangle}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial \langle f_0^* \rangle}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \beta}.$$

Второе слагаемое равно нулю в силу тождества $\partial(\eta, \langle f_0^* \rangle)/\partial\eta = \langle f_0^* \rangle$. В результате искомая производная J_0' приводится к виду

$$J_0'(\beta) = \beta \int_{\tau_0}^{\Theta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) d\tau = \beta \frac{d}{d\beta} \int_{\tau_0}^{\Theta} \omega(\xi)\, d\tau. \tag{3.1.41}$$

Приравнивая нулю производную (3.1.41), видим, что значение $\beta = 0$ является точкой возможного экстремума функции $J_0(\beta)$. Если вторые производные от $\omega(\xi)$ по ξ и

$\partial^2\xi/\partial\beta^2$ при $\beta=0$ существуют, то $\beta=0$ будет точкой локального минимума при выполнении неравенства

$$J_0''(0)=\frac{d}{d\beta}\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\omega(\xi)\,d\tau\Bigg|_{\beta=0}=\gamma_0>0. \qquad (3.1.42)$$

Величина γ_0 определена в (3.1.36). Таким образом, условие (3.1.42), включающее условие быстрой осцилляции, является достаточным условием локальной оптимальности точки $\beta=0$ и соответствующих этому значению функций ξ, η.

Выведем теперь достаточное условие глобального (на интервале $[\beta', \beta'']$) минимума функционала $J_0(\beta)$ в точке $\beta=0$. Для этого вычислим функцию $J_0(\beta)$, интегрируя выражение (3.1.41) по частям

$$J_0(\beta)=J_0(0)+\beta\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\omega(\xi)\,d\tau-\int\limits_{0}^{\beta}\left[\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\omega(\xi)\,d\tau\right]_{\beta=\delta}d\delta. \qquad (3.1.43)$$

Глобальный минимум (3.1.38) достигается при $\beta=0$, если $J_0(\beta)\geqslant J_0(0)$ для всех $\beta\in[\beta', \beta'']$. Это условие при помощи (3.1.43) можно представить в виде

$$\beta\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\omega(\xi)\,d\tau\geqslant\int\limits_{0}^{\beta}\left[\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\omega(\xi)\,d\tau\right]_{\beta=\delta}d\delta. \qquad (3.1.44)$$

С другой стороны, на основании (3.1.37) условие глобального минимума можно записать в форме

$$g(\xi)\geqslant g(\xi)|_{\beta=0} \quad (\tau=\Theta). \qquad (3.1.45)$$

Здесь аргументы функции ξ — те же, что и в (3.1.37).

Условия локальной оптимальности (3.1.42) могут быть проверены на основе известного решения (3.1.33) задачи (3.1.31) при $\beta=0$. Действительно, требуемые для проверки функции ξ, η при β, близких к нулю, могут быть построены разложениями по β, для чего понадобится решить некоторые линейные краевые задачи. Их решение строится аналогично п. 4 § 2 главы 2.

7. Заключение. Таким образом, приходим к следующей процедуре построения приближенного решения задачи оптимального управления (3.1.2), (3.1.14), (3.1.15). Сначала строится однопараметрическое семейство решений краевой задачи (3.1.31) в виде (3.1.33), где β — параметр семейства, принадлежащий окрестности точки $\beta = 0$, и семейство функционалов (3.1.37), т. е. функция $J_0(\beta)$. Далее определяется точка β^0 минимума функции $J_0(\beta)$ из (3.1.38). Если при этом выполняются условия (3.1.42) или (3.1.44), (3.1.45), то $\beta^0 = 0$.

Исходные фазовые и сопряженные переменные a, ψ, p, q определяем соотношениями $a = \xi$, $\psi = \varphi$, $p = \eta$, $q = 0$ и (3.1.33), в которые подставляется $\beta = \beta^0$. Полученное приближение к траектории будет по построению удовлетворять краевым условиям (3.1.14) и условиям трансверсальности (3.1.19) с погрешностью порядка ε. Реализующееся на этой траектории значение функционала, равное $J_0^* = J_0(\beta^0)$, отличается на величину порядка ε от точного минимума J^* функционала (3.1.15).

Приближенное оптимальное управление u^* определено выражением (3.1.18), в которое нужно подставить $p = \eta$, $q = 0$. Получим управление как функцию τ, a, ψ, a^0. В формуле (3.1.18) можно положить $a = \xi$, однако быструю переменную ψ нельзя заменить на φ согласно (3.1.33) без потери точности (в отличие от главы 2, где точность вычисления фазы ψ была такой же, как и для медленных переменных). Полученное управление будет зависеть от медленного времени τ и фазы ψ, а также от начального вектора a^0.

Наконец, управление в форме синтеза (как функция τ, a, ψ) получается, если в выражении (3.1.33) для η совершить замену аргументов $\tau_0 \to \tau$, $a^0 \to a$ и подставить η в (3.1.18).

Построенное управление (для всех указанных вариантов его функциональных зависимостей) будет приближенно оптимальным в следующем смысле. Если подставить его в исходную систему (3.1.2), то соответствующая траектория лежит в ε-окрестности построенной приближенной траектории, а значение функционала на $O(\varepsilon)$ отличается от его минимума J^*.

Отметим, что решение усредненной краевой задачи (3.1.31) существенно проще исходной. Во-первых, система (3.1.31) для ξ, η содержит $2n$ уравнений (вместо $2n+2$). Во-вторых, в ней отсутствуют быстрые переменные, что позволило заменой времени $\tau = \varepsilon t$ исключить параметр ε и свести ее к решению на коротком интервале медленного времени $\tau \in [\tau_0, \Theta]$, $\Theta \sim 1$, $\tau_0 = \varepsilon t_0$. Кроме того, использование первого интеграла (3.1.32) позволяет понизить порядок усредненной канонической системы (3.1.31) и в случае системы с одной степенью свободы сводит ее решение к квадратуре.

8. **Пример.** Рассмотрим динамическую систему с одной степенью свободы (см. (3.1.12))

$$\ddot{y} = \varepsilon[u + F(y) - \chi\dot{y}], \quad y(t_0) = y^0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}^0 > 0. \tag{3.1.46}$$

Здесь y — обобщенная координата, $\dot{y} = dy/dt$ — скорость, $\varepsilon \geqslant 0$ — малый параметр; εF — малая потенциальная сила, 2π-периодическая функция относительно y со средним εF_0; $\varepsilon\chi \geqslant 0$ — коэффициент вязкого трения. Уравнением (3.1.46) описывается ряд модельных задач управляемого движения в слабых периодических полях, быстрых вращений (см. (3.1.12)) и др. Уравнение (3.1.46) заменой $y = \psi$, $\dot{y} = a$ приводится к стандартной системе вида (3.1.2)

$$\dot{a} = \varepsilon[u + F(\psi) - \chi a], \quad \dot{\psi} = a, \quad a(t_0) = \dot{y}^0, \quad \psi(t_0) = y^0. \tag{3.1.47}$$

Поставим задачу оптимального управления

$$a(T) = \dot{y}_* \geqslant 0, \quad J = \varepsilon \int_{t_0}^{T} u^2 dt, \quad T = \Theta\varepsilon^{-1}. \tag{3.1.48}$$

Здесь $\dot{y}_*$ — заданное значение скорости $\dot{y}$; ограничения на u не налагаются. Обычным приемом интегральный функционал (3.1.47) приведем к форме (3.1.15).

Усредненная краевая задача (3.1.31) в принятых выше обозначениях приводится к виду (λ — множитель Лагранжа)

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{1}{2}\eta + F_0 - \chi\xi, \quad \xi(\tau_0) = \dot{y}^0, \quad \xi(\Theta) = \dot{y}_*, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \chi\eta - \beta, \quad \eta(\Theta) = \lambda, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \tau_0 = \varepsilon t_0. \end{aligned} \tag{3.1.49}$$

Решение этой линейной краевой задачи при $\beta=0$ находится элементарно и равно

$$\xi(\tau)=\left[\dot{y}^0-\frac{F_0}{\chi}-\frac{\lambda}{4\chi}e^{-\chi(\Theta-\tau_0)}\right]e^{-\chi(\tau-\tau_0)}+\frac{F_0}{\chi}+\frac{\lambda}{4\chi}e^{-\chi(\Theta-\tau)},\quad \eta(\tau)=\lambda e^{-\chi(\Theta-\tau)},$$

$$\lambda=4\chi\left\{\dot{y}_*-\dot{y}^0e^{-\chi(\Theta-\tau_0)}-\frac{F_0}{\chi}\left[1-e^{-\chi(\Theta-\tau_0)}\right]\right\}\times\left[1-e^{-2\chi(\Theta-\tau_0)}\right]^{-1}. \quad \square \tag{3.1.50}$$

Приближенные выражения для оптимального управления и функционала (3.1.48) найдем в соответствии с изложенной выше методикой при помощи решения (3.1.50). Получим

$$u^*=\frac{1}{2}\eta(\tau),\quad J_0(0)=\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\chi}\left[1-e^{-2\chi(\Theta-\tau_0)}\right]. \tag{3.1.51}$$

Покажем теперь, что $\beta=0$ доставляет минимум (3.1.38). Из линейности усредненной системы (3.1.49) следует, что решение ξ, η краевой задачи (3.1.49) линейно зависит от параметра β

$$\xi(\tau,\beta)=\xi_0(\tau)+\beta\xi_1(\tau),\quad \eta(\tau,\beta)=\eta_0(\tau)+\beta\eta_1(\tau),\quad \lambda=\lambda_0+\beta\lambda_1. \tag{3.1.52}$$

Подставляя u^* из (3.1.51) и η из (3.1.52) в функционал (3.1.48), получим

$$J_0(\beta)=\frac{1}{4}\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\left[\eta_0^2(\tau)+2\beta\eta_0(\tau)\eta_1(\tau)+\beta^2\eta_1^2(\tau)\right]d\tau. \tag{3.1.53}$$

Так как $\eta_1(\tau)\not\equiv 0$, то из (3.1.53) следует, что экстремум (минимум) (3.1.38) существует и единствен. С другой стороны, из общей формулы (3.1.41) вытекает, что $\beta=0$ есть точка экстремума функции $J_0(\beta)$. Следовательно, $\beta=0$ есть искомая точка глобального минимума $J_0(\beta)$, причем

$$\int\limits_{\tau_0}^{\Theta}\eta_0(\tau)\eta_1(\tau)\,d\tau=0. \tag{3.1.54}$$

В справедливости (3.1.54) можно убедиться и непосредственной проверкой, решив краевую задачу (3.1.49) при произвольном β. Таким образом, формулы (3.1.50), (3.1.51) дают искомое приближенное решение поставленной задачи (3.1.47), (3.1.48).

§ 2. Построение высших приближений

1. Уменьшение размерности системы уравнений принципа максимума. Перейдем к построению решений задач оптимального управления для систем стандартного вида (3.1.2) с произвольной наперед заданной степенью точности по малому параметру. В отличие от случая квазилинейной системы (2.2.9), каноническая система уравнений краевой задачи принципа максимума (3.1.2), (3.1.19), (3.1.18) не имеет стандартного вида, а приведенная к стандартной форме система (3.1.24) не является гамильтоновой. Поэтому представляется важным привести систему (3.1.24) к виду, обладающему привлекательным свойством каноничности. Это обстоятельство позволит эффективно применить методику канонического усреднения из § 2 главы 2.

Итак, рассматривается управляемая стандартная система с вращающейся фазой (3.1.2), для которой ставится терминальная задача оптимального управления. Так как на размерность n медленного вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ не налагается ограничений, то, не ограничивая общности, минимизируемый функционал можно взять в виде $J = a_1(T)$, $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, $\Theta = \text{const} > 0$. Чтобы не загромождать схему построения приближенного решения, считается, что дополнительное требование (3.1.14) попадания вектора на многообразие $M(a) = 0$ при $t = T$ не наложено. Отметим, что вся развиваемая далее процедура применима и при наличии этих ограничений. Ограничения на управление имеют по-прежнему вид $u \in U$, где U — замкнутое множество. Предположим, что поставленная задача оптимального управления имеет единственное решение для всех значений $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Как и раньше, построение решения основано на необходимых условиях принципа максимума и метода усреднения. С заданной точностью по медленным переменным, управлению и функционалу строятся допустимые решения краевой задачи, среди которых выбирается оптимальное.

Краевая задача принципа максимума имеет вид (3.1.2), (3.1.18), (3.1.19), где условия трансверсальности принимают форму

$$p(T) = (-1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \quad q(T) = 0. \tag{3.2.1}$$

Функции f^*, F^*, ω из (3.1.20) предполагаются далее достаточно гладкими. Отметим, что функции f, ω, F в (3.1.2) могут непрерывно зависеть от параметра ε, однако эта зависимость для сокращения записи не указывается.

Формула (3.1.23), полученная из условия постоянства гамильтониана (3.1.20), может быть представлена в виде

$$q = \varepsilon Q(a, \psi, p, h, \varepsilon) = \varepsilon\omega^{-1}\left[h - (p, f_0^*)\right] \times \\ \times \{1 - \varepsilon\omega^{-1}\left[\partial(p, f_0^*)/\partial q + F_0^*\right]\} + \varepsilon^2 \ldots \tag{3.2.2}$$

Здесь через f_0^*, F_0^* обозначены функции f^*, F^*, в которых $q = 0$. Формула (3.1.21) в силу условия трансверсальности (3.2.1) имеет вид

$$h = -f_{10}^*(a, \psi, p)|_T, \tag{3.2.3}$$

где f_{10}^* — первая компонента вектора f_0^*.

Подстановка выражения (3.2.2) в систему (3.1.2), (3.1.18), (3.1.19) приводит к краевой задаче для стандартной системы, содержащей параметр h

$$\begin{gathered} \dot{a} = \varepsilon f^*(a, \psi, p, \varepsilon Q), \quad \dot{\psi} = \omega(a) + \varepsilon F^*(a, \psi, p, \varepsilon Q), \\ \dot{p} = -\varepsilon Q\frac{\partial\omega}{\partial a} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial a}\left[(p, f^*(a, \psi, p, \varepsilon Q)) + \right. \\ \left. + \varepsilon Q F^*(a, \psi, p, \varepsilon Q)\right], \\ a(t_0) = a^0, \quad \psi(t_0) = \psi^0, \quad p(T) = (-1, 0, \ldots, 0). \end{gathered} \tag{3.2.4}$$

Здесь нужно подставить (после дифференцирования по a) функцию $q = \varepsilon Q$ из (3.2.2).

После построения решения этой краевой задачи величина h определяется из условия трансверсальности (3.2.1) для q

$$Q(a(T,\ h,\ \varepsilon),\ \psi(T,\ h,\ \varepsilon),\ p(T),\ h,\ \varepsilon) = 0. \tag{3.2.5}$$

Далее должен быть выбран корень h^* уравнения (3.2.5), доставляющий минимум функционалу $J = a_1(T, h, \varepsilon)$.

Решение задачи оптимального управления в первом приближении содержится в § 1. Для упрощения построения высших приближений уменьшим размерность системы (3.2.4) на единицу делением всех уравнений на ψ, что допустимо при достаточно малых $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ вследствие $\omega(a) \geqslant \omega_0 > 0$. В результате получим неавтономную систему, в которой быстрая переменная — фаза ψ рассматривается как независимая переменная (аргумент)

$$\frac{da}{d\psi} = \varepsilon \frac{f_Q(a, \psi, p, h, \varepsilon)}{\omega(a) + \varepsilon F_Q(a, \psi, p, h, \varepsilon)},$$

$$\frac{dp}{d\psi} = -\varepsilon \left[Q \frac{\partial \omega}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a}(p, f_Q) + \varepsilon Q \frac{\partial F_Q}{\partial a} \right] (\omega + \varepsilon F_Q)^{-1}, \quad (3.2.6)$$

$$a(\psi^0) = a^0, \quad p(\psi_T) = (-1, 0, \ldots, 0).$$

Здесь через f_Q, F_Q обозначены функции f^*, F^*, в которые подставлено выражение (3.2.2) для q, например,

$$f_Q(a, \psi, p, h, \varepsilon) = f^*(a, \psi, p, \varepsilon Q).$$

Неизвестная величина ψ_T в краевом условии (3.2.6) определяется соотношениями

$$\psi_T = \psi|_{t=T}, \quad t - t_0 = \int_{\psi^0}^{\psi} \frac{d\psi'}{\omega(a) + \varepsilon F_Q(a, \psi', p, h, \varepsilon)}. \quad (3.2.7)$$

Сюда вместо a, p подставляется как функции аргумента ψ решение краевой задачи (3.2.6) при некоторых h, ψ_T. Формула (3.2.7) при достаточно малом ε устанавливает взаимно однозначное соответствие между переменными t и ψ. Далее предполагается, что при заданных значениях параметров h из интервала $[h_1, h_2]$ и $\psi_T \sim \varepsilon^{-1}$ решение модифицированной краевой задачи (3.2.6) существует и единственно.

Преобразования, в результате которых исходная автономная гамильтонова система (3.1.2), (3.1.18), (3.1.19) сведена к системе (3.2.6), состояли в переходе к новому аргументу ψ и в исключении переменной q, сопряженной ψ, при помощи интеграла (3.1.20). Известно ([68], стр. 128), что при такой замене получается каноническая система (уравнения Уиттекера) с гамильтонианом, равным $-q$, где q дано формулой (3.2.2). Следовательно, система (3.2.6) может быть записана в канонической форме

$$\frac{da}{d\psi} = -\varepsilon\frac{\partial Q}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\psi} = \varepsilon\frac{\partial Q}{\partial a}, \quad Q = Q(a, \psi, p, h, \varepsilon), \tag{3.2.8}$$

в которой все переменные являются медленными. Функцию Q считаем ниже достаточно гладкой по аргументам a, p, ε.

Исследование решения краевой задачи (3.2.6) на основе метода усреднения и определения решения задачи оптимального управления, содержится в п. 3.

2. Каноническая усредненная система. Система уравнений (3.2.8) может быть упрощена при помощи методики канонического усреднения по независимой переменной ψ аналогично § 2 главы 2. Построим каноническое преобразование исходных переменных a, p к новым (усредненным) ξ, η

$$\xi = a + \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\eta}, \quad p = \eta + \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial a}, \qquad \sigma = \sigma(a, \eta, \psi, h, \varepsilon). \tag{3.2.9}$$

Здесь σ — периодическая функция ψ с периодом 2π. Потребуем, чтобы новый (усредненный) гамильтониан εR не содержал независимую переменную ψ

$$\frac{d\xi}{d\psi} = \varepsilon\frac{\partial R}{\partial\eta}, \quad \frac{d\eta}{d\psi} = -\varepsilon\frac{\partial R}{\partial\xi}, \quad R = R(\xi, \eta, h, \varepsilon). \tag{3.2.10}$$

Система (3.2.10) имеет первый интеграл

$$R(\xi, \eta, h, \varepsilon) = \text{const}. \tag{3.2.11}$$

Переходим к вычислению искомых функций σ и R. Производящая функция $(a, \eta) + \varepsilon\sigma$ преобразования (3.2.9) и гамильтониан εR находятся с произвольно заданной степенью точности по ε, определяемой гладкостью исходного гамильтониана εQ, в виде разложений

$$\sigma(a, \eta, \psi, h, \varepsilon) = \sigma_0(a, \eta, \psi, h) + \varepsilon\sigma_1 + \ldots + \varepsilon^k\sigma_k + \ldots$$
$$R(\xi, \eta, h, \varepsilon) = R_0(\xi, \eta, h) + \varepsilon R_1 + \ldots + \varepsilon^k R_k + \ldots \tag{3.2.12}$$

Функции (3.2.12) связаны с гамильтонианом системы (3.2.8) дифференциальным соотношением в частных производных [210, 145]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} - Q(a, \psi, p, h, \varepsilon) = R(\xi, \eta, h, \varepsilon). \qquad (3.2.13)$$

Подставляя в (3.2.13) выражения (3.2.9) для ξ, η получим нелинейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} - Q\left(a, \psi, \eta + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial a}, h, \varepsilon\right) = R\left(a + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \eta, h, \varepsilon\right). \qquad (3.2.14)$$

Используя теперь в (3.2.14) представления для искомых функций в виде разложений (3.2.12), приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε получим зацепляющуюся последовательность дифференциальных соотношений для σ_i, R_i $(i \geqslant 0)$ вида

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \psi} - Q_i(a, \psi, \eta, h) = R_i(a, \eta, h). \qquad (3.2.15)$$

Здесь функции Q_i на каждом шаге известны: они определяются при помощи функции Q и ее производных, а также на основе функций σ_i, R_i, вычисленных на предыдущих шагах. В частности, имеем

$$\begin{gathered} Q_0 = Q(a, \psi, \eta, h, 0), \\ Q_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\right)_0 + \left(\frac{\partial Q_0}{\partial \eta}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial R_0}{\partial a}, \frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}\right), \end{gathered} \qquad (3.2.16)$$

где индекс 0 отвечает $\varepsilon = 0$. Уравнениям (3.2.15) удовлетворяют функции

$$R_i(\xi, \eta, h) = -\langle Q_i \rangle (\xi, \eta, h),$$

$$\langle Q_i \rangle (a, \eta, h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i(a, \psi, \eta, h)\, d\psi, \qquad (3.2.17)$$

$$\sigma_i(a, \eta, \psi, h) = \int_{\psi^0}^{\psi} [Q_i(a, \psi', \eta, h) - \langle Q_i \rangle (a, \eta, h)]\, d\psi',$$

$$i = 0, 1, \ldots, k, \ldots$$

Здесь первый аргумент функций R_i обозначен через ξ в соответствии с (3.2.12), угловые скобки означают усреднение по ψ.

Таким образом, приближенное построение функции σ и усредненного гамильтониана εR сводится к последовательным вычислениям коэффициентов Q_i согласно (3.2.16) и квадратурам (3.2.17).

3. Интегрирование усредненной системы. При помощи формул (3.2.12) выпишем систему (3.2.10) в $(k+1)$-м приближении

$$\frac{d\xi_{(k+1)}}{d\theta}=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i\frac{\partial R_i}{\partial\eta},\quad \frac{d\eta_{(k+1)}}{d\theta}=-\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i\frac{\partial R_i}{\partial\xi}. \tag{3.2.18}$$

Здесь $\theta=\varepsilon\psi$ — медленная независимая переменная, изменяющаяся на интервале $[\theta_0, \theta_T]$, где $\theta_0=\varepsilon\psi^0$, $\theta_T=\varepsilon\psi_T\sim 1$. В правых частях системы (3.2.18) отброшены члены $(k+1)$-го и более высоких порядков по ε. Поэтому при выполнении известных (см., например, [224]) условий существования решения систем (3.2.10), (3.2.18) на интервале $[\theta_0, \theta_T]$ для достаточно малых значений параметра ε справедливы оценки

$$|\xi-\xi_{(k+1)}|=O(\varepsilon^{k+1}),\quad |\eta-\eta_{(k+1)}|=O(\varepsilon^{k+1}).$$

Построим общее решение системы (3.2.18) с погрешностью $O(\varepsilon^{k+1})$. Эти вычисления могут быть проведены на основе общего решения системы первого приближения (3.2.18) при $k=0$, которая в силу (3.2.17) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\theta}&=-\frac{\partial\langle Q_0\rangle}{\partial\eta},\quad &\xi(\theta_0)=c_\xi,\\ \frac{d\eta}{d\theta}&=\frac{\partial\langle Q_0\rangle}{\partial\xi},\quad &\eta(\theta_T)=c_\eta.\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Постоянные c_ξ, c_η — произвольные параметры, которые, в частности, в первом приближении равны: $c_\xi=a^0$, $c_\eta=(-1, 0, \ldots, 0)$, см. (3.2.6). Для высших приближений параметры c_ξ и c_η лежат в ε-окрестности указанных значений.

Далее считается известным общее решение задачи (3.2.19), которое представим в виде

$$\xi_{(1)}=\xi(\theta, c_\xi, c_\eta),\quad \eta_{(1)}=\eta(\theta, c_\xi, c_\eta). \tag{3.2.20}$$

Функции ξ и η (не путать с переменными ξ, η в п. 2) зависят также от параметров θ_0, θ_T и h, однако эта зависимость пока не указывается. Будем строить решение системы (3.2.18), удовлетворяющее условиям $\xi_{(k+1)}(\theta_0) = c_\xi$, $\eta_{(k+1)}(\theta_T) = c_\eta$, в виде разложений

$$\xi_{(k+1)} = \xi_{(1)} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \xi_i, \quad \eta_{(k+1)} = \eta_{(1)} + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \eta_i. \quad (3.2.21)$$

Здесь индекс внизу у ξ_i, η_i означает номер коэффициента в разложении. Неизвестные функции ξ_i, η_i определяются в результате решения линейной краевой задачи, получаемой при подстановке (3.2.21) в (3.2.18) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε

$$\frac{d\xi_i}{d\theta} = \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial\eta\partial\xi}\right)\xi_i + \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial\eta^2}\right)\eta_i + v_i(\theta, c_\xi, c_\eta), \quad \xi_i(\theta_0) = 0,$$

$$(3.2.22)$$

$$\frac{d\eta_i}{d\theta} = -\left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial\xi^2}\right)\xi_i - \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial\xi\partial\eta}\right)\eta_i + w_i(\theta, c_\xi, c_\eta), \qquad \eta_i(\theta_T) = 0.$$

Здесь вторые производные от R_0 берутся на порождающем решении — первом приближении (3.2.20), а v_i, w_i — известные на каждом i-м шаге функции. Они определяются через коэффициенты R_j и решения ξ_j, η_j, построенные на предыдущих шагах ($j = 1, 2, \ldots, i-1$). Например, $v_1 = (\partial R_1/\partial\eta)$, $w_1 = -(\partial R_1/\partial\xi)$ при $\xi = \xi_{(1)}$, $\eta = \eta_{(1)}$.

Решение линейной неоднородной системы (3.2.22) строится методом вариации произвольных постоянных на основе общего решения соответствующей однородной системы. Фундаментальная матрица решений X для указанной однородной системы, являющейся системой в вариациях для (3.2.19), находится дифференцированием функций (3.2.20) по параметрам c_ξ, c_η. Учитывая начальные и краевые условия (3.2.22), приходим к выражениям

$$\begin{pmatrix}\xi_i\\ \eta_i\end{pmatrix} = X(\theta)\, b_i + X(\theta)\int_{\theta_0}^{\theta} X^{-1}(\theta')\begin{pmatrix}v_i\\ w_i\end{pmatrix} d\theta' \equiv$$

$$\equiv X(\theta)\, b_i + \begin{pmatrix}\beta_{\xi i}(\theta)\\ \beta_{\eta i}(\theta)\end{pmatrix}, \quad (3.2.23)$$

$$X(\theta)=\begin{Vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial c_\xi} & \dfrac{\partial\xi}{\partial c_\eta}\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial c_\xi} & \dfrac{\partial\eta}{\partial c_\eta}\end{Vmatrix},\quad b_i\equiv\begin{pmatrix}b_{\xi i}\\ b_{\eta i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\beta_{\eta i}(\theta_T)\end{pmatrix}.$$

В записи (3.2.23) через $\beta_{\xi i}$, $\beta_{\eta i}$ обозначены n-векторы, соответствующие частному решению неоднородной системы. Здесь использованы вытекающие из граничных условий (3.2.19) равенства

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial c_\xi}\right|_{\theta_0}=\left.\frac{\partial\eta}{\partial c_\eta}\right|_{\theta_T}=I,\quad \left.\frac{\partial\xi}{\partial c_\eta}\right|_{\theta_0}=\left.\frac{\partial\eta}{\partial c_\xi}\right|_{\theta_T}=0,$$

в которых I — единичная, 0 — нулевая $(n\times n)$-матрицы.

4. **Вычисление исходных переменных.** Решение $(k+1)$-го приближения системы (3.2.8) ищем в виде разложений

$$a_{(k+1)}=\xi_{(1)}+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i a_i,\quad p_{(k+1)}=\eta_{(1)}+\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i p_i,\quad (3.2.24)$$

где $\xi_{(1)}$, $\eta_{(1)}$ даны формулами (3.2.20). Неизвестные коэффициенты a_i, p_i в (3.2.24), зависящие периодически от ψ, а также от θ и постоянных c_ξ, c_η, определяются подстановкой выражений (3.2.24) и (3.2.21) в (3.2.9) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε. При этом используются известные выражения (3.2.17) для коэффициентов σ_i разложения (3.2.12) функции σ. В частности, имеем

$$a_1=\xi_1-\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}\right),\quad p_1=\eta_1+\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\right)\quad (a=\xi_{(1)},\ \eta=\eta_{(1)}).\tag{3.2.25}$$

В результате для функций $a_{(k+1)}$, $p_{(k+1)}$ получены представления

$$\begin{aligned} a_{(k+1)}&=\xi_{(1)}+\varepsilon A_{(k)}(\psi,\theta,c_\xi,c_\eta,\varepsilon),\\ p_{(k+1)}&=\eta_{(1)}+\varepsilon P_{(k)}(\psi,\theta,c_\xi,c_\eta,\varepsilon),\\ a_{(k+1)}\big|_{\psi=\psi_0}&=c_\xi+\varepsilon A_{(k)}\big|_{\psi=\psi_0},\\ p_{(k+1)}\big|_{\psi=\psi_T}&=c_\eta+\varepsilon P_{(k)}\big|_{\psi=\psi_T}.\end{aligned}\tag{3.2.26}$$

Здесь $A_{(k)}$, $P_{(k)}$ есть 2π-периодические функции от ψ. Их зависимость от параметров θ_0, θ_T и h не указана в (3.2.26) для сокращения записи. Отметим, что для определения функций $A_{(k)}$, $P_{(k)}$ с погрешностью $O(\varepsilon^k)$ требуется знать только коэффициенты $\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}$. Использование же функции σ_k не приводит к увеличению точности, а дает так называемое улучшенное $(k+1)$-е приближение [46, 63], используемое при обосновании близости решений. Таким образом, построенное решение $(k+1)$-го приближения (3.2.26) представляет собой сумму медленно изменяющихся функций $\xi_{(1)}$, $\eta_{(1)}$, зависящих согласно (3.2.20) от медленной фазы $\theta = \varepsilon\psi$, и быстрых колебаний (вибраций) малой амплитуды порядка ε.

5. Приближенное решение модифицированной краевой задачи. Постоянные интегрирования c_ξ, c_η в решении $(k+1)$-го приближения (3.2.26) должны быть выбраны таким образом, чтобы функции $a_{(k+1)}$, $p_{(k+1)}$ удовлетворяли заданным граничным условиям (3.2.6). Подставляя (3.2.26) в (3.2.6), получим

$$c_\xi + \varepsilon A_{(k)}\big|_{\psi=\psi^0} = a^0,$$
$$c_\eta + \varepsilon P_{(k)}\big|_{\psi=\psi_T} = p_T = (-1, 0, \ldots, 0). \qquad (3.2.27)$$

Так как левые части выражений (3.2.27) являются достаточно гладкими функциями от параметров c_ξ, c_η, ε, то c_ξ, c_η в $(k+1)$-м приближении можно представить в виде разложений

$$c_\xi = a^0 + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i c_{\xi i}, \quad c_\eta = p_T + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i c_{\eta i}. \qquad (3.2.28)$$

Неизвестные коэффициенты $c_{\xi i}$, $c_{\eta i}$ зависят от параметров h, θ_0, θ_T, а также 2π-периодическим образом от ψ^0, ψ_T. Отметим, что величина $\theta_0 = \varepsilon\psi^0$ известна, а параметры h и $\theta_T = \varepsilon\psi_T$ подлежат дальнейшему определению.

В соотношения (3.2.27) подставим представления (3.2.28) и разложения функций $A_{(k)}$, $P_{(k)}$ по степеням параметра ε, вытекающие из (3.2.24)—(3.2.26). При этом используем также краевые условия (3.2.22) для ξ_i, η_i. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем коэффициенты $c_{\xi i}$, $c_{\eta i}$. В частности, получим

$$c_{\xi 1} = \left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}\right)_{\psi=\psi^0} = 0, \quad c_{\eta 1} = -\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\right)_{\psi=\psi_T},$$
$$(\sigma_0) = \sigma_0(\xi_{(1)}, \eta_{(1)}, \psi, h), \qquad (3.2.29)$$
$$\xi_{(1)} = \xi(\theta, a^0, p_T), \quad \eta_{(1)} = \eta(\theta, a^0, p_T).$$

При помощи линейных операций, аналогичных (3.2.29), для c_ξ, c_η получаются выражения $(k+1)$-го приближения

$$\begin{aligned} c_\xi &= a^0 + \varepsilon C_{\xi(k)}(a^0, \psi^0, \psi_T, \theta_0, \theta_T, h, \varepsilon), \\ c_\eta &= p_T + \varepsilon C_{\eta(k)}(a^0, \psi^0, \psi_T, \theta_0, \theta_T, h, \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

Вставляя коэффициенты (3.2.30) в функции $a_{(k+1)}$, $p_{(k+1)}$ из (3.2.26) и отбрасывая члены порядка ε^{k+1} и выше, находим выражения

$$\begin{aligned} a_{(k+1)} &= \xi(\theta-\theta_0, \theta_T-\theta_0, a^0, h) + \varepsilon A_{(k)}(\psi, \psi^0, \psi_T, a^0, h, \varepsilon), \\ \eta_{(k+1)} &= \eta(\theta-\theta_0, \theta_T-\theta_0, a^0, h) + \varepsilon P_{(k)}(\psi, \psi^0, \psi_T, a^0, h, \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Здесь сохранены обозначения функций (3.2.20), (3.2.26), однако перечислены все аргументы и параметры, от которых они зависят. В силу автономности усредненной системы здесь фигурируют разности $\theta-\theta_0$, $\theta-\theta_T$. Формулы (3.2.31) дают искомое решение $(k+1)$-го приближения модифицированной краевой задачи (3.2.6), (3.2.8) при заданных значениях параметров h и $\theta_T = \varepsilon\psi_T$, которые подлежат дальнейшему определению. Отметим, что зависимость функций $A_{(k)}$ и $P_{(k)}$ от быстрой переменной ψ и параметров ψ^0, ψ_T — периодическая, причем $A_{(k)}|_{\psi^0} = P_{(k)}|_{\psi_T} = 0$. Указанные выше построения могут проводиться и другими способами, удобными для численной реализации, например, при помощи схемы последовательных приближений или методом касательных [100, 107].

Оценка точности построенного решения (3.2.31) краевой задачи (3.2.6), (3.2.8) получается в результате оценки решения краевой задачи для разностей между переменными a, p, и их $(k+1)$-ми улучшенными приближениями (см. п. 4). Детали доказательства изложены в работе [13]. Таким образом, приходим к следующему выводу. Пусть в некотором интервале значений h, $\theta_T \sim 1$ и для c_ξ, c_η, принадлежащих некоторой малой окрестности точки a^0, $p_T = (-1, 0, \ldots, 0)$, усредненная краевая задача первого приближения (3.2.19) допускает единственное решение и существует матрица X^{-1} из (3.2.23).

Тогда справедливы оценки

$$a - a_{(k+1)} = O(\varepsilon^{k+1}), \quad p - p_{(k+1)} = O(\varepsilon^{k+1}). \qquad (3.2.32)$$

Здесь $a_{(k+1)}$, $p_{(k+1)}$ определены согласно (3.2.31). Отметим, что наложенные выше условия по существу эквивалентны сформулированным в п. 4 § 1 главы 3 условиям устойчивости решения краевой задачи первого приближения и позволяют их конструктивно проверить.

6. Решение исходной краевой задачи. Переходим к определению фазы ψ как функции времени t и параметра ψ_T. Подставим в соотношения (3.2.7) известные функции $a_{(k+1)}$, $p_{(k+1)}$ из (3.2.31). Как следует из (3.2.7), величины ψ и ψ_T определяются с точностью на единицу меньшей, чем a, p, согласно (3.2.32), т. е. с погрешностью $O(\varepsilon^k)$ на интервале времени $[t_0, T]$, $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, а величины $\theta = \varepsilon\psi$ и $\theta_T = \varepsilon\psi_T$ — с погрешностью $O(\varepsilon^{k+1})$.

Прежде вычислим параметр θ_T из соотношений (3.2.7), приведенных к виду

$$\varepsilon(T - t_0) = \Theta - \tau_0 =$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_T} \left[1 + \varepsilon\Psi_{(k)}\left(\frac{\theta}{\varepsilon}, \frac{\theta_T}{\varepsilon}, \theta, \theta_T, h, \varepsilon\right)\right] \frac{d\theta}{\omega(\xi_{(1)})}, \qquad (3.2.33)$$

$$\Psi_{(k)}(\psi, \psi_T, \theta, \theta_T, h, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon^i \Psi_i(\psi, \psi_T, \theta, \theta_T, h).$$

Здесь функция $\Psi_{(k)}$ получается в результате подстановки известных функций $a = a_{(k+1)}$, $p = p_{(k+1)}$ из (3.2.31) в (3.2.7) и отбрасывания членов порядка ε^k. В качестве $\xi_{(1)}$ в формуле (3.2.33) и далее фигурирует первый член представления (3.2.31) для $a_{(k+1)}$.

Отметим, что функции $\Psi_{(k)}$, Ψ_i 2π-периодичны по ψ и ψ_T. Они также зависят от ψ^0, θ_0, a^0, однако эта зависимость пока не указывается.

Решение трансцендентного уравнения (3.2.33) в $(k+1)$-м приближении строится в виде отрезка асимптотического разложения

$$\theta_T(h, \varepsilon) = \theta_T^*(h) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \theta_{Ti}. \qquad (3.2.34)$$

В первом приближении параметр $\theta_T = \theta_T^*(h)$ определяется из уравнения (3.2.33) при $\varepsilon = 0$

$$\Theta - \tau_0 = \zeta(\theta_T), \quad \zeta(\theta_T) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_T} \frac{d\theta}{\omega\left(\xi\left(\theta - \theta_0, \theta_T - \theta_0, a^0, h\right)\right)}. \tag{3.2.35}$$

Пусть корень θ_T^* уравнения (3.2.35) существует, единствен и является простым, т. е. $\partial\zeta/\partial\theta_T^* \neq 0$ для вычисленного значения корня θ_T^*. Тогда коэффициент θ_{T1} в (3.2.34) определяется уравнением, вытекающим из (3.2.33)—(3.2.35)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta_T^*}\theta_{T1} + \int\limits_{\theta_0}^{\theta_T^*} \langle\Psi_0\rangle\left(\frac{\theta_T^*}{\varepsilon} + \theta_{T1}, \theta, \theta_T^*, h\right)\frac{d\theta}{\omega(\xi_{(1)})} = 0. \tag{3.2.36}$$

Здесь проведено усреднение функции Ψ_0 из (3.2.33) по фазе ψ. Операция усреднения вносит погрешность порядка ε в интеграл (3.2.36), что лежит в пределах точности определения величины θ_{T1}.

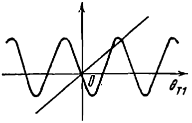


Рис. 3.2.

Решение уравнения (3.2.36) заведомо существует, так как справа стоит ограниченная 2π-периодическая функция от θ_{T1}. Уравнение может допускать несколько корней. Типичная ситуация представлена на рис 3.2, где изображены графики обеих частей уравнения (3.2.36). Если θ_{T1} — простой корень, то все последующие коэффициенты θ_{Ti} $(i \geqslant 2)$ разложения (3.2.34) определяются последовательно из линейных уравнений вида

$$\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\theta_T^*} + \int\limits_{\theta_0}^{\theta_T^*} \frac{\partial\langle\Psi_0\rangle}{\partial\theta_{T1}}\frac{d\theta}{\omega(\xi_{(1)})}\right]\theta_{Ti} = \vartheta_i, \quad i = 2, \ldots, k. \tag{3.2.37}$$

Здесь в квадратных скобках стоит производная по θ_{T1} от левой части уравнения (3.2.36), а ϑ_i — известные на каждом шаге величины, зависящие от предыдущих приближений.

Итак, величину θ_T из (3.2.34) можно считать вычисленной с погрешностью $O(\varepsilon^{k+1})$. Как отмечалось, уравнение (3.2.36) (а, следовательно, и уравнение (3.2.33)) может допускать несколько корней, отличающихся на величины порядка ε. Выделение нужного корня обсуждается ниже.

Переходим к установлению связи между t и $\psi = \theta\varepsilon^{-1}$ при помощи второго соотношения (3.2.7), приведенного к виду, аналогичному (3.2.33)

$$\tau - \tau_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \left[1 + \varepsilon\Psi_{(k)}\left(\frac{\theta'}{\varepsilon}, \frac{\theta_T}{\varepsilon}, \theta', \theta_T, h, \varepsilon\right)\right] \frac{d\theta'}{\omega(\xi_{(1)})}. \tag{3.2.38}$$

Зависимость θ от τ строим при помощи уравнения (3.2.37) в виде отрезка асимптотического разложения, аналогичного (3.2.34)

$$\theta = \theta^*(\tau, h) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \theta_i. \tag{3.2.39}$$

Подставляя представление (3.2.39) в (3.2.38) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения для коэффициентов θ^*, θ_i. В первом приближении имеем

$$\tau - \tau_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\omega\left(\xi\left(\theta' - \theta_0, \theta_T^* - \theta_0, a^0, h\right)\right)}.$$

Корень этого уравнения θ^* существует и единствен. Последующие коэффициенты θ_i определяются однозначно из линейных уравнений, аналогичных (3.2.37). Отметим одно качественное отличие уравнений (3.2.33) и (3.2.38). Неизвестная величина θ в уравнении (3.2.38) входит лишь в верхний предел интеграла, в то время как величина θ_T в уравнении (3.2.33) входит также в подынтегральную функцию, причем там она фигурирует в виде аргументов θ_T и $\theta_T\varepsilon^{-1}$. Последнее обстоятельство приводит к тому, что определение первых двух коэффициентов θ_T^* и θ_{T1} асимптотического разложения (3.2.34) требует решения нелинейных уравнений (3.2.35), (3.2.36). В случае уравнения (3.2.38) лишь первый коэффициент θ^* определяется из нелинейного уравнения.

Таким образом, фаза $\psi = \theta\varepsilon^{-1}$ как функция t в k-м приближении (ниже она обозначается через $\psi_{(k)}$) и постоянная $\psi_T = \theta_T\varepsilon^{-1}$ в том же приближении построены. Эти величины зависят также от неизвестного параметра h. Подстановка их в (3.2.31) дает выражения для переменных a, p в $(k+1)$-м приближении как функций времени t параметров a^0, ψ^0, ε, T, h.

7. Выбор оптимального решения. Неопределенный пока параметр h должен удовлетворять условию трансверсальности (3.2.25) для переменной q. Для рассматриваемой существенно нелинейной системы ($\omega'(a) \sim 1$) искомое значение h в $(k+1)$-м приближении определяется из приближенного уравнения

$$Q(a_{(k+1)}(T, h, \varepsilon), \psi_{(k)}(T, h, \varepsilon), p_T, h, \varepsilon) = 0. \quad (3.2.40)$$

Отметим, что вследствие возможной неединственности определения θ_{T1} из уравнения (3.2.36), зависимости $a_{(k+1)}$, $\psi_{(k)}$ в (3.2.40) могут быть неоднозначными функциями h. Такая же неединственность, в силу установленной близости решений, имеет место и для точной краевой задачи (3.2.4) с аргументом t. Поэтому каждое уравнение (3.2.5), (3.2.40) распадается на несколько уравнений, отвечающих различным ветвям зависимости $\theta_{T1}(h)$. Для каждой ветви соответствующие уравнения (3.2.5), (3.2.40) рассматриваются отдельно.

Заметим, что в § 1 предполагалась единственность решения точной краевой задачи (3.2.4) при фиксированном h. В данном же параграфе требуется единственность решения краевой задачи (3.2.6) с аргументом ψ, связь которого с t может быть, как установлено, неоднозначной.

Рассуждая аналогично п. 5 § 1, получим, что левые части уравнений (3.2.5), (3.2.40) есть быстро осциллирующие функции h, причем $\partial Q/\partial h \sim \varepsilon^{-1}$. В силу оценок близости точного и приближенного решений для a, ψ имеем, что отличие левых частей уравнений (3.2.5), (3.2.40) составляет (для каждой из указанных выше ветвей) величину $O(\varepsilon^k)$ при фиксированном h. Поэтому в ε^{k+1}-окрестности каждого из корней $h^* \in \{h_\nu\}$ уравнения (3.2.40) содержится корень точного уравнения (3.2.5). В результате приходим к следующему правилу выбора оптимального значения величины h. Требуется построить (с погрешностью $O(\varepsilon^{k+1})$) дискретное множество корней $\{h_\nu\}$ всех ветвей уравнения (3.2.40), а затем минимизировать заданный функционал $J = a_{1(k+1)}(T,\ h,\ \varepsilon)$ по множеству найденных корней $\{h_\nu\}$. В качестве первого приближения к искомому оптимальному корню h^* следует брать значение, найденное при помощи методики пп. 5—7 § 1.

В результате указанной процедуры определения h^* решение $(k+1)$-го приближения для переменных a, p, q оказывается построенным при помощи формул (3.2.31), (3.2.34), (3.2.39), (3.2.2). Оптимальное управление в $(k+1)$-м приближении определяется соотношением (3.1.18), в которое подставляется найденное решение. Управление может быть представлено в виде синтеза или в других формах, см. пп. 6, 7 § 1. Погрешность определения минимального значения функционала для $(k+1)$-го приближения составляет по построению величину порядка ε^{k+1}.

§ 3. Асимптотическое решение нелинейных задач типа оптимального быстродействия

1. Постановка задачи управления с нефиксированным временем. Рассматриваем нелинейную управляемую систему с вращающейся фазой (3.1.2), для которой поставим задачу оптимального управления с нефиксированным моментом окончания процесса $T = \Theta\varepsilon^{-1}$. Здесь Θ — неизвестная величина порядка единицы. Краевые условия и минимизируемый функционал задаем по-прежнему формулами (3.1.14), (3.1.15), причем число l краевых условий (3.1.14) лежит в пределах $0 \leqslant l \leqslant n-1$.

Отметим, что к указанной постановке преобразуется (за счет введения дополнительной фазовой координаты) случай интегрального функционала вида

$$J = g(a(T)) + \varepsilon \int_{t_0}^{T} G(a,\ \psi,\ u)\,dt, \qquad (3.3.1)$$

где g, G — заданные достаточно гладкие скалярные функции. Вводя дополнительную медленную переменную a_{n+1} при помощи соотношений

$$\dot{a}_{n+1} = \varepsilon G(a,\ \psi,\ u), \quad a_{n+1}(t_0) = 0, \tag{3.3.2}$$

представим функционал (3.3.1) в форме (3.1.15), а именно

$$J = g(a(T)) + a_{n+1}(T). \tag{3.3.3}$$

Для задачи оптимального по быстродействию попадания на заданное многообразие (3.1.14) достаточно положить $g \equiv 0$, $G \equiv 1$ в (3.3.1).

В дальнейшем рассматриваем задачу (3.1.2), (3.1.14), (3.1.15) с нефиксированным T. Как и в §§ 1, 2, существенным является предположение о независимости функций M, g от быстрой фазы ψ. Далее используем те же обозначения, что и в § 1.

2. Краевая задача принципа максимума. Так как время T не фиксировано, то условия трансверсальности на правом конце должны быть дополнены равенством

$$H^*|_{t=T} = 0. \tag{3.3.4}$$

Здесь функция H^* определена в (3.1.20).

Построение асимптотического решения в случае нефиксированного T проводится аналогично задаче с фиксированным $T = \Theta\varepsilon^{-1}$ из § 1. Поэтому ниже отмечаются главным образом лишь отличия от построений § 1.

Из равенств (3.3.4) и (3.1.20) вытекает, что $h = 0$ в (3.1.21). Следовательно, во всех соотношениях § 1, в частности (3.1.21)—(3.1.24), следует положить $h = 0$. С другой стороны, решение краевой задачи (3.1.24) содержит новый неизвестный параметр $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, и ее решение может быть записано в виде, аналогичном (3.1.25)

$$a = a(t,\ \Theta,\ \varepsilon), \quad \psi = \psi(t,\ \Theta,\ \varepsilon), \quad p = p(t,\ \Theta,\ \varepsilon). \tag{3.3.5}$$

Предполагаем, что решение (3.3.5) существует и единственно в некотором интервале $[\Theta_1,\ \Theta_2]$ изменения параметра Θ. Параметр Θ должен удовлетворять уравнению, аналогичному (3.1.26) и вытекающему из (3.1.21), (3.3.5) при $h = 0$

$$\big(p(T,\ \Theta,\ \varepsilon),\ f_0^*(a(T,\ \Theta,\ \varepsilon),\ \psi(T,\ \Theta,\ \varepsilon),\ p(T,\ \Theta,\ \varepsilon))\big) = 0. \tag{3.3.6}$$

Как и при анализе уравнения (3.1.26), показывается, что уравнение (3.3.6) допускает, как правило, порядка ε^{-1} корней $\{\Theta_\nu\}$, причем расстояние между соседними корнями составляет величину порядка ε. Для определения искомого оптимального значения $\Theta^* \in \{\Theta_\nu\}$ требуется найти минимум

$$J^* = \min_{\Theta \in \{\Theta_\nu\}} J(\Theta), \quad J(\Theta) = g\left(a\left(\Theta\varepsilon^{-1}, \Theta, \varepsilon\right)\right), \qquad (3.3.7)$$

аналогичный (3.1.27).

Усредненная краевая задача первого приближения имеет вид (3.1.28), в которой $h = 0$, а Θ является неизвестным параметром. Предполагаем, что эта задача удовлетворяет условиям устойчивости, аналогичным сформулированным в п. 4 § 1, с заменой h на Θ.

Краевую задачу (3.1.28) снова преобразуем к виду (3.1.31), воспользовавшись первым интегралом (3.1.30). Отметим, что в соотношениях (3.1.30), (3.1.32) имеем $h = 0$, и эти соотношения определяют связь между параметрами β и Θ. В самом деле, задавшись некоторыми β и Θ и решив краевую задачу (3.1.30) при $h = 0$, получим решение (3.1.33), зависящее от двух параметров β, Θ. Подставив это решение в первый интеграл (3.1.32), получим постоянную, которую следует приравнять нулю. Это и даст искомую связь между β и Θ. Поэтому в дальнейшем считаем $\Theta = \Theta(\beta)$ и будем искать параметр β.

Подставляя зависимость $\Theta = \Theta(\beta)$ в решение (3.1.33), а затем вставляя это решение в условие трансверсальности (3.3.6), получим трансцендентное уравнение для определения параметра β. Это уравнение аналогично (3.1.35), но теперь нужно считать $\Theta = \Theta(\beta)$. Предполагаем выполненным условие быстрой осцилляции (3.1.36), в котором также $\Theta = \Theta(\beta)$. Тогда, повторяя рассуждения пп. 5, 6 § 1, приходим к выводу, что параметр β следует выбирать из условия минимума (3.1.38) на непрерывном интервале изменения β. В качестве функции $J_0(\beta)$ в (3.1.38) следует брать функцию (3.1.37), в которой $\Theta = \Theta(\beta)$.

3. Определение оптимального решения. Проведем вычисления $J_0'(\beta)$, аналогичные (3.1.40), (3.1.41). Дифференцируя (3.1.37) полным образом по β, получим вместо (3.1.40)

$$J_0'(\beta) = \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\Big|_{\tau=\Theta}, \frac{\partial \xi_\Theta}{\partial \beta}\right), \quad \xi_\Theta(\beta) = \xi\left(\Theta - \tau_0, \ \Theta - \tau_0, \ a^0, \ \beta\right). \tag{3.3.8}$$

Здесь через $\xi_\Theta(\beta)$ обозначена сложная функция от β, получающаяся из (3.1.33) при подстановке $\tau = \Theta$, где $\Theta = \Theta(\beta)$, см. (3.3.8). Подставим в формулу (3.3.8) функцию $\partial g/\partial \xi$ из краевого условия (3.1.31)

$$J_0'(\beta) = \left(\frac{\partial (\lambda, M)_{\tau=\Theta}}{\partial \xi} - \eta_\Theta, \frac{d\xi_\Theta}{d\beta}\right) = \frac{d(\lambda, M)_{\tau=\Theta}}{d\beta} - \left(\eta_\Theta, \frac{d\xi_\Theta}{d\beta}\right), \tag{3.3.9}$$

Здесь η_Θ определено аналогично ξ_Θ в (3.3.8). Так как для всех β имеем $M = 0$ при $\tau = \Theta(\beta)$, то первое слагаемое в (3.3.9) обращается в нуль. Преобразуя второе слагаемое, получим

$$J_0'(\beta) = -\left(\eta, \frac{d\xi}{d\tau}\right)_{\tau=\Theta} \Theta'(\beta) - \left(\eta, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)_{\tau=\Theta}. \tag{3.3.10}$$

Здесь и далее через $\partial\xi/\partial\beta$ обозначается производная по β от функции (3.1.33), в которую подставлена зависимость $\Theta(\beta)$. Вместо $d\xi/d\tau$ в формулу (3.3.10) подставим правую часть соответствующего уравнения (3.1.31), а второе слагаемое в (3.3.10) представим в виде интеграла. Получим

$$J_0'(\beta) = -\left(\eta_\Theta, \langle f_0^* \rangle (\xi_\Theta, \eta_\Theta)\right) \Theta'(\beta) - \\ - \left(\eta, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)_{\tau=\tau_0} - \int_{\tau_0}^{\Theta} \frac{d}{d\tau}\left(\eta, \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) d\tau. \tag{3.3.11}$$

Первое слагаемое формулы (3.3.11) преобразуем при помощи интеграла (3.1.32), взятого при $\tau = \Theta$, $h = 0$. Второе слагаемое равно нулю, так как $\xi = a^0$ при $\tau = \tau_0$ для всех β. Под интеграл в третье слагаемое формулы (3.3.11) подставим производную от η в силу системы

(3.1.31). В результате формула (3.3.11) примет вид

$$J_0'(\beta) = \beta\omega(\xi_\Theta)\Theta'(\beta) + \\ + \int_{\tau_0}^{\Theta}\left[\left(\beta\frac{\partial\omega}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\eta, \langle f_0^*\rangle), \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right) - \left(\eta, \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right)\right]d\tau. \tag{3.3.12}$$

Дифференцируя по параметру β уравнение (3.1.31) для ξ, получим

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\xi}{\partial\beta} = \frac{\partial\langle f_0^*\rangle}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\beta} + \frac{\partial\langle f_0^*\rangle}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}. \tag{3.3.13}$$

Подставим (3.3.13) в (3.3.12) и воспользуемся тождеством

$$\frac{\partial(\eta, \langle f_0^*\rangle)}{\partial\eta} = \langle f_0^*\rangle. \tag{3.3.14}$$

Напомним, что тождество (3.3.14) вытекает из (2.2.7) и определения (3.1.28) функции $\langle f_0^*\rangle$, или же из каноничности усредненной системы (3.1.31). Из соотношений (3.3.12)—(3.3.14) получим

$$J_0'(\beta) = \beta\omega(\xi_\Theta)\Theta'(\beta) + \beta\int_{\tau_0}^{\Theta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}, \frac{\partial\xi}{\partial\beta}\right)d\tau = \\ = \beta\frac{d}{d\beta}\int_{\tau_0}^{\Theta}\omega(\xi)\,d\tau, \quad \Theta = \Theta(\beta). \tag{3.3.15}$$

Окончательный вид производной $J_0'(\beta)$ совпал со случаем фиксированного Θ (см. (3.1.41) и (3.3.15)). Поэтому дальнейшие выводы п. 6 § 1 сохраняют свою силу. Значение $\beta = 0$ является точкой возможного экстремума функции $J_0(\beta)$. Если вторая производная $J_0''(\beta)$ существует, то точка $\beta = 0$ будет локального минимума, если выполнено условие (3.1.42). Условия глобального минимума функции $J_0(\beta)$ можно представить в виде (3.1.44) или (3.1.45).

Процедура построения приближенного решения задачи оптимального управления остается той же, что и в случае закрепленного времени (см. п. 7 § 1). Отличие будет состоять в том, что усредненная краевая задача (3.1.31) решается при нефиксированном Θ, после чего устанавливается связь $\Theta = \Theta(\beta)$ при помощи интеграла (3.1.32), где $h = 0$. Оптимальное управление строится также аналогично п. 7 § 1 и может быть представлено в виде функций различных наборов аргументов. Отметим, что управление в форме синтеза оказывается зависящим лишь от a, ψ и не зависит от τ, что является следствием того, что система автономна, а время окончания процесса T нефиксировано.

4. **Пример.** Для иллюстрации изложенной методики рассмотрим задачу управления быстрыми вращениями системы типа маятника (см. (3.1.12))

$$\begin{gathered} \ddot{y} = \varepsilon u + \varepsilon f(y), \quad y(0) = y^0, \ \dot{y}(0) = \dot{y}^0 > 0, \\ |u| < \infty, \quad \dot{y}(T) = \dot{y}_* > 0, \\ J = \varepsilon k T + \varepsilon \int_0^T u^2 dt \to \min_u, \quad k = \text{const} > 0. \end{gathered} \tag{3.3.16}$$

Здесь $\varepsilon \geqslant 0$ — малый параметр, T — нефиксированный момент окончания процесса, f — 2π-периодическая функция от y с нулевым средним. Скалярная переменная y является быстро вращающейся фазой, а медленная переменная $\dot{y}$ — частотой. Введением дополнительной циклической переменной функционал (3.3.16) приводится к виду (3.1.15). Из условия максимума гамильтониана (3.1.17) находим, что $u^* = {}^1/_2 p$, где p — скалярная переменная, сопряженная $\dot{y}$. Усредненная краевая задача (3.1.31) в данном случае имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{d\xi_1}{d\tau} = \frac{\eta_1}{2}, \quad \frac{d\xi_2}{d\tau} = k + \frac{\eta_1^2}{4}, \\ \frac{d\eta_1}{d\tau} = -\beta, \quad \frac{d\eta_2}{d\tau} = 0, \quad \tau = \varepsilon t, \\ \xi_1(0) = \dot{y}^0, \quad \xi_2(0) = 0, \quad \xi_1(\Theta) = \dot{y}_*, \\ \eta_2(\Theta) = -1, \ \Theta = \varepsilon T. \end{gathered} \tag{3.3.17}$$

Здесь медленная переменная ξ_1 отвечает $\dot{y}$, ξ_2 — функционалу (3.3.16), а η_1, η_2 — соответствующие сопряженные переменные.

Запишем решение (3.1.33) краевой задачи (3.3.17) для ξ_1, η_1, η_2

$$\xi_1 = -(\beta/4)(\tau-\Theta)^2 -$$
$$-(\tau-\Theta)\Theta^{-1}(\Delta+\beta\Theta^2/4)+\dot{y}_*, \quad \Delta = \dot{y}^0 - \dot{y}_*, \tag{3.3.18}$$
$$\eta_1 = -\beta(\tau-\Theta) - 2\Theta^{-1}(\Delta+\beta\Theta^2/4), \quad \eta_2 = -1.$$

Первый интеграл (3.1.32) при $h=0$ дает связь между переменными

$$\beta\xi_1 + \frac{1}{2}\eta_1^2 - k = 0. \tag{3.3.19}$$

Подставляя в (3.3.19) решение (3.3.18) и полагая $\tau=\Theta$, получим связь между параметрами Θ и β в виде

$$\beta\dot{y}_* + \Theta^{-2}(\Delta + {}^1/_4\beta\Theta^2)^2 - k = 0. \tag{3.3.20}$$

Для вычисления $J_0(\beta) = \xi_2(\Theta(\beta))$ воспользуемся соотношениями (3.3.17), (3.3.18). В результате интегрирования получим

$$J_0(\beta) = 2k\Theta - (\beta^2/24)\Theta^3 - (\beta/2)\Theta\Delta - \beta\dot{y}_*\Theta, \tag{3.3.21}$$

где зависимость $\Theta(\beta)$ дана формулой (3.3.20). Путем дифференцирования этой неявной функции вычислим производные

$$\Theta'(0) = \frac{1}{2}\Theta(0)k^{-1}\left(\dot{y}_* + \frac{1}{2}\Delta\right), \quad k\Theta^2(0) = \Delta^2,$$
$$J_0'(0) = 2k\Theta'(0) - \Theta(0)\left(\dot{y}_* + \frac{1}{2}\Delta\right) = 0. \tag{3.3.22}$$

Как и следовало ожидать (см. (3.3.15)), точка $\beta=0$ является стационарной точкой функции $J_0(\beta)$. Вычисляя вторую производную (3.1.42) при помощи равенств $\omega = \xi_1$, (3.3.18), (3.3.22), получим

$$J_0''(0) = \Theta^3(0)/24 + \Theta(0)\left(\dot{y}_* + \frac{1}{2}\Delta\right)^2\Big/2k > 0.$$

Таким образом, значение $\beta=0$ соответствует локальному минимуму функционала. Подставляя $\beta=0$ в (3.3.18), (3.3.21), а также в формулу $u^* = {}^1/_2\eta_1$, получим искомое приближенное решение ξ_1 для медленной фазовой переменной $\dot{y}$, уравнения и функционала

$$\xi_1 = \dot{y}^0 + \tau k^{1/2}\operatorname{sign}(-\Delta), \quad \Delta = \dot{y}^0 - \dot{y}_*,$$
$$\Theta(0) = |\Delta| k^{-1/2}, \quad u^* = k^{1/2}\operatorname{sign}(-\Delta), \qquad (3.3.23)$$
$$J_0^* = 2|\Delta| k^{1/2} = 2k\Theta(0).$$

Здесь $\Theta(0)$ определено формулой (3.3.22). Управление (3.3.23) можно представить в форме синтеза, а именно

$$u^* = k^{1/2}\operatorname{sign}(\dot{y}_* - \dot{y}).$$

Отметим, что вклад каждого из членов (3.3.16) в функционал, как следует из (3.3.23), в первом приближении одинаков и равен $|\Delta| k^{1/2}$.

В следующих §§ 4, 5 на основе развитой в §§ 1—3 методики исследуются задачи управления колебаниями и вращениями нелинейных систем с одной и двумя степенями свободы.

§ 4. Оптимальное управление колебаниями и вращениями маятника

1. Постановка задачи. В качестве примера применения метода усреднения с ограничением на управление рассмотрим движения маятника под действием ограниченного по модулю управляющего момента. Выберем единицу времени так, чтобы период малых колебаний маятника был равен 2π. Тогда уравнение движения примет вид

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = \varepsilon u, \quad |u| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (3.4.1)$$

Здесь φ — угол отклонения маятника от нижнего устойчивого положения равновесия, $\varepsilon \geqslant 0$ — малый параметр. Требуется найти управление u, минимизирующее полную энергию маятника в заданный конечный момент времени $T = \Theta\varepsilon^{-1}$.

В качестве медленной переменной введем полную энергию маятника

$$a = 1/2\dot{\varphi}^2 - (1 + \cos\varphi), \quad a \geqslant -2. \qquad (3.4.2)$$

Здесь за начало отсчета энергии принято верхнее положение равновесия маятника $\varphi = \pi$, так что при

$-2 \leqslant a < 0$ маятник совершает колебания, а при $a > 0$ — вращения. Дифференцируя (3.4.2) в силу (3.4.1), получим уравнение (см. (3.1.9))

$$\dot{a} = \varepsilon \dot{\varphi} u, \quad a(t_0) = a^0, \quad -2 \leqslant a^0 < \infty, \tag{3.4.3}$$

где $\dot{\varphi}$ выражается через a, φ согласно (3.4.2)

$$\dot{\varphi} = \pm [2(a + 1 + \cos \varphi)]^{1/2}. \tag{3.4.4}$$

Уравнение для фазы ψ имеет обычный вид (3.1.9)

$$\dot{\psi} = \omega(a) + \varepsilon F(\varphi, a) u.$$

Здесь $\omega(a)$ — частота колебаний или вращений (см. ниже), а вид 2π-периодической по φ функции F для дальнейшего несуществен.

2. Приближенное оптимальное управление. Обозначая через p, q сопряженные переменные, отвечающие a, ψ, получим на основании принципа максимума (см. (3.1.17), (3.1.18))

$$u^* = \operatorname{sign}(p\dot{\varphi} + qF).$$

Так как $q = O(\varepsilon)$ (см. § 1), то при условии отсутствия особых управлений ($p \neq 0$) с погрешностью $O(\varepsilon)$ по функционалу

$$u^* = \operatorname{sign}(p\dot{\varphi}). \tag{3.4.5}$$

Введем усредненные переменные ξ, η, отвечающие переменным a, p. Подставим управление u^* из (3.4.5) в уравнение (3.4.3) и в соответствующее ему сопряженное уравнение и усредним уравнения по фазе ψ. Получим усредненную краевую задачу (см. (3.1.31))

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\dot{\varphi}| \, d\psi \operatorname{sign} \eta, \quad \xi(0) = a^0, \tag{3.4.6}$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = -|\eta| \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{2\pi} |\dot{\varphi}| \, d\psi - \omega'(\xi) \beta, \quad \eta(\Theta) = -1.$$

Здесь $\dot{\varphi}$ должно быть выражено через a, ψ. Как следует из первого уравнения (3.4.6), наилучший результат (минимум $J = \xi(\Theta)$) достигается при условии, что $\eta < 0$

на всем интервале $\tau \in [0, \Theta]$. Требуется выяснить, допускает ли второе (сопряженное) уравнение (3.4.6) решение, обладающее этим свойством. Очевидно, если положить $\beta = 0$, то $\eta(\tau) < 0$ для всех $\tau \in [0, \Theta]$. Следовательно, в первом приближении можно положить $p < 0$ в (3.4.5).

Итак, установлено, что в первом приближении по функционалу (и переменной a) синтез оптимального управления имеет вид:

$$u^* = -\operatorname{sign}\dot{\varphi}. \tag{3.4.7}$$

Движение маятника (3.4.1) под действием управления (3.4.7) описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = -\varepsilon \operatorname{sign}\dot{\varphi}, \tag{3.4.8}$$

отвечающим движению при наличии сухого трения.

3. Анализ оптимального движения. Асимптотическое решение уравнения (3.4.8) строим, следуя [227], где решалось аналогичное уравнение. При $\varepsilon = 0$ уравнение (3.4.8) описывает свободные колебания или вращения маятника.

В режиме колебаний при $-2 \leqslant a < 0$, решение задается соотношениями [89, 236, 72]

$$\begin{gathered}\varphi = 2\arcsin\{k_1 \operatorname{sn}[k_1(t+\delta_1),\ k_1]\},\quad 0 \leqslant k_1 \leqslant 1,\\ k_1^2 = 1 + \frac{1}{2}a, \quad T_1 = 4K(k_1), \quad \varphi_0 = 2\arcsin k_1.\end{gathered} \tag{3.4.9}$$

Здесь δ_1 — произвольная фазовая постоянная, T_1 — период колебаний, φ_0 — их амплитуда; sn — эллиптический синус, K — полный эллиптический интеграл первого рода, k_1 — модуль эллиптических функций. Нижний индекс 1 далее будем относить к колебаниям, 2 — к вращениям.

В режиме вращений, при $a > 0$, имеем

$$\begin{gathered}\varphi = 2\operatorname{am}\left[(t+\delta_2)k_2^{-1},\ k_2\right],\quad 0 \leqslant k_2 \leqslant 1,\\ k_2^{-2} = 1 + \frac{1}{2}a, \quad a > 0, \quad T_2 = 2k_2 K(k_2).\end{gathered} \tag{3.4.10}$$

Здесь δ_2 — фазовая постоянная, T_2 — период вращений, am — эллиптическая амплитуда, k_2 — модуль.

Выпишем первое уравнение (3.4.6) для режима колебаний (3.4.9) в явном виде (имеем $\eta < 0$)

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} |\dot\varphi|\, dt = -\frac{4}{T_1}\int_0^{T_1/4} \dot\varphi(t)\, dt =$$
$$= -4T_1^{-1}\varphi_0 = -2K^{-1}(k_1)\arcsin k_1. \qquad (3.4.11)$$

Здесь ξ заменено на a и использованы свойства четности функции φ из (3.4.9). Переходя к переменной k_1^2 и выбирая в качестве $\tau = 0$ момент перехода из режима вращений в колебания, где $a = 0$, получим из (3.4.11)

$$dk_1^2/d\tau = -K^{-1}(k_1)\arcsin k_1, \quad k_1(0) = 1, \ \tau \geqslant 0. \quad (3.4.12)$$

Уравнение (3.4.12) интегрируется в квадратурах.

Аналогично, пользуясь соотношениями (3.4.10), выпишем уравнение для a в режиме вращений

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} |\dot\varphi|\, dt = -\frac{2\pi}{T_2} = -\frac{\pi}{k_2K(k_2)}. \quad (3.4.13)$$

Переходя к переменной k_2^2 согласно (3.4.10), получим

$$\frac{dk_2^2}{d\tau} = \frac{\pi}{2}\frac{k_2^3}{K(k_2)}, \quad k_2(0) = 1, \quad \tau \leqslant 0. \qquad (3.4.14)$$

Уравнение (3.4.14) интегрируется в полных эллиптических интегралах. Действительно, обозначив $z = k_2^2$, и пользуясь формулой из [236, стр. 117], находим

$$\tau = \frac{2}{\pi}\int_1^{k_2^2} \frac{K}{z^{3/2}}dz = -\frac{4}{\pi}\frac{E(k_2)}{z^{1/2}}\Bigg|_{z=1}^{z=k_2^2} = \frac{4}{\pi}\left[1 - \frac{E(k_2)}{k_2}\right], \ \tau \leqslant 0. \qquad (3.4.15)$$

Здесь $E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, $E(1) = 1$. Формула (3.4.15) определяет решение уравнения (3.4.14) при $\tau \leqslant 0$.

Отметим некоторые свойства функций $k_1(\tau)$, $k_2(\tau)$, следующие из (3.4.12)—(3.4.15). Обе функции монотонно убывают с ростом величины $|\tau|$. При малых τ, когда k_1

близко к единице, асимптотика $k_1(\tau)$ имеет вид

$$\tau \approx -\frac{1-k_1^2}{\pi}\left(1+\ln\frac{16}{1-k_1^2}\right) = -\frac{a}{2\pi}\left(1+\ln\frac{32}{|a|}\right). \tag{3.4.16}$$

Здесь использована связь k_1 и a из (3.4.9). Формула (3.4.16) позволяет отойти от точки $\tau = 0$ при численном интегрировании уравнения (3.4.12). Формулы (3.4.16) справедливы также и для режима вращений (3.4.13)—(3.4.15) с заменой k_1 на k_2, τ на $-\tau$ и a на $-a$.

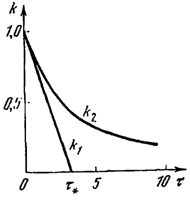


Рис. 3.3.

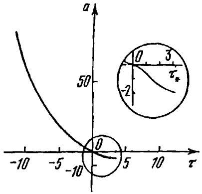


Рис. 3.4.

Исследуем асимптотику в другом предельном случае, когда k_1 и k_2 близки к нулю. Используя представления $K(k)$ при малых k в (3.4.12), (3.4.14), получим

$$k_1 \approx -(\tau-\tau_*)/\pi, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*; \quad k_1, = 0, \quad \tau > \tau_*,$$
$$k_2 = -2/\tau, \quad \tau \to -\infty. \tag{3.4.17}$$

Здесь τ_* — некоторая положительная постоянная. Из (3.4.17) следует, что величина k_1 обращается в нуль при некотором конечном значении $\tau = \tau_{*1}$, т. е. полная остановка маятника требует конечного времени. Это естественный результат для системы (3.4.8) с сухим трением. Формула (3.4.17) для k_2 описывает убывание k_2 при $\tau \to -\infty$.

Результаты численного определения зависимостей $k_1(\tau)$ и $k_2(\tau)$ представлены на рис. 3.3. Зависимость $k_1(\tau)$ определялась интегрированием уравнения (3.4.12) с учетом асимптотики (3.4.16), а зависимость $k_2(\tau)$ — путем расчета по формуле (3.4.15). График $k_1(\tau)$ близок к прямой линии. Значение постоянной τ_* в формуле (3.4.17) оказалось равным $\tau_* = 3{,}342$. Эта постоянная равна безразмерному времени, необходимому для остановки в нижнем положении равновесия маятника, первоначально находящегося в верхнем положении равновесия.

На рис. 3.4 (в мелком и крупном масштабах) представлена зависимость энергии $a(\tau)$ для колебаний ($\tau \geqslant 0$) и вращений ($\tau < 0$), полученная путем пересчета зависимостей $k_1(\tau)$ и $k_2(\tau)$ по формулам (3.4.9), (3.4.10). Отметим, что согласно асимптотической формуле (3.4.16) производная $d\tau/da \to -\infty$ при $a \to 0$. Поэтому касательная к кривой $a(\tau)$ в точке $\tau = 0$, $a = 0$ горизонтальна, что видно на рис. 3.4 в крупном масштабе.

Зависимость $a(\tau)$ является универсальной и позволяет решать различные задачи о минимизации и максимизации энергии маятника. Пусть в начальный момент энергия маятника равна a^0 и требуется за время $T = \Theta\varepsilon^{-1}$ минимизировать или максимизировать конечное значение полной энергии колебаний или вращений маятника. Чтобы решить эту задачу, вначале на графике $a(\tau)$ находим точку τ_0, отвечающую начальному значению $a(\tau_0) = a^0$. В силу строгой монотонности $a(\tau)$ точка τ_0 единственна. Затем от точки τ_0 отложим интервал длины Θ в сторону возрастания τ в случае минимизации энергии и в сторону убывания — в случае максимизации энергии. Получим точку $\tau = \tau_0 + \Theta$ для задачи минимизации и точку $\tau = \tau_0 - \Theta$ для задачи максимизации энергии. Соответствующие этим точкам значения $a(\tau_0 \pm \Theta)$ дадут минимальную (максимальную) энергию в конце интервала управления. Отметим, что если $\tau_0 + \Theta \geqslant \tau_*$, то это означает, что в конце процесса маятник находится в нижнем устойчивом положении равновесия, где $a = -2$. При этом управление $u^* \equiv 0$ на интервале $\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Theta$.

Полученные решения могут описывать переход вращений в колебания (для задачи минимизации энергии) или колебаний во вращения (для задачи максимизации энергии). Такие переходы будут иметь место, если интервал $[\tau_0, \tau_0 + \Theta]$ содержит точку $\tau = 0$. Отметим, что при таком переходе, отвечающем переходу возмущенного решения через сепаратрису порождающего уравнения, частота колебаний (вращений) обращается в нуль. При этом снижается точность метода усреднения, однако им можно пользоваться для построения приближенного решения (см. [33, 158]).

Приведенные зависимости позволяют также решать задачи оптимального быстродействия. Например, если $a(\tau_0+\Theta)=-2$, то время Θ есть время быстродействия, необходимое для оптимальной остановки маятника при начальной энергии $a^0=a(\tau_0)$.

Для сравнения приведем времена быстродействия, соответствующие точному и приближенному оптимальному управлению, для различных начальных значений φ^0 и $\dot\varphi^0$, см. табл. 3.1. Точное время быстродействия T было

Таблица 3.1

φ^0	π	2,44	1,60	−0,15	−2,95	−4,76	−6,62
$\dot\varphi^0$	0,00	1,66	3,52	5,00	3,20	4,95	6,00
T	8,06	8,13	8,33	8,64	9,27	9,67	9,96
T_0	7,47	7,58	8,02	8,36	9,04	9,47	9,72

определено путем численного построения оптимальных траекторий для системы

$$\ddot\varphi+\alpha\sin\varphi=u,\quad |u|\leqslant 1,\quad \varphi(T)=2n\pi,\quad \dot\varphi(T)=0. \tag{3.4.18}$$

Здесь $\alpha>0$ — параметр, n — произвольное целое число. Приближенное значение времени оптимального быстродействия T_0 определялось для системы (3.4.18) при заданных начальных данных φ^0, $\dot\varphi^0$ следующим образом. Если в (3.4.18) сделать замену аргумента $t\to\alpha^{1/2}t$, то получим исходную систему (3.4.1). Поэтому для (3.4.18) имеем

$$a^0=(\dot\varphi^0)^2/2\alpha-1-\cos\varphi^0,\quad T=\alpha^{1/2}\Theta,\quad \varepsilon=\alpha^{-1}. \tag{3.4.19}$$

Определяя a^0 из (3.4.19), находим при помощи построенной зависимости $a(\tau)$ сначала τ_0 из условия $a(\tau_0)=a^0$, а затем Θ из уравнения $a(\tau_0+\Theta)=-2$. После этого вычисляем T_0 согласно (3.4.19).

Приведенные в табл. 3.1 результаты отвечают $\alpha=5$. Они подтверждают вполне удовлетворительную точность асимптотических расчетов даже при не очень малых ε (здесь $\varepsilon=0{,}2$).

Отметим, что задачи оптимального быстродействия для систем, подобных (3.4.18), при $\alpha < 1$ исследовались в работах [40, 213, 238].

§ 5. Оптимальная эволюция плоской орбиты

1. Постановка задачи об оптимальном движении точки в центральном поле под действием малой тяги. Рассмотрим движение материальной точки в центральном гравитационном поле под действием малых управляющих сил (малой тяги). В безразмерных переменных уравнения плоского движения точки имеют вид (см., например, [73])

$$\begin{gathered} \dot r = v_r, \qquad \dot v_r = v_\varphi^2 r^{-1} - r^{-2} + a_r, \\ \dot\varphi = v_\varphi r^{-1}, \quad \dot v_\varphi = -v_r v_\varphi r^{-1} + a_\varphi, \qquad (3.5.1) \\ r(0) = r^0, \quad v_r(0) = v_r^0, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad v_\varphi(0) = v_\varphi^0. \end{gathered}$$

Здесь r, φ — полярные координаты точки; v_r, v_φ — радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости (рис. 3.5), a_r, a_φ — соответствующие константы вектора тяги. Управляющие воздействия предполагаются малыми по сравнению с минимальным значением силы тяготения, т. е. $(a_r^2 + a_\varphi^2)^{1/2} \ll r_{\max}^{-2}$. Движение предполагается таким, что оскулирующий эксцентриситет орбиты ограничен неравенствами $e_1 \leqslant e \leqslant e_2$, где $e_1 > 0$, $e_2 < 1$. Начальные значения r^0, v_r^0, φ^0, v_φ^0 считаются заданными.

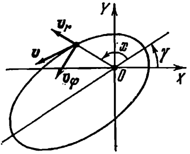


Рис. 3.5.

Известно, что для отрицательных значений полной энергии E при $a_r = a_\varphi \equiv 0$ система (3.5.1) описывает периодические движения точки по замкнутой эллиптической орбите, а ее решение имеет вид (2.1.3).

Приведем систему (3.5.1) к стандартной форме (3.1.2) при помощи следующего набора первых интегралов неуправляемого движения

$$\blacksquare\ {}^1/_2\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)-r^{-1}=E \quad (E<0), \quad rv_\varphi=K,$$
$$r=p\,(1+e\cos x)^{-1}, \quad r={}^1/_2\,(-E)^{-1}\,(1-e\cos\xi),$$
$$t+\delta=(-2E)^{-3/2}\,(\xi-e\sin\xi), \quad \varphi=x+\gamma,$$
$$e=(1+2EK^2)^{1/2}, \quad p=K^2, \quad \omega=(-2E)^{3/2}. \ \square \qquad (3.5.2)$$

Здесь $E<0$ — полная энергия точки, K — ее кинетический момент относительно оси OZ, p — фокальный параметр, e — эксцентриситет орбиты, $\omega(E)=2\pi/T_0(E)$ — частота обращения по орбите, x — истинная аномалия; γ, δ — произвольные постоянные.

Заметим, что постоянные e, p, ω выражаются через E, K посредством последних трех равенств (3.5.2), так что в соотношениях (3.5.2) всего четыре независимых постоянных интегрирования. Переменные x, ξ могут быть исключены из (3.5.2), после чего формулы (3.5.2) определяют общее решение системы (3.5.1) при $a_r=a_\varphi=0$. Величины E, K или e, p характеризуют форму и величину орбиты, а угловая постоянная γ есть угол между линией апсид и осью OX (рис. 3.5).

В качестве фазы ψ неуправляемого движения следует рассматривать переменную

$$\psi=\xi-e\sin\xi, \qquad (3.5.3)$$

которая согласно (3.5.2) линейно зависит от времени и равна $\psi=\omega(t+\delta)$.

Пользуясь соотношениями (3.5.2), (3.5.3), вычислим производную от фазы ψ по истинной аномалии x в неуправляемом движении

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos x)^2}, \quad \psi\,|_{x=0}=0. \qquad (3.5.4)$$

Запишем уравнения управляемого движения (3.5.1) в стандартной форме, приняв в качестве оскулирующих переменных E, K, γ и фазу ψ, связанные с исходными переменными соотношениями (3.5.2), (3.5.3). При этом переменные x, ξ оказываются однозначными и строго возрастающими функциями ψ, причем

$$x(\psi+2\pi)=x(\psi)+2\pi, \quad \xi(\psi+2\pi)=\xi(\psi)+2\pi. \qquad (3.5.5)$$

Дифференцируя указанные соотношения замены и пользуясь (3.5.1), получим систему вида (3.1.2)

$$\dot{E} = v_r a_r + v_\varphi a_\varphi, \quad \dot{K} = r a_\varphi,$$

$$\dot{\gamma} = p^{1/2} e^{-1} [-a_r \cos x + a_\varphi (2 + e \cos x)(1 + e \cos x)^{-1} \sin x],$$

$$\dot{\psi} = \omega(E) + a_r f_{\psi r}(x, e, p) + a_\varphi f_{\psi\varphi}(x, e, p),$$

$$E(0) = E^0, \ K(0) = K^0, \ \gamma(0) = \gamma^0, \ \psi(0) = \psi^0. \quad \square \quad (3.5.6)$$

Здесь v_r, v_φ, r — известные функции E, K, γ, x, согласно (3.5.2). Правые части уравнений являются 2π-периодическими функциями переменной x, которая связана с фазой ψ соотношениями (3.5.4), (3.5.5). В итоге эти неявные функции 2π-периодичны по фазе ψ. Явный вид функций $f_{\psi r}$, $f_{\psi\varphi}$ не выписывается, так как в первом приближении он не существен.

Вместо первых двух уравнений (3.5.6) часто удобнее рассматривать эквивалентные им уравнения, описывающие изменение элементов орбиты e, p

$$\dot{e} = p^{1/2} \{a_r \sin x + a_\varphi [e(1 + \cos^2 x) + 2 \cos x] (1 + e \cos x)^{-1}\}, \quad (3.5.7)$$

$$\dot{p} = 2p^{3/2} a_\varphi (1 + e \cos x)^{-1},$$

$$e(0) = e^0, \quad p(0) = p^0.$$

Начальные значения переменных в (3.5.6), (3.5.7) выражаются через начальные данные (3.5.1) при помощи (3.5.2), (3.5.3).

Для системы (3.5.6), (3.5.7) рассмотрим некоторые постановки задач оптимального управления медленными переменными E, K (или e, p), γ. Управляющие воздействия a_r, a_φ считаем малыми, а время окончания T процесса управления — большой величиной. Полагаем

$$a_r = \varepsilon u_r, \quad a_\varphi = \varepsilon u_\varphi, \ T = \Theta \varepsilon^{-1}, \ 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (3.5.8)$$

где ε — малый параметр, Θ — заданная величина порядка единицы. При условиях (3.5.8) ограниченные управляющие функции u_r, u_φ будут приводить к существенному (порядка единицы) изменению медленных переменных. Критерий качества управления зададим в виде функционала

$$J = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \left(u_r^2 + u_\varphi^2\right) dt \to \min, \qquad (3.5.9)$$

характеризующего расход энергии в случае малой тяги [73].

Введем дополнительную фазовую координату, отвечающую функционалу (3.5.9)

$$\dot{z} = {}^1/_2 \varepsilon \left(u_r^2 + u_\varphi^2\right), \quad z(0) = 0. \qquad (3.5.10)$$

Теперь функционал (3.5.9) приводится к виду (3.1.15), а именно

$$J = z(T). \qquad (3.5.11)$$

Краевые условия в общем случае (см. (3.1.14)) можно задать в виде

$$L_i(E, K, \gamma)|_T = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \qquad (3.5.12)$$

из которых одно или два соотношения могут отсутствовать. В частности, представляют интерес следующие постановки задач:

— полное изменение всех элементов орбиты (формы, размеров и ориентации эллипса), при этом

$$E(T) = E_*, \quad K(T) = K_*, \quad \gamma(T) = \gamma_*,$$
$$e(T) = e_*, \quad p(T) = p_*; \qquad (3.5.13)$$

— частичное изменение формы и размеров орбиты, а также ее поворот в плоскости XY, т. е.

$$L(E, K)_T = 0 \quad (M(e, p)_T = 0), \ \gamma(T) = \gamma_*. \qquad (3.5.14)$$

В (3.5.13) звездочками помечены заданные постоянные, а L, M в (3.5.14) — заданные скалярные функции. Если положить $L \equiv 0$ (или $M \equiv 0$), то условия (3.5.14) требуют лишь поворота линии апсид на заданный угол при произвольном изменении других элементов орбиты. Возможны и другие варианты краевых условий (3.5.12). Поставленные задачи оптимального управления, определяемые соотношениями (3.5.6)—(3.5.14), относятся к типу (3.1.2), (3.1.14), (3.1.15) и могут быть решены при помощи методики § 1.

2. Построение решения первого приближения. Составим гамильтониан системы (3.5.6), (3.5.8), (3.5.10). Соответствующая z сопряженная переменная равна $p_z = -1$. Из условия максимума функции Гамильтона (3.1.17) для системы (3.5.6), (3.5.8), (3.5.10) получим управление в форме (3.1.18)

$$\begin{aligned} u_r^* &= p_E v_r + p_\gamma f_{\gamma r} + q f_{\psi r}, \\ u_\varphi^* &= p_E v_\varphi + p_K r + p_\gamma f_{\gamma\varphi} + q f_{\psi\varphi}, \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

где $f_{\gamma r}$, $f_{\gamma\varphi}$ — коэффициенты при a_r, a_φ в уравнении (3.5.4) для γ, а p_E, p_K, p_γ — сопряженные переменные, соответствующие E, K, γ. Одновременно определим максимум гамильтониана в форме (3.1.20)

$$H^* = {}^1/_2 \varepsilon \left(u_r^{*2} + u_\varphi^{*2}\right) + \omega q. \tag{3.5.16}$$

Далее при помощи соотношений (3.1.32), (3.5.15), (3.5.16) вычислим гамильтониан усредненной системы. При этом используем равенство $\langle q \rangle = \varepsilon\beta$, см. п. 5 § 1. Вычисление средних по ψ приводим к вычислению средних по x на основании соотношений (3.5.4), а именно

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\langle H^* \rangle\right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{(1-e^2)^{3/2}}{2\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{H^* dx}{(1+e\cos x)^2}\right]_{\varepsilon=0}. \tag{3.5.17}$$

Обозначая усредненные переменные теми же буквами, что и исходные, получим после вычислений функцию Гамильтона усредненной системы

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}\langle H^* \rangle\right]_{\varepsilon=0} = \Phi + \omega(E)\beta, \quad \omega = (-2E)^{3/2}. \tag{3.5.18}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} \Phi(E, K, p_E, p_K, p_\gamma) &= \frac{1}{2}\left\langle\left(u_r^{*2} + u_\varphi^{*2}\right)_{q=0}\right\rangle = \\ &= -Ep_E^2 + \frac{(2+3e^2)p^2}{4(1-e^2)}p_K^2 + \frac{(5-4e^2)p}{4e^2(1-e^2)}p_\gamma^2 + Kp_E p_K, \\ e^2 &= 1 + 2EK^2, \quad p = K^2. \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

При использовании уравнений (3.5.7) вместо первых двух уравнений системы (3.5.6) аналогично изложенному выше получим гамильтониан усредненной системы в виде (3.5.18), где

$$\Phi(e, p, p_e, p_p, p_\gamma) = \frac{5}{4} p p_e^2 + \frac{(2+3e^2) p^3}{(1-e^2)^2} p_p^2 + \\ + \frac{(5-4e^2) p}{4e^2(1-e^2)} p_\gamma^2 - \frac{5ep^2}{1-e^2} p_e p_p. \quad (3.5.20)$$

Отметим, что соотношение (3.5.20) может быть получено из (3.5.19) при помощи замены E, K на e, p (см. (3.5.19)) и соответствующей замены сопряженных переменных.

Гамильтонианы (3.5.18) — (3.5.20) полностью определяют усредненные системы (3.1.31) для двух рассматриваемых наборов медленных переменных. Краевые условия (3.1.31) получаем известным способом на основе (3.5.11)—(3.5.14).

Отметим, что полученные системы обладают первыми интегралами $\Phi + \omega\beta = \mathrm{const}$ (см. (3.1.32)), а также $p_\gamma = \mathrm{const}$ (γ — циклическая координата). Поэтому автономная система 4-х уравнений для E, K, p_E, p_K (или e, p, p_e, p_p), обладающая первым интегралом $\Phi + \omega\beta$, интегрируется независимо. После этого переменные γ, z определяются квадратурами. Управление первого приближения находится по формулам (3.5.15), где $q = 0$, а приближенное значение функционала получим минимизацией по β выражения $J_0(\beta) = z(T)$.

3. Пример. Построим приближенное решение задачи оптимального управления с краевым условием вида (3.5.14), а именно, с условием на полную энергию $E(T) = E_* \leqslant 0$. Остальные переменные в конце процесса не фиксируются. Из условий трансверсальности следует $p_\gamma = \mathrm{const} = 0$. Тогда согласно гамильтоновой системе с гамильтонианом (3.5.18), (3.5.19) получим

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial p_\gamma}\right|_{p_\gamma = 0} = 0, \quad \gamma = \gamma^0, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (3.5.21)$$

Выпишем при помощи (3.5.18), (3.5.19), (3.5.21) уравнение и условие трансверсальности для переменной p_K

$$\frac{dp_K}{d\tau} = -p_E p_K - \frac{\partial}{\partial K} \frac{(2+3e^2) p^2}{4(1-e^2)} p_K^2, \quad p_K(\Theta) = 0. \quad (3.5.22)$$

Отсюда вытекает: $p_K \equiv 0$. В результате усредненная краевая задача приводится к виду

$$\frac{dE}{d\tau} = -2Ep_E, \quad \frac{dK}{d\tau} = Kp_E,$$
$$\frac{dp_E}{d\tau} = 3(-2E)^{1/2}\beta + p_E^2, \tag{3.5.23}$$
$$E(0) = E^0, \quad E(\Theta) = E_*, \quad K(0) = K^0.$$

Система (3.5.23) допускает интегралы

$$EK^2 = \text{const}, \quad (-2E)^{3/2}\beta - Ep_E^2 = h = \text{const}. \tag{3.5.24}$$

Первый из интегралов (3.5.24), вытекающий из первых двух уравнений (3.5.23), означает в силу (3.5.2), что $e = \text{const}$. Таким образом, согласно (3.5.21), (3.5.24) для оптимальных траекторий сохраняются в первом приближении эксцентриситет e и угловое положение γ линии апсид оскулирующей орбиты.

Второй из интегралов (3.5.24) следует из постоянства гамильтониана (3.5.18), (3.5.19) (см. также (3.1.32)) и из установленных равенств $p_\gamma = p_K \equiv 0$.

Построим сначала решение краевой задачи (3.5.23) при $\beta = 0$. Для этого из второго интеграла (3.5.24) найдем

$$p_E = C_1(-E)^{-1/2}, \quad C_1 = \text{const} \tag{3.5.25}$$

и подставим в первое уравнение (3.5.23). Интегрируя это уравнение и удовлетворяя краевым условиям (3.5.23) для E, найдем $E(\tau)$ и постоянную C_1. После этого K и p_E находим при помощи первого интеграла (3.5.24) и соотношения (3.5.25). В результате получим

$$E(\tau) = E^0\sigma^2(\tau), \quad K(\tau) = K^0\sigma^{-1}(\tau),$$
$$p_E(\tau) = \frac{1}{\Theta}\left(1 - \sqrt{\frac{E_*}{E^0}}\right)\sigma^{-1}(\tau), \tag{3.5.26}$$
$$\sigma(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\Theta}\left(1 - \sqrt{\frac{E_*}{E^0}}\right).$$

Вычислим функции E, K, p_E, определенные формулами (3.5.26) для $\beta = 0$, при значениях $\beta \neq 0$. Для этого найдем решение краевой задачи (3.5.23) в виде разложения по степеням β и затем вычислим $J''_0(0)$ согласно равенству (3.1.42). Получим

$$J''_0(0) = -(3/20)E^0\Theta[3 + 4\sigma(\Theta) + 3\sigma^2(\Theta)] > 0,$$

так что условия быстрой осцилляции (см. 3.1.36)) и локального минимума функции $J_0(\beta)$ (см. 3.1.42)) выполнены.

Приближенное значение функционала $J_0(\beta)$ определяем при помощи соотношений (3.5.10), (3.5.19) и $p_T = p_K = 0$ в виде

$$J_0(\beta) = \int_0^\Theta \Phi d\tau = -\int_0^\Theta E p_E^2 d\tau. \tag{3.5.27}$$

Подставим в (3.5.27) p_E из первого уравнения (3.5.23)

$$J_0(\beta) = -\int_0^\Theta \left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 \frac{d\tau}{4E} = \int_0^\Theta \left[\frac{d(-E)^{1/2}}{d\tau}\right]^2 d\tau. \tag{3.5.28}$$

Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского для пары функций $d(-E)^{1/2}/d\tau$ и 1, а затем краевыми условиями (3.5.23) для E, получим из (3.5.28) неравенство

$$J_0(\beta) \geqslant \frac{1}{\Theta}\left[\int_0^\Theta \frac{d(-E)^{1/2}}{d\tau} d\tau\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{\Theta}[(-E_*)^{1/2} - (-E^0)^{1/2}]^2. \tag{3.5.29}$$

С другой стороны, подставляя $E(\tau)$ из (3.5.26) в формулу (3.5.28), получим при $\beta = 0$

$$J_0(0) = \Theta^{-1}[(-E_*)^{1/2} - (-E^0)^{1/2}]^2. \tag{3.5.30}$$

Из (3.5.29), (3.5.30) следует, что $\beta = 0$ есть точка абсолютного минимума по β функции $J_0(\beta)$.

Управление в форме синтеза получим, подставляя в (3.5.15) соотношения $p_T = p_K = q = 0$ и (3.5.26) для p_E и заменяя затем $\Theta \to \Theta - \tau$, $\tau \to 0$, $E^0 \to E$. В результате найдем

$$
\begin{aligned}
u_r^* &= \frac{v_r}{\Theta-\tau}\left(1-\sqrt{\frac{E_*}{E}}\right) = \\
&= \frac{1}{\Theta-\tau}\left(1-\sqrt{\frac{E_*}{E}}\right)\frac{e}{K}\sin(\varphi-\gamma), \\
u_\varphi^* &= \frac{v_\varphi}{\Theta-\tau}\left(1-\sqrt{\frac{E_*}{E}}\right) = \\
&= \frac{1}{\Theta-\tau}\left(1-\sqrt{\frac{E_*}{E}}\right)\frac{1+e\cos(\varphi-\gamma)}{K}.
\end{aligned}
\qquad (3.5.31)
$$

Здесь v_r, v_φ выражены через оскулирующие элементы посредством (3.5.2). Таким образом, приближенное оптимальное управление оказывается тангенциальной тягой, т. е. направлено по касательной к траектории. Формулы (3.5.26), (3.5.30), (3.5.31) полностью определяют искомое решение первого приближения, оптимальную траекторию, функционал и управление. Полагая, в частности, $E_* = 0$, получим решение задачи об оптимальном разгоне до параболической скорости. Необходимая для этого величина расхода энергетического ресурса согласно (3.5.30) равна $|E^0|\Theta^{-1}$.

Отметим, что управляемое движение точки в центральном поле под действием малой тангенциальной тяги исследовано в ряде работ (см. [159, 88, 73]).

ГЛАВА 4

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ С УПРАВЛЯЕМЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ РАВНОВЕСИЯ

В главе 4 исследуются задачи оптимального управления колебательными системами типа маятника с управляемым положением равновесия (точкой подвеса). Управляющее воздействие считается малым, и применяется методика глав 2, 3.

В § 1 приведено асимптотическое решение задачи оптимального управления нелинейными колебаниями и вращениями плоского маятника. В качестве управления берется ускорение точки подвеса.

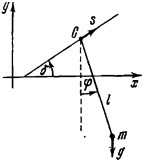


Рис. 4.1.

В § 2 приводится решение ряда задач оптимального по быстродействию управления движением механических систем, содержащих линейные и нелинейные колебательные звенья. Управление осуществляется при помощи регулируемого по скорости положения равновесия.

Основные результаты главы 4 опубликованы в работах [16, 20].

§ 1. Управление движением маятника посредством изменения ускорения точки подвеса

1. Постановка задачи управления. Исследуем управляемое движение маятника, точка подвеса которого O перемещается вдоль прямой Os (рис. 4.1). Уравнение движения математического маятника постоянной длины l имеет вид (см. (2.1.20))

$$\ddot{\varphi} + gl^{-1}\sin\varphi = -\ddot{s}l^{-1}\cos(\varphi - \delta),$$
$$\varphi(t_0) = \varphi^0, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}^0. \tag{4.1.1}$$

Здесь φ — угловое отклонение от вертикали, g — ускорение сил тяжести; $\ddot{s}$ — ускорение точки подвеса вдоль направляющей, наклоненной под постоянным углом δ к горизонту; t_0, φ^0, $\dot{\varphi}^0$ — начальные данные. Предполагается, что величина задаваемого ускорения удовлетворяет условию $|\ddot{s}| \leqslant w \ll g$. Введением безразмерной независимой переменной $\theta = g^{1/2}l^{-1/2}(t - t_0)$ уравнение (4.1.1) приводится к виду

$$\varphi'' + \sin\varphi = -\varepsilon u \cos(\varphi - \delta),$$
$$\varphi(0) = \varphi^0,\ \varphi'(0) = l^{1/2}g^{-1/2}\dot{\varphi}^0. \tag{4.1.2}$$

Здесь штрих означает производную по θ, и введено обозначение $\varepsilon u = \ddot{s}g^{-1}$, где $\varepsilon = wg^{-1} \ll 1$ — малый параметр, $|u| \leqslant 1$.

Для применения развитой в главе 3 методики совершим переход к переменным «энергия — фаза» при помощи замены: $\varphi = \varphi_0(E, \psi)$, $\varphi' = \varphi_0'(E, \psi)$. Здесь φ_0, φ_0' — общее решение порождающего уравнения (4.1.2) при $\varepsilon = 0$; E — энергия колебаний или вращений, $\psi = \omega(E)\theta + \psi_0$ — фаза движения, $\omega(E)$ — частота. Общее решение, как известно (см. § 4 главы 3), выписывается при помощи эллиптических функций.

Уравнения возмущенного движения в переменных E, ψ можно получить на основе известных интегралов невозмущенного движения (см. (3.1.8), (3.1.9))

■ $$\frac{dE}{d\theta} = -\varepsilon u\varphi' \cos(\varphi - \delta),$$

$$E(0) = E^0 = \frac{l}{2g}\dot{\varphi}^{02} - 1 - \cos\varphi^0,$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \omega(E) - \\ - \varepsilon u\varphi' \cos(\varphi - \delta)\int\limits_{\varphi^0}^{\varphi}\left(\frac{\omega'(E)}{\varphi'} - \frac{\omega}{\varphi'^2}\frac{\partial\varphi'}{\partial E}\right)d\varphi_1, \quad \psi(0) = 0,$$

$$|u| \leqslant 1, \quad T_0(E) = \int\frac{d\varphi}{\varphi'(E, \varphi)} = \frac{2\pi}{\omega(E)},$$
$$\varphi' = \pm[2(E + 1 + \cos\varphi)]^{1/2}. \quad \square \tag{4.1.3}$$

Здесь $\omega'(E) = d\omega/dE$; $\varphi' = d\varphi/d\theta$ есть функция от E, φ, приведенная в (4.1.3). Она знакопостоянна в случае вращений ($E > 0$) и меняет знак в точках $\varphi = \pm\varphi_0$, $\varphi_0 = \arccos(-E-1)$ в режиме колебаний ($-2 < E < 0$). Интеграл (4.1.3) для периода колебаний берется по замкнутому контуру в плоскости φ, φ' для фиксированного E, а для вращений — по промежутку $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Как и в формуле (3.4.2), здесь $E = -2$ в нижнем положении равновесия.

Для стандартной системы (4.1.3) рассматриваются следующие задачи оптимального управления на интервале $0 \in [0, T]$, где $T = \Theta\varepsilon^{-1}$, $\Theta \sim 1$.

А. Задача с закрепленным временем T (см. (3.1.15))

$$\pm E(T) \to \min. \tag{4.1.4}$$

Б. Задача оптимального быстродействия по энергии, T не фиксировано (см. (3.1.14), (3.3.3))

$$E(T) = E^*, \quad \Theta \to \min. \tag{4.1.5}$$

Задачи А, Б являются двойственными и удовлетворяют принципу максимума (см. §§ 1, 3 главы 3).

2. Построение решения первого приближения. Оптимальное управление u^*, определяемое согласно (3.1.17), (3.1.18), в первом приближении имеет вид, аналогичный (3.4.5) (см. п. 7, § 1 главы 3)

$$u^* = -\operatorname{sign}[p\varphi'\cos(\varphi - \delta)]. \tag{4.1.6}$$

Здесь p — переменная, сопряженная E. Переменная, сопряженная быстрой фазе ψ, имеет порядок ε для всех $\theta \in [0, T]$. Поэтому в предположении $p \neq 0$ она полагается равной нулю при построении управления первого приближения.

Выпишем уравнение для усредненной переменной ξ и граничное условие для задачи Б согласно (3.1.31), (4.1.3)—(4.1.6)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = I(\xi, \delta)\operatorname{sign}\eta, \quad \xi(0) = E^0, \tag{4.1.7}$$

$$\tau = \varepsilon\theta \in [0, \Theta], \; I(\xi, \delta) = \langle|\varphi'\cos(\varphi - \delta)|\rangle,$$

$$\text{Б.} \;\; \xi(\Theta) = E^*.$$

Здесь ξ, η — усредненные значения медленных переменных E, p, а τ — медленное время. Из (4.1.7) следует, что наилучший результат (минимальное значение функционала в первом приближении) достигается при условии, что переменная η принимает значения постоянного знака (знака E^*-E^0). Второе (скалярное) уравнение для η из (3.1.31) показывает, что такое решение имеет место, если параметр β положить равным нулю. В этом случае уравнение для η однородно, и его нетривиальное решение не обращается в нуль. Таким образом, используя еще факт близости η и p, а также краевые условия при $\tau=\Theta$, получим из (4.1.6)

$$u^* = -\operatorname{sign}[\varphi' \cos(\varphi-\delta)] \operatorname{sign}\eta, \tag{4.1.8}$$

$$\text{А.}\quad \operatorname{sign}\eta = \mp 1, \qquad \text{Б.}\quad \operatorname{sign}\eta = \operatorname{sign}(E^*-E^0).$$

Построенное приближенное управление (4.1.8) обладает свойством локальной оптимальности: оно в каждый момент обеспечивает максимальную скорость изменения E, см. п. 4, § 2 главы 1.

Вычислим правую часть уравнения (4.1.7). В режиме вращений маятника ($\xi>0$, $\varphi' \geqslant \mathrm{const} > 0$) находим

$$I_2(\xi,\delta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi' \cos(\varphi-\delta)|\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{T_2(\xi)}\int_0^{2\pi} |\cos(\varphi-\delta)|\, d\varphi = \frac{2}{k_2 K(k_2)}, \tag{4.1.9}$$

$$k_2 = \sqrt{2}\,(\xi+2)^{-1/2} < 1, \quad T_2(\xi) = 2k_2 K(k_2).$$

Здесь k_2 — модуль полного эллиптического интеграла первого рода K, T_2 — период вращательного движения (см. (3.4.10)).

В случае колебаний маятника правая часть уравнения (4.1.7) равна

$$I_1(\xi,\delta) = \frac{2}{T_1(\xi)}\int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} |\cos(\varphi-\delta)|\, d\varphi = \frac{2}{T_1(\xi)}\int_{-\varphi_0-\delta}^{\varphi_0-\delta} |\cos x|\, dx,$$

$$\varphi_0 = \arccos(-\xi-1), \quad T_1(\xi) = 4K(k_1), \tag{4.1.10}$$

$$k_1 = (\xi+2)^{1/2}/\sqrt{2}.$$

Здесь T_1 — период колебаний, k_1 — модуль (см.

(3.4.9)). Разложением $|\cos x|$ в ряд Фурье [72] для функции I_1 получим выражение

$$I_1(\xi, \delta) = \frac{8}{\pi T_1(\xi)} \left\{ \varphi_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j(4j^2-1)} \sin[2j\varphi_0(\xi)] \cos(2j\delta) \right\}. \quad (4.1.11)$$

При помощи выражений (4.1.9) — (4.1.11) можно построить искомое решение, так как уравнение (4.1.7) интегрируется

$$\int_{E^0}^{\xi} \frac{d\xi_1}{I_{1,2}(\xi_1, \delta)} = \tau \operatorname{sign} \eta, \quad \xi \in [E^0, \xi^*], \quad \tau \in [0, \Theta]. \quad (4.1.12)$$

Здесь $\operatorname{sign} \eta$ берется из формулы (4.1.8). Из двух величин Θ, $\xi^* = \xi(\Theta)$, связанных формулой (4.1.12), одна задана (Θ в задаче А, $\xi^* = E^*$ в задаче Б), а другая является приближенным оптимальным значением функционала. Приближенные решения поставленных задач построены.

3. Анализ решений. Исследуем зависимость решений от параметра $\delta \in [0, \pi/2]$ (см. рис. 4.1). В режиме вращений ($\xi > 0$) на основании (4.1.9) функция I_2 не зависит от δ. Дифференцируя по δ зависимость (4.1.10) для режима колебаний, получим

$$\frac{\partial I_1}{\partial \delta} = \frac{2}{T_1} [\,|\cos(\varphi_0 + \delta)| - |\cos(\varphi_0 - \delta)|\,]. \quad (4.1.13)$$

Если амплитуда φ_0 принимает значения 0, $\pi/2$ или π, что соответствует $\xi = -2, -1, 0$, то производная (4.1.13) равна нулю тождественно по δ. В остальных случаях производная (4.1.13) обращается в нуль лишь при $\delta = 0$ и и $\delta = \pi/2$, следовательно, I_1 монотонно зависит от δ и достигает максимума на одном из концов интервала $\delta \in [0, \pi/2]$. При помощи (4.1.10) найдем

$$\begin{aligned} I_1(\xi, 0) &= 4T_1^{-1} \sin\varphi_0, & -2 \leqslant \xi \leqslant -1, \\ I_1(\xi, 0) &= 4T_1^{-1}(2 - \sin\varphi_0), & -1 < \xi \leqslant 0, \quad (4.1.14) \\ I_1(\xi, \pi/2) &= 4T_1^{-1}(1 - \cos\varphi_0), & -2 \leqslant \xi \leqslant 0. \end{aligned}$$

Сопоставляя формулы (4.1.14), определим, что максимум $I_1(\xi, \delta)$ по δ достигается при $\delta = 0$, если $\xi \leqslant -1$, $\varphi_0 < \pi/2$ и при $\delta = \pi/2$, если $-1 \leqslant \xi \leqslant 0$, $\varphi_0 \geqslant \pi/2$.

В режиме вращений ($\xi > 0$), а также при $\xi = -2$, $\xi = -1$, $\xi = 0$ правая часть системы (4.1.7) не зависит от δ. Таким образом, скорость изменения $d\xi/d\tau$ в оптимальных режимах зависит от угла наклона направляющей δ следующим образом. Для колебаний малой амплитуды ($\varphi_0 < \pi/2$) наивыгоднейшим с точки зрения эффективности управления будет горизонтальное перемещение подвеса ($\delta = 0$), для колебаний большой амплитуды ($\varphi_0 > \pi/2$) — вертикальное перемещение ($\delta = \pi/2$), а для

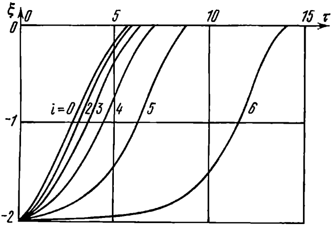


Рис. 4.2.

вращений все углы равноправны. Если оба граничных значения $\xi(0) = E^0$, $\xi^* = E(\Theta)$ лежат в области $\xi < -1$ (или $\xi > -1$), то с точки зрения быстродействия наивыгоднейшим будет $\delta = 0$ ($\delta = \pi/2$).

Зависимости $\xi(\tau, \delta)$, полученные для режима колебаний в результате численного расчета по формуле (4.1.12), представлены на рис. 4.2. Здесь принято $E^0 = -2$, т. е. началу движения соответствует нижнее положение равновесия, и $\operatorname{sign} \eta = 1$ (задача максимизации энергии). Параметр δ принимает значения $\delta = \pi i/12$, причем $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 6$ указано цифрами на рис. 4.2. Кривая с $i = 1$ не приведена, так как она практически совпадает с кривой для $i = 0$.

Отметим, что в нижнем положении равновесия ($\xi = -2$, $\varphi_0 = 0$) функция I_1 обращается в нуль (см. (4.1.10)), так что точка $\xi = -2$ является точкой покоя уравнения (4.1.7). Однако при $0 \leqslant \delta < \pi/2$ существует единственное решение, не равное константе и попадающее (или покидающее) эту точку за конечное время (аналогично (3.4.11), (3.4.17)). В случае же $\delta = \pi/2$ асимптотика при $\xi \to -2$ будет иной: здесь $I_1 \sim \varphi_0^2$, а не $\sim \varphi_0$, как в общем случае (см. (4.1.14)). Время движения в точку $\xi = -2$ оказывается бесконечным. Поэтому на рис. 4.2 для кривой $i = 6$ принято $\xi(0) = -1{,}999$.

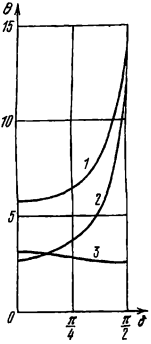


Рис. 4.3.

Как и в § 4 главы 3, с помощью зависимостей типа рис. 4.2 можно получить весь набор оптимальных траекторий задач А, Б для режима колебаний. Для этого зададим δ, выберем соответствующую кривую рис. 4.2 и найдем τ_0, для которого $\xi(\tau_0) = E^0 < 0$. В случае задачи А от найденного τ_0 отложим отрезок $\Delta\tau = \Theta$ в сторону, противоположную знаку в функционале (4.1.4). Если $\xi(\tau_0 \mp \Theta) < 0$, то полученный отрезок кривой и будет приближенной оптимальной траекторией. В случае задачи Б конец траектории определяется значением $\xi = E^* < 0$, а время быстродействия определяется из условия $\xi(\tau_0 + \Theta \operatorname{sign}(E^* - E^0)) = E^*$.

На рис. 4.3 приводятся зависимости $\Theta(\delta, E^0, E^*)$ времен оптимального быстродействия из точки $\xi = E^0$ в точку $\xi = E^*$ как функции угла δ. Кривая *1* соответствует переводу маятника из нижнего положения равновесия в верхнее, т. е. $E^0 = -2$, $E^* = 0$. Кривая *2* соответствует $E^0 = -2$, $E^* = -1$, а кривая *3* — $E^0 = -1$, $E^* = 0$. Зависимость *1* получается сложением зависимостей *2*, *3*.

Для режима вращения правая часть уравнения (4.1.7) не зависит от δ. Усредненное уравнение (4.1.7), (4.1.9) с точностью до постоянного коэффициента и несколько иных обозначений совпадают с уравнением (3.4.13), подробно исследованным в § 4 главы 3. Соответствующая зависимость энергии от времени поэтому получится из рис. 3.4 путем изменения масштаба.

4. Обобщения задачи управления плоскими движениями маятника. Рассмотрим задачу оптимального управления плоскими движениями физического маятника, точка подвеса которого может перемещаться в вертикальной плоскости (см. рис. 4.4). Уравнение движения имеет вид

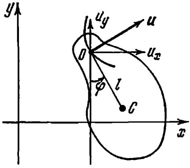


Рис. 4.4.

$$(J+ml^2)\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi = -ml(\ddot{x}_o\cos\varphi+\ddot{y}_o\sin\varphi), \tag{4.1.15}$$

где J — момент инерции маятника относительно оси качаний O, l — расстояние от точки O до центра инерции маятника C, а x_o, y_o — координаты точки O. Остальные обозначения в (4.1.15) — те же, что и в (4.1.1). Аналогично п. 1, уравнение (4.1.15) приводится к виду

$$\begin{gathered}\varphi''+\sin\varphi=-\varepsilon(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi),\\ \theta=(mgl)^{1/2}(J+ml^2)^{-1/2}t,\\ \varepsilon u_x=\ddot{x}_o g^{-1},\quad \varepsilon u_y=\ddot{y}_o g^{-1}.\end{gathered} \tag{4.1.16}$$

Здесь θ — безразмерное время, εy_x, εu_y — малые управляющие воздействия по осям x, y соответственно.

Уравнение для возмущенной энергии $E=\frac{1}{2}\varphi'^2-1-\cos\varphi$ имеет вид

$$E'=-\varepsilon\varphi'(u_x\cos\varphi+u_y\sin\varphi),\quad E(0)=E^0\geqslant-2. \tag{4.1.17}$$

В п.п. 1—3 построено решение задач оптимального управления (4.1.4), (4.1.5) с ограничениями

$$u_x^2+u_y^2\leqslant 1,\quad u_y u_x^{-1}=\operatorname{tg}\delta=\mathrm{const}. \tag{4.1.18}$$

Рассмотрим теперь те же задачи А, Б для двух других типов ограничений, когда область допустимых значений u_x, u_y есть прямоугольник

$$|u_x|\leqslant u_x^0,\quad |u_y|\leqslant u_y^0,\quad u_x^0,\ u_y^0=\mathrm{const}>0 \tag{4.1.19}$$

или эллипс

$$a^2 u_x^2 + b^2 u_y^2 \leqslant 1, \quad a, b = \mathrm{const} > 0. \tag{4.1.20}$$

Для ограничений (4.1.19) приближенное оптимальное управление определяется подобно (4.1.8) и равно

$$\begin{aligned} u_x^* &= -u_x^0 \operatorname{sign}(\eta\varphi' \cos\varphi), \\ u_y^* &= -u_y^0 \operatorname{sign}(\eta\varphi' \sin\varphi). \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Здесь $\operatorname{sign}\eta$ указан в (4.1.8). Подставим (4.1.21) в (4.1.17) и усредним аналогично (4.1.7). Полученное усредненное уравнение записывается при помощи функций (4.1.9)—(4.1.11).

В режиме вращений ($\xi > 0$) найдем

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{4}{T_2(\xi)} \left(u_x^0 + u_y^0\right) \operatorname{sign}\eta = \frac{2\left(u_x^0 + u_y^0\right)}{k_2 K(k_2)} \operatorname{sign}\eta. \tag{4.1.22}$$

Для режима колебаний ($\xi < 0$) имеем

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \left[u_x^0 I_1(\xi, 0) + u_y^0 I_1\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right)\right] \operatorname{sign}\eta. \tag{4.1.23}$$

Из уравнений (4.1.22), (4.1.23) следует, что при $u_x^0 = u_y^0 = 1$ управление (4.1.21) более эффективно, чем (4.1.8). Соответствующие правые части уравнений (4.1.22), (4.1.23) по абсолютной величине больше, чем (4.1.9), (4.1.10). Это естественно, так как ограничение (4.1.19) при $u_x^0 = u_y^0 = 1$ «шире», чем (4.1.8).

Для ограничений (4.1.20) усредненное уравнение (4.1.17) можно представить в форме

$$\begin{gathered} \frac{d\xi}{d\tau} = L_{1,2}(\xi) \operatorname{sign}\eta, \\ L_{1,2}(\xi) = \left\langle |\varphi'| \left(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi\right)^{-1/2} \right\rangle. \end{gathered} \tag{4.1.24}$$

Приближенное оптимальное управление в форме синтеза имеет вид

$$\begin{aligned} u_x^* &= -\left(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi\right)^{-1/2} \cos\varphi \operatorname{sign}\eta, \\ u_y^* &= -\left(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi\right)^{-1/2} \sin\varphi \operatorname{sign}\eta. \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

В режиме вращений функция L_2 в (4.1.24) равна

$$L_2(\xi) = \frac{4}{aT_2(\xi)} K\left(\frac{(a^2-b^2)^{1/2}}{a}\right), \quad a > b,$$

$$L_2(\xi) = \frac{4}{bT_2(\xi)} K\left(\frac{(b^2-a^2)^{1/2}}{b}\right), \quad a < b, \qquad (4.1.26)$$

$$L_2(\xi) = 2\pi a^{-1} T_2^{-1}(\xi), \qquad a = b.$$

Для режима колебаний функция L_2 в (4.1.24) выражается через полные и неполные эллиптические интегралы. Ограничимся выражением для случая, когда область (4.1.20) — круг единичного радиуса [20]

$$L_1(\xi) = 4\varphi_0(\xi) T_1^{-1}(\xi), \quad \varphi_0 = \arccos(-\xi - 1). \qquad (4.1.27)$$

Уравнения (4.1.22)—(4.1.24) интегрируются в квадратурах. Отметим, что управление (4.1.25) с ограничением (4.1.20) в виде единичного круга, как и следовало ожидать, более эффективно, чем управление (4.1.8) для ограничений (4.1.18). Это следует из того, что $L_1 \geqslant I_1$, $L_2 \geqslant I_2$ (см. (4.1.9), (4.1.14) и (4.1.26), (4.1.27)).

§ 2. Колебательные системы с управляемым по скорости положением равновесия

1. Постановка задачи. Исследуется нелинейная колебательная система с единственной обобщенной координатой y. Система имеет изолированное положение равновесия $y = x$, которое может перемещаться со скоростью v. Потенциальная энергия системы $\Pi(z)$ зависит только от относительного смещения $z = y - x$. Функцию $\Pi(z)$ считаем достаточно гладкой и имеющей строгий минимум в точке $z = 0$; не ограничивая общности, полагаем $\Pi(0) = 0$. Движение системы описывается уравнениями

$$\ddot{y} + F(y - x) = 0, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$$
$$\dot{x} = v, \quad x(0) = x^0, \qquad (4.2.1)$$
$$F = \partial\Pi/\partial y, \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2.$$

Здесь индексом ^{0} отмечены начальные данные, v_1, v_2 — постоянные. Так как точка $z = 0$ $(y = x)$ — точка изолированного минимума $\Pi(z)$, то $F(0) = 0$, а $zF(z) > 0$ в некоторой окрестности этой точки.

Для системы (4.2.1) поставим следующие задачи оптимального управления.

А. Задача наискорейшего гашения колебаний. Требуется за минимальное время T погасить относительные колебания системы, т. е. привести систему (4.2.1) в состояние

$$y(T) = x(T), \quad \dot{y}(T) = 0. \tag{4.2.2}$$

Из (4.2.1) следует, что при $v \equiv 0$ для $t > T$ система остается в устойчивом положении равновесия (4.2.2).

Б. Задача наискорейшего перемещения с гашением колебаний. Требуется за минимальное время T перевести систему (4.2.1) в состояние

$$y(T) = x(T) = x^*, \quad \dot{y}(T) = 0. \tag{4.2.3}$$

Здесь x^* — заданная величина. При $t > T$ система останется в покое, если положить $v \equiv 0$.

В. Задача наискорейшего разгона. Требуется за минимальное время T привести систему (4.2.1) в равномерное движение с заданной скоростью v^*

$$y(T) = x(T), \quad \dot{y}(T) = v^*, \quad v^* \in [v_1, v_2]. \tag{4.2.4}$$

При $t > T$ система будет перемещаться без колебаний, если положить $v = v^*$.

Ниже в главах 6—8 подобные задачи будут подробно исследованы и решены для ряда колебательных систем. Эти задачи типичны для процессов управления колебаниями и часто встречаются на практике, например, при управлении грузоподъемными машинами. В данном параграфе они будут исследованы на основе асимптотических методов глав 2, 3 в случаях, допускающих введение малого параметра.

2. Некоторые механические модели. К системе (4.2.1) сводятся многие процессы управления колебаниями. Рассмотрим несколько простых механических моделей.

а) Маятник с управляемой точкой подвеса (рис. 4.5). Движение математического маятника массы m, точка подвеса которого движется со скоростью v, описывается уравнениями

$$\ddot{y} + gl^{-1}(y - x) = 0, \quad \dot{x} = v, \quad y = x + l\varphi. \tag{4.2.5}$$

Здесь x — координата точки подвеса, φ — угол отклонения маятника, который предполагается малым, l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести. На скорость v могут быть наложены ограничения (4.2.1)

$$v_1 \leqslant v \leqslant v_2, \quad v_1, v_2 = \text{const}. \tag{4.2.6}$$

Система (4.2.5), (4.2.6) моделирует системы типа мостовых кранов.

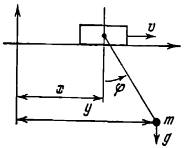


Рис. 4.5.

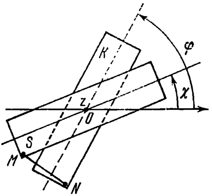


Рис. 4.6.

б) Управление крутильными колебаниями. Рассмотрим систему твердых тел S, K, изображенных в плане на рис. 4.6. Тело S вращается с управляемой угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OZ, угол его поворота обозначен через χ. Тело K массы m подвешено к телу S на подвесе, состоящем из четырех симметрично расположенных гибких нерастяжимых нитей (тросов) длины l (одна из нитей MN изображена на рис. 4.6). В состоянии равновесия тело K находится строго под телом S. При движении тело K совершает крутильные колебания, обусловленные возвращающим моментом сил тяжести, который возникает из-за отклонения нитей от вертикали. Обозначим через φ угол поворота тела K, угол $\varphi-\chi$ считаем малым. Уравнения движения системы в линейном приближении имеют вид

$$\ddot{\varphi} + \nu^2(\varphi - \chi) = 0, \quad \nu^2 = (1/4)mgd^2I^{-1}l^{-1},$$

$$\dot{\chi} = \omega, \quad \omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2. \tag{4.2.7}$$

Здесь I — момент инерции тела K относительно оси вращения, d — расстояние от этой оси до точек крепления нитей, ω_1, ω_2 — постоянные. Рассматриваемая система моделирует управление угловыми движениями контейнера K на контейнерном перегружателе. Здесь S — поворотное устройство перегружателя. Отметим, что система (4.2.5), (4.2.6) полностью эквивалентна (4.2.7), и обе они относятся к общему типу систем (4.2.1). Для них представляют практический интерес поставленные задачи А, Б, В.

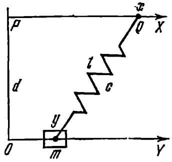


Рис. 4.7.

в) Нелинейная система с упругим элементом. В качестве существенно нелинейного примера рассмотрим систему [63], изображенную на рис. 4.7. Здесь масса m скользит без трения по направляющей OY. По параллельной с ней направляющей PX на расстоянии d, перемещается точка Q, скорость которой v считается управляющим воздействием. Между точкой Q и массой m существует упругая линейная связь (пружина) жесткости c. Пусть l и l_0 — длины растянутой и нерастянутой пружины соответственно, тогда потенциальная энергия П равна

$$\Pi = \Pi(y-x) = {}^1/_2 c(l-l_0)^2,\quad l = [d^2 + (y-x)^2]^{1/2}. \qquad (4.2.8)$$

Здесь x, y — координаты точек Q, m соответственно на осях OY и PX. При $l_0 \leqslant d$ положение равновесия $y = x = \mathrm{const}$ — устойчиво, при $l_0 > d$ — неустойчиво. В последнем случае система имеет также два устойчивых положения равновесия $y = x \pm \left(l_0^2 - d^2\right)^{1/2}$. Если $d = 0$, то система линейна (при $y < x$ или $y > x$) и описывается уравнениями типа (4.2.5), (4.2.7). Ниже для определенности рассматривается случай $l_0 \leqslant d$.

Уравнения движения системы с потенциальной энергией (4.2.8) имеют вид (4.2.1)

$$m\ddot{y} = -c(y-x)(1 - l_0 l^{-1}),\quad \dot{x} = v. \qquad (4.2.9)$$

Если относительные отклонения малы ($|y-x| < d$), то согласно (4.2.9), (4.2.8) имеем

$$\ddot{y} = -cm^{-1}(y-x)[1 - l_0 d^{-1} + 1/2 l_0 d^{-3}(y-x)^2 - \ldots]. \qquad (4.2.10)$$

С погрешностью $O[(y-x)^3d^{-3}]$ уравнение (4.2.10) принимает вид (4.2.5) или (4.2.7). При $d = l_0$ линейный член в (4.2.10) исчезает, а главным является кубический [63]

$$\ddot{y} = -{}^1\!/_2 cm^{-1}d^{-2}(y-x)^3. \qquad (4.2.11)$$

Отметим, что в однородном поле сил (например, сил тяжести) уравнение (4.2.9) сохраняет вид (4.2.1)

$$m\ddot{y} = -c(y-x)(1-l_0l^{-1}) + F_y, \quad F_y = \text{const}. \qquad (4.2.12)$$

Здесь F_y — проекция силы на ось OY.

При ограничениях (4.2.6) для систем (4.2.9)—(4.2.12) могут быть поставлены задачи А, Б, В.

3. Приведение к управляемой системе с вращающейся фазой. Рассмотрим систему (4.2.1) с ограничениями (4.2.6) и предположим, что скорости v_1, v_2 достаточно малы. Полагая $v = \varepsilon u$, преобразуем систему (4.2.1), (4.2.6) к виду

$$\ddot{y} + F(y-x) = 0, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0,$$
$$\dot{x} = \varepsilon u, \quad x(0) = x^0, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2. \qquad (4.2.13)$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий отношение скорости перемещения положения равновесия к скорости dy/dt самой системы. По порядку величины ε характеризует также отношение перемещения положения равновесия за период колебаний к характерной амплитуде колебаний. Малость ε означает, что за время T процесса управления система совершит, как правило, много $(\sim\varepsilon^{-1})$ колебаний, т. е. $T \sim \varepsilon^{-1}$.

Обозначим через $z(h, \psi)$ общее решение первого уравнения (4.2.13) при $\varepsilon = 0$, зависящее от энергии h и фазы ψ колебаний. Имеем тождественно

$$\omega^2(h)\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2} + F(z) = 0,$$
$$h = \frac{\omega^2(h)}{2}\left(\frac{\partial z(h,\psi)}{\partial\psi}\right)^2 + \Pi(z(h,\psi)), \qquad (4.2.14)$$
$$\psi = \omega(h)t + \psi_0, \quad \Pi(z) = \int_0^z \Pi(z_1)\,dz_1.$$

Здесь $\omega(h)$ — частота колебаний. При помощи замены переменных

$$y = x + z(h, y), \quad \dot{y} = \omega(h)\partial z(h, \psi)/\partial\psi \qquad (4.2.15)$$

перейдем в системе (4.2.13) к переменным h, x, ψ. Для этого продифференцируем равенства (4.2.15) по t, воспользуемся уравнениями (4.2.13) для исключения производных от y, x, а затем разрешим полученные равенства относительно производных новых переменных. После упрощения с учетом первого тождества (4.2.14) получим систему с вращающейся фазой в стандартной форме (3.1.2)

$$\begin{gathered}\dot{h} = \varepsilon\omega z_{\psi\psi}W^{-1}u, \quad \dot{x} = \varepsilon u, \; h(0) = h^0, \quad x(0) = x^0, \\ \dot{\psi} = \omega - \varepsilon(\omega' z_\psi + \omega z_{h\psi})W^{-1}u, \quad \psi(0) = \psi^0, \quad (4.2.16) \\ W = \omega' z_\psi^2 + \omega z_\psi z_{h\psi} - \omega z_h z_{\psi\psi} = \omega^{-1}(h), \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2.\end{gathered}$$

Здесь равенство $W = \omega^{-1}$ устанавливается путем дифференцирования по h второго тождества (4.2.14). Первое уравнение (4.2.16) может быть получено и непосредственным дифференцированием равенства для энергии

$$h = 1/2\dot{y}^2 + \Pi(y - x)$$

в силу системы (4.2.13). Получим уравнение

$$\dot{h} = -\varepsilon u F(z(h, \psi)) = \varepsilon u\omega^2 z_{\psi\psi}, \qquad (4.2.17)$$

которое эквивалентно первому уравнению (4.2.16).

В случае линейной системы вида (4.2.13)

$$\ddot{y} + y - x = 0, \quad \dot{x} = \varepsilon u \qquad (4.2.18)$$

наряду с (4.2.15) можно воспользоваться заменой типа (2.1.8)

$$y = x + a\sin\psi, \quad \dot{y} = a\cos\psi \quad (h = 1/2a^2), \qquad (4.2.19)$$

где a — амплитуда. В результате получим систему в стандартной форме вида (2.1.6)

$$\dot{a} = -\varepsilon u\sin\psi, \quad \dot{x} = \varepsilon u, \quad \dot{\psi} = 1 - \varepsilon a^{-1}u\cos\psi. \qquad (4.2.20)$$

Для систем в стандартной форме (4.2.16), (4.2.20) граничные условия (4.2.2)—(4.2.4) преобразуются следующим образом. В задачах А, Б будем иметь

$$\begin{aligned} &\text{А. } h(T) = 0 \quad (a(T) = 0), \\ &\text{Б. } h(T) = 0 \quad (a(T) = 0), \quad x(T) = x^*. \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

Значения $x(T)$, $\psi(T)$ в задаче А и $\psi(T)$ в задаче Б не фиксируются.

Покажем, что задача В (см. (4.2.4)), в первом приближении по параметру ε сводится к задаче А. Пусть задача А решена в первом приближении, так что в момент T получено $h(T) \sim \varepsilon$ (см. (4.2.21)). При этом имеем $u(T) \in [u_1, u_2]$. Чтобы удовлетворить второму условию (4.2.4), изменим управление в момент T скачком от $u(T)$ до заданного значения $u^* \in [u_1, u_2]$. Это приведет в силу (4.2.17) к скачку $\sim\varepsilon$ у величины h, так что $h(T+0) \sim \varepsilon$ и оба граничных условия (4.2.4) в первом приближении удовлетворены. Поэтому в дальнейшем рассматриваем лишь задачи А, Б с граничными условиями (4.2.21).

4. Построение асимптотического решения. Следуя §§ 1, 3 главы 3, рассмотрим процедуру асимптотического решения задачи оптимального быстродействия ($T \to \min$) для системы (4.2.16), (4.2.21). Обозначим через p, q, r переменные, сопряженные h, ψ, x соответственно. Так как x не входит в правые части системы (4.2.16), то $r = \text{const}$. В задаче А имеем $r = 0$ согласно (4.2.21). Функция Гамильтона и сопряженная система линейны и однородны по r. Поэтому, не нарушая общности, можно нормировать величину r так, чтобы

$$\text{А. } r = 0, \qquad \text{Б. } r \in \{0,\ 1,\ -1\}. \tag{4.2.22}$$

В задаче Б допускаем три возможных значения r. Чтобы не усложнять обозначения, усредненные величины в дальнейшем обозначаем теми же буквами, что и исходные.

В первом приближении оптимальное управление определяем согласно (3.1.17), (3.1.18), где полагаем $q = 0$. Из условия максимума гамильтониана для системы (4.2.16), (4.2.17)

$$\varepsilon u(r - pF) \to \max, \quad u \in [u_1, u_2]$$

получим

$$u^* = {}^1/_2(u_1 + u_2) + {}^1/_2(u_2 - u_1)\operatorname{sign}[r - pF(z)]. \qquad (4.2.23)$$

Здесь z может быть выражено через h, ψ или y, при помощи (4.2.15). Запишем функцию Гамильтона рассматриваемой задачи быстродействия для системы (4.2.16), (4.2.17), найдем ее максимум по u и усредним по фазе ψ, учитывая равенство $\langle q\rangle = \varepsilon\beta$ (см. п. 5 § 1 главы 3). Получим

$$H_0 = \varepsilon\left[\frac{u_1 + u_2}{2} r + \frac{u_2 - u_1}{2}\langle|r - pF|\rangle + \beta\omega\right]. \qquad (4.2.24)$$

Усредненная система первого приближения (3.1.31) является канонической с гамильтонианом (4.2.24)

■ $$\frac{dh}{d\tau} = -\frac{u_2 - u_1}{2}\langle F\operatorname{sign}(r - pF)\rangle, \quad h(0) = h^0,$$

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{u_2 - u_1}{2}\frac{\partial}{\partial h}\langle|r - pF|\rangle - \beta\omega'(h), \quad h(\Theta) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2}\langle\operatorname{sign}(r - pF)\rangle, \quad x(0) = x^0,$$

$$\varepsilon t = \tau \in [0, \Theta], \quad \Theta = \varepsilon T, \quad (\text{Б. } x(\Theta) = x^*). \quad \square \qquad (4.2.25)$$

Система (4.2.25) имеет первый интеграл $H_0 = \mathrm{const}$, причем $H_0 > 0$ в задаче быстродействия. Постоянная r определена равенствами (4.2.22). Отметим, что третье уравнение системы (4.2.25) сводится к квадратуре после интегрирования первых двух. Задача Б свелась к решению системы (4.2.25), содержащей три постоянные интегрирования и константы β, Θ, r. Для их определения имеем четыре краевых условия (4.2.25), а также условия (4.2.22) и $H_0 > 0$. Остающийся произвол решения устраняется, как указано в § 3 главы 3, из условия минимальности Θ.

Рассмотрим решение задачи А. Здесь $r = 0$ согласно (4.2.22). Из первого уравнения (4.2.25) тогда видно, что скорость изменения h максимальна по величине, если $\operatorname{sign} p = -1$. Положим $\beta = 0$ и рассмотрим второе уравнение системы (4.2.25). Оно однородно по p, и поэтому его нетривиальные решения знакопостоянны. Задав произвольно $p(0) < 0$, получим $p(\tau) < 0$. Таким образом, при $r = \beta = 0$, $p < 0$ удовлетворяется второе уравнение системы (4.2.25) и условие $H_0 > 0$, см. (4.2.24). Из остальных уравнений (4.2.25) определим приближенную оптимальную траекторию

$$\tau = \frac{2}{u_2 - u_1} \int_h^{h_0} \frac{dh_1}{F_0(h_1)}, \quad F_0(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z(h, \psi))|\, d\psi,$$
$$x(\tau) = x^0 + {}^1/_2 (u_2 + u_1)\tau, \quad \tau \in [0, \Theta]. \tag{4.2.26}$$

Если ограничение (4.2.13) на u симметрично ($u_1 = -u_2$), то согласно (4.2.26) не происходит среднего смещения положения равновесия: $x \equiv x^0$. В остальных случаях имеет место дрейф $x(\tau)$ со средней скоростью $^1/_2(u_2 + u_1)$.

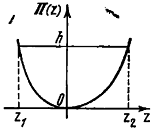


Рис. 4.8.

Оптимальное управление в форме синтеза найдем из (4.2.23), используя свойство $\operatorname{sign} F_0(z) = \operatorname{sign} z$:

$$u^* = {}^1/_2(u_1 + u_2) + {}^1/_2(u_2 - u_1)\operatorname{sign}(y - x). \tag{4.2.27}$$

В (4.2.24)—(4.2.26) усреднение по ψ можно при помощи соотношений (4.2.14) свести к усреднению по z за период колебаний. Обозначим через $z_1 < 0$ и $z_2 > 0$ крайние значения z, отвечающие невозмущенным колебаниям при $\Pi(z) = h$ (рис. 4.8). Имеем

$$F_0(h) = \frac{\omega(h)}{\pi} \int_{z_1(h)}^{z_2(h)} \frac{|F(z)|\, dz}{2^{1/2}[h - \Pi(z)]^{1/2}},$$
$$\Pi(z_1) = \Pi(z_2) = h, \tag{4.2.28}$$
$$\omega(h) = \frac{2\pi}{T_0(h)}, \quad T_0(h) = 2^{1/2} \int_{z_1(h)}^{z_2(h)} \frac{dz}{[h - \Pi(z)]^{1/2}}.$$

Используя равенство $F = d\Pi/dz$, упростим выражение (4.2.28)

$$F_0(h) = \frac{2^{1/2}}{\pi}\omega(h) \int_0^h \frac{d\Pi}{(h - \Pi)^{1/2}} = \frac{2^{3/2}}{\pi} h^{1/2} \omega(h) = \frac{2^{5/2} h^{1/2}}{T_0(h)}. \tag{4.2.29}$$

При помощи формул (4.2.26), (4.2.29) определим зависимость $\tau(h)$ и время быстродействия в задаче А в виде

$$\tau = \frac{2^{-3/2}}{u_2 - u_1} \int\limits_{h}^{h^0} \frac{T_0(h_1)\,dh_1}{h_1^{1/2}}, \quad \Theta = \frac{2^{-3/2}}{u_2 - u_1} \int\limits_{h}^{h^0} \frac{T_0(h)\,dh}{h^{1/2}}. \tag{4.2.30}$$

Тем самым решение задачи А полностью определено соотношениями (4.2.26)—(4.2.30).

5. **Примеры.** Рассмотрим на основе п. 4 решение ряда примеров задач А, Б для линейных и нелинейных систем.

1. Задача А (гашение колебаний) для линейной системы. Для линейной системы (4.2.18) период колебаний равен $T_0 = 2\pi$. Зависимость $x(\tau)$ и управление в задаче А заданы общими равенствами (4.2.26), (4.2.27). Вычисляя интегралы (4.2.30), получим время быстродействия и амплитуду колебаний

$$\Theta = \frac{\pi a^0}{u_2 - u_1}, \quad a^0 = (2h^0)^{1/2},$$
$$a(\tau) = (2h)^{1/2} = a^0\left(1 - \tau\Theta^{-1}\right). \tag{4.2.31}$$

2. Задача А для системы со степенной нелинейностью. Потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi(z) = \mu|z|^{\gamma}, \quad \mu,\ \gamma = \text{const} > 0. \tag{4.2.32}$$

Подставляя выражение (4.2.32) в (4.2.28), найдем амплитуду z_2, а затем вычислим интеграл для периода колебаний

$$z_2(h) = -z_1(h) = (h/\mu)^{1/\gamma}, \tag{4.2.33}$$

$$T_0(h) = 2^{3/2}\mu^{-1/\gamma}h^{1/\gamma - 1/2} \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1 - x^{\gamma})^{1/2}} = \frac{2^{3/2}\pi^{1/2}\Gamma(\gamma^{-1})}{\gamma\Gamma(\gamma^{-1} + 0{,}5)}\,\mu^{-1/\gamma}h^{1/\gamma - 1/2}.$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера (см. [72]). Подставляя (4.2.33) в (4.2.30), получим

$$h(\tau) = h^0\left(1 - \tau\Theta^{-1}\right)^{\gamma},$$
$$\Theta = \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\gamma^{-1})}{(u_2 - u_1)\,\Gamma(\gamma^{-1} + 0{,}5)}\left(\frac{h^0}{\mu}\right)^{1/\gamma}. \tag{4.2.34}$$

Функции x, u^* определяются зависимостями (4.2.26), (4.2.27). При $\gamma = 2$, $\mu = 1/2$ решение (4.2.32)—(4.2.34) переходит в (4.2.31).

3. Задач Б для линейной системы. Рассмотрим задачу Б о наискорейшем перемещении линейной системы (4.2.18). Будем исходить из стандартной формы (4.2.20). Вычисляя для нее управление и усредненный гамильтониан, получим аналогично (4.2.23), (4.2.24)

$$\begin{gathered} u^* = {}^1/_2 (u_1 + u_2) + {}^1/_2 (u_2 - u_1) \operatorname{sign} (r - p \sin \psi), \\ H_0 = \varepsilon \frac{u_1 + u_2}{2} r + \frac{u_2 - u_1}{2} \langle | r - p \sin \psi | \rangle + q. \end{gathered} \tag{4.2.35}$$

Здесь p, r, q — переменные, сопряженные a, x, ψ. Вычисляя среднее в (4.2.35), получим после интегрирования

$$\begin{aligned} \langle | r - p \sin \psi | \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | r - p \sin \psi | \, d\psi = \\ &= \begin{cases} |r|, & |k| \geqslant 1 \quad (k = rp^{-1}), \\ 2\pi^{-1} |r| \left[(1 - k^2)^{1/2} + \arcsin |k| \right], & |k| \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.2.36}$$

Составим каноническую систему с гамильтонианом (4.2.35), (4.2.36)

$$\begin{gathered} \frac{da}{d\tau} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial H_0}{\partial p} = \frac{u_2 - u_1}{\pi} (1 - k^2)^{1/2} \operatorname{sign} p, \quad |k| \leqslant 1, \\ \frac{dx}{d\tau} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial H_0}{\partial r} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{\pi} \arcsin k \operatorname{sign} p, \quad (4.2.37) \\ \frac{da}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \operatorname{sign} r, \quad |k| \geqslant 1. \end{gathered}$$

Так как H_0 не зависит от a, x, то p и r — постоянные. Их нужно выбрать так, чтобы решение системы (4.2.37) удовлетворяло краевым условиям

$$a(0) = a^0 > 0, \quad a(\Theta) = 0, \quad x(0) = x^0, \quad x(\Theta) = x^*. \tag{4.2.38}$$

Если $|k| \geqslant 1$, то согласно (4.2.37) имеем $a = \text{const}$, и выполнение условий (4.2.38) невозможно. Поэтому следует брать систему (4.2.37) в случае $|k| \leqslant 1$. Так как p, r — постоянные, то зависимость a, x от τ будет линейной. На основании краевых условий (4.2.38) имеем

$$a(\tau) = a^0(1 - \tau\Theta^{-1}), \quad a^0 > 0,$$
$$x(\tau) = x^0 + (x^* - x^0)\tau\Theta^{-1}. \tag{4.2.39}$$

Подставляя (4.2.39) в (4.2.37) при $|k| \leqslant 1$, получим два уравнения для определения постоянных $k = rp^{-1}$ и Θ. Так как согласно (4.2.39) функция $a(\tau)$ убывает, то

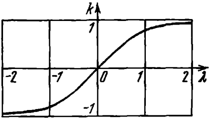


Рис. 4.9.

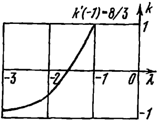


Рис. 4.10.

$\operatorname{sign} p = -1$ в (4.2.37), и указанные уравнения принимают вид

$$\pi^{-1}(u_2 - u_1)(1 - k^2)^{1/2}\,\Theta = a^0,$$
$$\left(\frac{u_1 + u_1}{2} - \frac{u_2 - u_1}{\pi}\arcsin k\right)\Theta = x^* - x^0. \tag{4.2.40}$$

Преобразуем систему (4.2.40)

$$\left(\arcsin k - \frac{\pi}{2}\frac{u_1 + u_2}{u_2 - u_1}\right)(1 - k^2)^{-1/2} = \lambda,$$
$$\Theta = \frac{\pi a^0}{u_2 - u_1}(1 - k^2)^{-1/2}, \quad \lambda = \frac{x^0 - x^*}{a^0}, \quad |k| < 1. \tag{4.2.41}$$

Исследуем трансцендентное уравнение (4.2.41) для $k(\lambda)$, причем для определенности ограничимся двумя случаями

$$u_1 = -1, \quad u_2 = 1; \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1. \tag{4.2.42}$$

Первый случай (4.2.42) отвечает симметричному ($|u| \leqslant 1$), а второй — несимметричному ограничению $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Зависимость $\lambda(k)$ для первого случая изображена на рис. 4.9. Она строго монотонна, и при изменении k от -1

до 1 величина λ изменяется от $-\infty$ до ∞. Следовательно, уравнение (4.2.41) при любом λ имеет единственный корень k, который легко найти при помощи рис. 4.9.

Во втором случае (4.2.42) зависимость $\lambda(k)$ из (4.2.41) также строго монотонна (см. рис. 4.10), но при изменении k от -1 до 1 величина λ изменяется в пределах $(-\infty, -1)$. Поэтому задача имеет решение, лишь если $\lambda \leqslant -1$. Согласно (4.2.41) это означает, что $x^* - x^0 \geqslant a^0$, т. е. для существования решения задачи об оптимальном перемещении с гашением колебаний заданное перемещение должно быть не менее (начальной) амплитуды.

Определив по заданному λ корень k уравнения (4.2.41), найдем затем Θ из (4.2.41) и оптимальную траекторию (4.2.39). Приближенное оптимальное управление в форме синтеза получим из (4.2.35), исключая $\sin\psi$ согласно (4.2.19), полагая $p < 0$ и пользуясь обозначениями для k, λ

$$\begin{gathered} u^* = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2}\operatorname{sign}\left(\frac{y - x}{a} - k\right), \\ k = k(\lambda) = k\left(\frac{x - x^*}{a}\right). \end{gathered} \tag{4.2.43}$$

Построенные законы управления в форме синтеза (4.2.27), (4.2.43) являются приближенно оптимальными в том смысле, что они обеспечивают приведение системы в ε-окрестность заданного конечного состояния (4.2.2)—(4.2.4) за время $T = \varepsilon^{-1}\Theta$, отличающееся от времени быстродействия на величину порядка 1. Эти законы могут использоваться для управления также и в случаях, когда ε не мало. Исследованию динамики систем при разрывных законах управления посвящены книги [82, 208].

Ниже, в главах 6, 7 для линейных задач управления, подобных рассмотренным выше, а также и при более общих ограничениях, будут построены некоторые точные оптимальные законы управления в виде программ.

ГЛАВА 5

УПРАВЛЯЕМЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Движения твердого тела относительно центра масс под действием малых управляющих моментов описываются уравнениями, которые приводятся к виду нелинейных управляемых систем с вращающимися фазами. В §§ 1—3 данной главы на основе методики главы 3 решен ряд задач оптимального управления движением тела относительно центра масс. В §§ 1, 2 исследованы управляемые вращения тела, когда моменты управляющих сил малы по сравнению с кинетической энергией движения. Рассмотрены случай тела, близкого к динамически симметричному (§ 1), и случай произвольного распределения масс в теле (§ 2) при различных ограничениях на управление. В § 3 исследуется вращение относительно центра масс спутника, движущегося по эллиптической орбите и подверженного действию управляющих и гравитационных моментов. § 4 посвящен асимптотическому анализу простых законов управления, близких к оптимальным и позволяющих погасить вращения тела относительно центра масс. В § 5 рассмотрена задача оптимальной переориентации твердого тела. Полученный здесь закон управления позволяет осуществить заданную ориентацию тела в пространстве после гашения его вращений при помощи управлений §§ 1—4. Необходимо отметить, что управляемым движениям тела относительно центра масс посвящена большая литература, где рассмотрены, в частности, и задачи, близкие по постановке к изложенным в данной главе (например, [25, 34, 40, 95, 96, 119, 120, 125, 132, 133, 135, 169, 180, 195, 196, 238]). Приводимые ниже результаты связаны, в основном, с применением подхода главы 3 (см. [15, 21, 23, 183—185]).

§ 1. Управляемые движения динамически симметричного твердого тела

1. Постановка задач оптимального управления угловой скоростью тела. Рассмотрим систему динамических уравнений Эйлера, описывающих управляемое движение твердого тела относительно центра масс. Величина управляющего момента сил предполагается малой в том смысле, что изменение кинетической энергии вращения тела за один оборот много меньше ее текущего значения. Это предположение эквивалентно тому, что кинетическая энергия много больше величины управляющего вектора. Указанное обстоятельство для удобства применения развитой в главе 3 методики усреднения можно формализовать введением малого числового параметра ε: $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$. В результате уравнения движения примут вид

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 = \varepsilon b_1 u_1\,(1, 2, 3), \quad \omega_1(0) = \omega_1^0. \qquad (5.1.1)$$

Два других уравнения получаются из (5.1.1) циклической перестановкой индексов. Здесь $I_{1,2,3}$ — главные центральные моменты инерции, $\omega_{1,2,3}$ — проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на главные центральные оси инерции, $\boldsymbol{\omega}^0$ — начальный вектор. Компоненты управляющих моментов представлены в виде произведений постоянных $b_{1,2,3}$, имеющих размерность момента сил на малый параметр ε и безразмерные управляющие функции $u_{1,2,3} \sim \sim 1$, подлежащие определению. Постоянные $\varepsilon b_{1,2,3}$ характеризуют эффективность системы управления по каждой из связанных осей. Ограничения, налагаемые на управления $u_{1,2,3}$, находятся из ограничивающих условий на исходные управляющие моменты. Отметим, что система (5.1.1) может подвергаться воздействию малых возмущающих моментов, зависящих от скорости вращения и ориентации твердого тела в пространстве. Одна из таких задач рассмотрена в § 3.

Исследуем управляемую систему (5.1.1), когда тело близко к динамически-симметричному, т. е.

$$I_2 = I_1(1 + \varepsilon\varkappa), \quad I_3 I_1^{-1} = d \neq 1, \quad \varkappa,\ d = \mathrm{const}. \qquad (5.1.2)$$

Подставляя (5.1.2) в (5.1.1) и отбрасывая члены порядка ε^2, получим

$$\blacksquare\quad \dot{\omega}_1 + (d-1)\,\omega_2\omega_3 = \varepsilon l_1 u_1 + \varepsilon\varkappa\omega_2\omega_3, \quad \omega_1(0) = \omega_1^0,$$
$$\dot{\omega}_2 - (d-1)\,\omega_1\omega_3 = \varepsilon l_2 u_2 + \varepsilon\varkappa(1-d)\,\omega_1\omega_3, \quad \omega_2(0) = \omega_2^0,$$
$$\dot{\omega}_3 = \varepsilon l_3 u_3 - \varepsilon\varkappa d^{-1}\omega_1\omega_2, \quad \omega_3(0) = \omega_3^0,$$
$$l_i = b_i I_i^{-1}, \quad i = 1, 2, 3. \qquad \square \qquad (5.1.3)$$

При $\varepsilon = 0$ система (5.1.3) интегрируется явно, в частности, $\omega_3 = \omega_3^0$. Предположим, что $\omega_3^0 \neq 0$. Тогда переменные $\omega_{1,2}$ совершают гармонические колебания частоты $|(d-1)\,\omega_3^0|$, зависящей от ω_3^0. Поэтому система (5.1.3) относится к существенно нелинейным (см. п. 1 § 1 гл. 3).

Используем общее порождающее решение системы (5.1.3)

$$\omega_1 = a\cos\psi, \quad \omega_2 = a\sin\psi, \quad \omega_3 = c \qquad (a \geqslant 0, \quad c \neq 0) \tag{5.1.4}$$

в качестве преобразования к переменным a, c, ψ. При помощи общей методики п. 1 § 1 главы 2 запишем систему (5.1.3) в стандартной форме (3.1.2)

$$\blacksquare\quad \dot{a} = \varepsilon(l_1 u_1 \cos\psi + l_2 u_2 \sin\psi) + {}^1/_2\varepsilon\varkappa ac(2-d)\sin 2\psi,$$
$$\dot{c} = \varepsilon l_3 u_3 - {}^1/_2\varepsilon\varkappa d^{-1}a^2\sin 2\psi,$$
$$\dot{\psi} = (d-1)c + \varepsilon a^{-1}[l_2 u_2\cos\psi - l_1 u_1\sin\psi +$$
$$+\varkappa ac(\cos 2\psi - d\cos^2\psi)],$$
$$a(0) = a^0 > 0, \quad c(0) = c^0 \neq 0, \quad \psi(0) = \psi^0. \quad \square(5.1.5)$$

Начальные значения a^0, c^0, ψ^0 в (5.1.5) находятся при помощи формул замены (5.1.4).

Далее в § 1 исследуется ряд задач оптимального управления движением системы (5.1.5) при различных ограничениях U на управляющий вектор $u = (u_1, u_2, u_3)$. В качестве основной постановки рассматривается задача оптимального по быстродействию изменения величин экваториальной и осевой скорости вращения, т. е.

$$a(T) = a^* \geqslant 0, \quad c(T) = c^*(c^*c^0 > 0), \quad T \to \min, \quad u \in U. \tag{5.1.6}$$

Здесь a^*, c^* — заданные постоянные, U — фиксированное замкнутое множество. Рассмотрены также другие постановки, в том числе и с фиксированным моментом $T = \varepsilon^{-1}\Theta$.

2. Управление при ограниченной суммарной мощности. В этом случае множество U может быть представлено в виде [73]

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant 1. \tag{5.1.7}$$

В частности, ограничения (5.1.7) охватывают случай поворотного двигателя в кардановом подвесе. Исследуем для системы (5.1.5), (5.1.7) задачу быстродействия (5.1.6). Из условия максимума функции Гамильтона (3.1.17) находим в первом приближении по ε оптимальное управление (3.1.18), в котором сопряженная переменная, отвечающая фазе ψ, полагается равной нулю

$$\begin{gathered} u_1 = pl_1R^{-1}\cos\psi, \quad u_2 = pl_2R^{-1}\sin\psi, \quad u_3 = rl_3R^{-1}, \\ R = \left[p^2\left(l_1^2\cos^2\psi + l_2^2\sin^2\psi\right) + r^2l_3^2\right]^{1/2}. \end{gathered} \tag{5.1.8}$$

Здесь p, r — медленные переменные, сопряженные a, c. Подставим (5.1.8) в функцию Гамильтона и усредним ее по фазе ψ согласно (3.1.32). Среднее по фазе от гироскопических возмущений (пропорциональных $\varkappa$ в (5.1.5)) обращается в нуль. В результате получим уравнения движения для медленных переменных вида (3.1.31). Полагаем в них $\beta = 0$, что соответствует необходимому условию оптимальности (см. (3.1.41)). Учитывая краевые условия и условия трансверсальности типа (3.1.31), (3.3.4), в первом приближении получим краевую задачу

$$\begin{gathered} \frac{da}{d\tau} = \frac{\langle R\rangle}{p} - \frac{l_3^2r^2}{p}\langle R^{-1}\rangle, \quad a(0) = a^0, \quad a(\Theta) = a^*, \\ \frac{dc}{d\tau} = rl_3^2\langle R^{-1}\rangle, \quad c(0) = c^0, \quad c(\Theta) = c^*, \\ \langle R\rangle = \mathrm{const} = 1, \quad p, r = \mathrm{const} \neq 0, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \Theta = \varepsilon T. \end{gathered} \tag{5.1.9}$$

Здесь $\langle R\rangle$ принято равным единице за счет нормировки. Для усредненных переменных сохранены старые обозначения. Средние по ψ в (5.1.9) можно представить в виде

$$\langle R\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\,d\psi = \frac{2}{\pi}\left(p^2l_1^2 + r^2l_3^2\right)^{1/2} G_1(k),$$

$$G_1(k) = \begin{cases} E(k), & 0 \leqslant k < 1, \\ \sqrt{1-k}\,E\left(\sqrt{k(k-1)^{-1}}\right), & -\infty < k \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\langle R^{-1}\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{R} = \frac{2}{\pi}\left(p^2l_1^2 + r^2l_3^2\right)^{-1/2} G_2(k),$$

$$G_2(k) = \begin{cases} K\left(\sqrt{k}\right), & 0 \leqslant k < 1, \\ K\left(\sqrt{k(k-1)^{-1}}\right)/\sqrt{1-k}, & -\infty < k < 0. \end{cases} \qquad \square \tag{5.1.10}$$

Здесь K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Параметр k равен

$$\begin{gathered} k = \left(\beta_1^2 - \beta_2^2\right)\left(\beta_1^2 + \lambda^2\right)^{-1}, \quad -\infty < k \leqslant 1, \\ \beta_1 = l_1 l_3^{-1}, \quad \beta_2 = l_2 l_3^{-1}, \quad \lambda = r p^{-1}. \end{gathered} \tag{5.1.11}$$

Система (5.1.9)—(5.1.11) интегрируется элементарно, так как ее правые части постоянны. Удовлетворение начальных и краевых условий приводит к системе трех трансцендентных уравнений относительно неизвестных p, r, Θ. Исключением Θ из краевых условий (5.1.9) для a, c получим одно трансцендентное уравнение относительно параметра λ (см. (5.1.11)). Как показано в работе [23], это уравнение всегда имеет единственный корень, зависящий от параметров l_i и отношения $(a^* - a^0)(c^* - c^0)^{-1}$. Задача построения синтеза приводится к нахождению корня λ как функции параметров задачи. Отыскание этой функции упрощается, если ввести вместо λ новую неизвестную Λ и обозначить

$$\begin{gathered} \Lambda = \lambda\beta_2^{-1}, \ \gamma = (a^* - a^0)(c^* - c^0)^{-1}\beta_2^{-1}, \ \delta = \beta_1\beta_2^{-1} = l_1 l_2^{-1}, \\ -\infty < \Lambda < \infty, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad 0 < \delta < \infty. \end{gathered} \tag{5.1.12}$$

Параметр k из (5.1.11) может быть представлен как функция Λ, δ

$$k = (\delta^2 - 1)(\delta^2 + \Lambda^2)^{-1}, \quad -\infty < k < 1. \tag{5.1.13}$$

Тогда уравнение, связывающее искомое Λ с параметрами γ, δ из (5.1.12) имеет вид (для двух интервалов изменения k, задаваемого (5.1.13))

$$E(\sqrt{k}) = \Lambda(\Lambda+\gamma)(\Lambda^2+\delta^2)^{-1} K(\sqrt{k}), \qquad 0 \leqslant k < 1, \tag{5.1.14}$$

$$E\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}}\right) = \frac{\Lambda(\Lambda+\gamma)}{\Lambda^2+1} K\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}}\right), \qquad -\infty < k \leqslant 0.$$

Отметим, что знак параметра k, т. е. выбор ветви уравнения (5.1.14), целиком определяется величиной δ^2 (см. (5.1.12), (5.1.13)) и не зависит от начальных и конечных значений фазовых переменных. При $k = 0$, т. е. $\delta^2 = 1$, оба уравнения (5.1.14) совпадают, и здесь $\Lambda = \gamma^{-1}$.

Зависимость $\Lambda(\gamma, \delta)$ удобно представить в виде семейства кривых с параметром δ. Разрешая (5.1.14) относительно γ, получим (k не зависит от γ)

$$\gamma = \frac{E(\sqrt{k})}{K(\sqrt{k})}\frac{\Lambda^2+\delta^2}{\Lambda} - \Lambda, \quad 0 \leqslant k < 1,$$

$$\gamma = E\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}}\right)(\Lambda^2+1)\left[K\left(\sqrt{\frac{k}{k-1}}\right)\Lambda\right]^{-1} - \Lambda, \tag{5.1.15}$$

$$-\infty < k \leqslant 0.$$

Семейство кривых $\Lambda(\gamma, \delta)$, отвечающих различным значениям δ^2, приведено на рис. 5.1. Как следует из соотношений (5.1.15), функция $\gamma(\Lambda, \delta)$ является нечетной функцией Λ. Таким же свойством нечетности, очевидно, обладает функция $\Lambda(\gamma, \delta)$, а именно, $\Lambda(-\gamma, \delta) = -\Lambda(\gamma, \delta)$. Поэтому для построения всего семейства достаточно привести кривые, отвечающие положительным значениям Λ, γ. Отметим, что для любых значений γ и $\delta > 0$ решение задачи существует и единственно.

Синтез оптимального управления и оптимальная траектория определяются в первом приближении следующим образом. По текущим значениям a, c, принимаемым за начальные данные, определим в соответствии с (5.1.12)

$$\gamma = (a^* - a)(c^* - c)\beta_2^{-1}.$$

Затем из семейства кривых рис. 5.1 найдем $\Lambda(\gamma, \delta)$, и из (5.1.12) — величину λ, которая согласно (5.1.11) равна rp^{-1}. Отметим, что знаки правых частей системы

(5.1.9) совпадают со знаками p, r и в то же время — со знаками $a^* - a$, $c^* - c$. Учитывая сказанное и используя формулы (5.1.4), (5.1.11), найдем из (5.1.8) управление в форме синтеза

$$\begin{gathered} u_1 = \beta_1\omega_1 R_*^{-1}\operatorname{sign}(a^* - a), \quad u_2 = \beta_2\omega_2 R_*^{-1}\operatorname{sign}(a^* - a), \\ u_3 = |\lambda| a R_*^{-1}\operatorname{sign}(c^* - c), \quad a = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}, \qquad (5.1.16) \\ c = \omega_3, \quad R_* = \left[(\beta_1^2 + \lambda^2)\omega_1^2 + (\beta_2^2 + \lambda^2)\omega_2^2\right]^{1/2}. \end{gathered}$$

Оптимальную траекторию и время найдем, решая краевую задачу (5.1.9) с неизвестными параметрами p, r,

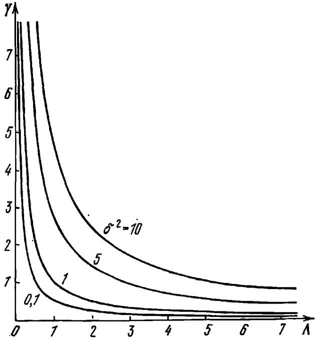


Рис. 5.1.

Θ. Используя формулы (5.1.10), (5.1.11), представим решение в виде

$$\begin{gathered} a = (a^* - a^0)\tau\Theta^{-1} + a^0, \quad c = (c^* - c^0)\tau\Theta^{-1} + c^0, \\ \Theta = (a^* - a^0)p + (c^* - c^0)r, \quad p = \operatorname{sign}(a^* - a^0)/\varphi(\lambda), \\ \qquad (5.1.17) \\ r = \lambda/\varphi(\lambda), \quad \varphi(\lambda) = (2/\pi)\left(l_1^2 + l_3^2\lambda^2\right)^{1/2} G_1(k). \end{gathered}$$

Здесь k выражается формулой (5.1.11), а λ определяется через γ, δ, как описано выше, см. (5.1.12)—(5.1.15), рис. 5.1. Таким образом, решение задачи (5.1.5)—(5.1.7) построено.

Отметим, что если одно из конечных значений переменных a или c в (5.1.6) не задано, то оптимальное решение находится как частный случай построенного. Если $a(T)$ не фиксировано, то $p\equiv 0$, $|\lambda|\to\infty$, и решение (5.1.16), (5.1.17) принимает вид

$$\begin{gathered} u_1=u_2=0,\quad u_3=\operatorname{sign}\left(\omega_3^*-\omega_3\right),\\ a=a^0=\text{const},\quad \omega_3=\omega_3^0+\left(\omega_3^*-\omega_3^0\right)\tau\Theta^{-1},\\ \Theta=\Theta_c=\left|\omega_3^*-\omega_3^0\right| l_3^{-1}. \end{gathered}\tag{5.1.18}$$

Аналогично, если величина осевой скорости вращения $\omega_3(T)$ не фиксируется, то $r=\lambda=0$, а решение имеет вид

$$\begin{gathered} \blacksquare\quad u_1=\beta_1\omega_1R_*^{-1}\operatorname{sign}(a^*-a),\\ u_2=\beta_2\omega_2R_*^{-1}\operatorname{sign}(a^*-a),\\ u_3\equiv 0,\quad R_*=\left(\beta_1^2\omega_1^2+\beta_2^2\omega_2^2\right)^{1/2},\\ a=a^0+(a^*-a^0)\tau\Theta^{-1},\quad \omega_3=\omega_3^0,\\ \Theta=\Theta_a=(\pi/2)\left|a^*-a^0\right|/l_1G_1(k),\quad k=1-l_2^2l_1^{-2}.\ \square \end{gathered}\tag{5.1.19}$$

Если управление (5.1.16), требующее определения корня λ трансцендентного уравнения, оказывается трудно реализуемым, то его можно заменить квазиоптимальным, представляющим собой последовательное применение законов (5.1.18), (5.1.19). Общее потребное время при этом равно $\Theta_a+\Theta_c>\Theta$. Аналогично рассматриваются задачи управления с фиксированным моментом окончания $T=\varepsilon^{-1}\Theta$.

3. Управление при помощи трех ограниченных моментов. Рассмотрим задачу быстродействия (5.1.5), (5.1.6) в предположении, что управления ограничены неравенствами

$$|u_i|\leqslant 1\qquad (i=1,\ 2,\ 3),\tag{5.1.20}$$

соответствующими трем парам фиксированных двигателей.

Поставленная задача приводит к особым управлениям, т. е. к такому положению, когда из принципа максимума не удается однозначно определить оптимальные управления. Это вызвано тем, что одна из сопряженных переменных на некотором отрезке обращается в нуль, а соответствующее управление не определено. Однако приближенное решение можно получить сравнительно просто при помощи формального применения методики главы 3. Аналогично (5.1.9) получим систему первого приближения.

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{2}{\pi}(l_1 + l_2)\operatorname{sign} p, \quad a(0) = a^0, \quad a(\Theta) = a^*,$$
$$\frac{dc}{d\tau} = l_3 \operatorname{sign} r, \quad c(0) = c^0, \quad c(\Theta) = c^*. \tag{5.1.21}$$

Время быстродействия $\Theta = \varepsilon T$ равно

$$\Theta = \max\{\Theta_a, \Theta_c\}, \quad \Theta_a = \frac{\pi}{2}\frac{|a^* - a^0|}{l_1 + l_2}, \quad \Theta_c = \frac{|c^* - c^0|}{l_3}. \tag{5.1.22}$$

Сопряженные переменные p, r определяются следующим образом. Если $\Theta_a \geqslant \Theta_c$, то $\operatorname{sign} p = \operatorname{sign}(a^* - a^0)$, а $\operatorname{sign} r$ — некоторая кусочно постоянная функция τ, такая что

$$\int_0^{\Theta_a} \operatorname{sign} r\, d\tau = \frac{c^* - c^0}{l_3}, \quad \Theta_a \geqslant \Theta_c. \tag{5.1.23}$$

Если же $\Theta_a \leqslant \Theta_c$, то $\operatorname{sign} r = \operatorname{sign}(c^* - c^0)$, а функция $\operatorname{sign} p$ определяется из условия, аналогичного (5.1.23)

$$\int_0^{\Theta_c} \operatorname{sign} p\, d\tau = \frac{\pi}{2}\frac{a^* - a^0}{l_1 + l_2}, \quad \Theta_a \leqslant \Theta_c. \tag{5.1.24}$$

Усредненные переменные a, c получаются интегрированием правых частей уравнений (5.1.21) с учетом (5.1.22)—(5.1.24). Синтез оптимального управления имеет вид

$$u_1 = \operatorname{sign}(p\omega_1), \quad u_2 = \operatorname{sign}(p\omega_2), \quad u_3 = \operatorname{sign} r. \tag{5.1.25}$$

Здесь $\operatorname{sign} p$, $\operatorname{sign} r$ определены как в (5.1.23), (5.1.24) с заменой a^0, $c^0 \to a$, c.

4. Управление моментом, ограниченным цилиндрической областью. Рассмотрим задачу быстродействия (5.1.5), (5.1.6) в случае, когда управляющие функции лежат в цилиндре

$$u_1^2+u_2^2\leqslant 1, \quad |u_3|\leqslant 1. \tag{5.1.26}$$

Кроме того, предположим, что приведенные плечи l_1, l_2 в (5.1.3) одинаковы, т. е. $l_1=l_2=l$.

Рассматриваемый случай отвечает комбинации пары поворотных двигателей, вращающихся вокруг оси симметрии, и пары фиксированных двигателей, создающих момент по оси симметрии.

Поставленная задача, как и в п. 3, приводит к особым управлениям, а именно

$$u_1=\omega_1 a^{-1}\operatorname{sign} p, \quad u_2=\omega_2 a^{-1}\operatorname{sign} p, \quad u_3=\operatorname{sign} r. \tag{5.1.27}$$

Здесь, как и в (5.1.25), $\operatorname{sign} p$, $\operatorname{sign} r$ — кусочно постоянные функции τ, имеющие конечное число точек разрывов и такие, что

$$\int_0^\Theta \operatorname{sign} p\,d\tau=\frac{a^*-a^0}{l}, \quad \int_0^\Theta \operatorname{sign} r\,d\tau=\frac{c^*-c^0}{l_3}. \tag{5.1.28}$$

Время оптимального быстродействия Θ определяется подобно (5.1.22)

$$\Theta=\max\{|a^*-a^0|\,l^{-1},\ |c^*-c^0|\,l_3^{-1}\}. \tag{5.1.29}$$

Усредненные медленные переменные a, c описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{da}{d\tau}&=l\operatorname{sign} p, \quad a(0)=a^0, \quad a(\Theta)=a^*,\\
\frac{dc}{d\tau}&=l_3\operatorname{sign} r, \quad c(0)=c^0, \quad c(\Theta)=c^*.
\end{aligned} \tag{5.1.30}$$

Соотношения (5.1.27)—(5.1.30) определяют (неоднозначно) приближенное решение задачи быстродействия.

5. Управление на заданном интервале времени, оптимальное по расходу энергии. Пусть требуется к фиксированному моменту $T=\varepsilon^{-1}\Theta$ привести систему (5.1.5) в состояние (5.1.6) таким образом, чтобы расход энергии на управление был минимальным, т. е.

$$J = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right) dt \to \min. \qquad (5.1.31)$$

Дополнительные ограничения на управление u не налагаются. Вводя медленную переменную, отвечающую функционалу J из (5.1.31), получим задачу оптимального управления стандартной системой с вращающейся фазой, к которой применима методика § 1 главы 3. Не останавливаясь на деталях, приведем решение первого приближения. Из условия минимума по β функционала J_0, см. (3.1.38), находим $\beta = 0$. Сопряженные переменные в первом приближении оказываются постоянными, а фазовые переменные линейны по τ

$$a = a^0 + (a^* - a^0)\tau\Theta^{-1}, \quad c = c^0 + (c^* - c^0)\tau\Theta^{-1}. \qquad (5.1.32)$$

Оптимальные управляющие функции синтеза и минимальное значение функционала имеют вид

$$u_1 = \frac{2l_1}{l_1^2 + l_2^2}\frac{a^* - a}{\Theta - \tau}\frac{\omega_1}{a}, \quad u_2 = \frac{2l_2}{l_1^2 + l_2^2}\frac{a^* - a}{\Theta - \tau}\frac{\omega_2}{a},$$

$$u_3 = \frac{\omega_3^* - \omega_3}{\Theta - \tau}, \quad a = \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \Theta, \qquad (5.1.33)$$

$$J_0 = \frac{1}{\Theta}\left[\frac{(a^* - a^0)^2}{l_1^2 + l_2^2} + \frac{1}{2}\frac{(c^* - c^0)^2}{l_3^2}\right].$$

Из (5.1.32) следуют равенства

$$(a^* - a)(\Theta - \tau)^{-1} = (a^* - a^0)\Theta^{-1},$$
$$(c^* - c)(\Theta - \tau)^{-1} = (c^* - c^0)\Theta^{-1}.$$

Поэтому управления (5.1.33) оказываются тем меньше, чем больше Θ для фиксированных других параметров задачи. Это позволяет за счет увеличения Θ использовать построенные законы управления в случаях, когда на них наложены дополнительные ограничения.

Отметим, что практическая реализация законов управления пп. 2—5 требует незначительных вычислительных средств.

§ 2. Оптимальное торможение вращений несимметричного твердого тела

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу наискорейшего торможения вращений твердого тела. Движение описывается уравнениями (5.1.1), (5.1.7) для произвольных моментов инерции $I_1 < I_2 < I_3$. Приведем уравнения (5.1.1) к форме (3.1.2) при помощи общего периодического решения порождающей системы (при $\varepsilon = 0$), описывающего движение Эйлера — Пуансо [126, 202]. При вращении свободного твердого тела сохраняются кинетическая энергия E и величина кинетического момента L

$$2E = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2, \quad L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2. \tag{5.2.1}$$

Проекции ω_i вектора угловой скорости на связанные оси в невозмущенном движении Эйлера — Пуансо выражаются в эллиптических функциях [126]. Они периодичны по t с периодом T_0, зависящим от E, L.

Интегралы (5.2.1) при $I_1 < I_2 < I_3$ удовлетворяют очевидным неравенствам: $2EI_1 \leqslant L^2 \leqslant 2EI_3$.

В качестве одного из интегралов удобно взять параметр $k^2 = k^2(E, L^2)$, k — модуль эллиптических функций. Величина k характеризует движение конца вектора кинетического момента на сфере $L^2 = \text{const}$. Определение параметра k^2 как функции E и L неоднозначно; в области $2EI_2 \leqslant L^2 \leqslant 2EI_3$ имеем

$$k^2 = (I_2 - I_1)(I_3 - I_2)^{-1}(2EI_3 - L^2)(L^2 - 2EI_1)^{-1},$$
$$0 \leqslant k^2 \leqslant 1. \tag{5.2.2}$$

Здесь траектории вектора L охватывают ось $O3$; значению $k^2 = 0$ отвечает вращение вокруг оси $O3$ ($\omega_1 = \omega_2 = 0$), а значению $k^2 = 1$ — движение по сепаратрисе [126].

В области $2EI_1 \leqslant L^2 \leqslant 2EI_2$ выражение для k^2 имеет вид (5.2.2), в котором индексы 1 и 3 (оси $O1$ и $O3$) нужно поменять местами. Отметим, что при E, $L^2 \to 0$ величина k^2 становится неопределенной.

Дифференцируя величины L^2 (5.2.1) и k^2 (5.2.2) в силу управляемой системы (5.1.1), получим уравнения, описывающие изменение возмущенных интегралов L^2 и k^2

при $\varepsilon \neq 0$

$$\blacksquare \quad L^{2\cdot} = 2\varepsilon\,(b_1L_1u_1 + b_2L_2u_2 + b_3L_3u_3),$$
$$k^{2\cdot} = 2\varepsilon\varkappa L^{-2}\,[b_1d_1\omega_1u_1 + b_2d_2\,(1-k^2)\,\omega_2u_2 - b_3d_3k^2\omega_3u_3],$$
$$\varkappa = I_1d_1^{-1}k^2 + I_3d_3^{-1},$$
$$d_1 = (I_3 - I_2)^{-1},\quad d_2 = (I_3 - I_1)^{-1},\quad d_3 = (I_2 - I_1)^{-1},$$
$$L_i = I_i\omega_i,\quad i = 1, 2, 3,\quad L^2(0) = L^{02},\quad k^2(0) = k^{02}. \ \square \tag{5.2.3}$$

Здесь предполагается, что для функций ω_i подставлены их известные выражения в зависимости от медленных переменных L^2 и k^2, а также быстрой фазы ψ. Уравнение для ψ не выписывается, так как оно не участвует в построении решения первого приближения.

Будем исследовать задачу оптимального по быстродействию управления системой (5.2.3), (5.1.7) с граничным условием

$$L(T) = L^* \quad (L^* < L^0),\quad T \to \min. \tag{5.2.4}$$

2. Построение краевой задачи первого приближения. Дадим краткий вывод краевой задачи первого приближения по методике главы 3 (подробный вывод дан в статье [23]). Приводим формулы для области $L^2 \geqslant 2EI_2$; в области $L^2 \leqslant 2EI_2$ нужно поменять местами индексы 1 и 3. Из условия максимума (3.1.17) функции Гамильтона задачи быстродействия находим выражения для управлений

$$\blacksquare \quad u_i = b_i\sigma_i\omega_iR^{-1},\quad \omega_i = \omega_i\,(L^2, k^2, \psi),\quad i = 1, 2, 3,$$
$$\sigma_1 = I_1p + 2L^{-2}\varkappa d_1r,\quad \sigma_2 = I_2p + 2L^{-2}\varkappa\,(1-k^2)\,d_2r,$$
$$\sigma_3 = I_3p - 2L^{-2}\varkappa k^2d_3r,$$
$$R^2 = b_1^2\sigma_1^2\omega_1^2 + b_2^2\sigma_2^2\omega_2^2 + b_3^2\sigma_3^2\omega_3^2. \ \square \tag{5.2.5}$$

Здесь p, r — переменные, сопряженные L^2, k^2 соответственно, а $\varkappa$ — известная функция k^2, см. (5.2.3). Переменную q, сопряженную фазе ψ, полагаем равной нулю.

Составим функцию Гамильтона первого приближения (здесь также принято $q \equiv 0$, так как $\langle q\rangle = \varepsilon\beta$, а $\beta = 0$

в силу необходимого условия оптимальности, вытекающего из (3.3.15))

$$H = 2\varepsilon L\varkappa^{-1/2}\left[c_1^2k^2\sigma_1^2 + c_3^2\sigma_3^2 + \right.$$
$$\left. + \left(c_2^2\sigma_2^2 - c_1^2\sigma_1^2 - c_3^2\sigma_3^2\right)k^2\,\mathrm{sn}^2(\theta, k)\right]^{1/2}, \quad (5.2.6)$$
$$c_i = b_i(d_iI_i)^{-1/2}, \quad \theta = (2\pi)^{-1}K(k)\,\psi.$$

Здесь sn — эллиптический синус, периодический по θ с периодом $4K$; K — полный эллиптический интеграл первого рода.

Вычислим среднее значение по ψ 2π-периодической функции H. Неявное усреднение по ψ можно заменить усреднением по переменной φ, используя соотношения [72]

$$\mathrm{sn}(\theta, k) = \sin\varphi, \quad d\psi/d\varphi = (2\pi/4K)(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-1/2},$$

однозначно связывающие переменные ψ и φ. В результате получаем явную схему усреднения

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\mathrm{sn}^2(\theta, k))\,d\psi =$$
$$= \frac{1}{4K(k)}\int_0^{2\pi}\frac{H(\sin^2\varphi)}{(1 - k^2\sin^2\varphi)^{1/2}}\,d\varphi. \quad (5.2.7)$$

На основе функции $H^* = \varepsilon^{-1}\langle H\rangle$ построим усредненную краевую задачу (3.1.31), сохраняя за усредненными переменными прежние обозначения

$$\frac{dL^2}{d\tau} = \frac{\partial H^*}{\partial p}, \quad \frac{dk^2}{d\tau} = \frac{\partial H^*}{\partial r}, \quad L^2(0) = L^{02}, \quad k^2(0) = k^{02},$$
$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H^*}{\partial L^2}, \quad \frac{dr}{d\tau} = -\frac{\partial H^*}{\partial k^2}, \quad L^2(\Theta) = L^{*2}, \quad r(\Theta) = 0, \quad (5.2.8)$$
$$H^*|_\Theta = 1, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \Theta = \varepsilon T.$$

Автономная гамильтонова система (5.2.8) имеет интеграл $H^* = 1$ и ее порядок может быть понижен до двух. При произвольных значениях параметров I_i,

b_i полностью проинтегрировать систему (5.2.8) не удается.

Для решения краевой задачи (5.2.8) далее применяется численный метод. Правые части системы (5.2.8) подсчитываются по схеме (5.2.7) и выражаются в виде определенных (эллиптических) интегралов по φ, зависящих от искомых медленных переменных L^2, k^2, p, r. Эти интегралы подсчитывались численно в процессе интегрирования системы (5.2.8).

3. Алгоритм численного построения синтеза. Сопряженные переменные p, r и функцию H^* в системе (5.2.8) можно умножить на любой положительный коэффициент; управление не изменится, а условие трансверсальности $H^*|_\Theta = 1$ при этом следует опустить. В частности, можно потребовать $|p(\Theta)| = 1$. Расчеты показали, что задаче торможения $(0 < L^{*2} \ll L^{02})$ отвечает $p(\Theta) = -1$, что и принималось в дальнейшем.

Приведем алгоритм решения задачи синтеза и результаты вычислений. Построим численно в обратном времени $\tau_1 = \Theta - \tau$ однопараметрическое семейство траекторий, удовлетворяющих уравнениям (5.2.8) и начальным условиям при $\tau_1 = 0$

$$L^2(0) = L^{*2}, \quad k^2(0) = k^{*2} \in [0, 1],$$
$$p(0) = -1, \; r(0) = 0. \tag{5.2.9}$$

Здесь L^{*2} — заданная величина, k^{*2} — параметр семейства. Выделим траекторию семейства (5.2.9), проходящую при некотором τ_1 через заданную точку (L^{02}, k^{02}). Эта траектория является искомой, а $\tau_1 = \Theta$ — время быстродействия. Следует отметить, что величина L^{*2} при построении семейства может быть выбрана сколь угодно малой, но отличной от нуля. Эта трудность объясняется тем, что уравнение (5.2.8) для k^2 при $L \to 0$ имеет неинтегрируемую особенность: метод усреднения здесь неприменим.

На рис. 5.2 приведено семейство фазовых кривых, полученных численным интегрированием системы (5.2.8), (5.2.9) для следующих значений параметров задачи

$$I_1 = 2, \; I_2 = 3, \; I_3 = 4, \; b_1 = 0{,}625, \; b_2 = 1, \; b_3 = 1{,}25,$$
$$L^{*2} = 0{,}1, \; \Theta = 2. \tag{5.2.10}$$

Верхняя половина рис. 5.2 соответствует движению в области $L^2 \leqslant 2EI_2$, а нижняя половина — области $L^2 \geqslant 2EI_2$. На кривых помечены точки, где $\tau_1 = 1$. Левые концы кривых отвечают $\tau_1 = 0$, $\tau = 2$, а правые концы — $\tau_1 = 2$, $\tau = 0$. Из рис. 5.2 видно, что величина L^2 монотонно убывает при торможении. При раскрутке, т. е. при

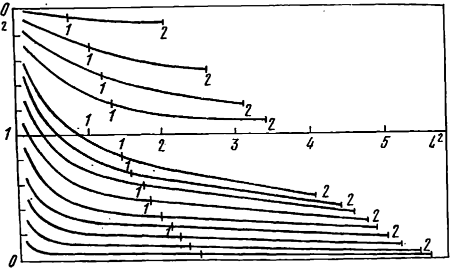


Рис. 5.2.

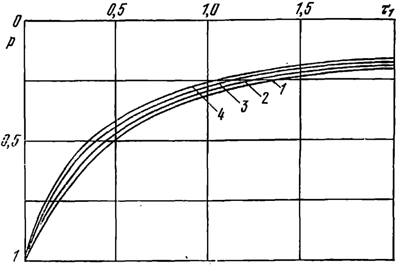
изменении L от L^* до L^0 (здесь τ_1 будет прямым временем) вектор кинетического момента приближается к оси $O3$. Это связано с тем, что оси $O3$ отвечает максимальное b_i (см. (5.2.10)).

На рис. 5.3 приведены зависимости сопряженных переменных p, r от τ_1. Кривые *1* и *2* на рис. 5.3, *а* соответствуют значениям $k^{*2} = 0{,}1$ и $0{,}9$ в области $L^2 > 2EI_2$, а кривые *3* и *4* — значениям $k^{*2} = 0{,}9$ и $0{,}1$ в области $L^2 < 2EI_2$. Кривые с промежуточными значениями k^{*2} не приводятся: они заключены между соответствующими кривыми рис. 5.3, *а*. На рис. 5.3, *б* кривым *1*, *2*, *3* отвечают значения $k^{*2} = 0{,}1,\ 0{,}5,\ 0{,}9$ и $L^2 > 2EI_2$; кривым *4*—*8* — значения $k^{*2} = 0{,}9,\ 0{,}5,\ 0{,}4,\ 0{,}3,\ 0{,}1$ при $L^2 < 2EI_2$.

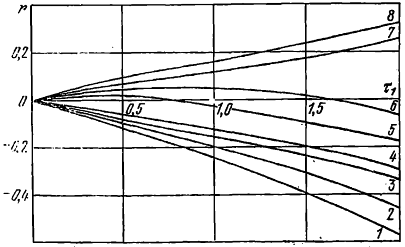
На основе данных рис. 5.2, 5.3 можно следующим образом построить приближенный синтез оптимального по быстродействию торможения вращений твердого тела с характеристиками (5.2.10). Вдоль кривых рис. 5.2 предполагается заданным τ_1.

1) По измеренным угловым скоростям ω_1, ω_2, ω_3 вычислить E, L^2 согласно (5.2.1) и определить область движения: $L^2 \lessgtr 2EI^2$.

2) При помощи (5.2.2) вычислить текущее k^2.



а)



б)

Рис. 5.3.

3) На рис. 5.2 найти в соответствующей области кривую, проходящую через точку (L^2, k^2). По этой кривой определить параметр τ_1, равный времени Θ, оставшемуся

до конца процесса, а также величину $k^{*2} = k^2|_{\tau_1=0}$. Полученная кривая является приближенной оптимальной траекторией.

4) Из рис. 5.3 по полученным значениям τ_1 и k^{*2} находим p, r.

5) На основе измеренных величин ω_i и найденных L^2, k^2, p, r при помощи соотношений (5.2.5) определяем управления u_i в форме синтеза.

Аналогично изложенному могут быть решены задачи оптимального торможения вращений твердого тела при других ограничениях на управление, например, (5.1.20), (5.1.26), а также при других функционалах и краевых условиях. Задача торможения при ограничениях (5.1.20) рассмотрена в работе [184].

§ 3. Управление вращением спутника, движущегося по эллиптической орбите

1. Уравнения движения. Рассматривается движение спутника относительно центра масс под действием внешних возмущающих моментов.

Уравнения движения составим в форме, предложенной в работе [225]. Введем три декартовы системы координат с началом в центре инерции O спутника. Система $x_1x_2x_3$ движется поступательно; ось x_1 параллельна радиусу-вектору перигея орбиты, ось x_2 — вектору скорости центра масс в перигее, ось x_3 — нормали к плоскости орбиты. Ось y_3 системы $y_1y_2y_3$ (на рисунке показана лишь z_3) направлена по вектору кинетического момента L спутника относительно центра инерции, ось y_1 перпендикулярна y_3 и лежит в плоскости x_3y_3, ось y_2 лежит в плоскости орбиты (рис. 5.4). Углы ρ, σ определяют ориентацию вектора L в неподвижном пространстве. Оси связанной системы $z_1z_2z_3$ совместим с главными центральными осями инерции спутника. Их ориентацию относительно системы $y_1y_2y_3$ определим углами Эйлера θ, φ, ψ, а также

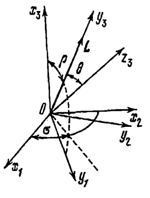


Рис. 5.4.

направляющими косинусами α_{ij}. Обозначая через I_i главные центральные моменты инерции спутника, запишем уравнения движения

■
$$
\begin{aligned}
&\dot{L} = M_3, \quad \dot{\rho} = M_1 L^{-1}, \quad \dot{\sigma} = M_2 (L \sin\rho)^{-1}, \quad L = |\mathbf{L}|,\\
&\dot{\theta} = L \sin\theta \sin\varphi \cos\varphi \left(I_1^{-1} - I_2^{-1}\right) + \\
&\qquad\qquad + (M_2 \cos\psi - M_1 \sin\psi) L^{-1},\\
&\dot{\varphi} = L \cos\theta \left(I_3^{-1} - I_1^{-1} \sin^2\varphi - I_2 \cos^2\varphi\right) + \\
&\qquad\qquad + (M_1 \cos\psi + M_2 \sin\psi)(L \sin\theta)^{-1},\\
&\dot{\psi} = L \left(I^{-1} \sin^2\varphi + I_2^{-1} \cos^2\varphi\right) - \\
&\qquad - L^{-1} (M_1 \cos\psi + M_2 \sin\psi) \operatorname{ctg}\theta - L^{-1} M_2 \operatorname{ctg}\rho. \quad \square
\end{aligned}
\tag{5.3.1}
$$

Полагаем, что моменты M_i внешних сил относительно осей y_i имеют вид $M_i = G_i + U_i$, где G_i — гравитационные, U_i — управляющие моменты. Компоненты G_i равны [39]

$$
\begin{gathered}
G_1 = 3\omega_0^2 (1 + e\cos\nu)^3 (1 - e^2)^{-3} \sum_{i=1}^{3} (\beta_2 \beta_i S_{3i} - \beta_3 \beta_i S_{2i}),\\
S_{ij} = I_1 \alpha_{i1} \alpha_{j1} + I_2 \alpha_{i2} \alpha_{j2} + I_3 \alpha_{i3} \alpha_{j3},\\
\beta_1 = \cos\rho \cos(\nu - \sigma), \quad \beta_2 = \sin(\nu - \sigma),\\
\beta_3 = \sin\rho \cos(\nu - \sigma).
\end{gathered}
\tag{5.3.2}
$$

Величины G_2, G_3 получаются из (5.3.2) циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Здесь ω_0 — средняя угловая скорость движения центра масс O спутника по эллиптической орбите, вокруг притягивающего центра C, ν — истинная аномалия, e — эксцентриситет орбиты, β_i — направляющие косинусы радиуса-вектора CO центра масс спутника в связанной системе $x_1x_2x_3$. Истинная аномалия ν определяется уравнением

$$
\begin{gathered}
\dot{\nu} = \omega_0 (1 + e\cos\nu)(1 - e^2)^{-3/2},\\
\nu(t + T_0) = \nu(t) + 2\pi, \quad \omega_0 = 2\pi/T_0, \quad 0 \leqslant e < 1.
\end{gathered}
\tag{5.3.3}
$$

Управляемая система (5.3.1)—(5.3.3) является существенно нелинейной многочастотной системой. Далее исследуем при упрощающих предположениях о близости друг к другу моментов инерции спутника и о малости управляющих моментов

$$I_i = I(1+\varepsilon\Delta_i), \quad U_i = \varepsilon v_i, \quad \varepsilon \ll 1, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (5.3.4)$$

Первое условие (5.3.4) обеспечивает малость гравитационных моментов (5.3.2), т. е. $G_i \sim \varepsilon$ (см. [225]). Величины I, Δ_i, v_i, ω_0, L имеют порядок $O(1)$.

При $\varepsilon = 0$ из (5.3.1), (5.3.4) получим $\psi = LI^{-1}t + \mathrm{const}$, а остальные переменные сохраняются.

Следовательно, полная система (5.3.1)—(5.3.4) при $\varepsilon \ll 1$ содержит две быстрые переменные ψ и ν, остальные переменные являются при $\varepsilon \ll 1$ медленными. Отметим, что переменная ν, уравнение для которой (5.3.3) может быть проинтегрировано отдельно, входит в выражение (5.3.2) для гравитационного момента. Для фазы ψ частота зависит от L, поэтому система существенно нелинейна.

2. Задача оптимального управления. Найдем управляющие функции v_i, переводящие систему (5.3.1)—(5.3.5) из заданного начального состояния в состояние с заданной величиной $L(T) = L^*$ кинетического момента. Момент времени T фиксирован, минимизируется функционал энергетических затрат

$$J = \varepsilon \int_0^T \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) dt \to \min, \qquad T = \varepsilon^{-1}\Theta. \qquad (5.3.5)$$

Дополнительные ограничения на управление не налагаются. При помощи принципа максимума получим выражения для управления

$$v_1 = p_\rho/2L, \quad v_2 = p_\sigma/2L \sin\rho, \quad v_3 = p_L/2. \qquad (5.3.6)$$

Через p с соответствующими индексами обозначены сопряженные переменные. Используя формально методику главы 3, подставим управления v_i из (5.3.6) в функцию Гамильтона задачи (5.3.1)—(5.3.5) и положим $p_\psi = 0$. Затем выполним независимое усреднение двоякопериодической функции H от ψ, ν по переменным ψ и $\nu(t)$, учитывая зависимость (5.3.3).

Так как система двухчастотна, то в ней возможны резонансы. В неуправляемой системе они появляются при условиях [225]

$$LI^{-1} = n\omega_0, \quad LI^{-1} = n\omega_0/2, \quad LI^{-1} = n\omega_0/3, \quad n = 1,\ 2, \ldots \qquad (5.3.7)$$

Члены уравнений, содержащие управляющие моменты (5.3.6), зависят от медленных переменных и поэтому не добавляют новых резонансов. Поскольку в построенном ниже решении L изменяется монотонно, то система не застревает на резонансах (5.3.7) (см. [32, 33, 157]), что оправдывает применение усреднения по двум фазам.

После указанного усреднения гамильтониан принимает вид [21]

$$\langle H\rangle = \varepsilon H^*, \quad H^* = \frac{1}{4}\left[p_L^2 + L^{-2}\left(p_\rho^2 + p_\sigma^2 \sin^{-2}\rho + \right.\right.$$
$$\left.\left. + p_\theta^2 + p_\varphi^2 \sin^{-2}\theta\right)\right] + p_\theta I^{-1} LD\left(\Delta_2 - \Delta_1\right)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi +$$
$$+ p_\varphi I^{-1} LD\cos\theta\left(\Delta_1\sin^2\varphi + \Delta_2\cos^2\varphi - \Delta_3\right) + p_\sigma L^{-1}\Phi\cos\rho, \tag{5.3.8}$$

$$D = 1 - (3/4)\, I^2\omega_0^2 L^{-2}\left(1 - e^2\right)^{-3/2}\left(1 - 3\cos^2\rho\right), \tag{5.3.9}$$

$$\Phi = (3/4)\, I\omega_0^2\left(1 - e^2\right)^{-3/4}\left[\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \right.$$
$$\left. - 3\left(\Delta_1\sin^2\varphi + \Delta_2\cos^2\varphi\right)\sin^2\theta - 3\Delta_3\cos^2\theta\right]. \tag{5.3.10}$$

3. Построение и анализ решения. Из структуры гамильтониана (5.3.8) следует, что сопряженная система допускает частное решение

$$p_L = \mathrm{const}, \; p_\rho = p_\sigma = p_\theta = p_\varphi = 0, \tag{5.3.11}$$

которое удовлетворяет также условиям трансверсальности. Уравнения первого приближения для остальных медленных переменных с учетом (5.3.8), (5.3.10) примут вид

$$\frac{dL}{d\tau} = \frac{p_L}{2}, \quad \frac{d\rho}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\Phi\cos\rho}{L}, \quad p_L = \mathrm{const},$$
$$\frac{d\theta}{d\tau} = I^{-1}LD\left(\Delta_2 - \Delta_1\right)\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi, \tag{5.3.12}$$
$$\frac{d\varphi}{d\tau} = I^{-1}LD\left(\Delta_1\sin^2\varphi + \Delta_2\cos^2\varphi - \Delta_3\right)\cos\theta, \quad \tau = \varepsilon t.$$

Проинтегрируем систему (5.3.12). Вычисляя $d\Phi/d\tau$ на основании (5.3.10), (5.3.12), получим $\Phi = \mathrm{const}$.

Интегрируя первые три уравнения (5.3.12), определим

$$L = L^0 - \left(L^0 - L^*\right)\tau\Theta^{-1}, \quad p_L = 2\left(L^* - L^0\right)\Theta^{-1}, \quad \rho = \rho^0, \tag{5.3.13}$$

$$\sigma = \sigma^0 + \frac{\Phi^0\Theta\cos\rho^0}{L^* - L^0}\ln\left[1 - \left(1 - \frac{L^*}{L^0}\right)\frac{\tau}{\Theta}\right], \quad \Phi = \Phi^0 = \mathrm{const}.$$

Индексом ^{0} обозначены начальные данные при $t = 0$. Уравнения (5.3.12) для θ, φ интегрируются в квадратурах при помощи первого интеграла (5.3.10). Оптимальное управление и значение функционала получим, подставляя (5.3.11), (5.3.13) в (5.3.5), (5.3.6)

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = \left(L^* - L^0\right)\Theta^{-1} = \mathrm{const},$$
$$J_0 = \left(L^0 - L^*\right)^2\Theta^{-1}. \tag{5.3.14}$$

Программное управление первого приближения (5.3.14) направлено вдоль вектора кинетического момента L и постоянно по величине на оптимальной траектории. Проекции управляющего момента εu_i на оси связанной системы координат z_i найдем из (5.3.14) при помощи направляющих косинусов α_{ij}. Представляя управление в форме синтеза, получим

$$u_1 = \frac{L^* - L}{\Theta - \tau}\sin\theta\sin\varphi, \quad u_2 = \frac{L^* - L}{\Theta - \tau}\sin\theta\cos\varphi,$$
$$u_3 = \frac{L^* - L}{\Theta - \tau}\cos\theta.$$

Сопоставим оптимальные траектории (5.3.12), (5.3.13) с соответствующим неуправляемым движением спутника, построенным в [225]. В обоих случаях движение можно разделить на три части: быстрое вращение тела (изменение фазы ψ) с угловой скоростью LI^{-1}; медленное движение вектора L в абсолютном пространстве (переменные L, ρ, σ); медленное движение вектора L относительно тела (переменные θ, φ).

Быстрые движения в рассматриваемых случаях отличаются тем, что L постоянно при отсутствии управления и медленно меняется в управляемом движении (см. (5.3.13)).

При отсутствии управления величины L, ρ и $d\sigma/d\tau$ постоянны, так что вектор L медленно вращается вокруг нормали к плоскости орбиты с постоянной угловой скоростью, образуя с нормалью постоянный угол ρ. В управляемом движении величина L изменяется линейно (так, в случае торможения $L^* < L^0$ она убывает), угол ρ по-прежнему постоянен, а $d\sigma/d\tau$ медленно изменяется вместе с L (см. (5.3.12), (5.3.13)). Величина Φ постоянна в обоих случаях.

Уравнения (5.3.12) для θ, φ и выражение (5.3.9) для D имеют один и тот же вид в обоих случаях. При $D = 1$ эти уравнения описывают движение свободного тела (случай Эйлера — Пуансо), так что влияние возмущений и управления приводит лишь к изменению в D раз скорости перемещения вектора L относительно тела по траекториям движения Эйлера — Пуансо. Величина D постоянна в неуправляемом движении, а в управляемом случае она изменяется вместе с L. В зависимости от знака выражения $1 - 3\cos^2\rho$ (см. (5.3.9)) движение вектора L относительно тела может происходить быстрее или медленнее, чем в случае Эйлера — Пуансо ($D > 1$ или $D < 1$). Возможно движение и в обратном направлении (если $D < 0$).

§ 4. Вращательные движения тела при заданных законах торможения

1. Некоторые простые законы торможения. Рассмотрим управляемое движение относительно центра масс твердого тела с произвольными моментами инерции $I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3$. На тело действуют только управляющие моменты, уравнения движения имеют вид (5.1.1). Управляющие функции подчинены ограничениям одного из видов (5.1.7), (5.1.20) или (5.1.26). Поставим задачу перевести тело из произвольного начального вращения (5.1.1) в состояние покоя $\omega = 0$.

Построенные в §§ 1—3 оптимальные законы управления в общем случае довольно сложны, поэтому представляют интерес простые законы торможения, близкие к оптимальным. В качестве таких законов рассмотрим локально оптимальные управления (см. § 2 главы 1), обеспечивающие наибольшую скорость убывания одного из первых интегралов невозмущенного движения (5.2.1), а именно квадрата модуля кинетического момента L^2 или кинетической энергии E.

В случае ограничения (5.1.7) управление, минимизирующее правую часть уравнения (5.2.3) для L^2, имеет вид

$$u_i = -b_i L_i \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2 L_i^2 \right)^{-1/2}, \quad L_i = I_i \omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4.1)$$

Подставляя управление (5.4.1) в уравнение (5.2.3) для L^2, получим оценку для скорости убывания L^2

$$L^{2\cdot} = -2\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2 L_i^2 \right)^{1/2} \leqslant -2\varepsilon b_0 L, \quad b_0 > 0, \quad (5.4.2)$$

где b_0 — наименьшее из b_1, b_2, b_3. Из уравнения (5.4.2) следует, что $L \leqslant L^0 - \varepsilon b_0 t$. Следовательно, закон управления (5.4.1) при любом $\varepsilon > 0$ обеспечивает полную остановку вращения за время

$$T \leqslant T_L = \varepsilon^{-1} b_0^{-1} L^0. \quad (5.4.3)$$

Аналогично, управление, максимизирующее скорость убывания энергии E, для ограничения (5.1.7) имеет вид

$$u_i = -b_i \omega_i \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2 \omega_i^2 \right)^{-1/2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Проводя оценки, подобные (5.4.2), (5.4.3), получим

$$\dot{E} = -\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2 \omega_i^2 \right)^{1/2} \leqslant -\varepsilon\beta\sqrt{E}, \quad \beta = \min_i \left(\sqrt{2} b_i I_i^{-1/2} \right),$$
$$T \leqslant T_E = 2\varepsilon^{-1}\beta^{-1}\sqrt{E^0}. \quad (5.4.4)$$

В случае ограничения (5.1.20) локально оптимальные законы в смысле L^2 и E совпадают и имеют вид

$$u_i = -\operatorname{sign} \omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4.5)$$

Оценим скорость изменения величин L^2, E

$$L^{2\cdot} = -2\varepsilon \sum_{i=1}^{3} b_i I_i |\omega_i| \leqslant -2\varepsilon b_0 L,$$
$$\dot{E} = -\varepsilon \sum_{i=1}^{3} b_i |\omega_i| \leqslant -\varepsilon\beta\sqrt{E}.$$

Время остановки оценивается неравенством

$$T \leqslant \min (T_L,\ T_E),$$

где T_L, T_E введены в (5.4.3), (5.4.4). Аналогичные законы управления можно получить для ограничения (5.1.26).

Приведенные законы при любых ε гарантируют полную остановку вращений за время $\sim \varepsilon^{-1}$. Эти законы являются оптимальными в некоторых частных случаях. А именно, закон (5.4.1) оптимален, если $b_i = b_0$ (см. [34, 132, 133, 17, 19, 22]). В этом случае он совпадает с законом

$$u_i = -L_i L^{-1}, \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{5.4.6}$$

не зависящим от b_i. Управление (5.4.6), как показывает аналогичная (5.4.2) оценка, обеспечивает полную остановку не позже, чем за время T_L из (5.4.3).

Проанализируем быстрые вращения твердого тела под действием законов управления (5.4.5), (5.4.6) в случае $\varepsilon \ll 1$.

2. Эволюция вращений при заданных законах торможения. Подставим законы управления (5.4.5), (5.4.6) в систему уравнений в форме (5.2.3) и проведем усреднение по невозмущенному движению Эйлера—Пуансо. Для этого используются выражения угловых скоростей движения Эйлера — Пуансо [126]

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left[\frac{2EI_3 - L^2}{I_1(I_3 - I_2)}\right]^{1/2} \operatorname{cn}(\theta, k),\\
\omega_2 &= \left[\frac{2EI_3 - L^2}{I_2(I_3 - I_2)}\right]^{1/2} \operatorname{sn}(\theta, k),\\
\omega_3 &= \left[\frac{L^2 - 2EI_1}{I_3(I_3 - I_1)}\right]^{1/2} \operatorname{dn}(\theta, k) \qquad (L^2 \geqslant 2EI_2).
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

После подстановки (5.4.5) (или 5.4.6)), (5.4.7) правые части системы (5.2.3) будут периодическими функциями θ с периодом $4K(k)$, см. (5.2.6). Вычисляя средние за период и используя формулу (5.2.2), получим для закона

(5.4.6) усредненную систему

$$\blacksquare\ \frac{dL}{d\tau} = -\frac{1}{f_3(k^2)}\Big\{b_1 I_1 (I_3 - I_2)\left[\frac{E(k)}{K(k)} - (1-k^2)\right] + $$
$$+ b_2 I_2 (I_3 - I_1)\left[1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right] + b_3 I_3 (I_2 - I_1)\frac{E(k)}{K(k)}\Big\},\quad \tau = \varepsilon t,$$
$$\frac{dk^2}{d\tau} = -\frac{2}{L}\Big\{b_1\left[\frac{E(k)}{K(k)} - (1-k^2)\right] + b_2(1-k^2)\left[1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right] - $$
$$- b_3 k^2 \frac{E(k)}{K(k)}\Big\},\quad f_3(k^2) = I_3(I_2 - I_1) + I_1(I_3 - I_2)k^2 > 0. \ \square \tag{5.4.8}$$

Аналогично для закона управления (5.4.5) получим

$$\blacksquare\ \frac{dL}{d\tau} = -\frac{1}{K(k)\,|f_3(k^2)|^{1/2}}\Big\{b_1 [I_1(I_3 - I_2)]^{1/2} \arcsin k + $$
$$+ b_2 [I_2(I_3 - I_1)]^{1/2} \ln\frac{1+k}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{\pi b_3}{2}[I_3(I_2 - I_1)]^{1/2}\Big\},$$
$$\frac{dk^2}{d\tau} = -\frac{2[f_3(k^2)]^{1/2}}{LK(k)}\Big\{\frac{b_1 \arcsin k}{[I_1(I_3 - I_2)]^{1/2}} + $$
$$+ \frac{b_2(1-k^2)}{[I_2(I_3 - I_1)]^{1/2}} \ln\frac{1+k}{\sqrt{1-k^2}} - \frac{\pi b_3}{2[I_3(I_2 - I_1)]^{1/2}}\Big\}. \ \square \tag{5.4.9}$$

Уравнения (5.4.8)—(5.4.9) справедливы при $L^2 \geqslant 2EI_2$, а в области $L^2 \leqslant 2EI_2$ в них нужно поменять местами индексы 1, 3.

Система (5.4.9) подробно проанализирована в работе [183]; ограничимся здесь основными результатами. Из свойств полных эллиптических интегралов $K \geqslant E$, $E \geqslant (1-k^2)K$ и неравенств $b_i > 0$, $f_3 > 0$ следует, что правая часть первого уравнения (5.4.8) при всех $k \in [0, 1]$ ограничена сверху числом $-\alpha$, где $\alpha > 0$. То же самое имеет место для первого уравнения (5.4.9). Следовательно, величина L кинетического момента в силу усредненных систем (как и в силу точных) строго убывает и обращается в нуль.

Системы (5.4.8), (5.4.9) можно привести к уравнениям вида

$$dk^2/d\xi = g(k^2), \qquad \xi = \ln(L^0/L), \tag{5.4.10}$$

откуда следует, что они интегрируются в квадратурах. Правая часть уравнений (5.4.8), (5.4.9) для k^2 (или, что то же самое, правая часть уравнения (5.4.10)) обращается в нуль при некоторых значениях k^2, отвечающих стационарным точкам. Для системы (5.4.8) стационарные точки зависят от b_i, а для (5.4.9) — также и от I_i.

Из уравнения (5.4.10) видно, что стационарная точка k_*^2 (в ней $g(k_*^2) = 0$) асимптотически устойчива, если $g'(k_*^2) < 0$, и неустойчива при $g'(k_*^2) > 0$. При этом аргумент ξ изменяется от 0 до ∞ на интервале движения, на котором L убывает от L^0 до 0. Возвращаясь от ξ к аргументу τ, нужно учесть, что L изменяется линейно по τ. Поэтому обычной экспоненциальной устойчивости по ξ вида $k^2 - k_*^2 \sim \exp(-\gamma\xi)$, где $\gamma = \mathrm{const} > 0$, соответствует степенная зависимость

$$k^2 - k_*^2 \sim (L/L^0)^\gamma \sim (\Theta - \tau)^\gamma, \quad \gamma > 0, \quad \Theta = \varepsilon T.$$

Здесь T — момент остановки. Таким образом, в момент остановки величина k^2 достигает одной из устойчивых стационарных точек.

На рис. 5.5, 5.6 представлены диаграммы (см. [183]), показывающие для систем (5.4.8), (5.4.9) соответственно число стационарных точек, их положение и характер устойчивости (направление изменения k^2 указано стрелками). Левая часть диаграмм отвечает области $L^2 > 2EI_2$, правая часть — области $L^2 < 2EI_2$. Точки $k^2 = 0$ всегда являются стационарными и для системы (5.4.9) — устойчивыми. Левая точка $k^2 = 0$ на рис. 5.5, 5.6 отвечает вращению вокруг оси наибольшего момента инерции I_3, правая — вокруг оси наименьшего момента инерции I_1. Точка $k^2 = 1$, где $L^2 = 2EI_2$, также является стационарной, но здесь, вообще говоря, не изменяется знак функции $g(k^2)$ в (5.4.10); эта точка отвечает движению по сепаратрисе в случае Эйлер — Пуансо, где точность метода усреднения снижается. Кроме этого, в случае (5.4.8) имеется еще не более одной, а в случае (5.4.9) — одна или три стационарные точки. На рис. 5.5, 5.6 приняты обозначения

$$c_1 = b_1/b_2, \quad c_3 = b_3/b_2,$$

$$c = \frac{b_3}{b_1}\left[\frac{I_1(I_3 - I_2)}{I_3(I_2 - I_1)}\right]^{1/2}, \quad \mu = \min_{0<k<1} \frac{2 \arcsin k}{\pi k^2} \simeq 0{,}878.$$

Случай динамической симметрии получается в пределе

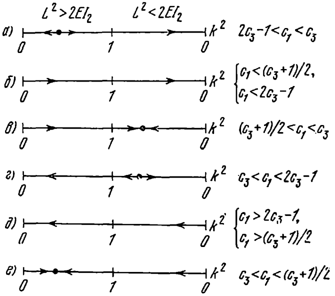


Рис. 5.5.

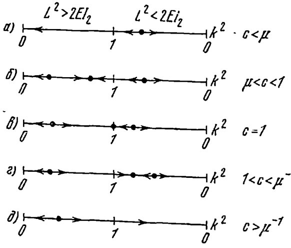


Рис. 5.6.

из приведенных результатов и соответствует наличию только одной области $L^2 > 2EI_2$ при $I_1 = I_2 < I_3$ или $L^2 < 2EI_2$ при $I_1 < I_2 = I_3$ на рис. 5.5, 5.6.

Интересно отметить, что уравнение (5.4.8) для k^2 близко по структуре к соответствующему уравнению для эволюции вращения твердого тела под действием малых диссипативных моментов, обусловленных наличием в теле полости с сильно вязкой жидкостью [227].

3. О полной остановке вращений. Приближенно оптимальные законы управления §§ 1—3 исследовались асимптотическим методом усреднения, дающим точность по медленным переменным $\sim \varepsilon$ на интервале $T \sim \varepsilon^{-1}$, если скорость изменения фазы $\omega \gg \varepsilon$. Однако в задаче торможения $\omega \sim L \to 0$ при $L \to 0$, поэтому окрестность момента остановки при применении указанных законов торможения требует дополнительного исследования.

Пусть в некоторый момент $T^* \sim \varepsilon^{-1}$ при помощи асимптотически оптимальных законов управления достигнуто значение L^*, где $\varepsilon L^0 \ll L^* \ll L^0$. Положим $L^* = \varepsilon^\alpha L^0$, где $1/2 < \alpha < 1$ и укажем способ управления, обеспечивающий полную остановку вращений (уменьшение L от L^* до нуля). Для определенности рассматриваем ограничение (5.1.7).

Вводя новые переменные $\Omega_i = \varepsilon^{-\alpha}\omega_i$ и аргумент $t_1 = \varepsilon^{1-\alpha}(t - T^*)$, преобразуем систему (5.1.1) к виду

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt_1} = b_1 u_1 - \varepsilon_1 (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3, \quad \Omega_1(0) = \Omega_1^0 \quad (1, 2, 3),$$

$$0 \leqslant \varepsilon_1 = \varepsilon^{2\alpha - 1} \ll 1, \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant 1. \tag{5.4.11}$$

Здесь $\Omega_i^0 \sim \varepsilon^{-\alpha} L^* \sim 1$. В случае $\varepsilon_1 = 0$ согласно § 5 главы 1 (см. также [22]) оптимальный по быстродействию закон торможения для системы (5.4.11) имеет вид (1.5.7), т. е.

$$u_i = -\frac{z_i}{z}, \quad z_i = \frac{I_i}{b_i}\Omega_i,$$
$$z = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.4.12}$$

Подставляя закон (5.4.12) в систему (5.4.11) при $\varepsilon_1 \geqslant 0$,

получим

$$\frac{dz}{dt_1} = -1 - \varepsilon_1 b \frac{z_1 z_2 z_3}{z}, \quad z(0) = z^0 = \left(z_1^{02} + z_2^{02} + z_3^{02}\right)^{1/2},$$

$$b = \frac{I_3 - I_2}{I_2 I_3} \frac{b_2 b_3}{b_1} + \frac{I_1 - I_3}{I_1 I_3} \frac{b_1 b_3}{b_2} + \frac{I_2 - I_1}{I_1 I_2} \frac{b_1 b_2}{b_3}. \tag{5.4.13}$$

Пусть выполнено условие $\varepsilon_1 |b| z^{02} < 1$, тогда согласно (5.4.13) z строго убывает с конечной скоростью и обращается в нуль не позже, чем в момент $t_1 = T_1 = z^0(1 - \varepsilon_1 |b| z^{02})^{-1}$; данная оценка может быть улучшена. Полное время остановки вращений (в исходном времени) равно

$$T^* + \varepsilon^{\alpha-1} T_1 \sim \varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon^\alpha).$$

Таким образом, полную остановку вращений можно осуществить за время $T + o(T)$, где $T \sim \varepsilon^{-1}$ — время остановки, рассчитанное методом усреднения для асимптотически оптимального закона.

§ 5. Задача переориентации твердого тела

1. Постановка задачи. Найденные в §§ 1—4 законы управления приводят тело в состояние покоя, однако не обеспечивают заданной его ориентации в пространстве. Между тем важное прикладное значение имеют задачи о приведении твердого тела (спутника), совершающего произвольное начальное движение, в заданное угловое положение в инерциальной или орбитальной системе координат. Решение таких задач можно разбить на два этапа: торможение вращений и переориентация, т. е. поворот тела в пространстве.

Первый этап движения не требует знания углового положения тела и может исследоваться на основе только динамических уравнений Эйлера (5.1.1). Целью управления на этом этапе является остановка вращений; подобные движения рассмотрены в §§ 1—4.

Для второго этапа (переориентации) начальное и конечное состояния тела заданы и являются состояниями покоя.

Задачам оптимального управления ориентацией твердого тела посвящено большое число работ, например [25, 30, 95, 120, 135, 169. 180, 200, 234]. В частности, построены решения задач оптимальной переориентации при ограничениях (5.1.20).

Ниже рассматривается задача оптимальной по быстродействию переориентации твердого тела при ограничениях (5.1.7); решение ищется в классе плоских поворотов.

Обозначим через $Ox_1x_2x_3$ связанную с твердым телом систему координат — систему главных центральных осей инерции тела. В начальный момент $t=0$ эта система совпадает с системой $Ox_1^0x_2^0x_3^0$, а в конечный момент T — с системой $O\overset{*}{x}_1\overset{*}{x}_2\overset{*}{x}_3$. Ориентация обеих инерциальных систем $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ и $O\overset{*}{x}_1\overset{*}{x}_2\overset{*}{x}_3$ задана; через n_{ij} обозначим известные направляющие косинусы между осями $O\overset{*}{x}_i$ и Ox_j^0. Движение тела будем искать в классе плоских поворотов, при которых вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ сохраняет постоянное направление в пространстве. Кинематические соотношения для плоского поворота имеют вид [98]

$$\begin{gathered}\cos\gamma = 1/2\,(n_{11}+n_{22}+n_{33}-1), \qquad 0<\gamma<\pi,\\ m_1=\frac{n_{23}-n_{32}}{2\sin\gamma},\quad m_2=\frac{n_{31}-n_{13}}{2\sin\gamma},\quad m_3=\frac{n_{12}-n_{21}}{2\sin\gamma}, \qquad (5.5.1)\\ \omega_i(t)=\omega(t)\,m_i,\quad \omega=\left(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2\right)^{1/2},\qquad i=1,\,2,\,3.\end{gathered}$$

Здесь γ — величина угла поворота, m_i — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{\omega}$ в связанной системе $Ox_1x_2x_3$, ω_i — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси этой системы. Подставляя (5.5.1) в динамические уравнения Эйлера (5.1.1), получим

$$\begin{gathered}I_1m_1\dot{\omega}+(I_3-I_2)m_2m_3\omega^2=b_1u_1 \qquad (1,\,2,\,3),\\ \dot{\alpha}=\omega,\quad \alpha(0)=\omega(0)=\omega(T)=0,\quad \alpha(T)=\gamma.\end{gathered} \qquad (5.5.2)$$

Малость ε в уравнении (5.1.1) здесь не используется, поэтому принято $\varepsilon=1$. Через α обозначен текущий угол поворота, через γ — его заданное конечное значение (5.5.1). Символ (1,2,3) в (5.5.2) означает циклическую перестановку индексов в динамических уравнениях Эйлера. Разделим каждое из этих уравнений на соответствующее b_i, возведем их в квадрат и сложим. Потребуем дополнительно, чтобы коэффициент при смешанном произведении $\omega^2 d\omega/dt$ обратился в нуль, т. е.

$$m_1 m_2 m_3 \left[I_1 (I_3 - I_2) b_1^{-2} + I_2 (I_1 - I_3) b_2^{-2} + \right. \\ \left. + I_3 (I_2 - I_1) b_3^{-2}\right] = 0. \qquad (5.5.3)$$

Тогда в результате указанных операций получим скалярное уравнение

$$A^2 \dot{\omega}^2 + B^2 \omega^4 = u^2, \quad u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant 1,$$
$$A = \left(\sum_{i=1}^{3} I_i^2 m_i^2 b_i^{-2}\right)^{1/2} > 0,$$
$$B = \left[(I_3 - I_2)^2 m_2^2 m_3^2 b_1^{-2} + (I_1 - I_3)^2 m_3^2 m_1^2 b_2^{-2} + \right. \\ \left. + (I_2 - I_1)^2 m_1^2 m_2^2 b_3^{-2}\right]^{1/2} \geqslant 0. \qquad (5.5.4)$$

Здесь наложено ограничение (5.1.7); A и B — известные постоянные. Уравнение (5.5.4) справедливо при условии (5.5.3), которое выполняется в следующих случаях: либо поворот совершается одной из главных центральных осей инерции (одно из m_i равно нулю), либо величины b_i, I_i связаны соотношениями

$$b_i = I_i^{1/2} (\mu I_i + \nu)^{-1/2}, \qquad i = 1, 2, 3. \qquad (5.5.5)$$

Здесь μ, ν — произвольные постоянные, такие, что $\mu I_i + \nu > 0$ для $i = 1, 2, 3$. Первый случай ($m_i = 0$) рассмотрен в работе [185]. Второй случай (5.5.5) допускает произвольную ориентацию вектора $\boldsymbol{\omega}$. Условия (5.5.5) выполняются в важном случае равных плеч b_i, для этого нужно положить $\nu = 0$ в (5.5.5).

Поставим следующую задачу оптимальной переориентации. Требуется найти управления $u_i(t)$, удовлетворяющие ограничению (5.1.7) и переводящие твердое тело за кратчайшее время T из начального положения в конечное посредством плоского поворота (при выполнении условия (5.5.3)). Поставленная задача, согласно (5.5.2), (5.5.4), приводится к задаче оптимального управления

$$\dot{\alpha} = \omega, \quad \dot{\omega} = \delta A^{-1} (u^2 - B^2 \omega^4)^{1/2}, \quad \delta = \pm 1, \quad 0 \leqslant u^2 \leqslant 1,$$
$$\alpha(0) = \omega(0) = \omega(T) = 0, \ \alpha(T) = \gamma, \ T \to \min. \qquad (5.5.6)$$

Здесь α, ω — фазовые координаты, а δ, u^2 — управляющие функции. Решив задачу (5.5.6), можно затем при помощи уравнений (5.5.2) восстановить управления $u_i(t)$ по найденной оптимальной зависимости $\omega(t)$.

2. Построение решения. Рассмотрим двойственную к (5.5.6) задачу о максимальном угле поворота, в которой T фиксировано, а $\gamma = \alpha(T)$ — максимизируемый функционал. Если решение последней задачи будет построено, и зависимость максимального угла γ от T будет строго возрастающей (а это окажется именно так), то тем самым будет получено и решение исходной задачи быстродействия (5.5.6).

Для задачи о максимальном угле поворота имеем

$$\gamma = \int_0^T \omega \, dt \to \max. \qquad (5.5.7)$$

Из второго уравнения и ограничения (5.5.6) получим оценку

$$|\dot{\omega}(t)| \leqslant A^{-1}\left(1 - \omega_*^{-4}\omega^4\right)^{1/2}, \quad |\omega(t)| \leqslant \omega_* = B^{-1/2}. \quad (5.5.8)$$

Из дифференциального неравенства (5.5.8) и начального условия $\omega(0) = 0$ вытекает, что функция $|\omega(t)|$, а вместе с ней и $\omega(t)$, не превосходят функции $\omega_0(t)$, являющейся решением соответствующего (5.5.8) уравнения

$$\dot{\omega}_0 = A^{-1}\left(1 - \omega_*^{-4}\omega_0^4\right)^{1/2}, \quad \omega_0(0) = 0. \qquad (5.5.9)$$

Интегрируя уравнение (5.5.9), найдем

$$\frac{t}{A\omega_*} = \int_0^{\omega_0/\omega_*} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\arccos\frac{\omega_0}{\omega_*}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (5.5.10)$$

Здесь K, F — полный и неполный эллиптические интегралы 1 рода [72]. Обращая зависимость (5.5.10) и учитывая, что $\omega_0 \leqslant \omega_*$ при всех t, получим решение уравнения (5.5.9)

$$\begin{aligned} \omega_0(t) &= \omega_* \operatorname{cn}\frac{\sqrt{2}(t_* - t)}{A\omega_*}, && 0 \leqslant t \leqslant t_*, \\ \omega_0(t) &= \omega_*, && t \geqslant t_*, \end{aligned} \qquad (5.5.11)$$

$$t_* = \frac{A\omega_*}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{A\omega_*}{4\sqrt{2\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2, \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Здесь Γ — гамма-функция Эйлера, k — модуль эллиптического косинуса cn. На интервале $(0, t_*)$ функция $\omega_0(t)$ строго возрастает, далее остается постоянной. Из отмеченного выше мажорирующего свойства функции (5.5.11) вытекает неравенство $\omega(t) \leqslant \omega_0(t)$ при $t \in [0, T]$. Аналогично, учитывая граничное условие $\omega(T) = 0$, получим $\omega(t) \leqslant \omega_0(T - t)$, так что

$$\omega(t) \leqslant \min[\omega_0(t), \omega_0(T-t)], \quad t \in [0, T]. \tag{5.5.12}$$

Абсолютный максимум функционала (5.5.7) при ограничении (5.5.12) достигается, очевидно, в случае знака равенства в (5.5.12), т. е. при

$$\begin{gathered} \omega(t) = \omega_0(t), \quad t \in [0, T/2], \\ \omega(t) = \omega_0(T-t), \quad t \in [T/2, T]. \end{gathered} \tag{5.5.13}$$

Укажем уравнение, реализующее зависимость (5.5.13). Сопоставляя (5.5.6), (5.5.9), получим

$$u^2 = 1, \quad \delta = \operatorname{sign}(T/2 - t), \quad t \in [0, T]. \tag{5.5.14}$$

Для определения угла $\alpha(t)$ проинтегрируем зависимость (5.5.13) при начальном условии $\alpha(0) = 0$, учитывая ее четность относительно момента $t = T/2$

$$\begin{gathered} \alpha(t) = \alpha_0(t) \equiv \int_0^t \omega_0(\tau)\,d\tau, \qquad t \in [0, T/2], \\ \alpha(t) = 2\alpha_0(T/2) - \alpha_0(T-t), \quad t \in [T/2, T]. \end{gathered} \tag{5.5.15}$$

В частности, при $t = T$ получим

$$\gamma = \alpha(T) = 2\alpha_0(T/2). \tag{5.5.16}$$

Решение двойственной задачи (5.5.7) о максимальном угле поворота за фиксированное время построено и дается формулами (5.5.11), (5.5.14) — (5.5.16). Зависимость (5.5.16) в силу положительности $\omega_0(t) > 0$ (см. (5.5.11), (5.5.15)) является строго монотонной: γ возрастает от 0 до ∞ при изменении T от 0 до ∞. Следовательно, построенное решение позволяет определить и решение исходной задачи (5.5.6) оптимального быстродействия. Для этого нужно по заданному γ определить T как единственный корень трансцендентного уравнения (5.5.16).

3. Анализ решения. Конкретизируем и исследуем полученные формулы. Подставляя (5.5.11) в (5.5.13), получим

$$\omega(t) = \omega_* \operatorname{cn} \frac{\sqrt{2}(t_* - t)}{A\omega_*}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \min\left(t_*, \frac{T}{2}\right), \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\omega(t) = \omega_*, \quad t_* \leqslant t \leqslant T - t_* \quad (T \geqslant 2t_*), \qquad (5.5.17)$$

$$\omega(t) = \omega_* \operatorname{cn} \frac{\sqrt{2}(T - t_* + t)}{A\omega_*}, \quad \max\left(T - t_*, \frac{T}{2}\right) \leqslant t \leqslant T.$$

Если $T \geqslant 2t_*$, то угловая скорость сначала возрастает от 0 до ω_* (на интервале $(0, t_*)$), затем остается постоянной, а на интервале $(T - t_*, T)$ убывает от ω_* до нуля. В случае $T < 2t_*$ средний участок движения отсутствует, при этом $\omega(t) < \omega_*$. Отметим, что на среднем участке происходит равномерное вращение, при котором управление компенсирует гироскопические моменты. На рис. 5.7 кривыми *1*, *2*, *3* изображены зависимости $\omega(t)$ для случаев $T < 2t_*$, $T = 2t_*$, $T > 2t_*$ соответственно.

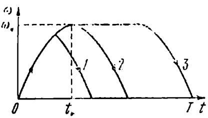


Рис. 5.7.

В отличие от функций $\omega(t)$ и $\alpha(t)$ зависимость $\omega(\alpha)$ выражается в элементарных функциях. Для этого найдем $d\omega/d\alpha$ из (5.5.6) и проинтегрируем полученное уравнение при управлении (5.5.14). С учетом граничных условий (5.5.6) получим

■ $$\omega(\alpha) = \omega_* \left(\sin \frac{2\alpha}{A\omega_*^2}\right)^{1/2}, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \min\left(\alpha_*, \frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\omega(\alpha) = \omega_*, \quad \alpha_* \leqslant \alpha \leqslant \gamma - \alpha_* \quad (\gamma \geqslant 2\alpha_*),$$

$$\omega(\alpha) = \omega_* \left[\sin \frac{2(\gamma - \alpha)}{A\omega_*^2}\right]^{1/2}, \quad \max\left(\gamma - \alpha_*, \frac{\gamma}{2}\right) \leqslant \alpha \leqslant \gamma,$$

$$\alpha_* = (\pi/4) A\omega_*^2. \quad \square \qquad (5.5.18)$$

Здесь участки движения соответствуют участкам (5.5.17). Участок выхода угловой скорости на максимальное значение ω_* отсутствует, если $\gamma < 2\alpha_*$. Так как

$\gamma \leqslant \pi$, то используя выражения (5.5.18), (5.5.8) для постоянных α_*, ω_*, получим, что этот участок всегда отсутствует, если $A > 2B$.

Зависимость $\alpha(t)$ определена соотношениями (5.5.15) и сводится к вычислению функции $\alpha_0(t)$. Последнюю проще всего найти, исключая ω из формул (5.5.17), (5.5.18) для первого участка движения

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2} A\omega_*^2 \arcsin\left[\operatorname{cn}^2 \frac{\sqrt{2}(t_* - t)}{A\omega_*}\right], \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_*,$$
$$\alpha_0(t) = \alpha_* + \omega_*(t - t_*), \qquad t \geqslant t_*. \tag{5.5.19}$$

Сравнивая (5.5.19) и (5.5.18), заметим, что $\alpha_0(t) < \alpha_*$ при $t < t_*$. Подставим функцию (5.5.19) в соотношение (5.5.16) и решим уравнение для T. Рассматривая отдельно случаи $\gamma \leqslant 2\alpha_*$ и $\gamma \geqslant 2\alpha_*$ и обращая эллиптический косинус, получим

$$T = 2t_* - \sqrt{2}A\omega_* F\left(\arccos\left(\sin\frac{\gamma}{A\omega_*^2}\right)^{1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$T \leqslant 2t_*, \quad \gamma \leqslant 2\alpha_*, \tag{5.5.20}$$
$$T = 2t_* + (\gamma - 2\alpha_*)\,\omega_*^{-1} \geqslant 2t_*, \quad \gamma \geqslant 2\alpha_*.$$

Решение поставленной задачи переориентации полностью построено. Время быстродействия определяется равенствами (5.5.20), угловая скорость — формулами (5.5.17), (5.5.18), а угол α — (5.5.15), (5.5.19). Постоянные t_*, α_* даны соотношениями (5.5.11), (5.5.18). Управление имеет вид (5.5.14), а его компоненты $u_i(t)$ могут быть найдены из уравнений (5.5.2).

ГЛАВА 6

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В главе 6 рассматривается задача оптимального по быстродействию перемещения колебательных систем на заданное расстояние с гашением колебаний. В §§ 1—3 предполагается, что скорость перемещения системы ограничена и может изменяться практически мгновенно (безынерционно). § 1 приведены постановки задач оптимального управления. В § 2 дано решение задачи об оптимальном по быстродействию перемещении колебательной системы на заданное расстояние. В § 3 описано решение задачи о максимальном перемещении за фиксированное время. Рассмотрены также квазиоптимальные режимы с фиксированным заранее числом переключений. Приведены оценки близости квазиоптимальных режимов к оптимальным. § 4 посвящен задаче оптимального перемещения двухмассовой колебательной системы при помощи ограниченной управляющей силы. В отличие от §§ 1—3, здесь скорость перемещения не может изменяться скачком. Построено оптимальное и квазиоптимальное управление. Рассмотрена также нелинейная постановка задачи в случае больших колебаний. Материал §§ 1—3 основан на результатах работ [228, 198], § 4 — на работах [38, 36]. Близкие по постановкам задачи были рассмотрены в работах [70, 140, 146, 171, 207, 239, 242, 250, 251, 259].

§ 1. Постановка задач оптимального перемещения с гашением колебаний

1. Уравнения движения. Рассматриваемая механическая система представляет собой физический маятник, точка подвеса P которого может двигаться вдоль горизонтальной прямой Ox (рис. 6.1). Обозначим через φ угол отклонения маятника от вертикали, через x — координату точки подвеса по оси x, отсчитанную от начального положения, через g — ускорение силы тяжести, через m — массу груза, через I — его момент инерции относительно точки подвеса, через L — расстояние от точки подвеса P до центра инерции C. Направление отсчета угла указано на рис. 6.1. Считая колебания маятника малыми, запишем линейное уравнение колебаний под действием сил тяжести и сил инерции

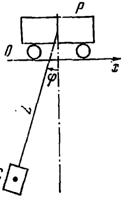


Рис. 6.1.

$$I\ddot{\varphi} = -mgL\varphi + mLw. \qquad (6.1.1)$$

Здесь w — ускорение точки подвеса. Скорость v точки подвеса по условию считаем ограниченной по величине $v_0 \geqslant v \geqslant -v_0\gamma$, $v_0 \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$ — некоторые постоянные. Поэтому имеем соотношения

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = w, \quad v_0 \geqslant v \geqslant -v_0\gamma. \qquad (6.1.2)$$

При $\gamma = 1$ имеем симметричные двусторонние ограничения на скорость, т. е. движение в обе стороны по оси x может происходить с одинаковой скоростью. В случае $\gamma = 0$ движение возможно лишь в одну сторону; обратные смещения точки подвеса не допускаются.

Движение системы начинается из покоя в момент $t = 0$ и заканчивается в некоторый момент $t = T$, причем система снова покоится. Обозначая через a перемещение маятника, запишем эти условия в виде

$$\begin{gathered} \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = x(0) = v(0) = 0, \\ \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = v(T) = 0,\ x(T) = a. \end{gathered} \qquad (6.1.3)$$

Направление оси x выбрано так, что $a \geqslant 0$. Соотношения (6.1.1) — (6.1.3) определяют уравнения движения системы, граничные условия и ограничения. Соотношения (6.1.2) предполагают, что скорость точки подвеса может изменяться практически мгновенно. Это предположение справедливо, если время изменения скорости на величину порядка v_0 (время ускорения или торможения) мало по сравнению с периодом свободных колебаний системы. Такое предположение верно для ряда встречающихся на практике малых грузоподъемных машин, у которых время выхода двигателя на стационарный режим мало по сравнению с периодом колебаний груза, а тормозная система обеспечивает практически мгновенную остановку тележки. Случай ограничений, наложенных как на скорость, так и на ускорение точки подвеса, рассмотрен в главе 7.

2. О сходе со связи. Уравнения (6.1.1) справедливы, если колебания малы, а связь маятника с подвесом является удерживающей, т. е. маятник — твердое тело. Покажем, что и в случае неудерживающей связи, когда маятник есть материальная точка на гибкой нерастяжимой нити, допущение малости колебаний позволяет применять рассматриваемую модель. Момент инерции I здесь равен mL^2. Период колебаний T_* и амплитуда колебаний φ_* по порядку величины соответственно равны $L^{1/2}g^{-1/2}$ и $v_0 g^{-1/2}L^{-1/2}$. Условие малости колебаний имеет вид $\varphi_* \sim$ $\sim v_0 g^{-1/2}L^{-1/2} \ll 1$. В случае неудерживающей связи может происходить сход со связи, в частности, при мгновенном изменении скорости подвеса, а при выходе на связь будет иметь место удар. Оценим по порядку величины промежуток времени от момента схода со связи до момента выхода на связь в случае малых колебаний. Это время максимально, если сход со связи происходит в момент максимального отклонения маятника от положения равновесия.

Пусть в момент $t = t_0$ угол отклонения маятника равен φ_*, причем это отклонение максимально (угловая скорость равна нулю). Пусть в этот момент скорость точки подвеса изменяется скачком на величину v_0, причем в таком направлении, что происходит сход со связи (влево на рис. 6.1). Обозначая через x_1 и y_1 текущие координаты точки C в системе координат, движущейся поступательно вместе с точкой подвеса, имеем

$$x_1 = -L\sin\varphi_* + v_0(t-t_0),\ y_1 = -L\cos\varphi_* - g(t-t_0)^2/2.$$

Ось y_1 направлена вертикально вверх. В момент t_1 возвращения на связь должно быть выполнено условие $x_1^2 + y_2^2 = L^2$. Разрешая это уравнение относительно t_1, получим

$$t_1 - t_0 \sim v_0\varphi_* g^{-1} \sim T_*\varphi_*^2 \ll T_*.$$

Здесь использованы приведенные выше оценки для φ_* и T_*.

Таким образом, при условии малости колебаний $\varphi_* \sim v_0 g^{-1/2} L^{-1/2} \ll 1$ движение в случае неудерживающей связи будет с высокой степенью точности близко к движению при удерживающей связи.

3. Постановка задач оптимального управления. Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве единицы скорости v_0, а в качестве единицы времени —

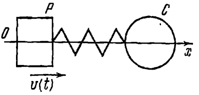


Рис. 6.2.

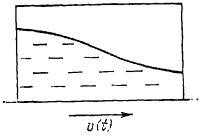


Рис. 6.3.

величину $T_0 = (I/mgL)^{1/2}$, обратную частоте свободных колебаний маятника. Сделаем в (6.1.1)—(6.1.3) следующую замену переменных и констант:

$$\begin{aligned} &t = T_0 t', \quad x = v_0 T_0 x', \quad v = v_0 v', \\ &w = v_0 T_0^{-1} w', \quad \varphi = v_0 T_0^{-1} g^{-1} \varphi', \\ &T = T_0 T', \quad a = v_0 T_0 a', \quad T_0 = (I/mgL)^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

В дальнейшем все исследование проводится в безразмерных (штрихованных) переменных, однако штрихи для удобства записи опускаем. Соотношения (6.1.1) — (6.1.2) после замены (6.1.4) примут вид

$$\ddot{\varphi} + \varphi = w, \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = w, \quad -\gamma \leqslant w \leqslant 1, \tag{6.1.5}$$

а вид граничных условий (6.1.3) не изменится.

Отметим, что система (6.1.5) описывает движение управляемых колебательных систем различной физической природы: систем с упругими элементами, сосудов с жидкостью, имеющей свободную поверхность и т. д., если можно ограничиться рассмотрением колебаний основного тона. Приведем примеры.

На рис. 6.2 изображена двухмассовая колебательная система, движущаяся без трения по горизонтальной направляющей Ox. Скорость v точки P является управлением, а масса C связана с точкой P линейной пружиной. Если обозначить через φ удлинение пружины по сравнению с нейтральным ее состоянием, то уравнения системы в безразмерных переменных примут вид (6.1.5).

Изображенный на рис. 6.3 сосуд с идеальной несжимаемой жидкостью может перемещаться со скоростью v вдоль горизонтальной прямой. Если рассматривать одну форму малых колебаний жидкости (основной тон), то уравнения системы также приводятся к виду (6.1.5). Некоторые другие примеры (в частности, крутильные колебания, см. рис. 4.6) даны в § 2 главы 4.

Сформулируем для системы (6.1.5) с краевыми условиями (6.1.3) две связанные между собой задачи оптимального управления.

Задача 1 (оптимального быстродействия). Пусть расстояние $a > 0$ фиксировано. Требуется найти закон изменения $w(t)$ и соответствующий ему $v(t)$ так, чтобы удовлетворялись все соотношения (6.1.3), (6.1.5) и время движения T было минимальным.

Задача 2 (максимального перемещения). Пусть время движения T фиксировано. Требуется найти законы $w(t)$, $v(t)$ так, чтобы удовлетворялись все соотношения (6.1.3), (6.1.5) и путь a, пройденный маятником, был максимальным.

Задачи 1, 2, очевидно, связаны между собой следующим образом. Если в результате решения задачи 2 полученная зависимость максимального пути от времени $a(T)$ будет монотонно возрастающей (а это окажется именно так), то решение задачи 1 для некоторого $a = a_*$ будет совпадать с решением задачи 2 для $T = T_*$, определяемого из соотношения $a(T_*) = a_*$.

§ 2. Решение задачи оптимального быстродействия

1. Эквивалентная задача без фазовых ограничений. В этом параграфе будет построено решение задачи 1. В задаче 1 имеется ограничение на фазовую координату $1 \geqslant v \geqslant -\gamma$, а управление w неограничено. Однако переходом к новым переменным можно избавиться от фазового ограничения.

Преобразуем уравнение (6.1.5) и краевые условия (6.1.3). Введем функцию $\psi(t)$, равную безразмерной абсолютной скорости точки C и связанную с φ и v соотношением

$$\dot{\varphi} = v - \psi. \tag{6.2.1}$$

Продифференцируем обе части равенства (6.2.1) по t и воспользуемся первым уравнением (6.1.5). Получим

$$\dot{\psi} = \varphi. \tag{6.2.2}$$

Краевые условия для системы (6.2.1) — (6.2.2) и второго уравнения (6.1.5) определим из краевых условий (6.1.3), используя (6.2.1) при $t = 0$ и $t = T$. Получим

$$\varphi(0) = \psi(0) = x(0) = \varphi(T) = \psi(T) = 0, \quad x(T) = a. \tag{6.2.3}$$

Задача 3. Найти такой закон управления $v(t)$ системой, определяемой уравнениями (6.2.1), (6.2.2) и вторым уравнением (6.1.5), чтобы были выполнены ограничения на управление $1 \geqslant v \geqslant -\gamma$ и краевые условия (6.2.3), а время движения T было минимальным.

Допустим, что задача 3 решена и найдено оптимальное управление $v(t)$. Определим управление $v_*(t)$ следующим образом

$$v_*(t) = v(t) \text{ при } 0 < t < T, \ v_*(0) = v_*(T) = 0. \tag{6.2.4}$$

Изменение управления в двух точках не отразится на его оптимальности, однако условия $v_*(0) = v_*(T) = 0$ из (6.1.3) для v_* будут выполнены.

Продифференцируем функцию $v_*(t)$, понимая ее производную в точках разрыва в обобщенном смысле

$$w(t) = \dot{v}_*(t). \tag{6.2.5}$$

Верно утверждение: если управление $v(t)$ решает задачу 3 и соответствующее время быстродействия равно T, то управление $w(t)$ из (6.2.5) решает задачу 1 с тем же T. Справедливость этого утверждения сразу вытекает из взаимно однозначного соответствия фазовых переменных и управлений (с точностью до множества нулевой меры) в задачах 1, 3. Таким образом, для решения задачи 1 достаточно решить задачу 3, которая содержит ограничения лишь на управляющую функцию.

2. Структура оптимального решения. Рассматриваемая задача 3 является линейной задачей оптимального быстродействия. Как известно, решение этой задачи существует (в классе измеримых функций), если существует хотя бы одно допустимое управление, переводящее систему из начального состояния в конечное ([176], стр. 147—150). Ниже будет построено такое допустимое управление. Оно будет найдено при помощи принципа максимума. Следовательно, оптимальное управление существует. Оно, как известно, удовлетворяет принципу максимума. Поэтому построенное ниже управление, которое, во-первых, удовлетворяет принципу максимума и, во-вторых, отвечает наименьшему времени T среди всех управлений, удовлетворяющих этому принципу, и будет оптимально.

В соответствии с принципом максимума выпишем функцию Гамильтона

$$H = p_1\varphi + p_2(v - \psi) + p_3 v \qquad (6.2.6)$$

и сопряженную систему

$$\dot{p}_1 = p_2, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad \dot{p}_3 = 0. \qquad (6.2.7)$$

Функция Гамильтона (6.2.6) достигает максимума по v при ограничении $-\gamma \leqslant v \leqslant 1$, если

$$v = -\gamma \text{ при } p_2 + p_3 < 0, \quad v = 1 \text{ при } p_2 + p_3 > 0. \qquad (6.2.8)$$

Интегрируя систему (6.2.7) и подставляя результат в (6.2.8), получим (A_1, A_2, θ — постоянные интегрирования)

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } A_1 \sin(t+\theta) + A_2 > 0, \\ -\gamma & \text{при } A_1 \sin(t+\theta) + A_2 < 0. \end{cases} \qquad (6.2.9)$$

Из (6.2.9) следует, что v — релейная функция, принимающая значения $v = 1$ и $v = -\gamma$.

Обозначим через n число ненулевых интервалов постоянства оптимального управления $v(t)$, а через t_i — длительность этих интервалов, $i = 1, 2, \ldots, n$. Из (6.2.9) вытекают следующие условия

$$\begin{gathered} t_i + t_{i+1} = 2\pi, \quad i = 2, \ldots, n-1; \quad t_1 + t_2 \leqslant 2\pi, \\ t_{n-1} + t_n \leqslant 2\pi, \quad t_1 + t_2 + \ldots + t_n = T, \qquad (6.2.10) \\ t_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered}$$

Согласно (6.2.9) оптимальное управление $v(t)$ и соответствующее ускорение $w(t)$ имеют вид

■
$$v(t) = \frac{1-\gamma}{2} + u\,\frac{1+\gamma}{2}(-1)^{i+1},$$
$$\sum_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum_{j=1}^{i} t_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$w(t) = \frac{1-\gamma}{2}\,\delta(t) +$$
$$+ u(1+\gamma)\left[\frac{\delta(t)}{2} - \sum_{i=2}^{n}(-1)^i\,\delta\left(t - \sum_{j=1}^{i-1} t_j\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^n}{2}\,\delta(t-T)\right] - \frac{1-\gamma}{2}\,\delta(t-T). \ \square \qquad (6.2.11)$$

Здесь через δ обозначена дельта-функция, постоянная u принимает значения ± 1. Отметим, что если в (6.2.11) верхний индекс суммирования равен нулю, то соответствующая сумма полагается равной нулю.

Запишем решение уравнений (6.2.1), (6.2.2), (6.1.5) в виде свертки и учтем краевые условия (6.2.3) при $t = 0$

$$\varphi(t) = \int_0^t \cos(t-\tau)\,v(\tau)\,d\tau, \quad \psi(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\,v(\tau)\,d\tau,$$
$$x(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда согласно граничным условиям (6.2.3) при $t = T$ имеем

$$\int_0^T \cos(T-\tau)\,v(\tau)\,d\tau = 0, \quad \int_0^T \sin(T-v)\,v(\tau)\,d\tau = 0,$$
$$\int_0^T v(\tau)\,d\tau = a. \qquad (6.2.12)$$

Подставляя равенства (6.2.11) в соотношения (6.2.12), получим

$$\frac{1-\gamma}{2}\sin T + u(1+\gamma)\left[\frac{\sin T}{2} - \sum_{i=2}^{n}(-1)^i \sin\left(\sum_{j=i}^{n} t_j\right)\right] = 0,$$

$$\frac{1-\gamma}{2}\cos T + \tag{6.2.13}$$

$$+ u(1+\gamma)\left[\frac{\cos T}{2} - \sum_{i=2}^{n}(-1)^i \cos\left(\sum_{j=i}^{n} t_j\right) + \frac{(-1)^n}{2}\right] -$$

$$- \frac{1-\gamma}{2} = 0, \quad \frac{1-\gamma}{2}T + u\frac{1+\gamma}{2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}t_i = a.$$

Согласно условиям оптимальности (6.2.10) все t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можно выразить через три величины, например, через t_1 (или T), t_2, t_n при помощи соотношений

$$\begin{aligned} t_{2i+1} &= 2\pi - t_2, \quad 3 \leqslant 2i+1 \leqslant n-1, \\ t_{2i} &= t_2, \qquad\quad 2 \leqslant 2i \leqslant n-1. \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

Задача построения оптимального управления свелась к выбору целого n, величины $u = \pm 1$ и чисел t_1 (или T), t_2, t_n, удовлетворяющих ограничениям (6.2.13), (6.2.10) и соответствующих минимальному значению T.

Ускорение (6.2.11) является суммой дельта-функций времени. Соответствующая фазовая траектория маятника в плоскости φ, $d\varphi/dt$, согласно первому уравнению (6.1.5), состоит из n дуг окружностей, отвечающих движению подвеса P с постоянной скоростью, и из $n+1$ отрезков, параллельных оси $d\varphi/dt$. Длины отрезков равны скачкам скорости в (6.2.11).

3. Случай $n=1$. Рассмотрим сначала простейший случай одного интервала постоянства скорости. При этом, очевидно, должно быть $u = 1$ в (6.2.11). Уравнения (6.2.13) тогда дают $\sin T = 0$, $\cos T = 1$, $T = a$, откуда следует $T = a = 2\pi k$, где k — целое. Отметим, что всегда, очевидно, путь a и время T связаны неравенством $a \leqslant T$, так как скорость $v \leqslant 1$. Таким образом, рассматриваемый режим с $n = 1$ является оптимальным для $a = 2\pi k$ и доставляет функционалу T абсолютный минимум, равный $T = a = 2\pi k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

На рис. 6.4 изображена зависимость $v(t)$ и фазовая траектория маятника для $a = 2\pi$. Траектория состоит из отрезков $[0, 1]$ оси $\varphi = 0$, проходимых в противоположных направлениях в моменты $t = 0$ и $t = T$ начала и конца движения, и из единичной окружности, отвечающей движению маятника при $w(t) \equiv 0$. В случае $T = 2\pi k$ эта окружность описывается k раз.

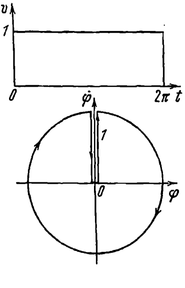


Рис. 6.4.

4. Режимы с четным числом интервалов постоянства скорости. Проанализируем режимы с четным $n \geqslant 2$ и покажем, что они не являются оптимальными.

Если $\gamma = 0$, то при любом четном $n \geqslant 2$ имеем согласно (6.2.11), что либо в начале, либо в конце движения расположен интервал покоя всей системы, где $v = \varphi = \psi = 0$. Такой режим, очевидно, не оптимален по быстродействию, так как интервал покоя можно отбросить, уменьшив время движения. Следовательно, при $\gamma = 0$ режимы с четным n не оптимальны.

Перейдем к случаю $\gamma > 0$. Выразим в соотношениях (6.2.13) все t_i через T, t_2, t_n при помощи (6.2.14) и воспользуемся периодичностью тригонометрических функций. Получим

$$[(1-\gamma) + u(1+\gamma)] \sin T = u(1+\gamma)[n \sin t_n - (n-2) \sin (t_n - t_2)], \tag{6.2.15}$$

$$[(1-\gamma) + u(1+\gamma)] \cos T - (1-\gamma) + u(1+\gamma) = u(1+\gamma)\,[n \cos t_n - (n-2) \cos (t_n - t_2)].$$

Возведем обе части каждого из уравнений (6.2.15) в квадрат и сложим полученные уравнения. После преобразований с учетом равенства $u^2 = 1$ придем к соотношению

$$2(1+\gamma^2) + 4\gamma \cos T = (1+\gamma)^2[n^2 - 2n + 2 - n(n-2)\cos t_2].$$

Упрощая данное равенство, получим

$$4\gamma(1-\cos T)+n(n-2)\ (1-\cos t_2)=0,\ \ n\geqslant 2. \quad (6.2.16)$$

Равенство (6.2.16) удовлетворяется, лишь если оба слагаемых равны нулю. Отсюда при $\gamma>0$ получим $T=2\pi k$, $k=1,2,\ldots$

Пусть сначала $n=2$. Подставляя значение $T=2\pi k$ в (6.2.15), находим $t_2=2\pi s$, s — целое. Из (6.2.10) при $n=2$ следует $t_1+t_2=T\leqslant 2\pi$, причем $t_1>0$, $t_2>0$. Легко видеть, что не существует целых k, s, удовлетворяющих всем приведенным неравенствам. Таким образом, режимы с $n=2$ не оптимальны.

Рассмотрим случай $n\geqslant 4$. Из равенства (6.2.16) при $T=2\pi k$ получим $\cos t_2=1$, $t_2=2\pi$. Здесь учтено, что $0<t_2\leqslant 2\pi$ согласно (6.2.10). Но тогда из (6.2.14) получаем, что $t_3=2\pi-t_2=0$, что противоречит условию $t_3>0$. В результате установлено, что режимы с четным n не являются оптимальными ни при каких $\gamma\geqslant 0$, $a>0$.

5. Режимы с нечетным числом интервалов постоянства скорости. В случае нечетного n первые два соотношения (6.2.13) с учетом условий периодичности (6.2.14) приводятся к виду

$$\begin{gathered}[(1-\gamma)u+(1+\gamma)]\sin T=\\ =(1+\gamma)(n-1)[\sin(t_2+t_n)-\sin t_n],\end{gathered} \quad (6.2.17)$$

$$\begin{gathered}[(1-\gamma)u+(1+\gamma)](\cos T-1)=\\ =(1+\gamma)(n-1)[\cos(t_2+t_n)-\cos t_n].\end{gathered}$$

Время быстродействия T представим в виде

$$T=2\pi k+\tau,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 0\leqslant\tau<2\pi. \quad (6.2.18)$$

Случай $\tau=0$ отвечает $n=1$ и был рассмотрен выше. Далее полагаем $n\geqslant 3$, $\tau>0$. Подставляя (6.2.18) в (6.2.17), получим

$$\begin{gathered}[(1-\gamma)u+(1+\gamma)]\sin\tau=\\ =2(1+\gamma)(n-1)\sin(t_2/2)\cos(t_n+t_2/2),\end{gathered} \quad (6.2.19)$$

$$\begin{gathered}[(1-\gamma)u+(1+\gamma)]\ (1-\cos\tau)=\\ =2(1+\gamma)(n-1)\sin(t_2/2)\sin(t_n+t_2/2].\end{gathered}$$

Так как $t_2 \in (0,2\pi)$, то $\sin(t_2/2) > 0$. Поделив второе уравнение (6.2.19) на первое, найдем

$$\operatorname{tg}(\tau/2) = \operatorname{tg}(t_n + t_2/2). \tag{6.2.20}$$

Согласно соотношениям (6.2.10) при нечетном n имеем

$$0 < t_n \leqslant 2\pi - t_{n-1} = 2\pi - t_2. \tag{6.2.21}$$

Из (6.2.21) вытекает, что аргумент $t_n + t_2/2$ лежит в интервале $(0, 2\pi)$, а из второго уравнения (6.2.19) следует, что $\sin(t_n + t_2/2) > 0$. Следовательно, этот аргумент, как и $\tau/2$, лежит в интервале $(0, \pi)$, и поэтому из (6.2.20) имеем

$$t_n = (\tau - t_2)/2. \tag{6.2.22}$$

Подставляя равенство (6.2.22) в первое уравнение (6.2.19), получим

$$[(1-\gamma)u + (1+\gamma)]\sin(\tau/2) = (1+\gamma)(n-1)\sin(t_2/2). \tag{6.2.23}$$

Разрешая уравнение (6.2.23) относительно t_2, найдем два корня в интервале $(0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} t_2' &= 2\arcsin\frac{[(1-\gamma)u + (1+\gamma)]\sin(\tau/2)}{(1+\gamma)(n-1)}, \\ t_2'' &= 2\pi - t_2'. \end{aligned} \tag{6.2.24}$$

При $n \geqslant 3$ для (6.2.24) справедливы оценки

$$\begin{gathered} (1-\gamma)u + 1 + \gamma \leqslant (1+\gamma)(n-1), \\ t_2' \leqslant 2\arcsin[\sin(\tau/2)] = 2\min(\tau/2, \pi - \tau/2). \end{gathered} \tag{6.2.25}$$

Подставим второй корень (6.2.24) в (6.2.22) и воспользуемся неравенством (6.2.25). Получим

$$t_n = (\tau + t_2')/2 - \pi \leqslant \min(\tau - \pi, 0) \leqslant 0,$$

что противоречит условиям (6.2.10). Следовательно, второй корень (6.2.24) нужно опустить, и единственное решение системы (6.2.19) имеет вид

$$t_2 = t_2', \quad t_n = (\tau - t_2')/2. \tag{6.2.26}$$

Определим t_1. Из соотношений (6.2.10), (6.2.18) и (6.2.26) в случае нечетного $n \geqslant 3$ имеем

$$t_1 + \pi(n-3) + (\tau + t_2')/2 = 2\pi k + \tau.$$

Отсюда найдем, учитывая второе равенство (6.2.26),

$$t_1 = \pi(2k+3-n) + t_n.$$

Так как t_1 и t_n лежат в интервале $(0, 2\pi)$, а n принимает нечетные значения, то последнее равенство выполняется, лишь если

$$n = 2k+3, \quad t_1 = t_n = (\tau - t_2')/2. \tag{6.2.27}$$

Осталось удовлетворить последнему уравнению (6.2.13). Подставляя в него соотношения (6.2.14), (6.2.18), (6.2.27), будем иметь

$$[1-\gamma+u(1+\gamma)](2k\pi+\tau)/2 - u(1+\gamma)(k+1)\,t_2' = a. \tag{6.2.28}$$

Рассмотрим сначала случай $u=-1$. Подставляя t_2' из (6.2.24) в (6.2.28) и полагая $n=2k+3$, $u=-1$, получим равенство

$$-2\gamma k\pi - 2(1+\gamma)(k+1)\{A\tau/2 - \arcsin[A\sin(\tau/2)]\} = a, \tag{6.2.29}$$

$$A = \gamma(1+\gamma)^{-1}(k+1)^{-1} \leqslant 1.$$

Отметим следующее неравенство

$$\min(Az, \pi - Az) \geqslant \arcsin(A\sin z), \qquad z \in [0, \pi],\ 0 \leqslant A \leqslant 1. \tag{6.2.30}$$

В справедливости (6.2.30) легко убедиться, вычисляя синусы от обеих частей неравенства и учитывая, что $\sin(Az) \geqslant A\sin z$.

Полагая $z=\tau/2$ в (6.2.30), убеждаемся, что выражение в фигурных скобках в (6.2.29) неотрицательно. Следовательно, равенство (6.2.29) невозможно, так как его левая часть неположительна, а $a>0$. Тем самым значение $u=-1$ исключается.

Итак, $u=1$, и длины интервалов t_i представляются следующими соотношениями, вытекающими из (6.2.14), (6.2.18), (6.2.24), (6.2.27)

$$\blacksquare \quad t_1 = t_n = \tau/2 - \alpha_k, \quad n = 2k+3,$$

$$t_2 = t_4 = \ldots = t_{n-1} = 2\alpha_k, \quad T = 2\pi k + \tau,$$

$$t_3 = t_5 = \ldots = t_{n-2} = 2(\pi - \alpha_k),$$
$$\alpha_k = \arcsin \frac{\sin(\tau/2)}{(1+\gamma)(k+1)}. \qquad \square \qquad (6.2.31)$$

Равенство (6.2.28) при $u = 1$ принимает вид

$$2\pi k + h_k(\tau, \gamma) = a, \qquad (6.2.32)$$

где введено обозначение

$$h_k(\tau, \gamma) = \tau - 2(1+\gamma)(k+1)\arcsin\left[\frac{\sin(\tau/2)}{(1+\gamma)(k+1)}\right]. \qquad (6.2.33)$$

Исследуем уравнение (6.2.32), служащее для определения целого $k \geqslant 0$ и $\tau \in (0, 2\pi)$. Используя неравенство (6.2.30), убедимся, что $h_k \geqslant 0$ при всех $\tau \in [0, 2\pi]$. Далее, нетрудно показать, что функция h_k монотонно возрастает от 0 до 2π при изменении τ от 0 до 2π. Поэтому, разделив обе части равенства (6.2.32) на 2π и взяв целую часть, получим $k = [a/2\pi]$. Итак, если представить заданный путь $a > 0$ в виде

$$a = 2\pi k + b, \; k = [a/2\pi] = 0, 1, \ldots, \; 0 \leqslant b < 2\pi, \qquad (6.2.34)$$

то тем самым определится число k, а следовательно и $n = 2k + 3$. Параметр τ найдется как корень уравнения

$$h_k(\tau, \gamma) = b, \qquad (6.2.35)$$

вытекающего из (6.2.32), (6.2.34).

Отметим, что формулы, аналогичные соотношениям (6.2.31)—(6.2.33) в случае $\gamma = 1$, были получены в [146], где рассматривалась задача оптимального управления, которая может быть сведена к рассматриваемой выше.

6. Оптимальное решение. Приведем некоторые существенные для дальнейшего свойства функций (6.2.33). Непосредственным дифференцированием убеждаемся в том, что

$$\frac{\partial h_k}{\partial \tau} > 0, \quad \frac{\partial^2 h_k}{\partial \tau^2} > 0 \text{ при } \gamma + k > 0, \; \tau \in (0, 2\pi), \qquad (6.2.36)$$

т. е. h_k строго монотонны и выпуклы по τ, если хотя бы одно из чисел k, γ положительно. В частном случае

$k=\gamma=0$ получим из (6.2.33)

$$h_0(\tau, 0)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant\tau\leqslant\pi, \\ 2(\tau-\pi), & \pi\leqslant\tau<2\pi. \end{cases} \qquad (6.2.37)$$

Из сказанного следует, что при любом $b\in(0, 2\pi)$ и любых $\gamma\geqslant 0$, $k\geqslant 0$ трансцендентное уравнение (6.2.35) имеет единственное решение $\tau\in(0, 2\pi)$.

Итак, искомое решение задачи оптимального быстродействия 1 или эквивалентной ей задачи 3 полностью построено и определяется следующим образом. Представим заданный путь перемещения a в виде (6.2.34). Если $b=0$, то имеем случай $n=1$. При этом оптимальное управление равно $v\equiv 1$ для $t\in(0, T)$, а $T=a=2\pi k$. Если же $b>0$, то величина $\tau\in(0, 2\pi)$ определяется как единственный корень уравнения (6.2.35). Число интервалов n, их длительности t_i и время быстродействия T задаются формулами (6.2.31), а скорость и ускорение точки подвеса — соотношениями (6.2.11) при $u=1$.

В случае $b\to 0$ или $b\to 2\pi$ имеем соответственно $\tau\to 0$, $\tau\to 2\pi$, поэтому здесь решение (6.2.31)—(6.2.35) переходит в решение с $n=1$.

Оптимальное управление $v(t)$ определено однозначно (с точностью до значений на множестве нулевой меры) при всех $a>0$, $\gamma\geqslant 0$.

7. Анализ оптимального решения. Отметим, что функции (6.2.33) зависят фактически лишь от двух параметров τ, $(1+\gamma)(k+1)$ и строго возрастают с ростом каждого из них. Строгая монотонность по γ, k доказывается аналогично (6.2.36). Отсюда вытекает двусторонняя оценка

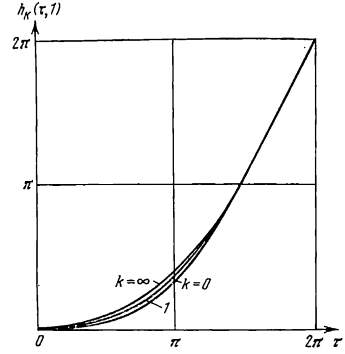
$$h_0(\tau, 0)<h_k(\tau, \gamma)<h_\infty(\tau), \quad \gamma+k>0, \qquad (6.2.38)$$

где $h_0(\tau, 0)$ определено соотношением (6.2.37), а

$$h_\infty(\tau)=\lim_{k\to\infty} h_k(\tau, \gamma)=\tau-2\sin(\tau/2). \qquad (6.2.39)$$

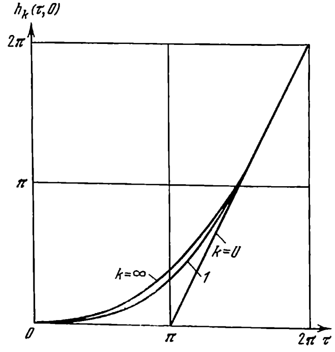
Приведем еще разложения функций (6.2.33) в окрестности концов интервала $(0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} h_k(\tau, \gamma) &= \frac{\tau^3}{24}\left[1-\frac{1}{(1+\gamma)^2(k+1)^2}\right]+O(\tau^5), \quad \tau\to 0, \\ h_k(\tau, \gamma) &= 2(\tau-\pi)+O((\tau-2\pi)^3), \qquad \tau\to 2\pi. \end{aligned} \qquad (6.2.40)$$



$h_k(\tau, 1)$
2π
π
$k=\infty$
$k=0$
1
0
π
2π
τ

Рис. 6.5.



$h_k(\tau, 0)$
2π
π
$k=0$
$k=\infty$
1
0
π
2π
τ

Рис. 6.6.

На рис. 6.5, 6.6 приведены графики функций (6.2.33) для $k=0,\ 1,\ \infty$ в наиболее интересных случаях $\gamma=1$ и $\gamma=0$ соответственно. Значению $k=\infty$ отвечает функция (6.2.39). Случай $\gamma=1$ отвечает двустороннему ограничению на скорость точки подвеса, а $\gamma=0$ — несимметричному ограничению, при котором допускается движение лишь в одну сторону (см. (6.1.2)). Графики функций h_k при $k\geqslant 2$ заключены между соответствующими кривыми для $k=1$ и $k=\infty$, откуда видно, что они очень близки друг

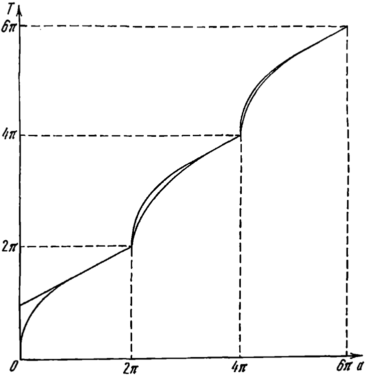


Рис. 6.7.

к другу. Так при $\gamma=1$ разность между функциями h_0 и h_∞ не превосходит 0,1. С ростом γ все кривые h_k приближаются к (6.2.39).

Отметим одно качественное отличие оптимальных движений при $\gamma=0$ от движений при $\gamma>0$. Пусть расстояние мало, $a\to 0$, тогда из (6.2.34) имеем $k=0$, $b\to 0$. Корень уравнения (6.2.35) с учетом асимптотического представления (6.2.40) при $\gamma>0$ имеет вид $\tau=O(b^{1/3})$, так что $\tau \to 0$ при $b \to 0$. Иными словами, зависимость времени быстродействия T от пути a непрерывна и $T \to 0$ при $a \to 0$, если $\gamma > 0$. В случае же $\gamma = 0$ справедлива формула (6.2.37), и при этом корень уравнения (6.2.35) удовлетворяет неравенству $\tau > \pi$ при $b > 0$. Следовательно, имеем $T > \pi$ при $a > 0$, $\gamma = 0$. Таким образом, если $\gamma = 0$, то указанным способом нельзя переместить маятник на конечное расстояние, погасив его колебания, за время, меньшее полупериода колебаний.

На рис. 6.7 представлена зависимость $T(a)$ для $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$. Точки кривой $T(a)$, в которых $T = a$, отвечают $n = 1$; в остальных точках $T > a$. Случаю $\gamma = 0$ отвечают верхние участки кривых. Зависимость $T(a)$ строго монотонна.

8. **Пример.** Построим оптимальное движение при $a = \pi/3$, $\gamma = 1$. Согласно (6.2.34) имеем $k = 0$, $b = \pi/3$, $n = 3$ и оптимальным будет режим с тремя участками

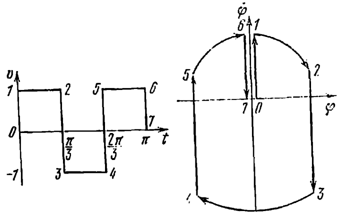


Рис. 6.8.

постоянства управления ($n = 3$). Уравнение (6.2.35), (6.2.33) в этом случае имеет вид

$$\pi/3 = \tau - 4 \arcsin [{}^1/_2 \sin (\tau/2)],$$

а его корень равен π.

Длительности интервалов и время движения находим по формулам (6.2.31)

$$t_1 = t_2 = t_3 = \pi/3, \ T = \pi.$$

Зависимость $v(t)$ и фазовая траектория маятника для этого случая даны на рис. 6.8. Фазовая траектория состоит из четырех вертикальных отрезков, соответствующих точкам переключения, между которыми заключены три дуги окружностей с центром в начале координат, отвечающие участкам постоянной скорости. Цифры от 0 до 7 на рис. 6.8 указывают соответствующие друг другу точки графиков. Центральные углы дуг на фазовой плоскости равны времени $\pi/3$ движения по дугам. Интересно, что при оптимальном по быстродействию движении точка подвеса маятника трижды проходит в разных направлениях отрезок $[0, a]$ оси x.

9. Движение точки подвеса. Исследуем зависимость $x(t)$ для оптимального движения. Подставим скорость (6.2.11) в уравнение (6.1.5) для x и найдем координату подвеса в моменты переключений скорости

$$x_{2i-1} = x\left(\sum_{j=1}^{2i-1} t_j\right) = t_1 + (i-1)\left[2\pi - (1+\gamma)\, t_2\right],$$

$$x_{2i} = x\left(\sum_{j=1}^{2i} t_j\right) = t_1 + (i-1)\left[2\pi - (1+\gamma)\, t_2\right] - \gamma t_2, \tag{6.2.41}$$

$$i = 1, 2, \ldots, k+1.$$

Здесь использованы соотношения (6.2.31). Оценим границы изменения $x(t)$ при перемещении маятника на расстояние a. В силу неравенства $2\pi > (1+\gamma)t_2$, вытекающего из (6.2.31) и (6.2.30), величины x_{2i-1} и x_{2i} монотонно возрастают с ростом i. Поэтому

$$a^- = \min_t x(t) = \min(0, x(t_1 + t_2)) = \min(0, t_1 - \gamma t_2), \tag{6.2.42}$$

$$a^+ = \max_t x(t) = \max(a, x(T - t_n - t_2)) = $$
$$= \max(a, a - t_1 + \gamma t_2).$$

Здесь использованы соотношения $x(T) = a$ и (6.2.41). Согласно (6.2.31) имеем

$$t_1 - \gamma t_2 = \frac{\tau}{2} - (1 + 2\gamma) \arcsin \frac{\sin(\tau/2)}{(1+\gamma)(k+1)}. \tag{6.2.43}$$

Покажем, что если $k \geqslant 1$, то $t_1 > \gamma t_2$ для всех τ. Искомая оценка следует из формулы (6.2.43), неравенства $(1+\gamma)(k+1) > 1 + 2\gamma$ и из соотношения (6.2.30), где надо положить $z = \tau/2$ и $A = (1+2\gamma)^{-1}$. Следовательно, при $k \geqslant 1$, т. е. при $a \geqslant 2\pi$ выполнено

$$a^- = \min_t x(t), \quad a^+ = \max_t x(t) = a \quad (a \geqslant 2\pi). \qquad (6.2.44)$$

Рассмотрим случай $a < 2\pi$, т. е. $k = 0$. Легко убедиться, что $t_1 - \gamma t_2$ согласно (6.2.43) — строго выпуклая функция τ при $\gamma > 0$, которая имеет единственный положительный корень $\tau_0 \in (0, 2\pi)$. Если $\tau \geqslant \tau_0$, то $t_1 \geqslant \gamma t_2$, и имеют место соотношения (6.2.44). Если же $\tau \in (0, \tau_0)$, то $t_1 < \gamma t_2$. В этом случае из (6.2.42) следует

$$a^- = t_1 - \gamma t_2 < 0, \quad a^+ = a - t_1 + \gamma t_2 > 0. \qquad (6.2.45)$$

Корень τ_0 функции (6.2.43) удовлетворяет уравнению

$$\tau_0 = 2(1+2\gamma)\arcsin[(1+\gamma)^{-1}\sin(\tau_0/2)]. \qquad (6.2.46)$$

Так как зависимость $a(\tau)$ в (6.2.32) монотонна, то условие $\tau < \tau_0$ означает $a < a(\tau_0)$. Найдем $a(\tau_0)$ согласно (6.2.32), (6.2.33) при $k = 0$ и затем преобразуем $a(\tau_0)$ при помощи равенства (6.2.46). Получим неравенство

$$0 < a < a(\tau_0) = \gamma(1+2\gamma)^{-1}\tau_0. \qquad (6.2.47)$$

Итак, в том и только том случае, когда выполнено условие (6.2.47), где τ_0 — корень уравнения (6.2.46), точка подвеса при оптимальном движении выходит за пределы отрезка $[0, a]$ оси x. При $\gamma = 0$ этого не происходит. При $\gamma = 1$ имеем $\tau_0 = \pi$ в (6.2.46), так что выход за пределы отрезка происходит при $a < \pi/3$.

Условию (6.2.47) можно придать иную форму. Выразим τ_0 через $a(\tau_0)$ при помощи (6.2.47) и подставим в соотношение (6.2.32), взятое при $\tau = \tau_0$. Получим трансцендентное уравнение

$$h_0[\gamma^{-1}(1+2\gamma)a_0, \gamma] - a_0 = 0, \quad \gamma > 0. \qquad (6.2.48)$$

Левая часть уравнения (6.2.48) есть выпуклая функция от a_0, обращающаяся в нуль при $a_0 = 0$ и $a_0 = a(\tau_0)$. Следовательно, неравенства (6.2.47) эквивалентны неравенству

$$h_0[\gamma^{-1}(1+2\gamma)a, \gamma] < a.$$

§ 3. Задача максимального перемещения и квазиоптимальные режимы

1. Решение задачи максимального перемещения. Обратимся к решению задачи 2 из § 1. Как следует из (6.2.36), зависимость времени быстродействия от пути $T(a)$, определяемая соотношениями (6.2.31), (6.2.34), (6.2.35), непрерывна и строго монотонна (см. рис. 6.5). Поэтому согласно сделанному в п. 3 § 1 замечанию, решение задачи 2 получается из решения задачи 1 следующим образом. Заданное время T представим в виде (6.2.18) и найдем k, τ. По формуле (6.2.32) определим максимальное расстояние $a(T)$, после чего интервалы t_i вычислим по формулам (6.2.31). Оптимальное управление определяется прежними формулами (6.2.11) при $u=1$. В частном случае $T=2\pi k$, k — целое, имеем управление $v(t)\equiv 1$ при $t\in(0,\ T)$, здесь $a=T$.

2. Квазиоптимальные режимы в задаче перемещения. Практический интерес представляют режимы с фиксированным небольшим числом переключений, когда число участков постоянства скорости $v(t)$ точки подвеса задается заранее и от времени движения не зависит. Эти режимы удобны для технической реализации и приводят к небольшому увеличению минимизируемого функционала. Соответствующие оценки будут даны ниже.

Рассмотрим класс режимов с $2m+1$, $m\geqslant 1$ участками постоянства скорости. При $T<2\pi m$ оптимальный режим в (6.2.31), (6.2.32) содержится в указанном классе. Для $T\geqslant 2\pi m$ построим режим управления следующим образом. Будем предполагать, что $T\neq 2\pi k$, так как при $T=2\pi k$ точный оптимальный режим содержит один участок постоянства скорости. Представим T в виде (6.2.18) и положим

$$T=T_1+T_2,\quad T_1=2\pi(k-m+1),\quad T_2=2\pi(m-1)+\tau. \tag{6.3.1}$$

Пусть $a(T_2)$ — максимальное значение расстояния задачи 2, в которой момент окончания движения равен T_2. Пусть $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{2m+1}$ — соответствующие оптимальные длины интервалов постоянства скорости $v(t)$. Положим

$$t_1^0=t_1+T_1,\quad t_2^0=t_2,\ \ldots,\ t_{2m+1}^0=t_{2m+1}. \tag{6.3.2}$$

Управление (6.2.11) с $u=1$ и интервалами постоянства скорости (6.3.1), очевидно, обеспечивает гашение колебаний маятника к моменту T. Обозначим через $a_m(T)$ соответствующее значение функционала $x(T)$. Легко видеть, что

$$a_m(T) = 2\pi(k - m + 1) + a(T_2). \qquad (6.3.3)$$

Преобразуя выражение (6.3.3) при помощи соотношения (6.2.32), получим

$$a_m(T) = 2\pi k + h_{m-1}(\tau, \gamma). \qquad (6.3.4)$$

При $m = k+1$ формула (6.3.4) переходит в (6.2.32). Значения функций $a(T)$ и $a_m(T)$ для оптимального и квазиоптимального режимов удовлетворяют очевидным соотношениям

$$a_m(T) \leqslant a(T) \leqslant T, \quad a(2\pi k) = a_m(2\pi k) = T.$$

2. Анализ квазиоптимальных режимов. Можно показать (см. [228]), что квазиоптимальные режимы оптимальны в классе всех режимов, имеющих не более $2m+1$ участков постоянства скорости. Оценим разность по функционалу a между построенным квазиоптимальным и оптимальным режимами. Как следует из формул (6.3.3), (6.2.32), (6.2.38), эта разность равна

$$a(T) - a_m(T) = h_k(\tau, \gamma) - h_{m-1}(\tau, \gamma) \leqslant h_\infty(\tau) - h_{m-1}(\tau, \gamma). \qquad (6.3.5)$$

Вследствие свойства монотонности (6.2.38) функций h_k по k имеем

$$a(T) - a_m(T) \leqslant h_\infty(\tau) - h_0(\tau, \gamma) =$$
$$= 2(1+\gamma)\arcsin\left[(1+\gamma)^{-1}\sin(\tau/2)\right] - 2\sin(\tau/2). \qquad (6.3.6)$$

Здесь использованы формулы (6.2.33), (6.2.39) для h_0, h_∞. Полученная в (6.3.6) функция четна относительно точки $\tau = \pi$ и достигает максимума в этой точке. Поэтому получим из (6.3.6)

$$a(T) - a_m(T) \leqslant 2(1+\gamma)\arcsin(1+\gamma)^{-1} - 2. \qquad (6.3.7)$$

Простейшими квазиоптимальными режимами являются режимы с минимальным числом участков постоянства скорости, равным трем ($m = 1$). Рассмотрим их в двух наиболее важных случаях $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$. По формуле (6.3.7)

получим

$$a(T) - a_1(T) \leqslant 4\arcsin(1/2) - 2 =$$
$$= 2\pi/3 - 2 \approx 0{,}0944 \quad (\gamma = 1), \quad (6.3.8)$$
$$a(T) - a_1(T) \leqslant \pi - 2 \approx 1{,}1416 \quad (\gamma = 0).$$

Максимальное абсолютное отличие (6.3.7), (6.3.8) оптимального и квазиоптимального функционалов достигается при $k \to \infty$, $\tau = \pi$. Относительное отличие, согласно (6.2.32), (6.3.5), равно

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{a(T) - a_m(T)}{a(T)} = \frac{h_k(\tau, \gamma) - h_{m-1}(\tau, \gamma)}{2\pi k + h_k(\tau, \gamma)}. \quad (6.3.9)$$

Из свойств функций h_k вытекает, что величина (6.3.9) максимальна при $k = 1$, т. е. при $2\pi < T < 4\pi$ и $m = 1$. Расчеты показывают, что для $\gamma = 1$ квазиоптимальный режим с $m = 1$ отличается по функционалу от оптимального на $\Delta a/a \leqslant 1{,}1\%$ при любых T.

Сравним друг с другом оптимальные режимы при $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$. Из формулы (6.2.32) аналогично (6.3.7) следует, что отличие этих режимов по функционалу пути максимально при $T = \pi$ и достигает $\pi/3$. При $T \to \infty$ эта разность стремится к нулю. Отличие по функционалу квазиоптимальных режимов с тремя участками постоянства скорости $(m = 1)$ при $\gamma = 1$ и $\gamma = 0$ оказывается максимальным при $\tau = \pi$ и также равно $\pi/3$. Эта величина характеризует выигрыш, достигаемый за счет возможности обратного движения точки подвеса в случае $\gamma = 1$.

3. Квазиоптимальные режимы в задаче быстродействия. Эти режимы построены аналогично квазиоптимальным режимам в задаче о максимальной дальности. Заданный путь a считаем не равным $2\pi k$, k — целое, так как при $a = 2\pi k$ имеется простой оптимальный режим.

Рассмотрим режим с $2m + 1$ участками постоянства скорости $v(t)$ $(m \geqslant 1)$. Для $a < 2\pi m$ оптимальное управление определяется формулами (6.2.31)—(6.2.35) и имеет не более $2m + 1$ участков. Для $a > 2\pi m$ рассмотрим следующее управление.

Представим заданную величину a из (6.2.34) в виде, аналогичном (6.3.1)

$$a = a_1 + a_2, \quad a_1 = 2\pi(k - m + 1), \quad a_2 = 2\pi(m - 1) + b. \quad (6.3.10)$$

Пусть $T(a_2)$ — минимальное время перемещения маятника с гашением колебаний на расстояние a_2, и t_i — соответствующие интервалы (6.2.31). Положим

$$t_1^0 = t_1 + a_1, \quad t_2^0 = t_2, \ldots, t_{2m+1}^0 = t_{2m+1}. \qquad (6.3.11)$$

Управление (6.2.11) с $u = 1$ и с интервалами постоянства (6.3.11) обеспечивает, очевидно, гашение колебаний маятника к концу перемещения. Соответствующее построенному квазиоптимальному управлению время перемещения равно

$$T_m(a) = 2\pi(k - m + 1) + T(a_2). \qquad (6.3.12)$$

Подставим в равенство (6.3.12) вместо $T(a_2)$ значение, полученное согласно формулам (6.2.31)—(6.2.33) при $k = m - 1$. Получим $T_m(a) = 2\pi k + \tau$, где τ — решение трансцендентного уравнения (см. (6.2.35))

$$h_{m-1}(\tau, \gamma) = b, \; 0 < \tau < 2\pi \; (0 < b < 2\pi). \qquad (6.3.13)$$

Как показано в п. 6 § 2, уравнение (6.3.13) имеет единственное решение. Интервалы (6.3.11) определяются по формулам (6.2.31), где следует положить $k = m - 1$, а управление — по формуле (6.2.11) при $u = 1$.

Укажем один важный частный случай, когда уравнение (6.3.13) удается разрешить в явном виде. Пусть $\gamma = 0$ и $m = 1$, т. е. рассмотрим режим с тремя участками постоянства скорости. Разрешая уравнение $h_0(\tau, 0) = b$ относительно τ, получим (см. (6.2.37))

$$\tau = 0 \text{ при } b = 0; \; \tau = b/2 + \pi \text{ при } 0 < b < 2\pi. \qquad (6.3.14)$$

По формулам (6.2.31) при $k = 0$ определим t_i

$$\begin{gathered} t_1 = t_2 = t_3 = 0 \text{ при } 0 \leqslant \tau < \pi, \\ t_1 = t_3 = \tau - \pi, \; t_2 = 2\pi - \tau \text{ при } \pi \leqslant r < 2\pi. \end{gathered} \qquad (6.3.15)$$

Длины t_i интервалов постоянства скорости определим из (6.3.11)

$$t_1^0 = t_1 + 2\pi k, \quad t_2^0 = t_2, \quad t_3^0 = t_3. \qquad (6.3.16)$$

Таким образом, квазиоптимальный режим при $\gamma = 0$, $m = 1$ определен в явном виде. По заданному a нужно сначала найти k, b согласно (6.2.34), затем τ при помощи (6.3.14), после чего длины интервалов находятся согласно (6.3.15), (6.3.16).

Как и в п. 2, квазиоптимальные режимы близки к оптимальным. Так, при $\gamma = 1$ квазиоптимальный режим с тремя участками постоянства скорости ($m = 1$) отличается от оптимального по времени не более, чем на $\Delta T/T \leqslant 1{,}2\%$ для любых расстояний a.

4. О задаче синтеза. Выше предполагалось, что начальные условия — нулевые (см. (6.1.3), (6.2.3)). В случае произвольных начальных условий для системы (6.1.1) имеем

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \dot\varphi(0) = \dot\varphi^0, \quad v(0) = v^0. \tag{6.3.17}$$

Значение $x(0)$ можно считать по-прежнему равным нулю за счет выбора $x(T) = a$. В переменных (6.2.1), (6.2.2) общие начальные условия (6.3.17) примут вид

$$\varphi(0) = \varphi^0, \quad \psi(0) = \psi^0 \equiv v^0 - \dot\varphi^0, \quad x(0) = 0. \tag{6.3.18}$$

Решение задачи оптимального быстродействия для системы (6.2.1), (6.2.2) и второго уравнения (6.1.5) с начальными условиями (6.3.18) и условиями (6.2.3) при $t = T$ эквивалентно построению оптимального синтеза. Решение этой задачи существует, единственно и определяется из принципа максимума, если выполнены следующие два условия: условие общности положения и условие принадлежности точки $v = 0$ внутренности области ограничений на управление [176, 53]. Второе условие, как нетрудно видеть, выполнено (см. (6.1.2)), если $\gamma > 0$. Условие общности положения сводится к проверке неравенства нулю следующего определителя Δ, составленного из векторов-столбцов b, Ab, A^2b, где A — матрица линейной системы, b — вектор коэффициентов при управлении. В рассматриваемом случае

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1. \tag{6.3.19}$$

Следовательно, оптимальное управление при $\gamma > 0$ существует, единственно и может быть найдено из принципа максимума. Построение синтеза оптимального управления может быть проведено по той же схеме, что и изложенное выше решение для нулевых начальных данных. Однако анализ соответствующих трансцендентных уравнений оказывается значительно более сложным. Задача синтеза оптимального быстродействия для произвольной линейной системы третьего порядка исследовалась в работах [151—153]. Для колебательных систем, близких к рассмотренной выше, синтез оптимального управления исследован в работах [147, 216—219].

§ 4. Оптимальное перемещение двухмассовой колебательной системы

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское движение механической системы, состоящей из двух твердых тел с массами M и m (см. рис. 6.1). Тело с массой M может двигаться поступательно без трения вдоль оси Ox под действием управляющей силы F. Тело с массой m представляет собой физический маятник, его момент инерции относительно оси подвеса P равен I, расстояние от оси подвеса до центра инерции C равно L. На тело с массой m действует сила тяжести и сила реакции, под действием которых оно совершает колебания в плоскости xy. Сила $F(t)$ может быть направлена параллельно горизонтальной оси Ox в сторону возрастания ($F > 0$) или в сторону убывания x ($F < 0$). Для описания движения выберем в качестве независимых координат абсциссу x центра инерции массы M и угол φ отклонения маятника от вертикальной оси (рис. 6.1). Обозначим через v скорость тела M, а через ω — угловую скорость мятника, через g — ускорение силы тяжести. Уравнения движения системы имеет вид

$$\begin{gathered}(M+m)\dot{v} - mL\dot{\omega}\cos\varphi + mL\omega^2\sin\varphi = F,\\ I\dot{\omega} + mgL\sin\varphi = mL\dot{v}\cos\varphi, \qquad (6.4.1)\\ \dot{x} = v, \quad \dot{\varphi} = \omega.\end{gathered}$$

Первое из уравнений (6.4.1) есть уравнение движения центра масс системы, а второе — уравнение моментов относительно оси подвеса. В случае малых колебаний, когда угол φ мал ($\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$), уравнения (6.4.1) упрощаются. Линеаризованные уравнения движения (6.4.1) имеют вид

$$(M+m)\ddot{x} - mL\ddot{\varphi} = F, \quad I\ddot{\varphi} + mgL\varphi = mL\ddot{x}. \quad (6.4.2)$$

На управляющую силу F наложено ограничение

$$|F(t)| \leqslant F_0. \qquad (6.4.3)$$

Задача 4. Требуется найти управление $F(t)$, перемещающее систему (6.4.1) с ограничением (6.4.3) из состояния покоя

$$x(0) = v(0) = \varphi(0) = \omega(0) = 0 \qquad (6.4.4)$$

на заданное расстояние a с гашением ее колебаний

$$x(T) = a, \quad v(T) = \varphi(T) = \omega(T) = 0 \qquad (6.4.5)$$

за минимальное время T.

Отметим, что уравнения (6.4.1), (6.4.2) справедливы всегда, если связь является удерживающей, т. е. масса m является твердым телом (физическим маятником). Рассмотрим случай неудерживающей связи: тело m является точечной массой, подвешенной на нерастяжимой гибкой нити длины L. Здесь возможен сход со связи: расстояние между массами может стать меньше L. Чтобы сход со связи не имел места и уравнения (6.4.1), (6.4.2) оставались справедливыми, сила реакции связи R должна быть положительной ($R > 0$). Запишем уравнение движения массы M

$$M\dot{v} = F - R\sin\varphi \qquad (6.4.6)$$

и разрешим уравнения (6.4.1) относительно производных, ограничиваясь случаем точечной массы, когда $I = mL^2$. Получим

$$\begin{aligned} \dot{v} &= [F - m\sin\varphi(\omega^2 L + g\cos\varphi)](M + m\sin^2\varphi)^{-1}, \\ \dot{\omega} &= L^{-1}[F\cos\varphi - m\omega^2 L\sin\varphi\cos\varphi - (M+m)g\sin\varphi] \times \\ &\qquad \times (M + m\sin^2\varphi)^{-1}, \quad \dot{x} = v, \quad \dot{\varphi} = \omega. \end{aligned} \qquad (6.4.7)$$

Из соотношений (6.4.6), (6.4.7) найдем

$$R = m(F\sin\varphi + M\omega^2 L + Mg\cos\varphi)(M + m\sin^2\varphi)^{-1}. \qquad (6.4.8)$$

В случае малых колебаний, когда угол φ достаточно мал, условие $R > 0$ всегда выполнено при любых ограниченных F и $M > 0$. В нелинейном случае при неудерживающей связи нужно проверить выполнение условия $R \geqslant 0$ при помощи равенства (6.4.8).

2. Линейная задача быстродействия. Сначала будем рассматривать случай малых колебаний (6.4.2). Введем безразмерные переменные x', t', φ', u и параметр a' по формулам

$$x' = T_0^{-2}F_0^{-1}[(M+m)x - mL\varphi], \quad t' = T_0^{-1}t,$$
$$\varphi' = (M+m)gF_0^{-1}\varphi, \quad u = FF_0^{-1}, \qquad (6.4.9)$$
$$a' = (M+m)T_0^{-2}F_0^{-1}a, \quad T_0 = \left[\frac{I}{mgL} - \frac{mL}{(M+m)g}\right]^{1/2}.$$

Переменная x' характеризует положение центра масс системы. Так как $I \geqslant mL^2$, то выражение (6.4.9) для T_0 вещественно. В переменных (6.4.9) (далее штрихи всюду опускаются) соотношения (6.4.2) — (6.4.5) примут вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\varphi + u, \quad |u| \leqslant 1, \qquad (6.4.10)$$

$$x(0) = v(0) = \varphi(0) = \omega(0) = 0,$$
$$x(T) = a, \quad v(T) = \varphi(T) = \omega(T) = 0. \qquad (6.4.11)$$

Соотношения (6.4.10), (6.4.11) содержат единственный безразмерный параметр a.

З а д а ч а 5. Найти управление $u(t)$ для линейной системы (6.4.10), которое обеспечивает выполнение краевых условий (6.4.11) при минимальном времени движения T.

Задачи оптимального управления для линейной системы (6.4.2), (6.4.3) рассматривались в ряде работ (см. например, [70, 93, 207, 239, 242, 250, 251, 259]). Излагаемое ниже решение задачи 5 следует работе [38]; оптимальность режимов с тремя точками переключения доказана В. М. Мамалыгой.

Прежде всего проверим условие общности положения для системы (6.4.10). Действуя аналогично п. 4 § 3 (см. (6.3.19)), составим матрицу A, вектор b и определитель Δ для системы (6.4.10)

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Условие общности положения выполнено. Выполнено также и условие принадлежности точки $u = 0$ внутренности отрезка ограничения (6.4.10). Следовательно, принцип максимума есть необходимое и достаточное условие оптимальности [176, 53].

Функция Гамильтона H для системы (6.4.10) в случае задачи быстродействия равна

$$H = p_1 v + p_2 u + p_3 \omega + p_4 (u - \varphi). \qquad (6.4.12)$$

Здесь p_i — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad \dot{p}_3 = p_4, \quad \dot{p}_4 = -p_3. \qquad (6.4.13)$$

Оптимальное управление $u(t)$ определим из условия максимума функции Гамильтона (6.4.12)

$$u = \operatorname{sign}(p_2 + p_4). \qquad (6.4.14)$$

Таким образом, задача определения оптимальных режимов сведена к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (6.4.10), (6.4.13), в которые нужно подставить управление из (6.4.14). Краевые условия даны формулами (6.4.11). Кроме того, должно быть удовлетворено условие $H(T) \geqslant 0$, и сопряженные переменные не должны быть все равны тождественно нулю.

Из условия (6.4.14) следует, что оптимальное управление $u(t)$ представляет собой релейную функцию, принимающую значения ± 1. Число точек переключения и их положение неизвестны и должны быть определены в процессе решения.

Сначала отыскиваются значения параметра a, для которого управления с одним переключением (два интервала постоянства управления) оптимально. Затем для произвольных значений a будут построены квазиоптимальные управления с одной точкой переключения, которые переходят в оптимальные при специальных значениях параметра. Далее будет дано точное решение поставленной линейной задачи оптимального быстродействия (задачи 5). В заключение будет рассмотрена нелинейная задача (задача 4).

3. Оптимальные режимы с одним переключением. Рассмотрим управление вида (6.4.14) с одной точкой $t = T/2$ разрыва (переключения) функции $u(t)$, т. е.

$$u(t) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < T/2, \qquad u(t) = -1 \quad \text{при} \quad T/2 < t \leqslant T. \qquad (6.4.15)$$

Для данного управления движение рассматриваемой системы на интервале $0 \leqslant t \leqslant T/2$ описывается формулами

$$x(t) = t^2/2, \quad v = t, \quad \varphi = 1 - \cos t, \quad \omega = \sin t, \qquad (6.4.16)$$

полученными в результате интегрирования уравнений (6.4.10) с начальными условиями (6.4.11). Аналогично определяется решение при $u = -1$ на интервале $[T/2, T]$:

$$x = a - {}^1/_2(T-t)^2, \quad v = T - t,$$
$$\varphi = \cos(T-t) - 1, \quad \omega = \sin(T-t). \qquad (6.4.17)$$

Найденное решение (6.4.16), (6.4.17) должно быть непрерывно при $t = T/2$. Непрерывность величин v, ω имеет место при любых a, а для x, φ условие непрерывности будет выполнено, если

$$a = T^2/4, \quad \cos(T/2) = 1. \qquad (6.4.18)$$

Отсюда получаем

$$T = 4\pi k, \quad a = 4\pi^2 k^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (6.4.19)$$

Таким образом, режимы управления с одной точкой переключения удовлетворяют условиям принципа максимума только для значений безразмерного пути a, определяемых формулой (6.4.19). Для указанных значений параметра a необходимое время T дается формулой (6.4.19). Для доказательства оптимальности полученного управления, согласно изложенному выше, достаточно убедиться в существовании отличного от нуля вектора сопряженных переменных, удовлетворяющего системе уравнений (6.4.13) и такого, что управление (6.4.14) имеет вид (6.4.15) и при этом $H(T) \geqslant 0$. Существование этого вектора доказывается непосредственно путем подстановки функций

$$p_1 = -c, \quad p_2 = c(t - T/2), \quad p_3 = 0, \quad p_4 = 0 \quad (c = \text{const} < 0)$$

в уравнения (6.4.13), (6.4.14). Вычисление функции Гамильтона (6.4.12) дает $H(T) > 0$.

4. Квазиоптимальные управления. Как показано выше, для счетного множества значений параметра a, даваемых формулой (6.4.19), релейный режим управления (6.4.15) с одним переключением является оптимальным. Для прочих значений a точное оптимальное управление имеет большее число переключений. Поэтому представляет интерес отыскание достаточно простых способов управления с минимально возможным числом точек переключения.

Ниже рассмотрим два простейших типа квазиоптимальных управлений.

Зададим релейное управление в виде управления с одним переключением, но с величиной, меньшей 1, а именно

$$u = \begin{cases} 1-\varepsilon, & 0 \leqslant t < T_1/2, \\ -1+\varepsilon, & T_1/2 < t \leqslant T_1, \end{cases} \qquad (6.4.20)$$

где T_1 — неизвестное время перемещения, ε — параметр, который должен лежать в пределах $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Для управления (6.4.20) решение уравнений (6.4.10) с граничными условиями (6.4.11), заданными при $t = 0$, может быть записано в виде, аналогичном (6.4.16)

$$x = (1-\varepsilon)t^2/2, \quad v = (1-\varepsilon)t,$$
$$\varphi = (1-\varepsilon)(1-\cos t), \quad \omega = (1-\varepsilon)\sin t \qquad (6.4.21)$$

при $0 \leqslant t \leqslant T_1/2$. Решение системы (6.4.10) при $t \in [T_1/2, T_1]$, удовлетворяющее граничным условиям (6.4.11), поставленным при $t = T_1$, дается выражениями, подобными (6.4.17)

$$x = a - (1-\varepsilon)(T_1 - t)^2/2, \qquad v = (1-\varepsilon)(T_1 - t),$$
$$(6.4.22)$$
$$\varphi = (1-\varepsilon)[\cos(T_1 - t) - 1], \quad \omega = (1-\varepsilon)\sin(T_1 - t).$$

Функции v, ω, как нетрудно видеть из формул (6.4.21), (6.4.22), непрерывны в точке $T_1/2$ при любых T, a, ε. Требование непрерывности функций x, φ приводит к следующим условиям на параметры задачи

$$(1-\varepsilon)T_1^2/4 = a, \quad \cos(T_1/2) = 1. \qquad (6.4.23)$$

Решая соотношения (6.4.23) относительно T_1 и ε, будем иметь

$$T_1 = 4\pi n, \quad \varepsilon = 1 - a(4\pi^2 n^2)^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (6.4.24)$$

Для минимизации времени процесса T_1 следует выбрать при заданном a наименьшее возможное n. Нетрудно проверить, что минимальное целое n, для которого ε, определяемое по формуле (6.4.24), лежит в пределах $0 \leqslant \varepsilon < 1$, равно

$$n = \left[\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\right] + 1 \quad (a \neq 4\pi^2 k^2). \qquad (6.4.25)$$

Квадратные скобки означают целую часть числа.

Если $a=4\pi^2k^2$, $k=1, 2, \ldots$, то в формулах (6.4.20), (6.4.24) следует положить $n=k$, $\varepsilon=0$, и тогда построенный режим совпадает с оптимальным (см. (6.4.15), (6.4.19)). В общем случае квазиоптимальное управление системой дается формулами (6.4.20), (6.4.24), (6.4.25), а время движения, как следует из (6.4.24), (6.4.25), равно

$$T_1=4\pi\left\{\left[\frac{\sqrt{a}}{2\pi}\right]+1\right\}\quad (a\neq 4\pi^2k^2). \qquad (6.4.26)$$

Не проводя аналогичных исследований, укажем другой однопараметрический квазиоптимальный режим управления

$$u=\begin{cases} 1, & 0\leqslant t<(T_2-\delta)/2 \quad (0\leqslant\delta\leqslant T_2),\\ 0, & (T_2-\delta)/2<t<(T_2+\delta)/2,\\ -1, & (T_2+\delta)/2<t\leqslant T_2.\end{cases}$$

Здесь T_2 — время управления, δ — длина временного интервала, во время которого система движется по инерции с нулевым значением управляющей силы. Значение δ следует выбирать аналогично тому, как это делалось выше при отыскании величины ε.

5. Оптимальное управление с тремя точками переключения. Перейдем к построению релейных управлений с тремя точками переключения. Покажем, что управление вида

$$\begin{aligned} u&=1 &&\text{при}\quad t\in(0, t_1),\quad t\in(t_2, t_3),\\ u&=-1 &&\text{при}\quad t\in(t_1, t_2),\quad t\in(t_3, T)\end{aligned} \qquad (6.4.27)$$

позволяет перевести систему (6.4.10) из начального состояния в конечное (6.4.11). Здесь t_1, t_2, t_3 — моменты переключения, T — момент окончания процесса.

Подставим управление (6.4.27) в уравнение (6.4.10) и проинтегрируем их при начальных условиях (6.4.11). Удовлетворяя краевым условиям при $t=T$, получим аналогично (6.4.18) систему трансцендентных уравнений для t_1, t_2, t_3, T

$$\begin{gathered} t_1-t_2+t_3=T/2,\quad t_1^2-t_2^2+t_3^2=T^2/2-a,\\ 2(\cos t_1-\cos t_2+\cos t_3)-1-\cos T=0, \qquad (6.4.28)\\ 2(\sin t_1-\sin t_2+\sin t_3)-\sin T=0.\end{gathered}$$

Поставим цель найти какое-либо решение системы (6.4.28). Заметим, что начало и конец траектории можно поменять местами, обратив движение. Поэтому будем искать t_1, t_2, t_3 в виде, обеспечивающем симметрию управления (6.4.27) относительно момента $t = T/2$

$$t_1 = T/2 - \xi, \quad t_2 = T/2, \quad t_3 = T/2 + \xi. \tag{6.4.29}$$

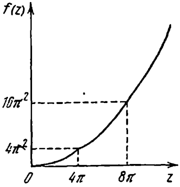


Рис. 6.9.

Здесь ξ — неизвестная постоянная. Подставим формулы (6.4.29) в систему (6.4.28). Первое уравнение (6.4.28) при этом автоматически удовлетворяется, а остальные уравнения преобразованиями приводятся к виду

$$2\xi^2 = T^2/4 - a, \quad \cos(T/2)[2\cos\xi - 1 - \cos(T/2)] = 0,$$
$$\sin(T/2)[2\cos\xi - 1 - \cos(T/2)] = 0. \tag{6.4.30}$$

Последние два уравнения (6.4.30) удовлетворяются, если принять

$$\xi = \arccos\cos^2(T/4). \tag{6.4.31}$$

Подставляя (6.4.31) в первое уравнение (6.4.30), получим уравнение для T

$$f(T) = a. \tag{6.4.32}$$

Здесь введено обозначение

$$f(T) = T^2/4 - 2\{\arccos[\cos^2(T/4)]\}^2. \tag{6.4.33}$$

Можно показать, что функция $f(T)$ из (6.4.33) строго возрастает от 0 до ∞, когда T изменяется от 0 до ∞. Следовательно, при любом $a > 0$ уравнение (6.4.32) имеет единственное решение $T > 0$. График функции $f(T)$ дан на рис. 6.9. При $T \to 0$ и $T \to \infty$ справедливы асимптотические представления

$$f(T)=\frac{T^4}{384}+O(T^6)\quad (T\to 0),\qquad f(T)=\frac{T^2}{4}+O(1)\quad (T\to\infty). \tag{6.4.34}$$

Соотношения (6.4.34) можно использовать для приближенной оценки решения уравнения (6.4.32) при малых или больших a. Отметим еще следующие равенства, вытекающие из (6.4.33)

$$f(4\pi k)=4\pi^2k^2,\quad k=1,\,2,\,\ldots \tag{6.4.35}$$

Построение управления (6.4.27) свелось к следующим операциям. Сначала для заданного $a>0$ находим единственное решение уравнения (6.4.32), для этого можно использовать график рис. 6.9. Далее определяем ξ либо по формуле (6.4.31), либо из первого уравнения (6.4.30), что эквивалентно

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{T^2}{4}-a\right)^{1/2}. \tag{6.4.36}$$

Из соотношений (6.4.32), (6.4.33) видно, что всегда

$$T\geqslant 2\sqrt{a}. \tag{6.4.37}$$

Следовательно, величина ξ, определяемая равенством (6.4.36), вещественна и неотрицательна. Искомые моменты переключений находим по формулам (6.4.29). Из (6.4.36) следует, что $\xi\leqslant T/4$, поэтому моменты переключений удовлетворяют неравенствам

$$0<\frac{T}{4}\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant\frac{3T}{4}<T. \tag{6.4.38}$$

Если $a=4\pi^2k^2$, $k=1,\,2,\,\ldots$, то вследствие равенств (6.4.35) уравнение (6.4.32) имеет решение $T=4\pi k$. В этом случае соотношения (6.4.36), (6.4.29) дают

$$\begin{gathered}a=4\pi^2k^2,\quad T=4\pi k,\quad \xi=0,\quad T=2\sqrt{a},\\ t_1=t_2=t_3=T/2,\quad k=1,2,\ldots\end{gathered} \tag{6.4.39}$$

Режим (6.4.27) с тремя переключениями в случае (6.4.39) переходит в оптимальный режим (6.4.15), (6.4.19) с одним переключением.

Итак, построено управление (6.4.27), переводящее систему (6.4.10) из начального состояния в конечное (6.4.11) при любых $a > 0$. Для доказательства его оптимальности, как и в п. 3, укажем соответствующий ненулевой вектор сопряженных переменных. При этом исключим значения a, указанные в (6.4.39), так как для них оптимальность управления уже доказана в п. 3. Для $a \neq 4\pi^2 k^2$, как нетрудно видеть из (6.4.32), (6.4.33), (6.4.36), имеем

$$T > 2a^{1/2}, \quad \xi > 0, \quad a \neq 4\pi^2 k^2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.4.40}$$

Рассмотрим при условиях (6.4.40) сопряженные переменные

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{\sin \xi}{\xi}, & p_2(t) &= \left(\frac{T}{2} - t\right)\frac{\sin \xi}{\xi}, \\ p_3(t) &= -\cos\left(\frac{T}{2} - t\right), & p_4(t) &= -\sin\left(\frac{T}{2} - t\right). \end{aligned} \tag{6.4.41}$$

Функции (6.4.41) удовлетворяют системе (6.4.13), а соответствующее им управление (6.4.14) равно

$$u(t) = \operatorname{sign}\left[\frac{\sin \xi}{\xi}\left(\frac{T}{2} - t\right) - \sin\left(\frac{T}{2} - t\right)\right]. \tag{6.4.42}$$

Нетрудно проверить, что управление (6.4.42) испытывает переключения в моменты (6.4.29) и совпадает с (6.4.27). Условие $H(T) \geqslant 0$ также выполнено.

Итак, построенное управление (6.4.27) удовлетворяет принципу максимума для рассматриваемой линейной задачи быстродействия, Условие общности положения и принадлежности нуля внутренней части области ограничений $|u| \leqslant 1$ здесь также выполнены (см. п. 2).

Следовательно, управление (6.4.27), определяемое соотношениями (6.4.29), (6.4.32), (6.4.33), (6.4.36), оптимально при всех $a > 0$. Это единственное оптимальное управление есть решение задачи 5.

Обозначим через $T^*(a)$ минимальное время перемещения системы (6.4.10) из начального состояния (6.4.11) в состояние $x(T) = a$, $v(T) = 0$. Здесь гашения колебаний, т. е. равенств $\varphi = \omega = 0$ при $t = T$, не требуется. Отимальное время быстродействия $T^*(a)$ соответствует примеру 1 из [176], который описывается первыми двумя уравнениями (6.4.10), и равно $T^*(a) = 2a^{1/2}$. Теперь неравенство (6.4.37) приобретает наглядный смысл $T \geqslant T^*$, т. е. время перемещения с условием гашения колебаний не меньше, чем время перемещения без этого условия. С другой стороны, имеет место неравенство $T \leqslant T_1$, где $T_1(a)$ — зависимость (6.4.26) времени от пути для квазиоптимального режима с одним переключением. В обоих неравенствах $T^* \leqslant T \leqslant T_1$ достигается равенство при значениях a из (6.4.39), и только при них. На рис. 6.10 сплошной и пунктирной кривой соответственно показаны отношения T/T^* и T_1/T^* в зависимости от a. Вторая зависимость является разрывной функцией a. При больших a оба отношения приближаются к единице.

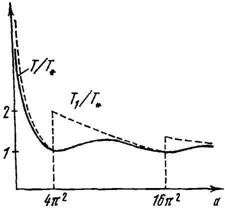


Рис. 6.10.

6. Управление нелинейными колебаниями. Откажемся от условия малости угла φ и рассмотрим нелинейную систему (6.4.1). Будем искать управление с одной точкой переключения, расположенной в середине интервала

$$F(t) = F_*, \quad t \in (0,\ T/2), \quad 0 < F_* < F_0,$$
$$F(t) = -F_*, \quad t \in (T/2,\ T). \tag{6.4.43}$$

Здесь F_* — неизвестная постоянная, подлежащая определению, T — время процесса. Управление (6.4.43) удовлетворяет ограничению (6.4.3) и должно переводить систему (6.4.1) из начального состояния (6.4.4) в конечное (6.4.5).

Потребуем, чтобы движение обладало свойством симметрии относительно точки $t = T/2$, точнее, чтобы координаты $(x - a/2)$, φ были нечетными, а скорости — v, ω — четными функциями от $t - T/2$. Указанные свойства четности допускаются уравнениями (6.4.1) (при нечетном управлении (6.4.43)) и граничными условиями (6.4.4), (6.4.5). Вместо условий в конце движения (6.4.5) достаточно потребовать равенств

$$x(T/2) = a/2, \quad \varphi(T/2) = 0. \tag{6.4.44}$$

Тогда движение, построенное на интервале $(0,\ T/2)$ при граничных условиях (6.4.2), (6.4.44), будет продолжено указанным симметричным образом на интервал $(T/2,\ T)$.

Проинтегрируем систему (6.4.1) при постоянном управлении F. Интегрируя дважды уравнение движения центра масс, получим

$$(M+m)v - mL\omega\cos\varphi = F_* t + C_1,$$
$$(M+m)x - mL\sin\varphi = F_* t^2/2 + C_1 t + C_2. \qquad (6.4.45)$$

Здесь C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Полная механическая энергия системы (6.4.1) равна

$$E = \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mLv\omega\cos\varphi - mgL\cos\varphi. \qquad (6.4.46)$$

Изменение энергии (6.4.46) равно работе постоянной силы F_*. Поэтому имеем интеграл (C_3 — постоянная)

$$\frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mLv\omega\cos\varphi - mgL\cos\varphi - F_* x = C_3. \qquad (6.4.47)$$

В сохранении интеграла (6.4.47) можно убедиться и непосредственно, умножая первые два уравнения (6.4.1) на v, ω соответственно и складывая их. Выразим переменные v, x при помощи равенств (6.4.45) и подставим их в (6.4.47). После упрощений получим

$$\frac{1}{2}\left(I - \frac{m^2L^2}{M+m}\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2 - mgL\cos\varphi - \frac{mLF_*\sin\varphi}{M+m} + \frac{C_1^2 - 2F_*C_2}{2(M+m)} = C_3. \qquad (6.4.48)$$

Уравнение (6.4.48) сводится к квадратуре.

Определим произвольные постоянные, подставляя начальные данные (6.4.4) в интегралы (6.4.45), (6.4.48)

$$C_1 = C_2 = 0, \quad C_3 = -mgL.$$

После этого интегралы (6.4.45) примут вид

$$(M+m)v - mL\omega\cos\varphi = F_* t,$$
$$(M+m)x - mL\sin\varphi = F_* t^2/2, \qquad (6.4.49)$$

а интеграл (6.4.48) даст

$$\frac{1}{2}\left(I - \frac{m^2L^2}{M+m}\cos^2\varphi\right)\dot\varphi^2 = \frac{mLF_*\sin\varphi}{M+m} - mgL(1-\cos\varphi). \qquad (6.4.50)$$

Для определения двух неизвестных постоянных F_*, T закона управления (6.4.43) имеем два условия (6.4.44). Подставляя их в (6.4.49), получим соотношение

$$(M+m)a = F_* T^2/4. \qquad (6.4.51)$$

Для получения второго соотношения проанализируем уравнение (6.4.50). Его левая часть неотрицательна, так как $I \geqslant mL^2$, а его правая часть

$$2mL \sin\frac{\varphi}{2}\left(\frac{F_*}{M+m}\cos\frac{\varphi}{2} - g\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

положительна на интервале $(0, \varphi_*)$, где

$$\varphi_* = 2\operatorname{arctg}\frac{F_*}{(M+m)\,g}. \qquad (6.4.52)$$

Следовательно, угол φ, изменяющийся согласно уравнению (6.4.50), испытывает колебания в пределах $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_*$ Условие (6.4.44) для φ означает, что $T/2$ равно целому числу n периодов колебаний, т. е.

$$\frac{T}{2} = \frac{2^{1/2}n}{mL}\int\limits_0^{\varphi_*}\frac{[I - m^2L^2(M+m)^{-1}\cos^2\varphi]^{1/2}\,d\varphi}{[F_*(M+m)^{-1}\sin\varphi - g(1-\cos\varphi)]^{1/2}},$$
$$n = 1, 2, \ldots \qquad (6.4.53)$$

Исключая T при помощи равенства (6.4.51)

$$T = 2\left[(M+m)\,aF_*^{-1}\right]^{1/2} \qquad (6.4.54)$$

и подставляя его в (6.4.53), получим

$$\left[\frac{(M+m)\,a}{2F_*}\right]^{1/2} =$$
$$= \frac{n}{mL}\int\limits_0^{\varphi_*}\frac{[I - m^2L^2(M+m)^{-1}\cos^2\varphi]^{1/2}d\varphi}{[F_*(M+m)^{-1}\sin\varphi - g(1-\cos\varphi)]^{1/2}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$(6.4.55)$$

Итак, расчет искомого режима (6.4.43) сведен к решению относительно F_* трансцендентного уравнения (6.4.55), в котором φ_* дано формулой (6.4.52). Решение F_* должно лежать в интервале $[0, F_0]$. Большим F_* отвечает согласно (6.4.54) меньшее время T. Следовательно, натуральное

n следует выбрать таким, чтобы соответствующий корень F_* уравнения (6.4.55) лежал в $(0, F_0]$ и был максимален. Интеграл (6.4.55) может быть упрощен в предельных случаях малых и больших отношений m/M.

Рассмотрим вопрос о возможности схода со связи для режима (6.4.43) в случае точечной массы m, подвешенной на нерастяжимой нити. Воспользуемся для этого формулой (6.4.8).

В силу симметрии движения достаточно рассмотреть интервал $t \in [0, T/2]$, на котором $F = F_*$, $\varphi \in [0, \varphi_*]$. В силу равенства (6.4.52) имеем $0 \leqslant \varphi < \pi$. Рассмотрим сначала те моменты времени, где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Здесь из формулы (6.4.8) сразу получим $R > 0$.

Пусть теперь $\pi/2 < \varphi < \pi$, что возможно лишь при $\varphi_* > \pi/2$. На этом интервале $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ убывают, и справедливы следующие оценки для (6.4.8)

$$R \geqslant \frac{m(F_* \sin\varphi + mg\cos\varphi)}{M+m} \geqslant \frac{m(F_* \sin\varphi_* + mg\cos\varphi_*)}{M+m} =$$

$$= \frac{2mF_* \operatorname{tg}(\varphi_*/2) + m^2 g\,[1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_*/2)]}{(M+m)\,[1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_*/2)]}.$$

Подставляя φ_* из (6.4.52), получим

$$R \geqslant \frac{2m(M+m)\,gF_*^2 + m^2(M+m)^2 g^3 - m^2 g F_*^2}{(M+m)^3 g} > 0.$$

Итак, $R > 0$, и сход со связи при данном способе движения никогда не происходит.

Покажем, что построенные режимы управления, определяемые соотношениями (6.4.43), (6.4.52), (6.4.54), (6.4.55), оптимальны (являются решением задачи 4) при некоторых значениях параметров задачи. Пусть уравнение (6.4.55) при некотором натуральном n имеет решение $F_* = F_0$, т. е. параметры задачи таковы, что при некотором n выполняется равенство

$$\left[\frac{(M+m)\,a}{2F_0}\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{n}{mL}\int\limits_0^{\varphi_0} \frac{[I - m^2 L (M+m)^{-1}\cos^2\varphi]^{1/2}\,d\varphi}{\left[F_0 (M+m)^{-1}\sin\varphi - g(1-\cos\varphi)\right]^{1/2}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\varphi_0 = 2\operatorname{arctg} F_0 (M+m)^{-1} g^{-1}. \qquad (6.4.56)$$

В этом случае управление все время лежит на ограничении, а время движения (6.4.54) равно

$$T = 2\left[(M+m)\,aF_0^{-1}\right]^{1/2}. \tag{6.4.57}$$

Для доказательства оптимальности первое уравнение (6.4.1) представим в виде

$$\ddot{q} = F, \quad q = (M+m)x - mL\sin\varphi, \tag{6.4.58}$$

где q характеризует положение центра масс системы. Из краевых условий (6.4.4), (6.4.5) вытекает, что

$$q(0) = \dot{q}(0) = 0, \quad q(T) = (M+m)a, \quad \dot{q}(T) = 0. \tag{6.4.59}$$

Рассмотрим задачу о наискорейшем перемещении центра масс системы (6.4.58) при условиях (6.4.59) и ограничении (6.4.3). Решение этой линейной задачи быстродействия, как отмечалось в п. 5, дается управлением (6.4.43) при $F = F_0$. Время быстродействия равно (6.4.57).

В поставленной задаче о наискорейшем перемещении с гашением колебаний (6.4.1), (6.4.3) — (6.4.5) требуется, помимо условий (6.4.59), удовлетворить еще условиям на φ, ω. Поэтому время быстродействия в исходной задаче не меньше (6.4.57). Это доказывает оптимальность режима (6.4.43) с одним переключением, а с $F_* = F_0$ для тех случаев, когда выполнено условие (6.4.56). Условие (6.4.56) выделяет счетное число значений расстояния a, пропорциональных n^2.

Построенные здесь режимы являются непосредственным обобщением решений пп. 3, 4 и переходят в них в в случае малых колебаний.

ГЛАВА 7

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАЗГОН КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В этой главе рассмотрены режимы, сообщающие колебательной системе заданную скорость с гашением колебаний относительно положения равновесия. Такие режимы будем называть режимами разгона. Будут рассмотрены также режимы торможения, гасящие колебания системы, с одновременной ее остановкой.

В § 1 дана постановка задач разгона и торможения. Показано, что задача торможения заменой переменных сводится к задаче разгона. В § 2 исследованы задачи разгона при ограничениях, наложенных либо на скорость, либо на ускорение положения равновесия. В § 3 рассмотрена задача разгона при совместных ограничениях па скорость и ускорение положения равновесия. В § 4 приводится решение задачи о разгоне маятника переменной длины. Изложение этой главы опирается па результаты работ [199, 197, 141, 140, 92].

§ 1. Задачи наискорейшего разгона с гашением колебаний

1. Постановка задач. Рассматриваемая колебательная система представляет собой маятник, точка подвеса которого может перемещаться вдоль горизонтальной оси x. Эта система (рис. 6.1) описана в п. 1 § 1 главы 6, и ее уравнения в безразмерных переменных имеют вид (6.1.5), а именно

$$\dot{\varphi} = \omega,\ \dot{\omega} = -\varphi + w,\ \dot{x} = v,\ \dot{v} = w. \qquad (7.1.1)$$

Построенные в главе 6 оптимальные и квазиоптимальные способы управления колебательной системой (7.1.1) обеспечивали ее перемещение на заданное расстояние a с гашением колебаний. При этом законы управления зависели от a и в процессе движения система совершала колебания. Рассматриваемые в данной главе режимы разгона (торможения) переводят систему из покоя в состояние поступательного движения без колебаний (и обратно). Эти режимы особенно удобны с практической точки зрения, так как их применение позволяет разбить перемещение колебательной системы на три этапа: разгон — движение без колебаний — торможение. Управление на этапе разгона и торможения определяется только параметрами системы и не зависит от расстояния, на которое требуется переместить систему. Движение без колебаний на среднем участке дает возможность сочетать этот вид движения с другими, например, с изменением длины подвеса. Это позволяет, в частности, сравнительно просто перемещать маятник в вертикальной плоскости на заданное расстояние и высоту с гашением его колебаний.

Предполагается, что на скорость $v(t)$ и ускорение $w(t)$ наложены ограничения вида (α, β, b — заданные константы)

$$\text{а)}\ -\alpha \leqslant v \leqslant \beta,\quad \alpha \geqslant 0,\quad \beta > 0;$$
$$\text{б)}\ -b \leqslant w \leqslant 1,\quad b \geqslant 0. \qquad (7.1.2)$$

Будет рассмотрен также случай, когда ограничение на ускорение зависит от знака скорости точки подвеса

$$-b \leqslant w \leqslant 1\quad (v > 0),\quad -1 \leqslant w \leqslant b\quad (v < 0), \qquad (7.1.3)$$
$$-\beta \leqslant v \leqslant \beta.$$

В частности, одно из двух ограничений (7.1.2) может отсутствовать.

На рис. 7.1, *а*, *б* изображены области допустимых значений управления $w(t)$ и скорости подвеса $v(t)$ для ограничений (7.1.2), (7.1.3) соответственно. Отметим, что одна из постоянных в ограничениях (7.1.2), (7.1.3) принята равной единице, что уменьшает число независимых параметров и не ограничивает общности, так как эта постоянная может быть принята в качестве масштаба при введении безразмерных переменных. А именно, в соотношениях (6.1.4) нужно принять $v_0 = w_0 T_0$, где w_0 — максимальное ускорение в положительном направлении оси x в случае (7.1.2), или в направлении текущей скорости v — в случае (7.1.3).

Движение начинается из состояния покоя и заканчивается в момент T. В этот момент скорость точки подвеса должна равняться заданной величине c, а колебания должны быть погашены. Обозначая через a

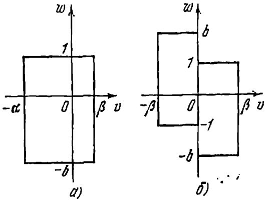


Рис. 7.1.

координату $x(T)$, запишем граничные условия для системы (7.1.1)

$$\begin{gathered}\varphi(0)=\omega(0)=x(0)=v(0)=\varphi(T)=\omega(T)=0,\\ v(T)=c,\ x(T)=a,\ 0<c\leqslant\beta.\end{gathered}\tag{7.1.4}$$

Сформулируем следующие пять связанных друг с другом задач оптимального управления точкой подвеса маятника при его разгоне.

Задача 1 (задача синтеза). Выбором управления $w(t)$ за минимальное время T перевести систему (7.1.1) из произвольного начального положения $\varphi(0)$, $\omega(0)$, $x(0)$ в конечное положение (7.1.4) при фиксированном c. Координата $x(T)$ свободна. На скорость точки подвеса наложено первое ограничение (7.1.2).

Задача 2. Эта задача отличается от задачи 1 тем, что в качестве начального положения выбрано положение покоя (7.1.4), а координата $x(T)$ фиксирована $x(T)=0$. В этой задаче для определенности принимаем $\alpha=\beta=c=1$.

Задача 3. Выбором управления $w(t)$ перевести систему (7.1.1) из начального положения покоя в конечное положение (7.1.4). Координата $x(T)$ свободна. На ускорение точки подвеса наложено второе ограничение (7.1.2), на скорость ограничений нет.

Задача 4. Эта задача отличается от задачи 3 тем, что и скорость, и ускорение ограничены неравенствами (7.1.2).

Задача 5. Задача отличается от задачи 3 тем, что скорость и ускорение ограничены неравенствами (7.1.3), причем $c = \beta$.

Разгон системы до скорости c, меньшей максимальной скорости β целесообразен при перемещении системы на малые расстояния. Произвол в выборе c можно использовать для минимизации суммарного времени перемещения. В задачах 1, 3, 4 скорость c произвольна, $c \in \in [0, \beta]$, а задачи 2, 5 решаются при $c = \beta$.

Ограничения на управляющую функцию задачи 1 отвечают механическим системам, скорость которых ограничена, а время переходного процесса при изменении скорости пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний. Здесь будет построен синтез управления. В задаче 2 рассмотрена аналогичная система, но с дополнительным условием: точка подвеса к моменту разгона должна находиться в исходном положении. В качестве начального состояния в задачах 2—5 выбрано состояние покоя (7.1.4).

В задаче 3 рассмотрено движение с ограниченным ускорением положения равновесия. Ограничение на ускорение позволяет учитывать влияние инерционных факторов. Решение задач 4, 5 с совместными ограничениями на скорость и ускорение опирается на решение первых трех задач. Рассмотрены как независимые ограничения на скорость и ускорение (задача 4), так и ограничения, зависящие от знака скорости положения равновесия (задача 5), см. рис. 7.1. Ограничения (7.1.3), наложенные в задаче 5, отражают тот факт, что ускоренное и замедленное движения подвеса происходят по разным законам (торможение может осуществляться более резко, чем набор скорости).

2. Задачи наискорейшего торможения. Аналогично, с очевидной перестановкой начальных и конечных условий в (7.1.4), формулируются задачи об оптимальном торможении. Таким образом, режиму торможения должны соответствовать следующие граничные условия

$$\varphi(0)=\omega(0)=x(T)=v(T)=\varphi(T)=\omega(T)=0, \qquad x(0)=a, \quad v(0)=c. \tag{7.1.5}$$

После замены переменных ($b>0$)

$$\varphi\to-b\varphi, \quad \omega\to b\omega, \quad x\to-bx, \quad v\to bv, \quad w\to-bw, \quad t\to T-t, \tag{7.1.6}$$

уравнения (7.1.1) перейдут сами в себя, ограничения (7.1.2) примут вид

$$-\alpha b^{-1}\leqslant v\leqslant\beta b^{-1}, \quad -b^{-1}\leqslant w\leqslant 1, \tag{7.1.7}$$

ограничения (7.1.3) запишутся в виде

$$-b^{-1}\leqslant w\leqslant 1 \quad (v>0) \quad -1\leqslant w\leqslant b^{-1} \ (v<0). \tag{7.1.8}$$

Граничные условия (7.1.5) будут аналогичны условиям (7.1.4) с очевидным изменением

$$x(T)=-ab^{-1}, \quad v(T)=cb^{-1}. \tag{7.1.9}$$

Ограничения и граничные условия (7.1.7)—(7.1.9) с точностью до обозначений совпадают с ограничениями и граничными условиями (7.1.2)—(7.1.4). Поэтому решение задач оптимального торможения эквивалентно решению задач 1—5 оптимального разгона. Решение задач разгона 1—3 дано в § 2, задач 4, 5 — в § 3.

§ 2. Оптимальный разгон при ограничениях на скорость или на ускорение положения равновесия

1. Построение синтеза оптимального разгона при ограниченной скорости точки подвеса. Рассмотрим задачу 1. Также, как в п. 1 § 2 главы 6, вводим новую переменную $\psi=v-\omega$, (см.(6.2.1)), после чего фазовое ограничение (7.1.2) на скорость $v(t)$ становится ограничением на управляющее воздействие. В новых переменных ψ, φ уравнения движения имеют вид (6.2.1), (6.2.2)

$$\dot\varphi=-\psi+v, \quad \dot\psi=\varphi, \tag{7,2,1}$$

а краевые условия (7.1.4) дадут

$$\varphi(0)=\psi(0)=\varphi(T)=0,\quad \psi(T)=c. \tag{7.2.2}$$

Сначала будет построено синтезирующее управление, переводящее систему (7.2.1) из произвольного начального положения φ^0, ψ^0 в конечное состояние (7.2.2) за наименьшее время T при ограничении на скорость (7.1.2). Это управление, построенное согласно принципу максимума для линейных задач быстродействия, будет оптимальным при всех $c\in[0,\ \beta]$ в силу единственности построения.

Решение задачи разгона с граничными условиями (7.2.2) будет получено на основе решения задачи синтеза как частный случай.

В соответствии с принципом максимума выпишем для системы (7.2.1) функцию Гамильтона и сопряженные уравнения

$$H=p_1\varphi+p_2(v-\psi),\ \dot{p}_1=p_2,\ \dot{p}_2=-p_1. \tag{7.2.3}$$

Функция Гамильтона (7.2.3) достигает максимума по $v\in[-\alpha,\ \beta]$ при

$$v=-\alpha \text{ при } p_2<0,\quad v=\beta \text{ при } p_2>0. \tag{7.2.4}$$

Подставляя в (7.2.4) решение сопряженной системы (7.2.3), получим (θ_1 — константа интегрирования)

$$v=-\alpha \text{ при} \sin(t+\theta_1)<0,\ v=\beta \text{ при } \sin(t+\theta_1)>0. \tag{7.2.5}$$

Отсюда следует, что оптимальное управление $v(t)$ — релейная функция, принимающая значение $-\alpha$, β. Обозначим через t_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, длину i-го интервала постоянства управления, а через n — их число. Из (7.2.5) вытекают соотношения

$$t_1\leqslant\pi,\ t_n\leqslant\pi,\ t_i=\pi,\ i=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1. \tag{7.2.6}$$

Общее решение системы уравнений (7.2.1) при управлении (7.2.5) имеет вид (A, θ — постоянные интегрирования)

$$\begin{gathered}\psi=A\sin(t+\theta)+\beta,\quad \varphi=A\cos(t+\theta) \text{ при } v=\beta,\\ \psi=A\sin(t+\theta)-\alpha,\quad \varphi=A\cos(t+\theta) \text{ при } v=-\alpha,\end{gathered} \tag{7.2.7}$$

Из формул (7.2.6), (7.2.7) следует, что при управлении $v=-\alpha$, $v=\beta$ изображающая точка в плоскости ψ, φ движется в направлении по часовой стрелке по дугам окружностей с центрами в точках $(-\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ соответственно. Центральный угол дуг не превышает π. На рис. 7.2 в плоскости ψ, φ изображено поле оптимальных траекторий (7.2.6), (7.2.7).

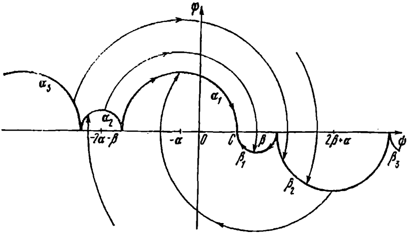


Рис. 7.2.

Обозначим через α_1, β_1 оптимальные траектории, соответствующие управлениям $v=-\alpha$ и $v=\beta$, и приводящие изображающую точку ψ, φ в конечное положение $(c, 0)$. Согласно условиям оптимальности α_1, β_1 — полуокружности с центрами в точках $(-\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ и радиусами $\alpha+c$, $\beta-c$ соответственно (рис. 7.2).

На полуокружность β_1 изображающая точка может попасть, двигаясь с управлением $v=-\alpha$ по дуге, центральный угол которой не превышает π (см. (7.2.7), (7.2.6)). Обозначим через α_2 геометрическое место точек, обладающих следующим свойством. Движение, начавшееся из этих точек, должно под действием управления $v=-\alpha$ закончиться на дуге β_1 за время π. Нетрудно видеть, что α_2 — полуокружность с радиусом $\beta-c$ и центром в точке $(-2\alpha-\beta, 0)$, лежащая в верхней полуплоскости. Аналогично построим полуокружность β_2. Движение, начавшееся на β_2, под действием управления $v=\beta$ должно за время π закончиться на α_1. Полуокружность β_2 имеет радиус $\alpha+c$ и центр в точке $(2\beta+\alpha, 0)$, она лежит в нижней полуплоскости (см. рис. 7.2).

Продолжая построения по индукции, определим α_i, β_i как такие полуокружности, что движение, начавшееся на них, переходит под действием оптимального управления за время π на полуокружности β_{i-1}, α_{i-1}, соответственно. При этом полуокружности α_i лежат в верхней полуплоскости слева от α_1, а полуокружности β_i — в нижней полуплоскости справа от β_1. Переходы $\alpha_i\to\beta_{i-1}$ происходят под действием управления $v=-\alpha$, а переходы $\beta_i\to\alpha_{i-1}$ — под действием $v=\beta$ (рис. 7.2). Из построения следует, что радиусы полуокружностей α_i, β_i соответственно равны

$$R_{\alpha_i}=\alpha+c,\ i=2j-1;\quad R_{\alpha_i}=\beta-c,\ i=2j\ \ (j=1, 2, \ldots),$$
$$R_{\beta_i}=\beta-c,\ i=2j-1;\quad R_{\beta_i}=\alpha+c,\ i=2j.$$

Центры полуокружностей α_i, β_i лежат в точках A_i, B_i оси ψ и отстоят друг от друга на расстояние $\alpha+\beta$, равное сумме радиусов соседних полуокружностей (см. рис. 7.2). Поэтому

$$A_i=\beta-i(\alpha+\beta),\quad B_i=i(\alpha+\beta)-\alpha,\quad i=1, 2, \ldots$$

Построенная таким образом совокупность полуокружностей является линией переключения и разделяет фазовую плоскость ψ, φ на две части. Управление равно $v=-\alpha$ в верхней и $v=\beta$ в нижней части плоскости. Построенный синтез оптимального управления при $c=0$, $\alpha=\beta$ переходит в известный пример 2 из [176].

2. Разгон из состояния покоя. Найдем программное оптимальное управление, переводящее систему (7.2.1) за кратчайшее время из начального положения в конечное состояние (7.2.2). Из приведенного на рис. 7.2 синтеза следует, что оптимальное управление имеет два интервала постоянства скорости. Обозначим длину первого интервала через t_1, длину второго — через t_2. Таким образом, $T=t_1+t_2$ и

$$v(t)=\beta,\ t\in[0, t_1);\ v(t)=-\alpha,\ t\in(t_1, t_1+t_2]. \quad (7.2.8)$$

Запишем решение уравнений (7.2.1) в виде свертки и учтём краевые условия (7.2.2)

$$\psi(T) = \int_0^T \sin(T-\tau)\, v(\tau)\, d\tau = c,$$
$$\varphi(T) = \int_0^T \cos(T-\tau)\, v(\tau)\, d\tau = 0. \tag{7.2.9}$$

Подставим управление (7.2.8) в соотношения (7.2.9). После интегрирования получим

$$\beta\cos(t_1+t_2) - (\beta+\alpha)\cos t_2 = -c-\alpha,$$
$$\beta\sin(t_1+t_2) - (\beta+\alpha)\sin t_2 = 0. \tag{7.2.10}$$

Возведем в квадрат и сложим обе части этих уравнений

$$\beta^2 - 2\beta(\beta+\alpha)\cos t_1 = (c+\alpha)^2 - (\beta+\alpha)^2.$$

Наименьший положительный корень t_1 этого уравнения равен

$$t_1 = \arccos\frac{\beta^2-(c+\alpha)^2+(\beta+\alpha)^2}{2\beta(\beta+\alpha)}. \tag{7.2.11}$$

Для определения t_2 умножим обе части первого уравнения (7.2.10) на $\cos t_2$, обе части второго — на $\sin t_2$ и сложим оба уравнения

$$\beta\cos t_1 - (\beta+\alpha) = -(c+\alpha)\cos t_2.$$

Подставляя в это уравнение t_1 из (7.2.11), получим

$$t_2 = \arccos\left[\frac{(\beta+\alpha)^2-\beta^2+(c+\alpha)^2}{2(c+\alpha)(\beta+\alpha)}\right]. \tag{7.2.12}$$

Время быстродействия $T = t_1 + t_2$ найдем из первого уравнения (7.2.10), подставив в него t_2 из (7.2.12). Получим

$$T = t_1 + t_2 = \arccos\frac{2\alpha\beta - c^2 - 2c\alpha}{2\beta(c+\alpha)}. \tag{7.2.13}$$

Оптимальный режим разгона построен и определяется формулами (7.2.8), (7.2.11)—(7.2.13).

Рассмотрим случай $c = \beta = 1$, т. е. разгон производится до максимальной допустимой скорости, равной единице, и пусть либо $\alpha = 1$, либо $\alpha = 0$. Случай $\alpha = 1$ отвечает симметричному ограничению на скорость $|v| \leqslant 1$, а случай $\alpha = 0$ — отсутствию обратного хода, здесь $0 \leqslant v \leqslant 1$. Подставляя указанные значения α, β, c в соотношения (7.2.11)—(7.2.13), получим

$$t_1 = \arccos 1/4 \approx 1{,}3181, \quad t_2 = \arccos 7/8 \approx 0{,}5054,$$
$$T = \arccos(-1/4) \approx 1{,}8235 \quad (|v(t)| \leqslant 1), \tag{7.2.14}$$
$$t_1 = t_2 = \pi/3, \quad T = 2\pi/3 \ (0 \leqslant v(t) \leqslant 1). \tag{7.2.15}$$

Оптимальные фазовые траектории маятника в плоскости φ, ω, соответствующие решениям (7.2.14), (7.2.15), изображены на рис. 7.3. Эти траектории отвечают движению системы (7.1.1) при управлении (7.2.8), (7.2.14) (рис. 7.3, *а*) и (7.2.15) (рис. 7.3, *б*). Они начинаются и заканчиваются в начале координат и состоят из трех вертикальных отрезков, соответствующих скачкам скорости и соединенных дугами с центральными углами, равными t_1, t_2. Величины последовательных скачков равны 1, -2, 2 на рис. 7.3, *а* и 1, -1, 1 на рис. 7.3, *б*.

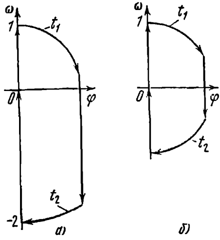


Рис. 7.3.

Решение задачи 1 построено.

3. Разгон при ограниченной скорости точки подвеса и фиксированном конечном состоянии. В задаче 2, в отличие от задачи 1, координата $x(T)$ фиксирована: $x(T) = 0$. Поэтому дополнительно к уравнениям (7.2.1) и краевым условиям (7.2.2) следует привлечь уравнение и краевые условия

$$\dot{x} = v, \ x(0) = x(T) = 0. \tag{7.2.16}$$

Выпишем функцию Гамильтона, сопряженные уравнения и ограничения для задачи 2

$$H = p_1\varphi + p_2(v - \psi) + p_3 v, \ |v(t)| \leqslant 1,$$
$$\dot{p}_1 = p_2, \ \dot{p}_2 = -p_1, \ \dot{p}_3 = 0.$$

Функция Гамильтона достигает максимума по v при

$$v = 1 \text{ при } A\sin(t+\theta) + B > 0, \quad v = -1 \text{ при } A\sin(t+\theta) + B < 0. \tag{7.2.17}$$

Здесь A, B, θ — константы интегрирования сопряженной системы. Из (7.2.17) следует, что $v(t)$ — релейная функция, принимающая значения ± 1. Обозначим через t_i длину i-го ненулевого интервала постоянства управления, через n число этих интервалов, $1 \leqslant i \leqslant n$. Из (7.2.17) следуют соотношения, аналогичные (6.2.10)

$$t_i + t_{i+1} = 2\pi, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2, \quad t_1 + t_2 \leqslant 2\pi, \quad t_{n-1} + t_n \leqslant 2\pi. \tag{7.2.18}$$

Из формул (7.2.18) ясно, что при $n > 3$ время разгона $T > 2\pi$. Ограничимся случаем $n \leqslant 3$ и покажем, что соответствующее время $T < 2\pi$. Тем самым будет установлено, что оптимальное решение реализуется при $n \leqslant 3$.

Пусть $v(t) = -1$ на первом интервале постоянства. Таким образом, рассмотрим управление

$$v = -1, \; t \in (0, t_1) \cup (t_1 + t_2, T); \quad v = 1, \; t \in (t_1, t_1 + t_2); \; T = t_1 + t_2 + t_3, \; t_i > 0. \tag{7.2.19}$$

Из краевых условий (7.2.15) следует

$$t_1 + t_3 = t_2, \quad T = 2t_2. \tag{7.2.20}$$

Подставим управление (7.2.19) в соотношения (7.2.9), положим $c = 1$ и воспользуемся равенствами (7.2.20)

$$-2\cos(t_2 + t_3) + 2\cos t_3 = 2 - \cos 2t_2, \quad -2\sin(t_2 + t_3) + 2\sin t_3 = -\sin 2t_2. \tag{7.2.21}$$

Возведем обе части уравнений (7.2.21) в квадрат и сложим их. Получим

$$\cos t_2 = (2 - \sqrt{6})/4 \approx -0{,}11237.$$

Наименьший положительный корень этого уравнения, соответствующий согласно (7.2.20) наименьшему T, равен

$$t_2 = \arccos\left[(2 - \sqrt{6})/4\right] \approx 1{,}6834. \tag{7.2.22}$$

Время движения (7.2.20) равно

$$T = 2t_2 \approx 3{,}3668. \qquad (7.2.23)$$

Представим левую часть второго уравнения (7.2.21) в виде произведения. После преобразований с использованием (7.2.22) получим

$$\cos(t_3 + t_2/2) = \cos t_2 \cos(t_2/2) \approx -0{,}07459.$$

Согласно соотношению (7.2.20) корень t_3 этого уравнения должен лежать в интервале $(0,\ t_2)$, где значение t_2 дано формулой (7.2.22). Единственный корень в этом интервале есть

$$t_3 = \arccos[\cos t_2 \cos(t_2/2)] - t_2/2 \approx 0{,}8041. \qquad (7.2.24)$$

Длину первого интервала t_1 найдем из соотношений (7.2.20), (7.2.22), (7.2.24)

$$t_1 = t_2 - t_3 \approx 0{,}8793. \qquad (7.2.25)$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда $v(t) = 1$ на первом интервале, т. е. определим $v(t)$ соотношениями

$$\begin{gathered} v = 1,\ t \in (0,\ t_1) \cup (t_1 + t_2,\ T); \\ v = -1,\ t \in (t_1,\ t_1 + t_2);\ T = t_1 + t_2 + t_3,\ t_i \geqslant 0. \end{gathered} \qquad (7.2.26)$$

Покажем, что это управление не позволит перевести систему (7.2.1), (7.2.16) из начального положения в конечное (см. (7.2.2), (7.2.16)) при $c = 1$ за время T, меньшее 2π. Аналогично (7.2.21) получим систему трансцендентных уравнений

$$\begin{gathered} -2\cos(t_2 + t_3) + 2\cos t_3 = -\cos 2t_2, \\ -2\sin(t_2 + t_3) + 2\sin t_3 = -\sin 2t_2. \end{gathered} \qquad (7.2.27)$$

Возведем обе части уравнений (7.2.27) в квадрат и сложим их. После приведения подобных членов получим $\cos t_2 = 7/8$. Отсюда t_2 равно либо $\arccos 7/8$, либо $2\pi k \pm \pm \arccos 7/8$, где $k = 1,\ 2,\ \ldots$. Если верно второе, то время движения $T = 2t_2 > 2\pi$. Покажем, что равенство $t_2 = \arccos 7/8$ невозможно. Из равенств (7.2.20) следует

$$t_2 + t_3 < 2t_2 = T = 2\arccos(7/8) < \pi/2.$$

Отсюда вытекает $\cos t_3 > \cos(t_2 + t_3)$, что противоречит первому уравнению (7.2.27), правая часть которого меньше нуля.

Таким образом, искомое управление в задаче 2 дается *соотношениями* (7.2.19), (7.2.22)—(7.2.25). Его оптимальность обосновывается такими же рассуждениями, как и в начале п. 2 § 2 главы 6. Задача 2 решена.

4. Разгон при ограниченном ускорении точки подвеса. В главе 6 была решена задача о наискорейшем перемещении маятника на заданное расстояние. В этой задаче (задача 3 п. 1 § 2 главы 6) требовалось найти закон управления $v(t)$ системой

$$\dot\psi = \varphi,\ \dot\varphi = -\psi + \dot v,\ \dot x = v, \tag{7.2.28}$$

удовлетворяющий ограничениям

$$-\gamma \leqslant v(t) \leqslant 1 \tag{7.2.29}$$

и обеспечивающий при минимальном времени T выполнение краевых условий

$$x(0) = \psi(0) = \varphi(0) = \psi(T) = \varphi(T) = 0,\ x(T) = a. \tag{7.2.30}$$

Сопоставим соотношения (7.2.28)—(7.2.30) с уравнениями (7.1.1), ограничениями (7.1.2), б) и краевыми условиями (7.1.4), входящими в формулировку задачи 3 из § 1 главы 7. Эти соотношения полностью эквивалентны, если в (7.2.28)—(7.2.30) сделать замену обозначений

$$\psi \to \varphi,\ \varphi \to \omega,\ v \to w,\ x \to v,\ \gamma \to b,\ a \to c. \tag{7.2.31}$$

Переменную x в (7.1.1) можно не рассматривать, так как $x(T)$ свободно в задаче 3 из § 1 главы 7.

Следовательно, *решение задачи* 3, *поставленной* в § 1 главы 7, получается из решения задачи 3 главы 6 простой заменой обозначений.

Выпишем решение задачи 3 главы 7 об оптимальном разгоне с ограничениями на ускорение, делая замену (7.2.31) в решении (6.2.11), (6.2.31). Оптимальное управление $w(t)$ есть релейная функция, равная

$$w(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } \sum\limits_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum\limits_{j=1}^{i} t_j, & i=1, 3, \ldots, n, \\ -b \text{ при } \sum\limits_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum\limits_{j=1}^{i} t_j, & i=2, 4, \ldots, n-1 \end{cases} \qquad (7.2.32)$$

$$t \in (0, T), \quad T=\sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Здесь t_i — длительность i-го ненулевого интервала постоянства ускорения, n — их число (нечетное).

Представим c в виде $c=2\pi k+d$, где $k=0, 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant d < 2\pi$. Тогда интервалы t_i, их число n и время быстродействия T определяются следующими соотношениями

$$\begin{gathered} t_1=t_n=\tau/2-\alpha_k, \quad t_2=t_4=\ldots=t_{n-1}=2\alpha_k, \\ t_3=t_5=\ldots=t_{n-2}=2(\pi-\alpha_k), \quad n=2k+3, \qquad (7.2.33) \\ T=2\pi k+\tau, \quad \alpha_k \equiv \arcsin\left[(k+1)^{-1}(b+1)^{-1}\sin(\tau/2)\right], \end{gathered}$$

где τ — корень уравнения, аналогичного (6.2.35)

$$d=h_k(\tau, b). \qquad (7.2.34)$$

Здесь функции h_k определены равенствами (6.2.33), так что

$$d=\tau-2(1+b)(k+1)\alpha_k. \qquad (7.2.35)$$

В качестве τ берется единственный в интервале $[0, 2\pi)$ корень уравнения (7.2.34). Если $d=0$, т. е. $c=2\pi k$, то решение (7.2.32), (7.2.33) переходит в режим постоянного ускорения: $w(t)\equiv 1$, $T=c=2\pi k$, $n=1$.

Полный анализ решения (7.2.32)—(7.2.34) приведен в главе 6. Там же предложены и исследованы удобные для технической реализации квазиоптимальные режимы с заданным числом интервалов постоянства управления, например, с $n=3$. Даны оценки отличия квазиоптимальных режимов от оптимальных по времени движения T. Тем самым решение задачи 3 завершено.

§ 3. Оптимальный разгон при совместных ограничениях на скорость и ускорение

1. Условия выхода на ограничение по скорости. Рассмотрим более сложную задачу разгона при совместных ограничениях (7.1.2) (задача 4 из п. 1). В п. 4 § 2 установлено, что задача разгона при ограниченном ускорении точки подвеса (задача 3) эквивалентна задаче перемещения маятника на заданное расстояние при ограниченной скорости подвеса.

Рассмотрим условия, при которых оптимальное управление задачи 3 не выводит скорость v за пределы отрезка $[-\alpha, \beta]$ из (7.1.2). При этих условиях решение задач 3 и 4 совпадает. Используя формулу (6.2.44) и замену (7.2.31), приходим к выводу, что при $c \geqslant 2\pi$ скорость точки подвеса в задаче 3 удовлетворяет неравенству $0 \leqslant v(t) \leqslant c$. Если же $c < 2\pi$, то число участков $n = 3$ и соотношения (6.2.42) в обозначениях (7.2.31) примут вид

$$\min v(t) = \min (0,\ t_1 - bt_2),$$
$$\max_t v(t) = \max (c,\ t_1), \quad t \in [0, T]. \tag{7.3.1}$$

Здесь использованы формулы

$$c = t_1 - bt_2 + t_3, \quad t_1 = t_3,$$

вытекающие из (6.2.13), (7.2.33), (7.2.31) при $n = 3$. Пусть выполнены неравенства

$$t_1 - bt_2 \geqslant -\alpha, \quad t_1 \leqslant \beta. \tag{7.3.2}$$

Тогда, согласно (7.3.1), будут выполнены ограничения $v \in [-\alpha, \beta]$. Напомним, что $c \in [0, \beta]$.

Подставим в (7.3.2) выражения t_1, t_2 согласно (7.3.33) и выразим α_k при помощи равенства (7.2.35). Тогда неравенства (7.3.2) примут вид

$$\tau(c) \leqslant [2(1 + b)\beta - c]b^{-1} = \tau_*(c),$$
$$\tau(c) \leqslant [2(1 + b)\alpha + c(1 + 2b)]b^{-1} = \tau^*(c), \tag{7.3.3}$$

где зависимость $\tau(c)$ определена уравнением (7.2.35) при $k = 0$ и $d = c$. Наименьшую из двух величин (7.3.3) обозначим через

$$z(c) = \min(\tau_*(c),\ \tau^*(c)). \qquad (7.3.4)$$

При $z \geqslant 2\pi$ неравенства (7.3.3) будут выполнены, так как по определению $\tau(c) < 2\pi$ при $c < 2\pi$. При $z < 2\pi$, вычисляя монотонную по τ функцию $h_0(\tau, b)$ от обеих частей неравенств (7.3.3), получим

$$c \leqslant h_0(z, b) = z - 2(1+b)\arcsin[(1+b)^{-1}\sin(z/2)]. \quad (7.3.5)$$

Итак, если в задаче 4 выполнено условие $c \geqslant 2\pi$ или (7.3.5), то решение задач 3 и 4 совпадает. Оптимальное управление задается формулами (7.2.32)—(7.2.34).

Заметим, что неизвестное пока оптимальное управление, реализующее при $c < 2\pi$ выходы на фазовое ограничение, переводит систему (7.1.1) в заданное конечное положение за время $T < 2\pi$. Действительно, рассмотрим управление вида $w(t) = (2\pi)^{-1}c < 1$ на интервале $0 < t < T$. Этот режим заведомо не оптимален, однако удовлетворяет ограничениям (7.1.2) и переводит систему в заданное положение (7.1.4) за время $T = 2\pi$. Далее в п. п. 3—5 рассматриваются режимы управления с выходами на ограничение, которые соответствуют $c < 2\pi$ и переводят систему из начального положения в конечное (7.1.4) за время $T < 2\pi$.

2. Анализ условий оптимальности в задаче 4. Пусть $c < 2\pi$ и условие (7.3.5) нарушено. Тогда оптимальное управление выводит систему (7.1.1) на фазовое ограничение по скорости v. Воспользуемся результатами работ [176, 207, 56] и установим структуру оптимального управления в этом случае. Преобразуем неравенства (7.1.2) для скорости v к виду

$$g(v) = (v + \alpha)(v - \beta) \leqslant 0. \qquad (7.3.6)$$

Если траектория на некотором интервале лежит на границе области (7.3.6), то имеем $w = dv/dt = 0$. Пусть на некоторых интервалах времени $g(v) < 0$. Тогда функция Гамильтона H и сопряженные переменные для системы (7.1.1) определяются соотношениями

$$\begin{gathered} H = p_1\omega + p_2(w - \varphi) + p_3 w, \\ \dot p_1 = p_2,\ \dot p_2 = -p_1,\ \dot p_3 = 0\ (g(v) < 0). \end{gathered} \qquad (7.3.7)$$

Уравнение (7.1.1) для x опущено, так как $x(T)$ свободно. Система (7.1.1) автономна, ограничение (7.3.6) не зависит явно от времени t, фазовых координат φ, ω и управления w. Поэтому гамильтониан H и сопряженные переменные p_1, p_2 непрерывны на всем отрезке $t \in [0, T]$. Проинтегрируем первые два уравнения (7.3.7), которые справедливы на всем отрезке

$$p_1 = -A\cos(t+\theta), \quad p_2 = A\sin(t+\theta), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (7.3.8)$$

Здесь A, θ — константы интегрирования.

Введем функции

$$P(v, w) = w\,\partial g/\partial v = (2v + \alpha - \beta)w,$$
$$q(w) = (w-1)(w+b).$$

На участках оптимальной траектории, лежащих на границе области (7.3.6), выполняется условие [176]

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \lambda(t)\frac{\partial P}{\partial w} + \mu(t)\frac{\partial q}{\partial w}. \qquad (7.3.9)$$

Здесь функции $\lambda(t)$, $\mu(t)$ определяются как множители Лагранжа из условия максимума гамильтониана (7.3.7) при ограничениях $P = 0$, $q \leqslant 0$.

Выпишем уравнение для сопряженной переменной p_3 в случае, когда $v = -\alpha$ на некотором участке. Здесь $w = 0$ и управление w лежит внутри отрезка $[-b, 1]$, поэтому второе слагаемое в правой части (7.3.9) следует опустить. Отсюда

$$\begin{gathered}\frac{\partial H}{\partial w} = p_2 + p_3 = -\lambda(t)(\alpha+\beta) \quad (v = -\alpha,\ w = 0),\\ \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial v} + \lambda(t)\frac{\partial P}{\partial v} = 2\lambda(t)\,w.\end{gathered} \qquad (7.3.10)$$

Из (7.3.10) следуют равенства

$$p_3 = \mathrm{const}, \quad \dot{\lambda}(t)\,\mathrm{grad}\,g(v(t)) = (0,\ 0,\ \dot{p}_2). \qquad (7.3.11)$$

Аналогичные (7.3.11) соотношения получим для участков, где $v = \beta$.

Для экстремальности требуется, чтобы при $g(v) = 0$ вектор $(d\lambda/dt)\,\mathrm{grad}\,g$ был направлен внутрь области фазовых ограничений или обращался в нуль. В силу (7.3.11) это условие оптимальности означает, что

$$\dot{p}_2 \geqslant 0 \text{ при } v = -\alpha, \quad \dot{p}_2 \leqslant 0 \text{ при } v = \beta. \qquad (7.3.12)$$

Переменная p_3 в точках t_s^1 выхода и t_s^2 схода системы (7.1.1) с границы области (7.3.6) испытывает скачки

$$p_3(t_s^j + 0) - p_3(t_s^j - 0) = \nu_s^j; \quad \nu_s^j = \text{const}, \quad j = 1, 2. \qquad (7.3.13)$$

Оптимальное управление определяется равенствами

$$w(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } p_2(t) + p_3(t) > 0 \\ -b \text{ при } p_2(t) + p_3(t) < 0 \end{cases} \quad (g(v) < 0), \qquad (7.3.14)$$
$$w(t) = 0 \quad (g(v) = 0).$$

Здесь $p_2(t)$ определено соотношением (7.3.8), а p_3 — кусочно постоянная функция (см. (7.3.7), (7.3.11)), испытывающая скачки (7.3.13).

Обозначим моменты переключения управления w при $g(v) < 0$ через t_i^0. Тогда согласно (7.3.14), (7.3.8) будем иметь

$$A \sin(t_i^0 + \theta) + p_3 = 0. \qquad (7.3.15)$$

Условия непрерывности функции Гамильтона (7.3.7) и сопряженных переменных p_1, p_2 в момент t_s^1 выхода системы на ограничение $g(v) = 0$ дают

$$H(t_s^1 - 0) - H(t_s^1 + 0) = \\ = [p_2(t_s^1) + p_3(t_s^1 - 0)]\, w(t_s^1 - 0) = 0.$$

Здесь использовано равенство $w(t_s^1 + 0) = 0$, см. (7.3.14). Так как $w(t_s^1 - 0) \neq 0$, то равно нулю выражение, заключенное в квадратные скобки последней формулы. Аналогично рассматриваются моменты t_s^2 схода с ограничения. В результате получим

$$\begin{aligned} A \sin(t_s^1 + \theta) + p_3(t_s^1 - 0) &= 0, \\ A \sin(t_s^2 + \theta) + p_3(t_s^2 + 0) &= 0. \end{aligned} \qquad (7.3.16)$$

Приведенные выражения (7.3.12)—(7.3.16) позволяют установить ряд важных свойств оптимального управления, в частности, число выходов на ограничение.

Пусть n — число ненулевых интервалов времени, на которых управление $w(t)$ принимает крайние значения 1 либо $-b$. Рассмотрим функцию $p_2+p_3=A\sin(t+\theta)+p_3$ на участке траектории, лежащем в области $g(v)<0$. На нем $p_3=\mathrm{const}$, и функция p_2+p_3 обращается в нуль в моменты переключений t_i^0 (см. (7.3.15)), а также на границах t_1^s, t_s^2 (см. (7.3.16)). Между двумя соседними нулями этой функции заключен экстремум функции $A\sin(t+\theta)$. Число интервалов, на которых достигается этот экстремум, не меньше $n-2$, а соседние точки экстремума отстоят друг от друга на π. Отсюда получаем следующую оценку времени движения

$$T\geqslant(n-3)\pi. \tag{7.3.17}$$

Так как в рассматриваемом случае выхода на ограничение имеем $T<2\pi$ (см. п. 1), то из (7.3.17) имеем $n\leqslant 4$. Отсюда следует, что имеется не более трех участков выхода на ограничение $g(v)=0$. На участке траектории, лежащем в области $g(v)<0$, функция p_2+p_3 обращается в нуль не более двух раз, включая также границы участка. В противном случае было бы $T>2\pi$, так как три соседних нуля функции p_2+p_3 расположены на отрезке длиной не менее 2π. Следовательно, моментов переключений t_i^0 может быть не более двух, и они могут быть расположены только до первого выхода и после последнего схода с ограничения. Перебирая все возможности, получим 16 возможных типов функций $v(t)$ на интервале $[0, T]$, $T<2\pi$. На рис. 7.4 приведена структура восьми функций; остальные могут быть получены путем отображения $v\to -v$ и перестановки значений $w=1$, $w=-b$ и $v=-\alpha$, $v=\beta$. Заметим, что при $\alpha=0$ число допустимых функций $v(t)$ уменьшается до восьми, так как все режимы, полученные из рис. 7.4 путем указанного отображения, содержат в начале интервал покоя и поэтому не оптимальны.

В общем случае для значений α, β, b, $c<2\pi$, не удовлетворяющих (7.3.5), поиск оптимального управления заключается в следующем. Каждый из 16 типов управления, зависящий от параметров (моментов переключения t_i^0, выхода и схода с ограничений t_s^1, t_s^2) подставим в соотношения

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= \int_0^T \sin(T-\tau)\, w(\tau)\, d\tau = 0, \\ v(T) &= \int_0^T w(\tau)\, d\tau = c, \\ \omega(T) &= \int_0^T \cos(T-\tau)\, w(\tau)\, d\tau = 0, \end{aligned} \tag{7.3.18}$$

вытекающие из уравнений (7.1.1) и граничных условий (7.1.4). Затем определим режим и соответствующие

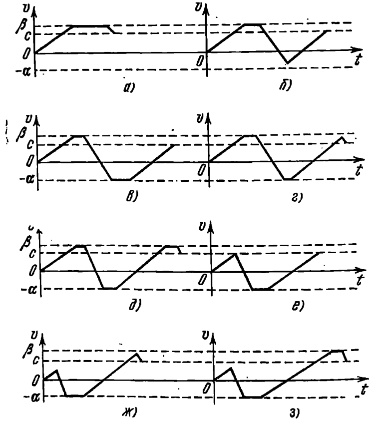


Рис. 7.4.

значения параметров, отвечающие наименьшему T. Ниже в п.п. 3—5 приведено решение задачи 4 для ряда важных случаев.

3. Решение задачи 4 при симметричном ограничении на ускорение и неотрицательной скорости. Рассмотрим задачу 4 при следующих ограничениях

$$-1 \leqslant w \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant \beta,\ \beta \geqslant c\ (\alpha = 0,\ b = 1). \quad (7.3.19)$$

Определим значения β, c, при которых система (7.1.1) не выходит на ограничения (7.3.19) по скорости при управлении (7.2.32)—(7.2.34). Для этого подставим значения $\alpha = 0$, $b = 1$ в (7.3.3), (7.3.4) и найдем $z = \min(4\beta - c, 3c)$. Но $\beta \geqslant c$, поэтому имеем $z = 3c$. Условие (7.3.5) при $z = 3c$ примет вид

$$c \geqslant 2 \arcsin [1/2 \sin (3c/2)]. \quad (7.3.20)$$

Очевидно, что для $c \geqslant \pi$ неравенство (7.3.20) будет выполнено. Если $c < \pi$, то соотношение (7.3.20) эквивалентно неравенству $\sin (c/2) \geqslant 1/2$, т. е. $c \geqslant \pi/3$. Следовательно, при $\beta \geqslant c \geqslant \pi/3$ не нарушается фазовое ограничение $0 \leqslant v \leqslant \beta$ из (7.3.19) для закона управления (7.2.32)—(7.2.34).

Отметим, что при $c = \pi/3$ из (7.2.32)—(7.2.34) получим $T = \pi$. Предположим (это оправдывается в дальнейшем), что оптимальный разгон до скорости $c < \pi/3$ можно осуществить за время $T < \pi$. Тогда, согласно оценке (7.3.17) имеем $n = 3$ и из восьми вариантов рис. 7.4 допустимы лишь четыре: *а*), *б*), *в*), *е*). Опуская выкладки, приведем окончательные результаты исследования: оптимальное управление, время $T < \pi$ и области значений параметров β, c, для которых реализуется каждый из типов управления.

Установлено, что режимы *а*), *б*) рис. 7.4 не позволяют разогнать систему (7.1.1) до заданной скорости $c < \pi/3$ с гашением колебаний за время $T < \pi$.

А. Если параметры β, c таковы, что одновременно выполняются неравенства

$$\beta \geqslant c \geqslant 2 \arcsin \{2 \sin^2 (\beta/2)\},\ c < \pi/3,$$

то оптимальное управление имеет вид (рис. 7.5, *а*)

$$w = 1, \quad t \in (0,\ t_1) \cup (t_4,\ T);$$
$$w = -1, \quad t \in (t_2,\ t_3);$$
$$w = 0, \quad t \in (t_1,\ t_2) \cup (t_3,\ t_4);$$

$$t_1 = \beta, \quad t_2 = 2\arcsin\left[\frac{\sin(c/2)}{2\sin(\beta/2)}\right], \quad t_3 = t_2 + \beta,$$

$$t_4 = {}^1/_2(\pi + \beta - c + t_2), \; T = {}^1/_2(\pi + c + \beta + t_2) < \pi.$$

Б. Если параметры β, c таковы, что одновременно

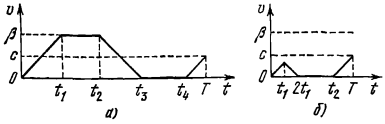


Рис. 7.5.

имеют место неравенства

$$\beta \geqslant c, \; c < \pi/3, \; c \leqslant 2\arcsin\{2\sin^2(\beta/2)\},$$

то оптимальное управление имеет вид (рис. 7.5, *б*)

$$w = 1, \quad t \in (0, t_1) \cup (t_2, T);$$

$$w = -1, \quad t \in (t_1, 2t_1);$$

$$w = 0, \quad t \in (2t_1, t_2);$$

$$t_1 = 2\arcsin\{{}^1/_2\sin(c/2)\}^{1/2}, \; t = {}^1/_2(\pi - c) + t_1,$$

$$T = {}^1/_2(\pi + c) + t_1 < \pi.$$

В. Если $\beta \geqslant c \geqslant \pi/3$, то оптимальный режим, как отмечалось выше, не выходит на ограничения и задается формулами (7.2.32)—(7.2.34) (рис. 7.6).

На рис. 7.7 указаны области в плоскости параметров β, c, соответствующие построенным режимам А—В.

Остановимся на некоторых предельных случаях. При $c = \beta < \pi/3$ имеем режим А с выходом на ограничения $v = 0$, $v = \beta$, а именно

$$t_1 = \beta, \quad t_2 = \pi/3, \quad t_3 = \pi/3 + \beta,$$
$$t_4 = 2\pi/3, \quad T = \beta + 2\pi/3. \tag{7.3.21}$$

Этот результат совпадает с ранее полученным решением в [171, 207] задачи о минимуме коэффициента динамичности. При $\beta \to 0$ время набора предельной скорости мало по сравнению с периодом колебаний. Решение

(7.3.21) поэтому переходит в оптимальный закон (7.2.15) разгона маятника при отсутствии ограничений на ускорение (обозначения в (7.2.15) и (7.3.21) различны).

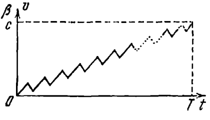


Рис. 7.6.

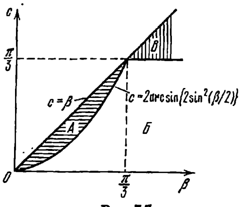


Рис. 7.7.

4. Случай неотрицательной скорости и произвольного ограничения на ускорение. Рассмотрим задачу 4 при ограничениях

$$0 \leqslant v \leqslant \beta, \quad -b \leqslant w \leqslant 1 \quad (\alpha = 0), \quad v(T) = c = \beta. \qquad (7.3.22)$$

Определим значения параметров β, b, при которых управление (7.2.32)—(7.2.34) выводит систему (7.1.1) за границу ограничений на скорость. Подставляя значения $\alpha = 0$, $c = \beta$ в соотношения (7.3.3)—(7.3.5), найдем

$$\begin{gathered} \tau_* = \tau^* = z = 2\beta + \beta/b, \\ \arcsin\left[(1+b)^{-1}\sin(\beta + \beta b^{-1}/2)\right] > \beta b^{-1}/2. \end{gathered} \qquad (7.3.23)$$

Равенство $\tau_* = \tau^*$ означает, что оптимальное управление или выводит систему как на верхнее, так и на нижнее ограничение по скорости, или вообще не выводит на ограничение.

Используя (7.3.23), выпишем необходимые (но не достаточные) условия, при которых управление (7.2.32)—(7.2.34) выводит систему за границу фазового ограничения

$$\beta + \beta b^{-1}/2 < \pi, \quad \beta b^{-1} < \pi. \qquad (7.3.24)$$

При выполнении условий (7.3.24) неравенство (7.3.23) может быть приведено к виду

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta(1+b)}{2b} > b\sin\frac{\beta}{2b}. \qquad (7.3.25)$$

Таким образом, если при заданных значениях β, b нарушается хотя бы одно из трех неравенств (7.3.24)—(7.3.25), то управление (7.2.32)—(7.2.34) не выводит систему (7.1.1) за границу фазовых ограничений и дает решение задачи 4.

Если же неравенства (7.3.24), (7.3.25) выполнены, то оптимальное управление имеет вид (рис. 7.8)

$$\blacksquare \quad w=1, \quad t\in(0,t_1)\cup(t_4,T);$$
$$w=-b, \quad t\in(t_2,t_3);$$
$$w=0, \quad t\in(t_1,t_2)\cup(t_3,t_4);$$
$$t_1=\beta, \quad t_2=\frac{T}{2}-\frac{\beta}{2b}, \quad t_3=\frac{T}{2}+\frac{\beta}{2b}, \quad t_4=T-\beta,$$
$$T=\beta+2\arccos\left[\frac{b}{2\sin(\beta/2)}\sin\frac{\beta}{2b}\right]. \quad \square \qquad (7.3.26)$$

В силу (7.2.25) аргумент arccos меньше единицы. Управление структуры (7.3.26) рассматривалось в [171, 207] в связи с минимизацией коэффициента динамичности. Используя режим разгона (7.3.26) и общие соотношения (7.1.6)—(7.1.9), легко рассчитать закон торможения. Интересно отметить, что в силу несимметричности ограничений на ускорение (7.3.22), режим разгона может иметь выходы на фазовое ограничение, а режим торможения их не иметь и наоборот.

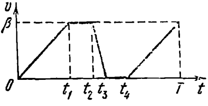


Рис. 7.8.

5. Решение задачи 4 при симметричных ограничениях на скорость и ускорение. Рассмотрим задачу разгона при следующих ограничениях на скорость и ускорение

$$-\beta\leqslant v\leqslant\beta, \ -1\leqslant w\leqslant 1 \ (\alpha=\beta, \ b=1),$$
$$v(T)=c=\beta. \qquad (7.3.27)$$

Из результатов п. 1 следует (см. (7.3.3)—(7.3.5)), что при $\beta\geqslant\pi/3$ значения скорости $v(t)$ лежат в отрезке $[0, \beta]$ при управлении (7.2.32)—(7.2.34). Соответствующее время $T\geqslant\pi$. Оптимальное управление в этом случае дается формулами (7.2.32)—(7.2.34). Отметим, что при $\beta=\pi/3$ скорость выходит на верхнюю границу фазового ограничения: $v(t)=\pi/3$ при $t=\pi/3$, а при $\beta>\pi/3$ выполнено $0<v<\beta$ для $t\in(0, T)$.

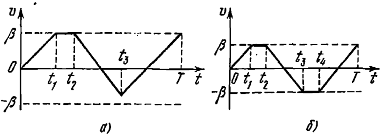


Рис. 7.9.

Перейдем к случаю $0\leqslant\beta<\pi/3$. Рассмотрим управление с одним интервалом выхода на верхнюю границу ограничения, см. рис. 7.9, *а* (при значениях β, достаточно близких к $\pi/3$, нижняя граница не достигается)

$$\begin{aligned} &w=1, && t\in(0, t_1)\cup(t_3, T);\\ &w=0, && t\in(t_1, t_2), \qquad (7.3.28)\\ &w=-1, && t\in(t_2, t_3). \end{aligned}$$

В силу структуры управления t_1, t_2, t_3 должны быть связаны соотношениями (рис. 7.9, *а*)

$$t_1=\beta,\ t_3-t_2=T-t_3,\ T-t_2=2(T-t_3). \qquad (7.3.29)$$

Подставим управление (7.3.28) в соотношения (7.3.18) и проинтегрируем их. Получим

$$\cos(T-t_1)-\cos T-2\cos(T-t_3)+\cos(T-t_2)+1=0,$$
$$\sin(T-t_1)-\sin T-2\sin(T-t_3)+\sin(T-t_2)=0.$$

Разрешим эту систему, воспользовавшись соотношениями (7.3.29)

$$\begin{aligned} &t_1=\beta,\ t_2=\beta/2+\arcsin[1-\sin(\beta/2)],\\ &t_3=(\pi-\beta)/2, \qquad (7.3.30)\\ &T=\pi+\beta/2-\arcsin[1-\sin(\beta/2)]. \end{aligned}$$

Отметим, что $T<\pi$ при $0\leqslant\beta<\pi/3$. Укажем нижнюю границу параметра β, при котором не достигается нижнее ограничение: $v(t)>-\beta$ на $[0, T]$. Последнее неравенство выполнено, если $T-t_3<2\beta$. Нетрудно показать, используя (7.3.30), что равенство $T-t_3=2\beta$ эквивалентно уравнению

$$\cos 2\beta = 1-\sin {}^1/_2\beta, \quad \beta^0=0{,}2548 \tag{7.3.31}$$

корень которого β^0 определяет искомую границу. При $\beta\in[\beta^0, \pi/3]$ управление (7.3.28), (7.3.30) не нарушает ограничений.

Если $\beta<\beta^0$, то оптимальное управление выводит скорость также и на нижнюю границу $v=-\beta$. Рассмотрим управление с участками выхода скорости на обе границы (рис. 7.9, *б*)

$$\begin{aligned} &w=1, && t\in(0,\ t_1)\cup(t_4,\ T);\\ &w=-1, && t\in(t_2,\ t_3),\\ &w=0, && t\in(t_1,\ t_2)\cup(t_3,\ t_4). \end{aligned} \tag{7.3.32}$$

В силу структуры управления должны быть выполнены соотношения

$$t_1=\beta, \quad t_3-t_2=T-t_4=2\beta. \tag{7.3.33}$$

Подставляя управление (7.3.32) в соотношения (7.3.18), получим аналогично (7.3.30)

$$\begin{gathered} t_1=\beta, \quad t_2=\beta+x,\\ t_3=3\beta+x, \quad t_4=\beta+x+2\arcsin y,\\ x=\arccos y-3/2\beta, \quad y=[4\cos(\beta/2)]^{-1},\\ T=(\pi+3\beta)/2+\arcsin y. \end{gathered} \tag{7.3.34}$$

Можно показать [197], что найденные режимы являются оптимальными в соответствующих интервалах изменения β: управление (7.3.28), (7.3.30) при $\beta\in[\beta^0, \pi/3]$, а управление (7.3.32), (7.3.34) при $(0,\ \beta^0)$. Минимальное значение T достигается при $\beta=0$ и равно $\arccos(-1/4)$. При $\beta\to0$ режим (7.3.32), (7.3.34) переходит в разгон без ограничений на ускорение (7.2.14).

6. Решение задачи 5 (случай разгона). Переходим к решению задачи 5, поставленной в п. 1 § 1, в которой ограничения на скорость и ускорение имеют вид (7.1.3) (рис. 7.1, *б*). В механических системах подобная (7.1.3) зависимость ограничения на ускорение от знака скорости может быть обусловлена, например, силами трения.

При $b=1$ ограничения (7.1.3) совпадают с (7.1.2), для этого случая задача 5 решена в п. 5. Выясним структуру управления при $0<b<\infty$. Если выполнено условие $\beta\geqslant 2\pi$ или неравенство, обратное (7.3.23)

$$\arcsin[(1+b)^{-1}\sin(\beta+\beta b^{-1}/2)]\leqslant \beta b^{-1}/2, \quad (7.3.35)$$

то согласно п.п. 1, 4 управление (7.2.32)—(7.2.34) не выводит величину скорости $v(t)$ за пределы отрезка $[0, \beta]$ и тем самым решает задачу 5. Если $\beta<2\pi$ и имеет место неравенство (7.3.23), то согласно п. 4 оптимальное управление выводит скорость в область $v<0$. При этом, как показано в п. 1, должно быть $T<2\pi$.

Будем предполагать, что при значениях параметров β, b, удовлетворяющих (7.3.23), оптимальная скорость имеет участки выхода на верхнее фазовое ограничение $v=\beta$. Это предположение обусловлено следующими соображениями: указанным свойством обладают рассмотренные в пп. 4, 5 оптимальные режимы; найденное при этом предположении управление имеет моменты переключений, непрерывно зависящие от β, и при $\beta\to 0$ это управление переходит в оптимальный режим (7.2.14).

Отметим, что за счет линейного преобразования управления w (коэффициенты преобразования зависят от знака v) область ограничений (7.1.3) можно свести к прямоугольнику (7.1.2). Правые части системы после преобразования будут иметь разрыв при $v=0$. Поэтому ниже используется принцип максимума для систем с фазовыми ограничениями и с разрывными правыми частями [176].

На участке оптимальной траектории, лежащем в области $-\beta<v<\beta$, из условия максимума функции Гамильтона (7.3.7) получаем

$$w(t)=\begin{cases}1 & \text{при } p_2(t)+p_3(t)>0,\\ -b & \text{при } p_2(t)+p_3(t)<0\end{cases} \quad (0<v<\beta) \quad (7.3.36)$$

$$w(t)=\begin{cases}-1 & \text{при } p_2(t)+p_3(t)<0,\\ b & \text{при } p_2(t)+p_3(t)>0\end{cases} \quad (-\beta<v<0)$$

$$w(t)=0 \quad \text{при} \quad |v(t)|=\beta.$$

На основании (7.3.7) p_3 — кусочно постоянная функция. Она имеет разрывы в точках выхода и схода с ограничения $|v| = \beta$, а также в точках изменения знака v.

Обозначим через t_1, t_3 моменты выхода скорости на фазовые ограничения $v = \beta$ и $v = -\beta$, а через t_2, t_4 — моменты схода с этих ограничений. Если ограничение $v = -\beta$ не достигается, то через t_3 обозначим первый момент, когда v минимально, и положим $t_4 = t_3$. Покажем, что на отрезке $[t_2, t_3]$ скорость монотонно убывает. Допустим, что это не так и обозначим через t_1^0, t_2^0 моменты, в которые ускорение на отрезке $[t_2, t_3]$ меняет знак с минуса на плюс и обратно. Тогда в точках t_2, t_1^0, t_2^0, t_3 имеем $p_2 + p_3 = 0$ согласно (7.3.16), (7.3.36). При $t \in (t_2, t_1^0) \cup \cup (t_2^0, t_3)$ в силу (7.3.36) выполнено $p_2 + p_3 < 0$, а при $t \in (t_1^0, t_2^0)$ имеет место противоположное неравенство. Учитывая также $dp_3/dt = 0$, имеем

$$\operatorname{sign} \dot{p}_2(t_2) = -\operatorname{sign} \dot{p}_2(t_1^0) = \\ = \operatorname{sign} \dot{p}_2(t_2^0) = -\operatorname{sign} \dot{p}_2(t_3) = -1.$$

Отсюда следует, что на отрезках $[t_2, t_1^0]$, $[t_1^0, t_2^0]$, $[t_2^0, t_3]$ функция $p_2(t)$ имеет экстремум. Но расстояние между экстремальными точками этой функции (см. (7.3.8)) равно π. Следовательно, $t_3 - t_2 \geqslant 2\pi$, что противоречит условию $T < 2\pi$. Совершенно аналогично доказывается, что на отрезках $[0, t_1]$, $[t_4, T]$ скорость монотонно возрастает.

Таким образом, на интервалах $(0, t_1)$ и (t_4, T) скорость монотонно возрастает, на интервале (t_2, t_3) — монотонно убывает, а на (t_1, t_2) и (t_3, t_4) — лежит на ограничениях $v = \beta$ и $v = -\beta$ (последний интервал может отсутствовать).

Проведем расчет управления в предельном случае $b = \infty$, отвечающем возможности мгновенного торможения. Условие (7.3.35) при $b \to \infty$ эквивалентно неравенству $2 \sin \beta \leqslant \beta$. Отсюда получаем, что при $\beta \geqslant \beta^* \approx 1{,}8953$ всегда $v(t) \in [0, \beta]$, и оптимальное управление имеет вид (7.2.32)—(7.2.34). Выполняя в (7.2.32)—(7.2.34) предельный переход при $b \to \infty$, получим

$$w(t) = 1 - 2(k+1)^{-1} \sin(\tau/2) \sum_{i=0}^{k} \delta(t - \tau/2 - 2\pi i),$$

$$\beta = 2\pi k + d, \quad T = 2\pi k + \tau, \quad d = \tau - 2\sin(\tau/2).$$

Перейдем к случаю $\beta < \beta^*$, когда оптимальная скорость выходит на ограничение. Рассмотрим сначала управление с выходом скорости только на ограничение $v = \beta$ (рис. 7.10, *а*).

$$\begin{aligned} &w = -\beta\delta(t-t_2) + (t_4-t_2)\delta(t-t_4) + w'; \\ &w' = 1, \quad t \in (0,\ t_1) \cup (t_4,\ T); \\ &w' = 0, \quad t \in (t_1,\ t_2); \\ &w' = -1, \quad t \in (t_2,\ t_4). \end{aligned} \tag{7.3.37}$$

Проинтегрируем соотношения (7.3.18) с управлением (7.3.37). Учитывая граничные условия (7.1.4), а также

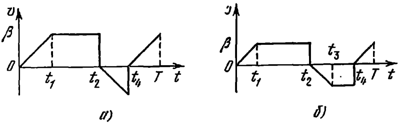


Рис. 7.10.

равенства $c = \beta$, $t_1 = \beta$, $T = t_4 + \beta$, получаем систему уравнений относительно t_2, t_4

■ $$\begin{aligned} &\cos t_4 - \cos(t_4+\beta) - \beta\sin(t_4-t_2+\beta) + \\ &\qquad + \cos(t_4-t_2+\beta) = 2\cos\beta - (t_4-t_2)\sin\beta - 1, \\ &\sin t_4 - \sin(t_4+\beta) + \beta\cos(t_4-t_2+\beta) + \\ &\qquad + \sin(t_4-t_2+\beta) = 2\sin\beta + (t_4-t_2)\cos\beta. \quad \square \end{aligned} \tag{7.3.38}$$

Результаты численного решения этой системы в зависимости от параметра β приведены на рис. 7.11, здесь $\beta \in (\beta_1,\ \beta^*)$, $\beta_1 \approx 0{,}5068$.

При $\beta < \beta_1$ оптимальная скорость выходит также и на нижнее ограничение (рис. 7.10, *б*). Соответствующее управление имеет вид

■ $$\begin{aligned} &w = -\beta\delta(t-t_2) + \beta\delta(t-t_4) + w'; \\ &w' = 1, \quad t \in (0,\ t_1) \cup (t_4,\ T); \\ &w' = 0, \quad t \in (t_1,\ t_2) \cup (t_3,\ t_4); \end{aligned}$$

$$w' = -1,\ t \in (t_2,\ t_3);$$
$$t_1 = t_3 - t_2 = T - t_4 = \beta. \qquad \square \quad (7.3.39)$$

Подставим управление (7.3.39) в (7.3.18) и разрешим относительно t_2, t_4 соответствующую систему, аналогичную (7.3.38). Результаты численного решения приведены на рис. 7.11.

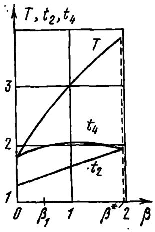


Рис. 7.11.

7. Решение задачи 5 (случай торможения). Перейдем к задаче оптимального торможения для $b = \infty$. Эту задачу следует решать отдельно, так как ее решение не получается из приведенного в п. 6 решения задачи разгона заменой (7.1.6)—(7.1.9).

Итак, необходимо за минимальное время перевести маятник из состояния поступательного движения со скоростью $v = \beta$ в состояние покоя (7.1.5) при ограничениях (7.1.3), где $b = \infty$.

Легко видеть, что заведомо не оптимальное управление $w = -\beta[\delta(t) + \delta(t - \pi)]/2$ решает задачу торможения за время π при любом β. Следовательно, оптимальное время торможения меньше π. Пусть для всех $t \in [0, T]$ имеем $v \in [0,\ \beta]$. Из условий оптимальности (7.3.14), (7.3.15) в задаче без фазовых ограничений следует, что на отрезке $[0,\ T]$, $T < 2\pi$, управление w имеет не более трех участков постоянства при любом b. В предельном случае при $b \to \infty$ участки, соответствующие $w = -b$, стягиваются в точки, в которых скорость изменяется скачком. Поэтому при $b \to \infty$ на $[0,\ T]$ имеем не более двух скачков скорости. Можно показать, что эти скачки должны быть расположены на границах отрезка $[0,\ T]$, т. е. искомое управление имеет вид

$$w = 1 - h_1\delta(t) - h_2\delta(t - T) \quad (h_1,\ h_2 = \text{const}). \quad (7.3.40)$$

Здесь в силу условий $v(0) = \beta$, $v(T) = 0$ выполнено $h_1 + h_2 = T + \beta$. Подставляя это управление в (7.3.18) и разрешая полученную систему относительно h_1, h_2, T, находим

$$\beta = 2\operatorname{tg}\frac{T}{2} - T, \quad h_1 = h_2 = \operatorname{tg}\frac{T}{2}. \qquad (7.3.41)$$

Первое уравнение (7.3.41) однозначно определяет T как функцию β. Для того, чтобы $v(t) \in [0, \beta]$, достаточно выполнения неравенства $h_1 \leqslant \beta$ или, что то же самое, $T \leqslant \beta$. Объединяя последнее неравенство и первое урав-

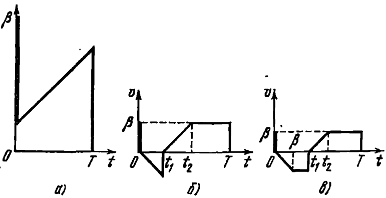


Рис. 7.12.

нение (7.3.41), правая часть которого на $[0, \pi)$ есть монотонно возрастающая функция T, получим, что при $\beta > \beta_2$, где $\beta_2 \approx 2{,}3311$, управление (7.3.40), (7.3.41) удовлетворяет ограничениям $0 \leqslant v \leqslant \beta$ и решает поставленную задачу торможения (рис. 7.12, *а*).

При $\beta_3 < \beta < \beta_2$, $\beta \approx 0{,}5125$, оптимальным является режим торможения с одним выходом скорости на верхнее фазовое ограничение (рис. 7.12, *б*)

$$
\begin{aligned}
&w = -\beta\delta(t) + t_1\delta(t - t_1) - \beta\delta(t - T) + w';\\
&w' = -1, \quad t \in (0, t_1);\\
&w' = 1, \quad t \in (t_1, t_2);\\
&w' = 0, \quad t \in (t_2, T) \quad t_1 = t_2 - \beta.
\end{aligned} \tag{7.3.42}
$$

При $0 < \beta < \beta_2$ оптимальным является режим торможения с двумя выходами скорости на ограничения (рис. 7.12, *в*)

$$
\begin{aligned}
&w = -\beta\delta(t) + \beta\delta(t - t_1) - \beta\delta(t - T) + w';\\
&w' = -1, \; t \in (0, \beta);\\
&w' = 1, \quad t \in (t_1, t_2);\\
&w' = 0, \quad t \in (\beta, t_1) \cup (t_2, T); \; t_1 = t_2 - \beta.
\end{aligned} \tag{7.3.43}
$$

Точка переключения t_2 и время T в соотношениях (7.3.42), (7.3.43) определялись численно, как корни сис-

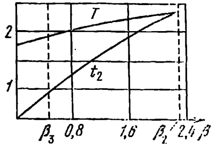


Рис. 7.13.

тем, составленных аналогично (7.3.38). Результаты приведены на рис. 7.13.

§ 4. Разгон маятника переменной длины

1. Постановка задач разгона и торможения. Перейдем к рассмотрению математического маятника с переменной длиной подвеса, который является механической моделью многих грузоподъемных машин. Управление движением осуществляется двумя двигателями: один из них, как и прежде, перемещает точку подвеса P по горизонтальной направляющей, а второй поднимает или опускает груз (см. рис. 6.1). Примем, что длина маятника L изменяется по линейному закону

$$L(t) = L_0 \pm ut, \quad u_0 \geqslant 0, \tag{7.4.1}$$

где L_0 — начальная длина, u_0 — постоянная скорость подъема (знак «−») или опускания (знак «+») груза. Уравнение движения системы в случае малых колебаний имеет вид

$$L\ddot{\varphi} + 2\dot{L}\dot{\varphi} + g\varphi = \dot{v}, \qquad 0 \leqslant v \leqslant v_0, \tag{7.4.2}$$

где φ — угол отклонения маятника, v — скорость точки подвеса, v_0 — постоянная.

Рассмотрим задачи разгона и торможения системы (7.4.1), (7.4.2) с гашением ее колебаний при управлении скоростью точки подвеса.

В задаче разгона требуется построить управление $v(t)$, удовлетворяющее ограничениям (7.4.2) и переводящее систему из состояния покоя при $t=0$ в состояние движения со скоростью v_0 без колебаний. Краевые условия имеют вид

$$\varphi(0)=\dot\varphi(0)=v(0),\quad \varphi(T)=\dot\varphi(T)=0,\quad v(T)=v_0. \tag{7.4.3}$$

В задаче торможения начальный и конечный моменты времени 0, T в (7.4.3) следует поменять местами.

Введем параметр u и безразмерные переменные

$$\begin{gathered}\varphi'=(L_0g)^{1/2}v_0^{-1}\varphi,\quad t'=g^{1/2}L_0^{-1/2}t,\quad v'=v/v_0,\\ u=u_0(L_0g)^{-1/2},\quad T'=g^{1/2}L_0^{-1/2}T\end{gathered} \tag{7.4.4}$$

и сделаем замену (7.4.4) в соотношениях (7.4.1)—(7.4.3). Опуская штрихи, получим для задачи разгона

$$\begin{gathered}(1\pm ut)\ddot\varphi\pm 2u\dot\varphi+\varphi=\dot v,\quad 0\leqslant v\leqslant 1,\\ \varphi(0)=\dot\varphi(0)=v(0)=\varphi(T)=\dot\varphi(T)=0,\quad v(T)=1.\end{gathered} \tag{7.4.5}$$

В задаче торможения нужно поменять местами 0 и T в краевых условиях (7.4.5).

Ниже будут построены режимы разгона и торможения в случаях подъема и опускания груза. Оптимальность этих режимов не проверяется, однако построенные режимы обладают минимально возможным числом точек переключения и переходят в оптимальные по быстродействию ($T\to\min$) в случае маятника постоянной длины ($u=0$).

2. Построение режимов разгона и торможения. Оптимальный разгон маятника постоянной длины ($u=0$) с ограничением (7.4.5) построен в п. 2 § 2 и состоит из двух участков постоянства скорости. При $u\neq 0$ управление в задаче разгона будем искать в аналогичном виде, а именно

$$v(t)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 0<t<t_*,\quad t\geqslant T,\\ 0 & \text{при}\quad t_*<t<T.\end{cases} \tag{7.4.6}$$

Здесь t_* — постоянная. Сначала построим разгон при опускании груза (знак «+» в (7.4.5)). Уравнение (7.4.5) интегрируется в бесселевых функциях на интервалах $[0,\ t_*)$ и $(t_*,\ T]$. Сопрягая эти решения в точке $t=t_*$ и удовлетворяя граничным условиям (7.4.5) с учетом соотношений (7.4.6), получим всего шесть условий для четырех постоянных интегрирования (на двух интервалах) и для двух параметров t_*, T. После преобразований эти условия приводятся к системе двух трансцендентных уравнений относительно параметров p, q

$$\begin{gathered}[J_1(r)N_0(p) - N_1(r)J_0(p)]R(q) + R(q)R(r) = \\ = [N_1(q)J_0(p) - J_1(q)N_0(p)]R(r), \\ [N_1(r)J_1(p) - J_1(r)N_1(p)]R(q) = \\ = [N_1(p)J_1(q) - N_1(q)J_1(p)]R(r). \quad \square \qquad (7.4.7)\end{gathered}$$

Здесь введены обозначения

$$R(s) = J_0(s)N_1(s) - J_1(s)N_0(s),$$
$$r = 2/u, \quad p = 2\sqrt{1+ut_*}/u, \quad q = 2\sqrt{1+uT}/u, \qquad (7.4.8)$$

а J_0, J_1 и N_0, N_1 — функции Бесселя и Неймана соответствующих порядков. Значения T и t_* в зависимости от u находились численно на ЭВМ путем решения системы (7.4.7) относительно параметров p, q. При этом отбирались корни, соответствующие наименьшему T.

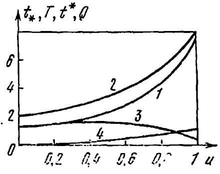


Рис. 7.14.

На рис. 7.14 представлены результаты расчетов — графики зависимостей $t_*(u)$ (кривая 1), $T(u)$ (кривая 2) и $t^*(u) = T(u) - t_*(u)$ (кривая 3). При $u = 0$ в соответствии с (7.2.15) имеем $t_* = t^* = \pi/3$, $T = 2\pi/3$.

Построим режим торможения при опускании груза. Сделаем в соотношениях (7.4.5) замену $v \to 1 - v$, $\varphi \to -\varphi$. Уравнение и ограничения при этом не изменятся, а краевые условия (7.4.5), соответствующие разгону, перейдут в краевые условия для торможения. Поэтому режим торможения получим из (7.4.6), если поменять местами 0 и 1, а именно

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 < t < t_*, \\ 1 & \text{при} \quad t_* < t < T, \end{cases} \quad t \geqslant T. \qquad (7.4.9)$$

Зависимости $t_*(u)$ и $T(u)$ — те же, что и в задаче разгона (см. рис. 7.14).

Обратимся к построению разгона и торможения маятника в случае подъема груза (знак «—» в (7.4.5)). Выполним в уравнении (7.4.5) линейную замену переменных $t = -A_1 t_1 + A_2$, $\varphi = A_3 \varphi_1$, $v = 1 - v_1$. Подберем постоянные A_1, A_2, A_3 так, чтобы уравнение (7.4.5) со знаком «—» в исходных переменных перешло в уравнение (7.4.5) со знаком «+» в новых переменных t_1, φ_1, v_1. Оказывается, что этого можно добиться, если замену переменных осуществить по формулам

$$t = -\frac{ut_1}{u_1} + \frac{u_1^2 - u^2}{u_1^2 u^2}, \quad \varphi = \frac{u_1 \varphi_1}{u}, \quad v = 1 - v_1. \tag{7.4.10}$$

Здесь u — заданное значение параметра (7.4.4), u_1 — соответствующий параметр уравнения (7.4.5) со знаком «+» после преобразования (7.4.10).

Чтобы граничные условия (7.4.5) не нарушались при замене (7.4.10), потребуем взаимного соответствия моментов времени

$$t = 0 \Leftrightarrow t_1 = T(u_1), \quad t = T'(u) \Leftrightarrow t_1 = 0. \tag{7.4.11}$$

Здесь $T(u_1)$ — время разгона при опускании груза для параметра u_1 (рис. 7.14), а $T'(u)$ — искомое время разгона при подъеме груза для параметра u. Из соотношений (7.4.10), (7.4.11) получим условия

$$Q(u_1) \equiv \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_1 T(u_1)}} = u, \quad T'(u) = \frac{u_1^2 - u^2}{u_1^2 u} = \frac{u}{u_1} T(u_1). \tag{7.4.12}$$

Первое равенство (7.4.12) служит для определения параметра u_1 по заданному u. На рис. 7.14 построен график $Q(u)$ (кривая 4). Эта зависимость монотонна, поэтому уравнение $Q(u_1) = u$ в (7.4.12) определяет единственное $u_1 > 0$.

Второе соотношение (7.4.12) выражает время разгона $T'(u)$ при подъеме груза. Таким образом, расчет режима разгона сведен к рассчитанному выше разгону при опускании груза, задаваемому формулами (7.4.6) — (7.4.8) и кривыми рис. 7.14. При этом по заданному u нужно определить u_1. Пересчет осуществляется по формулам (7.4.10) — (7.4.12) и рис. 7.14. Торможение при подъеме груза рассчитывается аналогично режиму торможения (7.4.9) при опускании груза.

ГЛАВА 8

НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

В данной главе рассмотрен ряд прикладных задач управления и оптимизации для механических колебательных систем.

В §§ 1—3 исследуются управляемые колебательные системы маятникового типа; этот материал по своему содержанию примыкает к главам 6, 7. В § 1 построены способы перемещения маятника с переменной длиной подвеса в вертикальной плоскости. В качестве составных элементов движения используются оптимальные и квазиоптимальные режимы перемещения, найденные в главе 6, и режимы разгона и торможения из главы 7. Построенные способы управления позволяют путем совмещения вертикального и горизонтального движений переместить качающийся груз из одного состояния покоя в другое. § 2 посвящен вопросам управления грузоподъемными машинами. Здесь обсуждаются механические модели таких машин и постановки задач оптимального управления. Отмечено, что режимы, построенные в главах 6, 7 и в § 1 главы 8, могут быть использованы для автоматизации управления грузоподъемных машин с целью сокращения времени их рабочего цикла. Помимо задач быстродействия, представляют интерес также задачи минимизации энергетических потерь в электродвигателе. Дано решение таких задач в случае перемещения и разгона груза. В § 3 исследуются некоторые вопросы управления системой нескольких маятников путем перемещения тела, несущего их точки подвеса.

§§ 4—5 посвящены задачам оптимальной амортизации колебательных систем. В § 4 приведен краткий обзор проблем оптимального выбора параметров амортизационных систем и дано решение некоторых характерных задач этого класса в случае ударных воздействий. В § 5 исследуется задача оптимальной амортизации роторной системы в процессе ее раскрутки. В отличие от § 4, нараметры системы (жесткость амортизации) могут изменяться в процессе движения. Указаны оптимальные законы изменения параметров, позволяющие снизить нежелательные резонансные эффекты.

Отметим, что много задач управления колебательными системами возникает в области динамики и управления роботами и манипуляторами. Эта проблематика, представляющая собой быстро развивающуюся самостоятельную сферу исследований, в данной книге не затрагивается (см., например, [161—163, 178, 41, 42, 61, 127, 128]).

§ 1. Перемещение маятника переменной длины в вертикальной плоскости

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о перемещении маятника переменной длины в вертикальной плоскости из одного состояния покоя в другое. Эта задача важна в связи с управлением грузоподъемными машинами типа мостовых или козловых кранов и перегружателей. Изложение следует работе [141].

Математический маятник (рис. 6.1) может перемещаться вдоль горизонтальной оси x со скоростью $v(t)$, а его длина $L(t)$ — изменяться со скоростью $u(t)$.

Требуется переместить маятник на заданное расстояние и высоту из состояния покоя в состояние покоя. Горизонтальное перемещение должно равняться a, а начальная и конечная длины подвеса равны соответственно L_0 и L_1. Граничные условия в обозначениях глав 6, 7 запишутся в виде

$$\begin{gathered} x(0) = v(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0, \quad L(0) = L_0, \\ x(T) = a, \quad v(T) = \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0, \quad L(T) = L_1. \end{gathered} \tag{8.1.1}$$

Без ограничения общности будем считать, что маятник опускается: $L_1 \geqslant L_0$. В противном случае можно обратить время и поменять местами начальную и конечную точки. Кроме того, за счет выбора направления оси x можно считать, что $a \geqslant 0$. На управляющие функции $u(t)$ и $v(t)$ наложены ограничения

$$0 \leqslant u(t) \leqslant u_0, \quad 0 \leqslant v(t) \leqslant v_0, \tag{8.1.2}$$

где u_0 и v_0 — заданные постоянные.

Задача состоит в отыскании управляющих функций u и v, удовлетворяющих ограничениям (8.1.2) и реализующих для рассматриваемой системы граничные условия (8.1.1). Длительность процесса T должна быть равна или близка к времени оптимального быстродействия. Поставленная задача практически важна в связи с управлением грузоподъемными машинами.

Введем безразмерные константы d, h, c и перейдем к безразмерным (штрихованным) переменным x', φ', L', t', u', v' по формулам

$$\blacksquare \quad x' = x(v_0T_*)^{-1}, \quad \varphi' = \varphi\sqrt{L_1g}/v_0, \quad L' = L/L_1,$$
$$t' = t/T_*, \quad T_* = \sqrt{L_1/g}, \quad T' = T/T_*,$$
$$v' = v/v_0, \quad u' = u/\sqrt{L_1g}, \tag{8.1.3}$$
$$d = a(v_0T_*)^{-1}, \quad h = L_0/L_1, \quad c = u_0/\sqrt{L_1g}. \quad \square$$

Далее предполагается, что $L_1 > 0$. Если же $L_1 = 0$, то $L_0 \leqslant L_1 = 0$ и решение задачи оптимального быстродействия очевидно: маятник имеет нулевую длину и перемещается с максимальной скоростью v_0 вдоль оси x.

В переменных (8.3.1) (далее штрихи всюду опущены) уравнения движения в случае малых колебаний и соотношения (8.1.1), (8.1.2) примут вид

$$\blacksquare \quad L\ddot{\varphi} + 2\dot{L}\dot{\varphi} + \varphi = \ddot{x}, \quad \dot{x} = v, \quad \dot{L} = u,$$
$$x(0) = \dot{x}(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0,$$
$$L(0) = h \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant c,$$
$$x(T) = d, \quad \dot{x}(T) = \varphi(T) = \dot{\varphi}(T) = 0,$$
$$L(T) = 1, \; 0 \leqslant v \leqslant 1. \quad \square \tag{8.1.4}$$

Соотношения (8.1.4) содержат три постоянных параметра d, h, c, которые связаны с исходными константами формулами (8.1.3).

Точное аналитическое решение задачи оптимального быстродействия ($T \to \min$) представляет значительные трудности в силу нелинейности системы уравнений (8.1.4) и ее сравнительно высокой размерности. Реализация на практике законов управления, которые могут быть рассчитаны на ЭВМ, также будет представлять известные трудности. Оптимальные управления будут содержать много точек переключения и, кроме того, зависеть от трех параметров d, h, c. Поэтому ниже предлагаются некоторые достаточно простые (квазиоптимальные) способы управления с небольшим числом переключений, удовлетворяющие (8.1.4). Эти управления построены на основе сочетания оптимальных законов, найденных в главах 6,7 для более простых случаев постоянной длины маятника. Здесь предполагается (см. (8.1.4)), что скорость подвеса ограничена и может изменяться практически мгновенно. Аналогично при других ограничениях могут быть использованы другие режимы глав 6, 7, в частности, при совместных ограничениях на скорость и ускорение — результаты § 3 главы 7.

2. Простейшие типы движения. Укажем те простейшие движения, из которых будет составлено решение исходной задачи управления. Время t всюду отсчитывается от начала соответствующего режима.

A. Опускание груза с максимальной скоростью при отсутствии колебаний и перемещения точки подвеса:

$$\varphi = 0, \quad x = \text{const}, \quad u = c.$$

B. Оптимальный по быстродействию разгон маятника из состояния покоя до поступательного движения при постоянной длине подвеса $L = \text{const}$. В момент окончания разгона накладываются условия $\varphi(T_B) = \dot{\varphi}(T_B) = 0$, $v(T_B) = 1$. Это движение согласно (7.2.15) имеет вид

$$v(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < t < {}^1/_2\, T_B, & T_B = {}^2/_3 \pi \sqrt{L}, \\ 0 \text{ при } {}^1/_2 T_B < t < T_B, & v(T_B) = 1. \end{cases} \tag{8.1.5}$$

C. Оптимальное по быстродействию торможение (до покоя) поступательно движущегося маятника при постоянной длине подвеса. Этот режим аналогичен B и задается в виде

$$v(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < t < {}^1/_2 T_B, & T_B = {}^2/_3 \pi \sqrt{L}, \\ 1 \text{ при } {}^1/_2 T_B < t < T_B, & v(T_B) = 0. \end{cases} \tag{8.1.6}$$

D. Горизонтальное перемещение системы без колебаний с опусканием груза $\varphi = 0$, $v = \text{const}$, $u = u(t)$, $0 \leqslant v \leqslant$

$\leqslant 1$. Здесь скорость $u(t)$ может быть произвольной функцией $(0 \leqslant u \leqslant c)$.

E. Оптимальное по быстродействию перемещение груза из точки в точку при постоянной длине подвеса ($L = \mathrm{const}$). Это движение состоит из $2k+3$ участков постоянства скорости и имеет вид (см. формулы (6.2.11), (6.2.31), (6.2.32), где надо положить $u=1$, $\gamma=0$)

$$v(t) = 1 \text{ при } \sum_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum_{j=1}^{i} t_j, \quad i = 1, 3, \ldots, 2k+3,$$

$$v(t) = 0 \text{ при } \sum_{j=1}^{i-1} t_j < t < \sum_{j=1}^{i} t_j, \quad i = 2, 4, \ldots, 2k+2,$$

$$v(0) = v(T_E) = 0.$$

Целое число k и длины интервалов t_j в принятых обозначениях определяются формулами

$$k(b) = \left[\frac{b}{2\pi}\right], \quad b = \frac{d}{\sqrt{L}}, \quad \alpha_k(\tau) = \arcsin\left\{\frac{\sin(\tau/2)}{k+1}\right\},$$

$$t_1 = t_{2k+3} = (\tau/2 - \alpha_k)\sqrt{L}, \quad t_2 = t_4 = \ldots = t_{2k+2} = 2\alpha_k\sqrt{L}, \tag{8.1.7}$$

$$t_3 = t_5 = \ldots = t_{2k+1} = 2(\pi - \alpha_k)\sqrt{L},$$

где $[\ldots]$ — целая часть числа, а $\tau(b)$ — единственный корень трансцендентного уравнения

$$b = 2\pi k + \tau - 2(k+1)\alpha_k(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi). \tag{8.1.8}$$

Время быстродействия T_E задается равенством

$$T_E = \sum_{j=1}^{2k+3} t_j = (2\pi k + \tau)\sqrt{L}. \tag{8.1.9}$$

В частном случае, когда $b/(2\pi)$ — целое число, скорость точки подвеса в задаче оптимального быстродействия постоянна и вместо формул (8.1.7) — (8.1.9) имеем

$$v = 1 \quad \text{при} \quad 0 < t < T_E, \quad T_E = d. \tag{8.1.10}$$

F. Квазиоптимальное по быстродействию перемещение груза из точки в точку при постоянной длине подвеса $L = \mathrm{const}$. Это движение, построенное в § 2 главы 6 (см. формулы (6.3.15), (6.3.16)), отличается от оптимального тем, что содержит три участка постоянства скорости. Оно задается соотношениями

$$\blacksquare\quad v(t)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<t<t_1, & t_1+t_2<t<T_F,\\ 0 \text{ при } t_1<t<t_1+t_2, & t=0, \quad t=T_F,\end{cases}$$

$$t_1=t_3+2\pi k\sqrt{L},\quad T_F=\sum_{j=1}^{3}t_j,\quad k=[b/(2\pi)],$$

$$\xi=b-2\pi k,\quad \eta=0,\quad T_F=2\pi k\sqrt{L} \text{ при } \xi=0,$$

$$\eta=\pi+\xi/2,\quad T_F=(2\pi k+\pi+\xi/2)\sqrt{L} \text{ при } 0<\xi<2\pi,$$

$$t_2=0,\quad t_3=0 \text{ при } 0\leqslant\eta<\pi,$$

$$t_2=(2\pi-\eta)\sqrt{L},\quad t_3=(\eta-\pi)\sqrt{L} \text{ при } \pi\leqslant\eta<2\pi.$$

$$\square \quad (8.1.11)$$

Из перечисленных движений можно построить три простых способа управления, решающих поставленную задачу о перемещении груза, а именно движения: AEA, AFA, ABDCA.

Режимы AEA и AFA содержит один свободный параметр — длину L на участках E и F соответственно. В режиме ABDCA имеются два свободные параметра — постоянные длины L_1 и L_2 при движениях B, C. Эти параметры естественно выбрать так, чтобы минимизировать суммарное время перемещения.

3. Построение управления в виде оптимального сочетания исходных режимов. При реализации режима AEA суммарное время перемещения T_1 согласно соотношениям (8.1.4), (8.1.9) задается формулой $T_1=(1-h)/c+T_E(L)$. Параметр L найдем из условия $\min T_1$ по L при ограничении $h\leqslant L\leqslant 1$.

Первое слагаемое в формуле для T_1 не зависит от L, поэтому достаточно найти минимум T_E из (8.1.9). Преобразуем T_E к виду $T_E=d\psi(b)$, где использованы обозначения (8.1.3), (8.1.7) и

$$\psi(b)=\psi_*(b)/b,\quad \psi_*(b)=2\pi k(b)+\tau(b)\quad (b>0).\quad (8.1.12)$$

Из выражения (8.1.7) для b и неравенств $h\leqslant L\leqslant 1$ получим ограничения на b вида $d\leqslant b\leqslant d/\sqrt{h}$. Таким образом, исходная задача минимизации T_1 сведена в терминах новой переменной b к определению $\min\psi(b)$ по b при ограничениях $d\leqslant b\leqslant d\sqrt{h}$.

Функция $\psi_*(b)$ из (8.1.12) задает время оптимального быстродействия как функцию расстояния. Эта функция изучена в § 2 главы 6 (где она обозначена через $T(a)$). Функция $\psi_*(b)$ строго возрастает, и справедливы соотношения

$$\psi_*(b) \geqslant b \text{ при } b > 0,$$
$$\psi_*(b) = \pi[1 + b/(2\pi)] \text{ при } b < 2\pi, \tag{8.1.13}$$
$$\psi_*(2\pi i) = 2\pi i \text{ при } i = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{b\to\infty} \psi_*(b)/b = 1.$$

На основании свойств (8.1.13) и соотношений (8.1.12) имеем (см. рис. 8.1, сплошная кривая *1*)

$$\psi(b) \geqslant 1 \text{ при } b > 0, \quad \psi(b) = 1/2 + \pi/b \text{ при } b < 2\pi, \tag{8.1.14}$$
$$\lim_{b\to\infty} \psi(b) = 1, \quad \psi(b_i) = 1, \quad b_i = 2\pi i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

На интервалах $b_i < b < b_{i+1}$ функция $\psi(b)$ имеет единственный внутренний максимум. Отсюда и из неравенств

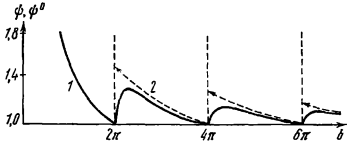


Рис. 8.1.

$d \leqslant b \leqslant d/\sqrt{h}$ вытекает, что при $d < 2\pi\sqrt{h}$ имеем $b < 2\pi$, и $\min \psi(b)$ достигается в точке $b = d/h$. Это соответствует режиму управления с тремя ($k = 0$) участками постоянства скорости $v(t)$.

Если же $d > 2\pi\sqrt{h}$, то оптимальное управление $v(t)$ может содержать один либо более трех участков постоянства скорости. Если при некотором $i \geqslant 1$ выполняется включение $b_i \in [d, d/\sqrt{h}]$, то на отрезке $[d, d/\sqrt{h}]$ имеется хотя бы одна точка b_i, где достигается абсолютный минимум функции $\psi(b)$, равный $\psi(b_i) = 1$ (см. рис. 8.1). В качестве оптимального значения b здесь следует выбрать любое

$b_i \in [d, d/\sqrt{h}]$. При этом согласно (8.1.10) имеем $v(t) \equiv 1$ для всего режима E.

Если же при $d \geqslant 2\pi\sqrt{h}$ условие $b_i \in [d, d/\sqrt{h}]$ выполнено, то абсолютный минимум функции $\psi(b)$ недостижим. Из свойства унимодальности $\psi(b)$ в промежутках между точками b_i следует, что $\min \psi(b)$ достигается на одной из границ отрезка $[d, d/\sqrt{h}]$. Поэтому нужно по формулам (8.1.7), (8.1.8), (8.1.12) вычислить значения $\psi(d)$ и $\psi(d/\sqrt{h})$ и сравнить их, при этом можно воспользоваться рис. 8.1. Если $\psi(d) > \psi(d/\sqrt{h})$, то $\min \psi(b)$ достигается в точке $b = d/\sqrt{h}$, в противном случае — при $b = d$.

Таким образом, при любых параметрах задачи указано, как выбрать b. Следовательно, указана и оптимальная длина подвеса L для участка E, согласно (8.1.7) равная $L = (d/b)^2$. На начальном участке A производится изменение длины от начального значения h до L, а на заключительном участке A — от L до 1. Режим AEA полностью рассчитан.

Перейдем к рассмотрению аналогичного режима AFA, время реализации которого согласно формулам (8.1.4), (8.1.11) имеет вид

$$T_2 = \begin{cases} (1-h)/c + d & \text{при } b = b_i = 2\pi i, \quad i = 1, 2, \ldots, \\ (1-h)/c + d\left\{1/2 + \pi\left([b/(2\pi)] + 1\right)\Big/a\right\} & \text{при } b \neq b_i, \end{cases}$$

где [...] — целая часть числа.

Функция $T_2(b)$ монотонно убывает по b на интервалах, не содержащих точек b_i. В этих точках достигается ее абсолютный минимум, причем функция $T_2(b)$ здесь испытывает разрыв. Поэтому если выполняется условие $b_i \in [d\ \ d/\sqrt{h}]$, то оптимальное значение $b = b_i$, как и в режиме AEA.

Если имеет место неравенство $d < 2\pi\sqrt{h}$, то функции T_1 и T_2 совпадают, так как квазиоптимальный режим F при $b < 2\pi$ совпадает с оптимальным. Лишь в случае, когда $d > 2\pi\sqrt{h}$ и включение $b_i \in [d, d/h]$ не имеет места, квазиоптимальный режим отличается от оптимального. Так как $T_2(b)$ в этом случае монотонно убывает на интервале $(d, d/h)$, то минимум достигается при $b = d/\sqrt{h}$, т. е. при $L = h$.

Итак, для режима AFA имеется два случая. Если выполнено условие $b_i \in [d, d/h]$, то $b = b_i$ и $L = (d/b_i)^2$; режим F состоит из одного участка. В противном случае $L = h$, т. е. опускание груза A вначале отсутствует, а квазиоптимальный режим F состоит из трех участков.

Заметим, что оптимальному режиму E соответствует управление со многими точками переключения, и поэтому естественно заменить его более простым и близким по функционалу квазиоптимальным режимом F, т. е. использовать движение типа AFA.

На рис. 8.1 пунктирной линией *2* представлен график функции $\psi^0 = {}^1/_2 + \pi([b/(2\pi)] + 1)/b$, являющейся аналогом ψ, для режима F. На отрезке $[0, 2\pi]$ функции ψ и ψ^0 совпадают. Максимальное отличие $\psi^0 - \psi$ не превосходит 0,5 (при $b \to 2\pi + 0$).

Рассмотрим последний режим ABDCA. Пусть во время разгона B и торможения C приведенные длины подвеса груза соответственно равны L_1 и $L_2 = L_1 + cz$. Используя формулы (8.1.4) — (8.1.6) и опуская промежуточные выкладки, вычислим время T_3 для движения ABDCA

$$T_3 = d + (1 - h)/c + {}^1/\ \pi\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_1 + cz}\right) - z.$$

Значения параметров L_1 и z определим из условия $\min T_3$ по L_1 и z при вытекающих из (8.1.4) ограничениях

$$h \leqslant L_1 \leqslant L_1 + cz \leqslant 1, \quad {}^1/_3\pi\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_1 + cz}\right) + z \leqslant d. \tag{8.1.15}$$

Второе ограничение выражает тот факт, что полное горизонтальное перемещение не менее суммы путей режимов B, C, D.

Функция T_3 монотонно возрастает по L_1, и поэтому ее минимум достигается при наименьшем L_1, допускаемом (8.1.15). Левая часть последнего неравенства (8.1.15) монотонно возрастает по L_1. Следовательно, если это неравенство выполнено при некоторых L_1^*, z, то оно будет выполнено также при $L_1 = h < L_1^*$ и том же z. Поэтому положим $L_1 = h$. В силу монотонности левой части упомянутого неравенства по z его можно привести к виду $z \leqslant z_0$, где z_0 — положительный корень уравнения $z_0 + {}^1/_3 \pi\sqrt{h + cz_0} = d - {}^1/_3 \pi\sqrt{h}$, равный

$$z_0 = d - \frac{\pi\sqrt{h}}{3} + \frac{\pi^2 c}{18} - \frac{\pi}{6}\left[4c\left(d - \frac{\pi\sqrt{h}}{3}\right) + \frac{\pi^2 c^2}{9} + 4h\right]^{1/2}. \tag{8.1.16}$$

Окончательно неравенства (8.1.15) с учетом (8.1.16) при $L_1 = h$ можно переписать в виде

$$0 \leqslant z \leqslant \min\{z_0, \ (1 - h)/c\} = \varkappa. \tag{8.1.17}$$

Неравенство $z_0 \geqslant 0$ является условием возможности осуществления режимов типа ABDCA. Перейдем к определению минимума T_3 по z при ограничениях (8.1.17) и при $L_1 = h$. Для этого достаточно найти минимум по z при $L_1 = h$ той части слагаемых в T_3, которая зависит от z, а именно $\theta(z) = {}^1/_3 \pi\sqrt{h + cz} - z$.

Функция $\theta(z)$ унимодальна и имеет единственный максимум при $z = z_* = (\pi^2 c^2/36 - h)/c$. Отсюда и из неравенств (7.1.17) вытекает, что в зависимости от параметров d, h, c реализуется один из двух типов движений ABDCA. Оба типа возможны лишь при условии $z_0 \geqslant 0$, где z_0 определено формулой (8.1.16), и для каждого из них имеем $L_1 = h$, т. е. участок A по существу отсутствует.

Движение $(\mathrm{ABDCA})_1$ имеет место, если параметры d, h, c удовлетворяют хотя бы одному из следующих двух неравенств

$$\varkappa \leqslant z_*, \quad \theta(0) = {}^1/_3 \pi\sqrt{h} \leqslant \theta(\varkappa).$$

В этом случае минимум $\theta(z)$ реализуется при $z = 0$. Следовательно, имеем $L_1 = L_2 = h$, и на участках B, D, C необходимо двигаться с постоянной длиной подвеса $L = h$. После этого следует режим A, в котором груз опускается от $L = h$ до $L = 1$. Время движения при этом вычисляется по формуле

$$T_3 = d + (1 - h)/c + {}^2/_3 \pi\sqrt{h},$$

Движение $(ABDCA)_2$ реализуется, если параметры d, h, c удовлетворяют неравенству $\theta(0) > \theta(\varkappa)$. В этом случае искомый минимум функции $\theta(z)$ достигается при $z = \varkappa$. Следовательно, на участке D груз необходимо опустить до значения $L = h + c\varkappa$. Время движения T_3 определяется формулой

$$T_3 = d + (1 - h)/c + {}^1/_3\, \pi\left(\sqrt{h} + \sqrt{h + c\varkappa}\right) - \varkappa.$$

Сопоставим построенные режимы ABDCA, AEA, AFA. Все они решают поставленную задачу перемещения груза, однако режим ABDCA (в отличие от AEA, AFA) реализуем не всегда, а лишь при условии $z_0 \geqslant 0$. Некоторым преимуществом режима ABDCA по сравнению с AEA, AFA является отсутствие колебаний груза на его среднем участке D. В смысле времени перемещения при одних значениях параметров d, h, c имеет преимущество режим ABDCA, при других — режим AEA. Режим AFA имеет меньше переключений, чем AEA, хотя в общем случае несколько уступает ему по быстродействию. Подробнее об этом см. в работе [141]. Построенные режимы, вообще говоря, не являются оптимальными, но переходят в оптимальные в некоторых предельных случаях, например, при $(1 - h)/c \ll d$, $(1 - h)/c \gg d$. Эти случаи отвечают большому отличию между временами, необходимыми для горизонтального и вертикального перемещений.

Отметим, что вместо режимов разгона и торможения B, C, в которых длина маятника постоянна, можно использовать в качестве составных элементов соответствующие режимы с переменной длиной из § 4 главы 7. Это приведет к сокращению полного времени движения.

§ 2. Задачи управления грузоподъемными машинами

1. О приложении полученных результатов к управлению грузоподъемными машинами. Дальнейшая интенсификация работы транспорта требует создания автоматизированных систем управления процессами перегрузки. Как на морском транспорте, так и на железных дорогах внедряются контейнерные перевозки, вводятся в строй специализированные контейнерные перегрузочные комплексы. В связи с этим приобретают важное значение проблемы автоматизации работы подъемно-транспортных машин. Автоматизации должны быть подвергнуты основные, часто повторяющиеся рабочие операции, которые требуют больших затрат физической и нервной энергии оператора-крановщика. В результате внедрения оптимальных (или близких к ним) автоматических режимов управления существенно сократится время перегрузки, уменьшится простой судов и других транспортных средств. Задачи оптимального управления грузоподъемными машинами ставились и исследовались в книгах [83, 86, 194], в статьях [70, 84, 85, 87, 93, 165—168, 187, 239, 242, 246, 250, 251, 259] и других.

Разработка методов автоматического управления подъемными кранами и другими машинами, перемещающими висящие грузы, имеет ряд особенностей. Простейший подъемный кран — это сложная механическая система, имеющая с учетом колебаний груза 5—6 степеней свободы. Система эта, как правило, существенно нелинейна. Уравнения ее движения включают уравнения самого крана с грузом, а также уравнения двигателей. При разработке алгоритмов управления следует иметь в виду большое количество критериев и ограничений. Одним из важных критериев является время рабочего цикла, что приводит к постановке задач оптимального быстродействия. В других случаях критерием может служить расход энергии в процессе работы механизмов. Среди ограничений важную роль играет требование гашения колебаний груза в конце движения. Часто требуется выполнить также различные ограничения на координаты и скорость груза, например, груз не должен задевать окружающих предметов (стенок трюма судна и др.). В зависимости от требований к работе двигателей следует принимать во внимание ограничения на скорость и ускорение точки подвеса груза. Таким образом, здесь возникают многочисленные и сложные задачи оптимального управления, зависящие от типа крана, от его двигателей, от цели управления и от ограничений.

Рассмотрим наиболее простые по кинематической схеме и широко распространенные грузоподъемные машины типа козловых или мостовых кранов или перегружателей. В качестве их механической модели принимается тележка с подвешенным грузом, которая движется поступательно по горизонтальной направляющей.

У малых грузоподъемных машин (кранов небольшой мощности, тельферов), снабженных асинхронными двигателями, время переходного процесса (время выхода на стационарный режим) много меньше периода колебаний груза, а тормозная система обеспечивает практически мгновенную остановку. Поэтому в качестве управляющей функции в рассматриваемой модели следует выбрать скорость подвеса, которая по предположению ограничена. Задачи оптимального по быстродействию перемещения такой управляемой колебательной системы решены в главе 6.

В § 2 главы 7 для этой же системы решены задачи разгона и торможения, а в § 1 главы 8 построены способы перемещения груза в вертикальной плоскости на заданное расстояние и высоту. Эти режимы прошли экспериментальную проверку на кафедре механизации и автоматизации портов Одесского института инженеров морского флота с использованием разработанной на кафедре системы автоматического управления. Испытания подтвердили справедливость принятой модели и эффективность полученных режимов.

В современных мощных контейнерных перегружателях конструкция электропривода обеспечивает плавное (примерно постоянное) ускорение точки подвеса груза до максимальной скорости и такое же торможение (см. [194], гл. VI). Время разгона и торможения сравнимы с периодом колебаний груза. Поэтому при постановке задач управления такими кранами необходимо учитывать ограничения как на скорость, так и на ускорение подвеса. В § 3 главы 7 дано решение задач разгона и торможения при совместных ограничениях на скорость и на ускорение. Перемещение груза при совместных ограничениях можно производить в три этапа: разгон — движение с постоянной скоростью без колебаний — торможение по схеме § 1 главы 8.

Если расстояние достаточно мало, т. е. ограничение по скорости не достигается, то для перемещения груза можно воспользоваться режимом управления при ограниченной силе (§ 4 главы 6). Вопросы перемещения груза при изменяющейся длине подвеса рассмотрены в § 4 главы 7, в § 1 главы 8.

Наряду с режимами, оптимальными по быстродействию, представляют практический интерес способы управления, оптимальные в смысле других критериев, прежде всего в смысле энергетических затрат (тепловых потерь). Подобные задачи для кранов рассматривались, например, в работах [165—167]. Ниже дается решение двух задач о минимизации энергетических затрат при перемещении (п. 2) и разгоне (п. 3) висящего груза.

2. Минимизация энергетических затрат при перемещении висящего груза. Рассмотрим следующую задачу управления силой тяги двигателя, перемещающего без трения тележку с висящим грузом [38]. За фиксированное время T требуется выбором силы $F(t)$ переместить висящий груз (рис. 6.1) на заданное расстояние a из состояния покоя снова в состояние покоя. Уравнения движения двухмассовой системы в случае малых колебаний и краевые условия даны соотношениями (6.4.2), (6.4.4), (6.4.5)

$$(M+m)\dot{v}-mL\dot{\omega}=F,\quad I\dot{\omega}+mgL\varphi=mL\dot{v},\tag{8.2.1}$$
$$\dot{x}=v,\qquad \dot{\varphi}=\omega,$$

$$x(0)=v(0)=\varphi(0)=\omega(0)=v(T)=\varphi(T)=\omega(T)=0,$$
$$x(T)=a.\tag{8.2.2}$$

В качестве критерия оптимальности возьмем функционал

$$J=\int\limits_0^T F^2(t)\,dt.\tag{8.2.3}$$

При некотором упрощении можно полагать, что сила F тяги электродвигателя пропорциональна силе тока обмотки якоря, а мощность тепловых потерь — квадрату тока. Следовательно, с точностью до коэффициента пропорциональности затраты энергии определяются интегралом (8.2.3).

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$x'=T_0^{-1}(M+m)^{-1}v_0^{-1}[(M+m)x-mL\varphi],$$
$$v'=[(M+m)v-mL\omega](M+m)^{-1}v_0^{-1},$$
$$u=FT_0(M+m)^{-1}v_0^{-1},\quad t'=T_0^{-1}t,$$

$$\varphi' = T_0 g v_0^{-1}\varphi, \quad \omega' = T_0^2 g v_0^{-1}\omega,$$
$$a' = T_0^{-1} v_0^{-1} a, \quad T_0 = \left[I m^{-1} g^{-1} L^{-1} - \right.$$
$$\left. - mL(M+m)^{-1} g^{-1}\right]^{1/2}. \quad \square \qquad (8.2.4)$$

Здесь v_0 — произвольная постоянная, имеющая размерность скорости, например, $v_0 = gT_0$.

В безразмерных переменных (8.2.4) (штрихи далее опускаем) уравнения движения (8.2.1) примут вид, аналогичный (6.4.10)

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\varphi + u. \qquad (8.2.5)$$

Краевые условия в безразмерных переменных остаются прежними (8.2.2), а функционал (8.2.3) переходит в

$$J = \int_0^T u^2(t)\,dt. \qquad (8.2.6)$$

Для определения оптимального управления воспользуемся принципом максимума. Выпишем функцию Гамильтона и сопряженную систему

$$H = p_1 v + p_2 u + p_3\omega + p_4(u - \varphi) - u^2,$$
$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad \dot{p}_3 = p_4, \quad \dot{p}_4 = -p_3. \qquad (8.2.7)$$

Из условия максимума гамильтониана по u определяется вид оптимального управления

$$u = (p_2 + p_4)/2. \qquad (8.2.8)$$

Интегрируя уравнения (8.2.7) и подставляя решение в (8.2.8), находим

$$u = (\lambda_2 - \lambda_1 t - \lambda_3 \sin t - \lambda_4 \cos t)/2. \qquad (8.2.9)$$

Здесь λ_i — произвольные постоянные. Подставим управление (8.2.9) в систему (8.2.5) и проинтегрируем ее при начальных условиях (8.2.2) для $t = 0$. В результате получим

■ $$x = -{}^1/_{12}\lambda_1 t^3 + {}^1/_4\lambda_2 t^2 + {}^1/_2\lambda_3(\sin t - t) +$$
$$+ {}^1/_2\lambda_4(\cos t - 1),$$
$$v = -{}^1/_4\lambda_1 t^2 + {}^1/_2\lambda_2 t + {}^1/_2\lambda_3(\cos t - 1) - {}^1/_2\lambda_4 \sin t,$$

$$\varphi = {}^1/_2\lambda_1(\sin t - t) + {}^1/_2\lambda_2(1-\cos t) + {}^1/_4\lambda_3(t\cos t - \sin t) - {}^1/_4\lambda_4 t\sin t,$$
$$\omega = {}^1/_2\lambda_1(\cos t - 1) + {}^1/_2\lambda_2\sin t - {}^1/_4\lambda_3 t\sin t - {}^1/_4\lambda_4(\sin t + t\cos t). \qquad \square \quad (8.2.10)$$

Для определения постоянных λ_i положим $t = T$ в (8.2.10) и воспользуемся граничными условиями (8.2.2) при $t = T$. В результате получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно λ_i

$$\blacksquare \quad {}^1/_6\lambda_1T^3 - {}^1/_2\lambda_2T^2 - \lambda_3(\sin T - T) + \lambda_4(1-\cos T) = -2a,$$
$$-{}^1/_2\lambda_1T^2 + \lambda_2T + \lambda_3(\cos T - 1) - \lambda_4\sin T = 0,$$
$$\lambda_1(T-\sin T) + \lambda_2(\cos T - 1) + {}^1/_2\lambda_3(\sin T - T\cos T) + {}^1/_2\lambda_4 T\sin T = 0,$$
$$\lambda_1(1-\cos T) - \lambda_2\sin T + {}^1/_2\lambda_3 T\sin T + {}^1/_2\lambda_4(\sin T + T\cos T) = 0. \qquad \square \quad (8.2.11)$$

Обозначим через D определитель системы (8.2.11), а через D_i — алгебраическое дополнение i-го элемента первой строки этого определителя. Величины D_i и D являются функциями параметра T. Решение системы (8.2.11) может быть записано в виде

$$\lambda_i = -2aD_i(T)D^{-1}(T). \qquad (8.2.12)$$

Отметим, что решение поставленной задачи оптимального управления при всех $T > 0$ существует и единственно [117, 176]. Определитель $D(T) > 0$ при всех $T > 0$. Величины $D_i(T)$, $D(T)$ легко рассчитываются численно; оптимальное управление и траектория определены формулами (8.2.9)—(8.2.12). Точно также решается задача оптимального перемещения из любого (ненулевого) начального состояния.

3. Минимизация энергетических затрат при разгоне висящего груза. Найдем закон изменения силы тяги двигателя $F(t)$, при котором тележка с подвешенным грузом (рис. 6.1) за фиксированное время T переходит из состояния покоя в состояние поступательного движения (см. [91]). Краевые условия для системы (8.2.5) имеют вид

$$x(0) = \varphi(0) = \omega(0) = v(0) = \varphi(T) = \omega(T) = 0, \quad v(T) = 1. \qquad (8.2.13)$$

В качестве постоянной v_0 в соотношениях (8.2.4) принята величина заданной скорости системы в конце движения. На скорость $v(t)$ наложено одно из ограничений

$$\text{а)}\ 0 \leqslant v \leqslant 1, \qquad \text{б)}\ -1 \leqslant v \leqslant 1. \tag{8.2.14}$$

В качестве критерия оптимальности принят функционал (8.2.6). Поставленная задача разгона отличается от задач главы 7 критерием оптимальности.

Сначала рассмотрим задачу без учета ограничений (8.2.14). Ее решение строится аналогично предыдущему пункту. В соотношениях (8.2.7), (8.2.8) в силу условия трансверсальности $p_1(T) = 0$ получим

$$\begin{gathered} p_1 \equiv 0, \quad p_2 = 2B, \quad p_3 = -2A\cos(t+\theta), \\ p_4 = 2A\sin(t+\theta), \end{gathered} \tag{8.2.15}$$

где A, B, θ — произвольные постоянные. Подставляя (8.2.15) в (8.2.8), имеем

$$u = (p_2 + p_4)/2 = A\sin(t+\theta) + B. \tag{8.2.16}$$

Подставим управление (8.2.16) в уравнения движения (8.2.5) и проинтегрируем их с начальными условиями (8.2.13)

■ $$\begin{aligned} x(t) &= {}^1/_2 Bt^2 - A[\sin(t+\theta) - \sin\theta - t\cos\theta], \\ v(t) &= Bt - A[\cos(t+\theta) - \cos\theta], \\ \varphi(t) &= {}^1/_2 A[-t\cos(t+\theta) + \cos\theta\sin t] + B(1-\cos t), \\ \omega(t) &= {}^1/_2 A[t\sin(t+\theta) - {} \\ &\qquad - \cos(t+\theta) + \cos\theta\cos t] + B\sin t. \end{aligned} \tag{8.2.17}$$ □

Определим постоянные A, B, θ из граничных условий (8.2.13) при $t = T$:

$$\begin{gathered} A = 2c^{-1}\sin(T/2), \quad B = -{}^1/_2 c^{-1}(T + \sin T), \\ \theta = (\pi - T)/2, \quad c = 4\sin^2(T/2) - T^2/2 - {}^1/_2 T\sin T < 0. \end{gathered} \tag{8.2.18}$$

Оптимальное управление (8.2.16) и соответствующая скорость $v(t)$ равны

$$u(t) = -[{}^1/_2(T + \sin T) - 2\sin(T/2)\cos(t - T/2)]c^{-1} = \dot{v}(t),$$
$$v(t) = \{{}^1/_2(T + \sin T)t - 4\sin(T/2)\sin(t/2)\cos[(t - T)/2]\}c^{-1}. \tag{8.2.19}$$

Из равенств (8.2.19) следует, что $u(t) = u(T - t)$, поэтому график $v(t)$ на отрезке $[0, T]$ обладает центральной симметрией относительно точки $t = T/2$, $v = {}^1/_2$. Отметим, что если $T + \sin T > 4\sin(T/2)$, то $u(t) > 0$ на отрезке $[0, T]$. Если $T + \sin T < 4\sin(T/2)$, то $v(t)$ имеет две экстремальные точки, определяемые уравнением $u(t) = 0$. Приравнивая правую часть соотношения (8.2.19) для $u(t)$ нулю, получаем, что в точках

$$t_1^0 = \frac{T}{2} - \arccos\frac{T + \sin T}{4\sin({}^1/_2 T)}, \quad t_2^0 = \frac{T}{2} + \arccos\frac{T + \sin T}{4\sin({}^1/_2 T)} \tag{8.2.20}$$

функция $v(t)$ достигает локального максимума и минимума, соответственно. Подставляя t_1^0 в (8.2.19) и разрешая уравнение $v\left(t_1^0(T)\right) = 1$ относительно T, получаем $T_* \approx 2{,}5361$ — нижнюю грань тех T, при которых $0 < v(t) < 1$ на интервале $(0, T)$. При $T \geqslant T_*$ решение поставленной задачи дается формулами (8.2.16)—(8.2.19); ограничения (8.2.14) при этом не нарушаются.

Если $T < T_*$, то $v(t)$ выходит на фазовое ограничение (8.2.14). Рассмотрим сначала ограничение (8.2.14а). Допустим, что на конечном числе интервалов времени оптимальная скорость равна 0 либо 1. Обозначим через t_{2j-1}, t_{2j}, j-е моменты выхода скорости на ограничение (8.2.14а) и схода с него, $j = 1, 2, \ldots$ На отрезке $[t_{2j-1}, t_{2j}]$ выполнено $u(t) \equiv 0$. Так как фазовое ограничение наложено только на v, то в моменты t_{2j-1} сопряженные переменные $p_3(t)$, $p_4(t)$ непрерывны, а $p_2(t)$ изменяется скачком [176]. На интервалах (t_{2j-2}, t_{2j-1}) имеем $p_2 = \mathrm{const}$ в силу (8.2.7) и $p_1 \equiv 0$. Из условия непрерывности функции Гамильтона (8.2.7) аналогично п. 2 § 3 главы 7 заключаем, что

$$p_4(t_{2j-1}) = -p_2(t_{2j-1} - 0), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{8.2.21}$$

В момент t_{2j-2} $(j = 2, 3, \ldots)$ схода с ограничения выполнено аналогичное (8.2.21) условие. Поэтому из (8.2.21) с учетом постоянства p_2 имеем

$$p_4(t_{2j-2}) = -p_2(t_{2j-2}+0) = -p_2(t_{2j-1}-0) = p_4(t_{2j-1}). \tag{8.2.22}$$

Последнее равенство показывает, что на интервале времени между двумя соседними участками выхода на ограничение функция $p_4(t)$ достигает экстремума. Поэтому, если $v(t)$ имеет более двух участков выхода на ограничение, то соответствующее время движения $T > \pi$, так как расстояние между двумя соседними экстремальными точками функции $p_4 = A\sin(t+\theta)$ равно π. Но в рассматриваемом случае $T < T_* < \pi$. Следовательно, скорость выходит на ограничение не более двух раз.

Так как при $T = T_*$ сначала достигается верхнее ограничение $v = 1$, то будем считать, что при $T < T_*$ оптимальная скорость имеет следующую структуру. На отрезке $[t_1, t_2]$ выполнено $v(t) = 1$, на отрезке $[t_3, t_4]$ имеем $v(t) = 0$. Управление $u(t)$ определим при помощи формулы (8.2.16), в которой B кусочно постоянно. Значение B находим из условий $p_2 + p_4 = 0$ в моменты t_i, см. (8.2.22), так что

$$\begin{aligned} &u(t) = A[\sin(t+\theta) - \sin(t_1+\theta)] \text{ при } t \in [0, t_1],\\ &u(t) = A[\sin(t+\theta) - \sin(t_3+\theta)] \text{ при } t \in [t_2, t_3],\\ &u(t) = A[\sin(t+\theta) - \sin(t_4+\theta)] \text{ при } t \in [t_4, T],\\ &u(t) = 0 \text{ при } t \in (t_1, t_2) \cup (t_3, t_4), \quad A < 0. \quad \square \end{aligned} \tag{8.2.23}$$

Неравенство $A < 0$ не ограничивает общности вследствие произвола в выборе θ. Величины t_2, t_3 в силу (8.2.22) удовлетворяют уравнению $\sin(t_2+\theta) = \sin(t_3+\theta)$. Из этого равенства следует, что θ, t_2, t_3 связаны либо соотношением

$$(t_3+t_2)/2 + \theta = \pi/2, \tag{8.2.24}$$

либо $(t_3+t_2)/2+\theta = {}^3/_2\pi$; другие возможности не рассматриваем, так как θ определено с точностью до 2π. Покажем, что последнее равенство невозможно. Согласно этому равенству и соотношениям (8.2.23) управление $u[(t_2+t_3)/2] = u(3\pi/2-\theta) \geqslant 0$. На интервале (t_2, t_3) скорость убывает от 1 до 0 и $\operatorname{sign} u(t_2+0) = \operatorname{sign} u(t_3-0) = -1$. Поэтому на отрезке $[t_2, t_3]$ управление $u(t)$ должно по меньшей мере трижды обращаться в нуль. Три нуля функции $u = A\sin(t+\theta) + B$ расположены на отрезке длиной не менее 2π, что приводит к оценке $t_3 - t_2 \geqslant 2\pi$. Но $T < T_* < 2\pi$. Полученное противоречие доказывает справедливость соотношения (8.2.24).

Проинтегрируем соотношения (8.2.23) на отрезках $[0,\ t_1]$, $[t_2,\ t_3]$ и $[t_4,\ T]$, используя равенство (8.2.24). С учетом условий $v(0) = v(t_3) = v(t_4) = 0$ и $v(t_1) = v(t_2) = v(T) = 1$ получим

$$
\begin{gathered}
-\cos(t_1+\theta) + \cos\theta - t_1\sin(t_1+\theta) = A^{-1},\\
-2\cos(t_3+\theta) - \sin(t_3+\theta)(2t_3 + 2\theta - \pi) = -A^{-1},\\
-\cos(T+\theta) + \cos(t_4+\theta) - (T-t_4)\sin(t_4+\theta) = A^{-1}.
\end{gathered}
\tag{8.2.25}
$$

Подставим управление (8.2.23) в уравнения движения (8.2.5) для φ и ω и проинтегрируем их от 0 до T

$$
\begin{aligned}
\blacksquare\quad \varphi(T) = -{}^1/_2\cos(T+\theta)(t_1 + t_3 - t_2 + T - t_4) -\\
-{}^1/_2\sin(t_1+\theta)\cos(T-t_1) + \sin(t_1+\theta)\cos T -\\
-{}^1/_2\cos T\sin\theta - {}^1/_2\sin(t_3+\theta)\cos(T-t_3) +\\
+{}^1/_2\sin(t_3+\theta)\cos(T-t_2) +\\
+{}^1/_2\sin(t_4+\theta)\cos(T-t_4) -\\
-\sin(t_4+\theta) + {}^1/_2\sin(T+\theta) = 0,\\
\omega(T) = {}^1/_2\sin(T+\theta)(t_1 + t_3 - t_2 + T - t_4) +\\
+{}^1/_2\sin(t_1+\theta)\sin(T-t_1) - \sin(t_1+\theta)\sin T +\\
+{}^1/_2\sin T\sin\theta + {}^1/_2\sin(t_3+\theta)\sin(T-t_3) -\\
-{}^1/_2\sin(t_4+\theta)\sin(T-t_4) = 0.\quad \square
\end{aligned}
\tag{8.2.26}
$$

Умножим первое уравнение (8.2.26) на $\sin(T+\theta)$, а второе — на $\cos(T+\theta)$ и сложим их. После упрощений получим

$$[\sin(t_1+\theta) - \sin\theta]^2 = [\sin(t_4+\theta) - \sin(T+\theta)]^2.$$

Покажем, что после извлечения корня следует оставить уравнение

$$\sin(t_1+\theta) - \sin\theta = \sin(t_4+\theta) - \sin(T+\theta). \tag{8.2.27}$$

На отрезке $[0,\ t_1]$ скорость $v(t)$ возрастает от 0 до 1 и $u(0) \geqslant 0$. Из (8.2.23) при $t = 0$ получаем $\sin\theta \leqslant$

$\leqslant \sin(t_1+\theta)$. Аналогично при $t=T$ имеем $\sin(T+\theta)\leqslant$ $\leqslant \sin(t_4+\theta)$. Поэтому справедливо соотношение (8.2.27).

Умножим первое уравнение (8.2.26) на $\cos(T+\theta)$, а второе — на $\sin(T+\theta)$ и вычтем из второго первое. После упрощений имеем

$$\begin{gathered}{}^1/_2(t_1+t_3-t_2+T-t_4)+{}^1/_4\sin[2(t_1+\theta)] - \\ -\sin(t_1+\theta)\cos\theta-{}^1/_4\sin[2(t_2+\theta)] + \\ +{}^1/_4\sin 2\theta+{}^1/_4\sin 2(t_3+\theta)-{}^1/_4\sin[2(t_4+\theta)] + \\ +\sin(t_4+\theta)\cos(T+\theta)-{}^1/_4\sin[2(T+\theta)]=0. \qquad (8.2.28)\end{gathered}$$

Для определения шести неизвестных A, θ, t_1, t_2, t_3, t_4 получено шесть уравнений (8.2.24), (8.2.25), (8.2.27), (8.2.28). Проанализируем и упростим эту систему. Первое и третье уравнения (8.2.25) можно объединить в одно, исключив A

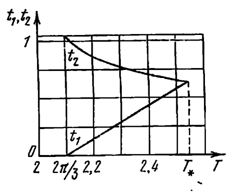


Рис. 8.2.

$$\begin{gathered}-\cos(t_1+\theta)+\cos\theta - \\ -t\sin(t_1+\theta)=-\cos(T+ \\ +\theta)+\cos(t_4+\theta) - \\ -(T-t_4)\sin(t_4+\theta). \qquad (8.2.29)\end{gathered}$$

Подстановкой можно убедиться, что следующие соотношения обращают уравнения (8.2.24), (8.2.27), (8.2.29) в тождества относительно t_1, t_2

$$\theta=(\pi-T)/2, \quad t_4=T_4-t_1, \quad t_3=T-t_2. \qquad (8.2.30)$$

Исключим A из первых двух уравнений (8.2.25) и подставим соотношения (8.2.30) в полученное уравнение и в уравнение (8.2.28). После упрощений будем иметь следующую систему

$$\begin{gathered}\sin(T/2)-\sin(T/2-t_1)-t_1\cos(T/2-t_1) + \\ +2\sin(T/2-t_2)-\cos(T/2-t_2)(T-2t_2)=0, \\ t_1-t_2+T/2+{}^1/_2\sin(T-2t_1)-{}^1/_2\sin(T-2t_2) + \\ +{}^1/_2\sin T-2\sin(T/2)\cos(T/2-t_1)=0. \quad \square \quad (8.2.31)\end{gathered}$$

Для решения этой системы использовался алгоритм [193], минимизирующий сумму квадратов левых частей уравнений. Эта сумма обладает очень пологим минимумом по t_1, t_2. Поэтому при численной минимизации для получения гладкой зависимости t_1, t_2 от параметра T квадраты левых частей системы (8.2.31) обращались в нуль с точностью до 10^{-10}.

На рис. 8.2 изображена полученная зависимость t_1, t_2 от T. Величины t_3, t_4 определяются из соотношений (8.2.30). Заметим, что при $T \to 2\pi/3$ оптимальный по функционалу

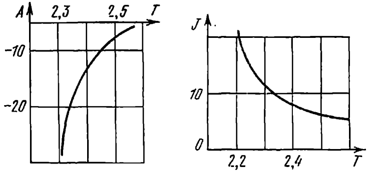


Рис. 8.3.

(8.2.6) режим переходит в режим оптимального по быстродействию разгона маятника при ограниченной скорости точки подвеса (7.2.15); при этом $t_1 \to 0$, $t_2 \to \pi/3$. При $T < 2\pi/3$ поставленная задача не имеет решения. При $T > T_*$ скорость не выходит на ограничения, см. выше. Графики зависимостей $A(T)$ и минимального функционала $J(T)$ приведены на рис. 8.3. При изменении T от $2\pi/3$ до ∞ величина функционала монотонно убывает от ∞ до 0. График зависимости оптимальной скорости $v(t)$ при $T = 2{,}3$ приведен на рис. 8.4. Решение задачи при ограничении (8.2.14а) полностью построено.

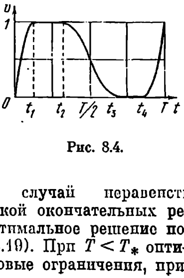


Рис. 8.4.

Аналогично рассматривается случай неравенств (8.2.14б). Ограничимся лишь сводкой окончательных результатов. При $T \geqslant T_* \approx 2{,}5361$ оптимальное решение попрежнему имеет вид (8.2.16)—(8.2.19). При $T < T_*$ оптимальная скорость выходит на фазовые ограничения, причем при $T \in (T_1, T_*)$ имеет место выход скорости только на верхнее ограничение $v = 1$; здесь $T_1 \approx 1{,}975$. Если же $T \in (T_0, T_1)$, то скорость выходит на оба ограничения $v = \pm 1$; здесь $T_0 = \arccos(-1/4) \approx 1{,}8235$. Время T_0 есть время оптимального по быстродействию разгона маятника

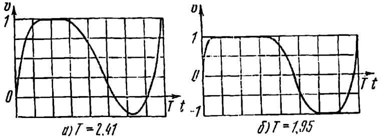


Рис. 8.5.

при ограничении (8.2.14б) (см. (7.2.14)). При $T < T_0$ задача разгона не имеет решения.

Оптимальное управление строится аналогично (8.2.23). При $T \in (T_1, T_*)$ имеем

$$
\begin{aligned}
&u(t) = A[\sin(t+\theta) - \sin(t_1+\theta)] \quad \text{при } t \in [0, t_1],\\
&u(t) = A[\sin(t+\theta) - \sin(t_2+\theta)] \quad \text{при } t \in [t_2, T], \qquad (8.2.32)\\
&u(t) = 0 \ \text{при } t \in (t_1, t_2),\ A < 0.
\end{aligned}
$$

В случае $T \in (T_0, T_1)$ управление задается прежними соотношениями (8.2.23), параметры которого связаны равенством (8.2.24).

На рис. 8.5 показаны оптимальные зависимости $v(t)$ при $T = 2{,}41 \in (T_1, T_*)$ (рис. 8.5, *а*) и $T = 1{,}95 \in (T_0, T_1)$ (рис. 8.5, *б*). На рис. 8.6 приведены рассчитанные параметры t_1, t_2, θ, t_4 оптимального управления (8.2.32), (8.2.23) для всего интервала $T \in (T_0, T_*)$. На рис. 8.7 даны зависимости $A(T)$ и $J(T)$ для того же интервала.

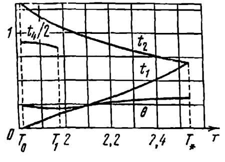


Рис. 8.6.

4. Управление перемещением груза в горизонтальной плоскости. Рассмотрим кратко задачу об оптимальном перемещении груза в горизонтальной плоскости при помощи поворотного устройства (рис. 8.8). Система состоит из двух твердых тел A и B. Тело A может вращаться вокруг вертикальной оси O, а груз B массы m может перемещаться вдоль горизонтальной направляющей Ox, жестко

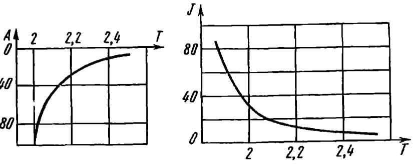


Рис. 8.7.

связанной с телом A и проходящей через точку O. В системе координат, связанной с телом A, тело B перемещается поступательно. Поэтому момент инерции всей системы относительно оси O имеет вид $I = I_0 + mx^2$, где x — расстояние от оси O до центра инерции тела B, а I_0 — постоянная, равная сумме моментов инерции тел A и B при $x = 0$. Управление осуществляется двумя двигателями, один из которых создает момент сил $M_0(t)$ вокруг оси O, а другой осуществляет перемещение тела B вдоль направляющей Ox с ограниченной скоростью $V(t)$. Уравнения движения системы имеют вид

$$d(I\dot{\varphi})/dt = M_0(t),$$
$$\dot{x} = V(t), \quad I = I_0 + mx^2, \tag{8.2.33}$$

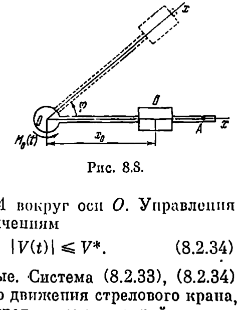


Рис. 8.8.

где φ — угол поворота тела A вокруг оси O. Управления $M_0(t)$, $V(t)$ подчинены ограничениям

$$|M_0(t)| \leqslant M^*, \quad |V(t)| \leqslant V^*. \tag{8.2.34}$$

Здесь M^*, V^* — постоянные. Система (8.2.33), (8.2.34) является моделью поворотного движения стрелового крана, причем тело A играет роль стрелы, вдоль которой перемещается груз B. Колебания груза относительно вертикали здесь не учитываются (либо они достаточно малы, либо груз закреплен на жестком подвесе). Предполагается, что двигатель, перемещающий груз вдоль направляющей Ox, обеспечивает практически мгновенное изменение его скорости $V(t)$. С другой стороны, для поворотного движения учитывается его инерционность (величина момента инерции I достаточно велика). Отметим, что уравнения (8.2.33), (8.2.34) пригодны для описания поворотных движений других управляемых механических систем с аналогичной кинематикой, например, манипуляторов.

Для системы (8.2.33), (8.2.34) в работе [37] рассмотрена задача оптимального быстродействия. Задача состоит в отыскании управлений $M_0(t)$, $V(t)$, удовлетворяющих ограничениям (8.2.34) и переводящих систему (8.2.33) из начального состояния покоя в заданное конечное состояние покоя

$$\begin{gathered} \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0, \; x(0) = x_0, \\ \varphi(T) = \varphi_1, \; \dot{\varphi}(T) = 0, \; x(T) = x_1, \; \varphi \in [0, \pi], \end{gathered} \tag{8.2.35}$$

за наименьшее время T $(T \to \min)$.

Без ограничения общности можно полагать $x_1 \geqslant x_0$. В случае $x_1 < x_0$ оптимальное управление может быть получено из соответствующих режимов для $x_1 > x_0$ после взаимной перестановки параметров x_1, x_0 и обращения времени.

В результате анализа необходимых условий оптимальности и граничных условий (8.2.35) установлено, что оптимальное управление $M_0(t)$ либо максимально по модулю и имеет одну точку переключения, либо определяется неоднозначно. Во втором случае управление $M_0(t)$ находится из условия завершения поворота к моменту перемещения груза в конечное положение.

Оптимальное управление $V(t)$ имеет не более двух интервалов постоянства, на которых оно последовательно принимает значения $-V^*$ и V^*. Между этими интервалами времени может находиться интервал, соответствующий $V(t) = 0$. В последнем случае режим является особым. По предположению $x_1 \geqslant x_0$, поэтому интервал времени со значением $V(t) = V^*$ всегда существует, а интервалы с $V(t) = -V^*$ и $V(t) = 0$ могут отсутствовать.

Установлено [37], что в зависимости от параметров задачи может реализоваться один из следующих трех типов оптимальных движений.

А. Управление $V(t)$ постоянно, $V(t) = V^*$ при $t \in [0, T]$. Время быстродействия равно $T = (x_1 - x_0)/V^*$ и определяется временем движения по направляющей. Управление $M_0(t)$ определяется неоднозначно и должно осуществить поворот за указанное время T.

Б. Управления $V(t)$, $M_0(t)$ максимальны по величине и имеют каждое по два интервала постоянства. Точки переключения их, вообще говоря, различны. Скорость равна $V = -V^*$ на первом и $V = V^*$ на втором интервале, а момент $M_0 = M^*$ на первом и $M_0 = -M^*$ на втором интервале. Начальное движение груза по направляющей в сторону оси вращения объясняется тем, что при этом уменьшается момент инерции системы, что ускоряет поворотное движение.

В. Момент $M_0(t)$ имеет структуру, аналогичную типу Б. Скорость $V(t)$ имеет три интервала постоянства, на которых она равна последовательно $-V^*$, 0, V^*. Участок, где $V(t) = 0$, отвечает значению $x(t) = 0$; здесь центр инерции груза находится на оси вращения, так что момент инерции системы минимален. Если по условиям задачи координата x ограничена ($x \geqslant x^*$, где $x^* > 0$), то на среднем участке будем иметь $x = x^*$.

§ 3. Об управлении системой многих маятников

1. Условия существования оптимального управления. В качестве примера управляемой многочастотной колебательной системы рассмотрим систему нескольких маятников с подвижной точкой подвеса. Пусть n физических маятников имеют точки подвеса, находящиеся на твердом теле, которое может передвигаться с ограниченной скоростью вдоль горизонтальной прямой Ox (рис. 8.9). При малых углах отклонения маятников линеаризованные уравнения их движения могут быть записаны

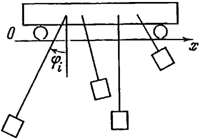


Рис. 8.9.

в виде (см. 6.1.1))

$$\ddot{\varphi}_i + \omega_i^2\varphi_i = a_i w,$$
$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = w; \quad -\beta \leqslant v \leqslant \beta, \quad \beta = \mathrm{const} > 0, \tag{8.3.1}$$
$$a_i = m_i L_i I_i^{-1}, \quad \omega_i^2 = m_i g L_i I_i^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь φ_i — угол отклонения i-го маятника от вертикали, m_i — его масса, I_i — его момент инерции относительно оси подвеса, L_i — расстояние от точки подвеса до центра инерции i-го маятника, g — ускорение силы тяжести, x, v, w — горизонтальная координата, скорость и ускорение одной из точек подвеса маятников.

Рассмотрим условия, при которых существует управление $w(t)$, перемещающее систему (8.3.1) из произвольного начального состояния на заданное расстояние a с гашением ее колебаний за кратчайшее время T.

Заменой переменных $\varphi_i = a_i\varphi_i'$ система (8.3.1) преобразуется к виду (штрихи далее опущены)

$$\ddot{\varphi}_i + \omega_i^2\varphi_i = w, \quad \dot{x} = v, \quad \dot{v} = w, \quad -\beta \leqslant v \leqslant \beta. \tag{8.3.2}$$

Запишем граничные условия, соответствующие поставленной задаче перемещения .

$$\begin{gathered}\varphi_i(0) = \varphi_i^0, \quad \dot{\varphi}_i(0) = \dot{\varphi}_i^0, \quad x(0) = 0, \quad v(0) = v^0,\\ \varphi_i(T) = \dot{\varphi}_i(T) = v(T) = 0, \quad x(T) = a.\end{gathered} \tag{8.3.3}$$

После введения переменной (см. (6.2.1))

$$\psi_i = -\omega_i^{-2}\dot{\varphi}_i + \omega_i^{-2}v \tag{8.3.4}$$

уравнения движения (8.3.2) и граничные условия (8.3.3) примут вид

$$\begin{gathered}\dot{\psi}_i = \varphi_i, \quad \dot{\varphi}_i = -\omega_i^2\psi_i + v, \quad \dot{x} = v, \quad -\beta \leqslant v \leqslant \beta,\\ \psi_i(0) = \psi_i^0 = -\omega_i^{-2}\dot{\varphi}_i(0) + \omega_i^{-2}v(0),\\ \varphi_i(0) = \varphi_i^0, \quad x(0) = 0,\\ \psi_i(T) = \varphi_i(T) = 0, \quad x(T) = a, \quad i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{8.3.5}$$

Роль управления в системе (8.3.5) играет скорость v, так что ограничение на фазовую переменную $|v| \leqslant \beta$ становится ограничением на управляющее воздействие.

Изменение управления $v(t)$ в двух точках не отразится на его оптимальности, поэтому условия $v(0) = v^0$, $v(T) = 0$ в (8.3.3) можно опустить (см. § 2 главы 6). Управление $v(t)$ ищем в классе кусочно непрерывных функций. Уравнения (8.3.5) удобно записать в матричной форме

$$\dot{z} = Az + bv,$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\omega_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \varphi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_n \\ \varphi_n \\ x \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь z — $(2n+1)$-мерный вектор фазовых координат, A и b — постоянные матрица и вектор соответствующих размерностей.

Для существования управления, решающего поставленную задачу оптимального по быстродействию перемещения системы (8.3.5) достаточно [117] выполнения следующих двух условий. Векторы b, Ab, ..., $A^{2n}b$ должны быть линейно независимы, а все корни λ_i уравнения $\det(A - \lambda E)$ должны иметь неположительную действительную часть.

Для проверки первого условия составим определитель, столбцами которого будут b, Ab, ..., $A^{2n}b$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 \ldots & (-1)^{n-1}\omega_1^{2n-2} & 0 \\ 1 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & \omega_1^4 \ldots & 0 & (-1)^n\omega_1^n \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \ldots & (-1)^{n-1}\omega_2^{2n-2} & 0 \\ 1 & 0 & -\omega_2^2 & 0 & \omega_2^4 \ldots & 0 & (-1)^n\omega_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 \ldots & (-1)^{n-1}\omega^{2n-2} & 0 \\ 1 & 0 & -\omega_n^2 & 0 & \omega_n^4 \ldots & 0 & (-1)^n\omega_n^{2n} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Переставляя строки и столбцы данного определителя, получим, что он с точностью до знака равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1^2 \ldots \omega_1^{2n-2} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & \omega_2^2 \ldots \omega_2^{2n-2} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ 1 & \omega_n^2 \ldots \omega_n^{2n-2} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & \omega_1^2 \ldots \omega_1^{2n} \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & \omega_2^2 \ldots \omega_2^{2n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & \omega_n^2 \ldots \omega_n^{2n} \\ \underbrace{0 & 0 \ldots 0}_{n} & \underbrace{1 & 0 \ldots 0}_{n} \end{vmatrix} = (\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n W_n)^2, \tag{8.3.6}$$

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & \omega_1^2 \ldots \omega_1^{2n-2} \\ 1 & \omega_2^2 \ldots \omega_2^{2n-2} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ 1 & \omega_n^2 \ldots \omega_n^{2n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i \geqslant k} (\omega_i^2 - \omega_k^2).$$

Здесь W_n — определитель Вандермонда, $W_n \neq 0$ в том и только в том случае, если среди частот ω_i нет двух одинаковых.

Перейдем к проверке второго условия. В силу структуры матрицы A уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\lambda \prod_{i=1}^{n} (\lambda^2 + \omega_i^2) = 0,$$

все корни которого имеют нулевую действительную часть.

Следовательно, оптимальное по быстродействию управление $v(t)$ для задачи перемещения (8.3.5) существует, если все маятники имеют различные частоты ω_i собственных колебаний.

При этом условии существует также и решение задачи об оптимальном по быстродействию гашении колебаний для системы (8.3.5). Задача гашения колебаний отличается от задачи перемещения тем, что $x(T)$ не фиксировано, поэтому в системе (8.3.5) можно опустить уравнение для x. Тогда в матрице A и в верхнем определителе (8.3.6) выпадут последние строка и столбец, так что указанный определитель будет равен W_n^2. Поэтому существование решения задачи оптимального гашения колебаний при различных ω_i следует из изложенного выше.

Рассмотрим теперь задачу разгона. Требуется выбором управления $w(t)$ перевести систему (8.3.2) из произвольного начального положения в состояние поступательного движения без колебаний со скоростью $v(T) = c = (0, \beta]$ за наименьшее время T. Граничные условия при $t = T$ имеют вид

$$\varphi_i(T) = \dot{\varphi}_i(T) = 0, \ v(T) = c, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

В переменных (8.3.4) эти граничные условия запишутся в форме

$$\varphi_i(T) = 0, \quad \psi_i(T) = -\omega_i^{-2}\dot{\varphi}_i(T) + \omega_i^{-2}v(T) = \omega_i^{-2}c, \tag{8.3.7}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассматриваем задачу оптимального быстродействия для системы (8.3.5) с управлением $v(t)$ и с граничными условиями (8.3.5) при $t = 0$ и (8.3.7) при $t = T$. Уравнение для x опускаем. Для доказательства существования оптимального управления достаточно [176] доказать существование допустимого управления (условие общности положения, как показано выше, здесь выполнено), переводящего систему (8.3.5) из произвольного начального состояния в конечное состояние (8.3.7). Выше доказано существование управления, переводящего систему (8.3.5) из произвольного начального состояния (в том числе из состояния поступательного движения) в состояние покоя; это — оптимальное управление для задачи гашения колебаний. Колебательная система (8.3.5) инвариантна по отношению к замене $t \to -t$. Поэтому существует также управление, переводящее систему из состояния покоя в состояние поступательного движения со скоростью c. Таким образом, существует допустимое управление, переводящее систему из произвольного начального состояния в состояние поступательного движения (через состояние покоя). Тем самым доказано существование оптимального по быстродействию разгона системы маятников с различными частотами ω_i.

Если частоты некоторых маятников совпадают ($\omega_i = \omega_j$ при каких-либо i, j), то поставленные задачи перемещения, гашения колебаний и разгона, вообще говоря, не имеют решений. В самом деле, никакое управление $v(t)$ не может перевести две идентичные системы из разных начальных состояний в одно и то же конечное состояние в момент $t = T$. Если же начальные условия для маятников с одинаковыми частотами ω_i совпадают, то перечисленные задачи имеют решение, соответствующее меньшему числу маятников (идентичные маятники можно рассматривать как один).

В качестве примера построим управление, осуществляющее разгон системы двух маятников из состояния покоя. Эта задача была исследована С. А. Михайловым.

2. Разгон двух маятников. Перейдем в уравнениях (8.3.5) к безразмерным переменным, выбрав в качестве единицы скорости β, а в качестве единицы времени T_0 — величину, обратную наибольшей частоте

$$T_0 = \omega_1^{-1}, \quad \psi_i = \omega_1^{-2}\beta\psi_i', \quad t = T_0 t', \quad v = \beta v', \quad i = 1, 2.$$

В штрихованных переменных уравнения движения (8.3.5) примут вид (штрихи далее опускаем)

$$\ddot{\psi}_1 + \psi_1 = v, \quad \ddot{\psi}_2 + \omega^2\psi_2 = v, \quad \omega = \omega_2\omega_1^{-1} < 1. \qquad (8.3.8)$$

Предполагается, что скорость подвеса ограничена условием

$$0 \leqslant v \leqslant 1. \qquad (8.3.9)$$

Требуется найти управление $v(t)$, переводящее систему (8.3.8) из состояния покоя в состояние поступательного движения без колебаний со скоростью $v = 1$. Соответствующие граничные условия имеют вид (см. (8.3.7))

$$\psi_1(0) = \dot{\psi}_1(0) = \psi_2(0) = \dot{\psi}_2(0) = \dot{\psi}_1(T) = \dot{\psi}_2(T) = 0,$$
$$\psi_1(T) = 1, \quad \psi_2(T) = \omega^{-2}. \qquad (8.3.10)$$

Запишем решение системы (8.3.8) и подставим его в граничные условия (8.3.10)

$$\psi_1(T) = \int_0^T \sin(T - \tau)\, v(\tau)\, d\tau = 1,$$

$$\dot{\psi}_1(T) = \int_0^T \cos(T-\tau)\, v(\tau)\, d\tau = 0,$$

$$\psi_2(T) = \omega^{-1}\int_0^T \sin[\omega(T-\tau)]\, v(\tau)\, d\tau = \omega^{-2},$$

$$\dot{\psi}_2(T) = \int_0^T \cos[\omega(T-\tau)]\, v(\tau)\, d\tau = 0. \ \square \qquad (8.3.11)$$

В силу линейности системы оптимальным в смысле быстродействия будет кусочно постоянное управление, принимающее значение 0 или 1. Рассмотрим сначала режимы с двумя интервалами постоянства $v(t)$:

$$v = 1 \text{ при } 0 < t < t_1,\ t = T,$$
$$v = 0 \text{ при } t = 0,\ t_1 < t < t < t_1 + t_2 = T.$$

Подставим это управление в соотношения (8.3.11). После интегрирования получим

$$\cos t_2 - \cos(t_1 + t_2) = 1, \quad \sin t_2 = \sin(t_1 + t_2),$$
$$\cos(\omega t_2) - \cos[\omega(t_1 + t_2)] = 1,$$
$$\sin(\omega t_2) = \sin[\omega(t_1 + t_2)].$$

При $\omega = (6m \pm 1)^{-1}$, $m = 1, 2, \ldots$, полученная система, как нетрудно проверить, имеет решения $t_1 = t_2 = \pi/(3\omega)$. Эти решения являются оптимальными, так как время разгона $T = t_1 + t_2 = 2\pi/(3\omega)$ равно наименьшему времени, за которое можно разогнать один маятник с наименьшей собственной частотой $\omega < 1$ (см. (7.2.15)).

В случае произвольного ω оптимальное управление содержит большее число переключений. Построим управление с четырьмя интервалами постоянства скорости, обозначая их длительности через t_1, t_2, t_3, t_4. На интервалах длиной t_1, t_3 имеем $v = 1$, на остальных интервалах $v = 0$, причем $v(0) = 0$, $v(T) = 1$. Подставим $v(t)$ в соотношения (8.3.11)

$$\cos(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) - \cos(t_2 + t_3 + t_4) + \\ + \cos(t_3 + t_4) - \cos t_4 = -1,$$

$$\sin(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) - \sin(t_2 + t_3 + t_4) + \\ + \sin(t_3 + t_4) - \sin t_4 = 0,$$

$$\cos[\omega(t_1+t_2+t_3+t_4)]-\cos[\omega(t_2+t_3+t_4)]+ \\ +\cos[\omega(t_3+t_4)]-\cos(\omega t_4)=-1,$$
$$\sin[\omega(t_1+t_2+t_3+t_4)]-\sin[\omega(t_2+t_3+t_4)]+ \\ +\sin[\omega(t_3+t_4)]-\sin(\omega t_4)=0.$$

Можно проверить, что для любого ω полученная система имеет решение $t_1=t_4$, $t_2=t_3$ и приводится к виду

$$\begin{gathered}\cos t_2-\cos(t_1+t_2)=1/2,\\ \cos(\omega t_2)-\cos[\omega(t_1+t_2)]=1/2.\end{gathered} \tag{8.3.12}$$

Система (8.3.12) относительно t_1, t_2 решалась на ЭВМ. Результаты расчетов приведены на рис. 8.10. На рис. 8.10, *а* даны зависимости t_1, t_2 от $\omega\in[0{,}2,\ 1]$. Отме-

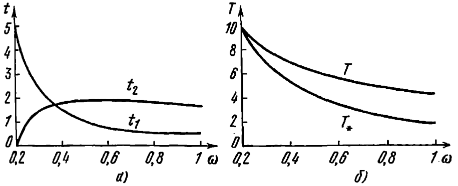


Рис. 8.10.

тим, что при $\omega=0{,}2$ режим с четырьмя участками постоянства управления переходит в оптимальный режим с двумя участками, при этом

$$\omega=(6m-1)^{-1}=0{,}2,\ m=1,\ t_2=t_4=0,\ t_1=t_3=\pi/3\omega.$$

На рис. 8.10, *б* нижняя кривая соответствует наименьшему времени T_*, за которое можно разогнать более длинный маятник с собственной частотой ω, $T_*=2\pi/(3\omega)$. Верхняя кривая 8.10, *б* дает время разгона двух маятников, полученное в результате численного решения системы (8.3.12), $T=2(t_1+t_2)$.

§ 4. Оптимальная амортизация динамических систем

1. Типичные задачи оптимальной амортизации. Важным классом прикладных задач оптимизации колебательных систем являются задачи, связанные с проектированием амортизаторов — механических устройств, служащих для защиты различных приборов и конструкций от вибрации и ударов. В современной технике широко распространены объекты, движущиеся с большими ускорениями или подвергающиеся вибрациям и ударным воздействиям. В результате этого установленные на таких объектах приборы испытывают большие перегрузки, снижающие точность работы приборов, а иногда и грозящие выходом их из строя. Для уменьшения этих перегрузок приборы крепятся к корпусу движущегося объекта не жестко, а с помощью специальных технических устройств — амортизаторов. К настоящему времени выполнено много исследований, посвященных теории амортизационных систем. Изложение методов анализа и оптимизации виброзащитных и противоударных систем, а также обширная библиография работ на эту тему содержатся в монографиях [108, 109, 207, 266].

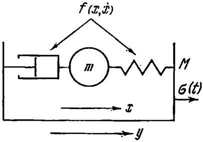


Рис. 8.11.

Возросшие требования к качеству амортизационных систем обусловили появление работ, посвященных построению оптимальных амортизаторов различных типов. Критерий оптимальности определяется целью амортизации.

Приведем несколько типичных постановок задач оптимизации амортизационных систем. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела, укрепленного в корпусе при помощи амортизационного устройства. Корпус движется прямолинейно, тело может перемещаться относительно корпуса в направлении его движения (рис. 8.11). Пусть массы амортизируемого тела и корпуса, в котором оно расположено, равны соответственно m и M. Будем считать, что к корпусу приложена сила (неуправляемое внешнее воздействие), зависящая от времени по некоторому закону $\sigma(t)$. Сила f, с которой амортизатор действует на амортизируемое тело, зависит только от его смещения относительно корпуса x и относительной скорости dx/dt. Конкретный вид функции $f(x, dx/dt)$ определяется конструкцией амортизационного устройства, а сама эта функция часто в технической литературе называется характеристикой амортизатора.

Движение описанной системы определяется дифференциальными уравнениями

$$M\ddot{y} + m(\ddot{x} + \ddot{y}) = \sigma(t), \quad m(\ddot{x} + \ddot{y}) = f(x, \dot{x}),$$

где y — смещение корпуса относительно инерциальной системы отсчета. Исключая из этих уравнений переменную y, получим уравнение, описывающее движение амортизируемого тела относительно корпуса

$$\ddot{x} - \frac{f(x, \dot{x})}{\mu} = -\frac{\sigma(t)}{M}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}. \tag{8.4.1}$$

Часто при исследовании амортизационных систем предполагается известной не сила $\sigma(t)$, приложенная к корпусу, а непосредственно ускорение корпуса $\ddot{y}(t)$ как функция времени. В этом случае уравнение относительного движения амортизируемого тела имеет вид

$$\ddot{x} - \frac{f(x, \dot{x})}{m} = -\ddot{y}(t). \tag{8.4.2}$$

В литературе, посвященной амортизационным системам, принято говорить о внешнем воздействии динамического (силового) типа, если известна сила $\sigma(t)$, приложенная к корпусу, и о воздействии кинематического типа, если известно ускорение корпуса $\ddot{y}(t)$ [109]. Из (8.4.1) и (8.4.2) вытекает, что в обоих случаях относительное движение амортизируемого тела описывается уравнением

$$\ddot{x} + u(x, \dot{x}) = F(t). \tag{8.4.3}$$

Здесь $u(x, \dot{x}) = -f(x, \dot{x})/m$, $F(t) = -\ddot{y}(t)$ в случае внешнего воздействия кинематического типа и $u(x, \dot{x}) = -f(x, \dot{x})/\mu$, $F(t) = -\sigma(t)/M$ для динамического внешнего воздействия.

Важнейшими величинами, определяющими качество амортизационной системы, являются максимум модуля относительного отклонения амортизируемого тела

$$J_1(u, F) = \max_{t \in [t_0, \infty)} |x(t)| \tag{8.4.4}$$

и максимум модуля абсолютного ускорения (т. е. перегрузки) амортизируемого тела. Последний с точностью до постоянного множителя равен максимальному значению абсолютной величины функции $u(x, \dot{x})$

$$J_2(u, F) = \max_{t \in [t_0, \infty)} |u(x(t), \dot{x}(t))|. \tag{8.4.5}$$

Величины J_1, J_2 являются функционалами внешнего воздействия $F(t)$ и характеристики амортизатора $u(x, \dot{x})$. Через $x(t)$ в выражениях (8.4.4), (8.4.5) обозначено решение дифференциального уравнения (8.4.3), отвечающее заданным начальным условиям

$$x(t_0) = x^0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}^0. \tag{8.4.6}$$

Рассмотрим две типичные задачи оптимизации амортизационных систем.

Задача 1. Пусть движение системы описывается уравнением (8.4.3) с начальными условиями (8.4.6). Требуется среди определенного класса Y функций $u(x, \dot{x})$ найти оптимальную характеристику амортизатора $u_0(x, \dot{x})$ такую, что

$$J_1(u_0, F) = \min_{u \in Y} J_1(u, F), \quad J_2(u_0, F) \leqslant U.$$

Такая задача была впервые поставлена в работе [74]. Эта постановка соответствует требованию минимизации габаритов корпуса при условии, что перегрузка не превышает заданной величины U, гарантирующей надежную работу амортизируемого объекта.

Задача 2. Среди определенного класса Y функций $u(x, \dot{x})$ найти оптимальную характеристику амортизатора $u^0(x, \dot{x})$ такую, что

$$J_2(u^0, F) = \min_{u \in Y} J_2(u, F), \quad J_1(u^0, F) \leqslant D.$$

Эта задача соответствует требованию минимизации перегрузки при ограничениях на допустимые размеры корпуса. Задачи 1 и 2 являются двойственными друг к другу в том смысле, что, зная решение одной из них, можно с помощью несложного пересчета получить решение другой. Это вытекает из монотонной зависимости оптимального значения минимизируемого функционала в обеих задачах от параметра, описывающего ограничение. Решению задач 1 и 2 при различных внешних воздействиях посвящены исследования [49, 50, 54, 55, 74, 77, 142, 190, 191, 206, 207, 254, 266] и другие.

Отдельно отметим так называемую задачу о предельных возможностях амортизации, состоящую в вычислении оптимальной характеристики $u(t)$ как функции времени. При этом получается минимально возможное при заданных начальных условиях значение критерия качества амортизации. Сравнение значений максимума перегрузки или отклонения, обеспечиваемых амортизатором той или иной конструкции, с предельно возможными позволяет сделать вывод об эффективности данного амортизатора и о целесообразности его применения. Решение задачи о предельных возможностях может быть использовано для приближенного синтеза оптимальной характеристики амортизатора в виде функции фазовых координат [266].

В описанных выше задачах функция $F(t)$, характеризующая внешнее воздействие, предполагалась заданной. Однако, практически редко имеется полная информация о законе изменения ускорения корпуса или приложенной к нему силы, и целесообразно проектировать амортизационную систему в расчете на некоторый класс внешних воздействий. Рассмотрим две задачи о выборе оптимальной характеристики амортизатора, рассчитанного на класс внешних воздействий, являющиеся естественным обобщением задач 1 и 2. Пусть относительно функции $F(t)$ известно, что она принадлежит некоторому множеству Φ возможных внешних воздействий.

Задача 3. Найти оптимальную характеристику $v_0(x, \dot{x}) \in Y$ такую, что

$$\max_{F\in\Phi} J_1(v_0, F) = \min_{u\in Y}\max_{F\in\Phi} J_1(u, F),$$
$$\max_{F\in\Phi} J_2(v_0, F) \leqslant V,$$

Задача 4. Найти оптимальную характеристику

$$v^0(x, \dot{x}) \in Y$$

такую, что

$$\max_{F \in \Phi} J_2(v^0, F) = \min_{u \in Y} \max_{F \in \Phi} J_2(u, F),$$

$$\max_{F \in \Phi} J_1(v^0, F) \leqslant R.$$

Здесь V и R — заданные положительные величины. Решению задач об оптимальной амортизации систем, рассчитанных на класс внешних воздействий, посвящены работы [266, 189, 51] и другие. Задачи 1—4 могут быть обобщены на системы со многими степенями свободы (см. [75, 109, 266] и другие).

Перечисленные выше задачи являются простыми примерами, отражающими типичные особенности оптимизационных задач, связанных с проектированием амортизационных систем. Они, конечно, не исчерпывают всех возможных постановок. Читателю, интересующемуся проблемами проектирования оптимальных амортизаторов в более широком аспекте, можно обратиться к монографиям [109, 207, 266]. Ниже рассматриваются в качестве примеров некоторые простые задачи оптимальной амортизации для систем с одной степенью свободы.

2. Оптимизация параметров упруго-демпфированных противоударных амортизаторов. В книге [97] показано, что амортизаторы целесообразно применять лишь в том случае, когда путь торможения (или разгона) объекта, содержащего амортизируемое тело, не больше хода амортизатора. Поэтому особенный интерес представляет вопрос о защите при кратковременном (ударном) внешнем воздействии на корпус.

Если время действия внешней силы много меньше характерного времени амортизационной системы (например, периода ее колебаний), то в некоторых случаях можно считать, что корпус подвергается мгновенному удару и полагать $F(t) = \beta\delta(t)$, где β — постоянная (интенсивность удара), а $\delta(t)$ — дельта-функция.

Рассмотрим механическую систему, представляющую собой абсолютно твердое тело, связанное с движущимся корпусом посредством упруго-демпфированного амортизатора со степенной характеристикой вида

$$u(x, \dot{x}) = k|\dot{x}|^r \operatorname{sign} \dot{x} + c|x|^m \operatorname{sign} x, \qquad r > 0,\ m > 0. \tag{8.4.7}$$

Здесь $k \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$ — постоянные коэффициенты демпфирования и жесткости соответственно, r и m — константы. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ система, находящаяся в положении равновесия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, подвергается мгновенному удару ($F(t) = \beta\delta(t)$), в результате которого амортизируемое тело приобретает конечную относительную скорость β. Движение амортизируемого тела относительно корпуса определяется дифференциальным уравнением с начальными условиями

$$\ddot{x} + k|\dot{x}|^r \operatorname{sign} \dot{x} + c|x|^m \operatorname{sign} x = 0, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = \beta. \tag{8.4.8}$$

Введем следующие обозначения

$$I_1^{r,m}(k, c) = \max_{t \in [0,\infty)} |x(t)|, \tag{8.4.9}$$

$$I_2^{r,m}(k, c) = \max_{t \in [0,\infty)} |k|\dot{x}(t)|^r \operatorname{sign} \dot{x}(t) + c|x(t)|^m \operatorname{sign} x(t)| = \max_{t \in [0,\infty)} |\ddot{x}(t)|. \tag{8.4.10}$$

Ставится задача об определении оптимальных коэффициентов демпфирования и жесткости, минимизирующих максимум модуля перегрузки при ограниченном максимуме модуля отклонения. Таким образом, требуется найти параметры k_0, c_0 такие, что

$$I_2^{r,m}(k_0, c_0) = \min_{k,c \geqslant 0} I_2^{r,m}(k, c), \qquad I_1^{r,m}(k_0, c_0) \leqslant D. \tag{8.4.11}$$

Такая постановка соответствует задаче 2, описанной в п. 1. В рассматриваемом случае множество Y допустимых характеристик представляет собой параметрическое семейство функций, а внешнее воздействие — ударного типа ($F(t) = \beta\delta(t)$). Будем считать в дальнейшем, что начальная скорость β и максимально допустимое отклонение D равняются единице. Это отвечает переходу в (8.4.8)—(8.4.11) к безразмерным переменным по формулам

$$x' = \frac{x}{D}, \quad t' = \frac{\beta}{D} t, \quad k' = kD\beta^{r-2}, \quad c' = c\frac{D^{m+1}}{\beta^2}. \tag{8.4.12}$$

Отметим некоторые свойства системы (8.4.8), которые понадобятся в дальнейшем.

Свойство 1. Максимум модуля отклонения амортизируемого тела (8.4.9) достигается в момент t_* первого локального экстремума функции $x(t)$. Это свойство является простым следствием диссипативности системы (8.4.8).

Свойство 2. Максимум модуля перегрузки (8.4.10) достигается на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_*$, где t_* — момент первого локального экстремума функции $x(t)$.

Действительно, в силу свойства 1 для любого момента времени $t > t_*$ выполняется неравенство $|x(t)| \leqslant |x(t_*)|$. Поскольку функция $x(t)$ непрерывна и t_* — точка ее экстремума, то для любого момента $t_1 > t_*$ существует момент $t_2 \leqslant t_*$ такой, что

$$|x(t_1)| = |x(t_2)|. \tag{8.4.13}$$

В силу диссипативности системы (8.4.8) ее механическая энергия $E = \dot{x}^2/2 + c|x|^{m+1}/(m+1)$ не возрастает с ростом времени и, следовательно, справедливо неравенство

$$|\dot{x}(t_1)| \leqslant |\dot{x}(t_2)|. \tag{8.4.14}$$

Решение задачи Коши (8.4.8) $x(t)$ неотрицательно вместе со своей производной $\dot{x}(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_*$. Отсюда и из (8.4.13), (8.4.14) следует, что

$$|\ddot{x}(t_1)| \leqslant k|\dot{x}(t_1)|^r + c|x(t_1)|^m \leqslant k\dot{x}^r(t_2) + cx^m(t_2) = |\ddot{x}(t_2)|.$$

Таким образом, для любого момента времени $t_1 > t_*$ справедливо соотношение

$$|\ddot{x}(t_1)| \leqslant |\ddot{x}(t_2)| \leqslant \max_{t \in [0,\, t_*]} |\ddot{x}(t)|,$$

которое и доказывает свойство 2.

Приведем решение задачи оптимизации (8.4.11) для амортизаторов с линейной жесткостью ($m=1$) и с линейным ($r=1$) и квадратичным ($r=2$) демпфированием. Амортизаторы указанных типов широко распространены в технике.

3. Амортизатор с квадратичным демпфированием. Прежде, чем решать задачу определения оптимальных параметров амортизатора с квадратичным демпфированием, решим следующую задачу о предельных возможностях защиты от ударных воздействий. Пусть движение системы описывается дифференциальным уравнением с начальными условиями

$$\ddot{x}+u(t)=0,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1. \tag{8.4.15}$$

Требуется найти кусочно непрерывную функцию $u_0(t)$ такую, что

$$\begin{gathered}\max_{t\in[0,\infty)}|u_0(t)|=\min_{u}\max_{t\in[0,\infty)}|u(t)|,\\ \max_{t\in[0,\infty)}|x(t)|\leqslant 1.\end{gathered} \tag{8.4.16}$$

Справедливо следующее соотношение

$$\max_{t\in[0,\infty)}|u_0(t)|\geqslant 0{,}5. \tag{8.4.17}$$

Допустим противное, т. е. что $|u_0(t)|<0{,}5$ (и, следовательно $u_0(t)<0{,}5$) для всех $t\in[0,\ \infty)$. Тогда справедлива оценка решения уравнения (8.4.15)

$$x(t)=t-\int_0^t(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau>t-0{,}5\int_0^t(t-\tau)\,d\tau=t-\frac{t^2}{4},$$

$$\max_{t\in[0,\infty)}x(t)>\max_{t\in[0,\infty)}(t-t^2/4)=1.$$

Отсюда вытекает, что если $|u_0(t)|<0{,}5$ для всех $t\in[0,\ \infty)$, то неравенство (8.4.16) не выполняется. Полученное противоречие доказывает неравенство (8.4.17). Можно проверить, что управление

$$u_0(t)=\begin{cases}0{,}5, & 0\leqslant t\leqslant 2,\\ v(t): & |v(t)|\leqslant 0{,}5,\quad |x(t)|\leqslant 1,\quad t>2\end{cases} \tag{8.4.18}$$

приводит к соотношениям

$$\max_{t\in[0,\infty)} |u_0(t)| = 0{,}5, \qquad \max_{t\in[0,\infty)} |x(t)| = x(2) = 1. \tag{8.4.19}$$

Выражение (8.4.18) означает, что на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2$ до достижения первого нуля скорости $\dot{x}(t)$ управление $u_0(t)$ постоянно, а при $t > 2$ оно может быть любой кусочно-непрерывной функцией, удовлетворяющей указанным в (8.4.18) неравенствам. Из (8.4.17), (8.4.19) вытекает, что любая функция $u_0(t)$ вида (8.4.18) является оптимальным управлением, решающим задачу (8.4.15), (8.4.16). Методом от противного доказывается, что на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2$ оптимальное управление определяется единственным образом.

Соотношения (8.4.19) определяют предельные возможности защиты амортизируемого тела от ударных воздействий. Нельзя добиться значения максимальной перегрузки, меньшего 0,5, в задаче (8.4.15), (8.4.16).

Покажем теперь, что можно так выбрать параметры амортизатора с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием, что минимум максимальной нагрузки будет равен 0,5, т. е. что при соответствующем выборе параметров амортизатор указанного типа обеспечивает абсолютный минимум перегрузки.

Если управление $u_0(t)$ имеет вид (8.4.18), то на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2$ имеем

$$x(t) = t - t^2/4, \quad \dot{x}(t) = 1 - t/2. \tag{8.4.20}$$

После подстановки выражений (8.4.20) в уравнение (8.4.8) при $m = 1$, $r = 2$ левая часть этого уравнения примет вид

$$-\frac{1}{2} + k\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 + c\left(t - \frac{t^2}{4}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) + (k - c)\left(\frac{t^2}{4} - t\right),$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2.$$

Это выражение тождественно обращается в нуль тогда и только тогда, когда $k = c = 0{,}5$. Таким образом, доказано, что при $k = c = 0{,}5$ выполняются соотношения

$$|\ddot{x}(t)| = 0{,}5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2, \quad \max_{t\in[0,2]} |x(t)| = x(2) = 1.$$

Отсюда и из отмеченных выше свойств 1 и 2 системы (8.4.8) (здесь имеем $t_* = 2$) вытекает, что для амортизатора с квадратичным демпфированием и линейной жесткостью оптимальные параметры равны $k_0 = c_0 = 0{,}5$. Переходя к исходным размерным переменным по формулам (8.4.12), получим зависимость оптимальных параметров и соответствующего значения функционала от величин β и D

$$k_0 = 0{,}5\frac{1}{D}, \quad c_0 = 0{,}5\frac{\beta^2}{D^2}, \quad I_2^{2,1}(k_0, c_0) = 0{,}5\frac{\beta^2}{D}. \qquad (8.4.21)$$

Итак, амортизатор с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием обеспечивает абсолютный минимум максимальной перегрузки. Отметим, что в классе упруго-демпфированных амортизаторов с характеристикой вида (8.4.7) только амортизатор с квадратичным демпфированием ($r = 2$) и линейной жесткостью ($m = 1$) обладает таким свойством. Действительно, как было отмечено выше, оптимальное управление $u_0(t)$, доставляющее предельно возможное качество амортизации, определяется единственным образом на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2$ (см. (8.4.18)). Поэтому для того, чтобы амортизатор с характеристикой вида (8.4.7) обеспечивал абсолютный минимум перегрузки, необходимо, чтобы выполнялось тождество

$$k\left(1 - \frac{t}{2}\right)^r + c\left(t - \frac{t^2}{4}\right)^m \equiv \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2. \qquad (8.4.22)$$

Подставляя в (8.4.22) значения $t = 0$ и $t = 2$, получим, что коэффициенты демпфирования и жесткости должны быть равны $k = c = 0{,}5$. Дифференцируя тождество (8.4.22) при $k = c = 0{,}5$, получим новое тождество

$$\frac{r}{2}\left(1 - \frac{t}{2}\right)^{r-2} = m\left(t - \frac{t^2}{4}\right)^{m-1},$$

которое в случае $r > 0$, $m > 0$ справедливо только при $r = 2$, $m = 1$.

4. Линейный амортизатор. Решив при $m = r = 1$ задачу Коши (8.4.8) и исследовав на максимум функции $|x(t)|$ и $|\ddot{x}(t)|$ при помощи обычных методов анализа, получим выражения для функционалов (8.4.9), (8.4.10)

$$I_1^{1,1}(k, c) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{c}}\left(\dfrac{k-\sqrt{k^2-4c}}{k+\sqrt{k^2-4c}}\right)^{\frac{k}{2\sqrt{k^2-4c}}}, & k^2-4c>0, \\ 2(kc)^{-1}, & k^2-4c=0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{c}}\exp\left(-\dfrac{k}{\sqrt{4c-k^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4c-k^2}}{k}\right), \\ k^2-4c<0, \end{cases} \tag{8.4.23}$$

$$I_2^{1,1}(k, c) = \begin{cases} k, & k^2-c \geqslant 0, \\ \exp\left(-\dfrac{k}{\sqrt{4c-k^2}}\chi(k, c)\right)[k\cos\chi(k, c) + \\ + \dfrac{2c-k^2}{\sqrt{4c-k^2}}\sin\chi(k, c)], & k^2-c<0, \end{cases}$$

$$\chi(k, c) = \operatorname{arctg}\frac{(c-k^2)\sqrt{4c-k^2}}{3kc-k^3}. \tag{8.4.24}$$

Формулы (8.4.23), (8.4.24) получены и исследованы в работе [49]. Доказано, что $\operatorname{grad} I_2^{1,1}(k, c) \neq 0$ всюду в области $k \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Следовательно, оптимальные параметры находятся на границе области своих допустимых значений, т. е. на кривой $\gamma = \{k, c : I_1^{1,1}(k, c) = 1\}$.

Отметим некоторые свойства кривой γ. Дифференцированием функции $I_1^{1,1}(k, c)$ и последующим анализом доказывается, что

$$\frac{\partial I_1^{1,1}(k, c)}{\partial k} < 0, \qquad \frac{\partial I_1^{1,1}(k, c)}{\partial c} < 0. \tag{8.4.25}$$

Неравенства (8.4.25) имеют простое механическое истолкование. Они означают, что с увеличением как коэффициента демпфирования, так и жесткости амортизатора, максимум модуля отклонения амортизируемого тела уменьшается. Из (8.4.23) следует, что

$$I_1^{1,1}(k, c) \xrightarrow[k\to 0]{} \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad I_1^{1,1}(k, c) \xrightarrow[c\to 0]{} \frac{1}{k}. \tag{8.4.26}$$

В силу теоремы о неявных функциях из (8.4.25) вытекает, что кривая γ представляет собой график монотонно убывающей функции $c(k)$, и в силу (8.4.26) выполняются соотношения

$$\lim_{k\to 0} c(k) = 1, \quad \lim_{k\to 1} c(k) = 0.$$

На рис. 8.12 сплошными линиями изображены линии уровня функции $I_2^{1,1}(k, c)$, а штриховой — кривая γ. Задача поиска оптимальных параметров сводится к поиску минимума функции $I_2^{1,1}(k, c)$ на кривой γ. В результате численного решения на ЭВМ получены следующие значения оптимальных параметров и соответствующего им минимума максимальной перегрузки

$$k_0 \approx 0{,}481, \quad c_0 \approx 0{,}361,$$
$$I_2^{1,1}(k_0, c_0) \approx 0{,}521.$$

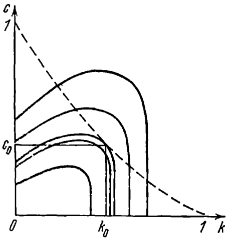


Рис. 8.12.

Переходя к исходным размерным переменным по формулам (8.4.12), получим выражения, определяющие зависимость оптимальных параметров линейного амортизатора и функционала от начальной скорости β и максимально допустимого отклонения D

$$k_0 \approx 0{,}481 \frac{\beta}{D}, \quad c_0 \approx 0{,}361 \frac{\beta^2}{D^2}, \quad I_2^{1,1}(k_0, c_0) \approx 0{,}521 \frac{\beta^2}{D}. \tag{8.4.27}$$

Сравним значение критерия качества амортизации, соответствующего оптимальному линейному амортизатору, с предельно возможным, обеспечиваемым амортизатором с линейной жесткостью и квадратичным демпфированием. Из (8.4.21), (8.4.27) следует, что

$$\frac{I_2^{1,1}(k_0, c_0) - I_2^{2,1}(k_0, c_0)}{I_2^{2,1}(k_0, c_0)} \approx 0{,}04,$$

т. е. линейный амортизатор с оптимальными параметрами обеспечивает хорошее качество амортизации, отличающееся от предельно возможного всего на 4%. Некоторые задачи амортизации крутильных колебаний в случае ударного воздействия, близкие по постановке к изложенным выше, решены в статье [52].

§ 5. Об управляемой амортизации ротора

1. Уравнения движения и квазистационарное приближение. Рассматривается механическая система, состоящая из несбалансированного ротора, вращающегося вокруг оси, жестко связанной с корпусом. Корпус укреплен на неподвижном основании посредством вязко-упругого амортизатора с линейной характеристикой и может перемещаться поступательно вдоль горизонтальной оси x (рис. 8.13). Пусть M — масса корпуса, m — масса ротора,

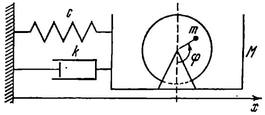


Рис. 8.13.

l — расстояние от оси вращения до центра инерции ротора; $k > 0$, $c > 0$ — коэффициенты демпфирования и жесткости амортизатора соответственно; x — отклонение корпуса от положения равновесия, φ — угол поворота ротора вокруг оси вращения. Тогда имеем уравнение движения центра масс системы

$$(m+M)\ddot{x}+k\dot{x}+cx=ml(\dot{\varphi}^2\sin\varphi-\ddot{\varphi}\cos\varphi). \quad (8.5.1)$$

Изменение угловой переменной φ в процессе раскрутки зададим уравнением и начальными условиями

$$\dot{\varphi}=\omega,\ \ \dot{\omega}=\varepsilon f(t),\ \ \varphi(0)=\varphi^0,\ \ \omega(0)=\omega^0, \quad (8.5.2)$$

где φ^0, ω^0 — постоянные, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Функция f и ее производная df/dt предполагаются непрерывными и ограниченными для всех $t \in [0, \infty)$. Конкретный их вид далее не используется; предполагается лишь, что угловая скорость ω в силу (8.5.2) монотонно возрастает от ω^0 до некоторой скорости установившегося вращения ω^1, т. е. $\omega \to \omega^1$ при $t \to \infty$. Малость числового параметра ε означает, что время, за которое существенно изменяется угловая скорость вращения ротора, много больше периода установившегося вращения $2\pi/\omega^1$. Приведенная модель описывает подвижные узлы машин и механизмов, широко распространенных в технике. Отметим, что динамика колебательных систем, содержащих неуравновешенный ротор, исследовалась в ряде работ (см., например, [111, 144, 203, 222, 240, 255, 256] и другие).

Перейдем в (8.5.1), (8.5.2) к безразмерным величинам

$$t' = \omega^1 t, \quad x' = \frac{m+M}{m}\frac{x}{l},$$
$$k' = \frac{k}{(m+M)\,\omega^1}, \quad c' = \frac{c}{(m+M)\,(\omega^1)^2}, \tag{8.5.3}$$
$$\omega' = \frac{\omega}{\omega^1}, \quad (\omega^0)' = \frac{\omega^0}{\omega^1}, \quad f'(t') = \frac{1}{(\omega^1)^2} f\left(\frac{t'}{\omega^1}\right).$$

После замены (8.5.3) получим (штрихи далее опускаем)

$$\ddot{x} + k\dot{x} + cx = \dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\omega} = \varepsilon f(t), \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \omega(0) = \omega^0. \tag{8.5.4}$$

Решение уравнения (8.5.4) для x представим в виде суммы свободных и вынужденных колебаний

$$x(t) = C_1 G_1(t) + C_2 G_2(t) + y(t). \tag{8.5.5}$$

Здесь G_1, G_2 — функции, отвечающие решению однородного уравнения (8.5.4), C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Вынужденные колебания $y(t)$ в случае медленно изменяющейся угловой скорости приближенно представляются в виде

$$\blacksquare \quad y(t) = U(c, k, z)\sin(\varphi + \alpha),$$
$$U(c, k, z) = z\left[(c-z)^2 + k^2 z\right]^{-1/2},$$
$$\sin\alpha = B/U, \quad \cos\alpha = A/U, \quad z = \omega^2,$$

$$A = z^{-1}(c - z)U^2, \quad B = -k\omega^{-1}U^2,$$
$$\omega(t, \varepsilon) = \omega^0 + \varepsilon\int_0^t f(\tau)\,d\tau,$$
$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi^0 + \omega^0 t + \varepsilon\int_0^t (t - \tau) f(\tau)\,d\tau. \quad \square(8.5.6)$$

Таким образом, y — приближенное периодическое по φ (с периодом 2π) решение уравнения (8.5.4), аналогичное решению при гармоническом воздействии. Величина U является амплитудой квазистационарных колебаний корпуса, вынуждаемых вращением ротора. Как следует из известных асимптотических методов [144], решение (8.5.5), (8.5.6) имеет погрешность $O(\varepsilon)$ для всех $t \in [0, \infty)$.

2. Исследование процесса раскрутки. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ система (8.5.4) покоится, т. е. $x(0) = \dot{x}(0) = \omega(0) = 0$.

Таким образом, угловая скорость ω на интервале $t \in [0, \infty)$ монотонно возрастает от 0 до 1 (в безразмерных переменных). При сделанных предположениях постоянные C_1, C_2 равны нулю, а движение корпуса описывается функцией y из (8.5.6).

Отметим, что основная цель амортизации вращающихся узлов состоит в уменьшении динамических нагрузок, действующих на основание. Кроме того, из-за ограниченных габаритов конструкции амплитуда колебаний корпуса как в процессе разгона ротора, так и в стационарном режиме не должна приводить к соударениям с другими элементами конструкции, т. е. величина U должна быть ограниченной. Исследуем указанные характеристики колебательной системы как функции параметров $c > 0$, $k > 0$ и частоты ω.

Рассмотрим функцию $U(c, k, z)$. При фиксированных c, k и условии $k^2 - 2c \geqslant 0$ функция U монотонно возрастает для всех $z \geqslant 0$. Если же $k^2 - 2c < 0$, то амплитуда U вначале возрастает при $z \in [0, z_*]$, где $z_* = 2c^2(2c - k^2)^{-1}$, а затем, при $z > z_*$, монотонно убывает. Таким образом, в этом случае функция $U(c, k, z)$ имеет максимум в точке $z = z_*$, равный $4ck^{-1}(4c - k^2)^{-1/2}$. Кроме того, из (8.5.6) следует, что $U(c, k, z) \to 1$ при $z \to \infty$. При фиксированных k и z функция U возрастает с ростом коэффициента жесткости c при $0 < c < z$, имеет максимум, равный ωk^{-1}, при $c = z$, а затем монотонно убывает. При фиксированных c и z функция U монотонно убывает с ростом коэффициента демпфирования k. Зависимости $U(c, k, \omega^2)$ при $k = 0{,}25$ и некоторых c (кривые: 1 ($c = 0{,}25$), 2 ($c = 0{,}5$) и 3 ($c = 1{,}75$)) представлены на рис. 8.14.

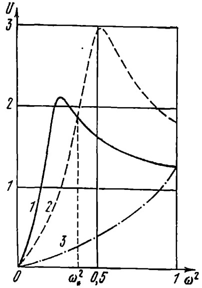


Рис. 8.14.

Найдем динамическую нагрузку, т. е. силу F, с которой амортизатор действует на основание. Согласно (8.5.4)—(8.5.6) имеем

$$F = kx + c\dot{x} = \omega^2(A + 1)\sin\varphi + \omega^2 B\cos\varphi + O(\varepsilon),$$

откуда получаем выражение для амплитуды динамической нагрузки R

$$R(c,\ k,\ z) = z(c^2 + k^2 z)^{1/2}[(c - z)^2 + k^2 z]^{-1/2},\quad z = \omega^2. \qquad (8.5.7)$$

Из (8.5.7) следует, что $R \to z$ при жестком креплении корпуса к основанию, т. е. при $c \to \infty$ или $k \to \infty$. Следовательно, применение амортизатора для заданной частоты вращения ротора ω эффективно, лишь если $R < z$. При помощи (8.5.7) находим, что неравенство $R < z$ выполняется, если $c < z/2$. Исследование R как функции коэффициента жесткости c при фиксированных положительных k и z показывает, что динамическая нагрузка вначале возрастает с ростом c, достигает максимума при

$$c = c_* = {}^1/_2[z + (z^2 + 4k^2 z)^{1/2}] > z/2,$$

а затем монотонно убывает. Таким образом, для значений $c < z/2$, при которых $R < z$, функция R монотонно возрастает с ростом c. При фиксированных значениях c, z динамическая нагрузка R монотонно возрастает при $c < z/2$ и убывает для $c > z/2$ с ростом k. При $c = z/2$ функция R от параметра k не зависит.

Из установленных свойств вытекает, что в стационарном режиме ($z = \omega^2 = 1$) обе функции U, R возрастают с ростом c при $c < 1/2$ и фиксированном k. Следовательно, в стационарном режиме эффективность амортизации возрастает при уменьшении c. Отметим, что должно быть $c \gg \varepsilon$ для справедливости приближенных формул (8.5.5), (8.5.6).

3. Релейное управление жесткостью и оптимизация параметров. В некоторой области значений параметров c, k величина отклонения корпуса от положения равновесия в процессе раскрутки ротора может значительно превышать амплитуду установившихся колебаний. Это обстоятельство связано с прохождением частоты вращения через резонансное значение. Поэтому, как следует из анализа функции U (рис. 8.14), может оказаться целесообразным на начальном этапе раскрутки несколько увеличить жесткость амортизатора, несмотря на возможное возрастание динамической нагрузки. При этом повышается резонансная частота, и наступление резонанса оттягивается. Впоследствии жесткость следует уменьшить, и резонанс оказывается как бы пройденным. Время пребывания системы вблизи резонанса при этом сокращается, а максимальное по диапазону частот $\omega \in [0, 1]$ значение амплитуды U уменьшается. Отметим, что вопросы реализации скачкообразного управляемого изменения параметров колебательной системы при помощи электромеханических устройств рассматривались в работе [222].

Рассмотрим задачу об оптимальном релейном управлении жесткостью амортизатора c с целью уменьшения амплитуды вынужденных колебаний. Пусть $c(t) = b$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$ и $c(t) = a$ при $t > t_*$, где a, b — заданные положительные постоянные $(a < b)$, t_* — оптимальный момент переключения, минимизирующий максимум амплитуды квазистационарных колебаний $U(c, k, \omega^2)$. Сделанное предположение о монотонности ω по t приводит к эквивалентной задаче об оптимальном выборе величины $\omega_* \in [0, 1]$, при которой производится переключение жесткости. Величину ω_* следует выбрать так, чтобы

$$\max_{\omega \in [0,1]} U(c(\omega, \omega_*), k, \omega^2) \to \min \text{ по } \omega_* \in [0, 1], \tag{8.5.8}$$

$$c(\omega, \omega_*) = b \text{ при } \omega < \omega_*,$$

$$c(\omega, \omega_*) = a \text{ при } \omega > \omega_*.$$

Здесь $c(\omega, \omega_*)$ — закон переключения жесткости, зависящий от текущей угловой скорости ω и выбираемого параметра ω_*.

Отметим, что в момент релейного изменения жесткости c возникнут свободные колебания и к функции y из (8.5.6) следует добавить члены $C_1G_1 + C_2G_2$ в (8.5.5). Однако свободные колебания экспоненциально затухают с постоянной времени порядка единицы, которая мала по сравнению с характерным интервалом времени (порядка ε^{-1}) изменения частоты ω. Поэтому за время порядка $\ln \varepsilon^{-1} \ll \varepsilon^{-1}$ величина амплитуды свободных колебаний уменьшится и будет иметь порядок некоторой положительной степени ε. Следовательно, свободными колебаниями можно пренебречь и пользоваться квазистационарным приближением (8.5.6).

Искомая величина угловой скорости ω_*, при которой следует согласно (8.5.8) изменить коэффициент жесткости c, равна

$$\omega_* = \begin{cases} (a+b)^{1/2}/\sqrt{2}, & a+b<2, \\ 1, & a+b \geqslant 2. \end{cases} \tag{8.5.9}$$

Решение (8.5.9) получается путем непосредственного вычисления минимума (8.5.8) для функции $U(c, k, z)$ из (8.5.6). При помощи соотношения (8.5.6) для ω может быть также однозначно определен момент переключения t_*.

Решение (8.5.9) имеет простой смысл, ясный из рис. 8.14. Переключение жесткости производится при частоте ω_*, отвечающей пересечению кривых $U(c, k, \omega^2)$ для $c=a$ и $c=b$. На рис. 8.14 указана частота переключения ω_* для $a=0{,}5$, $b=0{,}25$. Если же абсцисса указанной точки пересечения лежит вне отрезка $[0, 1]$, то переключение производится лишь в пределе при $t \to \infty$, т. е. при выходе на установившийся режим. Из рис. 8.14 видно, что указанное регулирование жесткости, вообще говоря, позволяет снизить максимальное значение амплитуды U колебаний корпуса и уменьшить нежелательные эффекты при прохождении системы через резонанс.

4. Оптимальный выбор коэффициента вязкого трения. Приведем решение задачи об оптимальном выборе постоянного коэффициента вязкого трения k в случае установившихся колебаний при постоянной угловой скорости вращения ротора ω. Жесткость c также считаем постоянной, и поэтому для уменьшения числа безразмерных параметров полагаем $\omega^1 = [c/(m+M)]^{1/2}$ в (8.5.3). После этого в соотношениях (8.5.4), (8.5.6), (8.5.7) следует положить $c=1$, так что амплитуда колебаний корпуса и амплитуда динамической нагрузки представятся в виде

$$U(\omega,\ k) = \omega^2[(\omega^2-1)^2 + k^2\omega^2]^{-1/2},$$
$$R(\omega,\ k) = U(\omega,\ k)(1+k^2\omega^2)^{1/2}. \tag{8.5.10}$$

Поставим задачу о выборе параметра $k \geqslant 0$, удовлетворяющего при данной частоте ω ограничению на амплитуду колебаний $U(\omega,\ k) \leqslant A$ и доставляющего минимум амплитуде нагрузки $R(\omega,\ k)$. Здесь $A > 0$ — постоянная.

Из первого выражения (8.5.10) следует, что $U(\omega,\ k)$ монотонно убывает с ростом k. Непосредственным дифференцированием второго выражения (8.5.10) устанавливаем, что $\partial R/\partial k < 0$ при $\omega < \sqrt{2}$ и $\partial R/\partial k \geqslant 0$ при $\omega \geqslant \sqrt{2}$. Отсюда сразу следует, что при $\omega < \sqrt{2}$ оптимальное значение $k \to \infty$, что отвечает жесткой связи корпуса с основанием. Если же $\omega > \sqrt{2}$, то следует выбрать минимально возможный коэффициент k, допускаемый ограничением $U(\omega,\ k) \leqslant A$. В результате получаем решение поставленной задачи об оптимальном выборе k в виде

■ $k \to \infty,\ U = 0,\ R = \omega^2 \qquad (\omega \leqslant \sqrt{2});$

$k = 0,\ U \leqslant A,\ R = \omega^2(\omega^2-1)^{-1}$

$$(\omega > \sqrt{2},\ A \geqslant \omega^2(\omega^2-1)^{-1});$$

$k = [\omega^2 A^{-2} - (\omega^2-1)^2\omega^{-2}]^{1/2},\quad U = A,$

$R = \omega[A^2(2-\omega^2) + \omega^2]^{1/2}$

$$(\omega > \sqrt{2},\ A < \omega^2(\omega^2-1)^{-1}). \quad \square \tag{8.5.11}$$

Из решения (8.5.11) следует, что в случае больших угловых скоростей ротора ($\omega \to \infty$) имеем

$$\begin{aligned} &k = 0, && R \to 1 && (A > 1); \\ &k \to \infty, && R \sim \omega^2(1-A^2)^{1/2} && (A < 1); \\ &k = \sqrt{2}, && R \sim \omega\sqrt{2} && (A = 1). \end{aligned} \tag{8.5.12}$$

5. Исследование системы амортизации с сухим трением. В практических задачах динамики несбалансированного ротора амортизатор с вязким трением приводит к большим значениям амплитуды нагрузки в случае больших угловых скоростей ротора; см. формулу (8.5.7). Поэтому представляется выгодным использовать амортизатор с сухим трением, для которого демпфер обладает следующей характеристикой:

$$\begin{gathered} Q = fq, \\ q = \begin{cases} \operatorname{sign} \dot{x}, & \dot{x} \neq 0, \\ P/f, & \dot{x} = 0, \quad |P| \leqslant f, \\ \operatorname{sign} P, & \dot{x} = 0, \quad |P| > f, \end{cases} \\ P = ml(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi) - cx. \end{gathered} \tag{8.5.13}$$

Здесь Q — сила сухого трения, f — коэффициент сухого трения, а через P обозначена сумма всех сил, кроме силы сухого трения, приложенных к корпусу; см. (8.5.1). После подстановки функции Q, определяемой согласно (8.5.13), в уравнение (8.5.1) вместо члена $k\dot{x}$ получим нелинейное уравнение колебаний корпуса. Исследуем зависимость характеристик стационарного движения, а именно амплитуды колебаний U_1 и максимальной величины динамической нагрузки R_1, от коэффициента сухого трения f для случая $\omega = \text{const}$.

Введем безразмерные переменные t', x', ω' по формулам (8.5.3), в которых полагаем $\omega^1 = [c/(m+M)]^{1/2}$, а $f' = (m+M)f/mlc$. В результате получим уравнение для x типа (8.5.4):

$$\begin{gathered} \ddot{x} + fq + x = \omega^2 \sin\psi, \\ P = \omega^2 \sin\psi - x, \quad \psi = \omega t + \varphi_0. \end{gathered} \tag{8.5.14}$$

Штрихи при безразмерных переменных опущены. Рассмотрим основной случай безостановочных колебаний, когда скорость $\dot{x}(t)$ не равна тождественно нулю ни на каком конечном промежутке времени. В этом случае имеем $q = \operatorname{sign}\dot{x}$ согласно формуле (8.5.13).

Уравнение (8.5.14) при $q = \operatorname{sign} \dot{x}$ в случае установившихся безостановочных колебаний было проинтегрировано в работе [271] путем «склейки» решений на двух полупериодах, отвечающих постоянному $q = \pm 1$. Амплитуда, т. е. максимальное значение смещения $x(t)$ на периоде, для этих негармонических колебаний равно

$$U_1(\omega, f) = [\omega^4(\omega^2 - 1)^{-2} - f^2\omega^{-2}\operatorname{tg}^2(\pi/2\omega)]^{1/2}. \quad (8.5.15)$$

Исследования [271] показывают, что безостановочные стационарные колебания существуют при выполнении одного из двух эквивалентных неравенств:

■ 1) $f < \eta(\omega)$, 2) $U_1(\omega, f) > \gamma(\omega)$,

$$\eta(\omega) = \omega^4|\omega^2 - 1|^{-1}[S^2(\omega) + \omega^2\operatorname{tg}^2(\pi/2\omega)]^{-1/2},$$

$$\gamma(\omega) = \eta(\omega)\omega^{-2}S(\omega),\ S(\omega) = \sup_{t \in [0,\ \pi/\omega]} w(t,\ \omega),$$

$$w(t,\ \omega) = [\omega \sin t + \omega \operatorname{tg}(\pi/2\omega)(\cos \omega t - \cos t)]/\sin \omega t$$

□ (8.5.16)

Первое из неравенств (8.5.16) показывает, что для существования безостановочных колебаний данной частоты ω коэффициент сухого трения f не должен быть очень большим. Отметим, что $U_1 \to 1$, $\gamma \to \gamma^* \approx 0{,}537$ при $\omega \to \infty$. Поэтому при любом f и достаточно большом ω условие существования безостановочных колебаний (8.5.16) выполняется. Для значений $\omega \to 1$ при $f < \pi/4$ наблюдается явление резонанса: $U_1 \to \infty$. При $f > \pi/4$ и $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ безостановочные колебания не существуют, и резонанс не наблюдается. Движение с остановками существуют в довольно узкой области $U_1 < \gamma$. Способы их исследования являются весьма громоздкими [272] и здесь не рассматриваются.

Отметим, что если выполнено неравенство $f \geqslant \omega^2$, то единственно возможными стационарными движениями системы (8.5.12) являются состояния покоя в зоне застоя, т. е. $x = x_0 = \mathrm{const}$, где $|x_0| \leqslant f - \omega^2$. Следуя п. 2, найдем аналогично (8.5.7) амплитуду R_1 динамической нагрузки, равной $fq + x$; см. (8.5.14). В режиме безостановочных колебаний получим $R_1(\omega,\ f) = U_1(\omega,\ f) + f$. В режиме покоя, при $f \geqslant \omega^2$, найдем $U_1 = 0$, $R_1 = \omega^2$. Полученные формулы определяют амплитуды колебаний корпуса U_1 и динамической нагрузки R_1 в режимах безостановочных колебаний и покое.

6. Об оптимальном выборе коэффициента сухого трения. Аналогично п. 4 рассмотрим задачу об оптимальном выборе коэффициента f для амортизатора с сухим трением. Потребуем, чтобы для постоянной угловой скорости ω коэффициент f был выбран так, чтобы: 1) в системе имели место либо безостановочные колебания, либо режимы покоя, т. е. удовлетворялось одно из неравенств (8.5.16) или неравенство $f \geqslant \omega^2$; 2) удовлетворялось ограничение $U_1(\omega, f) \leqslant A$, где $A > 0$ — постоянная; 3) при выполнении условий 1), 2) амплитуда динамической нагрузки была минимальна: $R_1(\omega, f) \to \min$.

Решение поставленной задачи построено численно и здесь не приводится. Ограничимся сравнением полученных результатов с оптимальными характеристиками амортизатора с вязким трением; см. п. 4. В случае $\omega \to \infty$ и $A \in [\gamma^*, 1]$, где $\gamma^* \approx 0{,}537$, для оптимального амортизатора с сухим трением имеем следующий относительный выигрыш по сравнению с вязким трением $\Delta = (R - R_1)/R \approx 0{,}36$. Здесь R, R_1 — минимальные значения динамической нагрузки для оптимальных амортизаторов с вязким трением (см. (8.5.12)) и с сухим трением.

Проведенное исследование дает оценку сверху для минимально возможного значения амплитуды динамической нагрузки в случае амортизатора с сухим трением. Это связано с тем, что поиск оптимального коэффициента сухого трения производится среди значений, обеспечивающих либо безостановочные колебания, либо режимы покоя, а более сложные движения не рассматриваются. Несмотря на это ограничение, полученные результаты позволяют сделать вывод, что амортизатор с сухим трением при выборе параметров может обеспечить хорошее качество защиты основания от динамических нагрузок, вызванных вращением несбалансированного ротора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акилов У. А. О принципе усреднения в математической теории оптимальных процессов.— Докл. АН Уз. ССР, 1968, № 9.
2. Акилов У. А. Об одной задаче оптимального управления для нелинейных систем.— Изв. АН Уз. ССР, 1973, № 4.
3. Акилов У. А., Филатов А. Н. О принципе усреднения в математической теории оптимальных процессов.— Докл. АН Уз. ССР, 1966, № 7.
4. Акуленко Л. Д. К вопросу о стационарных колебаниях и вращениях.— Укр. матем. ж., 1966, т. 18, № 5.
5. Акуленко Л. Д. О резонансе в нелинейных системах с одной степенью свободы.— ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 6.
6. Акуленко Л. Д. О некоторых системах с малым параметром.— ЖВМ и МФ, 1967, т. 7, № 1.
7. Акуленко Л. Д. Построение вращательных решений для невозмущенных консервативных систем с одной степенью свободы по обратным степеням «энергии».— Вестник МГУ, Серия физ., астрон., 1967, № 3.
8. Акуленко Л. Д. О некоторых вращательно-колебательных системах, подверженных высокочастотным возмущениям.— ЖВМ и МФ, 1968, т. 8, № 5.
9. Акуленко Л. Д. Об исследовании резонансов в нелинейных системах.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
10. Акуленко Л. Д. Исследование некоторых оптимальных систем методом усреднения.— ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
11. Акуленко Л. Д. Асимптотическое решение некоторых задач типа оптимального быстродействия.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
12. Акуленко Л. Д. Оптимальное управление движением квазилинейной колебательной системы при помощи малых сил.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
13. Акуленко Л. Д. Приближенное решение нелинейных задач оптимального управления колебательными процессами методом канонического разделения движений.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
14. Акуленко Л. Д. Вынужденные периодические движения в негамильтоновых системах с одной степенью свободы.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
15. Акуленко Л. Д. Асимптотическое решение некоторых нелинейных задач оптимального быстродействия.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.

16. Акуленко Л. Д. Управление движением нелинейной колебательной системы смещением положения равновесия.— Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
17. Акуленко Л. Д. Оптимальная по быстродействию стабилизация возмущенной системы с инвариантной нормой.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 4.
18. Акуленко Л. Д., Волосов В. М. О резонансе во вращательной системе.— Вестник МГУ, Серия матем., механ., 1967, № 1.
19. Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Некоторые задачи движения твердого тела с подвижной массой.— Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 5.
20. Акуленко Л. Д., Рощин Ю. Р. Оптимальное управление движением системы «типа маятника» перемещением точки подвеса.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 1.
21. Акуленко Л. Д., Рощин Ю. Р. Асимптотическое решение некоторых задач оптимального управления вращением динамически-симметричного спутника.— Космические исследования, 1977, т. 15, вып. 1.
22. Акуленко Л. Д., Рощин Ю. Р. Оптимальное по быстродействию торможение вращений твердого тела управлениями, ограниченными эллипсоидом.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
23. Акуленко Л. Д., Рощин Ю. Р. Оптимальное управление вращениями твердого тела «поворотным двигателем малой тяги».— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 5.
24. Акуленко Л. Д., Черноусько Ф. Л. Метод осреднения в задачах оптимального управления.— ЖВМ и МФ, 1975, т. 15, № 4.
25. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г. Управление космическими летательными аппаратами.— М.: Машиностроение, 1974.
26. Альбрехт Э. Г. Об оптимальной стабилизации нелинейных систем.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
27. Альбрехт Э. Г. Об управлении движением нелинейных систем.— Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 3.
28. Альбрехт Э. Г. Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем.— Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 3.
29. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.
30. Аноров В. П., Коровин В. Н. Оптимальный по быстродействию плоский разворот твердого тела.— Автоматика и телемеханика, 1970, т. 14, № 4.
31. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике.— УМН, 1963, т. 18, вып. 6.
32. Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 1.
33. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.

34. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление.— М.: Машиностроение, 1968.
35. Багирова Н. Х., Васильева А. Б., Иманалиев М. И. К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления.— Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 11.
36. Баничук Н. В., Мамалыга В. М. Об одной задаче оптимального управления для системы, совершающей большие колебания.— Труды 20 научной конференции МФТИ 1974, Серия «Аэрофизика и прикладная математика», ч. 1.— Долгопрудный, 1975.
37. Баничук Н. В., Мамалыга В. М. Оптимальное управление в нелинейной механической системе с переменной инерционной характеристикой.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 2.
38. Баничук Н. В., Черноусько Ф. Л. Определение оптимальных и квазиоптимальных управлений в одной колебательной механической системе.— Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 2.
39. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс.— М.: Наука, 1965.
40. Белецкий В. В. Об оптимальном приведении ИСЗ в гравитационно-устойчивое положение.— Космические исследования, 1971, т. 9, вып. 3.
41. Белецкий В. В. Динамика двуногой ходьбы, ч. 1—2.— Изв. АН СССР, МТТ, 1975, №№ 3, 4.
42. Белецкий В. В., Чудинов П. С. Параметрическая оптимизация в задаче двуногой ходьбы.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 1.
43. Беллман Р. Динамическое программирование.— М.: ИЛ, 1960.
44. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования.— М.: Наука, 1965.
45. Белолипецкий А. А. Линейная задача оптимального быстродействия с параметром.— ЖВМ и МФ. 1974, т. 14, № 5.
46. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.
47. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев.: Наукова думка, 1969.
48. Божко А. Е. Оптимальное управление в системах воспроизведения вибраций.— Киев: Наукова думка, 1977.
49. Болотник Н. Н. Оптимизация параметров некоторых механических колебательных систем.— Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 5.
50. Болотник Н. Н. Оптимизация параметров механической колебательной системы с сухим трением.— Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 5.
51. Болотник Н. Н. Задачи оптимальной амортизации для классов внешних воздействий.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 4.

52. Болотник Н. Н. Оптимальная амортизация крутильных колебаний.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 2.
53. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.— М.: Наука, 1969.
54. Болычевцев Э. М. Выбор оптимального закона амортизации при ударных воздействиях.— Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 5.
55. Болычевцев Э. М., Жиянов Н. И., Лавровский Э. К. Оптимизация параметров колебательной системы при импульсных возмущениях.— Вестник МГУ, Серия матем., механ., 1975, № 6.
56. Брайсон А., Хо Ю—Ши. Прикладная теория оптимального управления.— М.: Мир, 1972.
57. Будак Б. М., Васильев Ф. П. Приближенные методы решения задач оптимального управления (тексты лекций), ч. 1, 2.— М.: Изд-во МГУ, 1969.
58. Булгаков В. Б. Колебания.— М.— Л.: Гостехиздат, 1954.
59. Бурштейн Э. Л., Соловьев Л. С. Гамильтониан усредненного движения.— ДАН СССР, 1961, т. 139, № 4.
60. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1975.
61. Васенин В. А., Девянин Е. А., Жихарев Д. Н., Лавровский Э. К., Ленский А. В., Самсонов В. А., Штильман Л. Г. Макет шагающего аппарата и его система управления.— Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1974, № 6.
62. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимтотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
63. Волосов В. М. Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— УМН, 1962, т. 17, вып. 6.
64. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: Изд-во МГУ, 1971.
65. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1971.
66. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления.— М.: Наука, 1973.
67. Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О. Колебания твердых тел.— М.: Наука, 1976.
68. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике.— М.: Наука, 1966.
69. Геращенко Е. И., Геращенко С. М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем.— М.: Наука, 1975.
70. Геронимус Я. Л., Перельмутер М. М. О некоторых методах определения оптимального закона движения, рассматриваемого как управляющее воздействие.— Машиноведение, 1966, № 6.
71. Глизер В. Я., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом.— ДАН СССР, 1975, т. 225, № 5.

72. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962.
73. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации.— М.: Наука, 1975.
74. Гурецкий В. В. Об одной задаче оптимального управления.— Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
75. Гурецкий В. В. О максимуме отклонения оптимального амортизированного объекта.— Труды ЛПИ, «Динамика и прочность машин», Л.: 1965, № 252.
76. Гурецкий В. В. К задаче минимизации наибольшего отклонения.— Труды ЛПИ, «Механика и процессы управления. Вычислительная математика».— Л.: 1969, № 307.
77. Гурецкий В. В., Коловский М. З., Мазин Л. С. О предельных возможностях противоударной амортизации.— Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 6.
78. Демьянов В. Ф. Минимакс: дифференцируемость по направлению.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
79. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1968.
80. Дмитриев М. Г. О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям.— ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 3.
81. Евтушенко Ю. Г. Приближенный расчет задач оптимального управления.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
82. Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой.— М.: Наука, 1967.
83. Ерофеев Н. И. Технические средства комплексной механизации перегрузочных работ на морском транспорте.— М.: Транспорт, 1967.
84. Ерофеев Н. И. Математическая модель режима работы крановых установок.— Автоматика и телемеханика, 1967, № 3.
85. Ерофеев Н. И. Исследование рабочего цикла автоматизированного портального крана на ЭЦВМ.— Механизация и автоматизация производства, 1969, № 3.
86. Ерофеев Н. И., Орлов Л. А. Автоматика и автоматизация портовых перегрузочных процессов.— М.: Транспорт, 1973.
87. Ерофеев Н. И., Стрельцов П. М. Метод решения оптимальной задачи для крановой установки.— Изв. ВУЗов, Машиностроение, 1974, № 8.
88. Ефимов Г. Б., Охоцимский Д. Е. Об оптимальном разгоне космического аппарата в центральном поле.— Космические исследования, 1965, т. 3, вып. 6.
89. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям.— М.— Л.: Изд-во АН СССР, 1941.
90. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Интегральные уравнения.— СМБ, М.: Наука, 1968.
91. Заремба А. Т., Соколов Б. Н. Об одной задаче оптимального разгона маятника при ограниченной скорости и

интегральном критерии качества.— Изв. АН СССР, МТТ, 1978, № 4.
92. Заремба А. Т., Соколов Б. Н. Об оптимальном сочетании ускорения и торможения точки подвеса при разгоне висящего груза.— Изв. АН СССР, МТТ, 1979, № 2.
93. Зарецкий А. А., Портной Н. И. Оптимизация управления механизмами грузоподъемных кранов в переходных режимах.— Вестник машиностроения, 1969, № 8.
94. Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами.— Л.: Судостроение, 1966.
95. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.
96. Иослович И. В. Наискорейшее торможение вращения аксиальносимметричного спутника.— Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 4.
97. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.
98. Ишлинский А. Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация.— М.: Наука, 1976.
99. Калинин Н. В. К теории приближенного синтеза оптимальных управлений.— Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1964, № 5.
100. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.
101. Кирин Н. Е. Вычислительные методы теории оптимального управления.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1968.
102. Киселев Ю. Н. Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия для систем управления, близких к линейным.— ДАН СССР, 1968, т. 182, № 1.
103. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958.
104. Колмановский В. Б. Применение метода возмущений к некоторым задачам оптимального управления.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
105. Колмановский В. Б. Оптимальное управление некоторыми нелинейными системами с малым параметром.— Дифференциальные уравнения, 1975, т. 11, № 9.
106. Колмановский В. Б. Оптимальное управление некоторыми слабоуправляемыми системами.— Кибернетика, 1976, № 2.
107. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1968.
108. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем.— М.: Наука, 1966.
109. Коловский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами.— М.: Наука, 1976.
110. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем.— М.: Мир, 1975.
111. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением.— М.: Наука, 1964.
112. Кононенко В. О., Подчасов Н. П. Об оптимальном активном гашении колебаний.— Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 3.

113. Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами.— М.: Наука, 1977.
114. Красовский Н. Н. К теории оптимальных процессов.— Автоматика и телемеханика, 1957, т. 18, № 11.
115. Красовский Н. Н. Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах.— УМН, 1965, т. 20, вып. 3.
116. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений.— Дополнение к книге И. Г. Малкина: Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.
117. Красовский Н. Н. Теория управления движением.— М.: Наука, 1968.
118. Красовский Н. Н. Теория оптимальных управляемых систем.— В кн.: Механика в СССР за 50 лет.— М.: Наука, 1968, т. 1.
119. Крементуло В. В. Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс.— М.: Наука, 1977.
120. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления.— М.: Наука, 1973.
121. Крускал М. Адиабатические инварианты.— М.: ИЛ, 1962.
122. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления.— ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 6.
123. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления.— ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, № 1.
124. Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу.— М.: Наука, 1970.
125. Лавровский Э. К. К задаче стабилизации спутника.— Космические исследования, 1973, т. 11, вып. 2.
126. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, 1. Механика.— М.: Наука, 1965.
127. Ларин В. Б. Стабилизация двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 5.
128. Ларин В. Б. Оптимизация периодических систем.— ДАН СССР, 1978, т. 239, № 1.
129. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью.— Киев, Наукова думка, 1973.
130. Лебедев В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой.— М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.
131. Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления.— М.: Наука, 1968.
132. Летов А. М. Динамика полета и управление.— М.: Наука, 1969.
133. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления.— М.: Наука, 1972.
134. Лионс Ж.—Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М.: Мир, 1972.

135. Лоскутов Е. М. К задаче оптимальной переориентации космического аппарата.— Космические исследования, 1973, т. 11, вып. 2.
136. Лурье А. И. Аналитическая механика.— М.: Физматгиз, 1961.
137. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики.— М.: Наука, 1975.
138. Любушин А. А. Сходимость метода малого параметра для слабоуправляемых оптимальных систем.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
139. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.— М.: Гостехиздат, 1956.
140. Мамалыга В. М. Об оптимальном управлении одной колебательной системой.— Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
141. Мамалыга В. М., Черноусько Ф. Л. Управление перемещением грузов в вертикальной плоскости.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 4.
142. Манойленко В. Д., Рутман Ю. Л. Упругая аналогия оптимального управления амортизируемым объектом при минимизации наибольших перегрузок.— Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 6.
143. Мерриэм К. У. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью.— М.: Мир, 1967.
144. Митропольский Ю. А. Проблемы асимтотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.
145. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1971.
146. Михайлов Н. Н., Новосельцева Ж. А. Оптимальные переходные процессы в системе с прогнозированием.— Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1964, № 1.
147. Михайлов Н. Н., Новосельцева Ж. А. Оптимальные процессы в системе третьего порядка с комплексными полюсами.— Автоматика и телемеханика, 1965, № 9.
148. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики.— М.: Наука, 1969.
149. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.— М.: Наука, 1971.
150. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем.— М.: Наука, 1975.
151. Мороз А. И. Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка, 1—3.— Автоматика и телемеханика, 1965, №№ 2, 3, 8.
152. Мороз А. И. К задаче синтеза оптимального по времени управления для дискретных объектов.— Автоматика и телемеханика, 1966, № 11.
153. Мороз А. И. Синтез оптимального по времени управления для линейных систем третьего порядка, 1—3.— Автоматика и телемеханика, 1969, №№ 5, 7, 9.
154. Найфэ А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
155. Небеснов В. И., Плотников В. А. Математические методы исследования режимов работы судовых комплексов, ч. 1.— М.: Изд-во Рекламинформбюро ММФ, 1977.

156. Небеснов В. И., Плотников В. А., Кузюшин А. Я. Оптимальное управление ВРШ на волнении.— М.: Пищевая промышленность, 1974.
157. Нейштадт А. И. О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче.— ДАН СССР, 1975, т. 221, № 2.
158. Нейштадт А. И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
159. Охоцимский Д. Е. Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения.— Космические исследования, 1964, т. 2, вып. 6.
160. Охоцимский Д. Е., Голубев Ю. Ф., Сихарулидзе Ю. Г. Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу.— М.: Наука, 1975.
161. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К. Алгоритмы управления шагающим аппаратом, способным преодолевать препятствия.— Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1973, № 5.
162. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Боровин Г. К., Карпов И. И. Моделирование на ЦВМ движения шагающего аппарата.— Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1972, № 3.
163. Охоцимский Д. Е., Платонов А. К., Боровин Г. К., Карпов И. И., Кугушев Е. И., Лазутин Ю. М., Павловский В. Е., Ярошевский В. С. Управление интегральным локомоционным роботом.— Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1974, № 6.
164. Первозванский А. А., Гайцгори В. Г. Приближенная оптимизация, декомпозиция и агрегирование.— 7-е Всесоюзное совещание по проблемам управления. Тезисы докладов, в кн. 2,— Минск, 1977.
165. Перельмутер М. М. Некоторые особенности расчета управления электроприводом крановой тележки.— Электричество, 1967, № 4.
166. Перельмутер М. М. Оптимальные законы движения механизмов с упругим звеном.— Машиноведение, 1969, № 5.
167. Перельмутер М. М., Поляков А. Н. Устранение колебаний груза, подвешенного к крановой тележке, воздействием на ее электропривод.— Изв. ВУЗов, Электромеханика, 1971, № 7.
168. Петренко О. С. К вопросу об учете колебаний груза в период неустановившегося движения монорельсовых тележек и кранов.— Вестник машиностроения, 1952, № 9.
169. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром.— ДАН СССР, 1970, т. 192, № 6.
170. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1964.
171. Петухов Л. В., Троицкий В. А. О минимуме коэффициента динамичности.— Труды ЛПИ, «Механика и процессы управления. Вычислительная математика».— Л.: 1969, № 307.
172. Плотников В. А. Метод частичного усреднения в задачах терминального управления.— Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 2.

173. Плотников В. А., Зверкова Т. С. Усреднение краевых задач в терминальных задачах оптимального управления.— Дифференциальные уравнения, 1978, т. 14, № 8.
174. Плотников В. А., Третьяк А. И. Асимптотическое решение одного класса задач оптимального управления.— Кибернетика, 1974, № 4.
175. Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений.— В кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12.— М.: Изд-во ВИНИТИ, 1974.
176. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1976.
177. Попов Е. П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.— М.: Наука, 1973.
178. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные работы: Динамика и алгоритмы.— М.: Наука, 1978.
179. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.— М.: Наука, 1975.
180. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов.— М.: Наука, 1974.
181. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, ч. 1—3.— Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, №№ 10—12.
182. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление.— М.: Наука, 1978.
183. Рощин Ю. Р. К задаче торможения вращательного движения твердого тела. Труды 20 научной конференции МФТИ 1974. Серия «Аэрофизика и прикладная математика», ч. 1.— Долгопрудный, 1975.
184. Рощин Ю. Р. К задаче наискорейшего торможения вращательного движения твердого тела. Труды 21 научной конференции МФТИ 1975. Серия «Аэрофизика и прикладная математика», ч. 1.— Долгопрудный, 1976.
185. Рощин Ю. Р. К задаче оптимальной переориентации твердого тела.— Космические исследования, 1977, т. 15, вып. 6.
186. Румянцев В. В. Об оптимальной стабилизации управляемых систем.— ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
187. Рунов М. М. Гашение колебаний груза при торможении крановой тележки ступенчатым тормозным моментом.— Изв. ВУЗов, Машиностроение, 1970, № 12.
188. Самойленко А. М. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963.
189. Саранчук В. Г. Одна вибрационная задача в игровой постановке.— Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 1.
190. Саранчук В. Г., Троицкий В. А. Виброзащитные устройства с минимальным свободным ходом. Труды ЛПИ, «Механика и процессы управления. Вычислительная математика».— Л.: 1969, № 307.

191. Саранчук В. Г., Троицкий В. А. К синтезу оптимальных амортизаторов. Труды ЛПИ, «Механика и процессы управления. Вычислительная математика».— Л.: 1971, № 318.
192. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами.— М.: Наука, 1977.
193. Скоков В. А. Алгоритм решения линейных и нелинейных задач методом наименьших квадратов на языке АЛГОЛ. Серия «Стандартные программы решения задач математического программирования».—М.: Изд-во ВЦ МГУ, 1972, вып. 2.
194. Смехов А. А., Ерофеев Н. И. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами.— М.: Машиностроение, 1975.
195. Смольников Б. А. Оптимальные режимы торможения вращательного движения симметричного тела.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
196. Смольников Б. А. Обобщение эйлерова случая движения твердого тела.— ПММ, 1967, т. 31, вып. 4
197. Соколов Б. Н. Оптимальный разгон висящего груза при ограниченных скорости и ускорении точки подвеса.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 6.
198. Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. Об оптимальном перемещении висящего груза.— Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 4.
199. Соколов Б. Н., Черноусько Ф. Л. Оптимальный разгон маятника.— Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 2.
200. Соловьев В. П. Об оптимальном развороте КА вокруг произвольной неподвижной оси.— Космические исследования, 1969, т. 7, вып. 1.
201. Субботин А. И. Об управлении движением квазилинейной системы.— Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 7.
202. Суслов Г. К. Теоретическая механика.— М. Л.: Гостехиздат, 1946.
203. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.— М.: Наука, 1964.
204. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных.— Матем. сб., 1952, т. 31 (73), № 3.
205. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
206. Троицкий В. А. О синтезе оптимальных амортизаторов.— ПММ, 1967, т. 34, вып. 4.
207. Троицкий В. А. Оптимальные процессы колебаний механических систем.— Л.: Машиностроение, 1976.
208. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой.— М.: Наука, 1974.
209. Федоренко Р. П. Приближенное решение некоторых задач оптимального управления.— ЖВМ и МФ, 1964, т. 4, № 6.
210. Федорченко А. М. Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний.— Укр. матем. ж., 1957, т. 9, № 2.
211. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем.— М.: Наука, 1966.

212. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.
213. Филимонов Ю. М. К задаче об оптимальном управлении математическим маятником.— Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 8.
214. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.— Вестник МГУ, Серия матем., механ., астрон., физ., хим., 1959, № 2.
215. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Матем сб., 1960, т. 51, № 1.
216. Флюгге-Лотц И. Синтез релейных систем регулирования третьего порядка.— Труды 1 Международного конгресса ИФАК.— М.: Наука, 1960.
217. Флюгге-Лотц И., Ми-Ин. Оптимальный переходный процесс систем второго порядка с релейным управлением по скорости.— Труды Американского общества инженеров-механиков, Серия Д, Техническая механика, № 1, 1961.
218. Флюгге-Лотц И., Титус Г. Оптимальные переходные процессы в полных системах третьего порядка с релейным управлением.— Труды Американского общества инженеров-механиков, Серия Д, Техническая механика, № 4, 1962.
219. Флюгге-Лотц И., Титус Г. Оптимальное и квазиоптимальное управление системами третьего и четвертого порядка. Труды 2 Международного конгресса ИФАК.— М.: Наука, 1965.
220. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами.— М.: Наука, 1974.
221. Формальский А. М. Управление маятником с минимальными затратами механической энергии.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 2.
222. Фролов К. В. Уменьшение амплитуды колебаний резонансной системы путем управляемого изменения параметров.— Машиноведение, 1965, № 3.
223. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация.— М.: Наука, 1977.
224. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.
225. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов.— ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
226. Черноусько Ф. Л. Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
227. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость.— М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
228. Черноусько Ф. Л. Оптимальное перемещение маятника.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
229. Черноусько Ф. Л. Оптимальное управление некоторыми колебательными системами.— Теоретическая и прикладная механика, 1976, 2, Белград.
230. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д. Метод осреднения для оптимального управления нелинейными колебательными

системами. VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen. Band I, 1.— Berlin, Akademie — Verlag, 1977.
231. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы.— М.: Наука, 1973.
232. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления. В кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 14.— М.: Изд-во ВИНИТИ, 1977.
233. Шатровский Л. И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления.— ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 3.
234. Шкляр В. Н., Малышенко А. М. К задаче оптимального пространственного разворота КА относительно центра масс.— Космические исследования, 1975, т. 13, вып. 4.
235. Энеев Т. М. О применении градиентного метода в задачах оптимального управления.— Космические исследования, 1966, т. 4, № 5.
236. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.— М.: Наука, 1977.
237. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере.— М.: Машиностроение, 1978.
238. Almuzara L. J. G., Flügge — Lotz I. Minimum time control of a nonlinear system.— J. Differen. Equat., 1968, v. 4, № 1.
239. Anselmino E., Liebling T. M. Zeitoptimal Regelung der Bewegung einer hängenden Last zwischen zwei beliebigen Randpunkten. Proc. International Analogue Computational Meetings. v. 1, Lausanne, 1967.— Bruxelles, Press. Acad. Europeennes, 1968—1969.
240. Baker J. G. Mathematical-machine determination of the vibration of accelerated unbalanced rotor.— J. of Applied Mechanics, 1939, № 6.
241. Baldwin J. F., Williams J. H., Sims. The use of a method of perturbations in the syntesis of closed — loop optimal control laws for non-linear systems.— Automatica, 1969, v. 5, № 3.
242. Beeston J. W. Solution of the time-optimal control problem for systems of similar structure.— Electronics Letters, 1967, v. 3, № 8.
243. Bellman R. E. (ed). Mathematical optimization techniques.— University of California Press, Berkley, Calif., 1963.
244. Besjes J. G. On the asymptotic methods for non-linear differential equations.— J. de Mechanique, 1969, v. 8, № 3.
245. Chernousko F. L. Optimal control and dynamics of oscillating systems. Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the 14th IUTAM Congress, Delft (1976).— North-Holland Publishing Companv, 1977.
246. Dodds W. R. Optimization of an ore unloading system using the parameter sweep technique. Proc. International Analogue Computational Meetings, v. 1, Lausanne, 1967.— Bruxelles, Press. Acad. Europeennes, 1968—1969.

247. Falb P. L., Jong J. L. Some successive approximation methods on control and oscillation theory.— New — York, London, Acad. Press, 1969.
248. Jacobson R. A., Powers W. F. Asymptotic solution to the problem of optimal low-thrust energy increase.— AIAA J., 1972, v. 10, № 12.
249. Hagedorn P. Canonical transformation in the optimal control of mechanical systems.— Int. J. of Non — Linear Mechanics, 1978, v. 13, № 2.
250. Hippe P. Zeitoptimal Steuerung einer Entladeanlage.— ZAMM, 1970, B. 50, Heft 1—4.
251. Hippe P. Zeitoptimal Steuerung eines Erzentladers. Regelungstechnik und Prozeß.— Datenverarbeitung, 1970, Jg. 18, № 8.
252. Kamel A. A., Hassan S. D. A perturbation treatment for optimal slightly nonlinear systems with linear control and quadratic criteria.— Optimiz. Theory and Appl., 1973, v. 11, № 4.
253. Kao Y. K., Bankoff S. G. Singular perturbation analysis of free-time optimal control problems.— Int. J. Syst. Sci., 1974, v. 5, № 4.
254. Karnopp D. C., Trikha A. K. Comparative study of optimization techniques for shock and vibration isolation.— J. of Engineering for Industry, 1969, v. 91, № 4.
255. Katsumasa Matsuura. A study of vibration and velocity characteristics of an accelerated unbalanced rotor.— Bulletin of the JSME, 1975, v. 18, № 125.
256. Katsumasa Matsuura. A method for estimating the conditions that a rotor can pass through resonance.— Bulletin of the JSME, 1977, v. 20, № 145.
257. Kokotović P. V., O'Malley R. E. Jr., Sannuti P. Singular perturbations in control.— Automatica, 1976, v. 12, № 1.
258. Kokotović P. V., Sannuti P. Singular perturbation method for reducing the model order in optimal control design.— IEEE Trans. Automat. Control, 1968, v. AC-13, № 4.
259. Kuntze H. B. Zur zeitoptimalen Steuerung und Regelung von Laufkranen.— Wissenschaft. Zschr. d. Hochschule für Verkehrswesen «Friedrich List» in Dresden, 1971, v. 18, № 4.
260. La Salle I. P. Time optimal control systems.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1959, v. 45, № 4.
261. Lions J. L. Perturbations singuliéres dans les problemes aux limites et en controle optimale.— Lect. Notes Math., 1973, 323.
262 Moiseev N. N., Shmidt A. G. Asymptotic methods in the theory of optimum correction for systems with slowly varying parameters.— J. Optimizat. Theory and Applic., 1969, v. 3, № 3.
263. O'Malley R. E. Jr. Singular perturbation of the time — invariant linear state regulator problem.— J. Different. Equat., 1972, v. 12, № 1.
264. Powers W. F., Tapley B. D. Canonical Transformation applications to optimal trajectory analysis.— AIAA J., 1969, v. 7, № 3.
265. Sannuti P., Kokotović P. Singular perturbation method for near optimum design of high order nonlinear systems.— Automatica, 1969, v. 5.

266. Sevin E., Pilkey W. Optimum Shock and Vibration Isolation.— Government print office, Washington, 1971.
267. Vasil'eva A. B., Dmitriev M. G. Singular perturbations and some optimal control problems. Preprints VII World Triennial IFAC Congress, 1978, v. 2, Helsinki.— Pergamon Press, 1978.
268. Черноусько Ф. Л. Оптимальное управление механическими системами.— В сб.: Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Труды 4 Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, Киев: Наукова думка, 1978.
269. Черноусько Ф. Л. Оптимальное управление колебаниями.— В кн.: Проблемы устойчивости движения, аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1979.
270. Черноусько Ф. Л. Проблемы оптимизации механических систем.— Успехи механики, 1979, т. 2, вып. 2.
271. Den Hartog J. P. Forced vibrations with combined viscous and Coulomb damping. Phil. mag., 1930, s. 7, v. 9, № 59.
272. Den Hartog J. P. Forced vibrations with combined Coulomb and viscous damping. Trans. ASME, Appl. Mech., 1931, v. 31, № 9.

Феликс Леонидович Черноусько,
Леонид Денисович Акуленко,
Борис Николаевич Соколов

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ

(Серия: «Теоретические основы технической кибернетики»)

М., 1980 г., 384 стр. с илл.

Редактор *А. А. Могилевский*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры *Л. Н. Боровина, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11577

Сдано в набор 20.09.79. Подписано к печати 20.05.80. Т-09580. Бумага 84×108[1]/32, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 20,16. Уч.-изд. л. 20,91. Тираж 3 500 экз. Заказ № 693. Цена книги 3 р. 40 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25