АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АКАДЕМИК
М. В. КИРПИЧЕВ

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

АКАДЕМИК
М. В. КИРПИЧЕВ

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва 1953

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

академик М. А. МИХЕЕВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее краткое изложение учения о подобии имеет целью познакомить исследователей, ведущих экспериментальные работы, и инженеров, изучающих различные технические устройства на моделях, с теоретическими основами теории подобия, на которых основываются выбор, расчет и сооружение моделей, а также обработка и обобщение результатов эксперимента. Примеры моделирования в различных областях техники в книгу не вошли. Они будут описаны во втором издании „Моделирования тепловых устройств“ М. В. Кирпичева и М. А. Михеева, которое подготовляется.

Автор

29 мая 1953 г.

Глава 1

ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Около ста лет назад возникла новая область научного знания — учение о подобии явлений.

Гениальное предвидение этой науки были высказано Ньютоном во II книге его „Principia" [1] еще в 1686 г. Но только в 1848 г. член французской академии наук Жозеф Бертран впервые установил основное свойство подобных явлений, сформулировав первую теорему подобия, теорему о существовании инвариантов подобия.

Подобными называются явления, происходящие в геометрически подобных системах, если у них во всех сходственных точках отношения одноименных величин есть постоянные числа. Эти отношения, так называемые константы подобия, не могут быть выбираемы произвольно, так как величины, характеризующие явление, вообще говоря, не независимы друг от друга, а находятся в определенной связи, обусловленной законами природы. Во многих случаях эта связь может быть выражена математически в виде уравнения. Для подобных между собой явлений оно должно иметь одинаковый вид. Наличие такого „уравнения связи" между физическими величинами, характеризующими явление, налагает определенное ограничение на выбор констант подобия.

Бертран вывел первую теорему подобия для случая подобия механических явлений [2].

Исходя из существования математической связи между силой, массой и ускорением, устанавливаемой вторым законом Ньютона, Бертран показал, что у подобных явлений комплекс величин: „сила $\times$ длина/масса $\times$ скорость в квадрате" имеет одно и то же значение в сходственных точках подобных явлений. Этот комплекс называется инвариантом, или критерием механического подобия. В природе существуют только те подобные явления, у которых критерии одинаковы.

Если бы физическое уравнение связи можно было бы преобразовать так, чтобы оно было составлено из инвариантов подобия, то это было бы общее уравнение, численно одинаковое для всех подобных явлений.

Вторая теорема подобия устанавливает возможность такого преобразования физических уравнений.

Она была выведена русским ученым А. Федерманом в 1911 г. [3] и несколькими годами позже, в 1914 г., американским ученым Букингэмом [4].

В 1925 г. Т. А. Афанасьева-Эренфест вывела обе теоремы для случая подобия любых явлений природы и показала, что критериальное уравнение содержит, кроме критериев-комплексов, составленных из переменных величин, еще критерии краевых величин и симплексы — отношения одноименных величин (например, отношение двух скоростей, характеризующих явление) [5, 6]. Тем самым учение о свойствах подобных явлений в основном было завершено.

Тотчас после вывода первой теоремы она начала находить практическое применение для обработки опытных данных в критериях подобия. Осборн Рейнольдс выразил закон движения жидкости по трубам одной общей формулой, через критерий подобия, названной впоследствии его именем. Оказалось возможным объединить таким путем все численные данные опытов по гидравлическому сопротивлению, проведенных различными исследователями на воде, воздухе, паре, различных маслах и т. д. Фруд, изучая мореходные качества судов на моделях, представил результаты опытов над ними в виде критериального уравнения, которое можно было распространить на суда, подобные по своей геометрической конфигурации испытанным моделям. Наш выдающийся ученый Н. Е. Жуковский положил теорию подобия в основу критериальной обработки опытов над моделями самолетов, продуваемых в аэродинамической трубе, для того, чтобы результаты опытов можно было перенести на подобные моделям самолеты.

Вторая теорема узаконила эту практику.

Критерии подобия выводятся из уравнений связи. Поэтому для получения критериального уравнения надо знать уравнение, связывающее между собой величины, характеризующие рассматриваемое явление.

Для большинства физических явлений уравнения связи найдены в форме дифференциальных уравнений, однако получить интегральные решения их удается только для отдельных частных случаев. Поэтому критерии подобия, как правило, выводятся из дифференциальных уравнений связи, и требовалось еще подтвердить, что критерии, выведенные из проинтегрированных уравнений, остаются те же. Это было сделано П. К. Конаковым [7].

Таким образом, оказалось возможным результаты опытов над явлениями выражать в критериях подобия, полученных из дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых не удавалось найти.

Для того чтобы иметь право переносить данные опытов, произведенных на одном объекте, на другие, ему подобные, в выводах теории подобия нехватало еще одного важного звена.

Первая и вторая теоремы были выведены на основе предположения, что речь идет о явлениях, подобие которых заранее известно. Обе теоремы устанавливают свойства подобных явлений, но они не указывают способа для определения того, подобны ли два каких-нибудь, сравниваемых между собою, явления. Возникает вопрос, по каким признакам можно узнать, что явления подобны друг другу.

Ответ дается третьей теоремой подобия.

Третья теорема устанавливает условия, необходимые и достаточные для того, чтобы явления оказались подобными друг другу. Формулировка ее была дана М. В. Кирпичевым и А. А. Гухманом, а доказательство теоремы — М. В. Кирпичевым в 1930 г. [8].

Единичное явление выделяется из группы явлений, подчиняющихся одному и тому же уравнению связи, присоединением к нему условий однозначности, или моновалентности. В подобных явлениях входящие в условия однозначности величины, моновалenты, очевидно, должны быть подобны. Далее, согласно первой теореме, реально существующие подобные явления должны иметь одинаковыми критерии, в том числе и составленные из моновалентов.

Третья теорема доказывает, что два эти признака достаточны для того, чтобы иметь право считать явления подобными.

Сделанный исторический обзор показывает, что учение о подобии, состоявшее первоначально в изучении свойств подобных явлений, постепенно сделалось учением о методах обработки физических опытов. Экспериментатор ставит перед собой следующие вопросы: какие величины надо измерять в опыте, как следует обрабатывать результаты опыта и на какие явления их можно распространять.

Теория подобия дает ответ на все три вопроса.

Измерять надо все величины, которые входят в состав критериев подобия. Обрабатывать результаты опыта надо в виде зависимости между критериями подобия для того, чтобы можно было распространить их на все подобные явления.

Подобие же их можно узнать по подобию моновалентов и одинаковости моновалентных критериев.

Применение теории подобия к эксперименту развивалось в двух направлениях.

С одной стороны, теория подобия проникла в физику и стала научной основой физического эксперимента. С другой стороны, она нашла приложение в технике, открыв возможность изучать различные технические устройства на моделях.

Между обоими направлениями нельзя провести резкую границу, так как эксперимент в физике часто ставится над процессами, протекающими в различных частях технических устройств, модели же могут охватывать также не только целые технические объекты, но и отдельные части их. Таким образом, теория подобия сделалась научной основой одновременно как физического, так и технического эксперимента.

Осуществить все условия подобия, налагаемые третьей теоремой, часто бывает очень трудно.

Поэтому развитию моделирования весьма способствовал разработанный в СССР метод не точного, а приближенного моделирования, когда соблюдаются не все условия подобия и в модели получается с достаточной для практики точностью приближенное подобие.

Экспериментальная проверка приближенного метода моделирования проведена была в широких пределах М. А. Михеевым и рядом других советских ученых[1] [9].

Иногда исследователю приходится встречаться с явлениями, настолько сложными и неизученными, что их не удается выразить посредством математических формул и составить уравнение связи между физическими величинами. Для случаев, когда оказывается возможным установить те физические величины, которые должны были бы войти в уравнение связи, Ж. Бертран [10] в 1878 г. предложил метод, позволяющий из соображений о размерности отдельных членов физического уравнения отгадать вид критериев подобия и подобрать эмпирическое уравнение связи для них. Этот путь менее надежен, и его следует применять только при невозможности вывести уравнения связи.

Так как учение о размерности лежит в основе физических уравнений, то с него мы и начнем изложение учения о подобии.

---

[1] Развитие учения о подобии и участие в нём ученых нашей Родины. См. Известия АН СССР, ОТН, № 11, 1952 г.

Глава 2

ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ

В физике применяется так называемая абсолютная система единиц, предложенная Гауссом в начале прошлого столетия [17]. Она имеет целью дать физическим уравнениям наиболее простой вид; при этом выбор единиц, которыми измеряются различные величины, связан определенной зависимостью.

Эта система вносит в определение физических величин новое понятие о размерности. Напомним в двух словах содержание учения о размерности величин.

Измерить какую-нибудь величину значит сравнить ее с одноименной ей величиной, избранной за единицу измерения, и отношение между ними, полученное в результате сравнения, выразить числом.

При перемене единицы измерения изменится и это число. Следовательно, выражая какую-нибудь величину числом, надо именовать и единицу, выбранную для ее измерения. Такие числа называются именованными.

Правило изменения числа, выражающего размер рассматриваемой величины, при переходе к другой единице ее измерения, как легко показать, устанавливается путем присоединения к именованному числу символического сомножителя, именующего единицу измерения. Он обыкновенно ставится в прямоугольные скобки. Переход к новой единице измерения сопровождается подстановкой в скобки численного выражения *прежней единицы через новую*.

Например, 5 метров напишутся так: 5 [м]. Переход к единице длины „сантиметр“ осуществляется подстановкой 1 м = 100 см:

$$5\,[\text{м}] = 5\,[100\ \text{см}] = 500\,[\text{см}].$$

Для того чтобы единица измерения во всех случаях была одинакова, ее образец устанавливается международным соглашением и хранится в государственных палатах мер и весов. Ему присвоено название эталон.

Род величины, которая измеряется, называется ее размерностью.

В приведенном выше примере символический сомножитель [м] имеет арифметический смысл и служит для численного определения величины. Но ему можно придать и алгебраический смысл и рассматривать, как определение размерности величины; в данном случае такой размерностью является длина, что определяется символом $[L]$.

Гауссова (абсолютная) система единиц измерения состоит в следующем. Явления природы представляют собой протекание различных процессов, которые характеризуются изменением различных величин. Эти величины могут быть независимыми друг от друга или, наоборот, находиться между собой в определенной постоянной связи, которая выражает закон природы.

Математически это постоянство связи между величинами выражается уравнением, связывающим их между собой. Например, движение всех материальных тел подчиняется законам механики, в частности второму закону Ньютона, который устанавливает пропорциональность между силой $\vec{f}$, действующей на тело, его массой m и ускорением $\vec{a}$, сообщенным телу силой:

$$\vec{f} = A m \vec{a}.$$

Здесь A — множитель пропорциональности.

В зависимости от того или иного выбора единиц измерений для величин f, m и a он будет получать каждый раз иное численное значение.

Абсолютная система единиц устанавливает правило выбора единиц так, чтобы A всегда было равно единице:

$$\vec{f} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Для выполнения этого условия единицы измерения для двух величин, входящих в равенство (1), можно выбирать произвольно, но раз они уже выбраны, то для третьей величины единица измерения не может быть выбрана произвольно. Она определяется условием, что $A = 1$, иначе говоря, для $m = 1$ и $a = 1$ должно быть и $f = 1$. Это значит, что единица измерения силы подчиняется правилу:

$$[f] = [m]\,[a]. \qquad (2)$$

Тем самым устанавливаются единицы первичные, или основные, выбор которых произволен, и единицы вторичные, или производные, величина которых определяется равенством (2), устанавливающим выражение их размерности через размерность первичных величин.

Размерность f, таким образом, становится равной размерности комплекса величин, стоящих в правой части уравнения (1). Отсюда следует, что все члены уравнения (1) имеют одинаковую размерность. Это правило отметил еще Фурье [11].

Основное свойство гауссовой системы состоит в том, что предложенная система единиц должна удовлетворять тому условию, что при перемене единиц измерения уравнение остается неизменным.

Это условие налагает определенное ограничение на вид уравнений, выражающих вторичные величины b через первичные a.

Для того чтобы показать это, перейдем в уравнении (1), являющемся основой механической системы единиц, к новым единицам измерений.

Пусть единица измерения m делается в c_m раз меньше первоначальной и единица a в c_a раз меньше.

Определим, как изменится величина вторичной величины f.

Согласно изложенному выше правилу перехода подставляем в равенство (2)′ вместо m' — $c_m m'$, вместо a' — $c_a a'$ и вместо f' — $c_f f'$. Получим:

$$c_f [f'] = c_m c_a [m'] [a']. \tag{2'}$$

Так как коэффициент пропорциональности должен быть попрежнему равен единице, то

$$c_f = c_m c_a.$$

Мы видим, что уравнение (1) при переходе сохраняется неизменным потому, что множители c в левой и правой частях уравнения вышли в виде общих множителей и затем взаимно сократились.

Легко убедиться, что таким свойством обладают только формулы, представляющие степенную зависимость между величинами, например:

$$b = k a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}, \tag{3}$$

где k, α_1, α_2, ..., α_m — отвлеченные числа.

В самом деле, в этом случае подстановка вместо a величин $c_i a_i$ приводит к выделению всех множителей c в один сомножитель, на который умножено первоначальное выражение

$$c_b b = k \left(c_1^{\alpha_1} \ldots c_m^{\alpha_m}\right) a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m}, \tag{3'}$$

откуда определяется $c_b = c_1^{\alpha_1} \ldots c_m^{\alpha_m}$.

Функции, обладающие таким свойством, носят название „подобнородных“ (гомогенных).

Свойством гомогенности, кроме степенного одночлена, обладает также сумма степенных комплексов одинаковых размерностей, так что сомножитель, составленный из чисел c, выйдет из суммы их в виде общего множителя. Такова, например, сумма членов в правой части уравнения Фурье для теплопроводности твердого тела:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \tag{4}$$

Очевидно, для выполнения этого правила трансцендентная функция должна иметь аргументом безразмерное число, например,

$$\frac{b}{a_1^{\alpha_1}, \ldots, a_m^{\alpha_m}},$$

в котором размерность числителя b равна размерности знаменателя $a_1^{\alpha_1}, \ldots, a_m^{\alpha_m}$. Подстановка в него вместо b, a_1, a_2 и т. д. величин $c_b b$, $c_1 a_1, \ldots$ и т. д. даст выражение аргумента

$$\frac{c_b}{c_1^{\alpha_1} \ldots c_m^{\alpha_m}} \cdot \frac{b}{a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m}}.$$

Трансцендентная функция останется неизменной только тогда, когда сомножитель

$$C = \frac{c_b}{c_1^{\alpha_1} \ldots c_m^{\alpha_m}} = 1. \tag{5}$$

При таком частном случае гомогенности, когда сомножитель $C = 1$, функции называются однородными (моногенными), а равенства (5), обусловливающие их однородность, — условиями однородности (моногенности) функции.

При наличии равенств (5) функции условно моногенны. Если же условие $C = 1$ получается само собой и надобности в обусловливающих моногенность равенствах нет, то они безусловно моногенны.

Последнее имеет место, в частности, в том случае, когда безразмерная функция представляет отношение одноименных величин, например, отношение скоростей w_1/w_2; в этом случае, при подстановке вместо w_1 и w_2 в отношение их величин $c_w w_1$ и $c_w w_2$, их множители c_w автоматически сократятся и в условии (5) нет надобности. В этом случае функция безусловно моногенна.

Таким образом, абсолютная система единиц может быть применена только в том случае, когда законы природы выражены уравнениями, содержащими гомогенные функции, или, что то же, когда эти уравнения моногенны (однородны). Такие уравнения носят название полных уравнений.

Следствием гауссовой системы является то, что отношение любых одноименных величин остается неизменным при перемене единиц измерения, так как при такой перемене в числителе и знаменателе появятся одинаковые множители перехода к новым единицам, которые автоматически взаимно сократятся. Например, отношение скоростей двух автомобилей, движущихся с определенными скоростями, останется тем же, будем ли мы измерять их скорости метрами в секунду или километрами в час. Единицы измерения для величины тепла и внутренней энергии в технических уравнениях термодинамики определяются не как вторичные величины, выраженные через абсолютную систему (сантиметр, грамм, секунда); единица их выбирается независимая — калория.

В дальнейшем, при изложении теории подобия потребуется определять размерности отдельных членов уравнений, описывающих явления. При этом надо не терять коэффициентов, появляющихся вследствие отхода от абсолютной системы единиц, так как без них размерности величин будут определены неправильно.

Первый закон термодинамики в технической системе единиц пишется так:

$$Q = \Delta U + AL.$$

Так как в нем Q и U измеряются в килокалориях, а работа L — в килограмм-метрах, то размерность A есть ккал/кг·м и все три члена получают одинаковую размерность (ккал). Таким образом, правило однородности физических уравнений, написанных в системе единиц, связано не только с абсолютной системой, но может быть распространено на любую систему единиц.

Это так называемое правило Фурье, которое гласит:

„Физические уравнения, выраженные в системе единиц, не изменяют своего вида при перемене единиц измерения".

Однородные уравнения обладают еще одним важным свойством:

Всякое однородное уравнение может быть представлено в виде зависимости между безразмерными степен-

ными комплексами, составленными из величин, входящих в уравнение.

Согласно предыдущему все физические явления выражаются через однородные уравнения.

Пусть

$$\varphi(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k) = 0 \tag{6}$$

есть такое уравнение, где через $a_1, \ldots, a_m$ обозначены первичные величины, а $b_1, \ldots, b_k$ — вторичные в какой-нибудь системе единиц. При этом некоторые из этих величин могут быть постоянными, так называемыми именованными коэффициентами. Таковым может быть коэффициент a в уравнении (4).

Таким образом, в уравнении (6) должны быть перечислены все именованные величины.

Рассмотрим сперва наиболее распространенный случай, когда уравнение (6) состоит из суммы степенных комплексов одинаковой размерности.

Разделим все члены этого уравнения на один какой-нибудь из них. Тогда все члены уравнения станут безразмерными.

$$\Sigma\left(kb_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \ldots a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m}\right) + 1 = 0, \tag{7}$$

где

$$kb_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \ldots a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m} \tag{8}$$

представляет один из безразмерных членов этой суммы. В него, вообще говоря, могут входить не все, а только некоторые из величин b_1, b_2[1], a_1, $a_2 \ldots$, содержащиеся в уравнении (7).

Здесь k, β_1, β_2, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — отвлеченные (безразмерные) числа, а $b_1, b_2, a_1 \ldots$ — именованные числа, имеющие размерность.

---

[1] Ради упрощения выкладок примем, что в нем только две вторичных величины — b_1 и b_2. Легко, конечно, распространить вывод на любое число их.

Согласно системе единиц, выбранной для уравнения (7), вторичные величины имеют размерности, представляемые символическими равенствами

$$\begin{aligned}[b_1]&=[a_1^{\gamma_1}\ldots a_m^{\gamma_m}],\\ [b_2]&=[a_1^{\delta_1}\ldots a_m^{\delta_m}];\end{aligned}\tag{9}$$

причем некоторые из показателей γ, $\delta, \ldots$, могут быть равными нулю.

Равенства (9) показывают, что если величины b_1, b_2 разделить на степенные комплексы $a_1^{\gamma_1}, \ldots, a_m^{\gamma_m}$, $a_1^{\delta_1}, \ldots, a_m^{\delta_m}$, то полученная дробь будет безразмерным числом.

Произведем такое деление в рассматриваемом члене суммы (8), а чтобы не изменять его значения, умножим одновременно его на те же комплексы. Получится

$$k\left\{\frac{b_1}{a_1^{\gamma_1}\ldots a_m^{\gamma_m}}\right\}^{\beta_1}\left\{\frac{b_m}{a_1^{\delta_1}\ldots a_m^{\delta_m}}\right\}^{\beta_2}a_1^{\xi_1}\ldots a_m^{\xi_m},\tag{10}$$

где $\xi_1=\beta_1\gamma_1+\beta_2\delta_1$, $\xi_2=\beta_1\gamma_2+\beta_2\delta_2$ и т. д. Выражение (10) безразмерно.

Поскольку

$$\Pi_1=\left\{\frac{b_1}{a_1^{\gamma_1}\ldots a_m^{\gamma_m}}\right\}^{\beta_1},\quad \Pi_2=\left\{\frac{b_2}{a_1^{\delta_1}\ldots a_m^{\delta_m}}\right\}^{\beta_2},$$

согласно только что сказанному, безразмерны, то, следовательно, и комплекс $a_1^{\xi_1}, \ldots, a_m^{\xi_m}$ тоже безразмерен. Но так как он составлен из одних первичных величин, то безразмерным он может быть только в двух случаях: либо, когда каждый из показателей ξ_1, $\xi_2, \ldots$ и т. д. равен нулю, либо, когда множители $a_1, a_2, \ldots$ и другие суть одноименные величины и представляют собой симплексы $S_1=\left(\frac{a_1'}{a_1}\right)^{\xi_1}$ и т. д.

Итак, рассмотренный член суммы, равно как и остальные, представляет произведение комплексов и симплексов, т. е. он равен произведению

$$k\Pi_1\,\Pi_2 S_1'^{\xi_1}\,S_1''^{\xi_2}\,S_2^{\xi_3}\ldots\tag{11}$$

где число S_1', S_1'', ... — число одноименных „напарников“ величин a_1, ... При этом Π_1, Π_2 — гомогенны, а S_1', S_1'', ...— моногенны. Поэтому после подстановки вместо $b_1 b_2, a_1 a_2 \ldots$ произведений $c_{b_1} b_1$, $c_{b_2} b_2$, $c_{a_1} a_1 \ldots$ и установления условия для всех членов суммы, что

$$\left\{\frac{c_{b_1}}{c_{a_1}^{\gamma_1}\ldots c_{a_m}^{\gamma_m}}\right\}^{\beta_1}\cdot\left\{\frac{c_{b_2}}{c_{a_1}^{\delta_1}\ldots c_{a_m}^{\delta_m}}\right\}^{\beta_2}=1, \tag{12}$$

уравнение (7) останется инвариантным по отношению к сделанной подстановке, т. е. требование, предъявляемое системой единиц, будет выполнено.

Условие (12) о равенстве индикаторов единице равносильно тому условию, что величины, входящие в уравнение (12), подчинены абсолютной или иной системе единиц.

Предположим теперь, что в состав выражения (6) входят множители, представляющие трансцендентные функции. В таком случае все, что было сказано выше по отношению к одному из членов суммы (6), может быть повторено по отношению к аргументу трансцендентной функции, в результате чего этот аргумент получит такой же вид, какой имеют члены уравнения (11), а условие однородности (12) приведет его к безразмерному виду.

То, что сказано о трансцендентных функциях, может быть, очевидно, распространено на любую функцию $\Psi(\varphi_1, \varphi_2 \ldots)$, в которой под знаком Ψ стоят однородные функции φ_1, φ_2.

Итак, *уравнения физики, подчиненные системе единиц, могут быть представлены в виде зависимости между комплексами и симплексами, составленными из величин этого уравнения:*

$$\Psi(K_1, \ldots, S_1', S_1'', \ldots) = 0, \tag{13}$$

где $K_1 = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \ldots$ и $S_1' = \frac{a_1'}{a_1}$, $S_1'' = \frac{a_1''}{a_1} \ldots$, а Ψ — любая функция.

Число комплексов K в уравнении (13), очевидно, равно числу членов суммы (7) без одного, плюс число аргументов трансцендентных функций, входящих в эти члены. Число симплексов S, как было указано, равно числу одноименных напарников, входящих в уравнение (13).

Полученное выражение (13) представляет обобщенный вывод теоремы Федермана [3].

Для частного случая, когда трансцендентные функции не входят в уравнение (13) и в каждом его одночлене $K_1, \ldots K_k$, содержится только по одной вторичной величине $b_1, \ldots, b_k$, число комплексов K, очевидно, будет равняться числу вторичных величин b.

Это так называемая π-теорема Букингэма [4]. Для общего случая она, конечно, неверна.

Глава 3

ПОДОБНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПРИРОДЕ

Всякое явление природы представляет собою системy материальных тел, которая претерпевает определенное изменение состояния, поскольку в ней протекают различные процессы.

Явлениями, подобными друг другу, называются системы тел, геометрически подобные друг другу, в которых протекают процессы одинаковой природы и в которых одноименные величины, характеризующие явления, относятся между собой как постоянные числа.

Иными словами, можно определить подобие явлений так: явление, подобное заданному, может быть получено путем такого его преобразования, когда размер каждой его величины изменяется в определенное число раз.

Такое преобразование называется подобным преобразованием явления.

Понятие подобного преобразования первоначально возникло в геометрии, где таким путем получаются подобные фигуры и тела; отношение любых сходственных отрезков в них равно одному и тому же постоянному числу c_l, так что можно сказать, что тело, подобное первоначальному, получено путем изображения его в ином геометрическом масштабе.

Понятие „механическое подобие" прежде всего включает в себя геометрическое подобие систем, затем—кинематическое подобие: подразумевается, что в любых сходственных точках систем скорости движущихся тел параллельны и пропорциональны друг другу, т. е. что отношение между их скоростями одинаково во всех точках системы. Если система состоит из отдельных дискретных частиц, то у подобных явлений массы их тоже относятся между собой как постоянное число; если же имеет место течение сплошного тела, капельной или газообразной жидкости, то плотности и коэффициенты вязкости во всех сходственных точках подобных систем имеют постоянное отношение.

Далее понятие механического подобия включает в себя динамическое подобие, т. е. параллельность и пропорциональность сил в сходственных точках.

Тепловое подобие подразумевает пропорциональность друг другу всех характеризующих тепловые явления величин: температур, тепловых потоков, теплоемкостей, коэффициентов теплопроводности и т. д.

Обозначая отношение расстояний между геометрически подобными точками, т. е. сходственных отрезков длин двух подобных систем, через c_l, скоростей — c_w, масс — c_m, сил — c_f и т. д., можно дать математическую формулировку понятию подобия в виде следующей системы равенств:

$\frac{l''}{l'} = c_l$; $\frac{w''}{w'} = c_w$; $\frac{m''}{m'} = c_m$; $\frac{f''}{f'} = c_f$ и т. д., где одним и двумя штрихами обозначены первое и второе подобные явления.

Коэффициенты пропорциональности c_l, c_w и т. д., называются константами подобия. Для каждого рода величин они имеют свою особую численную величину; поэтому константы подобия имеют соответственные подстрочные значки, показывающие, к какого рода величинам они относятся.

Обобщая сказанное, можно подобие явлений определить, как пропорциональность друг другу всех величин, характеризующих явление, причем коэффициент пропорциональности сохраняет постоянное значение во всех точках системы для определенного наименования величин, но является различным для величин разного наименования.

В общем виде переход от $x_1', \ldots, x_n'$ величин одного явления к $x_1'', \ldots, x_n''$ величинам другого, ему подобного, может быть выражен уравнением

$$x_i' = c_{x_i} \cdot x_i'' \Big|_{i=1}^{i=n} \qquad \text{(I)}$$

Это первое **основное** уравнение теории подобия.

Константы подобия сохраняют свое значение для любых случаев отношения сходственных величин. Например, если l' и l'' — сходственные отрезки двух подобных систем, то имеют место равенства:

$$\frac{l''}{l'} = \frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_0''}{l_0'} = \frac{l_2'' - l_1''}{l_2' - l_1'} = \frac{\Delta l''}{\Delta l'} = c_l,$$

и, следовательно, отношение величин $l''/l' = c_l$ можно заменить отношением любых других отрезков при условии, что замена эта для любых подобных явлений делается одинаковым образом. Это так называемое правило замещения одних величин другими того же наименования.

Такую замену можно делать для всех других величин, например w''/w' и т. д.

В дальнейшем часто будут встречаться дифференциалы величин.

На них также можно распространять правило замещения величин. Это правило можно применить, когда рассматриваемая среда предполагается сплошным телом, т. е. когда наблюдатель имеет дело с такими размерами тела, которые в очень большое число раз превосходят расстояния между молекулами δ, так что дискретное строение тела незаметно и может не приниматься во внимание.

По определению, дифференциал функции dy равен ее производной, помноженной на дифференциал независимой переменной dx:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Здесь dx — произвольная величина, которая в физике должна лежать в пределах

$$\delta \ll dx \ll \Delta x,$$

т. е. быть значительно больше расстояний между молекулами, для того, чтобы можно было рассматривать тело сплошным, как континуум, и одновременно настолько малым, чтобы к нему с достаточной степенью точности можно было применять формулы дифференциального, а не разностного исчисления. Таким образом, в физике dx есть хотя и очень малая, но конечная величина и, следовательно, должна рассматриваться, как разность $x_2 - x_1$. Поэтому

$$\frac{x_2''}{x_2'} = \frac{x_1''}{x_1'} = \frac{x_2'' - x_1''}{x_2'' - x_1'} = \frac{dx''}{dx'} = c_x .$$

Подобным же образом $dy = y_2 - y_1$ и, следовательно, к нему применимо $\frac{y_2'' - y_1''}{y_2' - y_1'} = \frac{dy''}{dy'} = c_y$.

Вообще говоря, подобных друг другу явлений бывает не два, а значительное количество. Мы будем говорить, что они составляют группу подобных явлений.

Сравнивая все члены группы с одним явлением, которое служит образцом для них, замечаем, что при переходе от одного, подобного образцу явления к другому, к третьему и т. д. константы подобия каждый раз получают другое значение, сохраняя в то же время свое свойство—быть постоянными во всех точках каждой системы, подобной образцу.

Объединяя переход от явления образца ко всем подобным ему, мы можем рассматривать его выражение $x_i'' = c_{x_i} x_i'$ как групповое преобразование явления, подразумевая под константой c_{x_i} последовательно ее значения для всей группы подобных образцу величин.

Подобие явлений можно выразить и другим способом: не константами подобия, а посредством так называемых инвариантов подобия.

Перейдем от абсолютной системы единиц, общей для всех явлений данного класса, к относительной системе, пригодной только для одного явления этого класса. Для этого выберем за единицы измерения величин рассматриваемой системы значения этих величин в каких-нибудь точках самой системы. Отметим их подстрочным индексом (0). Тогда все величины l', w', m' и другие для первого явления получат численные значения:

$$\frac{l'}{l_0'} = L'\,; \quad \frac{w'}{w_0'} = W'\,; \quad \frac{m'}{m_0'} = M'$$

и т. д.

Если во втором явлении за единицы измерения величин выбрать их значения в сходственных первой системе точках, то их значения в относительных единицах будут

$$\frac{l''}{l_0''} = L''; \quad \frac{w''}{w_0''} = W''$$

и т. д.

Очевидно, L'', W'' и т. д. будут те же, что и L', W' в первой системе.

В самом деле, из (2′) следует

$$\frac{l''}{l'} = \frac{l_0''}{l_0'} \text{ и т. д.}$$

Представляя члены пропорции, получим

$$\frac{l''}{l_0''} = \frac{l'}{l_0'}\,, \quad \text{или} \quad L'' = L'.$$

То же самое получится для любых других величин, характеризующих подобные явления.

Поэтому значки, отмечающие, к какому из явлений относятся величины L, W и т. д., можно отбросить, так как при переходе от одного явления к другому, ему подобному, все величины, выраженные в относительных единицах измерения, останутся численно прежними.

Иными словами, они являются инвариантами подобия. Будем обозначать это свойство их словами inv. (инвариант) или idem (то же самое).

Следовательно, $L = \text{idem}$, $W = \text{idem}$ или для общего случая $\frac{x}{x_0} = X = \text{idem}$. (I)′

Следует уметь хорошо отличать понятия „константа подобия“ и „инвариант подобия“.

Константа сохраняет постоянное значение во всех точках системы, но она делается другой, когда одна пара подобных явлений заменяется другой.

Инвариант подобия, наоборот, различен для разных точек системы, поскольку он изображает одну из величин этой системы, имеющую разное численное значение в разных точках системы; но он не меняется при переходе от одного явления к любому другому, подобному ему. Иначе говоря, он сохраняет одно и то же значение в сходственных точках всей группы подобных явлений.

В дальнейшем мы будем пользоваться определением подобия и через константы, и через инварианты в зависимости от того, какое определение при рассмотрении различных вопросов оказывается удобнее в смысле простоты изложения.

Возвращаясь к определению подобия через константы подобия, отметим, что на первый взгляд выбор всех констант подобия может казаться произвольным. На самом деле это не так. Величины, характеризующие различные явления, не являются независимыми друг от друга. Часто между ними существует определенная связь. Эта связь, называемая законом природы, во многих случаях может быть выражена в математической форме в виде уравнения.

Наличие такого уравнения, делающего одни величины зависимыми от других, налагает и на константы подобия определенные ограничения.

Нахождение зависимости между константами подобия, вызываемой существованием уравнения, связывающего между собой характеризующие явление величины, составляет содержание теоремы подобия, которая будет изложена в следующей главе.

Уравнения, описывающие различные явления природы, можно рассматривать, как имеющие различную степень общности.

Наиболее общие уравнения, выражающие общие законы природы, такие, как общие законы механики, закон сохранения энергии, можно назвать уравнениями, охватывающими целый класс явлений. Таковы были уравнения, представляющие второй закон Ньютона и первый закон термодинамики, упомянутые во 2-й главе настоящей книги. Эти общие уравнения могут получать различные частные виды в зависимости от того, к каким частным видам явлений данного класса они будут прилагаться. Так, общие уравнения механики принимают вид уравнения Навье-Стокса в применении к течению жидкости, вид уравнений колебания упругой среды и т. п. Эти виды явлений содержат отдельные семейства однотипных явлений, отличающихся друг от друга только заданием различных условий однозначности явления. И, наконец, единичные явления выделяются из семейства численным заданием условий однозначности, которые для каждого единичного явления семейства буквенно одинаковы, но численно отличны друг от друга.

В дальнейшем свойство уравнений связи, которое налагает на них подобие явлений, будет излагаться сперва для самых общих законов природы и для них будут выводиться теоремы подобия. Однако не меньшее значение будет иметь приложение общей теории подобия к частным случаям и к единичным явлениям, так как только таким путем окажется возможным вскрыть наиболее важные стороны учения о подобии.

Глава 4

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ПОДОБИЯ

Существование уравнения, связывающего между собой различные величины, характеризующие изучаемое явление природы, составляет необходимую предпосылку для возможности формулирования основных теорем подобия. Без этого утверждение о существовании подобия явлений свелось бы к простой констатации того, что подобные явления в геометрически подобных точках имеют подобие одноименных величин.

Наличие уравнений, связывающих между собой величины, накладывает определенную зависимость на константы, через которые выражается подобие этих величин.

Выявление этой зависимости составляет содержание первой теоремы теории подобия.

Прежде чем вывести ее для общего случая, покажем, как эти зависимости получаются в частном случае механического подобия. Такой путь облегчит изложение первой теоремы и сделает общие выводы более понятными.

Для частного случая подобного течения двух жидкостей первая теорема подобия была высказана еще И. Ньютоном в 1686 г. в его „Principia" [1]. Однако строгое доказательство теоремы было дано только 250 лет спустя, в 1848 г., Ж. Бертраном [2].

В своем доказательстве Бертран исходил из самого общего уравнения механики, д'Аламберова начала:

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{d\tau^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{d\tau^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{d\tau^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

где X, Y, Z — проекции сил, действующих на массу, а $\frac{d^2x}{d\tau^2}$, $\frac{d^2y}{d\tau^2}$, $\frac{d^2z}{d\tau^2}$ и т. д. — проекции ускорений их.

Мы повторим вывод Бертрана, но вместо формул аналитической механики возьмем за исходное уравнение связи второй закон Ньютона, выраженный в векторной форме. Так как в теории подобия не дается решения дифференциальных уравнений, а делаются выводы из них о свойствах подобных явлений, не требующие их интегрирования, то векторная форма обеспечивает значительно бо́льшую простоту изложения и сокращает выкладки.

Итак, предположим, что имеется случай подобного движения двух механических систем. Оба явления должны описываться одним и тем же уравнением, так как в противном случае, если бы подобие и существовало в начальный момент, оно затем сейчас же нарушилось бы, поскольку изменения разных величин определялись бы различными математическими зависимостями.

Поэтому к любой материальной точке каждой системы приложим второй закон Ньютона: „Равнодействующая всех сил, действующих на массу, равна по величине массе, умноженной на ускорение, а по направлению совпадает с последним“:

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{w}}{d\tau}. \tag{14}$$

Это уравнение буквенно (алгебраически) одинаково для обеих подобных систем. Отличаться они будут численным (арифметическим) значением букв, входящих в уравнение (14).

Для какой-нибудь материальной точки первого явления будем иметь

$$\vec{f}' = m'\frac{d\vec{w}'}{d\tau'}, \tag{14'}$$

для сходственной точки второго явления соответственно будет

$$\vec{f}'' = m''\frac{d\vec{w}''}{d\tau''}. \tag{14''}$$

Существование подобия между явлениями налагает на них следующие условия:

$$f'' = c_f f'; \; m'' = c_m m'; \; w'' = c_w w'; \; \tau'' = c_\tau \tau'. \tag{15}$$

Подставим выражения для величин второго явления через величины первого, даваемые равенствами (15), в уравнение (14″). Получим

$$\left[\frac{c_f c_\tau}{c_m c_w}\right] \vec{f}' = m' \frac{d\vec{w}'}{d\tau'} . \tag{14‴}$$

Таким образом, имеются два уравнения (14′) и (14‴), связывающие между собой одни и те же величины f', m', w', τ'. Эти уравнения совместимы только при том условии, если

$$\frac{c_f c_\tau}{c_m c_w} = 1. \tag{16}$$

Уравнение (16) показывает, что константы подобия не могут выбираться произвольно. Поскольку величины f, m, w, τ связаны между собой уравнением (14), константы подобия тоже оказываются находящимися в определенной связи, даваемой уравнением (16), так что только три из них могут быть произвольными, а четвертая определится из равенства (16).

Выражению $C = \dfrac{c_f c_\tau}{c_m c_w}$ присвоено название „индикатора" подобия, а равенство (16) называется „обусловливающим подобие равенством", или „условием подобия".

Существуют только такие подобные явления, константы подобия которых подчиняются условиям подобия — уравнение (16). Подобные явления с иными константами подобия реально не существуют.

Например, нельзя представить себе подобные движения, вызванные одинаковыми силами, если отношение их масс $c_m = 2$, а отношение ускорений $c_w/c_\tau = 3$. Реальный случай может отвечать только отношению сил $c_f = 6$.

Равенство (16) представляет математическое выражение первой теории подобия, которое гласит:

У подобных явлений индикаторы подобия равны единице.

Равенству (16) можно придать другой вид.

Подставляя в него выражение для констант подобия из выражений (15), получим

$$\frac{f'\tau'}{m'w'} = \frac{f''\tau''}{m''w''}.$$

Это равенство указывает, что комплекс $\frac{f\tau}{mw}$ одинаков для всех подобных между собой явлений. Употребляя выбранное выше выражение idem (одно и то же), можно равенство (16) представить в виде

$$K = \frac{f\tau}{mw} = \text{idem}. \qquad (16')$$

Комплекс K называется инвариантом подобия, или критерием, и первая теорема может быть формулирована так:

У подобных явлений критерии численно одинаковы.

Найденному критерию механического подобия обыкновенно придают несколько иной вид, исключая из него время.

Так как

$$dw = \frac{dl}{d\tau},$$

то

$$d\tau = \frac{dl}{dw}$$

и

$$c_\tau = \frac{\tau''}{\tau'} = \frac{d\tau''}{d\tau'} = \frac{dl''}{dl'} : \frac{dw''}{dw'} = \frac{c_l}{c_w}.$$

Поэтому

$$\frac{c_f c_\tau}{c_m c_w} = \frac{c_f c_l}{c_m c_w{}^2} = 1$$

и

$$K_1 = \frac{fl}{mw^2} = \text{idem}.$$

Этот критерий назван начальными буквами имени Ньютона Ne (Newton).

Критерий подобия может быть получен прямо из уравнения (14), без посредства индикаторов подобия. Для этого следует перейти к относительным единицам подобия.

Пусть f_0, m_0, w_0, τ_0 — такие относительные единицы, выбранные в определенных точках системы.

Обозначая через

$F = \frac{f}{f_0}$, $M = \frac{m}{m_0}$, $W = \frac{w}{w_0}$, $\mathrm{T} = \frac{\tau}{\tau_0}$ — силу, массу, скорость и время, выраженные в относительных единицах, получим

$$\frac{f_0 \tau_0}{m_0 w_0} \cdot F = M \frac{dW}{d\mathrm{T}}. \tag{17}$$

Здесь F, M, W, T одинаковы для всей группы подобных явлений, а $\frac{f_0 \tau_0}{m_0 w_0} = K_0$ — инвариант подобия, выраженный через единицы измерения; для того чтобы уравнение (17) было одинаково, должно быть $K_0 = \text{idem}$.

Это так называемый „адромный" критерий, сохраняющий постоянное значение, если обежать все точки системы. Умножая его на $\frac{f\mathrm{T}}{mw} = \text{idem}$, получим $\frac{f\mathrm{T}}{mw} = K = \text{idem}$, „полидромный" критерий, меняющийся от точки к точке системы, в соответствии с переменными величинами, из которых он составлен.

Полагая для двух подобных явлений $K' = K''$ или $\frac{K''}{K'} = 1$, можно обратно вывести уравнение

$$C = \frac{c_f c_\tau}{c_m c_w} = 1.$$

Как было показано на примере замены критерия $\frac{f\tau}{mw}$ критерием $\frac{fl}{mw^2}$, в выводе критериев имеется некоторый произвол. Если имеются критерии $K_1 = \text{idem}$ и $K_2 = \text{idem}$, то, очевидно, и их произведение $K_1 \cdot K_2 = \text{idem}$ и частное $K_2/K_1 = \text{idem}$ тоже инвариантны и ими можно заменить первоначальные.

Введение в учение о подобии относительных единиц измерения имеет большое значение. Они позволяют сделать уравнения связи между физическими величинами общими для всей группы подобных явлений.

Уравнение связи (14) буквенно одинаково для подобных явлений. Выведенные из него критерии численно одинаковы для всех подобных явлений.

Преобразованное из (14) уравнение связи (17) состоит из величин F, M, W и т. д., которые, как было показано, численно одинаковы у всех подобных явлений. Это инварианты подобия, безразмерные „симплексы“, составленные из отношений одноименных величин, типа $F = \frac{f}{f_0}$, причем $F = \mathrm{idem}$, а f и f_0 — различны для каждого единичного явления группы подобных явлений. Входящий в уравнение (17) адромный критерий $K_0 = \frac{f_0 \tau_0}{m_0 w_0}$ также численно одинаков во всех подобных явлениях. Это инвариант подобия, безразмерный „комплекс“, составленный из нескольких величин разной размерности. В целом само уравнение (17), очевидно, также численно одинаково для всей группы подобных явлений, оно охватывает всю группу одной формулой.

Это свойство обобщенного уравнения связи (17) будет использовано для дальнейших выводов.

Перейдем теперь к выводу первой теоремы подобия, данному Т. А. Афанасьевой-Эренфест для самого общего случая,— подобия любого явления природы [5, 6].

Предположим, что рассматривается некоторое явление. Если известно, что существует группа явлений, подобных ему, то они обладают следующими свойствами.

1) Явления протекают в геометрически подобных системах и величины, характеризующие явление, во всех точках системы, в которой протекают процессы данного явления, относятся к одноименным величинам из группы подобных явлений, в сходственных точках системы как постоянные числа. Каждой величине отвечает свое число, различное для каждой пары явлений.

2) Величины, характеризующие рассматриваемое явление, вообще говоря, не независимы друг от друга, а между ними существуют определенные связи. Если эти связи могут быть выражены в виде математических зависимостей, то последние для подобных явлений буквенно одинаковы.

Наличие этих двух условий, из которых первое представляет математическую формулировку понятия подобия, а второе — необходимое условие его сохранения при протекании процессов, налагает определенные ограничения на вид уравнений связи. Можно показать, что уравнения связи должны быть однородными по отношению к подобному преобразованию входящих в них величин.

Пусть связи между величинами, характеризующие явление, даны в виде m уравнений между их величинами:

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \Big|_{i=1}^{i=m}, \tag{18}$$

где i последовательно проходит все значения от 1 до m.

Напишем его для какой-нибудь пары подобных явлений, для которой

$$x_1'' = c_1 x_1', \ldots, x_n'' = c_n x_n'. \tag{19}$$

Для первого явления уравнения будут

$$\varphi_i(x_1', \ldots, x_n') = 0 \tag{18'}$$

и для второго

$$\varphi_i(x_1'', \ldots, x_n'') = 0. \tag{18''}$$

Подстановка в (18″) равенств (19) преобразует уравнение (18″) в

$$\varphi_i(c_1 x_1', \ldots, c_n x_n') = 0. \tag{18'''}$$

Одновременное существование уравнений (18′) и (18‴) возможно только в том случае, когда все константы подобия $c_1, \ldots, c_n$ выйдут из-под функций φ_i в виде одного общего множителя

$$\varphi_i(c_1 x_1', \ldots, c_n x_n') = \psi_i(c_1, \ldots, c_n)\, \varphi_i(x_1', \ldots, x_n') = 0.$$

Тогда, отбрасывая множители $\psi(c_1, \ldots, c_n)$, будем иметь уравнения $\varphi_i = 0$ инвариантными по отношению к произведенному преобразованию.

Функции φ_i, обладающие указанным выше свойством, называются в теории подобия подобнородными (гомогенными), а отвечающие им уравнения (I), — однородными (моногенными).

Свойством подобнородности обладают функции типа степенных комплексов $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, в которых степени α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — отвлеченные числа.

Подобнородными могут быть и суммы степенных комплексов при том условии, что появившиеся после подобного преобразования их сомножители, составленные из констант подобия, все будут равны друг другу.

Например, если $\sum\limits_{i=1}^{i=m} \chi_i(x_i'', \ldots, x_n'')$ — сумма степенных комплексов, то подстановка $x_1'' = c_1 x_1' \ldots$ и т. д. приведет сумму к виду

$$\sum \chi_i(c_1, \ldots, c_n) \cdot \chi_i(x_1', \ldots, x_n'),$$

где функции χ_i у обоих множителей одинаковы.

Гомогенность сумм в этом случае обусловлена равенствами:

$$\chi_1(c_1, \ldots, c_n) = \chi_2(c_1, \ldots, c_n) = \chi_m(c_1, \ldots, c_n),$$

или, деля эти равенства на какое-нибудь одно нз них, —

$$\frac{\chi_1(c_1, \ldots, c_n)}{\chi_m(c_1, \ldots, c_n)} = 1 \ldots \quad \frac{\chi_{m-1}(c_1, \ldots, c_n)}{\chi_m(c_1, \ldots, c_n)} = 1. \qquad (20)$$

Последние равенства есть условия, при которых написанные суммы делаются подобнородными. Они называются условно подобнородными, а равенства (20) — обусловливающими равенствами. Поскольку они определяют возможность существования группы подобных явлений, им присвоено также, как сказано выше, название индикаторов подобия.

Индикаторы накладывают на константы подобия определенные ограничения. Возможно существование только таких подобных явлений, у которых индикаторы равны единице.

Все изложенное представляет содержание первой теоремы подобия.

Подобные явления описываются буквенно одинаковыми уравнениями, которые условно или безусловно инвариантны по отношению к подобным преобразованиям входящих в них величин.

Безусловно инвариантными называются уравнения, когда множители $\chi_i(c_1, \ldots, c_n)$, $\chi_m(c_1, \ldots, c_n)$ сами собой непосредственно сокращаются. В этом случае выбор констант подобия ничем не ограничен. В противном случае они называются условно инвариантными и тогда могут существовать только те подобные явления, константы подобия которых подчиняются условию равенства единице индикаторов подобия.

Легко заметить, что получение условия подобия (20) аналогично выводу, в главе 2-й, условия инвариантности уравнений при перемене единиц измерения. Причина этому та, что оба условия суть условия однородности физических уравнений. Из этой аналогии вытекает, с одной стороны, возможность существования подобия физических явлений, так как физические уравнения однородны, а с другой, — возможность выводить свойства подобных физических явлений путем анализа размерности характеризующих их величин. Оба эти вопроса будут разобраны в следующих главах.

Глава 5

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ПОДОБИЯ

Рассмотрим сперва случай, когда уравнение связи не содержит дифференциальных операторов.

Как было показано во 2-й главе, физические уравнения связи, написанные в системе единиц, могут быть представлены как зависимость между безразмерными степенными комплексами величин, входящих в уравнение. Они могут быть сделаны инвариантными по отношению к подобному преобразованию величин

$$a'' = c_a a' , \tag{21}$$

если константы подобия подчинить обусловливающим уравнениям, которые являются условиями однородности для уравнений связи.

Математически это свойство выражается, как мы видели, так, что каждый безразмерный степенной комплекс вида $a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$ обладает свойством после подобного преобразования выделить все константы подобия в один множитель, составленный из констант подобия так, как сам комплекс составлен из величин $c_{a_1}^{\alpha_1} \ldots c_{a_n}^{\alpha_n}$.

Условие однородности уравнений, влекущее за собой его инвариантность, заключается, следовательно, в приравнивании этого множителя единице:

$$C = c_{a_1}^{\alpha_1} c_{a_2}^{\alpha_2} \ldots c_{a_n}^{\alpha_n} = 1 . \tag{22}$$

На подобное преобразование можно смотреть как на „формальное“, когда одни единицы измерения заменяются другими, и как на „материальное“, когда от одного явления переходят к другому, ему подобному.

Математическая сторона преобразования от этого не меняется. Поэтому условия однородности (22) можно считать условиями подобия и рассматривать их как формулировку первой теоремы подобия: *для подобных явлений индикаторы равны единице:*

$$C_1 = 1, \ldots, C_m = 1 \tag{22'}$$

или же, переходя от индикаторов подобия к критериям, дать другую формулировку первой теоремы:

„Критерии подобных явлений одинаковы“:

$$K_1 = \mathrm{idem} \ldots K_m = \mathrm{idem}.$$

Заменяя в равенстве (22) индикатор критерием, будем иметь $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} = \mathrm{idem}$. Иначе говоря, члены безразмерного уравнения суть критерии.

Таким образом, для случая отсутствия в уравнении дифференциальных операторов преобразование его к безразмерному виду переводит уравнение непосредственно в критериальное, в уравнение, составленное из критериев подобия. Поскольку критерии подобных явлений соответственно равны друг другу, уравнение связи становится единым, численно одинаковым для всех подобных явлений.

В случае дифференциальных уравнений такой простой результат не получается, так как знаки дифференциалов являются барьерами, препятствующими объединению множителей безразмерных комплексов в одночлены-критерии, составленные из конечных величин.

Однако и для этого случая можно ожидать, что вид и число критериев, выведенных из дифференциальных уравнений, окажутся теми же, какие будут найдены из уравнений после их интегрирования.

В противном случае это означало бы, что перемена порядка операций нахождения критериев и интегрирования может привести к разным результатам в установлении условий подобия [8, 9].

Ведь дифференциальные уравнения связи не приурочены к одному определенному месту системы, а одинаково годны для всех точек системы. Поэтому и выведенные из них критерии должны быть пригодны для всей системы в целом.

Несмотря на эти убедительные рассуждения, теории подобия все же нехватало общего вывода второй теоремы для случая, когда уравнения связи даны в виде дифференциальной зависимости между величинами, характеризующими явление. Этот вывод был дан П. К. Конаковым в 1949 г. [7].

Мы приведем другое доказательство, основанное на преобразовании уравнений связи к так называемым „критериальным“ относительным единицам измерения.

Величины, входящие в уравнения связи, как мы видели, получаются при этом в виде безразмерных симплексов. Кроме того, в уравнении появляются адромные критерии, составленные из постоянных величин, которые выбраны в качестве единиц измерения.

В общем случае, когда дана система дифференциальных уравнений

$$D_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{23}$$

допускающая подобное преобразование, ее всегда можно преобразовать в групповую:

$$D_i(K_1^{(0)} X_1, \ldots, K_m^{(0)} X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n) = 0, \tag{23'}$$

в которой $K_1^{(0)}, \ldots, K_m^{(0)}$ — адромные критерии, составленные из единиц измерения $a_1, \ldots, a_n$, $X_1 = \frac{x_1}{a_1}, \ldots$ — симплексы, выражающие величины $x_1, \ldots, x_n$ в относительных единицах.

Так как уравнение (23′) содержит только величины, одинаковые для всех подобных явлений, то оно численно одинаково для всей группы подобных явлений.

Адромные критерии стоят в нем множителями при соответственных одночленах уравнения. Поэтому адромные критерии путем соединения их с симплексами можно перевести в монодромные, содержащие одну переменную величину, а остальные — постоянные.

Так, например, уравнение (17), выражающее второй закон Ньютона,

$$\frac{f_0 \tau_0}{m_0 w_0} \cdot F = M \frac{dW}{d\mathrm{T}} \tag{17}$$

содержит в левой части произведение симплекса $\frac{f}{f_0}$ на адромный критерий $\frac{f_0 \tau_0}{m_0 w_0}$. Сокращая у них f_0, будем иметь $\frac{f \tau_0}{m_0 w_0} = K_f$ — монодромный критерий, так как в нем f — переменная величина. Если теперь заменить избранную для измерения f прежнюю единицу f_0, выбранную произвольно, новой $f_0^{(k)}$, выбранной так, что $f_0^{(k)} = \frac{m_0 w_0}{\tau_0}$, то K_f можно представить в виде симплекса $F^{(k)} = \frac{f}{f_0^{(k)}}$.

На основании вышесказанного, уравнение (23′) можно перевести в

$$D_i \left(X_1^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)}, X_{m+1}, \ldots, X_n \right) = 0. \tag{23″}$$

В нем все адромные критерии переведены в монодромные путем соединения их с множителем — симплексом, а затем подбором новых „критериальных“ единиц — в критериальные симплексы

$$X_1^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)}.$$

Легко видеть, что критериальную единицу можно получить, приравняв адромный критерий единице. В нашем примере

$K_0 = \frac{f_0 \tau_0}{m_0 w_0}$. Из $K_0 = 1$ как раз и получим

$$f_0^{(k)} = \frac{m_0 w_0}{\tau_0}.$$

Что можно произвести преобразование уравнения к виду (23″), следует из того, что число критериев m в случае существования группы подобных явлений меньше числа величин n, входящих в уравнение.

Следовательно, выбор единиц $a_1, \ldots, a_n$ может быть сделан произвольным образом.

Очевидно, m критериям будут отвечать m критериальных симплексов $X_1^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)}$.

Остальные $n-m$ симплексов останутся выраженными в простых относительных единицах.

Заметим попутно, что адромные критерии подобия, вытекающие из уравнения (23′), сейчас же приводятся к полидромным умножением их на симплексы, отвечающие единицам, входящим в адромные критерии. Таким образом, и метод относительных единиц приводит к первой теореме:

У подобных явлений критерии одинаковы.

После сделанных предварительных замечаний приступим к выводу второй теоремы для случая, когда уравнения связи даны в виде системы дифференциальных уравнений.

Система дифференциальных уравнений в частных производных второго и выше порядков является наиболее частым случаем уравнений связи, описывающих физические явления. Решение их связано большею частью с непреодолимыми трудностями, и даже само существование их решения не может быть установлено. Поэтому доказательство второй теоремы применительно к системе дифференциальных уравнений приходится оговорить рядом ограничений и допущений.

Допустим, что для системы уравнений (23′) можно сформулировать условия их однозначности и показать, что придача этих условий к уравнениям позволяет установить существование решения их и его единственность. Пусть решение системы дифференциальных уравнений (23′) приводит к системе уравнений

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{24}$$

которые содержат только конечные величины.

Уравнения (24) есть частные интегралы, отвечающие заданным условиям однозначности. Уравнения (23′) дают возможность найти критерии подобия, как это сделано выше, и преобразовать уравнения (23′) в уравнения в относительных и критериальных единицах (23″).

$$D_i(X_1^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)}, X_{m+1}, \ldots, X_n) = 0. \qquad (23'')$$

Такое преобразование оставит неизменной математическую структуру уравнений (23′). Замена в них обозначений $x_1, \ldots, x_n$ на $X_1^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)}, X_{m+1}, \ldots, X_n$, представляющая перемену единиц, подчиненных гауссовой или иной системе единиц, не изменит их решения. Следовательно, можно утверждать, что уравнение

$$\Phi_j(X_{1,}^{(k)}, \ldots, X_m^{(k)}, X_{m+1}, \ldots, X_n) = 0 \qquad (24')$$

будет решением уравнения (23″), причем вид функций Φ_j будет у (24′) тот же, что и у (24).

Одновременно (24′) являются решением уравнения (23′), так как (23″) есть то же (23′), лишь преобразованное к новым единицам измерения.

В уравнении (24′) дифференциальные барьеры отсутствуют. Поэтому в тех случаях, когда критериальные величины $X^{(k)}$ стоят сомножителем с X, они могут быть объединены в полидромные критерии с одновременным исчезновением части симплексов.

Учитывая, что при интегрировании в уравнениях (24) появятся постоянные интегрирования, численное значение которых определится из условия однозначности, величины, входящие в последние, войдут в уравнение (24), чему будет отвечать появление в (24′) отвечающих им адромных критериев и адромных симплексов.

Поэтому уравнения (24′) получат вид

$$\Psi_j\left\{X_{1,}^{(k)}, \ldots K_1, \ldots X_{m+1}, \ldots K_{m+1}, \ldots S', \ldots\right\} = 0 \quad (\mathrm{II})$$

Это выражение представляет вторую теорему в том обобщенном виде, в котором она получена Т. А. Афанасьевой-Эренфест. Итак, система уравнений (23′), буквенно одинаковая для группы подобных явлений, может быть преобразована в систему уравнений, численно одинаковых для всей группы, между критериями и симплексами переменных величин и постоянных, входящих в условия однозначности. Единичные явления выделяются из уравнения (II) условиями однозначности, различными для каждого единичного явления.

Таким образом, доказано, что уравнения (24), представляющие решение уравнений (23′), имеют одинаковые с ними критерии подобия. Как и должно было получиться, операция интегрирования не изменяет условия подобия.

Следовательно, все выводы теории подобия можно получать из дифференциальных уравнений, если решение их представляет нелегко преодолимые трудности. Это очень важный вывод, позволяющий переносить во всех таких случаях данные единичного опыта на все явления, подобные ему, и обобщать результаты опытов при помощи теории подобия, составляя критериальные уравнения.

Однако для того, чтобы распространять критериальные уравнения на подобные явления, надо уметь распознавать, подобно ли явление данному.

Ответ на этот вопрос дает третья теорема.

Глава 6

ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА ПОДОБИЯ

Всякое экспериментальное исследование какого-нибудь явления имеет дело с одним определенным объектом. Однако задачей исследования является вовсе не изучение одного лишь исследованного случая, но и перенесение полученных данных опыта на целый ряд явлений, аналогичных данному. Теория подобия дает указание, на какую область явлений могут быть распространены результаты единичного опыта.

Согласно первой теореме подобия, данные, полученные при исследовании какого-нибудь явления, могут быть перенесены только на явления, подобные ему, т. е. на явления, которые описываются одним и тем же уравнением.

Вне этой области установленные в опыте зависимости теряют свою силу, и выводы, сделанные из них, разойдутся с действительностью.

Согласно второй теореме подобия для того, чтобы данные, полученные из опыта, можно было непосредственно распространить на подобные явления, их надо обрабатывать в виде зависимости между критериями подобия. Другими словами, надо стараться установить зависимость не между отдельными величинами, характеризующими явление, а между их комплексами, представляющими критерии подобия. Вид последних можно установить, как следует из предыдущего, только в том случае, если установлена математическая зависимость между величинами, характеризующими явление.

Особое значение приобретает теория подобия, дающая метод постановки опытов и обработки их результатов, когда удается составить дифференциальные уравнения, описывающие явление, но решение их в настоящее время представляет непреодолимые трудности. В этом случае приходится обращаться к эксперименту.

Теория подобия определяет, существуют ли подобные данному явления и каковы их критерии подобия, указывает экспериментатору, какие величины надо измерять в опытах (а именно, те величины, которые входят в состав критериев подобия) и как обрабатывать результаты опыта (а именно,— надо устанавливать зависимость между критериями подобия в форме критериальных уравнений).

Так как, по предыдущему, все подобные явления охватываются буквенно одинаковыми уравнениями, которые должны быть однородными, то естественно искать степенную зависимость между критериями. В случае, если имеются только два критерия, нанесение опытных точек на бумагу, на которой абсциссы и ординаты отложены в виде логарифмической сетки, весьма часто обнаруживает линейную зависимость между логарифмами критериев и тем самым приводит к нахождению степенной зависимости.

В более сложных случаях приходится делать ряд поисков, которые не поддаются изложению в виде общего правила.

Возможны случаи, когда производится сопоставление нескольких опытов, относящихся к явлениям, между собой не подобным. В этом случае получится, очевидно, разброс точек, и их не удается представить в виде одной кривой. Точно так же может оказаться, что результаты опытов с одним явлением пытаются перенести на другое, ошибочно принятое за подобное первому. В таком случае выводы из опытов получатся не отвечающими действительности. Отсюда следует, что надо иметь способ определять, подобно ли исследованному явлению какое-нибудь другое явление, т. е. надо уметь распознавать подобие между явлениями, надо обладать знанием признаков подобия.

Ответ на вопрос, подобны ли между собой явления, дает третья теорема подобия.

Казалось бы, самый простой способ убедиться в подобии явлений — это произвести непосредственное сравнение всех величин, входящих в оба явления. Но это означало бы, что надо снова повторить для второго явления те эксперименты, которые были проделаны уже для первого. Тем самым была бы обесценена возможность переносить результаты, полученные из опытов над первым явлением, не производя снова эксперимента, на второе явление. Поэтому надо знать, какое наименьшее количество измерений надо произвести для второго явления, чтобы установить подобие его с первым. Иначе говоря, надо уметь находить *необходимые и достаточные условия* для установления факта существования подобия между явлениями.

Такая постановка вопроса обратна той, которая ставилась до сих пор.

В то время как первые две теоремы исходили из существования подобия, как заведомо известного факта, который наперед задан, третья теорема, наоборот, устанавливает признаки, по которым можно узнать, подобны ли два явления друг другу.

Как и первые две теоремы, третья теорема исходит из того, что явления протекают в геометрически подобных системах, что известны уравнения, которые связывают между собой величины первого явления, и что эти уравнения связи отвечают также условиям существования неограниченного числа подобных первому явлению, т. е. возможно существование группы подобных явлений.

Далее, критерии подобия для этой группы, которые могут быть выведены из уравнений, согласно первой теореме, должны быть одинаковы для всей группы явлений, подобных первому.

Это первое явление мы считаем изученным и свойства его известными. Известны должны быть и его условия однозначности, которые выделяют это явление из всей группы ему подобных.

Пусть имеется второе явление, подобие которого с первым мы должны установить.

Раз оно принадлежит к той же группе подобных явлений, что и первое, то оно должно протекать в геометрически подобных системах и подчиняться тем же уравнениям, которые характеризуют первое явление.

Поэтому геометрическое подобие систем и буквенная одинаковость уравнений связи есть первое необходимое условие для существования подобия.

Поскольку речь идет об определенном явлении, должны быть известны условия однозначности, выделяющие его из группы. Назовем их условиями моновалентности явления.

Эти условия, очевидно, такие же, что и у первого явления, но только численные значения величин, входящих в них, у второго явления иные. Будем называть эти величины „моновалентами“ явления.

Совершенно очевидно, что подобие моновалентов второго явления моновалентам первого необходимо для подобия их между собою. Условия однозначности определяют поведение некоторой части системы, в которой протекает явление; следовательно, если в этой части уже нет подобия, то явления неподобны друг другу.

Значит, подобие условий однозначности есть второе необходимое условие подобия.

Однако этих условий еще недостаточно, чтобы утверждать, что явления, подчиняющиеся им, подобны.

Как было показано, выбор констант подобия в подобных системах не произволен, их нельзя выбирать как попало, так как существуют обусловливающие равенства, или условия подобия, требующие, чтобы индикаторы подобия, полученные из уравнений связи, равнялись единице.

Среди индикаторов рассматриваемой группы могут оказаться такие, которые составлены только из констант моновалентов. Они также должны быть, согласно первой теореме, равны единице.

Следовательно, равенство единице индикаторов подобия, составленных из констант величин, входящих в условия однозначности, или моновалентов, есть еще одно условие, необходимое для существования подобия. Последнему требованию отвечает равенство критериев, составленных из моновалентов. Такие критерии носят название моновалентных, или определяющих, так как инвариантность их входит в условия, определяющие подобие явлений.

Третья теорема утверждает, что добавление последнего условия к предыдущим достаточно для того, чтобы явления оказались подобными.

Для доказательства этого представим себе, что имеется явление, названное выше первым, свойства которого известны, и дано явление, удовлетворяющее всем трем поставленным выше условиям. Назовем его вторым. Покажем, что оно подобно первому.

Выше было принято, что существует неограниченное число явлений, подобных первому. Все они имеют условия однозначности, общие с первым, с той только разницей, что каждому подобному явлению отвечают другие константы подобия. Значения этих констант могут быть выбраны самыми различными, при одном только ограничении, что составленные из них индикаторы подобия равны единице.

Из этого множества подобных явлений выберем одно такое, у которого константы подобия для моновалентов тождественны со вторым явлением.

Такое, подобное первому явление, которое назовем третьим, очевидно, существует, так как константы подобия его моновалентов подчинены требованию равенства единице составленного из них индикатора, а остальные, не входящие в условия однозначности константы, определяются из условия равенства единице остальных индикаторов. Заметим, что и эти, не входящие в условие однозначности константы получат одни определенные значения, так как в противном случае мы бы пришли к выводу о возможности существования двух подобных явлений с одинаковыми условиями однозначности, а это означало бы, что условия однозначности сформулированы неверно.

Сравним между собою второе и третье явления.

Условия однозначности у них тождественны. Следовательно, они представляют собой одно и то же явление, так как не может быть разных явлений, имеющих одинаковые условия однозначности. Но третье явление подобно первому. Следовательно, подобно ему и второе явление.

Таким образом, третья теорема подобия гласит:

Подобны те явления, которые происходят в геометрически подобных системах, подчиняются одним и тем же уравнениям связи, у которых моноваленты находятся в численно постоянном отношении и составленные из них критерии равны.

Так как свойство подобных явлений состоит в том, что в природе существуют только такие, критерии подобия которых равны, то можно под подобием моновалентов понимать и постоянство отношений между ними, и равенство составленных из этих величин критериев. В подобие моновалентов можно включить и геометрическое подобие систем.

При таком расширенном толковании слова „подобие" величин третья теорема получает следующую формулировку:

Подобны те явления, моноваленты которых подобны.

Заметим, что условия однозначности часто могут быть формулированы разными способами. При перемене формулировки „определяющими" станут другие критерии. Поэтому понятие определяющие критерии, т. е. критерии, инвариантность которых определяет существование подобия, не есть свойство, присущее определенным критериям.

Выведем третью теорему другим способом.

Предположим, что уравнения связи

$$D_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{25}$$

преобразованы к относительным критериальным единицам. Тогда, по предыдущему, уравнения (25) преобразуются в такие:

$$D_i(X_1, \ldots, X_n) = 0. \tag{25'}$$

В них $X_i = \dfrac{x_i}{a_i}$, где a_i — избранные относительные единицы. Некоторые из величин X_i содержат критериальные единицы измерения

$$X_i^{(k)} = \frac{x_i}{a_i^{(k)}}.$$

Для подобных явлений

$$X_1 = \text{idem}, \ldots, X_n = \text{idem}, \ldots \; X_i^{(k)} = \text{idem}.$$

Присоединим к уравнениям (25) условия однозначности; пусть их моноваленты будут $v_1, \ldots, v_q$. Для уравнений (25′) они примут вид

$$\frac{v_1}{a_1} = V_1 = \text{idem}; \quad \frac{v_q}{a_q} = V_q = \text{idem},$$

где $a_1, \ldots, a_q$ — соответственные относительные единицы. Таковые могут быть выбраны из самих моновалентов.

Уравнения (25′) одинаковы для всей группы подобных явлений. Поэтому условия подобия моновалентов уравнений (25) превратятся в условия единственности решения (25′), т. е. их моновалентами являются $V_1, \ldots, V_q$. Иначе говоря, для подобных явлений должно быть

$$V_1 = \text{idem}, \ldots, V_q = \text{idem}. \tag{III}$$

Это и есть *условие подобия* явлений, описываемых уравнениями (25).

Из (III) следует

$$V_1 = V_1' \text{ и т. д.,}$$

или

$$\frac{v_1}{a_1} = \frac{v_1'}{a_1'} \text{ и т. д.,}$$

откуда

$$\frac{v_1}{v_1'} = \frac{a'}{a_1'} = c_v.$$

Среди величин $X_i^{(k)}$ могут оказаться такие, которые содержат только моноваленты. Так как $X_i^{(k)} = \text{idem}$, то

$$X_i^{(k)} = X_i^{(k)'} \text{ или } \frac{X_i^{(k)'}}{X_i^{(k)}} = 1,$$

т. е.

$$C_i^{(v)} = 1.$$

$C_i^{(v)}$—индикатор подобия, составленный только из константы подобия моновалентов.

Следовательно, выбор констант подобия моновалентов ограничен обусловливающим равенством $C_i^{(v)} = 1$. Выполнение этого требования выделяет реально существующие подобные явления, выраженные уравнениями (25′).

Условие $C_i^{(v)} = 1$ равносильно условию $X_v^{(k)} = \text{idem}$. Итак, явления подобны, если их выраженные в относительных единицах моноваленты и моновалентные критерии одинаковы.

Глава 7

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ, КАК ОСНОВА ОПЫТА

Трудности, возникающие при интегрировании уравнений теоретической физики, заставили во многих случаях перейти от их полных решений к приближенным, состоящим в принятии многих физических величин за постоянные. Теория подобия не нуждается в этих упрощениях для выведения критериев подобия, которые получаются, как мы видели, одинаковым образом, независимо от того, постоянные или переменные величины входят в физические уравнения связи. Поэтому термин физические константы заменяется в теории подобия более правильным — физические параметры.

Однако трудность соблюдения всех условий подобия, которые получаются из третьей теоремы, заставляют теорию подобия в большинстве случаев также стать на путь приближенных выводов.

Так возник метод приближенного подобия, значительно расширивший область применения теории подобия к экстраполированию физических опытов и к моделированию технических устройств.

Развитие теории подобия шло в направлении все большего обобщения его выводов. Трудами главным образом советских ученых теоремы подобия выведены для самого общего случая существования подобия для любого явления природы.

Однако при всем значении получения общих выводов о свойствах подобных явлений применение их к изучению отдельных случаев подобия правильнее вести на основе не общих уравнений определенного класса явлений, а исходя из частных уравнений связи, выведенных из общей теории явления применительно к тому частному, конкретному случаю, к которому относится исследуемое явление.

Явление определено однозначно только тогда, когда к нему присоединены условия однозначности, делающие задачу решения уравнения определенной. Между тем, общие уравнения оторваны от такой постановки вопроса, что может привести к неопределенности постановки и неправильности решения задачи.

Поэтому, как правило, следует:

1) для получения обусловливающих уравнений рассматривать все уравнения связи, вместе с их условиями однозначности;

2) не присоединять никаких других обусловливающих уравнений, не вытекающих из уравнений связи.

В случае, если условия однозначности выражены в форме уравнений, их надо включить в уравнения связи.

Точно так же очень существенно не упускать из поля зрения физическую сторону явлений и учитывать при обработке их методами теории подобия реальную картину явления со всеми ее особенностями.

В дальнейшем на нескольких примерах будет показано значение теории подобия как научной основы экспериментирования и моделирования.

В качестве первого примера выберем самый простой случай течения вязкой жидкости.

Представим себе, что несжимаемая вязкая жидкость течет между двумя бесконечно простирающимися параллельными стенками, расположенными на расстоянии $2h$ друг от друга.

Скорость движения жидкости примем меньше критической, так что в ней не образуется вихрей, и движение сохраняется прямолинейное струйчатое.

Уравнение Навье-Стокса, которое описывает движение вязкой жидкости, в этом случае принимает очень простой вид.

Если выбрать начало координат на равном расстоянии от стенок и направить оси координат так, что OX направлено вдоль течения, OZ параллельно плоскости чертежа и перпендикулярно направлению течения, а OY — перпендикулярно плоскости чертежа, то $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ окажутся равными нулю. Если движение стационарно, то

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

поэтому также

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Исходя из этого, уравнение Навье-Стокса примет такой простой вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \tag{26}$$

Уравнение сплошности имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{27}$$

Так как, по предыдущему, $\frac{\partial p}{\partial x}$ зависит только от x, а $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ — только от z, то уравнение (26) может существовать только при том условии, если и в правой и левой ее частях члены постоянны.

Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \text{const}. \tag{29}$$

В условия однозначности входят величины w в начальном сечении ($x = 0$), h и μ.

Применим к уравнению (26) первую теорему подобия. Пусть имеется явление, подобное данному, и подобие его выражается следующими равенствами:

$$p' = c_p p; \; w' = c_w w; \; \mu' = c_\mu \mu; \; z' = c_l z; \; x' = c_l x. \tag{30}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (26) приведет его к виду:

$$\frac{c_p c_l}{c_\mu c_w} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \tag{26'}$$

откуда, согласно первой теореме, получается

$$C = \frac{c_p c_l}{c_\mu c_w} = 1 \tag{31}$$

или

$$K = \frac{pl}{\mu w} = \text{idem}. \tag{32}$$

Критерий K содержит, кроме величин, входящих в условия однозначности, еще p, в них не входящее.

Поэтому K — не определяющий критерий.

Следовательно, определяющих критериев в нашем случае нет, и выбор констант подобия не ограничен никакими условиями.

Мы, следовательно, имеем случай „автомодельности" явления.

Обратимся к выявлению вида критериального уравнения. Применение относительных единиц измерения должно дать, как было показано, не только критерии, но и симплексы этого уравнения.

Выбрав в относительных единицах давление в начальном сечении p_0, в том же сечении осевую скорость w_0, вязкость μ_0, которая постоянна, и линейный размер l_0, за который удобнее всего принять h, преобразуем уравнение (26)

$$La_0 \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right) = M \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}. \tag{33}$$

В нем $La_0 = \frac{p_0 h}{\mu_0 w_0}$ — адромный критерий струйчатого течения, так называемый критерий Лагранжа (La),

и $$\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right) = \text{const}.$$

Согласно второй теореме решение уравнения (33) должно иметь вид

$$W = f\left\{La_0\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right), M, Z\right\}. \qquad (34)$$

В нем все величины постоянны, кроме Z. Опыт должен установить распределение величины W поперек потока, от $+h$ до $-h$.

Уравнение (26) было выбрано такое простое, что оно поддается интегрированию. Сравним аналитическое решение его с результатом, даваемым теорией подобия.

Так как $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \text{const}$, то, интегрируя дважды $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$, получим

$$w = \frac{1}{2\mu}\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot z^2 + Az + B. \qquad (35)$$

Произвольные постоянные A и B определятся из двух уравнений: при $z = +h$ $w = 0$ и при $z = -h$ $w = 0$. Отсюда $A = 0$ и $B = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot h^2$.

Подставляя их в уравнение (35), получим выражение

$$w = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)[h^2 - z^2], \qquad (36)$$

которое дает параболический закон распределения скорости w в сечении, одинаковый для всех сечений вдоль оси OX.

Если преобразовать уравнение (36) к выбранным выше относительным единицам, то

$$W = -\frac{La_0}{2M}\cdot\frac{\partial P}{\partial X}[1 - Z^2]. \qquad (37)$$

Сравнивая (37) с (34), видим, что теория подобия выявила все комплексы и симплексы, от которых зависит W, и только вид функции остался неизвестным. Он должен быть найден из опыта. Последний, конечно, даст то же параболическое изменение скорости поперек потока, которое предсказано теоретическим решением.

Приведенный пример показывает преимущества применения метода относительных единиц при выводе критериального уравнения по сравнению с методом констант подобия.

Первый вводит в рассмотрение не только комплексы, но и те симплексы, которые надо включить в критериальное уравнение, между тем как метод констант подобия теряет их, устанавливая только критерии, входящие в критериальное уравнение. В связи с этим возникла даже тенденция вводить в это уравнение симплексы подобия на основании общих логических заключений, не связанных с анализом уравнений связи, что вносит некоторую неопределенность и произвол.

Между тем дифференциальное уравнение, преобразованное к относительным единицам, уже содержит в себе все комплексы и симплексы критериального уравнения, за исключением лишь моновалентов, которые войдут в него в результате определения постоянных интегрирования.

Конечно, приведенный пример не нуждается в проверке опытом, поскольку он допускает теоретическое решение задачи. Но уже небольшое усложнение примера, например, предположение, что рассматривается вход в плоский канал из резервуара, усложнил бы вид уравнения (26) и обусловил бы изменение распределения скорости во входном сечении в зависимости от большей или меньшей величины скорости входа. В этом случае пришлось бы обратиться к эксперименту, а теория подобия дала бы возможность обобщить его на все подобные явления. Экстраполяция же опыта на неподобные случаи была бы незакономерна и привела бы к неверным выводам.

Вторым примером выберем общий случай струйчатого (ламинарного) движения жидкости в заполнении канала, имеющего переменные сечения и направления.

Уравнения связи для этого случая будут:

1) уравнение сплошности и 2) уравнение движения потока Навье-Стокса.

Имея в виду, что интегрирование их не производится, удобно применять их в векторной форме.

В декартовых координатах они имеют вид:

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w_z)}{\partial z} = 0 \qquad (38)$$

и уравнение движения Навье для оси OZ:

$$\rho \frac{Dw}{\partial \tau} = g\rho - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z},$$

где σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{xz} — составляющие тензора напряжений вязкой жидкости, являющиеся линейными функциями от w. Аналогичные два уравнения можно написать для осей OY и OZ.

Подстановкой выражений для напряжений через производные от скоростей Стокс привел их к виду для оси OX

$$\rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}\right) = \qquad (39)$$

$$= g\rho - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}\right).$$

Аналогичные два равенства можно написать для осей OY и OZ.

В векторной форме они представятся так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho w) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial \tau} + \rho (w \operatorname{grad}) w = \rho g - \operatorname{grad} p + \frac{1}{3} \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} w +$$

$$+ \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} w.$$

Особенно удобно писать уравнения в векторном виде, применяя оператор Гамильтона:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z},$$

так как в нем видна размерность $[\nabla] = \left[\frac{1}{L}\right]$.

Оператор Гамильтона в применении к вектору w (скорости) дает

$$\operatorname{grad} w = i\frac{\partial w}{\partial x} + j\frac{\partial w}{\partial y} + k\frac{\partial w}{\partial z} = \nabla w \quad \text{(аффинор)}$$

в применении к скаляру t (температуре):

$$\operatorname{grad} t = i\frac{\partial t}{\partial x} + j\frac{\partial t}{\partial y} + k\frac{\partial t}{\partial z} = \nabla t \quad \text{(вектор)},$$

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \nabla w \quad \text{(скаляр)}.$$

Тогда уравнение сплошности получит вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho w) = 0 \tag{38}$$

и уравнение Навье-Стокса:

$$\rho\frac{\partial w}{\partial \tau} + \rho w \cdot \nabla w = \rho g - \nabla p + \frac{1}{3}\mu\nabla\nabla\cdot w + \mu\nabla\cdot\nabla w. \tag{39'}$$

Подставив в уравнение сплошности вместо ρ — $c_\rho \rho$, вместо τ — $c_\tau \tau$ и т. д., получим

$$\frac{c_\rho}{c_\tau}\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{c_\rho \cdot c_w}{c_l}\nabla\cdot(\rho w) = 0,$$

откуда

$$\frac{c_\tau c_w}{c_l} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{\tau w}{l} = \text{idem}.$$

Это так называемый критерий гомохронности Ho, указывающий промежутки времени, в которые явления подобны между собой.

Отметим упрощенный способ получения критериев: уравнения приводятся к безразмерному виду и затем у каждого одночлена отбрасываются знаки дифференциалов.

Таким путем из уравнения Навье-Стокса найдутся критерии подобия[1]:

критерий Фруда $\frac{w^2}{gl} = Fr,$

критерий Эйлера $\frac{p}{w^2} = Eu,$

критерий Рейнольдса $\frac{wl\rho}{\mu} = Re.$

Легко заметить, что $Eu \times Re = La$ — критерий Лагранжа, встречавшийся в первом примере. Теперь получим те же критерии методом относительных единиц. Выбрав за таковые l_0, w_0, τ_0, ρ_0, g_0, μ_0 и обозначив $\frac{\nabla}{l_0}$ через ∇, получим:

$$\frac{1}{Ho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \nabla(\rho W) = 0,$$

$$\frac{\rho}{Ho_0} \frac{\partial W}{\partial T} + W \cdot \nabla W = \frac{P}{Fr_0} \cdot G - Eu_0 \nabla P + \frac{M}{Re_0}\left[\frac{1}{3} \nabla\nabla \cdot W + \nabla \cdot \nabla W\right].$$

Как видим, критерии получались те же, но в адромном виде. Эти обычно употребляемые критерии подобия можно заменить другими, производными от них, например умножением всех членов уравнения на Re_0^2.

Тогда вместо Ho получится $Ho' = \frac{\mu^2 \tau}{\rho^2 l^2 w}$,

вместо Fr — $Ga = \frac{\rho^2 l^3}{g\mu^2}$ (Галлилей)

и вместо Eu — $Ki = \frac{p\rho l^2}{\mu^2}$ (Кирхгоф).

Критерии Ga и Ki часто представляют преимущества, как не содержащие в себе скорости.

Присоединим к уравнениям (38′) и (39′) условия однозначности. Математический вывод их из условия существования и единственности решения уравнений (38′) и (39′) в общем виде еще не получен. На основании опытной проверки можно полагать, что моновалентами являются геометрические

[1] Критерии принято называть именами известных ученых и обозначать двумя первыми буквами их имени.

размеры канала l_0; скорости во всех точках какого-либо сходственного, например входного, сечения и на стенках канала, которые обозначают (w_0) для входного сечения и $(w_{ст}) = 0$ для стенок; плотность и вязкость во всех точках объема рассматриваемого участка канала и давление в каком-либо сечении канала (например p_0— во входном сечении). Предположим, что имеется случай стационарного течения. Тогда Ho_0 отпадает и определяющими критериями будут Re_0 и Eu_0. Что касается Fr_0, то в него входит g — в общем случае не одинаковое для всех явлений (например в случае, когда явления протекают на заметно разных расстояниях от центра притяжения земли, или когда модель центрифугируется и место земного притяжения замещает центробежная сила).

Для упругой жидкости введение p_0 в условия однозначности, как известно, обязательно.

В случае несжимаемой капельной жидкости считается, что движение ее не зависит от того давления, под которым находится жидкость в канале, и поэтому Eu_0 исключают из числа определяющих критериев.

Однако, как правильно указал К. Д. Воскресенский, если на модели желают изучить и динамические нагрузки (определения давления на стенки канала, для оценки их прочности в разных местах), то исключать Eu_0 из числа определяющих критериев нельзя.

Одним из главнейших практических применений теории подобия в гидравлике является нахождение обобщенных формул для гидравлического сопротивления различных гидравлических устройств. При этом падение давления на исследуемом участке выражают формулой д'Арси:

$$\Delta p = \zeta \rho \frac{w^2}{2}.$$

Легко видеть, что коэффициент местного сопротивления ζ может быть представлен как $2\frac{\Delta p}{\rho w^2} = 2 Eu_{\Delta p}$, где критерий $Eu_{\Delta p}$ отнесен не к определенной точке канала, а к определенному отрезку Δl трубы или к двум точкам исследуемого участка с более сложной конфигурацией, например к вентилю.

Несмотря на укоренившийся обычай, не следует придавать коэффициенту ζ вид критерия, а лучше рассматривать его как безразмерный коэффициент и выражать в виде функции от критериев и симплексов, чем достигается требуемое обобщение опытных данных, например для трубы:

$$\zeta = \frac{l}{d} \varphi (Re).$$

В качестве третьего примера выберем турбулентное течение жидкости.

Со времени исследований Гагена и Рейнольдса над течением воды по трубам известно, что жидкость при достижении некоторой определенной скорости меняет свой характер движения, переходя от струйчатого (ламинарного) к вихревому (турбулентному), причем гидравлическое сопротиление ее сразу, скачком, увеличивается.

После работ Шиллера представление о резком переходе из ламинарного течения в турбулентное получило более отчетливые формы. Такой переход обнаруживается в трубе лишь на значительном, порядка 50 и более диаметров, расстоянии от ее входа, в головном же участке он совершается плавно и лишь изменяется закон сопротивления: для струйчатого движения сопротивление пропорционально первой степени, а после перехода через критическую скорость становится близким к квадратичному закону.

Критическая скорость не выводится из уравнения Навье-Стокса. Наоборот, струйчатое движение может сохраниться в гладких прямых трубах и при скоростях, в несколько раз больших критической, но движение делается неустойчивым и всякое возмущение переводит его в турбулентное. Наоборот, при понижении скорости до значений ниже критического, немедленно наступает переход к струйчатому движению.

Струйчатое движение можно рассматривать как ряд сдвигов одних слоев жидкости по отношению к другим, при которых к противолежащим граням элементарного параллелепипеда прикладываются равные и прямо противоположные касательные силы, образующие пару. Он не получает вращения, так как на две остальные грани действуют силы, создающие пару, равную первой, противоположного направления. Одной из возможных причин появления вращательного движения жидкости могло бы быть временное нарушение связи между соседними слоями жидкости, вызванное местными препятствиями течению ее (род микрокавитации), т. е. явление, описываемое теоремами Лазаря Карно о потере механической системой связей и о восстановлении их. Экспериментальное изучение образования вихрей показывает, что вначале они возникают по преимуществу вблизи стенок, а затем движутся к середине трубы, постепенно уничтожаясь под влиянием трения с окружающим их потоком. Наполнение последнего вихрями хорошо видно, в особенности в начальной стадии появления турбулентного течения.

Уравнение Навье-Стокса в том виде, как оно написано выше, непригодно для описания турбулентного движения, так как скорости в любой точке потока непрерывно меняются по величине и направлению и закон их изменения не может быть выражен математически.

Его можно применить только к осредненным скоростям потока. При этом, очевидно, нельзя производить осреднение простой подстановкой вместо мгновенных значений скоростей их средних величин, так как уравнение относительно их нелинейно.

Осборн Рейнольдс предложил метод осреднения скоростей турбулентного потока, представив истинную скорость в определенный момент времени состоящей из средней скорости потока в данном месте $\overline{w}$ и из пульсационной скорости w', непрерывно меняющей свое направление и очень часто переходящей через нуль:

$$w = \overline{w} + w'.$$

Несмотря на искусственность представления о прохождении вихря через определенное место канала пульсацией скорости, осредненные уравнения Рейнольдса дают возможность суммарно статистического описания явлений такого сглаженного, осредненного поля скоростей.

Подставляя выражение для w через $\overline{w} + w'$ в уравнение Навье и принимая для простоты случай $\rho = \text{const}$, Рейнольдс после преобразований получает следующее уравнение для оси OX:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial \tau} + \rho \left(\overline{w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}} + \overline{w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}} + \overline{w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}} \right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \overline{\sigma_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\sigma_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\sigma_{xz}}}{\partial z} \right),$$

и аналогичные два — для остальных осей.

Левая часть равенства после подстановки $w = \overline{w} + w'$ дает

$$\frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \overline{w}_x \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} + \overline{w}_z \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} w_x'^2 + \frac{\partial}{\partial y} w_x' w_y' + \frac{\partial}{\partial z} w_x' w_z',$$

остальные члены пропадают, так как линейные члены уравнения сплошности дают

$$\frac{\partial w_x'}{\partial x} + \frac{\partial w_y'}{\partial y} + \frac{\partial w_z'}{\partial z} = 0;$$

члены, линейные относительно пульсационных скоростей также равны 0, поэтому осредненное уравнение получает вид для OX:

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial r} + \rho \left(\overline{w}_x \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial x} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} + \overline{w}_z \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xx} - \rho \overline{w_x'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_{xy} - \rho \overline{w_x' w_y'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\sigma_{xz}} - \rho \overline{w_x' w_z'} \right),$$

для OY и OZ аналогично.

Как видим, уравнение Навье для осредненных скоростей приведено к тому же виду, что и для истинных скоростей, с той только разницей, что к компонентам тензора напряжений прибавляются соответственно шесть величин

$$-\rho \overline{w_x'^2}, \quad -\rho \overline{w_x' w_y'}, \quad -\rho \overline{w_x' w_z'},$$

$$-\rho \overline{w_y' w_z'}, \quad -\rho \overline{w_y'^2}, \quad -\rho \overline{w_z'^2},$$

для проекций на ось OX, OY и OZ, называемые добавочными напряжениями турбулентного движения.

Таким образом, если вводить в уравнение Навье-Стокса средние скорости, то одновременно надо вводить добавочные компоненты поверхностных сил. Как прежние члены напряжения от сил вязкости, так и новые представляют эффект трения от беспорядочных отклонений скоростей турбулентного движения от их средних величин.

В результате осредненное уравнение для турбулентного движения имеет те же критерии Ho, Fr, Eu и Re, но с подставленными в них осредненными скоростями и, кроме того, члены вида $-\rho \overline{w_x' w_y'}$ образуют $\frac{\overline{w_x'^2}}{\overline{w_x}^2}$, $\frac{\overline{w_x' w_y'}}{\overline{w_x}^2}$ и т. д. — критерии степени турбулентности. Это значит, что турбулентный поток не однозначен, а может, в зависимости от условий входа и развития турбулентности в потоке, при том же Re иметь разные критерии турбулентности и, поскольку величины w_x', w_y', w_z' не получили математического выражения, уравнения движения жидкости остаются разомкнутыми.

Со степенью турбулентности меняется и гидравлическое сопротивление потока, так как инерционный член уравнения Навье-Стокса при скоростях, много больших критического, во много десятков раз может превзойти вязкостный член уравнения.

Для вывода формулы гидравлического сопротивления обыкновенно предполагают, следуя Карману, что при изменении скорости потока пульсационные скорости остаются подобными. С бо́льшим основанием можно ожидать, что скорости течения в пограничном потоке и в турбулентном ядре остаются подобными для каждого из них в отдельности. Последнее предположение, высказанное П. К. Конаковым, подтверждается опытными данными. Выведенная из него формула проще и не менее точна, чем Кармана. Она завоевала уже всеобщее признание.

Установление условий подобия для турбулентного движения потока представляло бы большие трудности, если бы оно не обладало свойством стремиться при своем движении придать определенную структуру потоку. В прямых трубах на начальном участке длиной в несколько десятков диаметров, а в каналах более сложной конфигурации на гораздо меньшем расстоянии, поток стабилизируется, принимая определенную структуру, независимо от того, каково было распределение скоростей и степень турбулентности вначале.

Наличие стабилизирующего участка перед испытуемым местом делает излишней заботу о создании в модели распределения в поперечном сечении скоростей, подобных натуре. Оно устанавливается само собой. Поскольку же вязкостное сопротивление при турбулентном течении с увеличением скорости потока становится очень малым по сравнению с инерционным и течение становится приближенно автомодельным, отпадает необходимость соблюдать в моделях и натуре одинаковость критерия Рейнольдса.

Обнаруженная опытом автомодельность потока является подтверждением независимости критерия $\frac{\overline{w'^2}}{\overline{w}^2}$ от числа Рейнольдса, т. е. скорости.

Поэтому моделирование турбулентного течения не встречает затруднений и требует только внимательного соблюдения геометрического подобия в смысле относительной шероховатости стенок.

Опыты над сопротивлением гладких и шероховатых труб, особенно опыты Никурадзе с большой степенью шероховатости стенок рассеяли предрассудок, что шероховатость стенок не влияет на структуру потока и показали, в каких случаях сопротивление и структура потока делается у шероховатых труб резко отличной от гладких. Это соображение имеет значение и для каналов сложных форм, хотя и в меньшей степени, поскольку в них сопротивление турбулентного ядра сильнее превалирует над вязкостным сопротивлением.

Приведенные три примера должны служить показателем того, что, кроме вывода уравнений связи и получения из них критериев, важно не терять из поля зрения физической стороны явления и уметь, исходя из нее, надлежащим образом применять теорию подобия к каждому конкретному случаю.

Рассмотрим еще один пример, который разбирает возможность моделирования не отдельного узла, а целого технического устройства.

Поставим себе задачу смоделировать условия движения воды в открытых руслах: при переливе через плотины, в различных водостоках и т. п.

Для нахождения условий подобия надо обратиться к только что выведенным уравнениям Навье-Стокса для усредненных скоростей, добавив к ним еще член $\rho g \cos\alpha$, где $\cos\alpha$ — угол между направлением силы тяжести и осью OX, для проекции на OX, и аналогичные члены к двум другим проекциям[1].

Индикаторы подобия, выведенные из уравнения Навье-Стокса, будут следующие:

После деления всех членов правой части на константы подобия $\frac{c_\rho c_w}{c_l}$, представляющие множитель левой части уравнения, получим:

$C_1 = \frac{c_l c_g}{c_\rho c_w^2} = 1$, где C_1 получен из первого члена правой части,

$C_2 = \frac{c_p}{c_\rho c_w^2} = 1$ получен из второго члена правой части,

$C_3 = \frac{c_\mu}{c_\rho c_l c_w} = 1$ получен из третьего члена (вязкостный член),

$C_4 = \frac{\overline{c_w'^2}}{c_w^2} = 1$ (пульсационный член) также получен из третьего члена.

---

[1] В закрытых каналах в уравнении Навье-Стокса можно объединить член, представляющий объемные силы $\rho g \cos\alpha$ с поверхностными силами $\frac{\partial p}{\partial x}$. В самом деле, полагая скорость равной нулю, получим статическое давление p_0 в некоторой точке канала $\rho g \cos\alpha = \frac{\partial p_0}{\partial x}$. Подставляя это значение в уравнение Навье-Стокса, видим, что разность $(p_0 - p)$ есть пьезометрическое давление, непосредственно показываемое водяным манометром на водяных моделях, на которых изучают сопротивление газового потока в газоходах котлов и печей.

Константы для всех пульсационных членов принимаем одинаковыми.

Поскольку модель находится на земном шаре, то реальная возможность ограничивает выбор c_g единицей. Если в модели течет та же жидкость, что и в натуре, — вода, то

$$c_\rho = 1 \text{ и } c_\mu = 1.$$

Остаются четыре величины констант c_l, c_p, c_w и $c_{\overline{w}'^2}$, связанные четырьмя уравнениями C_1, C_2, C_3, C_4.

Из них получаем:

$$(C_1')\,\frac{c_w{}^2}{c_l} = 1,\ (C_2')\,\frac{c_p}{c_w{}^2} = 1,\ (C_3')\ c_w c_l = 1.$$

Перемножая (C_1') на (C_3'), получим $c_w = 1$.

Из (C_3') следует, что $c_l = 1$, из (C_2'), что $c_p = 1$, из (C_4) что $c_{\overline{w}'^2} = 1$.

Значит, в данном случае имеем тот частный случай, когда оба явления тождественны.

Таким образом, приходится исследовать саму натуру, так как уменьшение ее масштаба исказит подобие.

Для того чтобы модель была меньше натуры, следовало выбрать для модели жидкость большей плотности, например, ртуть, у которой плотность в 13,6 раза больше воды. Но ртуть имеет ряд недостатков: пары ее ядовиты, она непрозрачна; ртутная модель требует прокачки через модель весьма значительных количеств ртути. Поэтому она мало пригодна для модели.

Изменение ускорения силы тяжести g помещением модели водослива на центрифугу трудно осуществимо. От обоих этих путей приходится отказаться.

Гораздо проще и плодотворнее оказалось использование приближенной автомодельности течения. Приближенное моделирование позволяет наблюдать в модели с прозрачными стенками все характерные особенности течения через водослив и с вполне достаточной точностью определять потери напора от местных сопротивлений.

Приближенное моделирование водой получило всеобщее распространение и применяется во всех гидравлических лабораториях. Опыт показал, что значительное уменьшение натуры мало изменяет подобие в ней.

Предел уменьшению ставит требование не понижать скорость ниже критической. Для этого иногда вводят аффинное преобразование, изменяя высоту в меньшей степени, чем ширину и длину канала.

Последние три примера показывают тот путь, на который неизбежно должно было стать моделирование — переход к приближенному моделированию, когда осуществляется не точное подобие, а „похожесть“ модели натуре.

Оправданием такого направления в теории подобия служит тот факт, что в эксперименте никогда не получаются точные значения величин, а их степень точности определяется совершенством измерительных приборов и условиями экспериментальной установки.

То же самое имеет место и при теоретических исследованиях.

Для решения технических задач большей частью можно ограничиваться приближенным их решением Поэтому приближенное моделирование вполне отвечает целям исследования, если степень приближения к действительности находится в допустимых пределах. С другой стороны, как показывает только что разобранный случай, приближенному моделированию оказываются доступными те области техники, которые точная теория подобия держала под запретом.

Широкое распространение метода моделирования в технике обязано, главным образом, разработке приемов приближенного моделирования.

Для того чтобы не перейти границы допустимого приближения, необходимо первое время контролировать степень расхождения модели с натурой. Поэтому распространение приближенного моделирования на новую область техники должно всегда сопровождаться подробным исследованием одновременно и модели, и натуры и сравнением полученных результатов. Указание на возможность отступать от тех или иных условий подобия дается исследованием каждого из них в отдельности.

Всякое исследование представляет собою целую. серию отдельных опытов, в которых та или иная величина получает ряд последовательных изменений, или, говоря языком теории подобия, оно есть переход от одного явления к другому, не подобному ему.

Часто можно установить, что такой последовательный переход от исследованного явления к смежному ему обнаруживает чрезвычайно медленное изменение его отдельных свойств. Если эти свойства составляют цель исследования, то вполне допустимо изучать их на смежных, не подобных случаях явлений.

Само собою разумеется, что при этом в отношении степени отклонения модели от образца должен вестись количественный учет, который и устанавливает степень „неподобия" между ними, а, значит, и приемлемость приближенного моделирования.

Рассмотренные выше случаи движения жидкости при числах Рейнольдса, ниже и выше критического, были многократно исследованы для случая различных конфигураций каналов. Они дают возможность не только установить точность опытов на модели, но и внести в нее поправки, учитывающие несоблюдение равенства критериев.

В технических расчетах различных сооружений применяются часто упрощенные формулы, в силу того, что решение дифференциальных уравнений удается получить только в простейших случаях, не представляющих интереса для практики.

В такие упрощенные формулы различные величины входят как усредненные; так, скорость $\overline{w}$ есть средняя скорость потока, причем способ осреднения ее может быть различен. Например средняя скорость может быть среднерасходной и находится по измерению расхода жидкости через устройство в единицу времени, или может определяться иным способом.

При всех таких осреднениях точных формул они подчиняются теоремам Коши, хотя часто составители формул и не отдают себе отчета в этом.

Как известно, первая теорема Коши выражается так:

$$\int_1^2 \varphi(x)\, dx = \varphi(\xi)\ (x_2 - x_1),$$

и вторая —

$$\int_1^2 \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi(\xi) \int_1^2 f(x)\, dx,$$

где ξ — некоторое промежуточное значение между x_1 и x_2.

Теорема применима для случая, когда выводимая за знак интеграла функция конечна, непрерывна, знакопостоянна между значениями x_1 и x_2; если она мало меняет свою величину, то вместо ξ можно подставить x среднее.

Осреднение величин, входящих в критерии подобия, осредняет и эти последние. Критерии, как известно, могут подвергаться любому осреднению, при сохранении единственного условия, что оно одинаково у всех подобных явлений натуры и модели.

При усреднении уравнений гидродинамики система уравнений становится разомкнутой. Нахождению критериев подобия из них это не препятствует, но условие однозначного решения уравнений и выполнения всех условий однозначности требует добавления определенных условий подобия потоков. Эти условия, как было показано выше, осуществляются начальным стабилизирующим участком, подобным у модели и натуры.

В заключение обратим еще раз внимание на связь, которую устанавливает теория подобия между теорией и экспериментом.

Составление дифференциальных уравнений и нахождение условий их однозначности, состоящее в выборе краевых условий и доказательства единственности решения, с которого теоретик начинает интегрирование уравнений, в одинаковой мере необходимы и экспериментатору, так как они позволяют привлечь теорию подобия к правильной постановке и обработке опытов и к установлению границ допустимой экстраполяции полученных из них результатов.

Теория подобия может объединить их работу и в дальнейшем, когда теоретик преобразует уравнения в безразмерные и вводит в них критерии подобия. Преобразования уравнений, которые облегчают ему получение дальнейших выводов, одновременно открывают и новые пути для постановки моделирования в тех случаях, которые до этого казались невозможными.

Возможность применения теории подобия к опыту почти безгранична. Она начинается с той степени малости объектов, когда молекулярная структура тел делается незаметной, и при составлении уравнений их можно рассматривать, как сплошные, и для нее не являются препятствием такие крупные размеры объектов, каковыми являются атмосферные течения, солнечные протуберанцы и даже звездные туманности, динамику которых она может помочь разгадать, строя модель по картине их состояний.

Роль теории подобия равным образом важна как для обобщения глубоких научных изысканий, так и для проектирования новых сложных конструкций и предвидения характера работы самых различных технических устройств и сооружений.

Наконец модель незаменима как средство получить наглядную картину происходящего явления, которую можно изучать непосредственно, визуально, с такой подробностью, которая недоступна в натуре. Теоретическое решение не умаляет значения наглядного изображения явления, ибо правильно сказал Ленин, что жизнь богаче теории, и последняя никогда не сможет ее заменить.

Глава 8

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТИ

Жозеф Фурье ([2], в гл. 2-й, раздел IX, стр. 137) обратил внимание на то, что у физических уравнений, выраженных в гауссовой системе единиц, все члены суммы имеют одинаковую размерность, а аргументы трансцендентных (тригонометрических, логарифмических и др.) функций безразмерны. Это свойство однородности физических уравнений носит название правила Фурье.

Жозеф Бертран [10] в своем докладе Французской Академии наук дополнил правило Фурье указанием, что условию однородности физических уравнений должны подчиняться все формулы, в том числе и еще не известные, и если известны физические величины, которые в них входят, то вид формул часто может быть вскрыт.

Все члены однородного уравнения имеют одинаковую размерность и, значит, уравнение может быть приведено к безразмерному виду. Поэтому, группируя величины, входящие в него, по признаку составления безразмерных компонентов, можно отыскать простую закономерность между ними. Применяя этот прием к случаю охлаждения шара, Бертран устанавливает зависимость между критериями Фурье и Био.

Афанасьева-Эренфест показала, что открытая Бертраном возможность выводить для подобных явлений зависимость между критериями подобия из анализа размерности величин, о которых известно, что они связаны определенной зависимостью, есть следствие математической аналогии.

Замена одних единиц измерения другими в абсолютной системе единиц и переход от одного явления к другому, ему подобному, выражаются одной и той же формулой

$$a' = ca. \tag{40}$$

В случае изменения единицы измерения a число c указывает, во сколько раз новая единица a' больше первоначальной. При переходе же от одного явления к другому, ему подобному, число c указывает, во сколько раз величина a' нового явления больше одноименной величины a прежнего явления.

Всякая система единиц должна основываться на самом общем законе природы, охватывающем весь класс рассматриваемых явлений.

Поэтому система механических единиц основана на самом общем законе механики, на втором законе Ньютона.

Вывод зависимостей, существующих между подобными явлениями, из правила размерности должен состоять, следовательно, в перетолковании перехода к новым единицам измерения на язык теории подобия, на переход к новому, подобному первому явлению.

Но вывод, сделанный Бертраном в 1848 г., о свойствах подобных явлений, основывался на том же втором законе Ньютона. Поэтому идти кружным путем, сначала выводя правило перехода к новым единицам измерения, а потом истолковывая эту операцию как переход к подобному явлению, нет никакого смысла, поскольку имеется для этого прямой путь.

Выше были изложены два метода получения теорем подобия: 1) из общего уравнения, охватывающего весь класс явлений, и 2) из частного уравнения, приуроченного к определенному виду этого класса явлений и дополненного условиями однозначности, выделяющими из этого вида одно определенное явление.

При всей важности умения формулировать основные положения в самой общей форме, применимой к любому явлению природы, второй метод является единственно правильным, если решается задача об использовании теории подобия для обобщения конкретного опыта или построения модели, подобной определенной, заданной натуре.

Отсутствие условий однозначности в первом методе и излишняя общность уравнений связи делают эту задачу неопределенной. В результате этого могут быть привлечены к ее решению лишние величины и получены неверные выводы.

Покажем на примере применение теории размерности к разысканию критериального уравнения.

Пусть разыскивается зависимость перепада давления Δp по трубе от определяющих его величин.

Искомая зависимость должна быть представлена в виде безразмерной зависимости между первичными величинами — длиной l, массой m и временем τ и вторичными — скоростью w, плотностью — ρ, коэффициентом вязкости μ, характерным размером трубы, ее диаметром d.

Искомая зависимость должна иметь вид

$$\varphi(w, \rho, \mu, \Delta p, d, l, m, \tau) = 0$$

Множители преобразования единиц связаны между собой соотношениями

$$c_d = c_l;\ c_w = \frac{c_l}{c_\tau};\ c_\rho = \frac{c_m}{c_l^3};\ c_\mu = \frac{c_m}{c_l \cdot c_\tau};\ c_{\Delta p} = \frac{c_m}{c_l \cdot c_\tau^2};$$

из которых получаются пять индикаторов подобия:

$$\frac{c_d}{c_l} = 1;\ \frac{c_\tau c_w}{c_l} = 1;\ \frac{c_m}{c_\rho c_l^3} = 1;\ \frac{c_\rho c_w c_l}{c_\mu} = 1;\ \frac{c_{\Delta p}}{c_\rho c_w^2} = 1;$$

или соответствующие им критерии подобия

$$\frac{d}{l};\ \frac{w\tau}{l};\ \frac{\rho d^3}{m};\ \frac{\rho w d}{\mu};\ \frac{\Delta p}{\rho w^2}.$$

Но решение задачи должно дать зависимость

$$\psi\left(\frac{w\tau}{d}, \frac{\rho w d}{\mu}, \frac{\Delta p}{\rho w^2}\right) = 0$$

или

$$\psi(Ho, Re, Eu_{\Delta p}) = 0.$$

Поэтому члены $\frac{d}{l}$ и $\frac{\rho d^3}{m}$ являются лишними. Первый член есть отношение диаметра трубы к единице длины, второй — отношение массы ρl^3 к единице массы, эти члены всегда постоянны. Они появились ввиду привлечения в формулы первичных единиц.

Условия однозначности, делающие решение задачи определенной, здесь игнорируются.

Для нахождения критериев подобия, входящих в критериальное уравнение посредством теории размерности, было предложено несколько методов. Они носят название метода *анализа размерности*. Как правило, они привлекают к рассмотрению только те величины, которые должны входить в уравнения связи. Дополнительное включение в число этих единиц первичных величин, не содержащихся в них, не делается.

Первый способ, осуществленный в упомянутой работе Бертрана, состоит в попытках комбинировать между собою эти величины так, чтобы получились безразмерные произведения. Согласно Бертрану, легко показать, что коэффициенты внутренней теплопроводности (тела) k, внешней теплопроводности (коэффициент теплоотдачи) h, удельной теплоемкости тела c и его плотности D должны фигурировать в уравнении только в виде отношений $\frac{k}{CD}$ и $\frac{h}{k}$. Далее, для того, чтобы тела нагревались по одному и тому же закону, необходимо и достаточно, чтобы уравнение имело вид

$$\frac{Tk}{CDR^2} = \varphi\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}, \frac{Rh}{k}\right)$$

где R — диаметр шара, а ϑ_0 и ϑ — температуры, начальная и в данный момент, в определенной точке тела. Или, по современному написанию:

$$F_o = \varphi\left(\frac{T_0}{T}, Bi\right).$$

Как видим, руководящей нитью в рассуждении является физическое чутье и догадка.

Этот метод применялся затем Апеллем и рядом других ученых.

Метод Апелля. Отметим прием, который применен в кратком курсе механики Апеллем и Дотевиллем [12].

Разыскивается формула для времени колебания маятника. Делается предположение, что время двойного колебания маятника T зависит только от длины маятника l, массы m его груза и от ускорения силы тяжести g:

$$T = \varphi(l, m, g). \tag{41}$$

При изменении величины единиц измерения формула должна остаться неизменной.

Пусть при замене единиц T станет τT, l — λl, m — μm; что касается g, то так как его размерность — $\left[\frac{\text{длина}}{\text{время}^2}\right]$, то g станет $\frac{\lambda}{\tau^2} g$. Получим

$$\tau T = \varphi\left(\lambda l, \mu m, \frac{\lambda}{\tau^2} g\right). \tag{42}$$

Прием Апелля состоит в таком выборе множителей λ, τ, μ, что

$$\lambda = \frac{1}{l}; \quad \mu = \frac{1}{m}; \quad \tau = \sqrt{g\lambda}$$

или, подставляя $\lambda = \frac{1}{l}$,

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Тогда все величины, входящие в функцию φ, станут равными единице и

$$T\sqrt{\frac{g}{l}} = \varphi(1, 1, 1) = k \,(\text{const}),$$

откуда

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

В 1912 г. была опубликована вторая теорема подобия А. Федермана, доказанная им в 1911 г. Она была получена им как частный случай более общей теоремы, не имеющей отношения к подобию явлений [3]. Для частного случая теорема гласит:

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может удовлетворять уравнению

$$f(c_1 x_1, \ldots, c_n x_n) = c_1^{m_1} \ldots c_k^{m_k} f(x_1, \ldots, x_n),$$

если

$$c_{k+1} = c_1^{m_{1,k+1}}, \ldots, c_k^{m_{k,k+1}}$$

$$c_n = c_1^{m_{1,n}}, \ldots, c_k^{m_{k,n}}.$$

Если это условие выполнено, то

$$f = x_1^{m_1} \ldots x_k^{m_k} \cdot \Theta \left[\frac{x_{k+1}}{x_1^{m_{1,k+1}} \ldots x_k^{m_{k,k+1}}}, \ldots, \frac{x_n}{x_1^{m_{1,n}} \ldots x_k^{m_{k,n}}} \right],$$

где Θ — произвольная функция.

В применении к физическим уравнениям эта теорема говорит, что они безусловно или условно однородны, и указывает, как обусловливающие однородность равенства, или индикаторы подобия, получаются из степенных комплексов, из которых составлено уравнение. А именно, чтобы получить их, надо в комплексах $\frac{x_{k+1}}{x_1^{m_{1,k+1}} \ldots x_k^{m_{k,k+1}}}$ и т. д. заменить x на c и результат приравнять единице.

На пяти задачах Федерман показывает, как применять его теорему для получения критериального уравнения. Рассмотрим его 2-ю задачу.

В сосуде, наполненном жидкостью, на глубине l сделано отверстие в стенке. Определить скорость истечения жидкости w, предполагая, что w зависит только от l и ускорения силы тяжести g.

Полагаем $w = f(l, g)$

$$\frac{\lambda}{\tau} w = \frac{\lambda}{\tau} f(l, g) = f\left(\lambda l, \frac{l}{\tau^2} g\right).$$

Применяя теорему, видим, что в данном случае

$$x_1 = l,\ x_2 = g,\ c_1 = \lambda,\ c_2 = \frac{\lambda}{\tau^2},$$

$$\frac{\lambda}{\tau} \cdot c_1^{m_1} c_2^{m_2} = \lambda^{m_1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\tau^2}\right)^{m_2}.$$

Очевидно, $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$ и $c_1^{m_1} c_2^{m_2} = \sqrt{c_1 c_2}$.

Следовательно, обусловливающее уравнение есть:

$$c_3 = c_1^{m_{1,3}} \cdot c_2^{m_{2,3}} = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda^{m_{1,3}} \left(\frac{\lambda}{\tau^2}\right)^{m_{2,3}}.$$

Отсюда заключаем, что $c_1^{m_{1,3}} \cdot c_2^{m_{2,3}}$ должны быть $\sqrt{c_1 c_2}$.

Следовательно, $f(x_1, x_2) = K\sqrt{x_1 x_2}$ или получаем формулу Торричелли для истечения из сосуда: $w = K\sqrt{lg}$.

Результат получился бы проще и быстрее, если бы критериальное уравнение было дано в симметричном виде:

$$\Theta\left[\frac{x_i}{x_1^{m_{i,1}} \ldots x_k^{m_{ik}}}\right]_{i=k+1}^{i=n} = 0.$$

Метод Толмэна. Сущность предложенного Толмэном в 1914 г. метода [13] заключается в том, что Толмэн предлагает выбирать переходные множители первичных величин численно одинаковыми. Тогда выражение измеренных новыми единицами величин через старые получается для первичных величин: $l' = xl$, $\tau' = x\tau$, $m' = \frac{m}{x}$, а для вторичных: площади $S' = x^2 S$; объемы $V' = x^3 V$; скорости $w' = w$; ускорения $a' = \frac{a}{x}$; плотности $\rho' = \frac{\rho}{x''}$; силы $f' = \frac{f}{x^2}$; давления $P' = \frac{P}{x^2}$; температуры $T' = \frac{T}{x}$ и т. д.

Отсюда следует способ получения зависимости между различными величинами.

Пример. Идеальный газ. Получение уравнения состояния из закона Бойля-Мариотта: $PV = \varphi(T)$, $P'V' = \varphi(T')$ вид функции φ — тот же.

Но

$$V' = x^3 V, \ P' = \frac{P}{x^2}, \ \ T' = \frac{T}{x},$$

следовательно,

$$\frac{PV}{x} = \varphi\left(\frac{T}{x}\right),$$

откуда

$$PV = \varphi(T) = x\varphi\left(\frac{T}{x}\right),$$

что возможно только, когда

$$\varphi(T) = kT,$$

следовательно,

$$PV = kT.$$

Метод Букингэма. В 1914 г. двумя годами позднее Федермана, Букингэм опубликовал свой вывод второй теоремы подобия [4].

Исходя из самого общего вида физических уравнений

$$f(Q_1, \ldots Q_2 \ldots Q_n, r', r'' \ldots) = 0,$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ — величины разного рода, $r', r'' \ldots$ — отношения между ними, Букингэм допускает, что $r', r'' \ldots$ не меняются во время рассматриваемого явления; затем он вводит дальнейшее упрощение уравнения и берет за основу уравнение, состоящее из суммы степенных комплексов. Приведенное к безразмерному виду, оно записывается им так:

$$\Sigma N Q_1^{a_1} \cdot Q_2^{a_2} \ldots Q_n^{a_n} + 1 = 0,$$

где N — безразмерные множители, а показатели $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что размерность каждого члена суммы есть единица.

Далее он вводит существенное ограничение, заключающееся в том, что в каждом члене содержится только одна вторичная величина, которую он обозначает через P.

Таким путем Букингэм приводит физическое уравнение к виду

$$\sum_i N\Pi + 1 = 0, \tag{43}$$

где Π безразмерны:

$$[\Pi_1] = [Q_1^{a_1} \ldots Q_k^{k_1} \cdot P_1]$$

$$[\Pi_i] = [Q_1^{a_i} \ldots Q_k^{k_i} \cdot P_i]$$

Число Π равно, согласно принятому допущению, числу вторичных величин.

Таким образом, Π — теорема о числе критериев есть не теорема, а допущение, правда, подтверждающееся для многих частных случаев, а весь вывод 2-й теоремы относится только к частному виду уравнения (43) и не распространяется на общий случай функции f, как это получено Федерманом.

Далее Букингэм применяет свою теорему к ряду случаев. Особенность его метода анализа размерности состоит в том, что он составляет, в соответствии с принятым допущением, выражение для стольких Π, сколько вторичных величин.

Проследим его метод на его примере теплопередачи между стенкой трубки и потоком жидкости.

Букингэм выбирает следующие величины, как участвующие в теплообмене: диаметр трубы D, средняя скорость жидкости w и разница между температурой стенки и средней температурой жидкости $\Delta\vartheta$.

Затем поток тепла зависит еще от коэффициента теплоотдачи α, коэффициента теплопроводности жидкости λ и ее вязкости μ, теплоемкости C и плотности ρ. Из этих 8 величин Букингэм выделяет четыре первичных — ρ, D, w и $\Delta\vartheta$ и ищет четыре критерия, содержащих каждый по одной вторичной величине α, λ, μ, C, подбирая для них комбинацию первичных, образующих безразмерный комплекс. В этом его первая ошибка, так как, например, критерий Нуссельта

$\frac{\alpha l}{\lambda}$ составлен из двух вторичных величин α и λ. В результате он получает критериальное уравнение

$$\psi\left[\frac{\alpha\Delta\vartheta}{\rho w^2}, \frac{\mu}{\rho D w}, \frac{\lambda\Delta\vartheta}{\rho D w^2}, \frac{C\cdot\Delta\vartheta}{w^2}\right] = 0$$

с четырьмя критериями вместо трех, Nu, Pe и Re, как должно быть. Соединяя первый критерий с третьим путем их деления друг на друга, Букингэм получил бы Nu и избавился бы от лишнего критерия. Вместо этого он считает, что в турбулентном движении второй критерий Re „можно не учитывать“, и вычеркивает его.

Это вторая ошибка. Букингэм здесь смешивает гидравлическое сопротивление с теплоотдачей. Далее автор пытается идти по пути упрощений, говоря, что опыт дает $\alpha \equiv w^{0,8}$, и начинает подгонять степени других критериев к показателю 0,8. Нет возможности изложить здесь всех мучительных поисков, в конце концов приводящих автора все-таки к сносному результату:

$$\alpha = A\,\frac{\rho^{0,8}\cdot w^{0,8}\cdot\lambda^{0,2}C^{0,8}}{D^{0,2}}.$$

Если бы автор умножил обе части равенства на $\frac{D}{\lambda}$, то получил бы

$$\frac{\alpha D}{\lambda} = A\left[\frac{wD}{\frac{\lambda}{C\rho}}\right]^{0,8}, \text{ т. е. } Nu = A\,Pe^{0,8}.$$

Этот пример достаточно убедительно показывает ошибочность предположения, что критерий содержит только одну вторичную величину, а одновременно и ошибочность вывода Букингэмом 2-й теоремы, основанного на этом предположении.

М е т о д Р э л е я. Гораздо более удачным представляется решение аналогичной задачи Рэлеем.

Задача, поставленная Рэлеем, состояла в следующем. Твердое тело определенной геометрической формы обтекается потоком жидкости. Температура тела t_0 и жидкости $t > t_0$ поддерживаются постоянными. Найти количество тепла, переданного в единицу времени жидкостью телу.

Выразим искомое тепло через коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{Q}{H(t - t_0)},$$

где H — поверхность тела, и будем искать α посредством анализа размерностей.

Размерность α есть $\left[\frac{\text{кал}}{L^2 T \,°\text{C}}\right]$.

Рэлей полагает, что на величину α влияют размер тела l, скорость движения жидкости w, ее плотность ρ, коэффициент теплопроводности λ и теплоемкость c.

Они имеют следующую размерность:

$$[l] = [L]; \quad [\rho] = [\rho]; \quad [\lambda] = \left[\frac{\text{кал}}{L T \,°\text{C}}\right];$$

$$[w] = \left[\frac{L}{T}\right]; \quad c = \left[\frac{\text{кал}}{L^3 \,°\text{C}}\right].$$

Размерность ρ для простоты выкладок не сведена к первичным величинам.

Рэлей представляет α как степенной комплекс этих величин:

$$\alpha = C l^{\beta} w^{\gamma} \rho^{\delta} \cdot c^{\eta} \cdot \lambda^{\vartheta} \tag{44}$$

и отношение их размерностей будет

$$\left[\frac{\text{кал}}{L^2 T \,°\text{C}}\right] = [L]^{\beta} \cdot \left[\frac{L}{T}\right]^{\gamma} \cdot [\rho]^{\delta} \cdot \left[\frac{\text{кал}}{L^3 \,°\text{C}}\right]^{\eta} \cdot \left[\frac{\text{кал}}{L T \,°\text{C}}\right]^{\vartheta}.$$

Сравнивая показатели у одинаковых размерностей, получим следующие равенства.

Для показателей длин:

$$-2 = \beta + \gamma - 3\delta - 3\eta - \vartheta, \tag{a}$$

для показателей времени

$$1 = \gamma + \vartheta, \qquad (б)$$

для показателей температуры

$$1 = \eta + \vartheta, \qquad (в)$$

для показателей теплоты

$$1 = \eta + \vartheta \qquad (г)$$

и для показателей плотности

$$\delta = 0, \qquad (д)$$

т. е. уравнение (д) исключило ρ, и плотность не входит в уравнение (44), а (в) и (г) оказались тождественными. Таким образом, для определения четырех величин β, γ, η, ϑ имеются три уравнения.

Исключая δ, имеем:

$$-2 = \beta + \gamma - 3\eta - \vartheta, \qquad (а')$$

$$1 = \gamma + \vartheta, \qquad (б')$$

$$1 = \eta + \vartheta. \qquad (в')$$

Из (б') и (в') следует

$$\gamma = \eta \text{ и } \vartheta = 1 - \gamma.$$

Учитывая это и складывая (а') с (б'), помноженным на 2, получим

$$0 = \beta + \vartheta$$

или

$$\beta = \gamma - 1$$

Таким образом, η, ϑ и β выражены через γ.

Подставляя их значения в уравнение (23), получаем

$$\alpha = Cl^{\gamma-1} w^{\gamma} c^{\gamma} \lambda^{1-\gamma}.$$

Заменяя $\frac{\lambda}{c}$ через температуропроводность a и группируя l и λ с α в левой части, окончательно будем иметь:

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = C\left(\frac{wl}{a}\right)^{\gamma}, \tag{45}$$

или

$$Nu = C \cdot Pe^{\gamma}. \tag{45'}$$

Эта формула неполна, так как Nu зависит также от кинематической вязкости ν, которую Рэлей забыл включить в уравнение (44).

Восполним недосмотр Рэлея и введем в уравнение еще один множитель ν^{ε}:

$$\alpha = Cl^{\beta} w^{\gamma} \rho^{\delta} c^{\eta} \lambda^{\vartheta} \nu^{\varepsilon}. \tag{46}$$

Соответственно уравнение размерности пополнится членом

$$[\nu]^{\varepsilon} = \left[\frac{L^2}{T}\right]^{\varepsilon}.$$

Поэтому уравнения показателей изменятся

$$-2 = \beta + \gamma - 3\eta - \vartheta + 2\varepsilon, \tag{а''}$$

$$1 = \gamma + \vartheta + \varepsilon; \tag{б''}$$

остальные уравнения останутся без изменения.

В результате складывая (а″) и (б″) получится,

$$-1 = \beta + \gamma - 2\eta + 2\varepsilon,$$

$$\gamma = 1 - \vartheta - \varepsilon,$$

$$\eta = 1 - \vartheta.$$

Подставляя γ и η в уравнение (a'') будем иметь

$$\beta = -\vartheta - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\alpha = Cl^{-\vartheta-\varepsilon} w^{1-\vartheta-\varepsilon} c^{1-\vartheta} \cdot \lambda^{\vartheta} \cdot \nu^{\varepsilon}.$$

Группируем множители так, чтобы получить критерии

$$Nu,\ Re \text{ и } Pr = \frac{Pe}{Re}$$

получим:

$$\frac{al}{\lambda} = C\left[\frac{lw}{\nu}\right]^{1-\varepsilon-\vartheta} \cdot \left[\frac{\nu}{\frac{\lambda}{c}}\right]^{1-\vartheta},$$

или

$$N = CRe^{m} \cdot Pr^{n}, \tag{47}$$

где

$$m = 1 - \varepsilon - \vartheta$$

и

$$n = 1 - \vartheta = m + \varepsilon.$$

Метод, примененный Рэлеем для нахождения критериального уравнения, наиболее простой и удобный.

Таким образом, оказывается возможным в отдельных случаях находить критерии подобия, не имея математического вида уравнения связи, а лишь зная, какие величины в него входят.

Анализ размерности является единственным методом для разыскания критериев подобия в том случае, если уравнения связи не могут быть написаны. В этом — большое его значение.

С другой стороны, в некоторых случаях анализ размерности может привести к неверным заключениям.

Перечислим эти случаи:

1. Можно ошибиться не добрав величины, которые характеризуют рассматриваемое явление.

2. В уравнениях связи встречаются иногда размерные постоянные величины. Их трудно обнаружить при подборе величин для анализа размерности.

3. Величины нулевой размерности выпадают из контроля анализа размерности.

4. В анализ размерности могут быть ошибочно включены величины, не относящиеся к рассматриваемому явлению.

5. Анализ размерности не может провести разделения величин одинаковой размерности, но имеющих различный физический смысл в уравнении связи.

6. Анализ размерности не учитывает условия однозначности явления и поэтому не вводит моновалентов в критериальное уравнение.

7. Анализ размерности бессилен проверить соблюдение двух основных правил теории подобия:

а) включать в рассмотрение все уравнения связи данного явления;

б) не вводить никаких других уравнений, не относящихся к рассматриваемому явлению.

Мы уже видели, как Рэлей не включил коэффициентов вязкости жидкости в число величин, характеризующих теплообмен твердого тела с потоком жидкости (случай 1-й). Точно так же, чисто случайно он избежал ошибки, так как в уравнение связи не должны были входить размерные константы (случай 2-й).

Вскоре после опубликования статьи Рэлея ([14], стр. 66) появилось письмо Рябушинского (*Nature*, 1915, стр. 591), оспаривающее полученную формулу. Рябушинский писал, что если температуру рассматривать не как первичную величину, а как вторичную, выразив ее через среднюю кинетическую энергию молекул, то анализ размерности позволил бы вывести зависимость $\frac{\alpha l}{\lambda}$ не от одного аргумента $\frac{wl}{a}$, а от двух:

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \varphi\left(\frac{w}{\lambda l^2},\ cl^3\right)$$

(в механических единицах, избранных Рябушинским, размерность $[c] = \left[\frac{1}{L^3}\right]$ и $[\lambda] = \left[\frac{1}{LT}\right]$).

В своем ответе Рэлей не сумел опровергнуть рассуждения Рябушинского.

Убедительное разоблачение парадокса Рябушинского дала Т. А. Афанасьева-Эренфест [6].

С точки зрения теории подобия ошибка Рябушинского очевидна: он нарушил основные правила теории подобия.

Во-первых, Рябушинский присоединил к уравнениям связи выражение температуры, связывающее ее со средней кинетической энергией молекул, т. е. с величинами (молекулярная скорость и молекулярная масса), которые не встречаются ни в каком из уравнений связи. Из этого уравнения получается добавочное обусловливающее уравнение и, следовательно, добавочный индикатор подобия, который и фигурирует в уравнении Рябушинского (нарушение правила б). Во-вторых, не существовало никаких оправданий для приравнивания друг другу констант подобия величин одной размерности, но разной природы, какими являются скорость жидкости и скорость молекул. Они никак не связаны друг с другом. Скорость жидкости может стать равной нулю, что не отразится на скорости молекул, и, наоборот, скорость жидкости может поддерживаться постоянной, а нагрев жидкости увеличит скорость молекул. Связь между ними возникает только в сопле Лаваля, когда беспорядочное движение молекул координируется расширяющейся частью сопла и организуется в направленное движение.

Тут мы имеем случай пятой ошибки анализа размерности.

Представляется удивительным, что после такого исчерпывающего анализа ошибок Рябушинского, сделанного Т. А. Афанасьевой-Эренфест в 1925 г., семью годами позднее, в 1932 г., Бриджмен в своей книге „Анализ размерности" снова и безуспешно пытался объяснить парадокс Рябушинского.

Мы сейчас покажем, что решение задачи о теплообмене между телом и жидкостью методами теории подобия исключает самую постановку вопроса, сделанную Рябушинским.

Уравнение связи для случая конвективного теплообмена в жидкости, так называемое уравнение Фурье-Кирхгофа для стационарного процесса, имеет вид

$$\left(\vec{w} \cdot \operatorname{grad} t\right) = a \operatorname{div} \operatorname{grad} t,$$

где a — коэффициент температуропроводности, или в гамильтоновом обозначении

$$w \nabla t = a \nabla \cdot \nabla t.$$

Преобразование его к относительным координатам придаст ему вид:

$$\frac{w_0}{l_0} t_0 W \nabla T = \frac{a_0 t_0}{l_0^2} A \nabla^2 T$$

или

$$Pe_0 \cdot W \nabla T = A \nabla^2 T,$$

где $Pe_0 = \frac{w_0 l_0}{a_0}$ — критерий Пекле и $T = \frac{t}{t_1 - t_2}$ — безразмерный температурный симплекс, t_1 — температура входа и t_2 — выхода жидкости.

Следовательно, в критериальное уравнение должна войти функция $\varphi(A, W, T, Pe_0)$.

Однако это лишь одно из системы уравнений, описывающих явление. Движение жидкости определяется уравнениями Навье-Стокса и сплошности, кроме того, войдет уравнение, определяющее граничные условия.

Полагая, что поток турбулентен и обращаясь к уравнению 3-го примера главы 7 и др., видим, что решение должно содержать еще критерии Eu и Re. Ввиду того, что уравнение энергии для капельной жидкости распадается на два — механическое — живых сил и тепловое (первый закон термодинамики), можно ожидать, что и решение системы уравнений даст два уравнения:

$$Eu = \varphi_1(Re),$$

$$T = \varphi_2(Pe).$$

Явление теплообмена не определено однозначно, пока не будут сформулированы краевые условия.

Они даются уравнением теплообмена на границе поверхности твердого тела

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial l} = \alpha (t_{ж} - t_{ст})$$

или в относительных единицах, если принять за единицу температуры разность ее при входе и при выходе $t_1 - t_2$,

$$\frac{t_1 - t_2}{t_{ж} - t_{ст}} \cdot \frac{\partial T}{\partial L} = Nu,$$

где

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \text{ и } \frac{t_1 - t_2}{t_ж - t_{ст}} = Ba \text{ (критерий Банзена).}$$

Объединяя последнее уравнение с предыдущим, для T получим

$$Nu = \varphi_3(Pe).$$

Критериальное уравнение такого вида для конвективного теплообмена было дано Нуссельтом в 1915 г. ([15], стр. 42). Критерий $\frac{\alpha l}{\lambda}$ впоследствии назван его именем.

Полученное решение — приближенное, так как теплообмен в жидкости нагреет различные ее слои до разной температуры, вследствие чего в различных местах жидкости возникнут подъемные силы, которые надо присоединить к уравнению Навье-Стокса.

Имея в виду, что в системе уравнений связи теперь появится новое уравнение, зависимость плотности ρ от нагрева $\rho = f(\delta t)$, выражая в относительных единицах силу тяжести через критерий Галилея $Ga = Fr \cdot Re^2 = \frac{gl^3}{\nu^2}$ и соединяя его с симплексом $\frac{\rho - \rho_0}{\rho}$, образуем новый критерий подъемной силы Архимеда (Ar), который войдет в уравнение Навье-Стокса в качестве сомножителя при подъемной силе.

Обыкновенно $\frac{\rho - \rho_0}{\rho}$ выражают, как $1 - \beta\delta t$, где β — коэффициент температурного расширения, и заменяют Ar через Грасгоф $(Gr) : Gr = \frac{gl^3}{\nu^2} \cdot \beta\delta t$.

Тогда критериальное уравнение превратится в

$$Eu = \varphi_4(Re, Gr).$$

Точно так же и тепловое уравнение после подстановки $Pe = Re \cdot Pr$ станет:

$$Nu = \varphi_5(Re, Pr, Gr).$$

Тепловое уравнение составлено при ряде упрощающих предположений. Кроме пренебрежения лучистым теплообменом, при выводе уравнения Кирхгофа, принимается, что изменение давления невелико и им можно пренебречь. Если же этого делать нельзя, то надо вместо уравнения Фурье-Кирхгофа обратиться к общему уравнению энергии, которое дает новый тепломеханический критерий Джоуля. Наконец, наличие лучистого обмена потребует введения в систему уравнений связи еще интегральных уравнений, описывающих этот теплообмен.

Проведенный анализ решения задачи о конвективном теплообмене методом теории подобия выявляет несомненное превосходство анализа уравнений связи над анализом размерности. Он всегда имеет дело с конкретным явлением, для него выводятся уравнения связи и устанавливаются границы применения их, чего нельзя сказать об анализе размерности. Только метод анализа уравнений связи может дать результаты существенно надежные, хотя часто и не очень определенные. Поэтому при возможности пользоваться обоими методами надо избирать последний.

Однако, если уравнения связи неизвестны, то из двух методов остается только один — анализ размерности. В этом большое значение анализа размерности в применении к таким областям, как процессы парообразования. Однако, применяя его, не нужно забывать, что нельзя быть полностью уверенным в результатах анализа, и необходимо искать их подтверждения путем опытной или теоретической проверки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Три теоремы подобия составляют главную основу теории подобия.

Вот краткое содержание изложенной теории подобия:

1) Подобные явления протекают в геометрически подобных системах и описываются буквенно одинаковыми уравнениями связи.

Эти уравнения должны быть безусловно или условно однородными.

2) Условно однородными физические уравнения делаются присоединением к ним „обусловливающих равенств", которые устанавливают равенство единице индикаторов подобия, получающихся из уравнений, или, что то же, одинаковость для подобных явлений критериев подобия.

3) Однородные уравнения могут быть представлены как функции степенных комплексов (критериев) и симплексов.

Такие „критериальные" уравнения численно одинаковы для всей группы подобных явлений.

4) Подобны те явления, уравнения связи которых буквенно одинаковы и условия однозначности которых подобны, т. е. у которых одноименные моноваленты (величины, входящие в условия однозначности) находятся в численно постоянном отношении, а одноименные моновалентные (определяющие) критерии одинаковы.

Теория подобия дает, следовательно, общие методические указания, как поступать в каждом отдельном случае при анализе уравнений, описывающих явление, при постановке и обработке данных опыта над ним и при распространении результатов опыта на другие явления. Если же дана натура и исследовать ее хотят на модели, то теория подобия содержит методические указания по расчету и построению модели, подобной натуре.

Основное методическое указание о применении теории подобия к опыту, будь то физическое экспериментирование или техническое моделирование, состоит в следующем.

При исследовании явления надо установить для него уравнения связи, дающие взаимную связь физических величин, участвующих в явлении.

Эти уравнения должны быть формулированы для того частного случая, который является объектом исследования. Присоединение к ним условий однозначности делает исследование определенным и позволяет применить теорию подобия.

Поэтому во всех случаях, когда уравнения связи могут быть найдены, метод анализа уравнений есть единственно правильный путь применения теории подобия и только тогда, когда установить математическую зависимость между величинами, характеризующими явление, не удается, надлежит обратиться к методу анализа размерности. Этот путь менее надежен и поэтому результат его необходимо проверять на опыте. Им не следует пренебрегать, так как во многих случаях анализ размерности дает при обработке опытов ценные выводы [16].

В настоящее время теория подобия имеет следующие направления.

Первым по времени направлением является приложение теории подобия к изучению разнообразных технических сооружений на моделях.

Моделирование стало мощным средством для обнаружения различных недостатков, имеющихся в существующих технических устройствах, и для изыскания путей к их устранению.

Далее моделирование уже стало широко применяться для проверки вновь конструируемых объектов, так что до их выполнения, в процессе проектирования, моделирование позволяет совершенствовать новые, еще не опробованные на практике конструкции.

Теория подобия нашла также применение при обобщении рабочих показателей целых групп однотипных машин и устройств, так что на основании обработки данных многочисленных испытаний оказывается возможным создавать новые, основанные на критериях подобия, способы расчета различных технических объектов, которые приводят к установлению рациональных, связанных с экономией энергии режимов.

Теория подобия стала научной основой обобщения данных физико-технических испытаний, своего рода теорией эксперимента, указывающей во всех тех случаях, когда решение дифференциальных уравнений физики наталкивается на трудности, путь к такой постановке опытов, что их результаты могут быть распространены на всю область изучаемых явлений.

В последнее время теория подобия не только использует уравнения физики для обобщения опытных данных но и, обратно, при самом выводе дифференциальных уравнений она дает указания, с одной стороны, о введении в уравнения критериев подобия и безразмерных переменных и, с другой стороны, об использовании обобщения методами теории подобия опытных данных, являющихся исходными для составления уравнений. В качестве примера этого нового направления теории подобия можно привести установление для турбулентного потока автомодельности отдельно для пограничного слоя и отдельно для турбулентного ядра, что позволяет получить более простую и точную формулу гидравлического сопротивления труб. Точно так же преобразование уравнений движения пара или газа по лопаткам турбины к критериальному виду обнаруживает возможность приближенного моделирования рабочего процесса турбины в неведомых до сего времени пределах. Таким образом, теория подобия на наших глазах становится неотъемлемой частью теоретической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Newtoni J. Principia matematica phylosophiae naturalis. Lib. II, Sect. VII. Propos. 32, 33, 1686.
2. Bertrand J. Note sur la similitude en mécanique. Journ. de l'école polytechnique, Cahier 32, 1848.
3. Федерман А. О некоторых общих методах интегрирования уравнений с ч стными производными первого порядка. Раздел X и XI, Известия СПб. Политехн. ин-та, т. XVI, вып. 1, 1911 (1912).
4. Buckingham J. On physically similar sistems. Illustrations of the Use of Dimensional Equations. Phys. Rev. Vol. IV, ser. 4, 1914.
5. Erenfest-Afanassjewa T. A. Der Dimensionsbegriff und der analytische Bau physikalischer Gleichungen. Math. Ann. B. LXXVII H. 2, 1915.
6. Erenfest-Afanassjewa T. A. Dimensional analysis viwed from standpoint of the theorie of similitude. Phys. Mag., vol. I, Jan., 1925.
7. Конаков П. К. Вторая теорема подобия. Известия. АН СССР, ОТН № 2, 1949.
8. М. В. Кирпичев и А. А. Гухман. Труды Ленингр. обл. теплотехн. ин-та (ЛОТИ), вып. 1, 1931; Кирпичев М. В. Моделирование тепловых устройств. Известия Энергетич. ин-та АН СССР, т. I, 1933.
9. Кирпичев М. В. и Михеев М. А. Моделирование тепловых устройств. Изд. АН СССР, 1936.
10. Bertrand J. Sur l'homogèneité dans les formules de physique. Comptes Rendus de l'academie des sciences, Paris, т. 86, 15 Avr., 1878.
11. Fourier J. Theorie analitique de la chaleur, t. I, p. 137, 1822.
12. Apell. Mechanique rationelle, 1893; Апелль и Дотевилль. Теоретическая механика, 1912.
13. Tolman R. C. Principle of similitude. Phys. Rev. ser. 2, т. III, 1914; т. VI, 1915; т. VIII, 1916.
14. Rayleigh. Nature. T. 95, 1915.
15. Nusselt W. Gesundheits Ing. B. 38, 1915.
16. Кружилин Г. Н. Известия АН СССР, ОТН № 7, 1951.
17. Гаусс К. Ф. Интенсивность земной силы, приведенная к абсолютной мере. Доклад, 1832. Избранные труды. Изд. АН СССР, 1952.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Утверждено к печати
Энергетическим институтом
Академии наук СССР

Редактор издательства *С. С. Филимонов*
Технический редактор *Т. А. Землякова*
Корректор *Т. С. Петрикова*

РИСО АН СССР № 14–40Р. Т-10104. Издат. № 311
Тип. заказ № 25/233. Подп. к печ. 9/XII 1953 г.
Формат бум. $60 \times 92^1/_{16}$. Бум. л. 3. Печ. л. 6.
Уч.-издат. 4,6. Тираж 4000.
Цена по прейскуранту 1952 г. 3 р. 25 к.
Тип. Издательства Академии наук СССР

ИСПРАВЛЕНИЯ И ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
5	5 св.	были	было
18	13 сн.	безразмерному	анвариантному
24	16 сн.	Представляя	Переставляя
31	12 сн.	$\frac{f\mathrm{T}}{mw} = \mathrm{idem}$	$\frac{c_f c_\tau}{c_m c_w} = 1$
	8 сн.	$K' = K''$ или $\frac{K''}{K'} = 1$	$K_0' = K_0''$ или $\frac{K_0''}{K_0'} = 1$
70	7 св.	непрерывна,	непрерывна, а $f(x)$
	8 св.	она	$\varphi(x)$
78	7 сн.	$\rho' = \frac{\rho}{x''}$	$\rho' = \frac{\rho}{x^4}$
	6 сн.	$P' = \frac{P}{x^2}$	$P' = \frac{P}{x^4}$

М. В. Кирпичев. Теория подобия

Зак. 25/233.