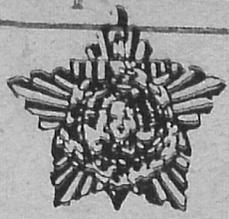


Контрольный экземпляр



ВОЕННО-МОРСКАЯ орденов
ЛЕНИНА и УШАКОВА
АКАДЕМИЯ

Е. Н. МНЕВ, Г. С. ЩЕННИКОВ

ор

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ

ЛЕНИНГРАД
1973

5716

Контрольный экземпляр

ВОЕННО-МОРСКАЯ орденов ЛЕНИНА и УШАКОВА АКАДЕМИЯ

Доктор технических наук профессор **Е. Н. МНЕВ**,
доктор технических наук профессор **Г. С. ЩЕННИКОВ**

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ

*Утверждено начальником Академии
в качестве учебного пособия для
слушателей Академии*

ЛЕНИНГРАД
1 9 7 3

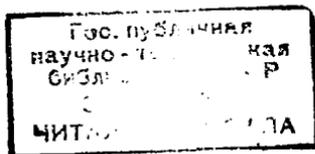
УДК 629.76.015. (07)

В учебном пособии изложены основы динамики ракет, приведены уравнения движения ракеты в воздухе и воде, рассмотрены вопросы устойчивости и управляемости ракеты, ее передаточные функции и динамические характеристики как объекта управления.

Предназначено для слушателей Академии.

Ответственный редактор кандидат технических наук
доцент Н.А.АРСЕНЬЕВ

44
3891



73 ~~24~~ - 5716

Введение

Предметом теории движения ракет является исследование общих закономерностей полета и его особенностей в различных частных случаях. Теория движения занимается изучением трех основных задач. Первая из этих задач состоит в расчете траекторий полета ракеты по заранее известным данным. Для ее решения необходимо правильно определить силы, действующие на ракету в полете, и знать величины их в каждый момент времени. Далее следует составить дифференциальные уравнения движения с учетом всех действующих сил. В результате решения этих уравнений получают характеристики движения: скорость ракеты, ускорения, перегрузки, время полета и координаты ракеты, по которым может быть построена траектория.

При решении этой задачи движение ракеты обычно рассматривается как движение управляемой материальной точки, масса которой равна массе ракеты и к которой приложены силы веса, тяги и аэродинамические силы. Схематизируется и работа системы управления ракетой.

Вторая задача теории движения состоит в исследовании устойчивости и управляемости ракеты. Здесь используются уравнения движения ракеты, учитывающие ее вращение относительно центра масс. Задачей этого исследования является изучение собственных динамических свойств ракеты, а также динамических свойств системы "ракета-автомат стабилизации". В результате исследования устанавливаются реакции ракеты на воздействие различных

внешних возмущений, оценивается возможность стабилизации ракеты на различных этапах полета и определяются условия управления ею.

Третья задача теории полета заключается в изучении факторов, влияющих на рассеивание ракет, и в рассмотрении путей повышения точности стрельбы. Для изучения этих вопросов необходимо движение ракеты и процессы в ее системе управления описывать достаточно полной системой дифференциальных уравнений и, кроме того, учитывать случайные возмущения.

Настоящее пособие посвящено рассмотрению ряда вопросов, относящихся к первым двум задачам теории движения ракет различных типов.

Теория движения опирается на основные положения теоретической механики, аэродинамики, теории автоматического регулирования и ряда других дисциплин. В свою очередь она должна дать все основные параметры траектории, исходя из которых можно было бы судить о необходимых характеристиках ракеты, ее системы управления и ракетного комплекса в целом.

Глава I

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ

§ I. Принцип составления уравнений движения

Уравнения движения тела постоянного состава составляются с помощью теорем классической динамики об изменении количества движения (K) и кинетического момента (момента количества движения - L), в соответствии с которыми:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{K}}{dt} &= \vec{F}; \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где \vec{F} и \vec{M} - соответственно главный вектор и главный момент всех внешних сил, действующих на тело постоянного состава.

Ракета - тело переменной массы. Поэтому при составлении уравнений ее движения необходимо учитывать изменения K и L , обусловленные непостоянством массы.

Чтобы свести эту задачу к задаче классической механики, используется принцип затвердевания тела переменного состава, который формулируется следующим образом.

Уравнения движения твердой ослостки ракеты в произвольный момент времени могут быть записаны в виде уравнений движения твердого тела постоянного состава, если представить себе, что ракета затвердела в момент времени

t и что к полученному таким образом фиктивному телу приложены следующие силы:

- внешние силы, действующие на ракету в полете (кроме сил давления окружающей среды и давления в выходном сечении сопла), т.е. сила веса \vec{G} и полная аэродинамическая сила \vec{R} ;

- сила тяги реактивного двигателя \vec{P} ;

- силы Кориолиса \vec{F}_K .

Тогда теоремы о количестве движения и кинетическом моменте тела переменной массы запишутся в следующем виде :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F} ; \quad (2)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M} , \quad (3)$$

где

$$\sum \vec{F} = \vec{R} + \vec{G} + \vec{P} + \vec{F}_K ;$$

$$\sum \vec{M} = \vec{M} + \vec{M}_p + \vec{M}_K ;$$

\vec{M} - главный момент всех внешних сил, кроме силы атмосферного давления и давления в выходном сечении сопла, относительно центра масс ракеты ;

\vec{M}_p - главный момент силы тяги, включающий также дополнительные моменты, обусловленные атмосферным давлением на корпус ракеты, давлением в выходном сечении сопла и нестационарностью движения газа и жидкого топлива внутри ракеты ;

\vec{M}_K - главный момент кориолисовых сил.

Эти уравнения справедливы в неподвижной (инерциальной) системе координат. В дальнейшем за неподвижную будем принимать систему координат, связанную с Землей. На практике векторные уравнения заменяют скалярными уравнениями, проектируя их на какие-либо подвижные оси координат, начало которых совпадает с центром масс ракеты.

§ 2. Системы координат

При исследовании движения ракет наиболее часто применяются земная, связанная и скоростная прямоугольные правые системы координат.

I. Земная система координат $O_2 x_2 y_2 z_2$

За начало земной системы прямоугольных координат может приниматься центр масс Земли, точка старта или другая неподвижная относительно Земли точка (рис. I. I). Ось $O_2 y_2$ направляется по земному радиусу, другие две оси, составляя прямоугольную систему координат, могут быть направлены удобным для проведения конкретного исследования образом. Ось $O_2 x_2$ обычно направляют на цель или по заданному начальному направлению движения.

2. Связанная система координат Ox, y, z

Связанная система координат используется для определения положения ракеты относительно земных осей. На-

чало координат обычно расположено в центре масс ракеты. Ось ox_1 (рис. I.2) направлена по продольной оси ракеты, а остальные две (oy_1 и oz_1) — перпендикулярно оси ox_1 и друг другу так, что составляют правую систему координат. Если ракета выполнена по самолетной схеме, то одна из осей связанной системы направлена вдоль хорды профиля крыла, а другая — перпендикулярно ей в плоскости симметрии. Обычно связанные оси близки к главным центральным осям инерции ракеты.

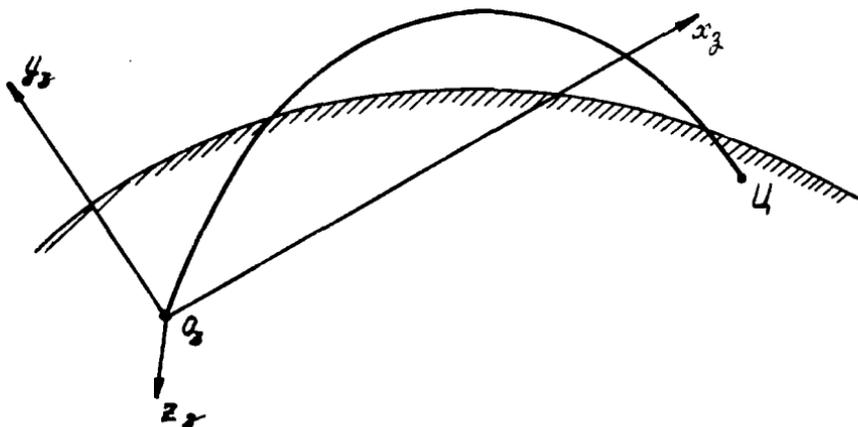


Рис. I. I

Ракета, как жесткое тело, имеет шесть степеней свободы. Следовательно, ее положение относительно земной системы определяется шестью координатами:

— тремя координатами x_2 , y_2 , z_2 начала O связанной системы координат;

— тремя углами между связанной и земной системами координат: углом рыскания ψ — между проекцией продольной оси ракеты ox_1 на горизонтальную плоскость

и осью $O_z x_z$; углом тангажа ϑ - между продольной осью ракеты ox_1 и ее проекцией на горизонтальную плоскость; углом крена γ - между осью oy_1 и вертикальной плоскостью, проходящей через ось ox_1 ,

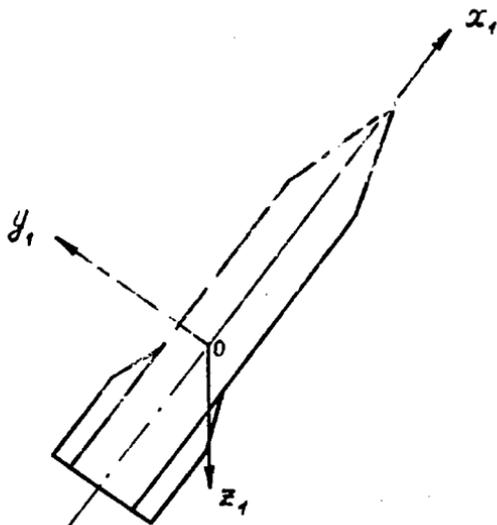


Рис. 1.2

Таким образом, связанная система координат может быть получена из земной системы в результате трех поворотов против часовой стрелки на углы φ , ϑ и γ . Найдем матрицу C преобразования земной системы в связанную (рис. 1.3):

$$[x_1, y_1, z_1] = [x_z, y_z, z_z] C;$$

1 поворот на угол φ . В результате этого поворота земной системы координат относительно оси oy_z получим систему координат $ox'_1 z'_1 y_z$. Матрица C_φ преобразования $[x'_1, y_z, z'_1] = [x_z, y_z, z_z] C_\varphi$ запишется в виде

$$C_\psi = \begin{vmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{vmatrix}; \quad (4)$$

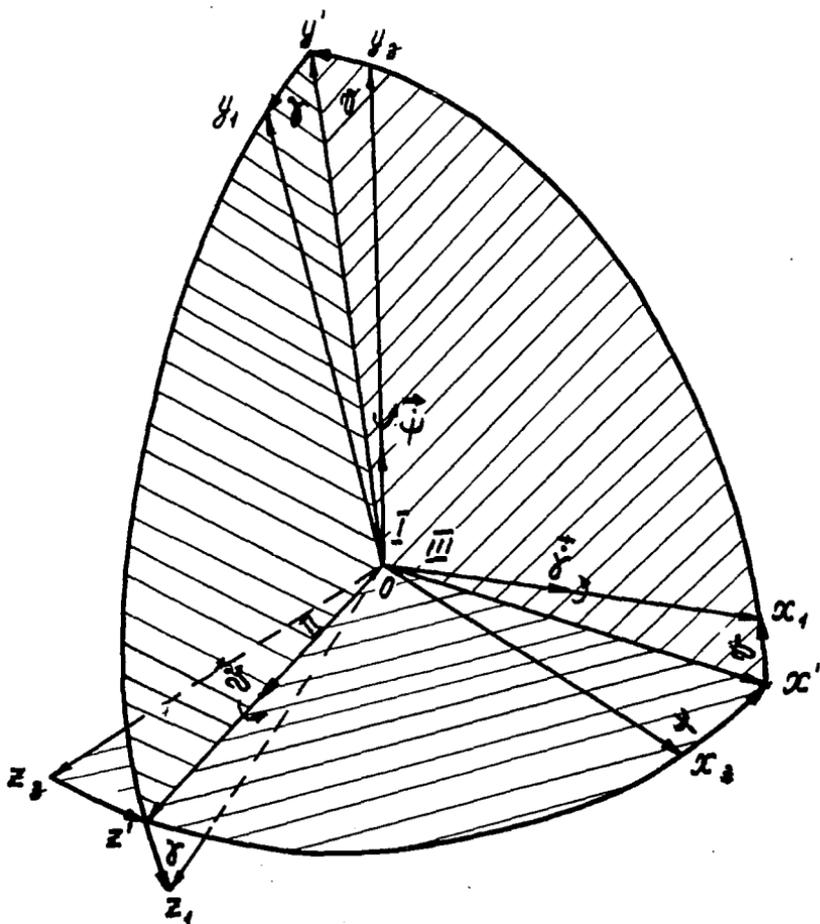


Рис. I.3

2 поворот на угол ϑ вокруг оси oz' . В результате этого поворота получим систему координат ox_1, y_1', z_1' . Матрица C_ϑ преобразования $[x_1, y_1', z_1'] = [x_1', y_1', z_1'] C_\vartheta$ записывается так:

$$C_\vartheta = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

или

$$[x_1, y_1', z_1'] = [x_2, y_2, z_2] C_\psi C_\vartheta.$$

Перемножая элементарные матрицы (I.4) и (I.5), получим

$$(C_\psi C_\vartheta) = \begin{vmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix};$$

3 поворот на угол δ вокруг оси ox_1 . В результате этого поворота получим искомую систему ox_1, y_1, z_1 . Матрица C_δ преобразования $[x_1, y_1, z_1] = [x_1, y_1', z_1'] C_\delta$ записывается в виде

$$C_\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Таким образом, имеем

$$[x_1, y_1, z_1] = [x_1', y_1', z_1'] C_{\gamma} = [x_2', y_2', z_2'] C_{\beta} C_{\gamma} = [x_3, y_3, z_3] C_{\varphi} C_{\beta} C_{\gamma} = [x_3, y_3, z_3] C.$$

После перемножения матриц элементарных преобразований 4, 5 и 6 получим

$$C = \begin{vmatrix} \cos\varphi \cos\beta \cos\gamma - \cos\varphi \sin\beta \cos\gamma + \sin\varphi \sin\beta & \cos\varphi \sin\beta \sin\gamma + \sin\varphi \cos\beta & \cos\varphi \cos\beta \sin\gamma + \sin\varphi \sin\beta \\ \sin\varphi & \cos\beta \cos\gamma & -\cos\beta \sin\gamma \\ -\sin\varphi \cos\beta & \cos\varphi \sin\beta + \sin\varphi \sin\beta \cos\gamma & \cos\varphi \cos\beta - \sin\varphi \sin\beta \sin\gamma \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Иногда используется полувязанная система координат. В этой системе одна из осей совпадает с проекцией вектора скорости на плоскость симметрии ракеты, а две другие лежат в плоскости, перпендикулярной проекции вектора скорости на плоскость симметрии (одна ось направлена по линии пересечения плоскостей, другая дополняет систему до правой).

3. Скоростная (поточная) система координат

ox yz

В скоростной системе координат ось ox совпадает с направлением вектора скорости полета \vec{v} центра масс ракеты, а оси oy и oz лежат в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{v} , причем ось oy лежит в плоскости симметрии ракеты, (рис. 1.4).

Положение ракеты относительно земной системы координат определяется тремя координатами центра масс

(x_2, y_2, z_2) и тремя углами между земной и скоростной системами координат: углом поворота траектории ψ_c (угол курса, путевой угол), углом наклона траектории θ (угол траектории); углом крена γ_c .

Связь между скоростной и земной системами координат устанавливается с помощью матрицы B преобразования

$$[x, y, z] = [x_2, y_2, z_2] B, \quad \text{где} \quad B = B_{\psi_c} B_{\theta} B_{\gamma_c}.$$

Нетрудно показать, что косинусы углов между скоростными и земными осями определяются матрицей (7), если в ней вместо углов ψ , ϑ и γ подставить углы ψ_c , θ и γ_c .

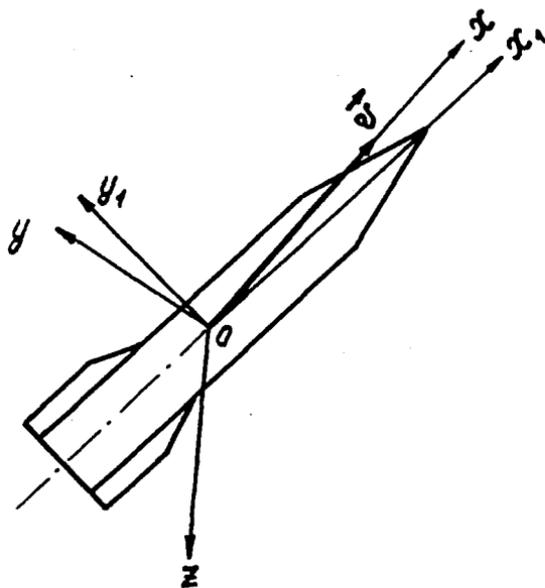


Рис. I.4

Наряду со скоростной системой координат часто используется полускоростная система, отличающаяся от первой тем, что в ней ось oy всегда лежит в вертикальной плоскости, а не в плоскости симметрии ракеты.

4. Определение положения ракеты относительно вектора скорости

Положение ракеты относительно вектора скорости определяется углами атаки α и скольжения β :

α - угол между проекцией вектора скорости \vec{V} (проекцией оси ox) на плоскость симметрии ракеты ox, y, z с осью аппарата ox_1, z_1 ;

β - угол между вектором скорости \vec{V} (осью ox) и плоскостью симметрии ракеты ox, y, z .

Переход к произвольному положению связанных осей координат относительно скоростных осуществляется посредством двух вращений (рис. I.5): поворотом связанных осей на угол β относительно оси oy , а затем поворотом на угол α относительно оси ox_1 , т.е.

$$[x_1, y_1, z_1] = [x, y, z] A,$$

где

$$A = A_\beta A_\alpha;$$

И поворот $[x', y', z'] = [x, y, z] A_\beta$;

$$A_\beta = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix};$$

2 поворот $[x_1, y_1, z_1] = [x', y', z'] A_\alpha$;

$$A_\alpha = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$A = A_\beta A_\alpha \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}. \quad (8)$$

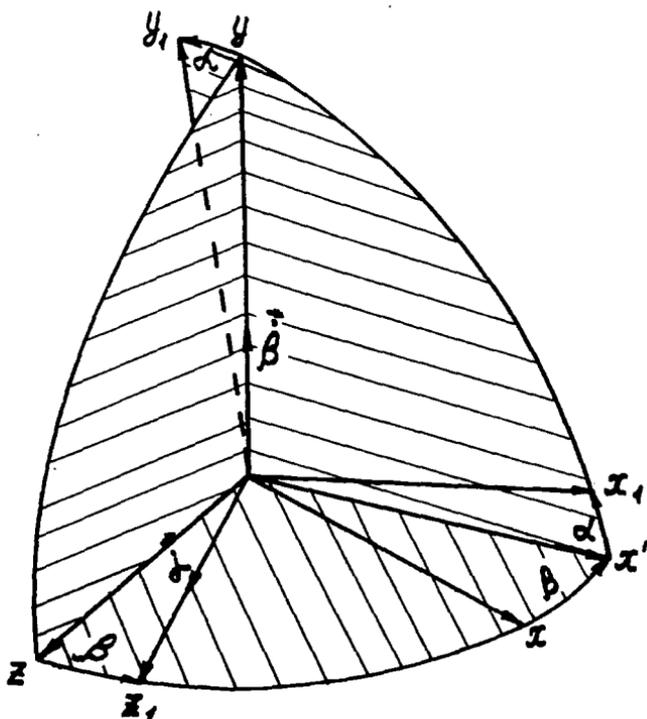


Рис. I.5

5. Связь между углами $\varphi_c, \theta, \delta_c$ и $\varphi, \vartheta, \delta, \beta, \alpha$

Положение скоростной системы координат относительно земной можно определить не только углами $\varphi_c, \theta, \delta_c$, но и углами $\varphi, \vartheta, \delta, \beta, \alpha$ (углы $\varphi, \vartheta, \delta$ определяют положение связанных осей относительно земных, а углы β и α - положение скоростных осей относительно связанных).

Выразим углы $\varphi_c, \theta, \delta_c$ через углы $\varphi, \vartheta, \delta, \beta$ и α . Зная направляющие косинусы перехода от скоростных осей к связанным и от связанных к земным и приравнивая их к направляющим косинусам непосредственного перехода от скоростных осей к земным, получим следующие связи между углами:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \cos \delta \sin \alpha \cos \beta - \\ &\quad - \cos \vartheta \sin \delta \sin \beta; \\ \sin \varphi_c &= \frac{1}{\cos \theta} \left[\sin \varphi \cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta + \cos \varphi \sin \delta \sin \alpha \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \sin \vartheta \cos \delta \sin \alpha \cos \beta - \cos \varphi \cos \delta \sin \beta + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi \sin \vartheta \sin \delta \sin \beta \right]; \\ \sin \delta_c &= \frac{1}{\cos \theta} \left[\sin \vartheta \cos \alpha \sin \beta - \cos \vartheta \cos \delta \sin \alpha \sin \beta + \right. \\ &\quad \left. + \cos \vartheta \sin \delta \cos \beta \right]. \end{aligned} \right\} (9)$$

Из последнего уравнения системы (9) видно, что при малых углах $\theta, \vartheta, \alpha, \beta, \delta$ и δ_c углы

крена приблизительно равны, т.е. $\mathcal{J} \approx \mathcal{J}_c$. Если полет совершается в вертикальной плоскости без крена ($\mathcal{J} = \beta = 0$), то из первого уравнения системы (9) следует, что $\theta = \mathcal{J} - \alpha$. Если же полет происходит в горизонтальной плоскости без крена ($\mathcal{J} = 0$), то, полагая $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx 0$, $\cos \mathcal{J} \approx 1$, из второго уравнения системы (9) будем иметь $\varphi_c = \varphi - \beta$.

§ 3. Динамические уравнения

I. Уравнения поступательного движения центра масс ракеты

Согласно принципу затвердевания (см. § I) в уравнении (2) производную от количества движения \vec{K} по времени для ракеты следует вычислять так же, как в случае твердого тела с постоянной массой, т.е.

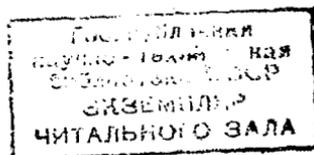
$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (10)$$

где $\frac{d\vec{v}}{dt}$ - ускорение центра масс тела.

Подставляя (10) в (2), получим

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} + \vec{G} + \vec{P} + \vec{F}_k. \quad (11)$$

Спроектируем векторное уравнение (11), описывающее поступательное движение центра масс ракеты, на оси скоростной системы координат. Так как в этой системе



вектор скорости ракеты совпадает с осью ox ($v_x = v$, $v_y = v_z = 0$), то будем иметь

$$\vec{v} = v \vec{i} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{i} + v \frac{d\vec{i}}{dt}.$$

Но $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}$, где $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения скоростной системы координат относительно земной системы, равный сумме угловых скоростей изменения углов φ_c , θ , γ_c , т.е.

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}}_c + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\gamma}}_c. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i} = (\vec{\dot{\varphi}}_c + \vec{\dot{\theta}} + \vec{\dot{\gamma}}_c) \times \vec{i} = (\vec{\dot{\varphi}}_c + \vec{\dot{\theta}}) \times \vec{i}.$$

Разложим векторы $\vec{\dot{\varphi}}_c$ и $\vec{\dot{\theta}}$ на составляющие по осям скоростной системы координат (рис. I.6):

$$\vec{\dot{\varphi}}_c = \dot{\varphi}_c (\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cos \gamma_c \vec{j} - \cos \theta \sin \gamma_c \vec{k});$$

$$\vec{\dot{\theta}} = \dot{\theta} (\sin \gamma_c \vec{j} + \cos \gamma_c \vec{k}).$$

Имея в виду, что

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

разложение левой части уравнения (II) по осям скоростной системы координат запишем так:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{dv}{dt} \vec{i} + m v (\dot{\theta} \cos \gamma_c - \dot{\varphi}_c \cos \theta \sin \gamma_c) \vec{j} - m v (\dot{\theta} \sin \gamma_c + \dot{\varphi}_c \cos \theta \cos \gamma_c) \vec{k}. \quad (13)$$

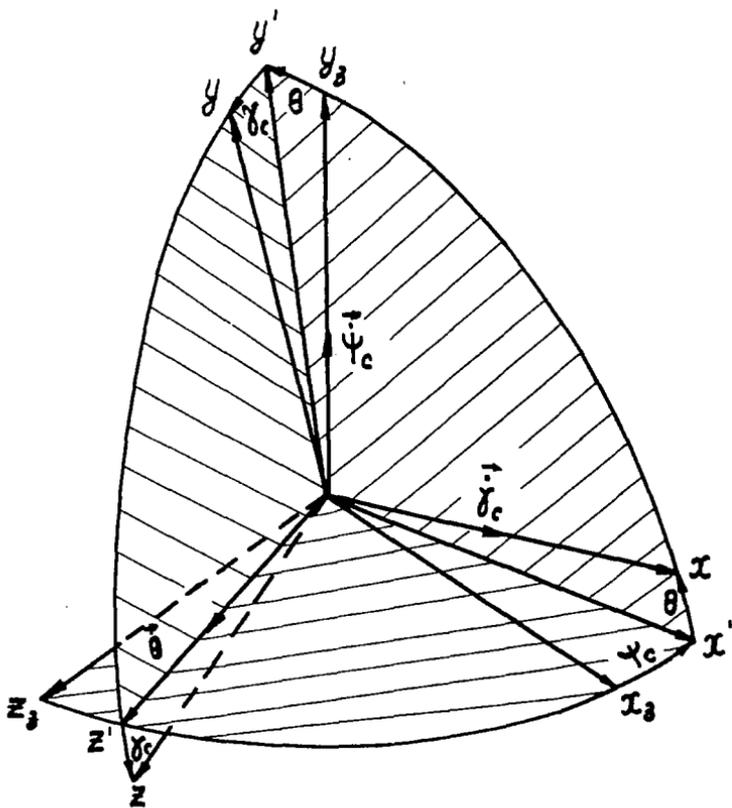


Рис. I.6

Далее разложим по тем же осям силы, входящие в правую часть уравнения (II).

Полная аэродинамическая сила. Учитывая, что сила лобового сопротивления \bar{Q} направлена в сторону, противоположную скорости полета ракеты, будем иметь

$$\bar{R} = -Q \bar{i} + Y \bar{j} + Z \bar{k}, \quad (I4)$$

где Y - подъемная сила;

Z - боковая сила.

Сила тяги. Будем считать, что асимметрия силы тяги отсутствует, т.е. вектор \bar{P} лежит в плоскости ox, y_1 и составляет с осью ox , некоторый угол $\epsilon_{g\beta}$. Тогда

$$\bar{P} = P \cos \epsilon_{g\beta} \bar{i}_1 + P \sin \epsilon_{g\beta} \bar{j}_1.$$

Используя матрицу A преобразования скоростной системы координат в связанную (8), запишем соотношения между осями этих систем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_1 &= \cos \alpha \cos \beta \bar{i} + \sin \alpha \bar{j} - \cos \alpha \sin \beta \bar{k}; \\ \bar{j}_1 &= -\sin \alpha \cos \beta \bar{i} + \cos \alpha \bar{j} + \sin \alpha \sin \beta \bar{k}; \\ \bar{k}_1 &= \sin \beta \bar{i} + \cos \beta \bar{k}. \end{aligned} \right\} \quad (I5)$$

Учитывая эти зависимости, получим

$$\bar{P} = P \cos(\alpha + \epsilon_{g\beta}) \cos \beta \bar{i} + P \sin(\alpha + \epsilon_{g\beta}) \bar{j} - P \cos(\alpha + \epsilon_{g\beta}) \sin \beta \bar{k}.$$

Если сила тяги двигателя направлена точно по продольной оси ракеты, (т.е. $\epsilon_{g\beta} = 0$), то в данном случае

$$\vec{P} = P \cos \alpha \cos \beta \vec{i} + P \sin \alpha \vec{j} - P \cos \alpha \sin \beta \vec{k}. \quad (16)$$

Сила веса. Сила веса равна произведению массы тела m на ускорение силы тяжести \vec{g} , т.е.

$$\vec{G} = m \vec{g},$$

причем

$$\vec{g} = \vec{g}_z + \vec{j}_4,$$

где \vec{g}_z - ускорение силы земного притяжения;

\vec{j}_4 - центробежное ускорение, обусловленное вращением Земли.

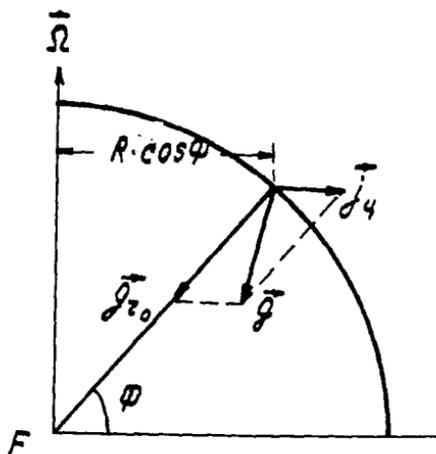


Рис. I.7

Если пренебречь сплюснем Земли и считать, что она имеет форму шара, то величина ускорения силы притяжения может быть найдена по формулам:

- у поверхности Земли

$$g_{z_0} = \frac{\mathcal{A}}{R^2} ; \quad (17)$$

- на некоторой высоте y над поверхностью Земли

$$g_z = g_{z_0} \left(\frac{R}{z} \right)^2 . \quad (18)$$

В формулах (17) и (18) приняты следующие обозначения:

$R = 6371 \text{ км}$ - радиус Земли;

$\mathcal{A} = \mu M = 3,9862 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{сек}^2$;

$\mu = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$ - гравитационная постоянная ;

$M = 5,9763 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ - масса Земли ;

$z = R + y$ - расстояние рассматриваемой точки от центра Земли.

Величина центробежного ускорения у земной поверхности будет равна

$$j_{\omega} = \Omega^2 R \cos \Phi ,$$

где Φ - географическая широта ;

$\Omega = 7,2921 \frac{1}{\text{сек}}$ - угловая скорость вращения Земли.

Составляющая центробежного ускорения вдоль радиуса Земли равна $\vec{j}_{\omega} \cos \Phi$ и направлена противоположно ускорению \vec{g}_{z_0} . Поэтому полное ускорение силы тяжести у поверхности Земли выразится следующим образом:

$$g_0 \approx g_{z_0} - \Omega^2 R \cos^2 \Phi. \quad (19)$$

Максимального значения величина g_0 достигает на полюсах Земли ($\Phi = \frac{\pi}{2}$, $g = g_{z_0}$), а минимального — на экваторе ($\Phi = 0$, $g_0 = g_{z_0} - \Omega^2 R$). Зная величину g_0 , можно ускорение силы тяжести на некоторой высоте y над поверхностью Земли вычислить по формуле, аналогичной выражению (18):

$$g \approx g_0 \left(\frac{R}{R+y} \right)^2.$$

В практических расчетах обычно принимают, что ускорение g направлено точно к центру Земли, т.е. считают, что сила веса действует в направлении, обратном направлению радиус-вектора ракеты (рис. I.8). Но

$$\vec{z} = x_z \vec{i}_z + (R + y_z) \vec{j}_z + z_z \vec{k}_z.$$

Следовательно, косинусы углов вектора \vec{G} с осями земной системы координат равны $\frac{x_z}{z}$; $\frac{y_z + R}{z}$; $\frac{z_z}{z}$, причем

$$z = \sqrt{x_z^2 + (y_z + R)^2 + z_z^2} = R + y.$$

Тогда

$$\vec{G} = -G \left(\frac{x_z}{z} \vec{i}_z + \frac{y_z + R}{z} \vec{j}_z + \frac{z_z}{z} \vec{k}_z \right) \approx -G \left(\frac{x_z}{z} \vec{i}_z + \vec{j}_z \right),$$

так как

$$\frac{z_z}{z} \ll 1, \quad \frac{y_z + R}{z} \approx 1.$$

Используя матрицу B преобразования земной системы координат в скоростную систему, запишем:

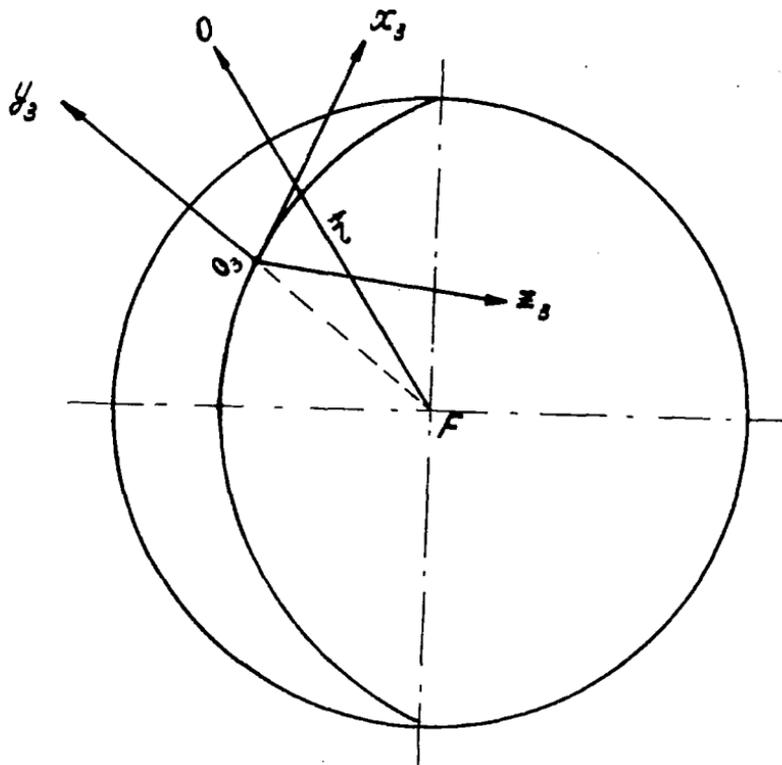


Рис. I.8

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{i}_3 &= \cos \varphi_c \cos \theta \vec{i} + (\sin \varphi_c \sin \delta_c - \cos \varphi_c \sin \theta \cos \delta_c) \vec{j} + \\
 &\quad + (\cos \varphi_c \sin \theta \sin \delta_c + \sin \varphi_c \cos \delta_c) \vec{k}; \\
 \vec{j}_3 &= \sin \theta \vec{i} + \cos \theta \cos \delta_c \vec{j} - \cos \theta \sin \delta_c \vec{k}; \\
 \vec{k}_3 &= -\sin \varphi_c \cos \theta \vec{i} + (\cos \varphi_c \sin \delta_c + \sin \varphi_c \sin \theta \cos \delta_c) \vec{j} + \\
 &\quad + (\cos \varphi_c \cos \delta_c - \sin \varphi_c \sin \theta \sin \delta_c) \vec{k}.
 \end{aligned} \right\} (20)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \vec{G} &= -G \left(\sin \theta + \frac{x_2}{z} \cos \varphi_c \cos \theta \right) \vec{i} - G \left[\cos \theta \cos \delta_c + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x_2}{z} (\sin \varphi_c \sin \delta_c - \sin \theta \cos \varphi_c \cos \delta_c) \right] \vec{j} - \\
 &\quad - G \left[-\cos \theta \sin \delta_c + \frac{x_2}{z} (\sin \theta \cos \varphi_c \sin \delta_c + \sin \varphi_c \cos \delta_c) \right] \vec{k}.
 \end{aligned} \quad (21)$$

Если при расчете движения ракеты не учитывать кривизны земной поверхности, то уравнение (21) упрощается. Полагая $z = \infty$, будем иметь

$$\vec{G} = -G \sin \theta \vec{i} - G \cos \theta \cos \delta_c \vec{j} + G \cos \theta \sin \delta_c \vec{k}. \quad (22)$$

Сила Кориолиса. Имеем

$$\vec{F}_k = -2m(\vec{\Omega} \times \vec{v}).$$

Представим вектор угловой скорости вращения Земли в проекциях на оси скоростной системы координат:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}.$$

Учитывая, что $\vec{v} = v \vec{i}$, получим

$$\vec{F}_k = -2m(\Omega_z v \vec{j} - \Omega_y v \vec{k}). \quad (23)$$

Вектор $\vec{\Omega}$ в проекциях на оси Земной системы координат записывается так (рис. I.9):

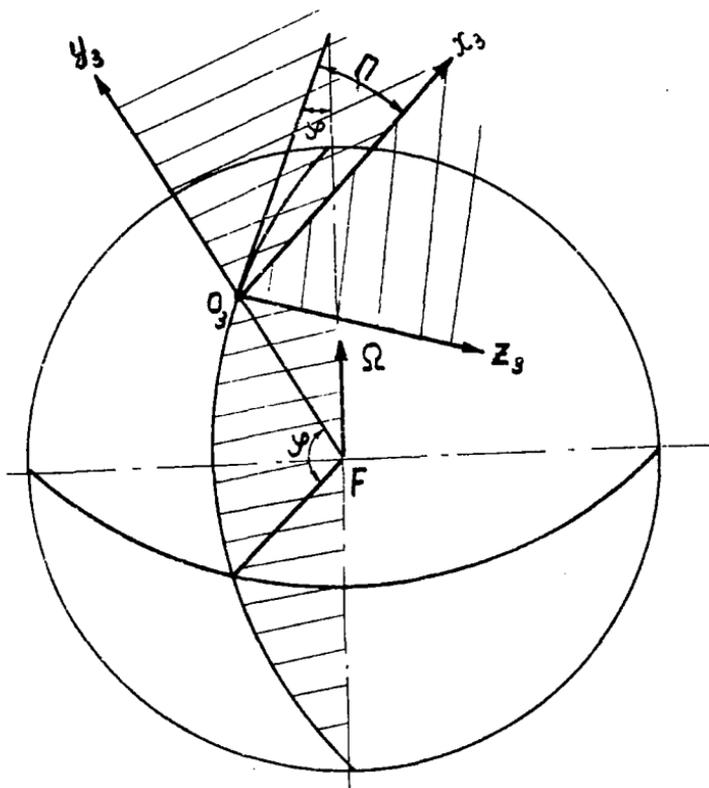


Рис. I.9

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \varphi \cos \Pi \vec{i}_z + \Omega \sin \varphi \vec{j}_z - \Omega \cos \varphi \sin \Pi \vec{k}_z, \quad (24)$$

где Π - пеленг точки O_2 , т.е. угол оси $O_2 x_2$ с плоскостью меридиана, проходящего через точку O_2 ;

φ - геоцентрическая широта точки O_2 , т.е. угол оси $O_2 y_2$ с плоскостью экватора (в северном полушарии $+\varphi$, в южном $-\varphi$).

Подставляя выражения для \vec{i}_z , \vec{j}_z , \vec{k}_z из формулы (20) в (24), получим:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \Omega \left[\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos (\varphi_c - \Pi) \right]; \\ \Omega_y &= \Omega \left\{ \cos \theta \cos \varphi_c \sin \varphi + \cos \varphi \left[\sin \varphi_c \sin (\varphi_c - \Pi) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \theta \cos \varphi_c \cos (\varphi_c - \Pi) \right] \right\}; \\ \Omega_z &= \Omega \left\{ -\cos \theta \sin \varphi_c \sin \varphi + \cos \varphi \left[\cos \varphi_c \sin (\varphi_c - \Pi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \theta \sin \varphi_c \cos (\varphi_c - \Pi) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Если воспользоваться выражениями (I3), (I4), (I6), (22) и (23), то уравнение (II) в проекциях на оси скоростной системы координат можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m \dot{v} &= P \cos \alpha \cos \beta - Q - G \left(\sin \theta + \frac{x_2}{r} \cos \theta \cos \varphi_c \right); \\ m v &= (\dot{\theta} \cos \varphi_c - \dot{\varphi}_c \cos \theta \sin \varphi_c) = P \sin \alpha + Y - G \left[\cos \theta \cdot \cos \varphi_c + \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{x_3}{z} (\sin \psi_c \sin \delta_c - \sin \theta \cos \psi_c \cos \delta_c) - 2m v \Omega_z ; \\
 & m v (\dot{\theta} \sin \delta_c + \dot{\psi}_c \cos \theta \cos \delta_c) = -P \cos \alpha \sin \beta + Z + \\
 & + G \left[\cos \theta \sin \delta_c - \frac{x_3}{z} (\sin \psi_c \cos \delta_c + \sin \theta \cos \psi_c \sin \delta_c) \right] + \\
 & \quad + 2m v \Omega_y .
 \end{aligned} \right\} (26)$$

Разрешая второе и третье уравнения (26) относительно функций $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}_c$ и пренебрегая вращением Земли, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned}
 m \dot{v} &= P \cos \alpha \cos \beta - Q - G \left(\sin \theta + \frac{x_3}{z} \cos \theta \cos \psi_c \right); \\
 m v \dot{\theta} &= P (\cos \delta_c \sin \alpha + \sin \beta \sin \delta_c \cos \alpha) + \\
 & \quad + Y \cos \delta_c - Z \sin \delta_c - G \left(\cos \theta - \frac{x_3}{z} \sin \theta \cos \psi_c \right); \\
 m v \cos \theta \dot{\psi}_c &= -P (\sin \delta_c \sin \alpha - \sin \beta \cos \delta_c \cos \alpha) - \\
 & \quad - Y \sin \delta_c - Z \cos \delta_c + G \frac{x_3}{z} \sin \psi_c .
 \end{aligned} \right\} (27)$$

2. Уравнения вращательного движения ракеты

Обычно уравнения вращательного движения записывают в проекциях на оси связанной системы координат, так как любая другая система перемещается относительно ракеты, а это приводит к необходимости пользоваться при исследовании движения переменными значениями мо-

ментов инерции, что вносит существенные осложнения. Полагая, что связанные оси координат совпадают с главными центральными осями инерции ракеты (как правило, такое допущение не является грубым), запишем векторное уравнение (3) в проекциях на оси связанной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{z_1} \omega_{y_1} &= M_{x_1} + M_{px_1} + M_{Kx_1}; \\ J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= M_{y_1} + M_{py_1} + M_{Ky_1}; \\ J_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{y_1} \omega_{x_1} &= M_{z_1} + M_{pz_1} + M_{Kz_1}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь

$\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$ - проекции угловой скорости вращения ракеты на главные центральные оси инерции (т.е. на оси связанной системы координат);

$M_{x_1}, M_{px_1}, \dots, M_{pz_1}, M_{Kz_1}$ - проекции моментов аэродинамических сил, силы тяги и силы Кориолиса на те же оси;

$J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}$ - главные центральные моменты инерции ракеты.

Из рассмотрения уравнений вращательного движения ракеты (28) и движения ее центра масс (26) видно, что в состав этих шести уравнений входят девять неизвестных функций:

$$v(t), \theta(t), \psi_c(t), \beta_c(t), \alpha(t), \beta(t), \omega_{x_1}(t), \omega_{y_1}(t), \omega_{z_1}(t), x_z(t).$$

Следовательно, чтобы система стала замкнутой, надо к шести полученным уравнениям добавить кинематические соотношения.

§ 4. Кинематические соотношения

I. Кинематические уравнения, описывающие вращение ракеты относительно земных осей

Спроектируем векторное равенство

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\nu}} + \vec{\dot{\gamma}}$$

на оси связанной системы координат (рис. I.3):

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} \vec{i}_1 + \omega_{y_1} \vec{j}_1 + \omega_{z_1} \vec{k}_1 = \dot{\nu} (\cos \gamma \vec{k}_1 + \sin \gamma \vec{j}_1) + \dot{\psi} (\cos \nu \cos \gamma \vec{j}_1 - \\ - \cos \nu \sin \gamma \vec{k}_1 + \sin \nu \vec{i}_1) + \dot{\gamma} \vec{i}_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin \nu; \\ \omega_{y_1} &= \dot{\nu} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \nu \cos \gamma; \\ \omega_{z_1} &= \dot{\nu} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \nu \sin \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

откуда

$$\dot{\nu} = \omega_{y_1} \sin \gamma + \omega_{z_1} \cos \gamma \quad]$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{y_1} \cos \delta - \omega_{z_1} \sin \delta); \\ \dot{\delta} &= \omega_{x_1} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{y_1} \cos \delta - \omega_{z_1} \sin \delta). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Таким образом, получены кинематические уравнения, связывающие производные углов ϑ , φ и δ по времени с проекциями вектора угловой скорости ω_{x_1} , ω_{y_1} , ω_{z_1} . Связь углов ϑ , φ и δ с углами θ , φ_c , δ_c , α и β была установлена ранее [см. формулы (а)]

2. Кинематические уравнения для координат центра масс ракеты

Спроектируем вектор скорости ракеты \vec{v} на оси земной системы координат:

$$\vec{v} = \dot{x}_z \vec{i}_z + \dot{y}_z \vec{j}_z + \dot{z}_z \vec{k}_z.$$

Но с другой стороны из рис. I.6 видно, что

$$\vec{v} = v \cos \theta \cos \varphi_c \vec{i}_z + v \sin \theta \vec{j}_z - v \cos \theta \sin \varphi_c \vec{k}_z.$$

Следовательно, для определения текущих координат центра масс ракеты относительно земных осей можно воспользоваться такими уравнениями:

$$\dot{x}_z = v \cos \theta \cos \varphi_c; \quad]$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_z &= v \sin \theta; \\ \dot{z}_z &= -v \cos \theta \sin \varphi_c. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Добавляя кинематические соотношения (9), (30), (31) к шести динамическим уравнениям (26) и (28), получим систему, состоящую из 15 уравнений и содержащую 15 неизвестных функций: $v(t)$, $\theta(t)$, $\varphi_c(t)$, $f_c(t)$, $\mathcal{D}(t)$, $\varphi(t)$, $f(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\omega_{x_1}(t)$, $\omega_{y_1}(t)$, $\omega_{z_1}(t)$, $x_z(t)$, $y_z(t)$, $z_z(t)$. Таким образом, полученная система уравнений в случае неуправляемого полета ракеты (полет с зафиксированными органами управления и нерегулируемой тягой) является замкнутой. При этом траектория полета полностью определяется начальными условиями: $v(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\varphi_c(t_0)$, ..., $z_z(t_0)$.

В случае управляемого полета к перечисленным выше неизвестным необходимо добавить угол δ_z отклонения устройства, изменяющего режим работы двигателя, и углы отклонения органов управления тангажом δ_{z_1} , рысканием δ_{y_1} и креном δ_{x_1} , так как от этих параметров зависят силы и моменты, действующие на ракету. Если законы изменения величины $\delta_z(t)$, $\delta_{z_1}(t)$, $\delta_{y_1}(t)$ и $\delta_{x_1}(t)$ заданы, то тем самым будет определена единственная траектория полета ракеты. Следовательно, к системе уравнений неуправляемого движения необходимо добавить уравнения, описывающие процессы в системе управления. Вид этой системы зависит от типа ракеты, принятого

закона управления, конструктивных особенностей летательного аппарата и от других факторов. Так, система управления баллистической ракетой обычно обеспечивает программное движение центра масс, стабилизацию ракеты при движении в плоскости стрельбы и управление дальностью полета. Система управления крылатой ракетой, наряду со стабилизацией аппарата по углам тангажа, крена и рыскания и удержанием заданной высоты, в общем случае призвана обеспечить выполнение команд, поступающих с пункта управления, а также обнаружение цели и самонаведение ракеты на цель.

Запишем уравнения управления в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{x_1} &= \delta_{x_1}(x_2, y_2, z_2, \mathcal{T}, \varphi, \delta, \beta, t); \\ \delta_{y_1} &= \delta_{y_1}(x_2, y_2, z_2, \mathcal{T}, \varphi, \delta, \beta, t); \\ \delta_{z_1} &= \delta_{z_1}(x_2, y_2, z_2, \mathcal{T}, \varphi, \delta, \alpha, t); \\ \delta_g &= \delta_g(x_2, y_2, v, \theta, t). \end{aligned} \right\}$$

Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае в уравнения управления наряду с указанными параметрами входят и их производные по времени.

Таким образом, если к 15 уравнениям движения ракеты добавить уравнения (32), то получим систему из девятнадцати уравнений с девятнадцатью неизвестными. Следовательно, система уравнений движения ракеты замкнется и ее траектория, так же как при неуправляемом полете, будет зависеть только от начальных условий.

§ 5. Полные системы уравнений движения ракеты

Объединяя полученные выше динамические уравнения (27), (28) и добавляя к ним кинематические соотношения (9), (30), (31) и уравнения управления ракетой (32), получим следующую систему уравнений для случая, когда уравнения сил записываются в скоростной системе координат и не учитывается угловая скорость вращения Земли:

$$\begin{aligned}
 1 \quad m\dot{v} &= P \cos \alpha \cos \beta - Q - G \left(\sin \theta + \frac{x_2}{z} \cos \theta \cos \psi_c \right); \\
 2 \quad m v \dot{\theta} &= P (\cos \gamma_c \sin \alpha + \sin \beta \sin \gamma_c \cos \alpha) + \\
 &\quad + Y \cos \gamma_c - Z \sin \gamma_c - G \left(\cos \theta - \frac{x_2}{z} \sin \theta \cos \psi_c \right); \\
 3 \quad m v \cos \theta \dot{\psi}_c &= -P (\sin \gamma_c \sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma_c \cos \alpha) - \\
 &\quad - Y \sin \gamma_c - Z \cos \gamma_c + G \frac{x_2}{z} \sin \psi_c; \\
 4 \quad J_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{z_1} \omega_{y_1} &= M_{x_1} + M_{p x_1}; \\
 5 \quad J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= M_{y_1} + M_{p y_1}; \\
 6 \quad J_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{y_1} \omega_{x_1} &= M_{z_1} + M_{p z_1}; \\
 7 \quad \dot{\vartheta} &= \omega_{y_1} \sin \gamma + \omega_{z_1} \cos \gamma; \\
 8 \quad \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma); \\
 9 \quad \dot{\gamma} &= \omega_{x_1} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{y_1} \cos \gamma - \omega_{z_1} \sin \gamma);
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

- 10 $\dot{x}_3 = v \cos \theta \cos \psi_c$;
- 11 $\dot{y}_3 = v \sin \theta$;
- 12 $\dot{z}_3 = -v \cos \theta \sin \psi_c$;
- 13 $\sin \theta = \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta -$
 $- \cos \vartheta \sin \gamma \sin \beta$;
- 14 $\sin \psi_c = \frac{1}{\cos \theta} (\sin \psi \cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta + \cos \psi \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta +$
 $+ \sin \psi \sin \theta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \psi \cos \gamma \sin \beta +$
 $+ \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \sin \beta)$;
- 15 $\sin \gamma_c = \frac{1}{\cos \theta} (\sin \vartheta \cos \alpha \sin \beta -$
 $- \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta + \cos \vartheta \sin \gamma \cos \beta)$;
- 16 $\delta_g = \delta_g(x_3, y_3, z_3, v, \theta, t)$;
- 17 $\delta_{x_1} = \delta_{x_1}(x_3, y_3, z_3, \vartheta, \psi, \gamma, \beta, t)$;
- 18 $\delta_{y_1} = \delta_{y_1}(x_3, y_3, z_3, \vartheta, \psi, \gamma, \beta, t)$;
- 19 $\delta_{z_1} = \delta_{z_1}(x_3, y_3, z_3, \vartheta, \psi, \gamma, \alpha, t)$.

(33)

В некоторых случаях удобнее пользоваться системой, в которой уравнения сил записаны не в скоростной, а в с в я з а н н о й системе координат. Опуская промежуточные выкладки, запишем эту систему (без учета вращения Земли) в окончательном виде, имея при этом в виду, что в общем случае сила тяги двигателя может составлять с осью ракеты некоторый угол $\varepsilon_{g\beta}$:

$$\begin{aligned}
 1 \quad m(\dot{v}_{x_1} - \omega_{z_1} v_{y_1} + \omega_{y_2} v_{z_1}) &= P \cos \varepsilon_{g\beta} - G_1 - G(\sin \vartheta + \\
 &\quad + \frac{x_2}{z} \cos \vartheta \cos \varphi); \\
 2 \quad m(\dot{v}_{y_1} - \dot{\omega}_{x_1} v_{z_1} + \omega_{z_1} v_{x_1}) &= P \sin \varepsilon_{g\beta} + Y_1 - G(\cos \vartheta \cos \vartheta + \\
 &\quad + \frac{x_2}{z} (\sin \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi)); \\
 3 \quad m(\dot{v}_{z_1} - \omega_{y_1} v_{x_1} + \omega_{x_1} v_{y_1}) &= Z_1 + G[\cos \vartheta \sin \vartheta - \\
 &\quad - \frac{x_2}{z} (\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi)]; \\
 4 \quad J_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} + (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega_{z_1} \omega_{y_1} &= M_{x_1} + M_{px_1}; \\
 5 \quad J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} + (J_{x_1} - J_{z_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1} &= M_{y_1} + M_{py_1}; \\
 6 \quad J_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} + (J_{y_1} - J_{x_1}) \omega_{y_1} \omega_{x_1} &= M_{z_1} + M_{pz_1}; \\
 7 \quad \dot{x}_2 &= v_{x_1} \cos \vartheta \cos \varphi + v_{y_1} (\sin \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi) + \\
 &\quad + v_{z_1} (\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi);
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

$$\left. \begin{aligned}
 8 \quad \dot{y}_z &= v_{x_1} \sin \vartheta + v_{y_1} \cos \vartheta \cos \delta - v_{z_1} \cos \vartheta \sin \delta; \\
 9 \quad \dot{z}_z &= -v_{x_1} \cos \vartheta \sin \varphi + v_{y_1} (\sin \delta \cos \varphi + \sin \vartheta \cos \delta \sin \varphi) + \\
 &\quad + v_{z_1} (\cos \delta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \delta \sin \varphi); \\
 10 \quad \dot{\vartheta} &= \omega_{y_1} \sin \delta + \omega_{z_1} \cos \delta; \\
 11 \quad \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{y_1} \cos \delta - \omega_{z_1} \sin \delta); \\
 12 \quad \dot{\delta} &= \omega_{x_1} - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_{y_1} \cos \delta - \omega_{z_1} \sin \delta); \\
 13 \quad y &= z - R = \sqrt{x_z^2 + (y_z + R)^2 + z_z^2} - R; \\
 14 \quad v &= \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2}; \\
 15 \quad \sin \beta &= \frac{v_{z_1}}{v}; \\
 16 \quad \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{v_{y_1}}{v_{x_1}}; \\
 17 \quad \delta_z &= \delta_z(x_z, y_z, z_z, v, \vartheta, t); \\
 18 \quad \delta_{x_1} &= \delta_{x_1}(x_z, y_z, z_z, \vartheta, \varphi, \delta, \beta, t);
 \end{aligned} \right\} (34)$$

$$\left. \begin{aligned}
 20 \quad \delta_{y_1} &= \delta_{y_1}(x_3, y_3, z_3, \vartheta, \psi, \gamma, \beta, t); \\
 21 \quad \delta_{z_1} &= \delta_{z_1}(x_3, y_3, z_3, \vartheta, \psi, \gamma, \alpha, t).
 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Из общей системы (33) нетрудно получить систему уравнений, описывающих движение баллистической ракеты на пассивном участке траектории. Для этого следует исключить из рассмотрения уравнения управления и положить $P=0$, $M_{px_1}=0$, $M_{py_1}=0$, $M_{pz_1}=0$.

Тогда, имея в виду, что для баллистической ракеты $J_{y_1} = J_{z_1} = J$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned}
 1 \quad m\dot{\nu} &= -Q - G \left(\sin \theta + \frac{x_3}{z} \cos \theta \sin \psi_c \right); \\
 2 \quad m\nu\dot{\theta} &= Y \cos \gamma_c - Z \sin \gamma_c - G \left(\cos \theta - \frac{x_3}{z} \sin \theta \cos \psi_c \right); \\
 3 \quad m\nu \cos \theta \dot{\psi}_c &= -Y \sin \gamma_c - Z \cos \gamma_c + G \frac{x_3}{z} \sin \psi_c; \\
 4 \quad J_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} &= M_{x_1}; \\
 5 \quad J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} &= M_{y_1} + (J - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{z_1}; \\
 6 \quad J \dot{\omega}_{z_1} &= M_{z_1} - (J - J_{x_1}) \omega_{x_1} \omega_{y_1}; \\
 7 \quad \dot{x}_3 &= \nu \cos \theta \cos \psi_c;
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad \dot{y}_z &= v \sin \theta; \\
 9 \quad \dot{z}_z &= -v \cos \theta \sin \varphi_c; \\
 10 \quad r &= \sqrt{x_z^2 + (y_z + R)^2 + z_z^2}; \\
 11 \quad y &= z - R; \\
 12 \quad \dot{\beta} &= \omega_{x_1} \sin \alpha + \omega_{y_1} \cos \alpha - \dot{\theta} \sin \gamma_c - \dot{\varphi}_c \cos \theta \cos \gamma_c; \\
 13 \quad \dot{\gamma}_c &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_{x_1} \cos \alpha - \omega_{y_1} \sin \alpha) - \dot{\varphi}_c \sin \theta + \\
 &\quad + (\dot{\theta} \cos \gamma_c - \dot{\varphi}_c \cos \theta \sin \gamma_c) \operatorname{tg} \beta; \\
 14 \quad \dot{\alpha} &= \omega_{z_1} - (\omega_{x_1} \cos \alpha - \omega_{y_1} \sin \alpha) \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{\cos \beta} (\dot{\theta} \cos \alpha - \\
 &\quad - \dot{\varphi}_c \cos \theta \sin \gamma_c).
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Данная система полностью описывает движение баллистической ракеты на пассивном участке, так как двенадцать дифференциальных уравнений и два алгебраических содержат четырнадцать неизвестных функций.

§ 6. Разделение общих уравнений движения на продольное и боковое

Существенное упрощение системы уравнений движения ракеты достигается путем разделения системы на две группы уравнений, описывающих полет ракеты в вертикальной плоскости (продольное движение) и в двух других плоскостях, перпендикулярных к ней (боковое движение).

Возможность такого разделения обусловлена тем, что на большей части траектории полет ракеты происходит с малыми углами и угловыми скоростями. При этом силы и моменты, действующие, например, в вертикальной плоскости, практически не зависят от сил и моментов, действующих в других плоскостях, и наоборот.

Продольное движение характеризуется тем, что в процессе этого движения изменяются лишь параметры ψ , θ , α , $\dot{\theta}$, ω_{x_1} , \dot{x}_{z_1} , \dot{y}_z - кинематические параметры продольного движения, а параметры φ , φ_c , δ , δ_c , β , ω_{x_1} , ω_{y_1} , \dot{z}_z равны нулю. Следовательно, продольное движение ракеты складывается из поступательного движения центра масс вдоль осей ox_1 и oy_1 (т.е. в плоскости симметрии ox_1y_1) и вращательного движения относительно оси oz_1 .

Параметры β , δ , δ_c , φ , φ_c , ω_{x_1} , ω_{y_1} , \dot{z}_z , равные нулю в продольном движении, называются кинематическими параметрами бокового движения ракеты. Боковое движение состоит из поступательного движения центра масс вдоль оси oz_1 и вращательного движения относительно осей ox_1 и oy_1 .

Системы уравнений, описывающих изолированные продольное и боковое движения, можно получить в результате разделения общих систем (33) или (34). Заметим, что при движении ракеты строго в вертикальной плоскости такой подход не является приближенным, так как в этом случае все параметры бокового движения действительно остаются равными нулю. Но для бокового движения разделение вносит определенные погрешности, так как при

этом параметры продольного движения не могут не изменяться, чего уравнения бокового движения не учитывают. Очевидно, эти погрешности тем меньше, чем меньше изменение параметров продольного движения за время, в течение которого исследуется боковое движение.

Уравнения продольного движения можно получить из общей системы (33), полагая в ней все параметры бокового движения равными нулю, т.е. $\varphi \equiv 0$, $\varphi_c \equiv 0$, $\delta \equiv 0$, $\delta_c \equiv 0$, $\beta \equiv 0$, $\omega_{x_1} \equiv 0$, $\omega_{y_1} \equiv 0$, $z_3 \equiv 0$, $\delta_{x_1}^2 \equiv 0$, $\delta_{y_1}^2 \equiv 0$.

Если, кроме того, пренебречь кривизной земной поверхности, то будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= P \cos \alpha - Q - G \sin \theta; \\ m v \dot{\theta} &= P \sin \alpha + Y - G \cos \theta; \\ \mathcal{J}_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} &= M_{z_1} + M_{pz_1}; \\ \mathcal{J} &= \omega_{z_1}; \\ \dot{x}_z &= v \cos \theta; \\ \dot{y}_z &= v \sin \theta; \\ \theta &= \mathcal{J} - \alpha; \\ \delta_{z_1}^2 &= \delta_{z_1}^2(x_z, y_z, \mathcal{J}, \alpha, t). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Выше отмечалось, что боковое движение существует лишь совместно с продольным. Это объясняется тем, что в уравнения, описывающие изменение боковых параметров, всегда входят многие продольные параметры: v , \mathcal{J} , θ

α и др. Поэтому для исследования бокового движения надо предварительно определить все эти параметры путем решения уравнений продольного движения.

Систему уравнений, описывающих изолированное боковое движение, нетрудно получить из общей системы (33), если отбросить уравнения сил в проекциях на оси ox и oy и уравнение моментов в проекции на ось oz , и исключить уравнение управления по каналу тангажа. Тогда, полагая $\omega_{z_1} = 0$ (так как параметры бокового движения слабо зависят от ω_{z_1}) и пренебрегая кривизной земной поверхности, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned}
 1 \quad m v \cos \theta \dot{\psi}_c &= (P \sin \beta \cos \alpha - Z) \cos \gamma_c - \\
 &\quad - (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma_c ; \\
 2 \quad J_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} &= M_{x_1} + M_{px_1} ; \\
 3 \quad J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} &= M_{y_1} + M_{py_1} ; \\
 4 \quad \dot{\psi} &= \omega_{y_1} \frac{\cos \gamma}{\cos \gamma} ; \\
 5 \quad \dot{\gamma} &= \omega_{y_1} \sin \gamma ; \\
 6 \quad \dot{\gamma} &= \omega_{x_1} - \omega_{y_1} \operatorname{tg} \gamma \cos \gamma ; \\
 7 \quad \dot{x}_z &= v \cos \varphi_c ;
 \end{aligned} \right\} (37)$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad \dot{z}_z &= -v \cos \theta \sin \varphi_c ; \\
 9 \quad \sin \varphi_c &= \frac{1}{\cos \theta} (\sin \varphi \cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta + \\
 &\quad + \cos \varphi \sin \vartheta \sin \alpha \cos \beta + \sin \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \alpha \cos \beta - \\
 &\quad - \cos \varphi \cos \vartheta \sin \beta + \sin \varphi \sin \vartheta \sin \vartheta \sin \beta) ; \\
 10 \quad \sin \vartheta_c &= \frac{1}{\cos \theta} (\sin \vartheta \cos \alpha \sin \beta - \cos \vartheta \cos \vartheta \sin \alpha \sin \beta + \\
 &\quad + \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \beta) ; \\
 11 \quad \delta_{x_1} &= \delta_{x_1}(\dot{x}_z, \dot{z}_z, \vartheta, \varphi, \vartheta, \beta, t) ; \\
 12 \quad \delta_{y_1} &= \delta_{y_1}(\dot{x}_z, \dot{z}_z, \vartheta, \varphi, \vartheta, \beta, t) .
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

При малых углах α , β , φ , φ_c , ϑ , ϑ_c уравнения (9) и (10) можно упростить, если принять $\vartheta \approx \theta + \alpha \approx \theta$, $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = 1$, $\cos \varphi = 1$, $\cos \vartheta = 1$. Тогда

$$\left. \begin{aligned}
 \beta &\approx (\varphi - \varphi_c) \cos \theta ; \\
 \vartheta_c &\approx \vartheta + \beta \operatorname{tg} \theta .
 \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Частным случаем бокового движения является полет ракеты без крена ($\vartheta \equiv 0$) в плоскости, параллельной плоскости горизонта (курсовое движение, рис. I.10). В этом случае следует принять равными нулю угловую ско-

рость вращения ракеты относительно оси ox_1 (т.е. $\omega'_{x_1} \equiv 0$) и угловые отклонения (т.е. $\theta \equiv 0$, $\delta'_{x_1} \equiv 0$). Тогда

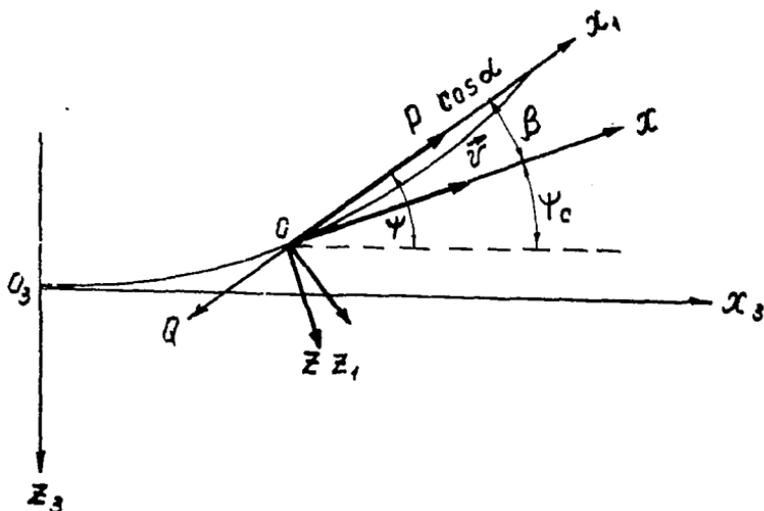


Рис. I. IO

система уравнений, описывающих курсовое движение ракеты, запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 m\dot{v} &= P \cos \alpha \cos \beta - Q; \\
 m v \dot{\psi}_c &= P \cos \alpha \sin \beta - Z; \\
 J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} &= M_{y_1} + M_{p y_1}; \\
 \delta_{y_1} &= \delta_{y_1}(x_3, z_3, \psi, \beta, t);
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega_{y_1} ; \\ \dot{x}_z &= v \cos \varphi_c ; \\ \dot{z}_z &= -v \sin \varphi_c ; \\ \varphi_c &= \varphi - \beta . \end{aligned} \right\}$$

§ 7. Уравнения движения центра масс ракеты

Обычно на значительной части траектории полет ракеты происходит с малыми углами и угловыми скоростями. Поэтому во многих случаях оказывается возможным рассматривать движение ракеты как движение управляемой материальной точки, не учитывая колебаний летательного аппарата относительно его центра масс. Такая постановка задачи позволяет сравнительно просто определить возможные траектории полета ракеты и ее основные летные характеристики.

Рассмотрим систему уравнений продольного движения (36). Если пренебречь угловой скоростью вращения ракеты вокруг поперечной оси ($\omega_{z_1} = 0$); то третье уравнение этой системы ($J_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} = M_{z_1} + M_{pz_1} = 0$, где

M_{z_1} - момент тангажа) будет выражать условие равновесия сил (балансировки) ракеты. Балансировочные зависимости используются на начальных этапах проектирования, когда многие характеристики ракеты либо неизвестны, либо известны весьма приблизительно. Это не позволяет рассчитывать траекторию управляемого полета путем интегрирования полной системы уравнений движения.

Сущность сбалансированного полета заключается в том, что в любой момент времени сумма моментов относительно центра масс ракеты равна нулю. Это возможно, если момент от управляющих органов равен по величине аэродинамическому моменту, а система управления работает идеально. Последнее допущение основано на пренебрежении переходными процессами углового движения ракеты, возникающими при отклонениях органов управления. Для анализа переходного процесса необходимо иметь характеристики системы управления. На начальных этапах проектирования этих характеристики обычно неизвестны.

Таким образом, при идеальной работе системы управления любому углу отклонения управляющего органа соответствует вполне определенный угол отклонения оси ракеты от вектора скорости.

Возвращаясь к третьему уравнению системы (36), вначале предположим, что реактивный момент отсутствует ($M_{pz_1} = 0$). Тогда это уравнение запишется так:

$$M_{z_1} = 0 \quad \text{или}$$

$$m_{z_1,0} + m_{z_1}^{\alpha} \alpha + m_{z_1}^{\omega_{z_1}} \frac{\omega_{z_1} L}{v} + m_{z_1}^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha} L}{v} + m_{z_1}^{\delta_{z_1}} \delta_{z_1} = 0, \quad (40)$$

где $m_{z_1,0}$ - коэффициент момента тангажа при $\alpha = \omega_{z_1} = \dot{\alpha} = \delta_{z_1} = 0$. Для симметричных ракет $m_{z_1,0} = 0$;

$m_{z_1}^{\alpha}, \dots, m_{z_1}^{\delta_{z_1}}$ - производные от коэффициента момента по соответствующим углам и угловым скоростям.

Но $\omega_{z_1} \approx 0$, $\dot{\alpha} \approx 0$, следовательно,

$$m_{z_1,0} + m_{z_1}^{\alpha} \alpha + m_{z_1}^{\delta_{z_1}} \delta_{z_1} = 0. \quad (41)$$

Отсюда легко найти угол отклонения руля высоты, необходимый для балансировки ракеты, совершающей полет с заданным углом атаки α :

$$\delta_{z_1, \delta \alpha, \eta}^{\delta} = \delta_{z_1, 0}^{\delta} - k \alpha, \quad (42)$$

где $k = \frac{m_{z_1}^{\alpha}}{m_{z_1}^{\delta_{z_1}}}$; $\delta_{z_1, 0}^{\delta} = -\frac{m_{z_1, 0}}{m_{z_1}^{\delta_{z_1}}}$ - угол отклонения руля высоты при $\alpha = 0$.

Для осесимметричных ракет $m_{z_1, 0} = 0$, т.е.

$$\delta_{z_1, \delta \alpha, \eta}^{\delta} = -k \alpha. \quad (43)$$

Графики зависимости $\delta_{z_1}^{\delta} = \delta_{z_1}^{\delta}(m_{z_1}^{\delta_{z_1}}, \alpha)$ приведены на рис. I. II.

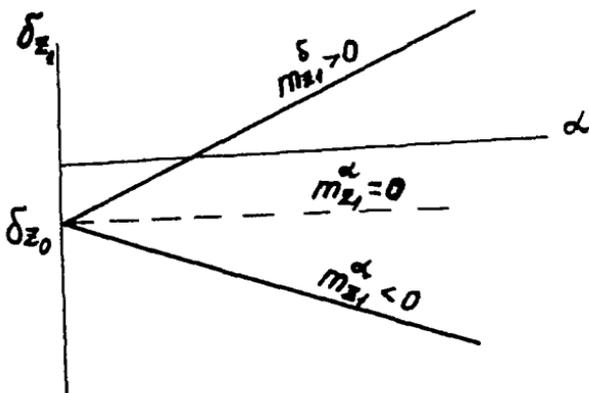


Рис. I. II

Балансировочные кривые показывают, каким должен быть угол отклонения руля высоты при заданном угле атаки и при $m_{z_1}^\alpha < 0$.

Аналогичные зависимости имеют место и при боковом движении ракеты. Так, при курсовом движении, т.е. при полете ракеты в горизонтальной плоскости без крена, будем иметь

$$m_{y_1}^\beta \beta + m_{y_1}^{\bar{\omega}_{y_1}} \bar{\omega}_{y_1} + m_{y_1}^{\delta_{y_1}} \delta_{y_1} = 0. \quad (44)$$

Но $\bar{\omega}_{y_1} \approx 0$, следовательно,

$$\delta_{y_1}^{\text{бал}} = -\frac{m_{y_1}^\beta}{m_{y_1}^{\delta_{y_1}}} \beta. \quad (45)$$

Балансировочные зависимости могут выражаться и в функции других параметров движения, например в функции коэффициента подъемной силы $\delta_{z_1}^{\beta} = \delta_{z_1}^{\beta}(c_y)$. Поскольку

$$c_y = c_{y_0} + c_y^\alpha \alpha, \quad \text{т.е.} \quad \alpha = \frac{c_y - c_{y_0}}{c_y^\alpha},$$

то

$$\delta_{z_1}^{\beta} = \delta_{z_1,0}^{\beta} - \frac{m_{z_1}^\alpha}{m_{z_1}^{\delta_{z_1}^\alpha}} \frac{c_y - c_{y_0}}{c_y^\alpha} = \delta_{z_1}^{\beta*} - \frac{m_{z_1}^\alpha}{c_y^\alpha m_{z_1}^{\delta_{z_1}^\alpha}} c_y, \quad (46)$$

где

$$\delta_{z_1}^* = \delta_{z_1,0} + \frac{m_{z_1}^\alpha}{m_{z_1} \delta_{z_1}} \frac{c_{y_0}}{c_{y_1}^\alpha} .$$

Таким образом, балансирующие зависимости позволяют определить величины углов отклонения органов управления ракеты в зависимости от каких-либо параметров движения; эти соотношения находятся из условия равенства нулю соответствующих моментов (тангажа, рыскания и крена).

Возвращаясь к продольному движению и полагая, что закон управления ракетой имеет вид

$$\delta_{z_1}^* = k_{\delta} (\mathcal{J} - \mathcal{J}_{np}) , \quad (47)$$

получим следующую систему уравнений, описывающих движение центра масс ракеты в вертикальной плоскости:

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= P \cos \alpha - Q - G \sin \theta ; \\ m v \dot{\theta} &= P \sin \alpha + Y - G \cos \theta ; \\ \dot{x}_3 &= v \cos \theta ; \\ \dot{y}_3 &= v \sin \theta ; \\ \mathcal{J} &= \theta + \alpha ; \\ \alpha &= - \frac{m_{z_1,0} + m_{z_1} \delta_{z_1}^* k_{\delta} (\mathcal{J} - \mathcal{J}_{np})}{m_{z_1}^\alpha} . \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Если управление полетом ракеты осуществляется за счет изменения вектора тяги основного или управляющих (поворотных) двигателей, то уравнение балансировки запишется так:

$$M_{z_1} + M_{\rho z_1} = M_{z_1}^{\alpha} \alpha + M_{\rho z_1}^{\delta z_1} \delta z_1 = 0,$$

т.е. $\delta z_1 = -k \alpha$, где $k = + \frac{M_{z_1}^{\alpha}}{M_{\rho z_1}^{\delta z_1}}$,

или, используя закон управления (I.47) и уравнение $\delta z_1 = \theta + \alpha$, получим

$$\alpha = \frac{\delta z_1 - \theta}{1 + \frac{k}{k_{\delta z_1}}} \quad (49)$$

Выражение (49) заменяет два последние уравнения в системе (48). Кроме того, в первые два уравнения этой системы необходимо ввести составляющие управляющей силы Q_{1p} и Y_{1p} (рис. I.12). Тогда с учетом кривизны земной поверхности будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} m \dot{v} &= (P - Q_{1p}) \cos \alpha - Q - G \left(\sin \theta + \frac{x_3}{z} \cos \theta \right) - \\ &\quad - Y_{1p} \sin \alpha; \\ m v \dot{\theta} &= (P - Q_{1p}) \sin \alpha + Y - G \left(\cos \theta - \frac{x_3}{z} \sin \theta \right) + Y_{1p} \cos \alpha; \end{aligned} \right\} (50)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_3 &= v \cos \theta ; \\
 \dot{y}_3 &= v \sin \theta ; \\
 r &= \sqrt{x_3^2 + (y_3 + R)^2} \\
 \alpha &= \frac{\vartheta_{np} - \theta}{1 + \frac{k}{k_g}} .
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

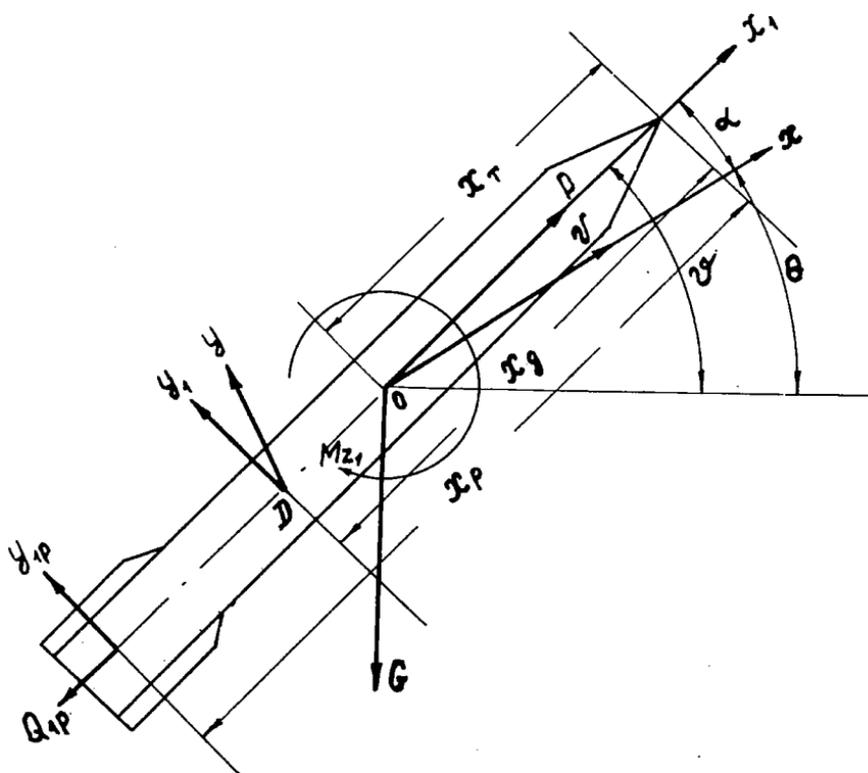


Рис. I. I2

Но из условия равновесия ракеты имеем (рис. I.12)

$$M_{z_1} + M_{pz_1} = -Y_{1p}(x_p - x_T) - Y_1(x_g - x_T) = 0,$$

т.е.

$$Y_{1p} = -Y_1 \frac{x_g - x_T}{x_p - x_T} \alpha,$$

где

$$Y_1^\alpha = c_{y_1}^\alpha \frac{\rho v^2}{2} S.$$

Подставляя выражения (51) во второе уравнение системы (50) и из-за малости угла атаки принимая $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$, $Y_{1p} \sin \alpha \approx 0$, окончательно получим:

$$m\dot{v} = P - Q_{1p} - Q - G \left(\sin \theta + \frac{x_z}{z} \cos \theta \right);$$

$$m v \dot{\theta} = \left(P - Q_{1p} + Y_1^\alpha \frac{x_p - x_g}{x_p - x_T} \right) \alpha -$$

$$- G \left(\cos \theta - \frac{x_z}{z} \sin \theta \right);$$

$$\dot{x}_z = v \cos \theta;$$

$$\dot{y}_z = v \sin \theta;$$

$$z = \sqrt{x_z^2 + (R + y_z)^2}$$

$$\alpha = \frac{\vartheta_{np} - \theta}{1 + \frac{k}{k_\theta}}.$$

Система уравнений, описывающих движение центра масс ракеты в вертикальной плоскости, еще больше упростится,

если предположить, что полет происходит при нулевом угле атаки (т.е. $\alpha = 0$ и $\theta = \mathcal{J}_{np}$), и не учитывать кривизну земной поверхности. В этом случае отпадает необходимость во втором уравнении системы (52). Тогда, пренебрегая членом $G \frac{x_z}{r} \cos \theta$, можем записать:

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= P - Q_{1p} - Q - G \sin \theta; \\ \dot{x}_z &= v \cos \theta; \\ \dot{y}_z &= v \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Система (53) часто используется при проектировочных расчетах баллистических ракет на начальных этапах их разработки.

Глава II

СВОБОДНЫЙ ПОЛЕТ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ (ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

§ I. Уравнения движения

Движение баллистической ракеты или ее боевой части на больших высотах ($h \geq 80$ км) происходит под действием единственной силы - силы тяжести. Если считать Землю шаром, а поле силы тяжести центральным, то сила тяжести во всех точках траектории будет направлена точно к центру Земли. В этом случае сила притяжения ракеты к Земле определяется по закону всемирного тяготения:

$$F = \frac{\mathcal{H} m}{r^2} = \frac{g_{z0} R^2 m}{r^2}, \quad (I)$$

где

$$\mathcal{H} = \mu M = 3,9862 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2;$$

μ - гравитационная постоянная;
 M и m - масса Земли и ракеты;

g_{z0} - ускорение силы земного притяжения у поверхности Земли;

Составим уравнения движения ракеты с помощью уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (3)$$

принимая полярные координаты за обобщенные ($q_1 = z$; $q_2 = \beta$).

Обобщенные силы будут соответственно равны:

$$Q_z = -m \frac{\mathcal{H}}{z^2}; \quad Q_\beta = 0,$$

а кинетическая энергия тела массы m записывается в обобщенных координатах в виде

$$T = \frac{m}{2} (\dot{z}^2 + z^2 \dot{\beta}^2).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = mz\dot{\beta}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = mz^2\dot{\beta}; \quad \frac{\partial T}{\partial \beta} = 0.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), получим уравнения движения ракеты на свободном участке полета (без учета вращения Земли):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} - z\dot{\beta}^2 &= -\frac{\mathcal{H}}{z^2}; \\ \frac{d}{dt} (z^2\dot{\beta}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Интегрируя эти уравнения, можно по заданным параметрам конца активного участка (v_A, θ_A, x_A, y_A) определить текущие значения параметров движения ракеты (v, θ, t и др.) и получить уравнение траектории ее свободного полета. В частности, из второго уравнения системы (4) имеем

$$z^2 \dot{\beta} = c_1. \quad (5)$$

Но $z \dot{\beta} = v \cos \theta$, следовательно,

$$c_1 = v z \cos \theta = v_A z_A \cos \theta_A. \quad (6)$$

Первое уравнение системы (4) с учетом выражения (5) запишется следующим образом:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} - \frac{c_1^2}{z^3} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{z^2}$$

или, переходя от переменной t к переменной z

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{z}^2)}{dz},$$

получим

$$d(\dot{z}^2) - \frac{2c_1^2}{z^3} dz = -\frac{2\partial \mathcal{H}}{z^2} dz,$$

откуда

$$\dot{z}^2 + \frac{c_1^2}{z^2} = \frac{2\partial \mathcal{H}}{z} + c_2.$$

Подставляя c_1 из уравнения (5), будем иметь

$$\dot{z}^2 + z^2 \dot{\beta}^2 - \frac{2\partial \mathcal{H}}{z} = c_2. \quad (7)$$

Далее, дифференцируя уравнения (2)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_z &= \dot{z} \sin \beta + z \dot{\beta} \cos \beta ; \\ \dot{y}_z &= \dot{z} \cos \beta - z \dot{\beta} \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

и имея в виду, что $v^2 = \dot{x}_z^2 + \dot{y}_z^2 = \dot{z}^2 + z^2 \dot{\beta}^2$, запишем

$$v^2 \frac{2d\mathcal{L}}{z} = v_A^2 \frac{2d\mathcal{L}}{z_A} = c_2.$$

Следовательно, текущая скорость полета ракеты на эллиптическом участке траектории связана с исходными параметрами движения v_A и z_A такой зависимостью:

$$v = v_A \sqrt{1 - \frac{2}{v_A} \left(1 - \frac{z_A}{z}\right)}, \quad (8)$$

где

$$v_A = z_A \frac{v_A^2}{\mathcal{L}} = \frac{z_A v_A^2}{g z_0 R^2}. \quad (9)$$

Подставляя скорость v из формулы (8) в выражение (6), получим

$$\cos \theta = \frac{z_A \cos \theta_A}{z \sqrt{1 - \frac{2}{v_A} \left(1 - \frac{z_A}{z}\right)}}. \quad (10)$$

§ 2. Уравнение траектории

Уравнение траектории ракеты в центральном поле тяготения получим из уравнений движения (4), исключая из них параметр времени. Подставляя β из формулы (5) в выражение (7) и имея в виду, что

$$\dot{z} = \frac{dz}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \frac{c_1}{z^2} \frac{dz}{d\beta},$$

получим

$$\frac{c_1^2}{z^4} \left(\frac{dz}{d\beta} \right)^2 + \frac{c_1^2}{z^2} - \frac{2\mathcal{E}}{z} = c_2$$

или

$$\frac{c_1}{z^2} \frac{dz}{d\beta} = \sqrt{c_2 + \frac{2\mathcal{E}}{z} - \frac{c_1^2}{z^2}},$$

откуда

$$d\beta = \pm \frac{\frac{c_1}{z^2}}{\sqrt{c_2 + \frac{2\mathcal{E}}{z} - \frac{c_1^2}{z^2}}} \cdot \quad (II)$$

Произведя интегрирование, получим уравнение траектории полета ракеты, являющееся уравнением конического сечения, записанным в полярных координатах:

$$z = \frac{p}{1 - e \cos(\beta_B - \beta)}, \quad (I2)$$

где

$$p = \frac{c_1^2}{\mathcal{E}} = v_A z_A \cos^2 \theta_A; \quad (I3)$$

$$e = \sqrt{1 + c_2 \frac{c_1}{\mathcal{E}^2}} = \sqrt{1 - (2 - v_A) v_A \cos^2 \theta_A}; \quad (I4)$$

β_B - центральный угол, определяющий положение вершины траектории относительно начального радиуса-вектора \vec{z}_A (рис. 2.4);

β - угол, определяющий положение ракеты в любой момент времени относительно начального радиуса-вектора \vec{z}_A ;

p - параметр сечения ;

e - эксцентриситет сечения.

Зависимости (I2) - (I4) позволяют исследовать космические траектории и скорости движения ракет. Поскольку (I2) является уравнением конического сечения, то траекторией полета может быть: окружность (при $e=0$), эллипс (при $0 < e < 1$), парабола (при $e=1$) и гипербола (при $e > 1$). Рассмотрим эти возможные случаи. Предварительно заметим, что при $\theta_A=0$ формула (I4) приводится к следующему виду:

$$v^2 = \frac{\mathcal{H}^2}{z} (1 \pm e). \quad (I5)$$

1. При $e=0$, $v_A=1$. Уравнение эллиптической траектории (I2) переходит в уравнение окружности в полярных координатах ($r=p$). Скорость $v_I = \sqrt{\frac{\mathcal{H}^2}{z}}$ называется круговой или первой космической скоростью, достаточной для вывода на круговую орбиту искусственного спутника Земли. При $r=R$ эта скорость равна $v_I = 7,906$ км/сек. С увеличением высоты конца активного участка скорость v_I уменьшается.

2. При $0 < e < 1$; $v_A < 2$ имеют место эллиптические траектории, которые либо пересекаются с Землей - при $v^2 = \frac{\mathcal{H}^2}{z} (1-e)$, либо не пересекаются - при $v^2 = \frac{\mathcal{H}^2}{z} (1+e)$.

3. При $e=1$, $v_A=2$ траектория является параболой (рис.2.2). С энергетической точки зрения, при придании ракете параболической (второй космической) скорости она преодолит силу земного притяжения. Из уравнения (15) $v_{II} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{r}} = v_I \sqrt{2}$; при $r=R$, $v_{II} = 11,19$ км/сек.

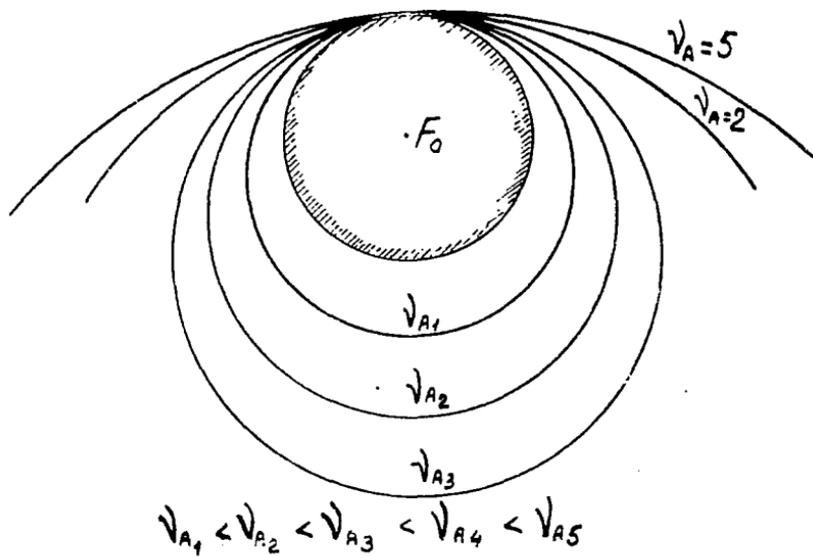


Рис. 2.2

4. При $e>1$, $v_A>2$ траектория является гиперболой. При достижении соответствующей (третьей космической) скорости ($v_{III} = 16,7$ км/сек) ракета способна выйти за пределы солнечной системы.

§ 3. Некоторые практические приложения эллиптической теории

В рамках эллиптической теории могут быть получены приближенные решения ряда важных для практики задач. К их числу относятся:

1) определение дальности пассивного участка x_n по заданным параметрам конца активного участка траектории (v_A, θ_A, y_A) ;

2) определение максимальной дальности $x_{n \max}$ по известным скорости v_A и высоте y_A ;

3) определение требуемой скорости v_A по заданным полной дальности пассивного участка x_n , высоте y_A и углу θ_A ;

4) определение параметров движения баллистической ракеты в любой точке эллиптической траектории и др.

Прежде чем перейти к рассмотрению перечисленных задач, заметим, что приведенные в предыдущей главе уравнения движения ракеты в ряде случаев записывались без учета кривизны земной поверхности, что вносит определенные погрешности в значения параметров θ_A , y_A , x_A . Уточненные значения этих параметров могут быть найдены по следующим зависимостям (рис. 2.3):

$$\left. \begin{aligned} x_A &= R \delta ; \\ y_A &= \sqrt{x_\alpha^2 + (R + y_\alpha)^2} - R ; \\ \theta_A &= \theta_\alpha + \delta ; \end{aligned} \right\} (I6)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta = \frac{x_a}{R + y_a} \cdot \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

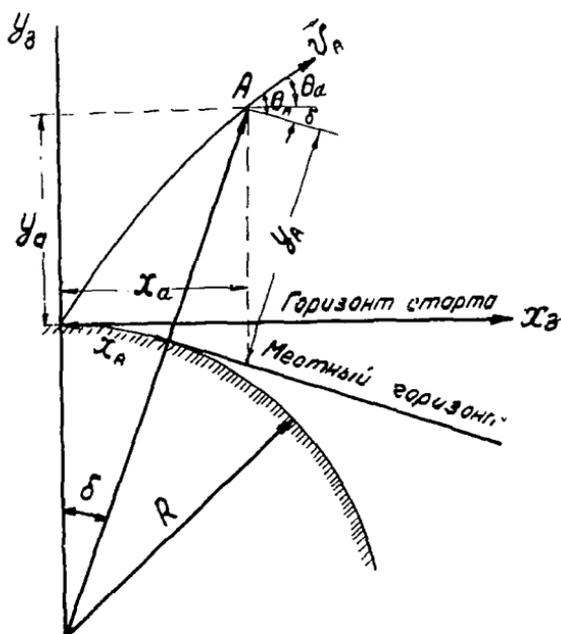


Рис. 2.3

I. Дальность полета баллистической ракеты

Полная дальность полета баллистической ракеты X измеряется длиной дуги O_2 (рис. 2.4), отсчитываемой по земной поверхности, и может быть представлена в виде суммы трех составляющих:

$$X = x_A + x_{эл} + x_K,$$

(I7)

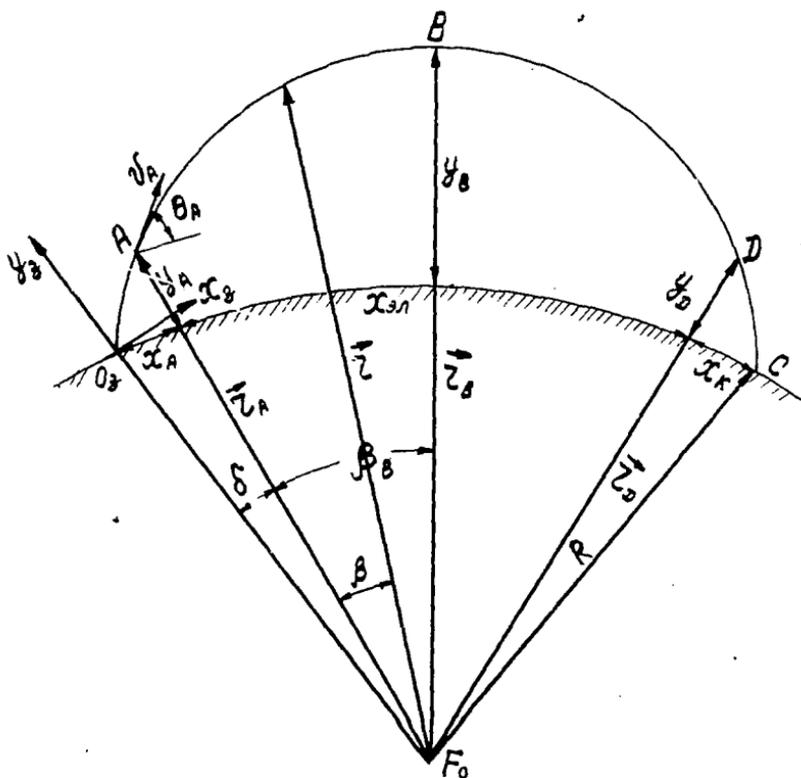


Рис.2.4

где x_A - протяженность активного участка траектории;
 $x_{эл}$ - протяженность эллиптического участка траектории. Будем считать, что эллиптический участок заканчивается на высоте
 б4

y_D - равной высоте конца активного участка, т.е.
 $y_D = y_A$ или $z_D = z_A$;

x_K - протяженность конечного участка траектории. Поскольку полет ракеты на этом участке происходит в плотных слоях атмосферы, то точный расчет величины x_K (так же как и x_A) требует решения пространственной системы уравнений движения [например, системы (I.35)].

Дальность полета ракеты на эллиптическом участке характеризуется центральным углом, образованным радиусами z_A и z_D . Вследствие симметричности траектории для определения $x_{эА}$ достаточно найти половину этого угла - угол β_A . Тогда

$$x_{эА} = 2R\beta_A. \quad (I8)$$

Выразим угол β_A через параметры конца активного участка ν_A , θ_A , y_A . Используя уравнение траектории (I2) и подставляя в него координаты точки А (z_A , $\beta_A=0$), будем иметь:

$$z_A = \frac{p}{1 - e \cos \beta_A} \quad (I9)$$

или, с учетом выражения (I3):

$$\cos \beta_A = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{p}{z_A} \right) = \frac{1}{e} (1 - \nu_A \cos^2 \theta_A).$$

Далее,

$$\sin \beta_B = \sqrt{1 - \cos^2 \beta_B} = \frac{1}{e} \sqrt{e^2 - (1 - \nu_A \cos^2 \theta_A)^2}.$$

Но $e^2 = 1 - 2\nu_A \cos^2 \theta_A + \nu_A^2 \cos^4 \theta_A$, поэтому

$$\sin \beta_B = \frac{1}{e} \sqrt{1 - 2\nu_A \cos^2 \theta_A + \nu_A^2 \cos^4 \theta_A - (1 - 2\nu_A \cos^2 \theta_A + \nu_A^2 \cos^4 \theta_A)},$$

т.е.

$$\sin \beta_B = \frac{\nu_A}{e} \sin \theta_A \cos \theta_A. \quad (20)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \beta_B = \frac{\nu_A \sin \theta_A \cos \theta_A}{1 - \nu_A \cos^2 \theta_A}$$

или

$$\operatorname{tg} \beta_B = \frac{\nu_A \operatorname{tg} \theta_A}{\operatorname{tg}^2 \theta_A + (1 - \nu_A)}. \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) в формулу (18), получим

$$x_{ЭЛ} = 2R\alpha z c \operatorname{tg} \frac{\nu_A \operatorname{tg} \theta_A}{\operatorname{tg}^2 \theta_A + (1 - \nu_A)}. \quad (22)$$

Если не учитывать действия аэродинамических сил и моментов на конечном участке траектории, то весь пассивный участок можно принять за эллиптический. Это не внесет большой ошибки в определение дальности x_n

$$x_n = x_{ЭЛ} + x_k \left(\Delta \bar{x}_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} < 1\% \right),$$

так как сопротивление воздуха на атмосферном участке слабо отражается на эллиптической форме траектории. Подобное допущение часто используется при проектировочных расчетах баллистических ракет. Однако в исследованиях, связанных с определением скорости и времени полета ракеты на конечном участке, неучет наличия атмосферы приводит к значительным погрешностям.

При принятом допущении полная дальность полета баллистической ракеты на пассивном участке будет равна

$$x_{r2} = 2R\beta_c. \quad (23)$$

Выражая угол β_c с помощью уравнения траектории (I2) через параметры конца активного участка v_A , θ_A , y_A , можно прийти к следующей схеме расчета дальности x_{r2} [2]:

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \frac{v_A^2 (R + y_A)}{R} ; \\ \alpha &= 2R(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_A) - (2R + y_A)v_A ; \\ \beta &= v_A R \operatorname{tg} \theta_A ; \\ c &= v_A y_A ; \\ \operatorname{tg} \frac{\beta_c}{2} &= \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha c}}{\alpha} ; \\ x_{r2} &= R\beta_c . \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

2. Максимальная дальность полета

Из формул (2I) и (9) видно, что эллиптическая дальность определяется значениями параметров v_A , z_A и θ_A . Если v_A и z_A заданы, то, дифференцируя выражение (2I) по $\text{tg } \theta_A$ и приравняв производную нулю, нетрудно найти оптимальное значение угла θ_A , отвечающее наибольшей эллиптической дальности:

$$\text{tg } \theta_{Aopt} = \sqrt{1 - v_A} \quad (25)$$

Подставляя это выражение в формулу (20), получим

$$x_{эл max} = 2R \arctg \frac{v_A}{\sqrt{1 - v_A}} \quad (26)$$

Если пренебречь высотой активного участка, т.е. принять $z_A = R$ и $v_A = \frac{v_A^2}{g_{zo} R}$, то последняя формула может быть приведена к следующему виду:

$$x_{эл max} = 2R \arctg \frac{v_A^2}{15,82 \sqrt{62,57 - v_A^2}} \quad (27)$$

где v_A - скорость, км/сек.

Аналогичным образом решается задача по отысканию приближенного значения оптимального угла θ_{Aopt} , обеспечивающего максимальную дальность всего пассивного участка. В этом случае имеем

$$\operatorname{tg} \theta_{Aopt} = \sqrt{\frac{v_A}{2} \frac{[2R - (2R + y_A)v_A]}{v_A R + 2y_A}} \quad (28)$$

и

$$x_{nmax} = 2R \operatorname{arctg} \frac{v_A}{2 \operatorname{tg} \theta_{Aopt}} \quad (29)$$

3. Определение требуемой скорости v_A

Если заданы дальность x_n и высота y_A , то, используя уравнение траектории свободного полета ракеты (12), можно найти такой оптимальный угол θ_{Aopt} , при котором для достижения заданной дальности x_n требуется наименьшая скорость v_{Amin} , или, что то же самое, минимальная величина параметра $v_A = \frac{v_A^2 z_A}{g}$.

Данная задача сводится к исследованию на экстремум зависимости $v_A = f(\theta_A)$. Опуская промежуточные выкладки (см., например, [2]), приведем окончательные расчетные выражения:

$$\theta_{Aopt} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{R \sin \frac{x_n}{R}}{(R + y_A) - R \cos \frac{x_n}{R}} ; \quad (30)$$

$$v_{Amin} = \sqrt{\frac{2\alpha}{R+y_A} \operatorname{tg} \frac{x_n}{2R} \operatorname{tg} \Theta_{Aopt}} \quad (31)$$

Полагая $y_A = 0$, будем иметь:

$$\Theta_{Aopt} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\pi} - \frac{x_n}{R} \right); \quad (32)$$

$$v_{Amin} = 11,19 \sqrt{\operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} - \frac{x_n}{R} \right) \operatorname{tg} \frac{x_n}{2R}} \text{ км/сек.} \quad (33)$$

4. Определение высоты траектории и времени полета ракеты

Высота полета ракеты над поверхностью Земли в любой точке траектории легко определяется с помощью формулы (12):

$$y = z - R = \frac{p}{1 - e \cos(\beta_B - \beta)} - R. \quad (34)$$

Для вершины траектории ($\beta = \beta_B$) будем иметь

$$y_B = y_{max} = \frac{p}{1 - e} - R. \quad (35)$$

Время полета ракеты до любой точки эллиптической траектории определяется из уравнения

$$z^2 \frac{d\beta}{dt} = c_1,$$

откуда

$$t = \frac{1}{c_1} \int_0^\beta z^2 d\beta.$$

Окончательная расчетная зависимость для времени t имеет следующий вид:

$$t = \sqrt{\left(\frac{R+y_A}{2-\nu_A}\right)^3} \frac{1}{\mathcal{H}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha z c \sin \frac{1-\nu_A}{e} + \sqrt{\nu_A(2-\nu_A)} \sin \theta_A \right) \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha z c \sin \frac{1-\nu}{e} + \sqrt{\nu(2-\nu)} \sin \theta \right) \right],$$

где

$$\nu = 2 - (2 - \nu_A) \frac{R+y}{R+y_A}; \quad \mathcal{H} = 3,9862 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{сек}^2.$$

В формуле (36) знак минус берется для точек, расположенных на восходящей ветви траектории, а знак плюс — для точек, расположенных на нисходящей ветви траектории.

Эллиптическая теория является приближенным исследованием полета на основе рассмотрения идеального движения баллистической ракеты относительно неподвижной сферической Земли. Такой подход обычно оправдан при проведении проектировочных расчетов, но совершенно недопустим, например, при оценке точности стрельбы, при составлении таблиц стрельбы и т.п. В этих случаях

необходимо учитывать не только действительную форму Земли и ее вращение, но и влияние на траекторию свободного полета возможного разброса значений параметров движения ракеты в конце активного участка. Кроме того, надо иметь в виду, что на характер реальной траектории могут оказывать влияние погрешности в определении геофизических постоянных (масса Земли, скорость ее вращения и др.), а также нецентральность гравитационного поля Земли, наличие притяжения других планет и т.д.

Глава III

СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, МАНЕВРЕННОСТЬ И ПЕРЕГРУЗКИ РАКЕТ

§ I. Статическая устойчивость ракеты

Понятие об устойчивости движения является одним из наиболее важных в теории полета ракет. Некоторое представление об устойчивости можно получить, рассматривая полет ракеты с неподвижными органами управления при малых отклонениях параметров движения от их значений в равновесном состоянии, т.е. когда сумма моментов сил, действующих на ракету, равна нулю. Характер равновесного состояния ракеты с закрепленными рулями определяется в значительной мере наличием или отсутствием статической устойчивости.

Ракета называется статически устойчивой, если момент аэродинамических сил, возникающий при угловом отклонении от положения равновесия, стремится вернуть ракету в исходное состояние. В противном случае ракета является статически неустойчивой. Устойчивость ракеты может рассматриваться относительно трех координатных осей: продольной, вертикальной и поперечной. В соответствии с этим различают продольную, путевую и поперечную статическую устойчивость. Ввиду того, что поперечная и путевая устойчивость взаимосвязаны

(например, наличие крена вызывает поворот ракеты относительно вертикальной оси), их иногда объединяют в единую боковую устойчивость.

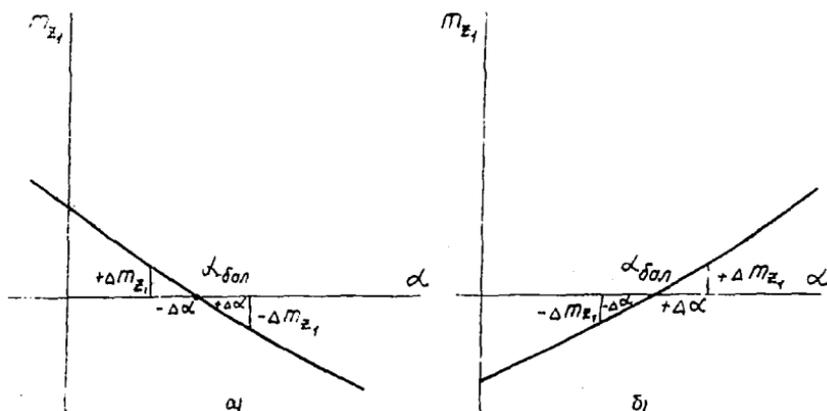


Рис.3.1

Наличие или отсутствие статической устойчивости определяется характером моментных характеристик (рис.3.1). В случае а) увеличение или уменьшение угла атаки $\Delta\alpha$ по сравнению с балансировочным α_{bal} приводит к возникновению восстанавливающего аэродинамического момента, стремящегося вернуть ракету в состояние равновесия. При этом

$$m_{z_1}^{\alpha} = \frac{\partial m_{z_1}}{\partial \alpha} < 0. \quad (I)$$

В случае б), когда $m_{z_1}^{\alpha} > 0$, возникает опрокидывающий аэродинамический момент, стремящийся отклонить

ракеты от равновесного состояния, а при $m_{z_1}^\alpha = 0$ ракета является нейтральной в отношении статической устойчивости.

Производная $(m_{z_1}^\alpha)_{\alpha} = \alpha \delta_{\alpha, n}$ от которой зависит абсолютная величина восстанавливающего или опрокидывающего момента, называется степенью продольной статической устойчивости. Величина коэффициента $m_{z_1}^\alpha$, а следовательно, и степень статической устойчивости, зависят от взаимного положения центра давления и центра масс ракеты. Покажем это на примере баллистической ракеты (рис. 3.2).

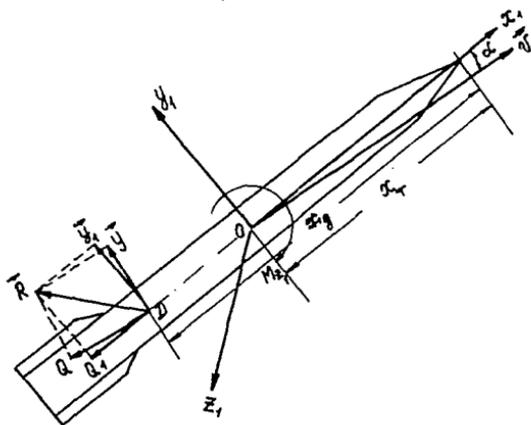


Рис. 3.2

Очевидно, что

$$M_{z_1} = m_{z_1, p} q S L = -Y_1 (x_D - x_T),$$

или

$$m_{z_1} \frac{\rho v^2}{2} S L = -c_{y_1} \frac{\rho v^2}{2} S (x_g - x_T),$$

откуда

$$m_{z_1} = -c_{y_1} \frac{x_g - x_T}{L}, \quad (2)$$

где L - длина ракеты.

Но для осесимметричных ракет $c_{y_1} \approx c_{y_1}^\alpha$; $m_{z_1} = m_{z_1}^\alpha$.

Следовательно,

$$m_{z_1}^\alpha = -c_{y_1}^\alpha \frac{x_g - x_T}{L}. \quad (3)$$

Наряду с коэффициентом $m_{z_1}^\alpha$, для характеристики

статической устойчивости баллистической ракеты в различных точках траектории используется динамический коэффициент $c_{\beta\alpha}$, равный (см. гл. IV)

$$c_{\beta\alpha} = -\frac{M_{z_1}^\alpha}{J_{z_1}} = -m_{z_1}^\alpha \frac{q S L}{J_{z_1}} = c_{y_1}^\alpha \frac{x_g - x_T}{J_{z_1}} \frac{\rho v^2}{2} S. \quad (4)$$

Этот коэффициент представляет собой приращение углового ускорения ракеты при изменении угла атаки на единицу. Если ракета статически устойчива, то $c_{\beta\alpha} > 0$ а если неустойчива, то $c_{\beta\alpha} < 0$; для нейтральной ракеты $c_{\beta\alpha} = 0$. Величина коэффициента $c_{\beta\alpha}$ существенно

меняется за время полета баллистической ракеты, причем $|c_{y\alpha}|_{max}$ имеет место в районе максимальных значений скоростного напора $q = \frac{\rho v^2}{2}$. Заметим, что при отсутствии стабилизаторов $x_g < x_T$, т.е. неоперенная баллистическая ракета всегда статически неустойчива.

Для крылатой ракеты можно получить зависимость, аналогичную выражению (3):

$$m_{z_1}^{\alpha} = -c_{y_1}^{\alpha} \frac{x_F - x_T}{b_A}, \quad (5)$$

где b_A - средняя аэродинамическая хорда крыла;

x_F - координата фокуса ракеты.

Напомним, что фокусом называется точка приложения той части подъемной силы, которая обусловлена наличием угла атаки (γ^{α}). В общем случае фокус не совпадает с центром давления, являющимся точкой приложения всей подъемной силы. Только в случае полной симметрии ракеты и при нулевых углах отклонения органов управления координаты x_g и x_F совпадают. Характерно также, что если координата центра давления зависит от углов α, β и др., то координата x_F от них не зависит. Величина x_F может быть найдена по формуле

$$x_F = \frac{\sum Y_j^{\alpha} x_{dj}}{Y^{\alpha}},$$

где Y_j - подъемная сила, создаваемая той или иной частью ракеты;

x_{dj} - координата точки приложения этой силы.

Таким образом, условие статической устойчивости крылатой ракеты заключается в том, что ее фокус должен находиться за центром масс, чему и соответствует неравенство $m_{z_1}^{\alpha} < 0$.

Следует иметь в виду, что в полете центр масс смещается из-за выгорания топлива. Это может привести к тому, что ракета станет статически неустойчивой или будет обладать малым запасом устойчивости. С другой стороны, слишком большая степень статической устойчивости отрицательно отражается на управляемости ракеты, т.е. на ее способности реагировать на отклонения органов управления путем изменения параметров движения (ν , α , β и др.).

Боковая статическая устойчивость также определяется характером соответствующих моментных характеристик ракеты. Запишем выражения для стабилизирующих моментов рыскания и крена:

$$M_{y,cm} = m_{y_1}^{\beta} \beta q S L ;$$

$$M_{x,cm} = m_{x_1}^{\beta} \beta q S L ,$$

причем для осесимметричной ракеты $m_{y_1}^{\beta} = m_{x_1}^{\beta}$, а если центр масс ракеты лежит на ее продольной оси, то $m_{x_1}^{\beta} = 0$.

Условия боковой статической устойчивости записываются в таком виде:

$m_{y_1}^\beta < 0$ - условие путевой устойчивости;

$m_{x_1}^\beta < 0$ - условие поперечной устойчивости.

Следует подчеркнуть, что понятие статической устойчивости нельзя отождествлять с понятием устойчивости движения ракеты, так как, во-первых, наличие статической устойчивости свидетельствует лишь о том, что в данный момент времени на ракету действуют силы, стремящиеся вернуть ее в положение равновесия. Однако это не исключает возможности колебаний ракеты относительно положения равновесия, причем амплитуда колебаний может с течением времени увеличиваться, т.е. статически устойчивая ракета может быть динамически неустойчивой. Во-вторых, статическая устойчивость является характеристикой ракеты с закрепленными органами управления. Наличие же управления движением коренным образом изменяет динамические свойства ракеты. Благодаря системе управления ракета, даже статически неустойчивая, может совершать движение, близкое к заданному.

§ 2. Маневренность и перегрузки ракет

П о д м а н е в р е н н о с т ь ю ракеты понимают быстроту изменения ее скорости полета по величине и направлению. Понятие маневренности вводится в теорию движения ракет для сравнения и оценки эффективности органов управления, а также способности ракеты выполнять те или иные маневры в полете.

Маневренность ракеты оценивается с помощью п е р е г р у з о к. Перегрузка - величина векторная (\vec{n}).

Под вектором перегрузки понимают отношение равнодействующей всех аэродинамических и газодинамических сил, действующих на ракету, к силе веса, т.е.

$$\vec{n} = \frac{\vec{R} + \vec{R}_r}{G}, \quad (6)$$

где \vec{R} - равнодействующая всех аэродинамических сил;

\vec{R}_r - равнодействующая всех газодинамических сил, включая силу тяги.

При анализе управляемого полета ракеты вектор перегрузки определяют его проекциями на оси какой-либо системы координат. В соответствии с этим различают продольные (n_{x_1} , n_x) и нормальные (поперечные n_{y_1} , n_y и боковые n_{z_1} , n_z) перегрузки. Продольная перегрузка характеризует изменение скорости по величине, а нормальные - изменение направления вектора скорости (т.е. маневр скоростью).

Выражения для перегрузок в проекциях на оси скоростной системы координат легко получить из рассмотрения уравнений движения ракет (I.33) (при $\gamma_c = 0$, $z = \infty$):

$$\left. \begin{aligned} n_x &\approx \frac{P \cos \alpha - Q}{G} \approx \frac{P - Q}{G}; \\ n_y &\approx \frac{P \sin \alpha + Y}{G} \approx \frac{P + Y^\alpha}{G} \alpha; \\ n_z &= \frac{-P \cos \alpha \sin \beta + Z}{G} \approx \frac{(Z^\beta - P)}{G} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В прочностных расчетах ракеты обычно используются проекции вектора перегрузок на оси связанной системы. Используя матрицу А преобразования скоростной системы в связанную (I.8), можем записать:

$$\left. \begin{aligned} n_{x_1} &= n_x \cos \alpha \cos \beta + n_y \sin \alpha \cos \beta - n_z \cos \alpha \sin \beta \approx n_x + n_y \alpha - n_z \beta; \\ n_{y_1} &= -n_x \sin \alpha \cos \beta + n_y \cos \alpha + n_z \sin \alpha \sin \beta \approx n_y - n_x \alpha; \\ n_{z_1} &= n_x \sin \beta + n_z \cos \beta \approx n_z + n_x \beta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

§ 3. Связь между перегрузками и кинематическими элементами траектории

Пользуясь понятием перегрузки, динамические уравнения системы (I.33) запишем в безразмерной форме (при $f_c = 0$ и $z = \infty$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} &= n_x - \sin \theta; \\ \frac{v}{g} \frac{d\theta}{dt} &= n_y - \cos \theta; \\ -\frac{v}{g} \frac{d\psi_c}{dt} \cos \theta &= n_z. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти уравнения устанавливают связь между величинами относительных ускорений центра масс ракеты и перегрузками. Но входящие в данные уравнения параметры v , θ , ψ_c определяют величину и направление вектора скорости ракеты. Поэтому с помощью системы (9) можно также установить связь между величинами перегрузок и харак-

тером траектории полета. Например, при $n_x = \sin \theta$ полет ракеты будет равномерным, при $n_x > \sin \theta$ - ускоренным, а при $n_x < \sin \theta$ - замедленным. При $n_z = 0$ ракета движется в вертикальной плоскости, а при $\theta = 0$ и $n_y = 1$ - в горизонтальной. Если $n_y = \cos \theta$, то имеем место прямолинейный полет, а при $\theta = 0$; $n_y = 1$ и $n_x = n_z = 0$ - горизонтальное прямолинейное равномерное движение ракеты.

Величины нормальных перегрузок определяют характер криволинейного полета. Действительно, из выражений (9) следует, что с увеличением n_y и n_x растут соответствующие им угловые скорости:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g}{v} (n_y - \cos \theta); \\ \frac{d\varphi_c}{dt} &= -\frac{1}{\cos \theta} \frac{g}{v} n_x. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Но чем выше скорость разворота ракеты, тем более крутой маневр она может осуществить. Допустим, что маневр совершается в вертикальной плоскости ox_3y_3 при $v = const$ (рис. 3.3). Кинематической характеристикой маневра является радиус кривизны траектории r_g . Очевидно, что

$$r_g = \frac{ds}{d\theta} = v \frac{dt}{d\theta},$$

или, используя выражение (10) для угловой скорости

$$\frac{d\theta}{dt}, \text{ получим}$$

$$z_{\theta} = \frac{v^2}{g(n_y - \cos \theta)} \quad (II)$$

Соответственно для маневра в горизонтальной плоскости будем иметь

$$z_r = \frac{v^2}{g n_z} \cos \theta \quad (I2)$$

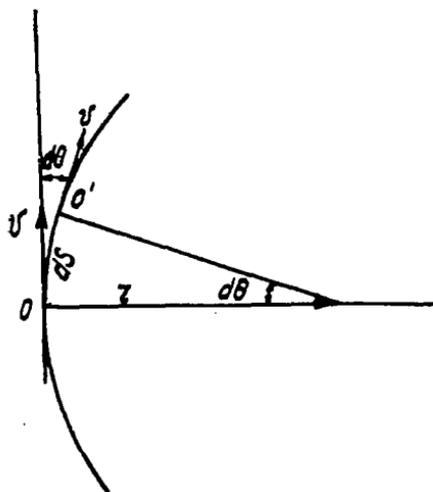


Рис.3.3

Из этих формул видно, что величины нормальных перегрузок определяют радиус кривизны траектории - с увеличением n_y и n_z радиусы z_{θ} и z_r уменьшаются.

§ 4. Потребные и располагаемые перевозки

Из рассмотрения выражений (II) и (I2) следует, что при $v = const$ ракета может выполнить маневр, харак-

теризующийся определенным радиусом кривизны z , только при условии, что будут созданы необходимые (потребные) нормальные перегрузки. Потребные перегрузки устанавливаются по известным элементам траектории (например, по $v(t)$, $\theta(t)$, $\varphi_c(t)$, $\delta_c(t)$) на основе исследования кинематики ракеты — например, в процессе анализа методов наведения.

Оценим возможности ракет по реализации потребных перегрузок. Из формулы (7) видно, что при прочих равных условиях вектор перегрузки \vec{n} изменится только в том случае, если ракета изменит ориентацию относительно направления движения ее центра масс, т.е. получит новые значения угла атаки α или угла скольжения β .

Поворот ракеты относительно центра масс вызывается управляющими моментами, возникающими при отклонениях органов управления. Как известно, в установившемся режиме полета углы α и β связаны с углами отклонения органов управления балансировочными соотношениями. В частности, используя соотношения, полученные в главе I (§ 7), можно балансировочные зависимости для осесимметричных ракет записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\text{бал}} &= -\frac{m_{z_1}^{\delta_{z_1}}}{m_{z_1}^{\alpha}} \delta_{z_1} ; \\ \beta_{\text{бал}} &= -\frac{m_{y_1}^{\delta_{z_1}}}{m_{y_1}^{\beta}} \delta_{y_1} = -\frac{m_{z_1}^{\delta_{z_1}}}{m_{z_1}^{\alpha}} \delta_{y_1} . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Для сбалансированной ракеты нетрудно установить связь между нормальными перегрузками и необходимыми для их получения углами $\alpha_{бал}$ и $\beta_{бал}$. Подставляя значения этих углов в выражения (7), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} n_{y_{бал}} &= \frac{P\alpha_{бал} + Y}{G} ; \\ n_{z_{бал}} &= \frac{-P\beta_{бал} + Z}{G} . \end{aligned} \right\} \quad (I4)$$

Зависимости (I4) показывают, что получаемые ракетой нормальные перегрузки пропорциональны балансирующим углам атаки $\alpha_{бал}$ и скольжения $\beta_{бал}$. Но максимально допустимые значения этих углов ограничены, так как при их увеличении снижается степень статической устойчивости и ракета даже может стать статически неустойчивой. Кроме того, при больших углах $\alpha_{бал}$ и $\beta_{бал}$ моментные характеристики $m_{z_1}(\alpha)$ и $m_{y_1}(\beta)$ становятся нелинейными, что усложняет создание системы управления. Все это заставляет ограничивать величины $\alpha_{бал}$ и $\beta_{бал}$ предельно допустимыми значениями, обычно не превосходящими $10 - 12^\circ$. По тем же причинам ограничиваются и углы поворота аэродинамических и газодинамических органов управления.

Поскольку углы атаки α и скольжения β являются производными по отношению к углам поворота органов управления, то вместо двух ограничений по величинам перегрузок можно рассматривать только одно ограничение — по предельно допустимым углам δ , имея в виду, что они будут найдены с учетом всех отмеченных выше соображений. При этом целесообразно для расчета пере

грузок брать соотношения, в которых отражается явная зависимость перегрузок от углов поворота органов управления.

Используя выражения (13), (14) и имея в виду то, что для осесимметричных ракет

$$\begin{aligned} y &= y^\alpha \alpha + y^\delta \delta_{z_1}^{\delta} ; \\ z &= z^\beta \beta + z^\delta \delta_{y_1}^{\delta} = -(y^\alpha \beta + y^\delta \delta_{y_1}^{\delta}) , \end{aligned}$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} n_{y \text{ бал}}^{\delta} &= n_{y \text{ бал}}^{\delta} \delta_{z_1}^{\delta} ; \\ n_{z \text{ бал}}^{\delta} &= n_{z \text{ бал}}^{\delta} \delta_{y_1}^{\delta} , \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$n_{y \text{ бал}}^{\delta} = -n_{z \text{ бал}}^{\delta} = \frac{1}{G} \left[-\frac{m_{z_1}^{\delta_{z_1}}}{m_{z_1}^{\alpha}} (\rho + y^\alpha) + y^\delta \right] . \quad (16)$$

На основании сказанного можно заключить, что сбалансированные ракеты могут создавать только ограниченные нормальные перегрузки. Величины этих перегрузок, отвечающие максимально допустимым отклонениям органов управления, называются **располагаемыми перегрузками**.

Используя выражения (15), можно для располагаемых перегрузок написать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} n_{y, \text{расп}} &= n_{y, \text{дан}}^{\delta} \delta_{z, \text{max}}^{\delta} ; \\ n_{z, \text{расп}} &= n_{z, \text{дан}}^{\delta} \delta_{y, \text{max}}^{\delta} ? \end{aligned} \right\} \quad (I7)$$

где $\delta_{z, \text{max}}^{\delta}$ и $\delta_{y, \text{max}}^{\delta}$ — соответственно максимально допустимые значения углов отклонения рулей высоты и направления.

Располагаемая перегрузка характеризует важнейшие маневренные качества ракеты — ее способность создавать нормальную к траектории силу, управляющую полетом. В этой связи следует иметь в виду, что увеличение степени статической устойчивости приводит к снижению располагаемой перегрузки и к ухудшению маневренности ракеты.

Таким образом, если потребная перегрузка характеризует траекторию полета, то располагаемая перегрузка характеризует свойства ракеты в рассматриваемой точке траектории. Сравнивая потребную перегрузку с располагаемой, можно установить возможность наведения ракеты на цель.

Поскольку располагаемая перегрузка — это максимально возможная перегрузка сбалансированной ракеты, то в идеальном случае можно было бы осуществить полет по заданной траектории, исходя из условия равенства располагаемых и потребных перегрузок. Но в реальных условиях необходимо предусматривать некоторый запас нормальных перегрузок Δn_y и Δn_z для обеспечения возможности компенсации случайных возмущений, которые отклоняют ракету от расчетной траектории, т.е.

$$\left. \begin{aligned} n_{y,расп} &\geq n_{y,бал} + \Delta n_y; \\ n_{z,расп} &\geq n_{z,бал} + \Delta n_z. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

На основании формул (18) эти условия могут быть заменены следующими соотношениями между углами отклонения органов управления:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{z,расп} &\geq \delta_{z,бал} + \Delta \delta_{z1}; \\ \delta_{y,расп} &\geq \delta_{y,бал} + \Delta \delta_{y1}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Обязательное выполнение равенств (18) и (19) является необходимым условием, которое следует учитывать при проектировании ракеты (например, при выборе размеров крыльев, оперения, параметров органов управления и т.п.). Надо также иметь в виду, что в приведенных выше соотношениях отражены только чисто аэродинамические факторы, ограничивающие перегрузки. В общем случае при определении предельно допустимых перегрузок, как нормальных, так и осевых, следует также учитывать их влияние на работу бортовой аппаратуры, на прочность корпуса и агрегатов ракеты и т.д.

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ РАКЕТ

§ I. Невозмущенное и возмущенное движение ракеты

Как уже отмечалось, решение полной системы дифференциальных уравнений, описывающих пространственное движение ракеты, сопряжено со значительными трудностями даже при использовании цифровых или моделирующих ЭВМ. Поэтому в заключительных параграфах первой главы были рассмотрены некоторые пути упрощения данной задачи. Так, учитывая наличие у ракет плоскости симметрии, действительное движение было разделено на два изолированных — продольное и боковое, что позволило сократить число дифференциальных уравнений и количество независимых переменных в каждой из полученных систем. Но и после разделения уравнения, описывающие продольное и боковое движения, остаются весьма сложными.

Дальнейшие упрощения, позволяющие получить достаточно простое, хотя и приближенное аналитическое описание движения ракеты, могут быть достигнуты за счет л и - н е а р и з а ц и и исходных систем уравнений. При этом нелинейные дифференциальные уравнения заменяются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, поддающимися прямому интегрированию в квадратурах.

Метод линеаризации (или метод малых отклонений) основан на разделении реального движения ракеты на невозмущенное и возмущенное. Н е в о з м у щ е н н ы м называют такое движение, которое ракета совершала бы в стандартной атмосфере или в безвоздушном пространстве под действием заранее предусмотренных закономерных сил. Траекторию, соответствующую такому движению, также называют невозмущенной или программной (номинальной) траекторией.

Реальный полет ракеты происходит под воздействием дополнительных случайных факторов, которые при расчете программных траекторий обычно во внимание не принимают (отклонения параметров атмосферы от стандартных, действие порывов ветра, пульсация тяги двигателя и т.п.). Действие этих возмущающих факторов приводит к тому, что полет ракеты происходит не по программной траектории, а отклоняясь от нее более или менее значительно в зависимости от величины и направления возмущений. Движение ракеты, отражающее воздействие этих случайных факторов, называют в о з м у щ е н н ы м движением, а соответствующую ему траекторию центра масс — возмущенной траекторией.

В принципе за невозмущенное движение может быть принят любой интересующий нас режим полета. Однако свести задачу исследования динамики ракеты к решению системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, не вводя при этом дополнительных допущений, оказывается возможным только при условии, что начальный режим полета является установившимся. В случае неустановившегося режима (старт ракеты, набор высоты или скорости, пикирование и др.) анализ линеаризованных систем дифференциальных уравнений затруднен наличием в

них переменных во времени коэффициентов. Как правило, для решения подобных задач прибегают к помощи электронно-вычислительных машин.

Для приближенного (качественного) анализа динамических характеристик ракеты и ее системы управления часто пользуются приемом "замораживания коэффициентов", с помощью которого можно получить хотя и грубые, но обозримые результаты. Сущность данного приема заключается в том, что на рассматриваемой траектории выбирают несколько характерных точек и вместо системы уравнений с переменными коэффициентами исследуют совокупность аналогичных систем с постоянными коэффициентами. Эти постоянные представляют собой значения коэффициентов уравнений возмущенного движения в фиксированные моменты времени t_k . Другими словами, время полета разбивают на небольшие промежутки, включающие точки t_k , и в этих промежутках считают коэффициенты уравнений неизменными.

§ 2. Линеаризация уравнений движения

Линеаризация уравнений движения основана на предположении о том, что действующие на ракету возмущения настолько малы, что членами уравнений, зависящими от квадратов и произведений возмущений, можно пренебречь, оставив в уравнениях только члены первого порядка малости. Например скорость ракеты, угол атаки и угол тангажа в возмущенном движении представляются следующим образом:

$$v(t) = v_0(t) + \Delta v(t); \quad \text{(I)}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_0(t) + \Delta\alpha(t); \\ \mathcal{J}(t) &= \mathcal{J}_0(t) + \Delta\mathcal{J}(t), \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

где $v_0(t)$, $\alpha_0(t)$, $\mathcal{J}_0(t)$ - значения кинематических параметров в невозмущенном движении;

$\Delta v(t)$, $\Delta\alpha(t)$, $\Delta\mathcal{J}(t)$ - приращения (вариации) кинематических параметров; они представляют собой разности между значениями кинематических параметров в возмущенном и невозмущенном движениях и отражают действие возмущений на летательный аппарат.

Математический смысл линеаризации заключается в том, что искомая вариация элемента находится посредством разложения соответствующей ему функции в ряд Тейлора по степеням малых приращений Δv , $\Delta\alpha$, $\Delta\mathcal{J}$, ..., ограничиваясь, ввиду их малости, только членами, содержащими вариации в первой степени.

Проведем линеаризацию систем дифференциальных уравнений, описывающих продольное и боковое движения ракеты. Для упрощения задачи введем следующие допущения:

- ускорение силы тяжести \vec{g} - величина постоянная;
- влиянием приращения высоты на аэродинамические силы и моменты, а также на силу тяги пренебрегаем, так как это влияние за небольшой промежуток времени незначительно;

Кроме того, не будем учитывать приращения конструктивных параметров Δm , $\Delta \mathcal{J}_{x_1}$, $\Delta \mathcal{J}_{y_1}$, $\Delta \mathcal{J}_{z_1}$, так как эти вариации не оказывают существенного влияния на возмущенное движение ракеты.

I. Линеаризация уравнений продольного движения

Введем в систему уравнений продольного движения возмущающие силы X_g , Y_g и момент $M_{z_1} \vartheta$ и, вследствие сделанных выше допущений, исключим из рассмотрения кинематические соотношения для центра масс ракеты. Тогда уравнения возмущенного движения ракеты в вертикальной плоскости (без уравнения управления) запишутся в следующем виде;

$$\left. \begin{aligned} m\dot{v} &= P \cos \alpha - Q - G \sin \theta + X_g; \\ m v \dot{\theta} &= P \sin \alpha + Y - G \cos \theta + Y_g; \\ \mathcal{J}_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} &= M_{z_1} + M_{p z_1} + M_{z_1} \vartheta; \\ \omega_{z_1} &= \mathcal{J}; \\ \mathcal{J} &= \theta + \alpha; \end{aligned} \right\} (2)$$

или, исключая из системы (4.2) два последние уравнения, получим:

$$m\dot{v} = P \cos \alpha - Q - G \sin \theta + X_g = f_1(v, \alpha, \theta) + X_g; \quad \left. \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 m\dot{v}(\dot{v} - \dot{\alpha}) &= P \sin \alpha + Y - G \cos \theta + Y_g = f_2(v, \alpha, \theta) + Y_g; \\
 J_{z_1} \ddot{v} &= M_{z_1} + M_{pz_1} + M_{z_1 \beta} = f_3(v, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_{z_1}, \delta_{z_1}^s) + M_{z_1 \beta}.
 \end{aligned} \right\} (3)$$

Разложим члены, входящие в правые части этих уравнений, в ряд Тейлора по степеням малых приращений, ограничиваясь величинами первого порядка малости:

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \Delta \alpha; \quad \sin \theta = \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \Delta \theta;$$

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \Delta \alpha; \quad \cos \theta = \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \Delta \theta;$$

$$P(v) = P_0 + P^v \Delta v;$$

$$Q(v, \alpha) = Q_0 + Q^v \Delta v + Q^\alpha \Delta \alpha;$$

$$Y(v, \alpha) = Y_0 + Y^v \Delta v + Y^\alpha \Delta \alpha;$$

$$M_{z_1}(v, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_{z_1}, \delta_{z_1}^s) = M_{z_1 0} + M_{z_1}^v \Delta v + M_{z_1}^\alpha \Delta \alpha +$$

$$+ M_{z_1}^{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + M_{z_1}^{\omega_{z_1}} \Delta \dot{v} + M_{z_1}^{\delta_{z_1}^s} \Delta \delta_{z_1}^s;$$

$$M_{pz_1}(\delta_{z_1}^s) = M_{pz_1 0} + M_{pz_1}^{\delta_{z_1}^s} \Delta \delta_{z_1}^s.$$

Здесь соотношения для аэродинамического M_{z_1} и реактивного M_{pz_1} моментов записаны для случая, когда

ракета имеет как аэродинамические рули, так и поворотные камеры сгорания.

В дальнейшем будем полагать, что на ракете установлены только аэродинамические органы управления. В приведенных соотношениях индекс 0 означает, что данная величина определяется по значениям параметров невозмущенного движения, а верхний индекс указывает, по какому из параметров берется данная производная.

Напомним выражения для производных Q , Y , M_{z_1} , известные из курса аэродинамики:

$$Q^v = c_{x_0} \rho_0 S v_0 + c_{x_0}^v \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S; \quad Q^\alpha = c_{x_0}^\alpha \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S;$$

$$Y^v = c_{y_0} \rho_0 S v_0 + c_{y_0}^v \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S; \quad Y^\alpha = c_{y_0}^\alpha \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S;$$

$$M_{z_1}^v = m_{z_1,0} \rho_0 S L v_0 + m_{z_1,0}^v \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S L; \quad M_{z_1}^\alpha = m_{z_1,0}^\alpha \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S L;$$

$$M_{z_1}^{\omega_z} = m_{z_1,0}^{\omega_z} \frac{\rho_0 v_0}{2} S L^2; \quad M_{z_1}^{\dot{\alpha}} = m_{z_1,0}^{\dot{\alpha}} \frac{\rho_0 v_0}{2} S L^2; \quad M_{z_1}^{\delta_{z_1}} = m_{z_1,0}^{\delta_{z_1}} \frac{\rho_0 v_0^2}{2} S L.$$

Подставляя эти соотношения в уравнения системы (3) и имея в виду, что

$$\frac{d\theta}{dt} \Delta v = \frac{d}{dt} (\theta_0 + \Delta\theta) \Delta v = \Delta \dot{\theta} \Delta v \approx 0,$$

получим с точностью до малых величин второго порядка:

$$m \Delta \dot{v} = -\rho_0 S \sin \alpha_0 \Delta \alpha + \rho_0^v S \cos \alpha_0 \Delta v - Q^\alpha \Delta \alpha - Q^v \Delta v - \\ - G_0 \cos \theta_0 (\Delta \dot{v} - \Delta \alpha) + X_g;$$

$$m \gamma_0 (\Delta \dot{\nu} - \Delta \dot{\alpha}) = P_0 \cos \alpha_0 \Delta \alpha + P_0^v \sin \alpha_0 \Delta \nu + \mathcal{Y}^\alpha \Delta \alpha + \mathcal{Y}^\nu \Delta \nu +$$

$$+ G_0 \sin \theta_0 (\Delta \mathcal{J} - \Delta \alpha) + \mathcal{Y}_g;$$

$$\mathcal{J}_{z_1} \Delta \ddot{\mathcal{J}} = M_{z_1}^\nu \Delta \nu + M_{z_1}^\alpha \Delta \alpha + M_{z_1}^{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + M_{z_1}^{\omega_{z_1}} \Delta \dot{\mathcal{J}} + M_{z_1}^{\delta_{z_1}} \Delta \delta_{z_1} + M_{z_1}^{\beta}$$

или, учитывая малость углов атаки, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} m \Delta \dot{\nu} - P_0^v \Delta \nu + Q^v \Delta \nu + P_0 \alpha_0 \Delta \alpha + Q^\alpha \Delta \alpha + G_0 \cos \theta_0 (\Delta \mathcal{J} - \Delta \alpha) &= X_g; \\ m \nu_0 (\Delta \dot{\nu} - \Delta \dot{\alpha}) - P_0^v \alpha_0 \Delta \nu - \mathcal{Y}^\nu \Delta \nu - P_0 \Delta \alpha - \mathcal{Y}^\alpha \Delta \alpha - \\ &- G_0 \sin \theta_0 (\Delta \mathcal{J} - \Delta \alpha) = \mathcal{Y}_g; \\ \mathcal{J}_{z_1} \Delta \ddot{\mathcal{J}} - M_{z_1}^\nu \Delta \nu - M_{z_1}^\alpha \Delta \alpha - M_{z_1}^{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} - M_{z_1}^{\omega_{z_1}} \Delta \dot{\mathcal{J}} - M_{z_1}^{\delta_{z_1}} \Delta \delta_{z_1} &= M_{z_1}^{\beta} \end{aligned} \right\} (4)$$

Для конкретных типов ракет эта система будет изменяться. Так, для баллистических ракет следует положить $P^v = 0$, $\Delta \alpha = 0$ и вместо $M_{z_1}^{\delta_{z_1}}$ ввести $M_{pz_1}^{\delta_{z_1}}$.

При наличии эксцентриситета силы тяги в последнее уравнение системы (4) следует ввести члены $M_{pz_1}^\nu \Delta \nu$ и $M_{pz_1}^\alpha \Delta \alpha$.

Обозначим:

$$c_{\nu\nu} = \frac{Q^v - P_0^v}{m}; \quad c_{\nu\mathcal{J}} = g \cos \theta_0; \quad c_{\nu\alpha} = \frac{P_0 \alpha_0 + Q^\alpha}{m} - g \cos \theta_0;$$

$$c_{\theta v} = -\frac{P_0^v \alpha_0 + J^v}{m v_0}; \quad c_{\theta \dot{\theta}} = -\frac{g_0}{v_0} \sin \theta_0; \quad c_{\theta \alpha} = -\frac{P_0 + y^\alpha}{m v_0} + \frac{g}{v_0} \sin \theta_0;$$

$$c_{\gamma v} = -\frac{M_{z_1}^v}{J_{z_1}}; \quad c_{\gamma \dot{\gamma}} = -\frac{M_{z_1}^{\omega z_1}}{J_{z_1}}; \quad c_{\gamma \dot{\alpha}} = -\frac{M_{z_1}^{\dot{\alpha}}}{J_{z_1}}; \quad c_{\gamma \alpha} = -\frac{M_{z_1}^{\alpha}}{J_{z_1}};$$

$$c_{\gamma \delta} = \frac{M_{z_1}^{\delta z_1}}{J_{z_1}};$$

$$f_v(t) = \frac{X_0^v}{m}; \quad f_\theta(t) = \frac{Y_0^v}{m v_0}; \quad f_\gamma(t) = \frac{M_{z_1}^v}{J_{z_1}}.$$

Тогда уравнения продольного возмущенного движения ракеты запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{v} + c_{v v} \Delta v + c_{v \dot{\gamma}} \Delta \dot{\gamma} + c_{v \alpha} \Delta \alpha &= f_v(t); \\ \Delta \dot{\theta} - \Delta \dot{\alpha} + c_{\theta v} \Delta v + c_{\theta \dot{\theta}} \Delta \dot{\theta} + c_{\theta \alpha} \Delta \alpha &= f_\theta(t); \\ \Delta \dot{\gamma} + c_{\gamma v} \Delta v + c_{\gamma \dot{\gamma}} \Delta \dot{\gamma} + c_{\gamma \dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + c_{\gamma \alpha} \Delta \alpha - c_{\gamma \delta} \Delta \delta_{z_1} &= f_\gamma(t). \end{aligned} \right\} (5)$$

Коэффициенты c_{ij} , входящие в систему уравнений (5), характеризуют важные динамические свойства ракеты.

Так, коэффициент $c_{\gamma \dot{\gamma}} = -\frac{M_{z_1}^{\omega z_1}}{J_{z_1}}$ характеризует аэродинамическое демпфирование; коэффициент $c_{\gamma \alpha} = -\frac{M_{z_1}^{\alpha}}{J_{z_1}}$ -

- степень статической устойчивости; коэффициент

$$c_{\gamma \delta} = \frac{M_{z_1}^{\delta z_1}}{J_{z_1}}$$

- эффективность руля высоты и т.д.

2. Линеаризация уравнений бокового движения

При исследовании бокового возмущенного движения обычно пользуются системой уравнений, записанных в связанной системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 m(\dot{v}_{z_1} + \omega_{y_1} v_{x_1} - \omega_{x_1} v_{y_1}) &= Z_1 + G \cos \vartheta \sin \delta + Z_{1g}; \\
 J_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} &= M_{x_1} + M_{px_1} + M_{x_1g}; \\
 J_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} &= M_{y_1} + M_{py_1} + M_{y_1g}; \\
 \dot{\delta} &= \omega_{x_1} - \omega_{y_1} \cos \delta \operatorname{tg} \vartheta; \\
 \dot{\psi} &= \omega_{y_1} \frac{\cos \delta}{\cos \vartheta}; \\
 \dot{z}_3 &= -v_{x_1} \cos \vartheta \sin \psi + v_{y_1} (\cos \psi \sin \delta + \sin \psi \cos \delta \sin \vartheta) + \\
 &\quad + v_{z_1} (\cos \psi \cos \delta - \sin \psi \sin \delta \sin \vartheta),
 \end{aligned} \right\} (6)$$

где

$$v_{x_1} = v \cos \alpha \cos \beta; \quad v_{y_1} = -v \sin \alpha \cos \beta; \quad v_{z_1} = v \sin \beta.$$

Пусть параметры бокового движения получили малые приращения Δv_{z_1} , $\Delta \omega_{x_1}$, $\Delta \omega_{y_1}$, $\Delta \delta$, $\Delta \beta$, $\Delta \psi$, Δz_3 . В действительности при случайных воздействиях параметры продольного движения также получают свои вариации. Однако их влиянием на боковые силы и моменты

обычно пренебрегают. Тогда, учитывая, что при малых углах крена (γ) и скольжения (β) $\sin \gamma \approx \gamma$, $\cos \gamma \approx 1$, $\sin \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$ и $v_{x_1} = v \cos \alpha$, $v_{y_1} = v \sin \alpha$, $v_{z_1} = v \sin \beta \approx v \beta$, систему уравнений (6) можно привести к виду:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\beta} &= \frac{z_1^\beta}{m v_0} \Delta \beta + \cos \alpha_0 \Delta \omega_{y_1} + \sin \alpha_0 \Delta \omega_{x_1} + \frac{g}{v_0} \cos \vartheta_0 \Delta \gamma + \\ &\quad + \frac{z_1^\delta}{m v_0} \Delta \delta_{y_1} + \frac{z_1^{\epsilon}}{m v_0}; \\ \Delta \dot{\omega}_{x_1} &= \frac{M_{x_1}^\beta}{J_{x_1}} \Delta \beta + \frac{M_{x_1}^{\omega_{x_1}}}{J_{x_1}} \Delta \omega_{x_1} + \frac{M_{y_1}^{\omega_{y_1}}}{J_{x_1}} \Delta \omega_{y_1} + \\ &\quad + \frac{M_{x_1}^{\delta_{x_1}}}{J_{x_1}} \Delta \delta_{x_1} + \frac{M_{x_1}^{\epsilon}}{J_{x_1}}; \\ \Delta \dot{\omega}_{y_1} &= \frac{M_{y_1}^\beta}{J_{y_1}} \Delta \beta + \frac{M_{y_1}^{\omega_{x_1}}}{J_{y_1}} \Delta \omega_{x_1} + \frac{M_{y_1}^{\omega_{y_1}}}{J_{y_1}} \Delta \omega_{y_1} + \frac{M_{y_1}^{\delta_{y_1}}}{J_{y_1}} \Delta \delta_{y_1} + \frac{M_{y_1}^{\epsilon}}{J_{y_1}}; \\ \Delta \dot{\gamma} &= \Delta \omega_{x_1} - \operatorname{tg} \vartheta_0 \Delta \omega_{y_1}; \\ \Delta \dot{\psi} &= \frac{\Delta \omega_{y_1}}{\cos \vartheta_0}; \\ \Delta \dot{z}_3 &= v_0 \Delta \beta - v_0 \cos \alpha_0 \Delta \psi - v_0 \sin \alpha_0 \Delta \gamma. \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{\beta} + \epsilon_{\beta\beta} \Delta \beta + \epsilon_{\beta\omega_y} \Delta \omega_{y_1} + \epsilon_{\beta\omega_x} \Delta \omega_{x_1} + \epsilon_{\beta\gamma} \Delta \gamma - \epsilon_{\beta\delta} \Delta \delta_{y_1} &= \\ &= f_\beta(t); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \dot{\omega}_{x_1} + b_{\gamma\beta} \Delta \beta + b_{\gamma\omega_x} \Delta \omega_{x_1} + b_{\gamma\omega_y} \Delta \omega_{y_1} - b_{\gamma\delta} \Delta \delta_{x_1} &= f_{\gamma}(t); \\
 \Delta \dot{\omega}_{y_1} + b_{\varphi\beta} \Delta \beta + b_{\varphi\omega_x} \Delta \omega_{x_1} + b_{\varphi\omega_y} \Delta \omega_{y_1} - b_{\varphi\delta} \Delta \delta_{y_1} &= f_{\varphi}(t); \\
 \Delta \dot{\delta} - \Delta \omega_{x_1} + b_{\delta\omega_y} \Delta \omega_{y_1} &= 0; \\
 \Delta \dot{\psi} + b_{\psi\omega_y} \Delta \omega_{y_1} &= 0; \\
 \Delta \dot{z}_3 + b_{z\beta} \Delta \beta + b_{z\varphi} \Delta \varphi + b_{z\gamma} \Delta \gamma &= 0,
 \end{aligned} \right\} (8)$$

где b_{ij} - динамические коэффициенты. Выражения для них нетрудно получить, сопоставляя системы уравнений (7) и (8).

§ 3. Собственная динамическая устойчивость ракеты

Исследование динамических характеристик имеет важное значение при выборе конструктивных параметров ракеты и проектировании ее системы управления. В частности, анализ динамических свойств ракеты позволяет установить, **каким** образом те или иные конструктивные изменения отразятся на устойчивости движения, что помогает сформулировать требования к автомату стабилизации.

Точное решение подобных задач сопряжено с необходимостью исследования полной системы нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты. Хотя с помощью ЭВМ такие решения и могут быть получены для конкретных числовых параметров ракеты, однако для

целей изучения характера движения этот путь обычно целесообразен. Поэтому на начальных этапах проектирования ограничиваются анализом динамических свойств самой ракеты или комплекса "ракета-система управления", исходя из уравнений линейного приближения (5) и (8).

Для оценки собственных динамических свойств ракеты рассматривают ее неуправляемое движение, полагая, что отклонения органов управления являются либо известными функциями времени $\delta_{x_1}(t)$, $\delta_{y_1}(t)$, $\delta_{z_1}(t)$, не зависящими от элементов возмущенного движения, либо принимают их за постоянные величины, которые в частных случаях могут принимать и нулевые значения. При такой постановке задачи системы уравнений (5) и (8) становятся замкнутыми и не требуют добавления уравнений, описывающих работу системы управления.

Если рассматривается неустановившийся режим полета ракеты, то с целью дальнейшего упрощения линейных систем (5) и (8), обеспечивающего получение аналитических решений, используется прием "замораживания" динамических коэффициентов. В этом случае системы уравнений возмущенного движения в вариациях превращаются в линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Методы решений и анализа уравнений продольного и бокового движения аналогичны. Поэтому во избежание повторений рассмотрим лишь свободное возмущенное движение ракеты в вертикальной плоскости. Для упрощения анализа положим, что невозмущенное движение представляло собой прямолинейный горизонтальный полет с постоянной скоростью. Тогда, полагая в уравнениях продольного

движения (6) отклонение $\Delta \delta_{z_1}^S = 0$ (это соответствует закрепленным рулям высоты), и считая, что ракета получает однократное мгновенное возмущение (т.е. $f_u(t) = f_\theta(t) = f_\gamma(t) = 0$), получим следующую систему однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{u} + c_{uu} \Delta u + c_{u\gamma} \Delta \dot{\gamma} + c_{u\alpha} \Delta \alpha &= 0; \\ \Delta \dot{\gamma} - \Delta \dot{\alpha} + c_{\theta u} \Delta u + c_{\theta \gamma} \Delta \dot{\gamma} + c_{\theta \alpha} \Delta \alpha &= 0; \\ \Delta \ddot{\gamma} + c_{\gamma u} \Delta u + c_{\gamma \dot{\gamma}} \Delta \dot{\gamma} + c_{\gamma \dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + c_{\gamma \alpha} \Delta \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эта система замкнутая, так как имеем три уравнения с тремя неизвестными: Δu , $\Delta \dot{\gamma}$ и $\Delta \alpha$. Общее ее решение находится как сумма частных решений, записываемых в виде показательных функций:

$$\Delta u = A e^{\lambda t}; \quad \Delta \dot{\gamma} = B e^{\lambda t}; \quad \Delta \alpha = C e^{\lambda t}.$$

После подстановки этих выражений в систему (9) и сокращения на общий множитель $e^{\lambda t}$, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + c_{uu})A + c_{u\gamma}B + c_{u\alpha}C &= 0; \\ c_{\theta u}A + (\lambda + c_{\theta \gamma})B - (\lambda - c_{\theta \alpha})C &= 0; \\ c_{\gamma u}A + (\lambda^2 + c_{\gamma \dot{\gamma}}\lambda)B + (c_{\gamma \dot{\alpha}}\lambda + c_{\gamma \alpha})C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Так как эта система однородная, то для получения ненулевого решения необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + c_{\nu\nu} & c_{\nu\vartheta} & c_{\nu\alpha} \\ c_{\vartheta\nu} & \lambda + c_{\vartheta\vartheta} & -(\lambda - c_{\vartheta\alpha}) \\ c_{\vartheta\nu} & \lambda^2 + c_{\vartheta\vartheta}\lambda & c_{\vartheta\alpha}\lambda + c_{\vartheta\alpha} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4 = 0, \quad (\text{II})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= c_{\nu\nu} - c_{\vartheta\alpha} + c_{\vartheta\vartheta} + c_{\vartheta\alpha}; \\ \alpha_2 &= c_{\vartheta\alpha} + c_{\nu\alpha} c_{\vartheta\nu} - c_{\nu\nu} c_{\vartheta\alpha} + c_{\vartheta\vartheta} (c_{\nu\nu} - c_{\vartheta\alpha}) + \\ &\quad + c_{\vartheta\alpha} (c_{\nu\nu} + c_{\vartheta\vartheta}); \\ \alpha_3 &= c_{\vartheta\vartheta} (c_{\nu\alpha} c_{\vartheta\nu} - c_{\nu\nu} c_{\vartheta\alpha}) + c_{\vartheta\alpha} (c_{\nu\nu} c_{\vartheta\nu} - c_{\nu\vartheta} c_{\vartheta\nu}) - \\ &\quad - c_{\vartheta\nu} (c_{\nu\vartheta} + c_{\nu\alpha}) + c_{\vartheta\alpha} (c_{\nu\nu} + c_{\vartheta\vartheta}); \\ \alpha_4 &= c_{\vartheta\nu} (c_{\nu\vartheta} c_{\vartheta\alpha} - c_{\nu\alpha} c_{\vartheta\vartheta}) + c_{\vartheta\alpha} (c_{\nu\nu} c_{\vartheta\vartheta} - c_{\nu\vartheta} c_{\vartheta\nu}). \end{aligned} \right\} (\text{I2})$$

Если значения корней характеристического уравнения (II) найдены, то общее решение системы (9) можно представить в виде суммы четырех частных решений:

$$\Delta\nu = \sum_{k=1}^4 A_k e^{\lambda_k t}; \quad \Delta\vartheta = \sum_{k=1}^4 B_k e^{\lambda_k t}; \quad \Delta\alpha = \sum_{k=1}^4 C_k e^{\lambda_k t}. \quad (\text{I3})$$

При вычислении неизвестных постоянных коэффициентов A_k , B_k , C_k ($k = 1, \dots, 4$) следует иметь в виду,

что поскольку определитель системы (II) равен нулю, то независимыми в ней являются только два уравнения из трех. Недостающие уравнения вытекают из начальных условий. При $t = 0$ имеем:

$$\Delta v_0 = \sum_{k=1}^4 A_k; \quad \Delta \dot{v}_0 = \sum_{k=1}^4 B_k; \quad \Delta \alpha_0 = \sum_{k=1}^4 C_k. \quad (15)$$

Определение коэффициентов A_k , B_k , C_k производится в тех случаях, когда требуется построить графики изменения приращений Δv , $\Delta \dot{v}$, $\Delta \alpha$ в функции времени. Хотя такие зависимости позволяют получить полное представление о характере возмущенного движения, надобность в них отпадает, если требуется только ответить на вопрос, будет ли движение ракеты устойчивым. Для ответа на этот вопрос достаточно составить характеристическое уравнение и произвести анализ его корней.

§ 4. Условия собственной динамической устойчивости ракеты

Характер изменения приращений Δv , $\Delta \dot{v}$, $\Delta \alpha$ в свободном возмущенном движении ракеты определяется корнями характеристического уравнения. При этом возможны следующие три случая.

I. Все корни характеристического уравнения вещественные. Тогда приращение любого параметра z (v , \dot{v} , α) при известных λ_k записывается в виду суммы (13),

т.е.
$$\Delta z = \sum_{k=1}^4 R_k e^{\lambda_k t} \quad . \text{ Следовательно, в этом}$$

случае свободное возмущенное движение ракеты складывается из четырех аperiодических движений, причем если хотя бы один из корней λ_k положительный, то с течением времени все отклонения Δz (Δu , Δv , $\Delta \alpha$) будут неограниченно возрастать, что свидетельствует об аperiодической неустойчивости ракеты.

2. Два корня характеристического уравнения (λ_1, λ_2) вещественные, а два другие (λ_3, λ_4) - комплексные сопряженные, например $\lambda_{3,4} = \xi \pm i\eta$. Этим корням соответствует частное решение вида

$$\Delta z_{3,4} = R_3 e^{\lambda_3 t} + R_4 e^{\lambda_4 t}, \quad (I5)$$

где постоянные R_3 и R_4 - комплексные сопряженные числа:

$$R_3 = \alpha - i\beta; \quad R_4 = \alpha + i\beta.$$

Пользуясь формулами Эйлера

$$\begin{cases} e^{\eta it} = \cos \eta t + i \sin \eta t; \\ e^{-\eta it} = \cos \eta t - i \sin \eta t \end{cases}$$

или

$$\left\{ \begin{aligned} e^{\eta it} + e^{-\eta it} &= 2 \cos \eta t; \\ e^{\eta it} - e^{-\eta it} &= 2i \sin \eta t, \end{aligned} \right\} \quad (I6)$$

преобразуем частное решение (I5):

$$\Delta z_{3,4} = (\alpha - i\beta)e^{(\xi+i\eta)t} + (\alpha + i\beta)e^{(\xi-i\eta)t} = Re^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi),$$

где R и φ - новые произвольные постоянные, равные

$$\left. \begin{aligned} R &= 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}; \\ \varphi &= \alpha \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (I7)$$

Следовательно, пара комплексных сопряженных корней характеризует колебательное движение ракеты с амплитудой $Re^{\xi t}$, угловой частотой η и фазой φ . Если $\xi > 0$, то амплитуда $Re^{\xi t}$ с течением времени неограниченно возрастает (колебательная неустойчивость), при $\xi < 0$ - убывает.

В данном случае свободное возмущенное движение ракеты представляет собой наложение двух аperiodических и одного колебательного движения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta v &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A e^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi_v); \\ \Delta \dot{v} &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B e^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi_{\dot{v}}); \\ \Delta \alpha &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C e^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi_{\alpha}). \end{aligned} \right\} \quad (I8)$$

Если хотя бы один из вещественных корней или вещественная часть комплексного корня имеет положительный знак, то движение неустойчивое, так как с течением времени неограниченно возрастают все приращения Δv , $\Delta \dot{v}$, $\Delta \alpha$.

3. Все четыре корня характеристического уравнения образуют две пары сопряженных комплексных корней:

$$\lambda_{1,2} = \xi_1 \pm i\eta_1; \quad \lambda_{3,4} = \xi_2 \pm i\eta_2.$$

В этом случае свободное возмущенное движение ракеты представляет собой наложение двух колебательных движений, затухающих при $\xi_j < 0$ ($j=1,2$):

$$\left. \begin{aligned} \Delta v &= A'e^{\xi_1 t} \sin(\eta_1 t + \varphi_{v1}) + A''e^{\xi_2 t} \sin(\eta_2 t + \varphi_{v2}); \\ \Delta \gamma &= B'e^{\xi_1 t} \sin(\eta_1 t + \varphi_{\gamma1}) + B''e^{\xi_2 t} \sin(\eta_2 t + \varphi_{\gamma2}); \\ \Delta \alpha &= C'e^{\xi_1 t} \sin(\eta_1 t + \varphi_{\alpha1}) + C''e^{\xi_2 t} \sin(\eta_2 t + \varphi_{\alpha2}). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Степень затухания (или нарастания) обычно характеризуют временем t_y уменьшения (или увеличения) амплитуды колебаний вдвое. Это время можно определить из условия $e^{|\xi|t_y} = 0,5$, откуда

$$t_y = \frac{0,693}{|\xi|}. \quad (20)$$

Таким образом, в результате решения характеристического уравнения можно установить вид возмущенного движения (апериодическое или колебательное), частоту и период колебаний, степень затухания процесса. При этом ракета будет динамически устойчивой, если все вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны. Если же среди вещественных частей корней имеется хотя бы одна положительная, то движение ракеты

будет неустойчивым, а наличие хотя бы одной нулевой части свидетельствует о том, что ракета является динамически нейтральной.

Для исследования уравнений возмущенного движения не обязательно определение корней характеристического уравнения. Достаточно составить это уравнение и затем воспользоваться каким-нибудь критерием (Гурвица, Найквиста и др.), позволяющим по коэффициентам характеристического уравнения судить о его корнях.

В общем случае характеристический многочлен записывается в виде

$$\Delta(\lambda) = \alpha_0 \lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_{m-1} \lambda + \alpha_m.$$

По Гурвицу, условие отрицательности вещественных корней характеристического многочлена сводится к тому, что при $\alpha_0 > 0$ должны быть положительными все m определителей, получаемых из определителя, составленного из коэффициентов характеристического многочлена. В частности, при $m = 4$ эти условия сводятся к следующим неравенствам:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_1 = \alpha_1 > 0,$$

что равносильно следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 > 0; \alpha_1 > 0; \alpha_2 > 0; \alpha_3 > 0; \alpha_4 > 0; \\ \Delta_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \alpha_4 - \alpha_3^2 \alpha_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Критерий Гурвица не только позволяет судить об устойчивости движения, не решая характеристического уравнения, но и дает возможность установить границы устойчивости. Среди многих параметров, определяющих величину и знак коэффициентов характеристического уравнения, можно выделить несколько параметров, изменение которых находится в руках конструктора и тем самым позволяет влиять на устойчивость посредством изменения значений этих коэффициентов. Например, для продольной устойчивости к таким коэффициентам относятся $c_{\dot{y}\dot{y}}$ и $c_{\dot{y}\alpha}$, так как они являются функциями коэффициентов демпфирования

$m_{z_1}^{\omega_{z_1}}$ и продольной статической устойчивости

$m_{z_1}^{\alpha}$, т.е. величин, зависящих от аэродинамической

схемы и компоновки ракеты. В этих координатах обычно строится и диаграмма устойчивости.

Для построения границ устойчивости достаточно иметь только два уравнения из условий (21):

$$\alpha_4 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_3 = 0.$$

Действительно, переход через границу устойчивости происходит в случае, когда вещественная часть корней $\lambda = \xi \pm i\eta$ из отрицательной становится положительной, т.е. проходит через ноль. Это означает, что точкам границы устойчивости соответствует минимое значение λ ,

т.е. $\lambda = i\eta$ (или нулевое значение при вещественных корнях). Подставляя $\lambda = i\eta$ в характеристическое уравнение (12), получим ($\alpha_0 = 1$):

$$\eta^4 - \alpha_1 i \eta^3 - \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 i \eta + \alpha_4 = 0.$$

Приравнивая действительные и мнимые части нулю, составим два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \eta^4 - \alpha_2 \eta^2 + \alpha_4 &= 0; \\ (\alpha_1 \eta^2 - \alpha_3) \eta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения имеем:

$$\eta_1 = 0; \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}.$$

Если подставить эти корни в первое уравнение, то получим два уравнения границ устойчивости:

$$\alpha_4 = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^2 - \alpha_2 \frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \alpha_4 = 0$$

или

$$\alpha_4 = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \alpha_4 - \alpha_3^2 > 0.$$

Построенная таким образом диаграмма показана на рис. 4. I.

Из рассмотрения диаграммы следует, что продольная статическая устойчивость ($m_{z_1}^\alpha < 0$) еще не гарантирует динамической устойчивости - при малых значениях

коэффициента $m \frac{\omega z_1}{z_1}$ статически устойчивая ракета

может быть динамически неустойчивой.

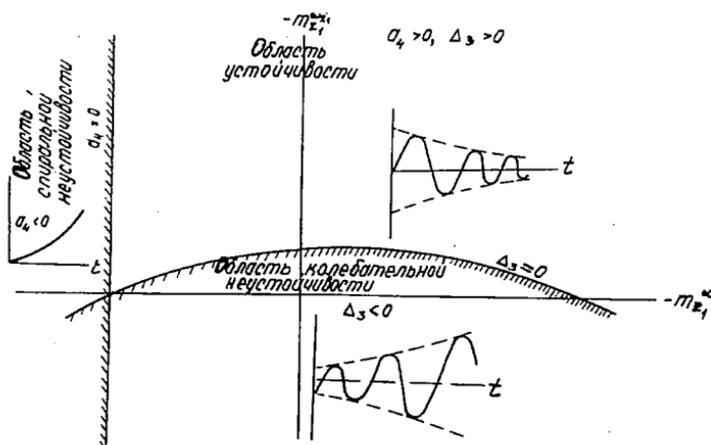


Рис. 4. I

В заключение напомним, что проведенный анализ относится к случаю, когда ракета совершает прямолинейный горизонтальный полет с постоянной скоростью. Поскольку действительный полет ракеты может протекать в существенно иных условиях, то полученные выше аналитические решения используются лишь для приближенной качественной оценки динамических свойств ракеты. В частности, результаты проверки устойчивости по корням характеристического уравнения обычно используются для предварительного выбора аэродинамических и конструктивных параметров на начальных этапах проектирования ракеты и требуют в процессе ее дальнейшей разработки подтверждения более точными методами исследования.

§ 5. Анализ продольного возмущенного движения

Результаты исследования продольного свободного возмущенного движения ракет различных типов показывают, что характеристическое уравнение обычно имеет две пары комплексных сопряженных корней, причем всегда вещественные и мнимые части одной пары корней по абсолютной величине существенно превышают вещественные и мнимые части другой пары корней. Но вещественная часть комплексного корня характеризует степень затухания возмущенного движения, а коэффициент при мнимой единице — его частоту. Следовательно, паре больших (по модулю) комплексных корней соответствует быстро затухающее движение, которое называется **к о р о т к о п е р и о д и ч е с к и м**, а паре малых комплексных корней — медленно затухающее, называемое **д л и н н о п е р и о д и ч е с к и м** или **ф у г о и д н ы м** движением. Короткопериодические колебания определяют возмущенное движение ракеты относительно центра масс, а длиннопериодические — возмущенное движение самого центра масс.

Характер изменения приращения $\Delta \nu$, $\Delta \vartheta$ и $\Delta \alpha$ в продольном возмущенном движении далеко неодинаков (рис.4.2). Независимо от типа ракеты изменение приращения $\Delta \nu$ происходит весьма медленно, в то время как вариация угла атаки $\Delta \alpha$ быстро убывает, т.е. изменение $\Delta \nu$ является длиннопериодическим, а изменение $\Delta \alpha$ относится к короткопериодическому движению.

Быстрое уменьшение $\Delta \alpha$ объясняется тем, что при изменении угла атаки статически устойчивой ракеты воз-

никает значительный стабилизирующий момент, стремящийся вернуть ракету в исходное состояние. Поскольку при этом ракета разворачивается вокруг своей поперечной оси OZ_1 , то в начальный момент также быстро будут изменяться параметры $\Delta\omega_z$ и $\Delta\dot{\nu}$. Однако характер изменения угла $\Delta\nu$, в отличие от изменения угла $\Delta\alpha$, будет зависеть не только от короткопериодических, но и от длиннопериодических колебаний.

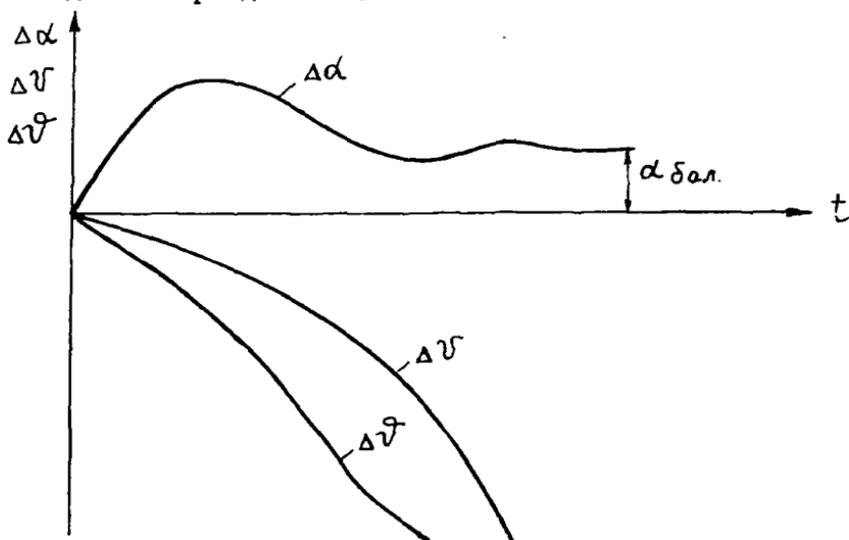


Рис. 4.2

Таким образом, возмущенное движение ракеты можно представить состоящим из двух этапов. Первый этап — короткопериодический, состоящий в основном из вращения ракеты относительно центра масс и характеризующийся быстрым изменением угла атаки. Это изменение происходит таким образом, что статически устойчивая ракета стремится принять балансировочный угол атаки (рис. 4.2), соответствующий положению органов управления в данный момент времени. Вследствие сильного демпфирования вра-

чение ракеты практически заканчивается в первые секунды (и даже в доли секунды) возмущенного движения. В конце первого этапа момент аэродинамических сил будет уравновешен моментом управляющих сил, а угловая скорость $\Delta\omega_z$ станет близкой к нулю. Однако угол тангажа \mathcal{J} и угол траектории Θ в этот момент существенно отличаются от своих невозмущенных значений. Силы P , Q , Y , G еще неуравновешены.

Второй этап движения — длиннопериодический, медленно-затухающий. Он продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие сил. В течение этого этапа угловая скорость $\Delta\omega_z$ и угол атаки $\Delta\alpha$ остаются примерно постоянными, а изменяются отклонения $\Delta\psi$, $\Delta\mathcal{J}$ и $\Delta\Theta$.

При упрощенном анализе системы управления обычно схематизируют явления продольного движения ракеты и рассматривают только первый его этап, на котором можно пренебречь изменениями скорости $\Delta\psi$. Поэтому при исследовании короткопериодических колебаний в системе (5) первое уравнение, описывающее отклонения $\Delta\psi$, отбрасывают, а в оставшихся уравнениях принимают $\Delta\psi \equiv 0$. Кроме того, обычно полагают $\alpha_{\Theta\mathcal{J}} = 0$ ввиду слабого влияния силы тяжести на характер возмущенного движения. При этом система (5) записывается в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\ddot{\psi} - \Delta\ddot{\alpha} + c_{\Theta\alpha} \Delta\alpha &= 0; \\ \Delta\ddot{\psi} + c_{\psi\mathcal{J}} \Delta\dot{\mathcal{J}} + c_{\mathcal{J}\alpha} \Delta\dot{\alpha} + c_{\mathcal{J}\alpha} \Delta\alpha &= c_{\mathcal{J}\delta} \Delta\delta_{z1}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Уравнения (4.22) называют уравнениями возмущенного движения в плоскости тангажа.

§ 6. Анализ бокового возмущенного движения

Исследование бокового свободного возмущенного движения ракеты производится теми же методами, что и анализ продольного движения. Для оценки собственной устойчивости ракеты в данном случае следует воспользоваться уравнениями (8), полагая в них отклонения органов управления $\Delta \delta_{x_1}$, $\Delta \delta_{y_1}$ и функции $f_{\beta}(t)$, $f_{\gamma}(t)$ и $f_{\varphi}(t)$ равными нулю. Раскрывая определитель, соответствующий этой системе, получим характеристическое уравнение четвертой степени, подобное многочлену (II):

$$\lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0. \quad (23)$$

Коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 , b_4 зависят от коэффициентов уравнения (8), т.е. от величин производных аэродинамических сил и моментов ($m_{x_1}^{\beta}$, $m_{y_1}^{\beta}$, ω_{x_1} , ω_{y_1} , m_{x_1} , m_{y_1} , $m_{y_1}^{\beta}$, ω_{x_1} , $m_{y_1}^{\beta}$), от значений конструктивных параметров ракеты (G , S , L , J_{x_1} , J_{y_1}) и от режима невозмущенного полета (v_0 , θ_0 , $\dot{\vartheta}_0$, α_0).

При анализе боковой динамической устойчивости ракет наиболее частым бывает случай, когда характеристическое уравнение (23) имеет одну пару комплексно-сопряженных корней $\xi \pm i\eta$ и два вещественных корня — большой и малый. При этом общее решение системы дифференциальных уравнений, описывающих боковое свободное возмущенное движение, записывается в виде:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \omega_{x_1} &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A e^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi_x); \\
 \Delta \omega_{y_1} &= B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t} + B e^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi_y); \\
 \Delta \beta &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C e^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi_\beta); \\
 \Delta \gamma &= \mathcal{O}_1 e^{\lambda_1 t} + \mathcal{O}_2 e^{\lambda_2 t} + \mathcal{O} e^{\xi t} \sin(\eta t + \varphi_\gamma).
 \end{aligned} \right\} (24)$$

т.е. общее движение складывается из трех частных - двух аperiodических и одного колебательного. Все три частных движения существуют одновременно и, накладываясь друг на друга, дают боковое возмущенное движение.

Каждое из частных движений затухает в различные моменты времени, поэтому свободное боковое движение ракеты можно разбить по времени на два этапа. На первом этапе наблюдаются все три типа движения, а на втором остается одно аperiodическое, отвечающее малому вещественному корню, и колебательное движения.

Движение, соответствующее большому вещественному корню (в первом приближении $\lambda \approx \frac{M_{x_1}^{\omega_{x_1}}}{J_{x_1}}$), называют

д в и ж е н и е м к р е н а, так как оно заключается, в основном, в изменении угла крена γ и угловой скорости ω_{x_1} . Это движение аperiodическое и продолжается обычно не более секунды.

Движение, отвечающее малому вещественному корню, называют **спиральным**. Такое название объясняется тем, что при положительном значении этого корня крылатая ракета с закрепленными рулями движется по спирали с медленным нарастанием всех боковых параметров $(\varphi, \psi, \delta, \omega_{x_1}, \omega_{y_1})$ — спиральная неустойчивость ракеты.

Характер свободного возмущенного движения на втором этапе определяется соотношением между коэффициентами

$$\epsilon_{\delta\beta} = -\frac{M_{x_1}^\beta}{T_{x_1}} \quad \text{и} \quad \epsilon_{\psi\beta} = -\frac{M_{y_1}^\beta}{T_{y_1}}. \quad \text{Если } \epsilon_{\psi\beta} \gg \epsilon_{\delta\beta},$$

то колебательное движение быстро затухает и в дальнейшем остается только спиральное движение с параметрами $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \beta, \delta$, которое либо медленно затухает, либо медленно возрастает (случай спиральной неустойчивости). Если же коэффициент $\epsilon_{\psi\beta}$ имеет сравнительно малые значения, то на втором этапе затухает спиральное движение, а колебательное движение сохраняется.

При боковом движении, так же как и при продольном, можно построить диаграмму устойчивости. Диаграмма строится в координатах $(m_{x_1}^\beta, m_{y_1}^\beta)$; ее вид показан на рис. 4.3.

Уравнения (4.8) обычно используются при исследовании собственной динамической устойчивости крылатых ракет самолетной системы. Если же ракета осесимметричная, то возможно их упрощение за счет разделения движений рыскания и крена. Допуская, что углы δ, θ и α

достаточно малы, примем $\cos \vartheta = \cos \theta = \cos \alpha = 1$, $\Delta \omega_{y_1} = \Delta \dot{\psi}$, $\Delta \omega_{x_1} = \Delta \dot{\beta}$, $\epsilon_{\beta \omega_y} = -\cos \alpha = -1$. Кроме того, можно опустить члены $\frac{M_{x_1}^{\omega_{y_1}}}{J_{x_1}} \Delta \dot{\psi}$ и $\frac{M_{y_1}^{\omega_{x_1}}}{J_{y_1}} \Delta \dot{\beta}$ ввиду малости коэффициентов $\frac{M_{x_1}^{\omega_{y_1}}}{J_{x_1}}$ и $\frac{M_{y_1}^{\omega_{x_1}}}{J_{y_1}}$.

Тогда получим две независимые системы уравнений:

- для движения рыскания

$$\left. \begin{aligned} \Delta \ddot{\psi} + \epsilon_{\psi \omega_y} \Delta \dot{\psi} + \epsilon_{\psi \beta} \Delta \beta &= \epsilon_{\psi \delta} \Delta \delta_{y_1}; \\ -\Delta \dot{\psi} - \Delta \beta + \epsilon_{\beta \beta} \Delta \beta &= \epsilon_{\beta \delta} \Delta \delta_{y_1}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где

$$\epsilon_{\psi \omega_y} = -\frac{M_{y_1}^{\omega_{y_1}}}{J_{y_1}}; \quad \epsilon_{\psi \beta} = -\frac{M_{y_1}^{\beta}}{J_{y_1}}; \quad \epsilon_{\psi \delta} = \frac{M_{y_1}^{\delta_{y_1}}}{J_{y_1}};$$

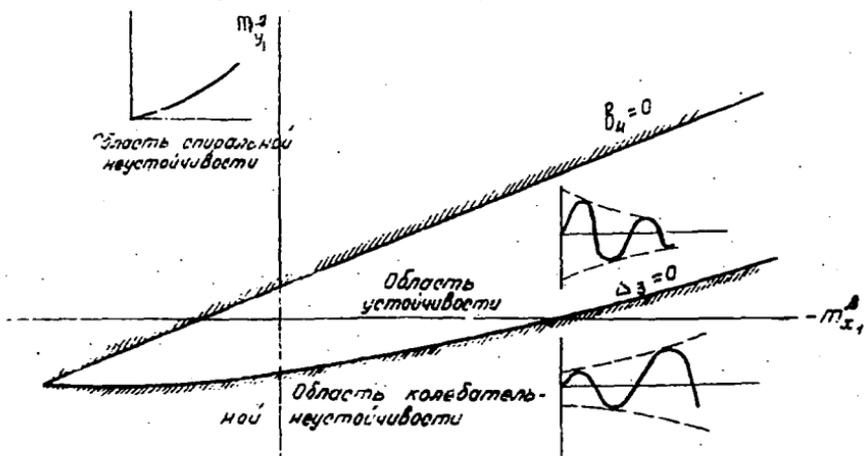


Рис. 4.2

$$v_{\beta\beta} = -\frac{z_1^\beta}{m v_0} ; \quad v_{\beta\delta} = \frac{z_1^\delta}{m v_0} ;$$

- для движения крена

$$\Delta \ddot{j} + v_{j\omega x} \Delta \dot{j} + v_{j\beta} \Delta \beta = v_{j\delta} \Delta \delta_{x_1} , \quad (26)$$

где

$$v_{j\omega x} = -\frac{M_{x_1}^{\omega x_1}}{J_{x_1}} ; \quad v_{j\beta} = -\frac{M_{x_1}^\beta}{J_{x_1}} ; \quad v_{j\delta} = \frac{M_{x_1}^{\delta x_1}}{J_{x_1}} .$$

Входящий в уравнение (26) член $v_{j\beta} \Delta \beta$ можно рассматривать в качестве известного возмущающего фактора, возникающего при движении рыскания. Если пренебречь влиянием рыскания на движение крена, то уравнение (26) примет вид

$$\Delta \ddot{j} + v_{j\omega x} \Delta \dot{j} = v_{j\delta} \Delta \delta_x . \quad (27)$$

Рассмотренное разделение бокового движения на независимые движения рыскания и крена используется при исследовании динамики осесимметричных ракет.

§ 7. Реакция ракеты на ступенчатые отклонения органов управления

I. Передаточные функции ракеты

Анализ динамических свойств ракеты как объекта управления основан на рассмотрении реакции летательного аппарата на входные воздействия двух типов:

- ступенчатые отклонения органов управления. Реакция ракеты на ступенчатое отклонение органов управления описывается передаточными функциями, которые являются решениями дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях. При этом предполагается, что возмущающие силы отсутствуют, отклонения органов управления ($\Delta\delta_{x_1}$, $\Delta\delta_{y_1}$, $\Delta\delta_{z_1}$) до начального момента t_0 равны нулю, а при $t \geq t_0$ имеют постоянные или нулевые значения;

- гармонические отклонения органов управления; в этом случае реакция ракеты описывается частотными характеристиками. Применение частотных методов исследования целесообразно для системы высокого порядка, когда решения дифференциальных уравнений и алгебраические критерии устойчивости становятся очень громоздкими.

В дальнейшем рассматриваются воздействия только первого типа. При этом предполагается, что динамические свойства ракеты описываются приближенными линейными уравнениями (22, 25, 27). Это означает, что движение тангажа, рыскания и крена рассматриваются без учета их взаимного влияния. Кроме того, будем считать динамические коэффициенты в указанных уравнениях "замороженными". Такие упрощения резко упрощают задачу анализа динамических свойств ракеты и обычно принимаются на предварительных этапах проектирования летательного аппарата и его системы управления.

При нулевых начальных условиях уравнения возмущенного движения ракеты с "замороженными" коэффициентами можно записать в операторной форме следующим образом:

$$Q(p)x_2(p) = R(p)x_1(p),$$

где $Q(p), R(p)$ - операторные полиномы;
 $x_1(p) = \Delta \delta_1(p)$ - изображение входной величины;
 $x_2(p)$ - изображение выходной величины;
 ею может быть любой из интересующих нас параметров движения: $\Delta \vartheta, \Delta \dot{\vartheta}, \Delta \varphi, \Delta \dot{\varphi}$ и т.д. В дальнейшем для упрощения записи уравнений возмущенного движения знак приращения Δ будем опускать.

Как известно, отношение изображения выходной величины к изображению входной величины, составленное при нулевых начальных условиях, называется п е р е д а - точной функцией $(W_{x_1}^{x_2}(p))$. Следовательно,

$$W_{x_1}^{x_2}(p) = \frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Зная передаточную функцию $W_{x_1}^{x_2}(p)$ и производя обратное преобразование Лапласа, можно определить отношение $\frac{x_2(t)}{x_1(t)}$, которое представляет собой закон изменения величины $x_2(t)$ при ступенчатом отклонении органов управления.

Для получения передаточных функций ракеты запишем систему уравнений (22), (25) и (27) в операторной форме:

$$\left. \begin{aligned} p(p+c_{\beta\dot{\beta}})\beta(p) + (pc_{\beta\alpha} + c_{\beta\alpha})\alpha(p) &= c_{\beta\delta}\delta_{x_1}(p); \\ p\beta(p) - (p-c_{\beta\alpha})\alpha(p) &= 0; \end{aligned} \right\} (28)$$

$$\left. \begin{aligned} p(p+v_{\varphi\omega_y})\varphi(p) + v_{\varphi\beta}\beta(p) &= v_{\varphi\delta}\delta_{y_1}(p); \\ -p\varphi(p) + (p+v_{\beta\beta})\beta(p) &= v_{\beta\delta}\delta_{y_1}(p); \end{aligned} \right\} (29)$$

$$p(p+v_{\gamma\omega_x})\gamma(p) = v_{\gamma\delta}\delta_{x_1}(p). \quad (30)$$

Передаточные функции ракеты по крену

Из уравнения (30) имеем:

$$W_{\delta}^{\gamma}(p) = \frac{\gamma(p)}{\delta_{x_1}(p)} = \frac{v_{\gamma\delta}}{p(p+v_{\gamma\omega_x})} = \frac{K_{\gamma}}{p(T_{\gamma}p+1)} \quad (31)$$

и

$$W_{\delta}^{\dot{\gamma}}(p) = \frac{\dot{\gamma}(p)}{\delta_{x_1}(p)} = \frac{K_{\dot{\gamma}}}{T_{\gamma}p+1}, \quad (32)$$

где $K_{\gamma} = \frac{v_{\gamma\delta}}{v_{\gamma\omega_x}}$ - передаточный коэффициент по углу крена;

$T_{\gamma} = \frac{1}{v_{\gamma\omega_x}} = -\frac{T_{x_1}}{M_{x_1}^{\omega_{x_1}}}$ - постоянная времени, характеризующая запаздывание ракеты на отклонение органов управления креном.

Передаточные функции ракеты по тангажу

Разрешим систему (28) относительно ϑ и α . Получим:

$$W_{\delta}^{\vartheta}(p) = \frac{\vartheta(p)}{\delta_{z_1}(p)} = \frac{c_{\vartheta\delta}(p - c_{\theta\alpha})}{p[(p + c_{\vartheta\vartheta})(p - c_{\theta\alpha}) + (pc_{\vartheta\alpha} + c_{\vartheta\alpha})]} = K_{\vartheta} \frac{T_1 p + 1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}; \quad (33)$$

$$W_{\delta}^{\alpha}(p) \frac{\vartheta(p)}{\delta_{z_1}(p)} = K_{\vartheta} \frac{T_1 p + 1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}; \quad (34)$$

$$W_{\delta}^{\alpha}(p) = \frac{c_{\vartheta\delta}}{(p + c_{\vartheta\vartheta})(p - c_{\theta\alpha}) + (pc_{\vartheta\alpha} + c_{\vartheta\alpha})} = K_{\vartheta} T_1 \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}; \quad (35)$$

$$W_{\delta}^{\theta}(p) = \frac{\theta(p)}{\delta_{z_1}(p)} = \left[\frac{\vartheta(p)}{\delta_{z_1}(p)} - \frac{\alpha(p)}{\delta_{z_1}(p)} \right] = K_{\vartheta} \frac{1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}; \quad (36)$$

где $K_{\vartheta} = -\frac{c_{\theta\alpha} c_{\vartheta\delta}}{c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha} c_{\vartheta\vartheta}} = -c_{\theta\alpha} c_{\vartheta\delta} T^2$ — передаточный коэффициент ракеты по углу тангажа;

$T = \frac{1}{\sqrt{c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha} c_{\vartheta\vartheta}}}$ — постоянная времени ракеты;

$\xi = (c_{\vartheta\vartheta} + c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha}) \frac{T}{2}$ — относительный коэффициент демпфирования

$$T_1 = -\frac{1}{c_{\theta\alpha}}.$$

В некоторых случаях за выходные величины принимают не угловые отклонения, а нормальные перегрузки. Например, чтобы составить передаточную функцию $\frac{n_y(p)}{\delta_{z_1}(p)}$, достаточно установить связь между изображениями $n_y(p)$ и $\theta(p)$. Из первого уравнения системы (22) имеем:

$\dot{\theta} = \dot{\vartheta} - \dot{\alpha} = -c_{\vartheta\alpha} \alpha$, где $c_{\vartheta\alpha} \approx -\frac{P_0 + Y^\alpha}{m \cdot v_0}$. Следовательно; $\dot{\theta} = \frac{P_0 + Y^\alpha}{G} \alpha \frac{G}{m v_0}$ или $n_y = \frac{v_0}{g} \dot{\theta}$. Далее, рассматривая $\frac{v_0}{g}$ как число ($v_0 = const$; $g = const$), получим

$$n_y(p) = \frac{v_0}{g} p \theta(p)$$

и

$$W_{\delta}^{n_y}(p) = \frac{n_y(p)}{\delta_{z_1}(p)} = K_{\vartheta} \frac{v_0}{g} \cdot \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad (37)$$

Аналогично определяются передаточные функции для движения рыскания.

Напомним, что полученные выражения справедливы при следующих условиях;

- скорость полета ракеты известна и неизменна, т.е. рассматривается короткопериодическое движение;
- влияние силы тяжести на возмущенное движение мало ($c_{\theta\vartheta} = \theta$);
- ракета осесимметрична и стабилизирована по крену или по угловой скорости крена, что позволяет движения рыскания и крена рассматривать отдельно.

2. Переходные процессы при ступенчатом отклонении органов управления

Реакции ракеты на ступенчатое отклонение органов управления характеризуют ее устойчивость и качество переходного процесса при быстрых отклонениях управляющих органов. Для исследования подобных реакций будем рассматривать переход ракеты из установившегося режима криволинейного движения в другой режим полета, используя при этом прием замораживания динамических коэффициентов.

Переходный процесс при отклонении органов управления креном

Рассмотрим вращение ракеты вокруг ее продольной оси ox_1 при ступенчатом отклонении органов управления креном на угол $\delta_{x_1}^s$. Используя выражение

$$(T_{\gamma} p + 1) \dot{\delta}^*(p) = K_{\gamma} \delta_{x_1}^s(p),$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение аperiodического звена, определим характеристики этого звена, т.е. найдем переходную характеристику реакции звена на ступенчатый сигнал $\delta_{x_1}^s$.

Напомним, что если изображение представляется дробно-рациональной функцией вида

$$x(p) = \frac{R(p)}{Q(p)},$$

причем степень многочлена $R(p)$ ниже степени многочлена $Q(p)$, то, используя теорему разложения, можно получить

следующее выражение для определения оригинала операторной функции $X(p)$:

$$O_p x(p) = x(t) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{R(p)}{Q'(p)} \right]_{p=p_j} e^{p_j t},$$

где p_j - корни многочлена $Q(p)$.

Поскольку в нашем случае

$$\delta_{x_1}(p) = \frac{\delta_{x_1}}{p}$$

и, следовательно,

$$\frac{\dot{f}(p)}{\delta_{x_1}} = \frac{K_{\gamma}}{p(T_{\gamma} p + 1)},$$

то, переходя от изображения к оригиналу, получим

$$\frac{\dot{f}(t)}{\delta_{x_1}} = K_{\gamma} \left(1 + \frac{1}{-\frac{2}{T_{\gamma}} T_{\gamma} + 1} e^{-\frac{t}{T_{\gamma}}} \right) = K_{\gamma} (1 - e^{-\frac{t}{T_{\gamma}}}); \quad (38)$$

интегрируя, будем иметь

$$\frac{f(t)}{\delta_{x_1}} = K_{\gamma} \left[t - T_{\gamma} (1 - e^{-\frac{t}{T_{\gamma}}}) \right]. \quad (39)$$

Из формулы (38) видно, что с увеличением времени t угловая скорость \dot{f} , изменяясь аperiodически, стремится к значению $K_{\gamma} \delta_{x_1}$, имеющему место в установившемся режиме полета.

Постоянная времени T_{γ} характеризует скорость протекания этого процесса, т.е. степень

инерционности ракеты в движении крена. Так как для любого типа ракет $T_p > 0$, то свободное движение в рассматриваемом переходном режиме всегда затухающее.

Переходные процессы при отклонении органов
управления тангажом и рысканием

Ограничимся рассмотрением реакций ракеты в ее продольном движении, так как аналогичные выражения можно получить и при отклонении органов управления рысканием путем замены δ на ψ , α на β , θ на ψ_c и т.д.

Выражения (34) - (37) показывают, что по отношению к выходным величинам δ , α , $\dot{\theta}$, n_y ракета является звеном второго порядка с передаточной функцией

$$W_{\delta}^x(p) = \frac{x(p)}{\delta_1(p)} = K \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (40)$$

где x - любая из величин δ , $\dot{\theta}$, α , n_y или ψ , ψ_c , β , n_z ;

K - соответствующий передаточный коэффициент

$$K_{\delta}; K_{\delta} \frac{v_0}{g}; K_{\delta} T_{1\delta} \quad \text{или} \quad K_{\psi};$$

$$K_y \frac{v_0}{g}; K_{\psi} T_{1\psi}.$$

ξ - относительный коэффициент демпфирования (ξ_{δ} или ξ_{ψ}).

T - постоянная времени (T_{δ} или T_{ψ});

Характер переходного процесса определяется корнями характеристического уравнения

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0 \quad (41)$$

или

$$\frac{1}{c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha} c_{\vartheta\vartheta}} p^2 + \frac{c_{\vartheta\vartheta} + c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha}}{c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha} c_{\vartheta\vartheta}} p + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$p_{1,2} = \frac{1}{T} \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right) = -\frac{c_{\vartheta\vartheta} + c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha}}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c}{(c_{\vartheta\vartheta} + c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha})^2}} \right], \quad (42)$$

т.е. характер корней $p_{1,2}$ зависит от знака коэффициента c , равного

$$c = c_{\vartheta\alpha} - c_{\theta\alpha} c_{\vartheta\vartheta} = -\frac{M_{z_1}^\alpha}{J_{z_1}} - \frac{p_0 + y^\alpha}{m} \frac{M_{z_1}^{\omega_{z_1}}}{J_{z_1}}. \quad (43)$$

Здесь возможны следующие три случая:

I) $c < 0$. Оба корня вещественные — один положительный и один отрицательный. Если в выражении (40) перейти от изображения к оригиналу, то получим

$$\frac{x(t)}{\delta_1} = K \left[1 + \frac{e^{p_1 t}}{T^2 p_1 (p_1 - p_2)} + \frac{e^{p_2 t}}{T^2 p_2 (p_2 - p_1)} \right]. \quad (44)$$

Поскольку переходная функция (44) определяет закон возмущения $x(t)$ при ступенчатом отклонении органов управления, причем $p_1 > 0$, $p_2 < 0$, то первая ее со-

ставляющая с течением времени возрастает, а вторая убывает, стремясь к нулю. Следовательно, в данном случае ракета будет неустойчивой;

2) $c = 0$. Это случай нейтральной ракеты - один корень нулевой ($p_1 = 0$), а второй вещественный. Поэтому

$$W_{x(p)}^{\delta} = \frac{K}{T^2 \left(p^2 + \frac{2\xi}{T} p + \frac{1}{T^2} \right)} = \frac{K}{T^2 (p - p_1)(p - p_2)},$$

но $p_1 = 0$, следовательно,

$$W_{x(p)}^{\delta} = \frac{\frac{K}{T^2}}{p^2(p - p_2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p - p_2}; \quad (45)$$

переходя к оригиналу, будем иметь:

$$\frac{x(t)}{\delta_1} = A + Bt + Ce^{p_2 t}; \quad A = -\frac{K}{T^2 p_2^2}; \quad B = -\frac{K}{T^2 p_2}; \quad C = -A = \frac{K}{T^2 p_2^2}$$

или, подставляя выражения для коэффициентов A , B , C , получим:

$$\frac{x(t)}{\delta_1} = K \left[\frac{e^{p_2 t} - 1}{T^2 p_2^2} - \frac{t}{T^2 p_2^2} \right], \quad (46)$$

т.е. в данном случае переходная функция имеет составляющую, возрастающую по модулю с течением времени. Но здесь этот процесс идет по линейному закону;

3) $c > 0$. Ракета устойчива, причем возможны следующие варианты: $\xi > 1$, $\xi = 1$, $\xi < 1$.

$\xi > 1$. Корни p_1 и p_2 отрицательны и различны

по величине. Переходная функция $\frac{x(t)}{\delta_1}$ вновь представляется формулой (44), но теперь вторая и третья ее составляющие являются по модулю убывающими функциями, т.е. с увеличением t возмущение $x(t)$ стремится к установившемуся значению, равному $K\delta_1$;

$\xi = 1$. Из (42) имеем

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{T} < 0.$$

Переходная функция записывается в виде

$$\frac{x(t)}{\delta} = \frac{K}{T^2} \left[\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1-t\rho_2^2}{\rho_2^2} e^{\rho_2 t} \right] = K \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}} \right], \quad (47)$$

т.е. и в этом случае переходный процесс аperiodический. Свободное движение с течением времени затухает

$[x(t) \rightarrow K\delta_1]$;

$\xi < 1$. Корни ρ_1 и ρ_2 комплексные сопряженные:

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{T} \left(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2} \right). \quad (48)$$

Подставляя ρ_1 и ρ_2 в формулу (44) и используя формулы Эйлера для комплексных чисел, после некоторых преобразований получим

$$\frac{x(t)}{\delta_1} = K \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \omega t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega t \right) \right] \quad (49)$$

или

$$\frac{x(t)}{\delta_1} = K \left[1 - \frac{e^{-\frac{\xi}{T}t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \left(\omega t - \alpha \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right], \quad (50)$$

где $\omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ — частота собственных колебаний ракеты.

Из выражения (50) видно, что переходный процесс является колебательным, причем колебания затухают, так как $-\frac{\xi}{T} < 0$. Чем больше коэффициент демпфирования $\frac{\xi}{T}$, тем быстрее затухают свободные колебания.

Таким образом, характер переходного процесса для статически устойчивой ракеты определяется только относительным коэффициентом демпфирования ξ . При $\xi \geq 1$ максимальное отклонение параметра x (т.е. угла атаки, коэффициента перегрузки и т.д.) равно установившемуся его значению:

$$x_{\max} = x_{уст} = K \cdot \delta. \quad (51)$$

При $\xi < 1$ максимальное значение x в переходном процессе будет достигнуто в момент времени t_m , определяемый условием $\dot{x}(t) = 0$. Используя выражение

$$x = x_{уст} \left[1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left(\cos \omega t + \frac{\xi}{\omega T} \sin \omega t \right) \right],$$

нетрудно определить, что $t_m = \frac{\pi}{\omega}$, т.е. максимальное отклонение x , будет равно

$$x_{\max} = x_{уст} \left(1 + e^{-\frac{\xi}{T} \frac{\pi}{\omega}} \right). \quad (52)$$

Увеличение параметра движения (перегрузки, угла атаки и т.д.) по сравнению с его установившимся значением называют забросом,

$$x_{заб} = x_{max} - x_{уст}$$

а отношение $\sigma = \frac{x_{max} - x_{уст}}{x_{уст}}$ — относительным забросом, откуда

$$x_{max} = (1 + \sigma)x_{уст} \quad (53)$$

Следовательно, при ступенчатом отклонении органов управления относительный заброс будет равен

$$\sigma = e^{-\frac{\xi}{T} \frac{T}{\omega}} = e^{-\frac{T\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (54)$$

т.е. $\sigma = \sigma(\xi)$. Для ракет коэффициент ξ обычно мал. Поэтому относительный заброс σ оказывается значительным, особенно при полете на больших высотах.

Формулы (51), (53) и (54) позволяют найти максимальные значения параметров α , n_y , θ , ψ_c , β , n_x , которые будет иметь данная ракета в рассматриваемой точке траектории после мгновенного отклонения органов управления на угол δ_1 .

Напомним, что в приведенных выше выражениях всюду опущен знак отклонения Δ , т.е. вместо $x(t)$ и δ_1 следовало бы писать $\Delta x(t)$ и $\Delta \delta_1$. Если учесть это обстоятельство, то, например, формула для расчета полной нормальной перегрузки $n_{y\max}$ запишется так:

$$n_{y\max} = n_{y0} + \Delta n_{y\max} = n_{y0} + \Delta n_{yуст}(1 + \sigma) \quad (55)$$

где n_{y0} - значение перегрузки в невозмущенном режиме полета.

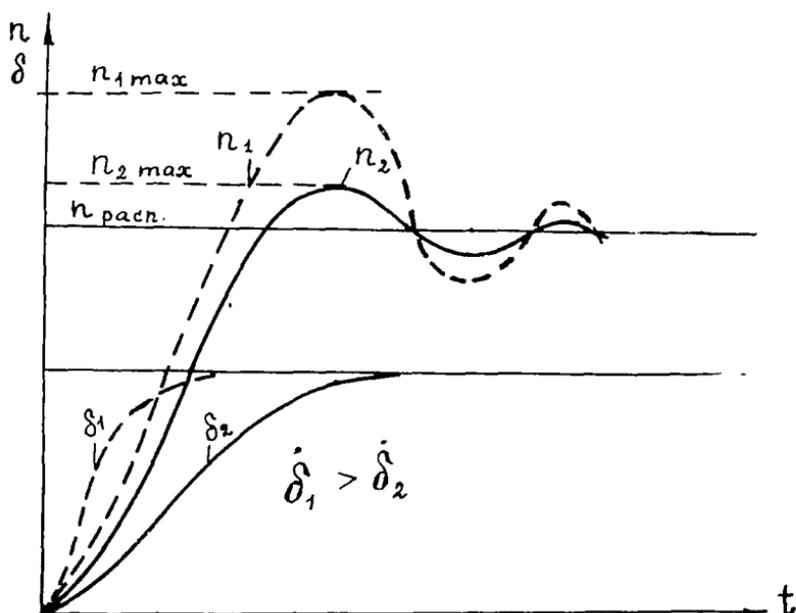


Рис.4.4

Наиболее тяжелым будет случай, когда невозмущенный полет происходит с $n_0 = -n_{расп}$, а органы управления мгновенно переключаются на угол $2\delta_{1max}$ т.е.

$\Delta n_{уст} = 2n_{расп}$. При этом

$$n_{max} = -n_{расп} + 2n_{расп}(1 + \sigma) = n_{расп}(1 + 2\sigma) , \quad (56)$$

т.е. максимальная перегрузка может значительно превышать располагаемую, что надо учитывать при проекторочных расчетах ракеты (например, в прочностных расчетах) и ее системы управления.

Однако надо иметь в виду, что в общем случае величина σ , а следовательно, и n_{max} зависят не только от коэффициента ξ , но и от закона отклонения органов управления $\delta_i(t)$, в частности от скорости их отклонения: при уменьшении скорости перегрузка также уменьшается (рис.4.4), но при этом ухудшается точность управления ракетой.

§ 8. Устойчивость системы "ракета-автомат стабилизации"

В предыдущих параграфах при исследовании возмущенного движения ракеты предполагалось, что отклонения органов управления являются либо известными функциями времени $\delta(t)$, независимыми от элементов возмущенного движения, либо вообще остаются величинами постоянными, которые в частных случаях могут принимать и нулевые значения. Подчеркивалось также, что результаты подобных исследований характеризуют лишь собственные динамические свойства ракеты как неуправляемого объекта. При этом оказывается, что ракета без приборов управления является в отношении большинства элементов возмущенного движения нейтральной динамической системой. (Исключение составляют отклонения углов атаки и скольжения для статически устойчивых аппаратов).

Вопрос об устойчивости движения управляемого объекта может быть решен путем исследования динамических

свойств комплекса "ракета - система управления". Такие исследования основываются на совместном рассмотрении уравнений собственного возмущенного движения ракеты и уравнений, описывающих работу ее органов управления. При этом отклонения органов управления выражаются уже не в виде заранее известных функций времени, а в зависимости от самих элементов возмущенного движения рассматриваемой ракеты.

Как известно, в функции управления ракетой входят предотвращение случайного отклонения ракеты от заданной программной траектории и наведение ракеты на цель. Первая из этих задач решается с помощью автомата стабилизации, вторая - с помощью аппаратуры наведения.

Система стабилизации предназначена для обеспечения устойчивого углового движения корпуса ракеты и сведения к минимуму отклонений центра масс ракеты от расчетной траектории. Эта задача решается при помощи автомата угловой стабилизации и автомата стабилизации центра масс, причем угловая стабилизация обычно осуществляется раздельно в каждой из трех плоскостей - тангажа, рыскания и крена.

Рассмотрим методику исследования динамических свойств ракеты как звена системы автоматического регулирования на примере анализа продольной устойчивости ракеты с управлением только по каналу тангажа.

Типичная структурная схема канала стабилизации баллистической ракеты в плоскости тангажа приведена на рис.4.5. Здесь приняты следующие обозначения:

ИЭ - чувствительный (измерительный) элемент, измеряющий отклонение оси ракеты от заданного направления (т.е. угол ϑ) и вырабатывающий напряжение, пропорциональное этому отклонению. Угловые перемещения ракеты

фиксируются специальными гироскопами, а их преобразование в напряжение постоянного тока $u_{\mathcal{G}}$ может осуществляться, например, при помощи потенциометрических датчиков. Такие датчики позволяют получить зависимость $u_{\mathcal{G}} = u_{\mathcal{G}}(\vartheta)$, близкую к линейной ($u_{\mathcal{G}} = K_{\mathcal{G}} \vartheta$), т.е. передаточная функция данного звена автомата стабилизации выражается в виде

$$W_{\mathcal{G}}(p) = \frac{u_{\mathcal{G}}(p)}{\vartheta(p)} = K_{\mathcal{G}}; \quad (57)$$

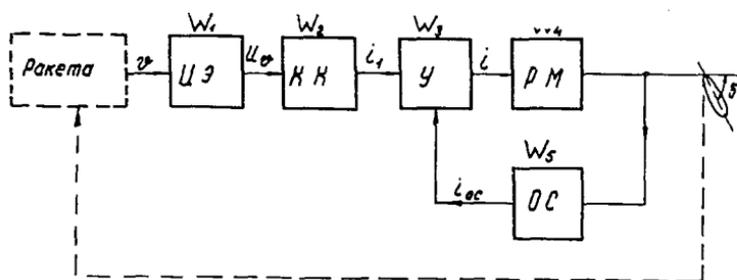


Рис.4.5

КК - корректирующий контур, осуществляющий требуемое преобразование напряжения $u_{\mathcal{G}}$. Допустим, что в качестве такого контура используется дифференцирующее звено первого порядка с омической нагрузкой Z_1 (рис.4.6). Входное напряжение $u_{\mathcal{G}}$ создает ток, который после прохождения через сопротивления Z_0 разветвляется в точке *O* на токи i' и i'' . Ток i' ,

проходящий через сопротивление z' , создает на сопротивлении z_1 напряжение, пропорциональное входному напряжению u_g , а ток i'' , проходящий через конденсатор C , создает на сопротивлении z_1 напряжение, пропорциональное производной от входного напряжения $\left(\frac{du_g}{dt}\right)$. Следовательно, результирующее напряжение на сопротивлении z_1 будет равно

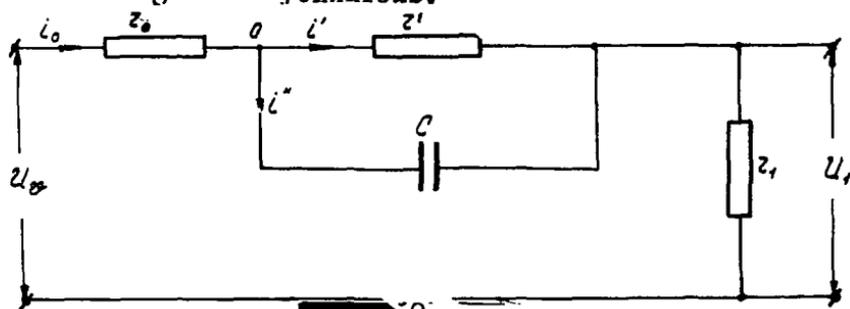
$$u_1 = i_1 z_1 \approx \left(K_g' \frac{du_g}{dt} + K_g u_g \right) z_1,$$

а передаточная функция, выражающая зависимость выходного тока i_1 от напряжения u_g , запишется так:

$$W_2(p) = \frac{i_1(p)}{u_g(p)} = K_g (T_g p + 1), \quad (58)$$

где $T_g = \frac{K_g'}{K_g}$ - постоянная времени дифференцирующего контура.

U - усилитель.



В нем сигнал усиливается по мощности и далее поступает на вход силового элемента (рулевой машины). Силовой элемент в соответствии с поданным сигналом поворачива-

ет на некоторый угол δ_1 органы управления (руль, поворотные камеры, сопла и т.п.). В итоге создается необходимый управляющий момент, заставляющий ракету отклоняться в сторону уменьшения угла δ . Если обозначить через K_y - коэффициент усиления и через T_y - постоянную времени усилителя, то передаточную функцию данного звена автомата стабилизации можно привести к виду

$$W_3(p) = \frac{z(p)}{i_1(p)} = \frac{K_y}{T_y p + 1} ; \quad (59)$$

PM - рулевая машина. Обычно в теоретических исследованиях рулевые приводы описывают дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T_\delta \frac{d\delta_1}{dt} + \delta_1 = K_\delta i .$$

Полагая коэффициенты этого уравнения величинами постоянными, получим следующую передаточную функцию:

$$W_4(p) = \frac{\delta_1(p)}{i(p)} = \frac{K_\delta}{T_\delta p + 1} ; \quad (60)$$

OC - обратная связь. Ток обратной связи i_{oc} пропорционален углу отклонения органов управления ($i_{oc} = K_{oc} \delta_1$); поэтому

$$W_5(p) = \frac{i_{oc}(p)}{\delta_1(p)} = K_{oc} . \quad (61)$$

Используя выражения (57) - (61), нетрудно получить передаточную функцию всего канала стабилизации ракеты в плоскости тангажа:

$$W_{\mathcal{D}}^{\delta}(p) = \frac{\delta_1(p)}{\mathcal{D}(p)} = \frac{W_1(p)W_2(p)W_3(p)W_4(p)}{1+W_3(p)W_4(p)W_5(p)}$$

или

$$W_{\mathcal{D}}^{\delta}(p) = \frac{\delta_1(p)}{\mathcal{D}(p)} = \frac{K_{\mathcal{D}}K_2K_yK_{\delta}(T_{\delta}p+1)}{(T_y p+1)(T_{\delta}p+1)+K_yK_{\delta}K_{oc}}. \quad (62)$$

Из последнего выражения видно, что если пренебречь инерционностью рулевой машины и усилителя, т.е. считать постоянные времена T_{δ} и T_y величинами достаточно малыми, то получим следующее дифференциальное уравнение, описывающее работу безынерционного автомата стабилизации:

$$\delta_1 = (K_1 + K_2 p) \mathcal{D}. \quad (63)$$

Для выявления влияния передаточных чисел K_1 и K_2 на характер возмущенного движения управляемой ракеты следует рассмотреть уравнения замкнутой системы, состоящей из объекта регулирования (ракеты) и регулятора (автомата стабилизации). Если, например, воспользоваться выражениями (22) и (63), то получим такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{D}} - \dot{\alpha} + c_{\theta\alpha} \alpha &= 0; \\ \ddot{\mathcal{D}} + c_{\mathcal{D}\mathcal{D}} \dot{\mathcal{D}} + c_{\mathcal{D}\alpha} \dot{\alpha} + c_{\mathcal{D}\alpha} \alpha &= c_{\mathcal{D}\delta} \delta_{z_1}^{\delta}; \\ \delta_{z_1}^{\delta} &= K_1 \mathcal{D} + K_2 \dot{\mathcal{D}}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Нетрудно показать, что коэффициенты характеристического уравнения системы (64)

$$\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0 \quad (65)$$

выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= c_{\vartheta\dot{\vartheta}} + c_{\vartheta\alpha} - c_{\vartheta\alpha} - K_2 c_{\vartheta\delta} ; \\ \alpha_2 &= c_{\vartheta\alpha} - c_{\vartheta\alpha} c_{\vartheta\dot{\vartheta}} - c_{\vartheta\delta} (K_1 - K_2 c_{\vartheta\alpha}) ; \\ \alpha_3 &= K_1 c_{\vartheta\alpha} c_{\vartheta\delta} . \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Из формул (66) видно, что в каждый из коэффициентов α_j ($j = 1, 2, 3$) в той или иной комбинации входят передаточные числа K_1 и K_2 , что позволяет посредством их изменения влиять на корни характеристического уравнения и получать такие их значения, при которых обеспечивается устойчивость движения ракеты. Именно здесь проявляется непосредственная зависимость между весовыми, механическими и аэродинамическими характеристиками ракеты, представленными в виде динамических коэффициентов, и параметрами системы управления. Анализ этих зависимостей дает необходимые сведения для синтеза системы автоматического управления и для выработки рекомендаций по выбору указанных характеристик такими, чтобы они содействовали системе управления в обеспечении устойчивого движения.

Например, если уравнение управления для баллистической ракеты выбрано в виде $\delta_{z_1}^p = K \mathcal{U}$, то при движении на больших высотах, где роль аэродинамических моментов ничтожна ($c_{\vartheta\alpha} = c_{\vartheta\alpha} = c_{\vartheta\dot{\vartheta}} = 0$), не все условия устойчивости по критерию Гурвица ($\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 > 0$) будут удовлетворены. Действительно, поскольку в данном случае $\alpha_1 = -c_{\vartheta\alpha}$, $\alpha_2 = -c_{\vartheta\delta} K$, $\alpha_3 = K c_{\vartheta\alpha} c_{\vartheta\delta}$, то величина $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3$ оказыва-

ся равной нулю. Следовательно, система находится на границе устойчивости и ракета будет совершать незатухающие колебания. Причиной этому явился неправильный закон регулирования, в соответствии с которым на органы управления подается сигнал, пропорциональный только углу ϑ .

Для устранения этого недостатка в уравнение управления вводят члены, пропорциональные первой ($\dot{\vartheta}$), а иногда и второй ($\ddot{\vartheta}$) производной регулируемой величины, и некоторые другие составляющие - в зависимости от того, по каким из параметров движения осуществляется управление ракетой. Так, если автомат стабилизации реагирует на изменение высоты полета (y), то в правую часть уравнения (63) следует ввести член $K_4 y$, а общую систему (64) - дополнить уравнением для отклонений по высоте.

Уравнение (63) справедливо для безынерционного автомата стабилизации. Если же учесть инерционность рулевой машины, то уравнение управления в случае регулирования по отклонениям ϑ , $\dot{\vartheta}$, $\ddot{\vartheta}$ и y запишется так:

$$\delta_{z_1}^{\dot{}} + K_0 \delta_{z_1}^{\ddot{}} = K_1 \vartheta + K_2 \dot{\vartheta} + K_3 \ddot{\vartheta} + K_4 y, \quad (67)$$

причем метод исследования динамической устойчивости системы "ракета - автомат стабилизации" остается прежним. Только угол $\delta_{z_1}^{\dot{}}$ следует принять за новую неизвестную, а характеристическое уравнение будет иметь вместо третьего шестой порядок.

Аналогично решается задача исследования устойчивости бокового движения управляемой ракеты.

§ 9. Эффективность и предельно допустимые отклонения органов управления

Эффективность и предельно допустимые углы отклонения являются основными показателями органов управления. Под эффективностью органов управления понимается отношение управляющего момента, возникающего при отклонениях органов управления, к соответствующему моменту инерции ракеты. Так, эффективность органов управления

тангажом характеризуется коэффициентом $c_{\gamma\delta} = \frac{M_{z_1}^{\delta z_1}}{J_{z_1}}$,

рысканием - коэффициентом $b_{\psi\delta} = \frac{M_{y_1}^{\delta y_1}}{J_{y_1}}$, креном -

$$b_{\gamma\delta} = \frac{M_{x_1}^{\delta x_1}}{J_{x_1}}.$$

Эффективность и предельно допустимые отклонения органов управления определяют максимальные управляющие моменты, которые могут быть созданы органами управления. Максимальные моменты управления тангажом, рысканием и креном, отнесенные к соответствующим моментам инерции ракеты, будут равны:

$$c_{\gamma\delta} \delta_{z_1, \max}; \quad b_{\psi\delta} \delta_{y_1, \max}; \quad b_{\gamma\delta} \delta_{x_1, \max}.$$

Очевидно, одни и те же управляющие моменты могут быть созданы при различных сочетаниях значений коэффициентов $c_{\gamma\delta}$, $b_{\psi\delta}$, $b_{\gamma\delta}$ и предельных углов отклонения органов управления $\delta_{z_1}^{\delta}$, $\delta_{y_1}^{\delta}$, $\delta_{x_1}^{\delta}$. За-

дача конструктора - определить оптимальные соотношения между этими характеристиками.

Существование указанных оптимальных соотношений обуславливается следующими причинами. При прочих равных условиях эффективность органов управления прямо пропорциональна площади воздушных или газовых рулей, тяге управляющих двигателей и т.п. Поэтому с точки зрения весовых характеристик ракеты естественно стремление конструктора к снижению эффективности органов управления. Однако уменьшение размеров и веса органов управления не обязательно сопровождается уменьшением веса всей конструкции ракеты, так как при этом необходимо увеличивать предельные углы отклонения органов управления, что может привести к дальнейшему снижению их эффективности, росту аэродинамического сопротивления и потере тяги управляющих двигателей. Кроме того, предельные отклонения органов управления ограничиваются различными конструктивными соображениями.

Таким образом, задачи по определению потребной эффективности и предельных отклонений органов управления находятся в тесной взаимосвязи и должны рассматриваться совместно для отыскания оптимальных решений. Эти задачи удобно решать путем сравнения нескольких вариантов, отличающихся различными значениями предельных углов отклонения органов управления. Расчет каждого варианта сводится к определению потребной эффективности органов управления при заданных значениях углов $\delta_{i \max}$. Кроме того, на решение задачи могут накладываться ограничения, обусловленные максимально допустимыми возмущениями параметров движения ракеты в характерных точках ее траектории полета (например, в конце активного участка траектории баллистической ракеты).

В такой постановке задачи для определения потребной эффективности необходимо знать, как изменяются параметры возмущенного движения ракеты при наличии ограничений на углы отклонения органов управления, т.е. при условии

$$|\delta_i(t)| \leq \delta_{i, \max}.$$

Учитывая, что $\delta_i(t) = \delta_{np}(t) + \Delta \delta_i(t)$, где $\delta_{np}(t)$ - отклонение органа управления, потребное для полета по программной траектории, будем иметь

$$|\delta_{np}(t) + \Delta \delta_i(t)| \leq \delta_{i, \max}. \quad (68)$$

В тех случаях, когда потребные отклонения органов управления при полете по программной траектории малы (например, для баллистической ракеты), вместо формулы (68) можно воспользоваться приближенным условием

$$|\Delta \delta_i(t)| \leq \delta_{i, \max}. \quad (69)$$

В качестве примера рассмотрим методику расчета эффективности органов управления тангажом. Заметим, что поскольку движение ракеты в плоскостях тангажа и рыскания описывается подобными уравнениями, то исследование эффективности и выбор оптимальных параметров органов управления рысканием может быть проведен по аналогичной методике.

Возмущенное движение ракеты в плоскости тангажа описывается системой уравнений (5). Включая в нее закон управления, например в виде

$$K_1 \Delta \dot{\gamma} + K_2 \Delta \ddot{\gamma} + K_3 \Delta \ddot{\gamma} + K_4 \Delta \ddot{\gamma} = \Delta \delta_{z_1} + K \Delta \dot{\delta}_{z_1}, \quad (70)$$

будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{v} + c_{vv} \Delta v + c_{v\vartheta} \Delta \dot{\vartheta} + c_{v\alpha} \Delta \alpha &= f_v(t); \\ \Delta \dot{\vartheta} - \Delta \dot{\alpha} + c_{\theta v} \Delta v + c_{\theta \vartheta} \Delta \dot{\vartheta} + c_{\theta \alpha} \Delta \alpha &= f_{\theta}(t); \\ \Delta \ddot{\vartheta} + c_{\vartheta v} \Delta v + c_{\vartheta \dot{\vartheta}} \Delta \dot{\vartheta} + c_{\vartheta \dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + c_{\vartheta \alpha} \Delta \alpha - \\ &\quad - c_{\vartheta \delta} \Delta \delta_{z_1} = f_{\vartheta}(t); \\ K_1 \Delta \dot{\vartheta} + K_2 \Delta \dot{\vartheta} + K_3 \Delta \ddot{\vartheta} + K_4 \Delta y &= \Delta \delta_{z_1} + K \Delta \dot{\delta}_{z_1}. \end{aligned} \right\} (71)$$

Чтобы эта система продольного возмущенного движения ракеты была замкнутой, в нее необходимо добавить еще уравнение для отклонений по высоте (Δy). Здесь неизвестными функциями являются $\Delta v(t)$, $\Delta y(t)$, $\Delta \dot{\vartheta}(t)$, $\Delta \alpha(t)$ и $\Delta \delta_{z_1}(t)$. Для оценки эффективности органов управления надо знать, как изменяются эти функции на траектории при заданных начальных значениях и воздействии на ракету различных возмущающих факторов.

Таким образом, задача исследования управляемости ракеты в плоскости тангажа связана с необходимостью интегрирования уравнений движения при заданных начальных условиях

$$\Delta v_0, \Delta y_0, \Delta \dot{\vartheta}_0, \Delta \ddot{\vartheta}_0, \Delta \dot{\delta}_{z_1,0}, \Delta \delta_{z_1,0} \quad (72)$$

и ограничении

$$|\Delta \delta_{z_1}(t)| \leq \delta_{z_1, \max}^2. \quad (73)$$

Ограничение (73) вносит в задачу нелинейность. Это затруднение можно преодолеть следующим путем. Допустим,

что $\Delta \delta_{z_1}^s = \Delta \delta_{z_1}^s(t)$ есть решение системы (71) при начальных условиях (72) без учета ограничения (73). Такое решение остается справедливым до тех пор, пока $|\Delta \delta_{z_1}^s(t)| < \delta_{z_1, \max}^s$, а также при $|\Delta \delta_{z_1}^s(t)| = \delta_{z_1, \max}^s$ при условии, что $|\delta_{z_1}^s(t)|$ - невозрастающая функция. В противном случае, т.е. если $\Delta \delta_{z_1}^s(t)$ - возрастающая функция, следует рассмотреть движение ракеты как неуправляемого объекта с предельно отклоненными органами управления.

Пусть в некоторый момент времени t_1 отклонение органов управления достигло своего предельного значения и при этом $|\Delta \delta_{z_1}^s(t)|$ - возрастающая функция. Тогда, начиная с этого момента, возмущенное движение ракеты будет описываться системой, несколько отличной от системы (71), из состава которой надо исключить закон управления, а третье уравнение записать в виде

$$\Delta \ddot{v} + c_{\beta v} \Delta v + c_{\beta \dot{\beta}} \Delta \dot{\beta} + c_{\beta \alpha} \Delta \dot{\alpha} + c_{\beta \alpha} \Delta \alpha = \pm c_{\beta \delta} \delta_{z_1, \max}^s + \ddot{\varphi}(t). \quad (74)$$

Полученную таким образом систему следует решать до момента t_2 , когда

$$|K_1 \Delta \dot{v} + K_2 \Delta \dot{\beta} + K_3 \Delta \ddot{\beta} + K_4 \Delta v| = \delta_{z_1, \max}^s, \quad (75)$$

причем левая часть равенства (75) в момент t_2 - убывающая функция. Система решается при начальных условиях Δv_1 , $\Delta \beta_1$, $\Delta \dot{\beta}_1$, $\Delta \ddot{\beta}_1$, т.е. при значениях в момент времени t_1 соответствующих функций, представляющих решение системы (71) при начальных условиях (72).

Перед коэффициентом $c_{\partial\partial}$ следует принимать знак + , если $\Delta\delta_{z_1}^1(t_1) > 0$, и знак - , если $\Delta\delta_{z_1}^1(t_1) < 0$. Начиная с момента времени t_2 , возмущенное движение вновь описывается системой (71) и т.д.

Если кроме ограничения (73) заданы из тех или иных соображений предельно допустимые значения возмущений Δv , Δy , $\Delta \dot{v}$, $\Delta \dot{y}$ на всей траектории или на отдельных ее участках, то, решая систему уравнений возмущенного движения при различных фиксированных параметрах органов управления, можно определить рациональные величины этих параметров при условии, что все ограничения, накладываемые на параметры движения, не нарушаются.

В общем случае системы уравнений возмущенного движения могут быть проинтегрированы лишь численными методами. Однако при некоторых дополнительных упрощениях (например, в случае медленного изменения возмущающего воздействия) возможно построение решений этих систем в квадратурах.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ В ВОДЕ

1. Общее понятие о гидродинамических силах, действующих на тела при их неустановившемся движении в воде

Гидродинамические силы, действующие на тела при их движении в жидкости и газе, делятся на две группы:

- силы, обусловленные вихреобразованием и вязкостью;
- силы, связанные с инерционными свойствами среды, величина которых определяется интенсивностью изменения суммарной кинетической энергии жидкости в процессе неустановившегося движения тел.

Если при движении в воздухе силы второй группы обычно незначительны по сравнению с силами первой группы и ими, следовательно, в расчетах можно пренебречь, то при движении в воде неучет ее инерционности приводит к значительным ошибкам в результатах прогнозирования суммарных гидродинамических нагрузок.

Необходимость учета инерционных свойств среды при расчете сил, действующих на тела при их неустановившемся движении в воде, отличает гидродинамический расчет от аэродинамического.

Для расчета гидродинамических сил инерционного происхождения обычно используется механическая модель, в рамках которой принимается, что тело обтекается потен-

циальным потоком идеальной несжимаемой жидкости. С потенциальным течением иметь дело сравнительно просто вследствие легко доказуемого его свойства, что все поле скоростей при потенциальном течении зависит лишь от движения границ потока в данный момент времени и совершенно не зависит от предшествующей истории этого движения.

Если подвижные границы потока образуются лишь поверхностью тела, движение которого мы изучаем, то, следовательно, поле скоростей в разбираемом случае зависит лишь от движения тела в данный момент.

При учете в модели неустановившегося обтекания вязкости и вызванного ею вихреобразования мы уже не находим той привлекательной однозначной связи между картиной течения и граничными условиями в данный момент времени, которая была описана выше. Наличие вихревых областей в окрестности тела наделяет течение жидкости, а следовательно, и нагружение тела "памятью", так что его характеристики в данный момент времени оказываются зависящими от предыдущей истории движения. Это явление аналогично влиянию истории деформации пластического тела под действием нагрузки на распределение напряжений в данный момент времени.

Учет влияния истории движения на нагружение тела в данный момент представляет чрезвычайно сложную задачу. Поэтому при проведении практических расчетов обе группы гидродинамических сил обычно определяются по гипотезе стационарности, в основу которой положено, что при неустановившемся движении тела в воде действующие на тело силы зависят от времени только через кинематические параметры и, таким образом, не зависят явно от времени.

Первую группу сил (силы, обусловленные вихреобразованием и вязкостью) определяют обычно в аэродинамических трубах или в опытовых бассейнах, в которых определяется зависимость сил от угла атаки, угловых скоростей и поступательных скоростей движения.

Вторую группу сил, связанную с инерционными свойствами жидкости, определяют, пользуясь потенциальной теорией безотрывного обтекания тела идеальной жидкостью, предполагая, что наличие вихреобразования за телом не влияет существенно на ту часть давления в каждой точке поверхности тела, которая определяется нестационарностью движения.

§ 2. Общая постановка задачи о расчете гидродинамических сил инерционной природы

Вначале мы изучим гидродинамические силы второй группы, т.е. силы инерционной природы, пользуясь теорией безотрывного обтекания тела потенциальным потоком идеальной жидкости.

Эти силы приводятся к силам давления, приложенным к элементам поверхности тела S . Если \vec{n} — *орт* внешней нормали к поверхности S , то на элемент ds поверхности S будет действовать сила давления $-p\vec{n}ds$.

Для главного вектора этих сил \vec{R} и для главного момента их относительно начала координат \vec{M} мы получим выражения

$$\vec{R} = - \iint_S p \vec{n} ds, \quad \vec{M} = - \iint_S p (\vec{r} \times \vec{n}) ds, \quad (I)$$

где \vec{z} - есть радиус-вектор точки поверхности S относительно начала координат.

Давление p легко определить, если известно решение для потенциала скоростей φ .

Функции φ и p связаны между собой интегралом Коши-Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = F(t) . \quad (2)$$

Здесь v - скорость границ жидкости, возмущенной движением тела ($\vec{v} = \text{grad } \varphi$);

t - текущее время;

g - ускорение силы тяжести;

ρ - массовая плотность воды. Ось z направлена вертикально вверх;

$F(t)$ - функция, вид которой определится, если будет наперед задана зависимость p от времени в одной точке поля.

Так, если известно давление в невозмущенной среде (вдали от движущегося тела) в точке с координатой z (обозначим его p_0), то из выражения (2) найдем

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{v^2}{2} . \quad (3)$$

Подставляя это значение p в формулы (1), мы определим \vec{R} и \vec{M} .

Обратимся к граничным условиям для φ . Условия на поверхности перемещающегося тела просто состоят в том, что всюду на ней составляющая скорости жидкости $\partial \varphi / \partial n$, перпендикулярная к этой поверхности, определяется дви-

жением самого тела. Частицы, соприкасающиеся с телом, должны участвовать в его движении по направлению нормали, поскольку внутри течения, если исключить неза- трагиваемые здесь случаи кавитации, не должно образ- вываться каверн. На неподвижных стенках

$$\partial\varphi/\partial n = 0.$$

Если жидкость снаружи не ограничена, требуется, что- бы в отдаленных точках она находилась в состоянии по- коя. Это требование выполняется, в частности, если положить, что на бесконечном удалении от тела

$$\varphi = 0.$$

Таким образом, для расчета гидродинамических сил инерционной природы следует предварительно вычислить потенциал скоростей, т.е. решить уравнение Лапласа при соответствующих граничных условиях.

§ 3. Пример использования общей теории

В качестве примера расчета гидродинамических реак- ций жидкости исследуем силовое взаимодействие бесконеч- но длинного кругового цилиндра с цилиндрическим слоем жидкости, ограниченным снаружи жесткой стенкой при по- ступательном перемещении цилиндра в направлении, нор- мальном к его оси. В рассматриваемый момент времени ось цилиндра совпадает с осью цилиндрической стенки.

Введем цилиндрические координаты x , r , θ (рис. 5.1). Пусть ось x совпадает с осью цилиндра. Так как изучаемая система является бесконечно длинной, то картина течения не зависит от координаты x . Такое течение называется плоским.

Пусть $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(t)$ - вектор скорости оси цилиндра, лежащий в плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ (рис.5.1), r_1 , r_2 - радиусы нормальных сечений цилиндра и цилиндрической стенки.

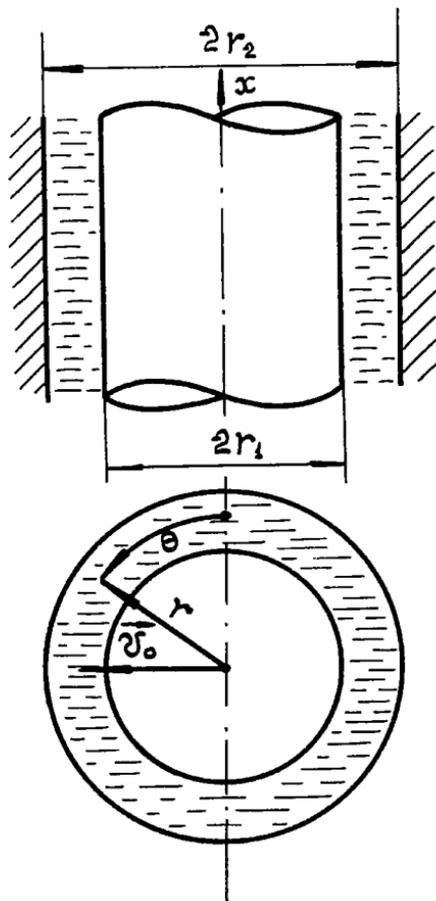


Рис.5.1

Задачу расчета гидродинамических сил начнем с определения потенциала скоростей φ , соответствующего заданному закону движения цилиндра. Решение для φ должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

и граничным условиям:

- на поверхности цилиндра

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r_1} = v_0 \sin \theta ; \quad (5)$$

- на цилиндрической стенке

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r_2} = 0. \quad (6)$$

При решении уравнения (4) воспользуемся методом разделения переменных (методом Фурье). Согласно этому методу представим искомый потенциал $\varphi = \varphi(r, \theta, t)$ в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной r , θ и t :

$$\varphi(r, \theta, t) = Q(r) S(\theta) T(t). \quad (7)$$

Подстановка (7) в граничные условия (5) дает

$$Q'(r_1) S(\theta) T(t) = v_0 \sin \theta, \quad (8)$$

где штрихом обозначена производная по r . Устранив из (7) и (8) произведение $S(\theta) T(t)$, найдем

$$\varphi = \frac{Q(r)}{Q'(r_1)} v_0 \sin \theta. \quad (9)$$

Далее, подставим выражение (9) в уравнение Лапласа (4). После сокращения на $v_0 \sin \theta / Q'(z_1)$ получим

$$Q'' + \frac{1}{z} Q' - \frac{i}{z^2} Q = 0. \quad (10)$$

Решение однородного обыкновенного уравнения (10) представим в виде

$$Q(z) = z^k. \quad (11)$$

Уравнение для k имеет вид

$$k^2 = i,$$

т.е.

$$k = \pm i.$$

Общее решение для функции Q :

$$Q = c_1 \left(-\frac{c_2}{z} + z \right). \quad (12)$$

Постоянную интегрирования c_2 найдем после подстановки решения (12) в граничное условие (6):

$$c_2 = z_2^2.$$

Таким образом,

$$Q = c_1 \left(\frac{z_2^2}{z} + z \right). \quad (13)$$

Используя только что полученный результат, найдем из (9)

$$\varphi = -v_0 \sin \theta z \frac{z_2^2 / z_2^2 + 1}{z_2^2 / z_1^2 - 1}. \quad (14)$$

Из выражения (14), как частный случай, вытекает решение для φ , соответствующее движению цилиндра в безграничной среде. Для этого следует положить в (14) $z_2 = \infty$. После вычисления получим

$$\varphi = -v_0 \sin \theta \frac{z_1^2}{z} \quad (15)$$

Скорость частиц жидкости

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)^2} \quad (16)$$

Подстановка (14) в (16) позволяет сделать вывод о том, что скорость v в любой точке жидкости прямо пропорциональна скорости тела v_0 . Что же касается коэффициента пропорциональности, то он является функцией координат тела:

$$v = v_0 f(z, \theta).$$

В случае движения цилиндра в безграничной среде

$$f = \frac{z_1^2}{z^2}.$$

Давление в жидкости определяется формулой (3). Равнодействующая гидродинамической нагрузки лежит в плоскости действия вектора скорости \vec{v}_0 . Выражение для погонной гидродинамической нагрузки имеет вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\vec{e} \int_0^{2\pi} p(t, \theta, z_1) \vec{n} z_1 d\theta,$$

где \vec{e} - орт вектора скорости \vec{v}_0 .

Так как $\vec{e} \vec{n} = \sin \theta$ и

$$\int_0^{2\pi} p_0 \sin \theta r_1 d\theta = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} = & \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \varphi(t, \theta, z_1)}{\partial t} \sin \theta r_1 d\theta + \\ & + \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} v^2(t, \theta, z_1) \sin \theta r_1 d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Второй интеграл, как легко проверить, равняется нулю. Следовательно, выражение для погонной гидродинамической силы имеет вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \varphi(t, \theta, z_1)}{\partial t} \sin \theta r_1 d\theta. \quad (18)$$

Подстановка (14) в (18) даст

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\rho \pi r_1^2 \xi(z_2/r_1) \dot{x}_0,$$

где точка (\cdot) означает дифференцирование по времени t ,

$$\xi(z_2/r_1) = \left[(z_2/r_1)^2 + 1 \right] / \left[(z_2/r_1)^2 - 1 \right].$$

На рис. 5.2 приведен график функции ξ . При $z_2 \rightarrow \infty$, т.е. при движении цилиндра в безграничной среде, $\xi = 1$; при $z_2/r_1 \rightarrow 1$ $\xi \rightarrow \infty$.

Таким образом, силовое взаимодействие тела с жидкостью увеличивается по мере уменьшения толщины кольцевого слоя жидкости.

Величина

$$m = \rho \pi r_1^2 \xi (r_2/r_1)$$

имеет размерность массы, отнесенной к единице длины. По величине она равна массе жидкости в объеме цилиндра единичной длины, умноженной на коэффициент ξ .

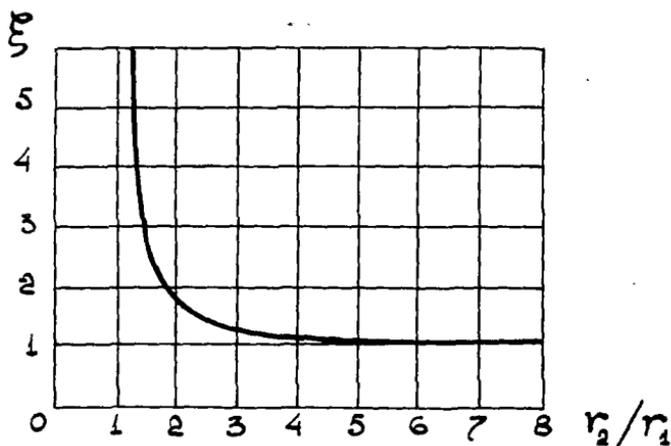


Рис.5.2

В безграничной среде величина m просто равна массе жидкости, вытесненной цилиндрическим телом, отнесенной к единице длины тела. Масса m называется присоединенной массой или, в данном случае, точнее, погонной присоединенной массой тела.

Таким образом, гидродинамическая реакция идеальной жидкости при ее потенциальном безотрывном обтекании тела в разбираемом случае равна произведению присоединенной массы m на ускорение тела \dot{v}_0 и направлена в сторону, противоположную ускорению:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -m \dot{v}_0.$$

§ 4. Гидродинамические реакции, действующие на тело, движущееся прямолинейно с переменной скоростью

Подход к определению гидродинамических реакций, действующих на тела при их неустановившемся движении в жидкости, рассмотренный в предыдущем параграфе, является общим. Однако часто удобнее поступать иначе, а именно — исходить из закона количества движения.

При неустановившемся движении тела обращение движения не приводит к упрощению задачи, поскольку ускорения, а следовательно, и силы, действующие в жидкости в абсолютном и обращенном движении, различны. В связи с этим задачи, связанные с неустановившимся движением тел в жидкости, рассматриваются в системе координат, движущейся вместе с телом. Здесь и ниже при обозначении этих координат опускается индекс I.

Рассмотрим простейший случай прямолинейного движения твердого тела с переменной во времени скоростью. Будем считать, что направление движения совпадает с осью x . Скорость в произвольной точке жидкости

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t).$$

На большом расстоянии от тела жидкость находится в покое ($\vec{v} \rightarrow 0$).

Вычислим кинетическую энергию жидкости, вызванную движением тела. Выделим элементарный жидкий объем $d\omega$ с массой $\rho d\omega$. Его кинетическая энергия равна

$$\alpha T_{ж} = \rho d\omega \frac{v^2}{2}.$$

Кинетическую энергию безграничного объема жидкости ω_∞ , внешнего по отношению к телу, получим интегрированием

$$T_{\text{жс}} = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\rho v^2}{2} d\omega. \quad (19)$$

Согласно физическим соображениям, несобственный интеграл (19), распространенный по бесконечному внешнему объему, конечен. Действительно, тело конечных размеров при конечном времени своего движения, очевидно, может сообщить жидкости лишь конечную кинетическую энергию.

Если движение жидкости потенциально, то по аналогии с результатом, полученным в предыдущем параграфе, можно записать

$$v = v_0 f(x, y, z).$$

т.е. отношение скорости в любой точке потока к скорости тела является лишь функцией координат точек и не зависит от времени:

$$\frac{v}{v_0} = f(x, y, z).$$

Имея это в виду, преобразуем выражение (19):

$$T_{\text{жс}} = \frac{v_0^2}{2} \int_{\omega_0}^{\omega} \rho f^2(x, y, z) d\omega. \quad (20)$$

Интеграл в (20)

$$\lambda = \int_{\omega_0}^{\omega} \rho f^2(x, y, z) d\omega \quad (21)$$

имеет размерность массы и называется, как мы уже знаем, присоединенной массой, соответствующей движению тела в данном направлении. Таким образом,

$$T_{\text{жс}} = \frac{\lambda v_0^2}{2}. \quad (22)$$

Отсюда вытекает следующее определение: присоединенной называется такая фиктивная масса жидкости, кинетическая энергия которой при ее движении со скоростью тела равна кинетической энергии окружающей тело жидкости. Присоединенная масса зависит от формы тела и направления его движения, что существенно отличает ее от обычной массы.

Обозначим через R_x проекцию на ось x силы, действующей со стороны жидкости на тело. Следовательно, со стороны тела на жидкость будет действовать сила $-R_x$. Для ее определения применим к жидкости закон количества движения: изменение количества движения частиц жидкости в направлении оси x в течение промежутка времени $dt(dQ_x)$ равно импульсу силы $-R_x$ за тот же промежуток времени:

$$dQ_x = -R_x dt,$$

откуда

$$R_x = -\frac{dQ_x}{dt}. \quad (23)$$

С другой стороны, для определения силы $-R_x$ может быть применен к жидкости закон об изменении кинетической энергии: изменение кинетической энергии системы за промежуток времени dt равно работе приложенных к системе сил.

Обозначив через $dx = v_0 dt$ перемещение тела за время dt и учитывая, что работа при перемещении тела затрачивается на изменение кинетической энергии жидкости, будем иметь

$$dT_{жк} = -R_x dx = -R_x v_0 dt,$$

откуда

$$R_x = -\frac{1}{v_0} \frac{dT_{жк}}{dt} = -\frac{1}{v_0} \frac{d(\lambda v_0^2/2)}{dt} = -\lambda \dot{v}_0. \quad (24)$$

Сопоставление (23) и (24) позволяет сделать вывод о том, что проекция количества движения жидкости на ось x равна произведению присоединенной массы, соответствующей движению в заданном направлении, на скорость тела v_0 :

$$Q_x = \lambda v_0 \quad (25)$$

либо

$$Q_x = \frac{dT_{жк}}{dv_0}. \quad (26)$$

Из выражения (24) следует, что сила воздействия со стороны жидкости на тело при ускоренном движении численно равна присоединенной массе, умноженной на ускорение тела. Эта сила пропорциональна ускорению и в соответствии с известной терминологией теоретической механики называется инерционной силой.

В случае прямолинейного движения тела с постоянной скоростью ($\dot{v}_0 = 0$) отсутствует и инерционная гидродинамическая сила. Поскольку $\lambda > 0$, знак инерционной силы определяется знаком ускорения. При положительном ускорении R_x отрицательна, т.е. играет роль силы сопротивления. С этим результатом на частном примере мы уже познакомились в предыдущем параграфе. Выясним происхождение термина "присоединенная масса".

Составим уравнение движения тела в реальной жидкости для случая поступательного движения тела. Кроме при-

нятых, введем следующие обозначения: M_0 - масса тела; P - движущая сила (тяга двигателя и др.); X - сила лобового сопротивления при движении в режиме $v_0 = const$.

Согласно второму закону Ньютона уравнение движения тела в жидкости примет вид

$$M_0 \dot{v}_0 = P - X + R_x = P - X - \lambda \dot{v}_0$$

или

$$(M_0 + \lambda) \dot{v}_0 = P - X .$$

Мы видим, что влияние жидкости на движущееся в ней с ускорением тело приводит как бы к увеличению массы тела на величину λ . Ввиду этого величина λ и называется присоединенной массой. Заметим, что подобная трактовка применима лишь к простейшим случаям движения.

В таких, например, случаях, как движение деформируемого тела, движение тела, происходящее с резким изменением формы погруженного объема, присоединенные массы могут зависеть от времени t . Тогда согласно (23) получаем выражение

$$R_x = -\lambda \frac{dv_0}{dt} - v_0 \frac{d\lambda}{dt} ,$$

из которого следует, что в данном случае инерционная сила складывается из двух компонентов. Один пропорционален скорости движения, другой - ускорению.

§ 5. Кинетическая энергия жидкости в общем случае движения тела. Обобщенные присоединенные массы

В предыдущем параграфе в ходе определения гидродинамической реакции жидкости было получено выражение

для ее кинетической энергии при прямолинейном движении тела. В этом параграфе рассмотрим кинетическую энергию безграничной жидкости в общем случае движения тела.

Можно показать (см., например, [17]), что энергия безграничной жидкости выражается через потенциал скорости φ формулой

$$T_{ж} = -\frac{\rho}{2} \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (27)$$

где интеграл берется по поверхности тела S . Здесь формула (27) приводится без вывода. Функция φ должна удовлетворять уравнению Лапласа. На бесконечности вне тела $\varphi = 0$. На поверхности тела должно выполняться условие непротекания через эту поверхность:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = v_{nT},$$

где v_{nT} - нормальная скорость точки поверхности тела, $\partial \varphi / \partial n|_S$ - нормальная скорость частиц жидкости, прилегающей к нему. Представим v_{nT} в развернутом виде.

Пусть

$$\vec{v}_0 = \vec{i}v_{0x} + \vec{j}v_{0y} + \vec{k}v_{0z} - \text{скорость полюса,}$$

$$\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z - \text{угловая скорость.}$$

Скорость произвольной точки тела

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{z},$$

где $\vec{z} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ - радиус-вектор этой точки.

Нормальная составляющая скорости точки поверхности тела

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S &= v_{n,T} = \vec{v} \vec{n} = v_0 \vec{n} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{n} = \\ &= v_{0x} \cos(n, x) + v_{0y} \cos(n, y) + v_{0z} \cos(n, z) + \\ &+ (\omega_y z - \omega_z y) \cos(n, x) + (\omega_z x - \omega_x z) \cos(n, y) + \\ &+ (\omega_x y - \omega_y x) \cos(n, z) . \end{aligned}$$

После перегруппировки членов, содержащих угловые скорости, получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S &= v_{0x} \cos(n, x) + v_{0y} \cos(n, y) + \\ &+ v_{0z} \cos(n, z) + \omega_x [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] + \\ &+ \omega_y [z \cos(n, x) - x \cos(n, z)] + \omega_z [x \cos(n, y) - \\ &\quad - y \cos(n, x)] . \end{aligned} \quad (28)$$

Координаты x , y , z и косинусы направляющих углов в связанной с телом системе координат не зависят от времени. Функциями от времени являются лишь проекции поступательных и угловых скоростей тела (v_{0x} , ..., ..., ω_z).

Граничное условие на поверхности тела в виде суммы шести членов (линейность граничного условия) и линейность уравнения Лапласа позволяют искать общее выражение для потенциала также в форме шести слагаемых:

$$\varphi = v_{0x} \varphi_1 + v_{0y} \varphi_2 + v_{0z} \varphi_3 + \omega_x \varphi_4 + \omega_y \varphi_5 + \omega_z \varphi_6 , \quad (29)$$

где φ_i - так называемые единичные потенциалы, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta \varphi_i = 0$ и условиям на бесконечности $\varphi_i = 0$.

Продифференцировав φ по нормали, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_{0x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + v_{0y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + v_{0z} \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} + \omega_x \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} + \omega_y \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} + \omega_z \frac{\partial \varphi_6}{\partial n}. \quad (30)$$

Сравнение этого выражения с (28) показывает, что единичные потенциалы должны удовлетворять на поверхности тела граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \cos(n, x); & \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \cos(n, y); & \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} &= \cos(n, z); \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} &= y \cos(n, z) - z \cos(n, y); \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} &= z \cos(n, x) - x \cos(n, z); \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} &= x \cos(n, y) - y \cos(n, x). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Правая часть равенств (31) не зависит от времени. Отсюда следует, что единичные потенциалы φ_i в системе координат, связанной с телом, зависят только от координат. В выражении для φ функциями времени, не зависящими от координат, являются проекции скорости. Для упрощения последующих выкладок целесообразно изменить обозначения, вводя обобщенные скорости:

$$v_1 = v_{0x}; \quad v_2 = v_{0y}; \quad v_3 = v_{0z}; \quad v_4 = \omega_x; \quad v_5 = \omega_y; \quad v_6 = \omega_z. \quad (32)$$

Тогда выражение для потенциала φ будет

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \psi_i \varphi_i . \quad (33)$$

Установим размерность единичных потенциалов φ_i . Поскольку $[\varphi] = L^2 T^{-1}$; $[\psi] = L T^{-1}$ и $[\omega] = T^{-1}$, из сравнения размерностей левой и правой частей (29) устанавливаем, что

$$[\varphi_i]_{i=1,2,3} = L ; \quad [\varphi_i]_{i=4,5,6} = L^2 .$$

Положим, для примера, что тело движется без вращения в направлении оси x ($\psi_{oy} = \psi_{oz} = \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$).

Находим согласно (29), что

$$\varphi = \psi_{ox} \varphi_1 . \quad (34)$$

Отсюда видно, что φ_1 характеризует возмущение жидкости, обусловленное движением тела только в направлении оси x . Аналогично единичный потенциал φ_4 характеризует возмущение жидкости, происходящее от вращения тела относительно оси x .

Как следует из (34), чтобы найти единичный потенциал, нужно в выражении для потенциала скоростей выделить член, являющийся множителем при соответствующей составляющей скорости тела.

Перейдем к выражению для кинетической энергии жидкости. Взяв φ в форме (33), определив

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sum_{k=1}^6 \psi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n}$$

и подставив эти значения в (27), будем иметь

$$\begin{aligned}
 T_{\text{жс}} &= \frac{\rho}{2} \oint_S \sum_{i=1}^6 v_i \varphi_i \sum_{k=1}^6 v_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 v_i v_k \left(-\rho \oint_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds \right). \quad (35)
 \end{aligned}$$

В этой формуле v_i , как не зависящие от координат, вынесены на знак интеграла и, кроме того, изменен порядок суммирования и интегрирования.

Введя обозначения

$$\lambda_{ik} = - \int_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} ds, \quad (36)$$

придадим выражению для $T_{\text{жс}}$ вид

$$T_{\text{жс}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} v_i v_k. \quad (37)$$

Формула (37) аналогична известной из теоретической механики зависимости для кинетической энергии твердого тела. Величины λ_{ik} называются обобщенными присоединенными массами.

Поскольку φ_i являются функциями только координат, обобщенные присоединенные массы согласно (36) не зависят от времени.

Все присоединенные массы λ_{ik} можно представить в виде матрицы, содержащей 36 членов:

$$\left\| \lambda_{ik} \right\|_1^6. \quad (38)$$

В курсах теоретической гидромеханики доказывается, что в случае безграничной жидкости матрица $\|\lambda_{ik}\|$ симметрична относительно главной диагонали

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} , \quad (39)$$

в силу чего число обобщенных присоединенных масс сокращается до 2I.

Установим размерность обобщенных присоединенных масс.

1. Присоединенные массы с индексами

$$i = 1, 2, 3 \text{ и } k = 1, 2, 3.$$

Поскольку

$$[\varphi_i]_{i=1,2,3} = L , \quad \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right] = 1 ,$$

а

$$\left[\oint_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds \right] = L^3 .$$

Таким образом, размерность присоединенных масс

$$[\lambda_{ik}]_{i,k=1,2,3} = [\rho] L^3 .$$

Так как L^3 имеет размерность объема, то λ_{ik} имеет размерность массы. Отметим, что при $i=k$ величины присоединенных масс λ_{11} , λ_{22} , λ_{33} в направлении соответствующих осей всегда положительны.

2. Присоединенные массы с индексами

$$i = 1, 2, 3; \quad k = 4, 5, 6.$$

Имеем

$$[\varphi_i]_{i=1,2,3} = L , \quad [\varphi_k]_{k=4,5,6} = L^2 .$$

Аналогично предыдущему устанавливаем

$$[\lambda_{ik}] = [\rho] L^4.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае присоединенные массы имеют размерность статических моментов.

3. Присоединенные массы с индексами

$$i = 4, 5, 6; \quad k = 4, 5, 6.$$

В этом случае

$$[\varphi_i]_{i=4,5,6} = [\varphi_k]_{k=4,5,6} = L^2; \quad [\lambda_{ik}] = [\rho] L^5.$$

Присоединенные массы имеют размерность моментов инерции. При $i=k$ величины λ_{44} , λ_{55} , λ_{66} , представляющие присоединенные моменты инерции относительно осей, связанных с телом, положительны. Знаки λ_{ik} при $i \neq k$ могут быть различными.

В практических расчетах пользуются безразмерными коэффициентами присоединенных масс μ_{ik} .

а) Для λ_{ik} с размерностью массы ($i, k = 1, 2, 3$)

$$\mu_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\rho \Omega}, \quad (40)$$

где $\rho \Omega$ - масса жидкости в объеме тела Ω .

б) Для λ_{ik} с размерностью статического момента ($i = 1, 2, 3; k = 4, 5, 6$)

$$\mu_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\rho \Omega \ell}, \quad (41)$$

где ℓ - характерный линейный размер.

в) Для λ_{ik} с размерностью момента инерции ($i, k = 4, 5, 6$)

$$M_{ik} = \frac{\lambda_{ik}}{\rho \Omega \ell_i^2} . \quad (42)$$

В случае присоединенных моментов инерции с одинаковыми индексами ($i=k$) под ℓ_i обычно понимают радиус инерции масс жидкости в объеме тела. Можно показать, что у тела с одной плоскостью симметрии число различных обобщенных присоединенных масс сокращается до 12. Так, если плоскостью симметрии служит диаметральная плоскость xz , то

$$\lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{25} = \lambda_{36} = \lambda_{46} = \lambda_{56} = 0 . \quad (43)$$

Рассмотрим принцип доказательства равенства (43) на примере вычисления λ_{13} . Обозначим через S_1 и S_2 (рис. 5.3) верхнюю и нижнюю части поверхности тела, которые, по предположению, симметричны относительно диаметральной плоскости xy . Используя (36) и (31), получим

$$\begin{aligned} \lambda_{13} &= -\rho \int_{S_1 + S_2} \varphi_1 \cos(n, z) dS = \\ &= - \left[\int_{S_1} \varphi_1 \cos(n, z) dS + \int_{S_2} \varphi_1 \cos(n, z) dS \right] . \end{aligned}$$

Очевидно, в сходственных точках A_1 и A_2 поверхностей S_1 и S_2 единичный потенциал φ_1 , характеризующий возмущение при движении в направлении оси x , имеет одинаковые значения:

$$\varphi_1(A_1) = \varphi_1(A_2) .$$

Из рис. 5.3 $\cos(n, z) = \cos \alpha$ для точки A_1 , и $\cos(n, z) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ для точки A_2 .

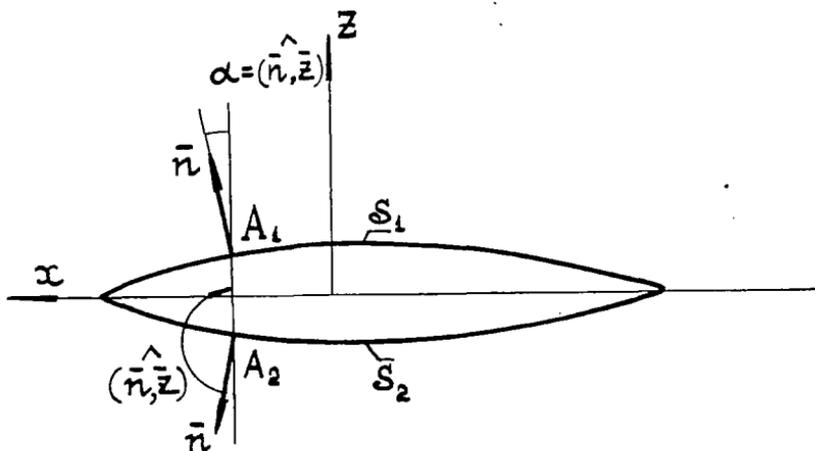


Рис. 5.3

На основании этого замечаем, что в соответствующих точках A_1 и A_2 функция $\varphi, \cos(n, z)$ одинакова по величине и противоположна по знаку; интегралы от этой функции по поверхностям S_1 и S_2 взаимно сократятся. Таким образом, $\lambda_{13} = 0$.

У тела, симметричного относительно двух плоскостей (например, тела с плоскостями симметрии xy и xz), остается восемь присоединенных масс:

$$\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}, \lambda_{26}, \lambda_{35}.$$

Примером тела, симметричного относительно двух плоскостей, может служить оперенная баллистическая ракета.

Если тело является телом вращения с продольной осью x , то вследствие симметрии

$$\lambda_{22} = \lambda_{33}, \quad \lambda_{55} = \lambda_{66}, \quad \lambda_{26} = \lambda_{35}.$$

У тела, симметричного относительно трех плоскостей симметрии (трехосный эллипсоид), $\lambda_{26} = \lambda_{35} = 0$ и, следовательно, остаются шесть присоединенных масс:

$$\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}.$$

Если плоскость x_y является плоскостью симметрии тела и, кроме того, $v_3 = v_4 = v_5 = 0$ (случай продольного движения тела), то выражение для кинетической энергии жидкости определяется лишь шестью членами:

$$T_{жк} = \frac{1}{2} (\lambda_{11} v_1^2 + \lambda_{22} v_2^2 + \lambda_{66} v_6^2 + 2\lambda_{12} v_1 v_2 + 2\lambda_{16} v_1 v_6 + 2\lambda_{26} v_2 v_6). \quad (44)$$

Для вычисления обобщенных присоединенных масс согласно зависимости (36)

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS \quad (i, k = 1, 2, \dots, 6)$$

необходимо знать значения единичных потенциалов φ_i , характеризующих возмущения, вносимые телом в жидкость при поступательных и вращательных движениях.

В общем случае движения тела произвольной формы определение φ_i связано с большими трудностями. Рассмотрим примеры определения присоединенных масс для тел простейшей формы.

Вычислим λ_{11} для кругового цилиндра радиуса τ_1 . Решение этой задачи уже было рассмотрено в § 3 (в § 3 для погонной присоединенной массы было принято обозначение m). В отличие от приема, использованного ранее, здесь мы при вычислении λ_{11} воспользуемся зависимостью (36).

Потенциал вызванного течения от кругового цилиндра, движущегося со скоростью $\vec{v} = v_{0x} \vec{i}$ в направлении, характеризуемемся углом $\theta = 90^\circ$ (см. рис. 5.1), выражается формулой (15), в которую вместо v_0 следует подставить v_{0x} :

$$\varphi = -v_{0x} \sin \theta \frac{\tau_1^2}{\tau}. \quad (45)$$

Сравнивая (45) с выражением для единичного потенциала (34), получим

$$\varphi_i = -\frac{\tau_1^2}{\tau} \sin \theta. \quad (46)$$

Нормальную производную от единичного потенциала, учитывая, что направления радиуса и нормали совпадают, представим в виде

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} = \frac{\tau_1^2}{\tau^2} \sin \theta.$$

На контуре $\tau = \tau_1$ имеем $\varphi_i = -\tau_1 \sin \theta$, $\partial \varphi_i / \partial \tau = \cos \theta$.

Поскольку площадь элемента поверхности кругового цилиндра, соответствующего центральному углу $d\theta$ и заключенного между двумя плоскостями, перпендикулярными продольной оси и удаленными на расстояние, равное единице, равняется

$$ds = r, d\theta ,$$

находим для погонной присоединенной массы

$$\lambda_{11} = - \int_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} ds = \rho r_1^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \rho \pi r_1^2 .$$

Таким образом, присоединенная масса цилиндра при его движении в безграничной среде равна массе жидкости в объеме цилиндра. Мы пришли к уже известному результату. Как видно, коэффициент присоединенной массы λ_{11} в разбираемом случае равен единице.

Очевидно, что присоединенная масса кругового цилиндра не зависит от направления его поступательного движения в плоскости, перпендикулярной продольной оси (плоскость r, θ). Ясно также, что вращение кругового цилиндра относительно оси в невязкой жидкости не вызывает возмущения жидкости, т.е. $\lambda_{44} = 0$.

Приведем без вывода данные о коэффициентах присоединенных масс эллипсоида вращения ($\lambda_{11}, \lambda_{22} = \lambda_{33}, \lambda_{55} = \lambda_{66}$) в функции относительной толщины эллипсоида b/α . Графики коэффициентов λ для этого случая показаны на рис. 5.4. Из них можно видеть, что при $\alpha/b \rightarrow \infty$, т.е. по мере роста удлинения тела, значения $\lambda_{22} = \lambda_{33}$ и $\lambda_{55} = \lambda_{66}$ стремятся к единице, а λ_{11} - к нулю.

Последнее обстоятельство позволяет не учитывать при расчете движения тел большого удлинения присоединенную массу λ_{11} . Для приближенного определения присоединен

ных масс удлиненных тел в гидродинамике широко используется так называемая гипотеза плоских сечений (ГПС). Этой гипотезе соответствует модель течения, в которой не учитывается растекание жидкости вдоль тела. Векторы скорости частиц жидкости в данный момент времени полагают лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси тела. Таким образом, при использовании ГПС пространственная задача гидродинамики сводится к плоской.

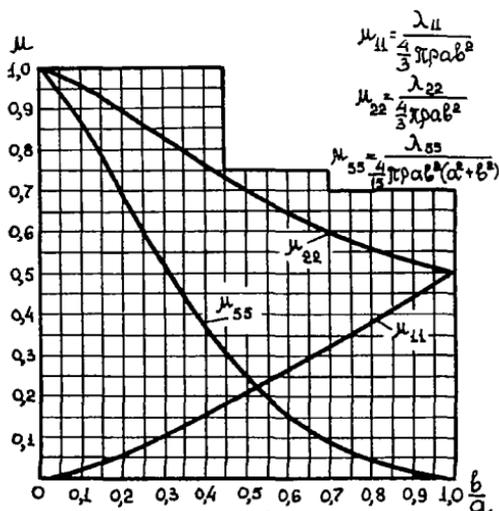


Рис. 5.4

Гидродинамическая реакция жидкости, действующая на участок тела протяженностью dx , заключенный между двумя сечениями, перпендикулярными продольной оси x , в рамках ГПС определится формулой

$$dR = -\dot{v}(x) m(x) dx,$$

где $\rho(x)$ - функция, характеризующая закон распределения нормальной составляющей ускорений точек на оси тела;

$m(x)$ - погонная присоединенная масса, являющаяся функцией осевой координаты x .

Погонная масса $m(x)$ рассчитывается исходя из решения плоской задачи гидродинамики. Так, для тела вращения с радиусом сечения $r_1 = r_1(x)$

$$m(x) = \rho \pi r_1^2(x).$$

Это следует из ранее полученного результата для бесконечно длинного кругового цилиндра. Присоединенная масса λ_{22} и λ_{33} тела вращения

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \int_{-l_K}^{l_H} m(x) dx = \rho \Omega,$$

где l_H , $-l_K$ - абсциссы носка и кормового сечения тела;

Ω - объем тела.

Таким образом, в рамках ГПС присоединенная масса тела вращения, соответствующая его боковому движению, равна массе жидкости в объеме тела и, следовательно, в этом случае $\mu_{22} = \mu_{33} = 1$. О величине ошибок, к которым приводит применение ГПС при определении присоединенных масс, можно судить, сравнивая найденные значения μ_{22} и μ_{33} с точными для эллипсоида вращения (рис. 5.4). Как видно, при большом удлинении тела (порядка 10) ошибка оказывается равной нескольким процентам. Она уменьшается с увеличением удлинения эллипсоида. Для учета растекания жидкости в продольном направлении при определении λ_{22} можно воспользоваться соотношением

$$\lambda_{22} = \eta \lambda'_{22},$$

где λ'_{22} - присоединенная масса, определенная по гипотезе плоских сечений;
 η - поправка на растекание, определяемая по теоретико-экспериментальной формуле Пабста,

$$\eta = \frac{L/B}{\sqrt{1+(L/B)^2}} \left[1 - 0,425 \frac{L/B}{1+(L/B)^2} \right], \quad (47)$$

где L - длина тела;
 B - его ширина.

Применение ГПС позволяет без труда рассчитать статические моменты λ_{26} , λ_{35} и моменты инерции присоединенных масс λ_{55} , λ_{66} .

Для тела вращения

$$\lambda_{26} = \lambda_{35} = \int_{-l_k}^{l_n} m(x) x dx = \rho \pi \int_{-l_k}^{l_n} x z_1(x) dx; \quad (48)$$

$$\lambda_{55} = \lambda_{66} = \int_{-l_k}^{l_n} m(x) x^2 dx = \rho \pi \int_{-l_k}^{l_n} x^2 z_1^2(x) dx. \quad (49)$$

Точка на оси тела вращения, относительно которой статические моменты присоединенных масс равны нулю, называется центром присоединенных масс. В исходной системе координат центр присоединенных масс определяется соотношением

$$x_n = \frac{\int_{-l_k}^{l_n} m(x) x dx}{\int_{-l_k}^{l_n} m(x) dx} = \frac{\lambda_{26}}{\lambda_{22}} \quad (50)$$

При проведении практических расчетов гипотеза плоских сечений используется и для расчета присоединенных масс оперенных тел вращения.

Присоединенная масса на единицу длины цилиндра с выступами (рис. 5.5) при движении в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой лежат выступы, может быть вычислена по формуле

$$m = \pi \rho (r_1 + c) \left[1 - \frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(1+s)^4} \right],$$

где c — длина выступа, $s = c/r_1$.

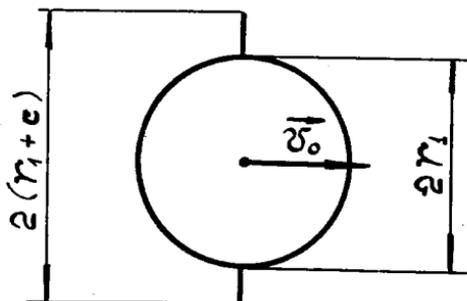


Рис. 5.5

При крестокрылой схеме оперения зависимость (51) можно пользоваться как при + - образной, так и при X - образной схемах (рис.5.6).

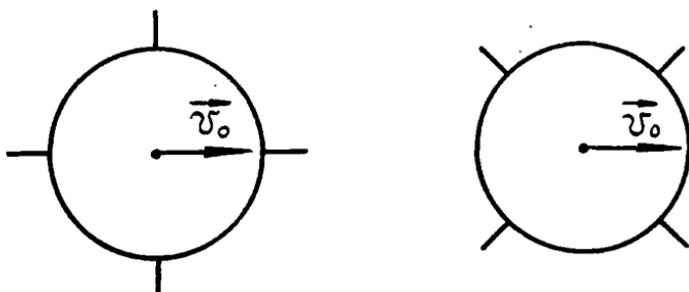


Рис.5.6

§ 6. Уравнения неустановившегося движения тела в жидкости

В этом параграфе рассмотрим общий метод составления уравнений неустановившегося движения тела в безграничной жидкой среде. Пользуясь принципом Даламбера, придадим уравнениям динамики форму уравнений статики. Для этого следует к задаваемым внешним силам присоединить силы инерции как тела, так (в нашем случае) и жидкости.

К задаваемой нагрузке помимо тяги двигателя, сил веса и Архимеда отнесем силы, обусловленные вихреобразованием и вязкостью (первую группу сил по классификации § I). Эти последние силы, как уже отмечалось, обычно определяются в аэродинамических трубах и опытовых бассейнах. Эксперименты позволяют установить их зависимость от угла атаки, скольжения, угловых и поступательных скоростей движения.

Задаваемая нагрузка находится в динамическом равновесии с силами инерционного происхождения. Введем обозначения:

\vec{R}^+ , \vec{M}^+ - главный вектор и главный момент задаваемых сил;

\vec{R}^- , \vec{M}^- - главный вектор и главный момент сил инерционного происхождения.

Уравнения метода Даламбера:

$$\vec{R}^+ + \vec{R}^- = 0; \quad (51)$$

$$\vec{M}^+ + \vec{M}^- = 0. \quad (52)$$

Для вычисления инерционных силы \vec{R}^- и момента \vec{M}^- воспользуемся законами количества движения и момента качества движения.

Пусть $\vec{Q}_{жс}$, \vec{Q}_T - количество движения жидкости и тела, $\vec{K}_{жс}$, \vec{K}_T - моменты количества движения. Имеем:

$$\vec{R}^- = -\frac{d}{dt}(\vec{Q}_{жс} + \vec{Q}_T); \quad (53)$$

$$\vec{M}^- = -\frac{d}{dt}(\vec{K}_{жс} + \vec{K}_T). \quad (54)$$

В этих формулах производные по времени берутся в предположении, что векторы \vec{Q} и \vec{K} вычисляются для неподвижной системы координат. Если же мы берем производные по времени для величин, вычисляемых в подвижной системе координат, связанной с телом, то будем пользоваться знаком частной производной $\partial/\partial t$.

Отложим вектор $\vec{Q} = \vec{Q}_{жс} + \vec{Q}_T$ от начала O неподвижной системы координат. Тогда $d\vec{Q}/dt$ представляет

скорость конца вектора \vec{Q} , а $\partial\vec{Q}/\partial t$ - очевидно, относительная скорость конца вектора, рассматривая по отношению к системе координат с началом в точке O , оси которой параллельны осям подвижной системы. Но абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной скорости и переносной скорости, а последней является в данном случае $\vec{\omega} \times \vec{Q}$, ибо под переносным движением мы должны понимать вращение системы координат с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

Таким образом,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{\partial\vec{Q}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{Q}. \quad (55)$$

При вычислении $\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(\vec{K}_x + \vec{K}_r)}{dt}$ дело обстоит не-

сколько сложнее. Вектор \vec{K} есть главный момент количества движения жидкости и тела относительно начала O неподвижной системы координат. Но когда мы вычисляем $\partial\vec{K}/\partial t$, то сравниваем значения в два последовательных момента времени t и $t+dt$ главных моментов количества движения системы относительно двух различных точек, а именно относительно начала координат подвижной системы в эти два последовательных момента времени.

Поэтому $d\vec{K}/dt$ будет отличаться от

$$\frac{\partial\vec{K}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

еще добавочным членом, а именно - скоростью изменения момента \vec{K} , взятого около перемещающегося начала координат. Как известно, главный момент системы относи-

тельно одной точки равен главному моменту той же системы сил относительно другой точки плюс момент главного вектора системы сил, приложенного во второй точке относительно первой точки. Так как радиус-вектор положения начала координат подвижной системы в момент $t+dt$ относительно положения того же начала в момент t есть $\vec{v} dt$, то добавочное изменение момента будет $\vec{v} dt \times \vec{Q}$, а скорость его изменения $\vec{v} \times \vec{Q}$. Мы, таким образом, получаем вторую основную формулу:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{K} + \vec{v} \times \vec{Q}. \quad (56)$$

С учетом зависимостей (55) и (56) выражения (53) и (54) преобразуются к виду:

$$\vec{R}^- = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{Q}_{жс} + \vec{Q}_T) - \vec{\omega} \times (\vec{Q}_{жс} + \vec{Q}_T); \quad (57)$$

$$\vec{M}^- = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{K}_{жс} + \vec{K}_T) - \vec{\omega} \times (\vec{K}_{жс} + \vec{K}_T) - \vec{v} \times (\vec{Q}_{жс} + \vec{Q}_T). \quad (58)$$

Проектируя \vec{R}^- и \vec{M}^- на оси координат, связанные с телом, получим:

$$R_x^- = -\frac{\partial}{\partial t} (Q_{жсx} + Q_{Tx}) - \omega_y (Q_{жсz} + Q_{Tz}) + \omega_z (Q_{жсы} + Q_{Ty});$$

$$R_y^- = -\frac{\partial}{\partial t} (Q_{жсы} + Q_{Ty}) - \omega_z (Q_{жсx} + Q_{Tx}) + \omega_x (Q_{жсz} + Q_{Tz});$$

$$R_z^- = -\frac{\partial}{\partial t} (Q_{жсz} + Q_{Tz}) - \omega_x (Q_{жсы} + Q_{Ty}) + \omega_y (Q_{жсx} + Q_{Tx});$$

$$\begin{aligned}
 M_x^- &= -\frac{\partial}{\partial t}(K_{жx} + K_{Tx}) - \omega_y(K_{жz} + K_{Tz}) + \omega_z(K_{жу} + K_{Ty}) - \\
 &\quad - v_y(Q_{жz} + Q_{Tz}) + v_z(Q_{жу} + Q_{Ty}); \\
 M_y^- &= -\frac{\partial}{\partial t}(K_{жу} + K_{Ty}) - \omega_z(K_{жx} + K_{Tx}) + \omega_x(K_{жz} + K_{Tz}) - \\
 &\quad - v_z(Q_{жx} + Q_{Tx}) + v_x(Q_{жz} + Q_{Tz}); \\
 M_z^- &= -\frac{\partial}{\partial t}(K_{жz} + K_{Tz}) - \omega_x(K_{жу} + K_{Ty}) + \omega_y(K_{жx} + K_{Tx}) - \\
 &\quad - v_x(Q_{жу} + Q_{Ty}) + v_y(Q_{жx} + Q_{Tx}).
 \end{aligned} \tag{59}$$

Как известно из теоретической механики, проекции количества движения и момента количества движения на оси координат можно выразить через кинетическую энергию T как производные по соответствующим скоростям:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{жx} + Q_{Tx} &= \frac{\partial T}{\partial v_1}; & K_{жx} + K_{Tx} &= \frac{\partial T}{\partial v_4}; \\
 Q_{жу} + Q_{Ty} &= \frac{\partial T}{\partial v_2}; & K_{жу} + K_{Ty} &= \frac{\partial T}{\partial v_5}; \\
 Q_{жz} + Q_{Tz} &= \frac{\partial T}{\partial v_3}; & K_{жz} + K_{Tz} &= \frac{\partial T}{\partial v_6}.
 \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий тела T_T и жидкости $T_{ж}$. Рассмотрим случай, когда плоскость $xу$ является плоскостью симметрии тела и, кроме того,

$$v_z = \omega_x = \omega_y = 0,$$

г.е. тело совершает продольное движение.

Пусть начало связанной системы координат совпадает с центром тяжести тела. Кинетическая энергия тела, имеющего массу M_0 и момент инерции относительно оси Z , проходящей через центр тяжести, J_Z ,

$$T_T = \frac{1}{2} (J_Z \omega_Z^2 + M_0 v_1^2 + M_0 v_2^2). \quad (6I)$$

Кинетическая энергия жидкости $T_{жк}$ определяется выражением (44). Положим, что ось x является осью симметрии тела, имеющего большое удлинение. В этом случае $\lambda_{12} = \lambda_{16} = 0$ и, кроме того, можно принять $\lambda_{11} = 0$. Далее, если при вычислении $T_{жк}$ совместить начало координат с центром присоединенных масс (точка O' на рис.5.7) и обозначить через v_2' проекцию скорости

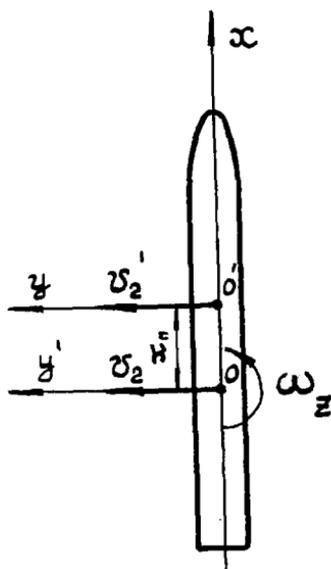


Рис.5.7

точки O' на ось y' , параллельную оси y , то в выражении для кинетической энергии жидкости сохранятся лишь два члена:

$$T_{ж} = \frac{1}{2} (\lambda_{22} v_2'^2 + \lambda_{66} v_6^2). \quad (62)$$

Здесь λ_{66} - момент инерции присоединенных масс относительно оси z' , проходящей через полюс O' . При переходе к системе координат xy с началом в центре тяжести O в выражении (62) следует сделать подстановку

$$v_2' = v_2 + v_6 x_n,$$

где x_n - абсцисса центра присоединенных масс.

В результате подстановки получим

$$T_{ж} = \frac{1}{2} \left[\lambda_{22} v_2^2 + (\lambda_{66} + x_n^2 \lambda_{22}) \omega_z^2 + 2 \lambda_{22} x_n v_2 \omega_z \right]. \quad (63)$$

Здесь вместо v_6 принято обозначение ω_z . Используя выражения (60), найдем:

$$\left. \begin{aligned} Q_{жx} + Q_{Tx} &= M_0 v_1; \\ Q_{жy} + Q_{Ty} &= (M_0 + \lambda_{22}) v_2 + \lambda_{22} x_n \omega_z; \\ K_{жz} + K_{Tz} &= (J_z + \lambda_{66} + \lambda_{22} x_n^2) \omega_z + \lambda_{22} x_n v_2. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Наконец, используя (64), (59), (51), (52) (при $\omega_x = \omega_y = v_3 = 0$), получим систему трех уравнений

продольного движения твердого тела в связанной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} M_0 \dot{v}_1 - (M_0 + \lambda_{22}) v_2 \omega_z + \lambda_{22} x_n \omega_z^2 &= R_x^+; \\ (M_0 + \lambda_{22}) \dot{v}_2 + \lambda_{22} x_n \dot{\omega}_z + M_0 v_1 \omega_z &= R_y^+; \\ (\mathcal{J}_z + \lambda_{66} + \lambda_{22} x_n^2) \dot{\omega}_z + \lambda_{22} x_n \dot{v}_2 + \lambda_{22} v_1 v_2 + \\ + \lambda_{22} x_n v_1 \omega_z &= M_z^+. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

При использовании уравнений (65) для анализа продольного движения ракеты в воде в процессе подводного старта обычно полагают, что величины v_2 и ω_z являются малыми в том смысле, что можно пренебречь членами в уравнениях (65), содержащими квадраты и произведения этих величин, т.е. комплексами.

$$(M_0 + \lambda_{22}) v_2 \omega_z \text{ и } \lambda_{22} x_n \omega_z^2.$$

Далее, из третьего уравнения системы (65) следует удалить члены $\lambda_{22} v_1 v_2$ и $\lambda_{22} x_n v_1 \omega_z$, так как они соответствуют гидродинамическим реакциям, зависящим только от линейных и угловых скоростей, которые уже учтены в величине заданного момента M_z^+ .

С учетом перечисленных обстоятельств уравнения продольного движения ракеты принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} M_0 \dot{v}_1 &= R_x^+; \\ (M_0 + \lambda_{22}) \dot{v}_2 + \lambda_{22} x_n \dot{\omega}_z + M_0 v_1 \omega_z &= R_y^+; \\ (\mathcal{J}_z + \lambda_{66} + \lambda_{22} x_n^2) \dot{\omega}_z + \lambda_{22} x_n \dot{v}_2 &= M_z^+. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

В уравнениях (66) опущены индексы z при ω . При интегрировании уравнения (66) следует дополнить уравнением кинематической связи

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad (67)$$

где ϑ - угол тангажа ракеты.

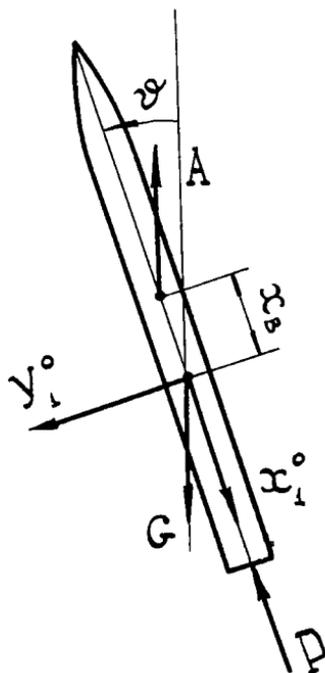


Рис. 5.8

Рассмотрим составляющие сил и момента R_x^+ , R_y^+ и M_z^+ , входящие в правую часть уравнений (66). Угол тангажа ϑ будем отсчитывать от вертикали (рис.5.8). Введем обозначения:

- X_1^0, Y_1^0 - осевая и нормальная составляющие гидродинамической реакции, обусловленной вязкостью и вихреобразованием ;
 $M_{z_1}^0$ - момент гидродинамических сил, обусловленных вязкостью и вихреобразованием относительно центра тяжести ракеты ;
 A - Архимедова сила ;
 G, ℓ - вес и длина ракеты ;
 P - тяга двигателя ;
 S - характерная площадь ;
 x_B - абсцисса центра величины .

Имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 R_x^+ &= P - X_1^0 + (A - G) \cos \vartheta ; \\
 R_y^+ &= Y_1^0 - (A - G) \sin \vartheta ; \\
 M_z^+ &= M_{z_1}^0 - A x_B \sin \vartheta .
 \end{aligned} \right\} (68)$$

Здесь

$$X_1^0 = c_{x_1} \frac{\rho v^2}{2} S ; \quad Y_1^0 = c_{y_1} \frac{\rho v^2}{2} S ; \quad M_{z_1}^0 = m_{z_1} \frac{\rho v^2}{2} S \ell . \quad (69)$$

Положим, что $(v_2/v_1)^2 \ll 1$. Это позволяет в формулах (69) заменить v^2 на v_1^2 . Для c_{y_1} и m_{z_1} воспользуемся линейными зависимостями:

$$\left. \begin{aligned}
 c_{y_1} &= c_{y_1}^\alpha \alpha + c_{y_1}^\omega \omega ; \\
 m_{z_1} &= m_{z_1}^\alpha \alpha + m_{z_1}^\omega \omega .
 \end{aligned} \right\} (70)$$

Произведем замену:

$$\alpha = -\alpha \operatorname{ctg}(v_2/v_1) \approx -v_2/v_1;$$

$$c_{y_1}^{\omega} = \bar{c}_{y_1}^{\bar{\omega}} \ell / v_1;$$

$$m_{z_1}^{\omega} = m_{z_1}^{\bar{\omega}} \ell / v_1.$$

Здесь $\bar{\omega} = \frac{\omega \ell}{v_1}$ — безразмерная угловая скорость.

Учитывая отмеченные преобразования, получим:

$$\left. \begin{aligned} R_x^+ &= P - c_{x_1} \frac{\rho v_1^2}{2} S + (A+G) \cos \vartheta; \\ R_y^+ &= -c_{y_1}^{\alpha} \frac{\rho v_1 v_2 S}{2} + c_{y_1}^{\bar{\omega}} \frac{\rho v_1 \omega S \ell}{2} - (A-G) \sin \vartheta; \\ M_{z_1} &= -m_{z_1}^{\alpha} \frac{\rho v_1 v_2 S \ell}{2} + m_{z_1}^{\bar{\omega}} \frac{\rho v_1 \omega S \ell^2}{2} - A x_B \sin \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

§ 7. Расчет коэффициентов $c_{y_1}^{\alpha}$, $c_{y_1}^{\bar{\omega}}$

$m_{z_1}^{\alpha}$, $m_{z_1}^{\bar{\omega}}$ для тел вращения

большого удлинения

Для приближенного определения коэффициентов $c_{y_1}^{\alpha}$, $c_{y_1}^{\bar{\omega}}$, $m_{z_1}^{\alpha}$, $m_{z_1}^{\bar{\omega}}$ тел вращения большого удлинения, имеющих плоский кормовой срез, могут быть исполь-

зованы теоретические формулы, полученные в рамках гипотезы плоских сечений. При этом делается предположение, что вся поверхность тела, за исключением кормового среза, обтекается безотрывно потенциальным потоком. На кромке кормового среза происходит отрыв стуй жидкости. Сторвавшиеся струи ограничивают область, занятую вихревым следом (рис.5.9).

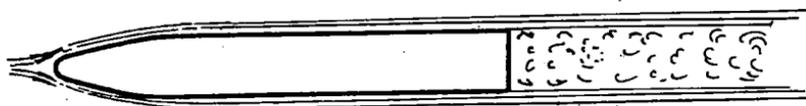


Рис.5.9

Введем в рассмотрение оси координат (рис.5.10):

O, x_1 - ось тела;

$\bar{O}\bar{x}$ - неподвижная в пространстве ось, составляющая в данный момент времени малый угол β с осью O, x_1 ;

Ox - подвижная ось, параллельная оси $\bar{O}\bar{x}$.

Начало отсчета $O(O_1)$ совмещено с центром тяжести тела. В рассматриваемый момент времени совпадают абсциссы точек пространства x и \bar{x} . Смещение y текущей точки на оси тела с абсциссой x от неподвижной оси \bar{x} складывается из смещения центра тяжести y_T и дополнительного смещения за счет поворота тела $x\beta$ (рис.5.10):

$$y = y_T + \beta x. \quad (72)$$

Теперь получим выражение для погонной гидродинамической нагрузки на тело, используя гипотезу плоских сече-

ний, то есть будем полагать, что отсутствуют перемещения частиц воды в направлении оси \bar{x} . Если S - площадь поперечного сечения тела, то количество движения слоя жидкости единичной толщины, ограниченного плоскостями, перпендикулярными оси x , в рамках гипотезы плоских сечений определится следующим выражением:

$$\rho S(dy/dt).$$

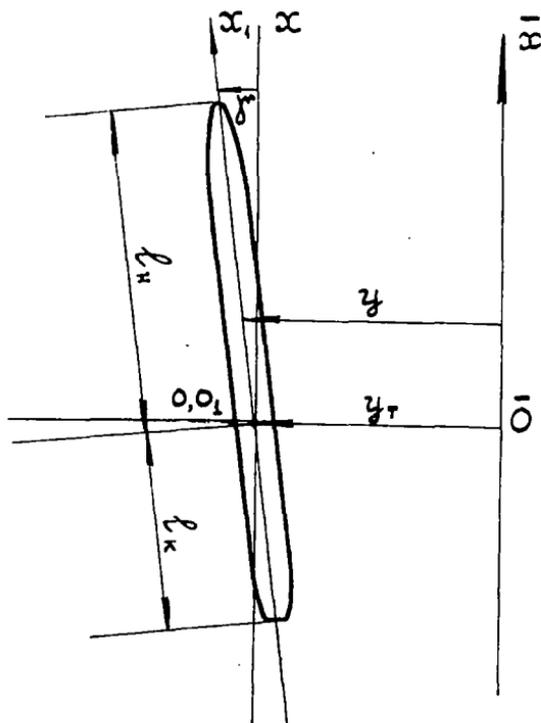


Рис. 5.10

Интенсивность нормальной силы, действующей со стороны тела на жидкость в сечении \bar{x} ,

$$\frac{dF}{d\bar{x}} = \rho \frac{d}{dt} \left(s \frac{dy}{dt} \right). \quad (73)$$

Производная d/dt , рассчитываемая при фиксированном значении x , может быть представлена так:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v_x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (74)$$

Производная $\partial/\partial t$ рассчитывается при фиксированном значении x ; $\partial/\partial x$ - при фиксированном t ; v_x - составляющая скорости центра тяжести тела в направлении оси x .

Находим

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\bar{x}} &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} - v_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(s \frac{dy}{dt} - s v_x \frac{dy}{dx} \right) = \\ &= \rho \left(s \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v_x \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} - 2s v_x \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} - \right. \\ &\left. - s \dot{v}_x \frac{\partial y}{\partial x} + v_x^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + s v_x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь точкой обозначена полная производная по t . Используя (72), находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= v_y + \dot{j}_x; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \dot{v}_y + \ddot{j}_x; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= j; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} &= j'. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где v_y - проекция скорости центра тяжести тела на направление нормали к оси x .

Погонная сила, действующая на тело в направлении, перпендикулярном оси x ,

$$q = -\frac{dF}{dx} = -\rho \left[S \dot{v}_y - v_x \frac{\partial S}{\partial x} \omega x - \frac{\partial S}{\partial x} (v_y v_x - v_x^2 j) - 2S v_x \omega - S \dot{v}_x j + S \dot{\omega} x \right]. \quad (77)$$

Далее положим, что в данный момент времени оси x и x_1 совпадают и, следовательно, $j' = 0$. Тогда

$$q = -\rho \left[S \dot{v}_y - v_x \frac{\partial S}{\partial x} \omega x - \frac{\partial S}{\partial x} v_x v_y - 2S v_x \omega + S \dot{\omega} x \right]. \quad (78)$$

Используя только что полученный результат, рассчитываем нормальную составляющую вектора гидродинамических сил Y_1 и момент гидродинамических сил M_{z_1} .

Положим сначала, что обтекание тела является безотрывным. Это можно учесть тем, что для концевых сечений ракеты (носового и кормового) принять

$$S/x = \ell_n = S/x = -\ell_k = 0. \quad (79)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 Y_1 = \int_{-l_k}^{l_H} q dx = & -\rho \Omega \dot{y} + 2\rho \Omega v_x \omega + \rho v_x v_y \int_{-l_k}^{l_H} \partial \delta / \partial x dx + \\
 & + \rho v_x \omega \int_{-l_k}^{l_H} \partial \delta / \partial x x dx - \rho \Omega \dot{\omega} x_n .
 \end{aligned} \quad (80)$$

В выражении (80)

$$\rho \Omega = \lambda_{22}; \quad \int_{-l_k}^{l_H} d\delta / dx dx = 0 \quad (\text{в силу условия } 80);$$

$$\int_{-l_k}^{l_H} \partial \delta / \partial x x dx = \delta x \Big|_{-l_k}^{l_H} - \int_{-l_k}^{l_H} \delta dx = -\Omega .$$

С учетом только что написанного

$$Y_1 = -\lambda_{22} \dot{y} + \lambda_{22} v_x \omega - \lambda_{22} x_n \dot{\omega} . \quad (81)$$

Абсолютное ускорение в направлении оси y (в неподвижной системе координат) \dot{y} может быть выражено через проекцию ускорения на связанную с телом ось \dot{y}_2 , угловую скорость ω и скорость v_x , для которой, как и в предыдущем параграфе, примем обозначение v_1 , следующим образом:

$$\dot{y} = \dot{y}_2 + \omega v_1 . \quad (82)$$

Получим

$$Y_1 = -\lambda_{22} \dot{y}_2 - \lambda_{22} x_n \dot{\omega} .$$

Вязкость жидкости приводит к отрыву струй от корпуса в районе кормового среза. Для учета реального характера обтекания следует при выводе выражения для Y_1 положить

$$S/x = -\ell_k = S_k .$$

Здесь S_k - площадь кормового среза.

Тогда

$$Y_1 = -\lambda_{22} \dot{y}_2 + \lambda_{22} v_x \omega - \rho S_k v_x v_y + \rho S_k \ell_k v_x \omega - \lambda_{22} x_n \dot{\omega} . \quad (83)$$

В связанной системе (после перехода к обозначениям $v_1 = v_x$; $v_2 = v_y$)

$$Y_1 = -\lambda_{22} \dot{v}_2 - \lambda_{22} x_n \dot{\omega} - \rho S_k v_1 v_2 + \rho S_k \ell_k v_1 \omega . \quad (84)$$

Присоединяя к силе Y_1 составляющие архимедсовой силы и силы веса в направлении оси ζ , связанной с телом, составим уравнение движения тела в проекции на эту ось:

$$M_0(\dot{v}_2 + \omega v_1) = -\lambda_{22} \dot{v}_2 - \lambda_{22} x_n \dot{\omega} - \rho S_k v_1 v_2 + \rho S_k \ell_k \omega v_1 - (A - G) \sin \vartheta , \quad (85)$$

где ϑ - угол между осью тела и вертикалью.

Сравним уравнения (85) с уравнением движения тела в проекции на ту же ось, выведенным в предыдущем параграфе,

$$(M_0 + \lambda_{22}) \dot{v}_2 + \lambda_{22} x_n \dot{\omega} + M_0 \omega v_1 = -c_{y1} \frac{\alpha \rho v_1 v_2 S}{2} + c_{y1} \frac{\bar{\omega} \rho \omega v_1 S \ell}{2} - (A - G) \sin \vartheta . \quad (86)$$

Уравнения (85) и (86) отличаются подчеркнутыми членами. Приравнявая их между собой, получим:

$$c_y^{\alpha} = 2S_K / S ; \quad (87)$$

$$c_y^{\bar{\omega}} = 2S_K \ell_K / (S \ell) . \quad (88)$$

Теперь составим выражение для момента гидродинамических сил M_{z_1} . Имеем

$$M_{z_1} = \int_{-\ell_K}^{\ell_H} x q dx .$$

После интегрирования получим

$$M_{z_1} = -\lambda_{22} x_n \dot{y} - (\lambda_{66} + \lambda_{22} x_n^2) \dot{\omega} - \rho S_K \ell_K^2 v_x \omega - \\ - \lambda_{22} v_x v_y + \rho S_K \ell_K v_x v_y . \quad (89)$$

Переход к системе координат, связанной с телом, и обозначениям $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$ дает

$$M_{z_1} = -\lambda_{22} x_n (\dot{v}_2 + \omega v_1) - (\lambda_{66} + \lambda_{22} x_n^2) \dot{\omega} - \\ - \rho S_K \ell_K \omega v_1 - \lambda_{22} v_1 v_2 + \rho S_K \ell_K v_1 v_2 . \quad (90)$$

Подставим (90) в уравнение вращательного движения тела

$$J_z \dot{\omega} = M_{z_1} - x_B A \sin \vartheta . \quad (91)$$

Подстановка дает

$$(J_z + \lambda_{66} + \lambda_{22} x_n^2) \dot{\omega} + \lambda_{22} x_n \dot{v}_2 = -\rho S_K \ell_K^2 \omega v_1 - \frac{(\lambda_{22} - \rho S_K \ell_K) v_1 v_2}{}$$

$$-\lambda_{22} x_n \omega v_1 - A x_B \sin \vartheta. \quad (92)$$

В предыдущем параграфе уравнение вращательного движения тела было выведено в виде

$$\begin{aligned} & (\mathcal{J}_Z + \lambda_{66} + \lambda_{22} x_n^2) \dot{\omega} + \lambda_{22} x_n \dot{v}_2 = \\ & = -m_{z_1}^{\alpha} \frac{\rho v_1 v_2 S \ell}{2} + m_{z_1}^{\bar{\omega}} \frac{\bar{\omega} \rho \omega v_1 S \ell^2}{2} - A x_B \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (93)$$

Уравнения (92) и (93) отличаются подчеркнутыми членами. Приравнивая их, получим с учетом, что

$$\lambda_{22} = \rho \Omega,$$

$$m_{z_1}^{\alpha} = 2 \left(\frac{\Omega}{S \ell} - \frac{S_K \ell_K}{S \ell} \right); \quad (94)$$

$$m_{z_1}^{\bar{\omega}} = -2 \left(\frac{\Omega x_n}{S \ell^2} + \frac{S_K \ell_K^2}{S \ell^2} \right). \quad (95)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А б г а р я н К.А., Р а п п о п о р т И.М. Динамика ракет. "Машиностроение", 1969.
2. А п п а з о в Р.Ф., Л а в р о в С.С., М и ш и н В.П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. "Наука", 1966.
3. Б л е й к л о к Дж.Г. Автоматическое управление самолетами и ракетами. Оборонгиз, 1963.
4. Г а н и н М.П. Динамика полета баллистических ракет. Изд. ВМОЛУА, 1972.
5. Д м и т р и е в с к и й А.А., К а з а к о в - ц е в В.П. и др. Движение ракет. Воениздат, 1968.
6. К о л е с н и к о в К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. "Машиностроение", 1969.
7. К о ч и н Н.Е., К и б е л ь И.А., Р о з е Н.В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1955.
8. Л е б е д е в А.А., Ч е р н о б р о в к и н Л.С. Динамика полета. Оборонгиз, 1962.
9. Р е д я е в с к и й К.К., В о й т к у н с к и й Л.И., Ф а д д е е в Ю.И. Гидромеханика. "Судостроение", 1968.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

В в е д е н и е	3
Глава I. <u>УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ</u>	5
§ 1. Принцип составления уравнений движения...	5
§ 2. Системы координат.....	7
§ 3. Динамические уравнения.....	17
§ 4. Кинематические соотношения.....	30
§ 5. Полные системы уравнений движения ракеты ..	34
§ 6. Разделение общих уравнений движения на продольное и боковое.....	39
§ 7. Уравнения движения центра масс ракеты....	45
Глава II. <u>СВОБОДНЫЙ ПОЛЕТ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ (эллиптичес- кая теория)</u>	54
§ 1. Уравнения движения.....	54
§ 2. Уравнение траектории.....	58
§ 3. Некоторые практические приложения эллип- тической теории.....	62
Глава III. <u>СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, МАНЕВРЕННОСТЬ И ПЕРЕГРУЗКИ РАКЕТ</u>	73
§ 1. Статическая устойчивость ракеты.....	73
§ 2. Маневренность и перегрузки ракет.....	79
§ 3. Связь между перегрузками и кинематически- ми элементами траектории.....	81
§ 4. Потребные и располагаемые перегрузки.....	83

Глава VI. <u>ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ РАКЕТ</u>	89
§ 1. Возмущенное и возмущенное движение ракеты.....	89
§ 2. Линеаризация уравнений движения.....	91
§ 3. Собственная динамическая устойчивость ракеты.....	100
§ 4. Условия собственной динамической устойчивости ракеты.....	104
§ 5. Анализ продольного возмущенного движения.....	112
§ 6. Анализ бокового возмущенного движения.....	115
§ 7. Реакция ракеты на ступенчатые отклонения органов управления.....	119
§ 8. Устойчивость системы "ракета-автомат стабилизации".....	134
§ 9. Эффективность и предельно допустимые отклонения органов управления.....	142
Глава VII. <u>УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ В ВОДЕ</u>	148
§ 1. Общее понятие о гидродинамических силах, действующих на тела при их неустановившемся движении в воде.....	148
§ 2. Общая постановка задачи о расчете гидродинамических сил инерционной природы.....	150
§ 3. Пример использования общей теории.....	152
§ 4. Гидродинамические реакции, действующие на тело, движущееся прямолинейно с переменной скоростью.....	159
§ 5. Кинетическая энергия жидкости в общем случае движения тела. Собщенные присоединенные массы.....	163
§ 6. Уравнения неустановившегося движения тела в жидкости.....	180

§ 7. Расчет коэффициентов $c_{y_1}^{\alpha}$, $c_{y_1}^{\bar{\omega}}$, $m_{z_1}^{\alpha}$, $m_{z_1}^{\bar{\omega}}$ для тел вращения большого удлинения.....

Л и т е р а т у р а

Евгений Николаевич МНЕВ,
Геннадий Степанович ЩЕННИКОВ

ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТ

Редактор	Л.И. Калинина
Технический редактор	Н.Ф. Федосова
Корректор	Н.Н. Соколова

Сдано в набор 10.01.73 г. Подписано к печати 30.05.73 г.

Формат бумаги 60 x 45

Печ.л. 12,75 Усл.печ.л. 9,5 Уч.-изд.л. 8,75

Заказ 19 Г-790012 1973 г.

Для внутриведомственной продажи

Цена 55 коп.

Типография ВМОЛУА, 197045, Ленинград, наб. Адм. Ушакова, 17

55763

Бесплатно



04

3891