Э. Шмутцер

Симметри
и законы сохранения
в физике

Э. Шмутцер

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ФИЗИКЕ

Э. Шмутцер

СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ФИЗИКЕ

Книга содержит краткий обзор методов исследования свойств симметрии в классической (включая релятивистскую) и квантовой механике, в классической и квантовой теории поля (без привлечения теории групп). Здесь собраны основные результаты по законам сохранения в обширном спектре проблем теоретической физики, в том числе известная теорема Паули — Людерса.

Книга рассчитана на широкие круги физиков и математиков — как специалистов-теоретиков, так и студентов и аспирантов; ее можно использовать как учебное пособие при чтении курсов классической (особенно с учетом гравитации) и квантовой теории поля.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Небольшой по объему обзор проф. Э. Шмутцера удивит читателя широтой охваченного им материала. Общая теория относительности и квантовая теория поля — эти антиподы теоретической физики — едва ли до сих пор встречались на страницах одной книги, тем более такой компактной. Читателю придется знакомиться не с привычным обзором какой-то одной узкой области физики — он будет вынужден воскресить в памяти материал, считающийся экзотическим в кругу его узкопрофессиональных коллег (будь то специалисты по теории гравитации или по квантовой теории поля). Но при чтении данного обзора читатель столкнется не только с трудностями «сшивания» квантовой и общерелятивистской физики. Ему придется привыкнуть к стилю написания формул, одним из характерных элементов которого является использование готических букв. Поэтому в переводе дана сравнительная таблица обычного латинского и готического алфавитов.

В 1957 г. в общежитии МГУ коллега Э. Шмутцер помог мне отшлифовать перевод моей статьи [5] на немецкий язык и на этой почве возникли не только дальнейшие обсуждения основ теории, но и ряд публикаций с обеих сторон. Проблема оказалась уходящей в те резко различные разделы физики, о которых уже говорилось. Эта проблема — законы сохранения. Она еще не решена, хотя воз активно двигают в разные стороны уже более полувека (нельзя сказать, что он «и ныне там»). Читатель познакомится с современной ситуацией по предлагаемой книге; в примечаниях сделана попытка дать наметки ситуации в иной плоскости, чем это сделано в основном тексте.

До создания Эйнштейном общей теории относительности и начала полемики о «псевдотензоре энергии-импульса» все было, казалось, как нельзя лучше в проблеме сохранения (не было, по сути, самой проблемы). Однако чуть только в свойствах пространства-времени была учтена неоднородность, как все стало неясно с энергией-импульсом и моментом — величинами, органически связанными с пространственно-временны́ми характеристиками (связь можно усмотреть, для начала, в самих уравнениях Эйнштейна). Величины типа заряда устояли просто потому, что пространство-время для них — всего лишь безразличный субстрат (см. случай А в гл. 1, § 7).

Нелокализуемость величин типа энергии-импульса, их неуниверсальное сохранение (здесь нет всеобщего согласия в диагнозе, но никто не сомневается, что положение резко отличается от стандартного) долго стояли особняком в физической теории. До рокового 1956 г. исследователи, работающие в области квантовой теории поля, могли гордиться порядком в своем хозяйстве и смотреть свысока на гравитационистов. В 1956 г. после пионерских работ Ли и Янга, а затем экспериментального открытия Ву настал черед смеяться (сквозь слезы) гравитационистам. В самых фундаментальных разделах физики, казалось, законы сохранения перестали работать! Живописные картины тогдашней лихорадки на «физической бирже» живы в памяти многих.

Но одно дело писаная теория, а другое — объективные закономерности природы. Если оказались ограниченными в своей применимости старые канонизированные законы физики, это отнюдь не означает начала «беззакония», но может служить только категорическим стимулом к серьезному исследованию фактов. Каждый переломный пункт развития науки чреват своими парадоксами, вносящими смятение в умы догматиков и маловеров, но лишь подогревающими энтузиазм диалектически мыслящих серьезных исследователей. В начале века при рождении частной теории относительности уже разыгрался скандал, анализ которого мы все изучали по «Материализму и эмпириокритицизму» В. И. Ленина. Поистине превосходный урок!

Новый урок, преподанный нам слабыми взаимодействиями, с одной стороны, и гравитацией (чем не еще более слабое взаимодействие?!) — с другой, уже всесторонне продуман, но можно полагать, что главные выводы из него ожидают нас впереди. В предлагаемом советскому читателю обзоре Э. Шмутцера дан свежий взгляд на всю панораму законов сохранения (с анализом их «нарушений»), и проработать этот обзор, несомненно, стоит.

Профессор Йенского университета Эрнст Шмутцер известен более как гравитационист, однако центр его интересов лежит в области спинорных полей, тесно связанных со слабыми взаимодействиями. В сильной исследовательской группе, работающей под его руководством, разрабатывается широкий спектр актуальных проблем релятивистской теории поля. В 1968 г. вышел монументальный труд Э. Шмутцера «Релятивистская физика» [3] — почти тысяча страниц насыщенного формулами текста. Эта монография возникла на основе большого цикла лекций, давших импульс всей Йенской группе. В последнее время Э. Шмутцер уделяет много внимания и квантовой физике; исследуя квантовые явления с участием гравитации, он сделал ряд интереснейших предсказаний физических эффектов, о чем докладывал, в частности, на Третьей советской гравитационной конференции в Армении в октябре 1972 г.

Автор в предисловии к русскому переводу его книги выделяет обращение к тому кругу советских читателей, которых он назвал «молодыми учеными». Таким начинающим физикам и математикам эта книга, несомненно, будет очень полезна. Они найдут в ней ряд ценных и свежих идей, изложенных мастерски, с хорошим, здоровым педантизмом. Специалист в теоретической или математической физике тоже прочтет ее с интересом и пользой, оценив и «изюминку» книги — естественное объединение подходов к разным полям, в том числе и в квантовой области. Наконец, хотелось бы пожелать, чтобы обзор Э. Шмутцера сделал более плодотворным диалог между гравитационистами и квантистами.

Н. В. Мицкевич

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Мне доставило большую радость узнать, что уже через год после выхода моей книжки с обзором о симметриях и законах сохранения в физике начата работа по подготовке издания на русском языке. Если не считать устранения некоторых опечаток, оно не отличается по содержанию от немецкого издания. Я не имею сейчас никаких существенных добавлений к нему.

Однако именно в русском издании я хотел бы отметить для советского читателя, что в 1957 г., еще как молодой ученый, я был впервые в Москве на стажировке в Московском государственном университете имени Ломоносова и подробно обсуждал тогда с советскими друзьями именно эту тематику. Мы часто возвращались и при последующих встречах к этому кругу вопросов, так как они затрагивают одновременно и в области эйнштейновской теории гравитации, и в квантовой теории поля и теории элементарных частиц фундаментальные проблемы физики, являющиеся сегодня основным предметом исследования многих центров международной науки.

Я хотел бы, чтобы чтение моей книжки, написанной как обзор, было полезным стимулом для советских читателей, особенно молодых ученых.

Йена, май 1973 г. *Э. Шмутцер*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В предлагаемой книге дается сжатый обзор свойств симметрии, которыми обладают законы природы в физике, и их связей с физическими законами сохранения. Эти связи для случая непрерывных свойств симметрии были открыты около полустолетия назад Э. Нётер [1]. Первые их приложения к физическим задачам были сделаны еще Э. Бессель-Хагеном [2]. Теорию свойств симметрии этого типа я подробно изложил в своей монографии [3], на которую и буду здесь опираться. Вместе с тем в квантовой механике и квантовой теории поля исключительную роль играют дискретные симметрии. Именно благодаря им в последние два десятилетия эта область теоретической физики приобрела особую актуальность, в частности в связи с отказом от сохранения четности, предложенным Ли и Янгом [4].

В рамки нашего обзора входят как частно- и общерелятивистская классическая теория, так и частнорелятивистская квантовая теория поля. Поскольку общерелятивистская квантовая теория поля еще находится в зачаточном состоянии, мы ее здесь не рассматриваем.

Чтобы обеспечить рациональное изложение материала, будет предпочтительно использоваться дедуктивный метод построений. Это выдвигает на первый план общерелятивистскую теорию по сравнению с частнорелятивистской. Последняя вступает в игру в основном как переход к частному случаю в первой.

Ввиду невозможности провести во всех деталях дедукцию при данном объеме книги мы по необходимости остановимся лишь на основных физических идеях и путеводных нитях математического аппарата. Читатель с более глубокими запросами найдет указания на дальнейшую литературу, хотя речь пойдет и здесь лишь о минимуме; однако этого будет достаточно для начала более основательного изучения предмета.

Книга адресована студентам, дипломникам и аспирантам в области физико-математических наук. Однако ее могут использовать и ученые — специалисты в этой области, чтобы получить информацию о состоянии науки или выявить темы для исследования.

Я благодарю своего уважаемого коллегу проф. Г. Вебера за многочисленные интересные дискуссии. Я признателен д-ру Херльту за проверку расчетов.

Йена, июнь 1970 *Эрнст Шмутцер*

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ

1. Строчные греческие индексы пробегают значения от 1 до 3 (пространственные измерения).

2. Строчные латинские индексы пробегают значения от 1 до 4 (пространство-время).

3. Индексы Θ и Σ пробегают значения от 1 до N (число независимых полевых функций).

4. Индексы Ω, Γ, Λ пробегают значения от 1 до $\overline{N}$ (число неметрических полевых функций).

К повторяющимся индексам, один из которых имеет ковариантный, а другой — контравариантный характер, применяется эйнштейновское правило суммирования.

Латинский и готический алфавиты

Aa	$\mathfrak{A}\mathfrak{a}$	Jj	$\mathfrak{J}\mathfrak{j}$	Ss	$\mathfrak{S}\mathfrak{s}$
Bb	$\mathfrak{B}\mathfrak{b}$	Kk	$\mathfrak{K}\mathfrak{k}$	Tt	$\mathfrak{T}\mathfrak{t}$
Cc	$\mathfrak{C}\mathfrak{c}$	Ll	$\mathfrak{L}\mathfrak{l}$	Uu	$\mathfrak{U}\mathfrak{u}$
Dd	$\mathfrak{D}\mathfrak{d}$	Mm	$\mathfrak{M}\mathfrak{m}$	Vv	$\mathfrak{V}\mathfrak{v}$
Ee	$\mathfrak{E}\mathfrak{e}$	Nn	$\mathfrak{N}\mathfrak{n}$	Ww	$\mathfrak{W}\mathfrak{w}$
Ff	$\mathfrak{F}\mathfrak{f}$	Oo	$\mathfrak{O}\mathfrak{o}$	Xx	$\mathfrak{X}\mathfrak{x}$
Gg	$\mathfrak{G}\mathfrak{g}$	Pp	$\mathfrak{P}\mathfrak{p}$	Yy	$\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$
Hh	$\mathfrak{H}\mathfrak{h}$	Qq	$\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$	Zz	$\mathfrak{Z}\mathfrak{z}$
Ii	$\mathfrak{I}\mathfrak{i}$	Rr	$\mathfrak{R}\mathfrak{r}$		

ЧАСТЬ А

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ГЛАВА 1

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИММЕТРИИ В ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Бесконечно малые преобразования и вариации

Рассмотрим систему классических полей, состоящую, вообще говоря, из различных их видов и описываемую совокупностью N не зависящих друг от друга полевых функций $V_\Theta(x^a)$:

$$(V_\Theta) = (V_1, V_2, \ldots, V_N).$$

Пусть эти полевые функции являются геометрическими объектами, т. е., например, тензорами, спинорами, биспинорами, так что они обладают определенными трансформационными свойствами при преобразованиях координат. Пусть в эту совокупность полевых функций явно входит и метрический тензор g_{ab}, описывающий гравитационное поле.

Условимся, что на протяжении всей книги строчные латинские индексы пробегают значения от 1 до 4, т. е. все пространственно-временные измерения, а строчные греческие индексы — значения от 1 до 3 (чисто пространственные измерения). По индексам, повторяющимся дважды (один из которых имеет ковариантный, а другой — контравариантный характер), подразумевается суммирование, т. е. принимается условие Эйнштейна. Это условие в разумной форме распространяется и на индексы полевых функций, причем здесь суммирование проводится каждый раз по соответственному множеству полевых функций. Вводимые здесь индексы Θ и Σ пробегают значения от 1 до N.

В этом параграфе мы рассмотрим два различных, не связанных друг с другом вида преобразований, а именно прежде всего *преобразования координат*, влекущие за собой определенным образом преобразования геометрических объектов (полевых функций), и затем *преобразования функций*, состоящие в изменении вида функциональной зависимости. Это понятие, таким образом, объединяет калибровочные, фазовые и прочие преобразования. Мы будем обозначать координатные преобразования с помощью штриха при индексе, а функциональные — с помощью знака тильда над буквой.

Рассмотрим сначала преобразования координат. Под бесконечно малым (инфинитезимальным) преобразованием координат мы будем понимать такое бесконечно малое изменение системы координат, описываемое соотношением

$$x^{a'} = x^a + \xi^a (x^b), \tag{1.1.1}$$

которое само может зависеть от пространственно-временнóй точки. Пусть преобразование координат сводится просто к изменению наименования или ярлыка, оставляющему, однако, при этом без изменения сам физический объект.

В силу трансформационных законов для геометрических объектов эти преобразования влекут за собой соотношения

$$V_{\Theta'} (x^{a'}) = V_\Theta (x^a) + \Delta_s V_\Theta. \tag{1.1.2}$$

Здесь величины $\Delta_s V_\Theta$ называются *существенными вариациями* V_Θ. Соответственно для производных имеем

$$V_{\Theta', i'} (x^{a'}) = V_{\Theta, i} (x^a) + \Delta_s V_{\Theta, i}.$$

Здесь и далее запятая обозначает частную производную по соответствующей координате.

Из (1.1.1) следуют выражения для матриц преобразования тензоров

$$A_a{}^{m'} = g_a{}^m + \xi^m{}_{,a}, \qquad A_{a'}{}^m = g_a{}^m - \xi^m{}_{,a}, \tag{1.1.3}$$

где $g_a{}^m = \delta_a{}^m$ — тензор Кронекера.

Операция существенной вариации не перестановочна с операцией частного дифференцирования. Перестановочность, однако, достигается, если существенную вариацию заменить *локальной вариацией*:

$$\Delta_L V_\Theta = \Delta_s V_\Theta - V_{\Theta, a}\xi^a, \qquad \Delta_L V_{\Theta, a} = \Delta_s V_{\Theta, a} - V_{\Theta, a, b}\xi^b, \tag{1.1.4}$$

которая, будучи взята с обратным знаком, известна под названием *дифференциала Ли*:

$$\Delta_{\mathscr{L}} V_\Theta = -\Delta_L V_\Theta.$$

Для наглядности полезно иметь в виду другое эквивалентное определение локальной вариации

$$\Delta_L V_\Theta = V_{\Theta'}(x^a) - V_\Theta(x^a).$$

Введем теперь *функциональную вариацию*, которая, согласно сказанному выше, определяется равенством

$$\widetilde{V}_\Theta(x^a) = V_\Theta(x^a) + \delta V_\Theta. \tag{1.1.5}$$

В силу этого определения она перестановочна с операцией частного дифференцирования.

Величина

$$\Delta V_\Theta = \Delta_s V_\Theta + \delta V_\Theta, \tag{1.1.6}$$

индуцируемая координатным и функциональным преобразованиями вместе взятыми, называется *полной вариацией*.

Для всех видов введенных здесь вариаций, если применять их к произведению полевых функций V_Θ и U_Σ, справедливо правило Лейбница дифференцирования произведения:

$$\Delta_s(V_\Theta U_\Sigma) = (\Delta_s V_\Theta) U_\Sigma + V_\Theta(\Delta_s U_\Sigma),$$
$$\Delta_L(V_\Theta U_\Sigma) = (\Delta_L V_\Theta) U_\Sigma + V_\Theta(\Delta_L U_\Sigma),$$
$$\delta(V_\Theta U_\Sigma) = (\delta V_\Theta) U_\Sigma + V_\Theta(\delta U_\Sigma),$$
$$\Delta(V_\Theta U_\Sigma) = (\Delta V_\Theta) U_\Sigma + V_\Theta(\Delta U_\Sigma).$$

Имея в виду дальнейшие применения, рассмотрим теперь скалярную плотность $\mathscr{L}(V_\Theta, V_{\Theta, a}, x^b)$, соответствующую лагранжевой плотности $\Lambda(V_\Theta, V_{\Theta, a}, x^b)$ и определенную как

$$\mathscr{L} = \Lambda \sqrt{g}, \qquad g = -\det(g_{ab}). \tag{1.1.7}$$

Мы будем называть эту величину *функцией Лагранжа*, или лагранжианом.

Для простоты мы ограничимся здесь лагранжианами с производными не выше первого порядка. Развитие теории для лагранжианов со вторыми производными можно найти в работе [3].

Полная вариация $\mathscr{L}$ равна

$$\Delta\mathscr{L} = \mathscr{L}(\widetilde{V}_{\Theta'}, \widetilde{V}_{\Theta', a'}, x^{b'}) - \mathscr{L}(V_\Theta, V_{\Theta, a}, x^b) =$$
$$= \mathscr{L}(V_\Theta + \Delta V_\Theta, V_{\Theta, a} + \Delta V_{\Theta, a}, x^b + \xi^b) - \mathscr{L}(V_\Theta, V_{\Theta, a}, x^b).$$

Разложение в ряд Тейлора с учетом того, что бесконечно малые величины выше первого порядка малости отбрасываются, дает

$$\Delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_\Theta}\Delta V_\Theta + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_{\Theta, a}}\Delta V_{\Theta, a} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^a}\right)_{\text{явн}}\xi^a.$$

Сокращение «явн» означает взятие производной относительно явной зависимости от координат.

Выражая полные вариации согласно (1.1.6) и (1.1.4) и используя обозначение для вариационной производной [1])

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_\Theta} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_\Theta} - \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_{\Theta, a}}\right)_{, a}, \tag{1.1.8}$$

приходим к новому выражению:

$$\Delta\mathscr{L} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_\Theta}\delta V_\Theta + \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_{\Theta, a}}\delta V_\Theta\right]_{, a} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_\Theta}\Delta_L V_\Theta +$$
$$+ \xi^m\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^m}\right)_{\text{явн}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_\Theta}V_{\Theta, m} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_{\Theta, a}}V_{\Theta, a, m}\right] +$$
$$+ \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_{\Theta, a}}\Delta_L V_\Theta\right]_{, a}.$$

Учитывая тождество 107

$$(\mathscr{L} g_m{}^a)_{, a} = \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^m}\right)_{\text{явн}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_\Theta}V_{\Theta, m} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial V_{\Theta, a}}V_{\Theta, a, m}$$

---

[1]) Математики под знаком функциональной производной (δ/δ) пишут символ самого функционала, от которого эта производная берется [в данном случае это интеграл действия W, см. (1.1.11)], однако у физиков принята запись, использованная здесь автором.— *Прим. перев.*

и используя сокращение

$$\Pi^{\Theta a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial V_{\Theta,\, a}}\,, \qquad (1.1.9)$$

получаем, наконец,

$$\Delta\mathscr{L} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_{\Theta}}\,\delta V_{\Theta} + [\Pi^{\Theta a}\delta V_{\Theta}]_{,\,a} - \mathscr{L}\xi^{m}{}_{,\,m} + \\ + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_{\Theta}}\,(\Delta_s V_{\Theta} - V_{\Theta,\,m}\xi^m) + \\ + [\Pi^{\Theta a}\Delta_s V_{\Theta} + \xi^m(\mathscr{L}g_m{}^a - \Pi^{\Theta a}V_{\Theta,\,m})]_{,\,a}. \qquad (1.1.10)$$

Наш дальнейший анализ связан с *интегралом действия*, который определяется как инвариантный четырехмерный интеграл по наперед заданной области пространства-времени V_4 следующим образом:

$$W = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\Lambda d^{(4)}f = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\mathscr{L}d^{(4)}x. \qquad (1.1.11)$$

Здесь $d^{(4)}f = \sqrt{g}\,d^{(4)}x$ — инвариантный элемент четырехмерного объема. Из данного выше определения полной вариации для полной вариации интеграла действия получаем

$$\Delta W = \widetilde{W}' - W = \\ = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\Lambda\,(V_{\Theta} + \Delta V_{\Theta} V_{\Theta,\,a} + \Delta V_{\Theta,\,a},\ x^b + \xi^b)\,d^{(4)}\tilde{f} - \\ - \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\Lambda\,(V_{\Theta},\ V_{\Theta,\,a},\ x^b)\,d^{(4)}f.$$

Соотношение

$$\delta g = g g^{mn}\delta g_{mn}$$

дает связь

$$d^{(4)}\tilde{f} = \left(1 + \delta\ln\sqrt{g}\right)d^{(4)}f,$$

которая приводит к выражению

$$\Delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}[\Lambda\,(V_{\Theta} + \Delta V_{\Theta},\ V_{\Theta,\,a} + \Delta V_{\Theta,\,a},\ x^b + \xi^b)\times \\ \times\left(1 + \delta\ln\sqrt{g}\right) - \Lambda\,(V_{\Theta},\ V_{\Theta,\,a},\ x^b)]\,d^{(4)}f.$$

Отсюда, пользуясь разложением в ряд Тейлора, получаем наконец

$$\Delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} [\Delta\Lambda + \Lambda\delta \ln \sqrt{g}]\, d^{(4)}f. \tag{1.1.12}$$

При дальнейшем преобразовании этого выражения будем основываться на (1.1.7). Применение полной вариации дает

$$\Delta\mathscr{L} = \sqrt{g}\,[\Delta\Lambda + \Lambda\,(\Delta \ln \sqrt{g})].$$

Имея в виду разложение

$$\Delta \ln \sqrt{g} = \Delta_s \ln \sqrt{g} + \delta \ln \sqrt{g}$$

и равенство

$$\Delta_s \ln \sqrt{g} = -\xi^a{}_{,\,a}, \tag{1.1.13}$$

следующее из тензорного закона преобразования для g_{ab}, находим

$$\Delta\mathscr{L} = \sqrt{g}\,[\Delta\Lambda + \Lambda\delta \ln \sqrt{g} - \Lambda\xi^a{}_{,\,a}].$$

Окончательный результат имеет вид

$$\Delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} (\Delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\xi^a{}_{,\,a})\, d^{(4)}x. \tag{1.1.14}$$

Следует иметь в виду, что в подынтегральное выражение здесь входит конструкция (1.1.10).

§ 2. Принцип Гамильтона и лагранжев формализм

В теории поля находит свое непосредственное обобщение хорошо известный из механики *принцип действия Гамильтона*, являющийся вариационным принципом и гласящий там, что механическое движение между двумя моментами времени протекает так, что действие принимает экстремальное значение. При этом координаты материальных точек в механике q_Θ соответствуют полевым функциям системы физических полей V_Θ, а механический параметр времени t — пространственно-временны́м координатам x^a:

$$q_\Theta \to V_\Theta, \qquad t \to x^a.$$

Аналогично механике в теории поля уравнения движения, именуемые в этом случае уравнениями поля, тождественны уравнениям Лагранжа, вытекающим из принципа Гамильтона.

В теории поля принцип Гамильтона математически выражается в форме

$$\delta W = \frac{1}{c}\,\delta \int\limits_{V_4} \Lambda d^{(4)} f = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} \delta \mathscr{L} d^{(4)} x = 0. \qquad (1.2.1)$$

При этом все функции $V_\Theta\,(x^a)$ подвергаются варьированию без изменения координат и области интегрирования, и отбирается та функциональная структура $V_\Theta\,(x^a)$, при которой принимает экстремальное значение интеграл действия, функциональная структура которого $\Lambda\,(V_\Theta,\ V_{\Theta,\,a},\ x^b)$ считается строго фиксированной [1]). На границе области V_4, обозначаемой (V_4), полевые функции должны оставаться «закрепленными»:

$$\delta V_\Theta\,|_{(V_4)} = 0. \qquad (1.2.2)$$

Поскольку варьирование, применяемое в принципе Гамильтона (1.2.1), сводится к введенному выше функциональному варьированию, для (1.1.10) применима частная форма записи

$$\delta \mathscr{L} = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta V_\Theta}\,\delta V_\Theta + [\Pi^{\Theta a} \delta V_\Theta]_{,\,a},$$

откуда при подстановке в (1.2.1) следует

$$\delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} \left\{ \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta V_\Theta}\,\delta V_\Theta + [\Pi^{\Theta a} \delta V_\Theta]_{,\,a} \right\} d^{(4)} x = 0. \qquad (1.2.3)$$

Если потребовать от дальнейших выкладок общековариантности, т. е. независимости от конкретного выбора системы координат, то величина

$$Y^a = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\Pi^{\Theta a} \delta V_\Theta \qquad (1.2.4)$$

[1]) В определенном смысле законы природы отражают также еще один экстремальный принцип, а именно принцип простоты самого лагранжиана как функции своих аргументов (потенциалов и напряженностей полей).— *Прим. перев.*

должна быть тензором (вектором), что и предполагается в дальнейшем. Тогда к дивергенциальному члену в подынтегральном выражении в (1.2.3) применима ковариантная форма теоремы Гаусса

$$\delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta V_\Theta} \delta V_\Theta d^{(4)}x + \frac{i}{c} \int\limits_{(V_4)} \frac{1}{\sqrt{g}} \Pi^{\Theta a} \delta V_\Theta \, df_a = 0. \qquad (1.2.5)$$

Здесь *тензорный элемент гиперповерхности* df_a следующим образом определяется через дуальный ему элемент внутренней ориентации dV^{ijk}:

$$df_a = \frac{1}{3!i} \varepsilon_{aijk} dV^{ijk}. \qquad (1.2.6)$$

Псевдотензор Леви-Чивиты [1]) ε_{aijk} связан с *символом Леви-Чивиты* Δ_{aijk} соотношением

$$\varepsilon_{aijk} = \sqrt{g} \Delta_{aijk}.$$

Вследствие (1.2.2) интеграл по гиперповерхности в (1.2.5) обращается в нуль, и принцип Гамильтона записывается в виде

$$\delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta V_\Theta} \delta V_\Theta \, d^{(4)}x = 0.$$

Необходимым условием равенства нулю этого интеграла является выполнение *уравнений Лагранжа*

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta V_\Theta} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial V_\Theta} - \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial V_{\Theta,\, a}} \right)_{,\, a} = 0, \qquad (1.2.7)$$

играющих роль уравнений поля.

Интересно отметить, что добавление к функции Лагранжа члена, имеющего вид обычной частной дивергенции,

---

[1]) Термин «псевдотензор» перегружен разными смысловыми оттенками; может быть, лучше было бы говорить «аксиальный тензор» (хотя для тензора валентности 0, если добавить к ней аксиальные свойства, и общепринято обозначение «псевдоскаляр»!). Тогда символ Леви-Чивиты был бы плотностью [веса (—1)] аксиального тензора. Хороший (хотя и несколько сухой) обзор тензорного аппарата с учетом «псевдотензора» Леви-Чивиты с изложением теорем типа Гаусса и дифференциальных операций читатель найдет в книге Я. А. Схоутена [18].— *Прим. перев.*

не меняет уравнений поля, если фигурирующая в равенстве

$$\overline{\mathscr{L}}(V_\Theta, V_{\Theta, a}, x^b) = \mathscr{L}(V_\Theta, V_{\Theta, a}, x^b) - \Omega^a{}_{, a} \qquad (1.2.8)$$

величина Ω^a обладает функциональной структурой:

$$\Omega^a = \Omega^a(V_\Theta, V_{\Theta, b}, x^c).$$

Действительно, непосредственное вычисление показывает, что имеет место тождество [1])

$$\frac{\delta \Omega^a{}_{, a}}{\delta V_\Theta} = 0, \qquad (1.2.9)$$

из которого следует

$$\frac{\delta \overline{\mathscr{L}}}{\delta V_\Theta} = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta V_\Theta} = 0.$$

§ 3. Теорема Нётер

Мы отойдем здесь от первоначальной формы, в которой Нётер [1] рассматривала эту теорему с точки зрения абстрактной теории групп, и специально приспособим ее математическое выражение к потребностям физики.

Понятие, которое лежит в основании теории, развитой Нётер,— это понятие *преобразования симметрии*. Мы будем понимать под ним такое преобразование (вообще говоря, и преобразование координат и функциональное преобразование), относительно которого данная лагранжева плотность Λ обладает свойством

$$\Lambda(\widetilde{V}_{\Theta'}, \widetilde{V}_{\Theta', a'}, x^{b'}) \sqrt{\widetilde{g}} = \Lambda(V_\Theta, V_{\Theta, a}, x^b) \sqrt{g} - \mathcal{O}^a{}_{, a}, \qquad (1.3.1)$$

где $\mathcal{O}^a$ — векторная плотность веса 1, обладающая функциональной структурой

$$\mathcal{O}^a = \mathcal{O}^a(V_\Theta, \widetilde{V}_\Theta, x^b).$$

---

[1]) Поскольку величина Ω^a зависит от $V_{\Theta, b}$, ее дивергенция в (1.2.8) зависит и от $V_{\Theta, b, c}$; поэтому в данном подходе, исключающем применение вторых производных в лагранжиане, нельзя включать в Ω^a вторые производные полевых функций. Отметим, однако, что обобщение на случай таких высших производных весьма просто.— *Прим. перев.*

Преобразование симметрии приводит, таким образом, к форм-инвариантности лагранжевой плотности, если отвлечься от дивергенциального члена и влияния метрики.

Умножая (1.3.1) на $d^{(4)}x$ с учетом формулы преобразования

$$\sqrt{g}\, d^{(4)}x = \sqrt{g'}\, d^{(4)}x',$$

получаем при интегрировании по V_4

$$\int\limits_{V_4} \mathscr{L}(\widetilde{V}_{\Theta'},\ \widetilde{V}_{\Theta',\,a'},\ x^{b'})\, d^{(4)}x' =$$

$$= \int\limits_{V_4} \mathscr{L}(V_\Theta, V_{\Theta,\,a}, x^b)\, d^{(4)}x - \int\limits_{V_4} \mathcal{O}^a{}_{,\,a}\, d^{(4)}x.$$

Поскольку величина $\mathcal{O}^a$ по предположению является векторной плотностью веса 1, последнее слагаемое по теореме Гаусса ковариантным образом переводится в интеграл по гиперповерхности, а так как на (V_4), согласно принципу Гамильтона, полевые функции закреплены, мы получим [1])

$$\delta \int\limits_{V_4} \mathscr{L}(\widetilde{V}_{\Theta'}, \widetilde{V}_{\Theta',\,a'},\ x^{b'})\, d^{(4)}x' = \delta \int\limits_{V_4} \mathscr{L}(V_\Theta,\ V_{\Theta,\,a},\ x^b)\, d^{(4)}x = 0.$$

Отсюда следует форм-инвариантность уравнений поля относительно преобразований симметрии:

$$\frac{\delta \mathscr{L}(V_\Theta, \ldots)}{\delta V_\Theta} = 0 \rightarrow \frac{\delta \mathscr{L}(\widetilde{V}_{\Theta'}, \ldots)}{\delta \widetilde{V}_{\Theta'}} = 0.$$

В дальнейшем нас будут особенно интересовать бесконечно малые преобразования симметрии, для которых вследствие (1.1.13) из (1.3.1) вытекают соотношения

$$\mathscr{L}(\widetilde{V}_{\Theta'},\ \widetilde{V}_{\Theta',\,a'},\ x^{b'})(1 + \xi^a{}_{,\,a}) = \mathscr{L}(V_\Theta,\ V_{\Theta,\,a},\ x^b) - \mathcal{O}^a{}_{,\,a}$$

и, наконец,

$$\Delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\xi^a{}_{,\,a} = -\mathcal{O}^a{}_{,\,a}. \tag{1.3.2}$$

---

[1]) Закрепленными на границах области интегрирования потенциалы полей будут лишь в смысле собственно варьирования, тогда как координаты на этих границах, конечно, не закреплены (иначе, например, были бы невозможны все существенные в физике преобразования, такие, как сдвиги и повороты).— *Прим. перев.*

Подставляя сюда разложение (1.1.10), мы приходим к *теореме Нётер* в форме

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_\Theta}\delta V_\Theta+[\Pi^{\Theta a}\delta V_\Theta]_{,\,a}+\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_\Theta}(\Delta_s V_\Theta-V_{\Theta,\,m}\xi^m)+$$
$$+[\Pi^{\Theta a}\Delta_s V_\Theta+\xi^m(\mathscr{L}g_m{}^a-\Pi^{\Theta a}V_{\Theta,\,m})+\mathscr{O}^a]_{,\,a}=0. \quad (1.3.3)$$

Кроме того, величину $\mathscr{O}^a$ можно разбить на слагаемые

$$\mathscr{O}^a=\delta\mathscr{O}^a+\mathscr{O}\xi^a, \quad (1.3.4)$$

относящиеся соответственно к функциональным и координатным преобразованиям, что охватывает все практически интересные случаи. Если при этом учесть тот факт, что координатные и функциональные преобразования по определению не зависят друг от друга, то мы получим два конкретных выражения теоремы Нётер:

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_\Theta}\delta V_\Theta+[\Pi^{\Theta a}\delta V_\Theta+\delta\mathscr{O}^a]_{,\,a}=0 \quad (1.3.5)$$

и

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta V_\Theta}(\Delta_s V_\Theta-V_{\Theta,\,m}\xi^m)+[\Pi^{\Theta a}\Delta_s V_\Theta+$$
$$+\xi^m(\mathscr{L}g_m{}^a-\Pi^{\Theta a}V_{\Theta,\,m})+\mathscr{O}\xi^a]_{,\,a}=0. \quad (1.3.6)$$

§ 4. *Разложение полного поля на метрическое и неметрические поля*

В этом разделе мы переформулируем только что выведенную теорему Нётер для частного случая, охватывающего ее физические приложения и утверждающего, что полное поле составлено из метрического поля g_{ab} и неметрических полей U_Ω:

$$V_\Theta \begin{array}{l}\nearrow g_{ab}\\ \searrow U_\Omega\end{array},$$

где

$$(U_\Omega)=(U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_{\overline{N}}).$$

Таким образом, через $\bar{N}$ обозначается число независимых неметрических полевых функций. Так как прежде число всех вообще независимых полевых функций было принято равным N, то имеет место соотношение

$$N = \bar{N} + 10,$$

ибо, как известно, метрический тензор обладает десятью независимыми компонентами g_{ab}. В дальнейшем принимается, что прописные греческие индексы Ω, Γ и Λ пробегают значения от 1 до $\bar{N}$.

Вводя естественные обозначения

$$\Pi^{mna} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g_{mn,\, a}} \quad \text{и} \quad \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U_{\Omega a}}, \tag{1.4.1}$$

перепишем конкретизированные формы теоремы Нётер (1.3.5) и (1.3.6) в виде

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{mn}} \delta g_{mn} + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} \delta U_\Omega + [\Pi^{mna} \delta g_{mn} + \\ + \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} \delta U_\Omega + \delta \Theta^a]_{,\, a} = 0 \tag{1.4.2}$$

и

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{mn}} (\Delta_s g_{mn} - g_{mn,\, r} \xi^r) + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} (\Delta_s U_\Omega - U_{\Omega,\, r} \xi^r) + \\ + [\Pi^{mna} \Delta_s g_{mn} + \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} \Delta_s U_\Omega + \\ + \xi^r (\mathscr{L} g_r{}^a - \Pi^{mna} g_{mn,\, r} - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} U_{\Omega,\, r} + \Theta g_r{}^a)]_{,\, a} = 0. \tag{1.4.3}$$

Уравнение (1.4.2) уже имеет тот вид, который нам будет нужен в дальнейшем; второе же уравнение еще нуждается в преобразовании.

Учитывая равенства (1.1.3), из законов преобразования тензоров получаем следующие соотношения для полевых функций (если последние — тензоры):

$$\Delta_s U_m = -U_r \xi^r{}_{,\, m}, \quad \Delta_s U^m = U^r \xi^m{}_{,\, r},$$
$$\Delta_s g_{mn} = -g_{rn} \xi^r{}_{,\, m} - g_{mr} \xi^r{}_{,\, n},$$
$$\Delta_s g^{st} = g^{rt} \xi^s{}_{,\, r} + g^{sr} \xi^t{}_{,\, r}, \tag{1.4.4a}$$
$$\Delta_s g_m{}^n = 0, \quad \Delta_s g = -2g \xi^m{}_{,\, m}, \quad \Delta_s \ln \sqrt{g} = -\xi^m{}_{,\, m}.$$

Для полевых функций более общей геометрической природы бесконечно малые преобразования задаются следующим образом:

$$\Delta_s U_\Omega = -S_\Omega{}^{\Gamma b}{}_a U_\Gamma \xi^a{}_{,\,b} - S_{\Omega a}\xi^a, \tag{1.4.4б}$$

где указанная геометрическая природа величин отражена в коэффициентах $S_\Omega{}^{\Gamma b}{}_a$[1]). Коэффициент же $S_{\Omega a}$ в члене, пропорциональном ξ^a, добавлен для наиболее общей формулировки теории [2]). Известно, что таким образом преобразуются галилеевы координаты при неоднородных преобразованиях Лоренца. В случае тензора валентности 1 (вектора) сравнение с предыдущими уравнениями дает, например,

$$S_{\Omega a} = 0, \qquad S_d{}^{cb}{}_a = g_d{}^b g_a{}^c. \tag{1.4.5}$$

Подставляя выражения (1.4.4) в (1.4.3), мы получили бы почти необозримое выражение. Поэтому введем обозначения

$$\mathscr{V}_t{}^a = \mathscr{L} g_t{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} U_{\Omega,\,t} - \Pi^{mna} g_{mn,\,t} -$$
$$- \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} S_\Omega{}^{\Gamma a}{}_t U_\Gamma - 2\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{ma}} g_{mt} \tag{1.4.6а}$$

и

$$\mathscr{V}_t{}^{am} = -\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} S_\Omega{}^{\Gamma m}{}_t U_\Gamma - 2\Pi^{mna} g_{tn}, \tag{1.4.6б}$$

---

[1]) Это фундаментальное выражение играет важную роль в описании геометрических объектов весьма широкого класса. Так, если отбросить здесь последний член, то оно описывает законы преобразования, в частности, всех тензоров и их плотностей (любого веса). Анализируя операцию дифференцирования Ли [см. формулу (1.1.4) и далее], легко распространить определение ковариантной производной с обычного вектора на тензор произвольной валентности или его плотность произвольного веса:

$$U_{\Omega;\,a} = U_{\Omega,\,a} - S_\Omega{}^{\Gamma b}{}_c U_\Gamma \left\{ {c \atop ab} \right\}.$$

Этим, конечно, применения закона (1.4.4б) не исчерпываются.— *Прим. перев.*

[2]) Для более общей записи теории естественно предположить также наличие в инфинитезимальном законе преобразования типа (1.4.4б) члена, пропорционального $\xi^a{}_{,\,b,\,c}$. Так преобразуется, например, связность (символы Кристоффеля), если рассматривать ее независимо от метрического тензора, что характерно для принципа Гамильтона в *формулировке Палатини.— Прим. перев.*

при которых (1.4.3) принимает вид

$$\xi^t \Big[\Big\{ \mathscr{V}_t{}^a + \Theta g_t{}^a + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} S_\Omega{}^{\Gamma a}{}_t U_\Gamma + 2 \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{ma}} g_{mt} \Big\}_{,a} - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{mn}} g_{mn,t} - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} U_{\Omega,t} - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} S_{\Omega t,a} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U_\Omega} S_{\Omega t} \Big] + \xi^t{}_{,m} [\mathscr{V}_t{}^m + \Theta g_t{}^m - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega m} S_{\Omega t} + \mathscr{V}_t{}^{am}{}_{,a}] + \xi^t{}_{,m,a} \mathscr{V}_t{}^{(ma)} = 0. \qquad (1.4.7)$$

Здесь круглые скобки у индексов обозначают взятие симметричной части величины по этим индексам (симметризующие скобки Баха). Вследствие независимости и произвольности ξ^t и их производных отсюда следует

$$\Big\{ \mathscr{V}_t{}^a + \Theta g_t{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} S_{\Omega t} + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} S_\Omega{}^{\Gamma a}{}_t U_\Gamma + 2 \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{ma}} g_{mt} \Big\}_{,a} - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{mn}} g_{mn,t} - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} (U_{\Omega,t} + S_{\Omega t}) = 0, \qquad (1.4.8)$$

$$\mathscr{V}_t{}^m + \Theta g_t{}^m - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega m} S_{\Omega t} + \mathscr{V}_t{}^{am}{}_{,a} = 0, \qquad (1.4.9)$$

$$\mathscr{V}_t{}^{(ma)} = 0. \qquad (1.4.10)$$

Дифференцирование (1.4.6а) и (1.4.10) дает соответственно

$$\Theta_{,t} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^t} \right)_{\text{явн}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U_\Omega} S_{\Omega t} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial U_{\Omega,a}} S_{\Omega t,a} = 0 \qquad (1.4.11)$$

и

$$\mathscr{V}_t{}^{ma}{}_{,m,a} = 0. \qquad (1.4.12)$$

Далее, при дифференцировании (1.4.9) и учете (1.4.12) получаем

$$(\mathscr{V}_t{}^m + \Theta g_t{}^m - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega m} S_{\Omega t})_{,m} = 0. \qquad (1.4.13)$$

Исключая из системы (1.4.11) и (1.4.13) величину $\Theta_{,t}$, находим

$$\mathscr{V}_t{}^m{}_{,m} - \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^t} \right)_{\text{явн}} + \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta U_\Omega} S_{\Omega t} = 0. \qquad (1.4.14)$$

Наконец, из (1.4.8) и (1.4.13) следует результат

$$\left\{\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta U_\Omega} S_\Omega{}^{\Gamma a}{}_t U_\Gamma + 2\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta g_{ma}} g_{mt}\right\}_{,a} - \\ - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta g_{mn}} g_{mn,t} - \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta U_\Omega}(U_{\Omega,t} + S_{\Omega t}) = 0. \qquad (1.4.15)$$

С учетом определения

$$\mathscr{M}_t{}^{ba} = (\mathscr{T}_t{}^b - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega b} S_{\Omega t} + \mathscr{O} g_t{}^b)\, x^a + \mathscr{T}_t{}^{ba} \qquad (1.4.16)$$

уравнению (1.4.12) можно придать интересную форму:

$$\mathscr{M}_t{}^{ba}{}_{,b} = 0. \qquad (1.4.17)$$

Этими соотношениями исчерпывается содержание нётеровского тождества (1.4.3). Здесь особенно важны соотношения (1.4.13) и (1.4.17), так как они имеют вид *дифференциальных законов сохранения* в частных (а не ковариантных) дивергенциях. Соотношения такого типа называют *сильными законами сохранения*, так как равенство нулю частных дивергенций следует в них исключительно в силу свойств симметрии лагранжиана. В противоположность этому соотношение (1.4.8) имеет характер так называемого *слабого закона сохранения*, ибо здесь дивергенциальное выражение обращается в нуль лишь вследствие выполнения уравнений поля, т. е. при равенстве нулю вариационных производных лагранжиана. Вообще говоря, физический смысл имеют именно слабые законы сохранения [1]).

Отметим, наконец, что величины $\mathscr{T}_t{}^{am}$ носят название *суперпотенциалов*, так как из них, согласно соотношению (1.4.9), путем дифференцирования следуют величины $\mathscr{T}_t{}^m$, связанные, как покажет дальнейшее физическое рассмотрение, с комплексом энергии-импульса.

Теперь целесообразно произвести еще разбиение лагранжевых плотностей и соответственно функций Лагран-

---

[1]) Итак, под *слабыми* соотношениями понимают такие, которые выполняются лишь при учете уравнений поля (наряду со свойствами инвариантности); в отличие от *сильных* соотношений, отражающих только свойства инвариантности конструкций типа лагранжианов, слабые соотношения, очевидно, насыщены и физическим содержанием.— *Прим. перев.*

жа на чисто гравитационную (метрическую) часть и неметрический остаток:

$$\Lambda = \overset{G}{\Lambda} + \overset{U}{\Lambda} \quad \text{и} \quad \mathscr{L} = \overset{G}{\mathscr{L}} + \overset{U}{\mathscr{L}}, \qquad (1.4.18)$$

при этом

$$\overset{G}{\mathscr{L}} = \overset{G}{\Delta} \sqrt{g} \quad \text{и} \quad \overset{U}{\mathscr{L}} = \overset{U}{\Lambda} \sqrt{g}.$$

Пусть введенные функции имеют следующую структуру:

$$\overset{G}{\Lambda} = \overset{G}{\Lambda} (g_{mn},\ g_{mn,\,a},\ x^b),$$

$$\overset{U}{\Lambda} = \overset{U}{\Lambda} (U_\Omega,\ U_{\Omega,\,a},\ g_{mn},\ g_{mn,\,b},\ x^c).$$

При этих предположениях из (1.2.7) следуют уравнения метрического поля

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta g_{mn}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g_{mn}} - \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial g_{mn,\,a}}\right)_{,\,a} = \frac{\partial\overset{G}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn}} - \left(\frac{\partial\overset{G}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn,\,a}}\right)_{,\,a} + \\ + \frac{\partial\overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn}} - \left(\frac{\partial\overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn,\,a}}\right)_{,\,a} = 0 \qquad (1.4.19)$$

и уравнения неметрических полей

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta U_\Omega} = \frac{\delta\overset{U}{\mathscr{L}}}{\delta U_\Omega} = \frac{\partial\overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial U_\Omega} - \left(\frac{\partial\overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial U_{\Omega,\,a}}\right)_{,\,a} = 0. \qquad (1.4.20)$$

Естественно разбить (1.2.4) на две части:

$$Y^a = \overset{G}{Y^a} + \overset{U}{Y^a}, \qquad (1.4.21)$$

где

$$\overset{G}{Y^a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \Pi^{mna} \delta g_{mn}$$

и

$$\overset{U}{Y^a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} \delta U_\Omega. \qquad (1.4.22)$$

Так как эти части не зависят друг от друга, мы распространим на каждую из них наше требование тензорности, если примем за основу общековариантную формулировку принципа Гамильтона. Поскольку лагранжевы плотности имеющих физический смысл полей $\overset{U}{\Lambda}$ сами являются инвариантами относительно преобразований координат, наше требование автоматически удовлетворяется для $\overset{U}{Y}{}^a$. Что же касается $\overset{G}{Y}{}^a$, то здесь требуется специальное рассмотрение.

§ 5. *Эйнштейновские уравнения гравитационного поля*

Общая запись уравнений гравитационного (метрического) поля представлена в (1.4.19) в форме уравнений Лагранжа. Возникает вопрос: совпадают ли эти уравнения с известными *уравнениями Эйнштейна*

$$R_{kl}-\frac{1}{2}g_{kl}R=\varkappa T_{kl}. \tag{1.5.1}$$

Здесь

$$R_{kl}=\left\{{m \atop km}\right\}_{,l}-\left\{{m \atop kl}\right\}_{,m}+\left\{{a \atop km}\right\}\left\{{m \atop al}\right\}-\left\{{a \atop kl}\right\}\left\{{m \atop am}\right\} \tag{1.5.2}$$

— *тензор Риччи*,

$$R=R_m{}^m \tag{1.5.3}$$

— *инвариант кривизны (скалярная кривизна)*, T_{kl} — *симметричный тензор энергии-импульса* материи [1]) и

$$\varkappa=\frac{2\gamma_N}{c^4}=2{,}08\cdot 10^{-48}\ \text{г}^{-1}\ \text{см}^{-1}\ \text{с}^2 \tag{1.5.4}$$

— *эйнштейновская гравитационная постоянная*. В последней формуле $c=3\cdot 10^{10}$ см$\cdot$с$^{-1}$ — *скорость света в вакууме*, $\gamma_N=4\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-8}$ см^{3}г$^{-1}$с$^{-2}$ — ньютонова *гравитационная*

---

[1]) Обычно в физике под «материей» понимают совокупность вещества и всех полей, кроме гравитационного (поля метрического тензора), хотя последнее и обладает основными атрибутами материи в более широком понимании.— *Прим. перев.*

постоянная [1]). В выражении (1.5.2) использовано обозначение

$$\left\{ {k \atop ml} \right\} = \frac{1}{2} g^{ka} (g_{am,\,l} + g_{la,\,m} - g_{ml,\,a}) \qquad (1.5.5)$$

для *символов Кристоффеля* [2]).

Вычисления приводят к выводу, что уравнения (1.5.1) вытекают из (1.4.19) для двух подробно исследованных в литературе лагранжевых плотностей. Первая из них имеет вид

$$\overset{G}{\Lambda} = -\frac{1}{2\varkappa} R \text{ (ковариантный случай).} \qquad (1.5.6)$$

Эта лагранжева плотность совпадает со скалярной кривизной с точностью до множителя, дающего нужную размерность. Это — лагранжева плотность второго порядка, т. е. она содержит вторые производные метрического тензора и поэтому выходит за рамки нашего анализа [3]).

---

[1]) Чаще ньютонову гравитационную постоянную определяют без множителя 4π, что соответствует аналогу гауссовых единиц в электродинамике.— *Прим. перев.*

[2]) Кроме этого обозначения символов Кристоффеля, в литературе используется (и притом чаще) также обозначение Γ^k_{ml}.— *Прим. перев.*

[3]) Если в лагранжевой плотности (1.5.6) символы Кристоффеля не считать независимыми, то, действительно, уравнения в форме (1.4.19) оказываются непригодными, и вместо них приходится писать уравнения для лагранжиана со вторыми производными потенциала

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{mn}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{mn}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{mn,\,a}} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{mn,\,a,\,b}} \right)_{,\,b,\,a} = 0.$$

Однако существует и другой подход (метод Палатини, уже упомянутый нами в примечании на стр. 25), когда метрический тензор и символы Кристоффеля варьируются (собственно вариации!) независимо друг от друга. Тогда для лагранжевой плотности (1.5.6) в качестве уравнений Лагранжа получаются как уравнения Эйнштейна (1.5.1) (варьирование по метрическому тензору g_{mn}), так и «уравнение» для символов Кристоффеля (1.5.5) (варьирование по этим последним). В теореме Нётер, учитывающей законы преобразования полевых величин, при этом необходимо пользоваться обобщенным законом преобразования для символов Кристоффеля, указанным в примечании на стр. 25).— *Прим. перев.*

Подробный анализ показывает [3], что построенный с ее помощью комплекс энергии-импульса неудовлетворителен с точки зрения физики. Хотя в этом случае принцип Гамильтона записывается в общековариантном виде, что подчеркивает особо ценимую в общей теории относительности общую ковариантность, все же эта лагранжева плотность не оправдывает себя в ряде узловых пунктов, как детально было показано Мёллером [5] [1]).

В эйнштейновском варианте лагранжева плотность имеет вид

$$\overset{G}{\Lambda}=\frac{1}{2\varkappa}\,{}^{(Q)}R. \tag{1.5.7}$$

При этом определение ${}^{(Q)}R$ исходит из следующих соотношений:

$$R={}^{(Q)}R+{}^{(L)}R={}^{(D)}R-{}^{(Q)}R, \tag{1.5.8}$$

$${}^{(Q)}R=g^{sn}\left[\begin{Bmatrix}k\\ls\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}l\\nk\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}k\\lk\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}l\\ns\end{Bmatrix}\right], \tag{1.5.9}$$

$${}^{(L)}R=g^{sn}\left[\begin{Bmatrix}k\\nk\end{Bmatrix}_{,\,s}-\begin{Bmatrix}k\\ns\end{Bmatrix}_{,\,k}\right], \tag{1.5.10}$$

$${}^{(D)}R=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\left(\begin{Bmatrix}n\\sn\end{Bmatrix}g^{sl}-\begin{Bmatrix}l\\sn\end{Bmatrix}g^{sn}\right)\right]_{,\,l}. \tag{1.5.11}$$

Индексы Q и L использованы для того, чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с выражениями квадратичными и линейными соответственно по символам Кристоффеля (и их производным). Индекс D указывает на то, что речь идет о дивергенциальном выражении. Тот факт, что обе приведенные лагранжевы плотности дают одни и те же

---

[1]) Читатель должен иметь в виду, однако, что проблема энергии-импульса далеко еще не решена в общей теории относительности, и пока преждевременно выносить категорическое суждение против инвариантной лагранжевой плотности в пользу эйнштейновского лагранжиана. См. дальнейший анализ в этой книге и в рекомендуемой литературе, в частности [25—27]. Что касается работ [5], то последняя из них, вышедшая несколько раньше первой, была затем более подробно изложена на русском языке [25], хотя в это изложение не вошел анализ принципа простоты лагранжиана.— *Прим. перев.*

уравнения Эйнштейна, следует из тождества (1.2.9), согласно которому [1])

$$\frac{\delta\left({}^{(D)}R\sqrt{g}\right)}{\delta g_{mn}}=0,$$

так что

$$\frac{\delta\left(R\sqrt{g}\right)}{\delta g_{mn}}=-\frac{\delta\left({}^{(Q)}R\sqrt{g}\right)}{\delta g_{mn}}.$$

Конкретный расчет [3] приводит к результату:

$$\frac{\delta\left({}^{(Q)}R\sqrt{g}\right)}{\delta g_{mn}}=\sqrt{g}\left[R^{mn}-\frac{1}{2}g^{mn}R\right]. \qquad (1.5.12)$$

Подставляя это равенство в (1.4.19) и сравнивая с уравнениями (1.5.1), находим выражение

$$T^{mn}=-\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta\overset{U}{\mathscr{L}}}{\delta g_{mn}}=\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta\overset{G}{\mathscr{L}}}{\delta g_{mn}} \qquad (1.5.13)$$

для *симметричного тензора энергии-импульса.*

§ 6. Дифференциальные законы сохранения

Под дифференциальным законом сохранения мы понимаем выполнение уравнения непрерывности в частных производных вида

$$\mathfrak{A}_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot m}{}_{,m}=0.$$

Особое значение имеет использование частных, а не ковариантных производных в связи с переходом к интегральной формулировке закона, так как, если бы вместо частной производной стояла ковариантная производная, такой переход был бы невозможен.

Поскольку лагранжева плотность $\overset{U}{\Lambda}$ неметрического поля, как уже говорилось, должна быть инвариантом (скаляром) относительно преобразований координат, для

---

[1]) Тождество (1.2.9) при данных здесь определениях неприменимо к величинам, содержащим вторые производные потенциалов; все будет вполне корректно, если вариационную производную в нем понимать согласно формуле, приведенной в примечании на стр. 25.— *Прим. перев.*

нее справедливы все соотношения, выведенные в § 4. Основные из них мы выпишем здесь для этого частного случая. Так как все практически встречающиеся лагранжевы плотности не зависят явно от координат, для них

$$\left(\frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial x^m}\right)_{\text{явн}} = 0 \quad \text{и} \quad \Theta = 0 \qquad (\overset{U}{\mathscr{L}} = \overset{U}{\Lambda}\sqrt{g}). \tag{1.6.1}$$

Величины (1.4.6а) и (1.4.6б) при учете (1.5.13) и (1.4.20) принимают вид

$$\overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^a = \overset{U}{\mathscr{L}} g_t{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} U_{\Omega,\, t} - \frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn,\, a}} g_{mn,\, t} + \mathfrak{T}_t{}^a, \tag{1.6.2а}$$

$$\overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^{am} = -\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} S_\Omega{}^{\Gamma m}{}_t U_\Gamma - 2\frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn,\, a}} g_{tn}, \tag{1.6.2б}$$

где $\mathfrak{T}_t{}^a = T_t{}^a\sqrt{g}$, причем соотношения (1.4.8)—(1.4.10) при использовании геометрических объектов, для которых $S_{\Omega t} = 0$, и учете уравнений неметрических полей (1.4.20) переходят в

$$\{\overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^a - \mathfrak{T}_t{}^a\}_{,\, a} + \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{mn} g_{mn,t} = 0, \tag{1.6.3}$$

$$\overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^m + \overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^{am}{}_{,\, a} = 0, \tag{1.6.4}$$

$$\overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^{(ma)} = 0. \tag{1.6.5}$$

Соотношение (1.4.11) выполняется тождественно, а (1.4.12) принимает вид

$$\overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^{ma}{}_{,\, m,\, a} = 0, \tag{1.6.6}$$

тогда как из (1.4.13) или (1.4.14) следует

$$\overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^m{}_{,\, m} = 0. \tag{1.6.7}$$

Далее ввиду (1.5.13) соотношение (1.4.15) можно записать в виде

$$\mathfrak{T}_a{}^t{}_{,\, t} - \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{mn} g_{mn,\, a} = 0, \tag{1.6.8}$$

а (1.4.16) и (1.4.17) — в виде

$$\overset{U}{\mathscr{M}}_t{}^{ba} = \overset{U}{\mathscr{V}}_t{}^b x^a + \overset{U}{\mathscr{V}}_t{}^{ba}, \tag{1.6.9}$$

$$\overset{U}{\mathscr{M}}_t{}^{ba}{}_{,\,b} = 0. \tag{1.6.10}$$

Однако положение существенно меняется при формулировке теоремы Нётер для лагранжевой плотности $\Lambda = \overset{U}{\Lambda} + \overset{G}{\Lambda}$ полной системы полей, где гравитационное поле представлено эйнштейновской лагранжевой плотностью; в этом случае ввиду неинвариантной природы $\overset{G}{\Lambda}$ лагранжева плотность Λ инвариантна лишь относительно линейных преобразований. Ввиду этого обстоятельства следует опираться на полное соотношение (1.4.7), откуда

$$\xi^t \mathscr{V}_t{}^a{}_{,\,a} + \xi^t{}_{,\,m}\left[\mathscr{V}_t{}^m + \mathscr{V}_t{}^{am}{}_{,\,a}\right] = 0, \tag{1.6.11}$$

так что

$$\mathscr{V}_t{}^a{}_{,\,a} = 0 \tag{1.6.12}$$

и

$$\mathscr{V}_t{}^a = -\mathscr{V}_t{}^{ma}{}_{,\,m}. \tag{1.6.13}$$

Две последние формулы приводят к соотношению

$$\mathscr{V}_t{}^{ma}{}_{,\,m,\,a} = 0. \tag{1.6.14}$$

Вместо (1.4.16) мы имеем здесь

$$\mathscr{M}_t{}^{ba} = \mathscr{V}_t{}^b x^a + \mathscr{V}_t{}^{ba}. \tag{1.6.15}$$

Для этой величины справедливо соотношение, аналогичное (1.4.17):

$$\mathscr{M}_t{}^{ba}{}_{,\,b} = 0. \tag{1.6.16}$$

Канонические комплексы энергии-импульса метрического и неметрических полей определяются следующим образом:

$$^{(\text{кан})}\overset{G}{\mathfrak{T}}_t{}^a = \frac{\partial \overset{G}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn,\,a}} g_{mn,\,t} - \overset{G}{\mathscr{L}} g_t{}^a, \tag{1.6.17}$$

$$^{(\text{кан})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_t{}^a = \frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial U_{\Omega,\,a}} U_{\Omega,\,t} + \frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial g_{mn,\,a}} g_{mn,\,t} - \overset{U}{\mathscr{L}} g_t{}^a. \tag{1.6.18}$$

Соответственно для полного поля имеем

$$
{}^{(\text{кан})}\mathfrak{T}_t{}^a = {}^{(\text{кан})}\overset{G}{\mathfrak{T}}_t{}^a + {}^{(\text{кан})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_t{}^a, \tag{1.6.19}
$$

причем соотношение (1.4.6а) записывается теперь как

$$
\mathcal{T}_t{}^a = -{}^{(\text{кан})}\mathfrak{T}_t{}^a, \tag{1.6.20}
$$

и из (1.6.12) следует

$$
{}^{(\text{кан})}\mathfrak{T}_t{}^a{}_{,\,a} = 0. \tag{1.6.21}
$$

Для полноты мы приведем здесь также соотношения, получающиеся из выведенных выше в случае

$$
\Lambda \to \overset{G}{\Lambda}.
$$

Запишем сначала определения

$$
\overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^a = \overset{G}{\mathcal{L}} g_t{}^a - \frac{\partial \overset{G}{\mathcal{L}}}{\partial g_{mn,\,a}} g_{mn,\,t} - 2\frac{\delta \overset{G}{\mathcal{L}}}{\delta g_{ma}} g_{mt} =
$$

$$
= -(\mathfrak{T}_t{}^a + {}^{(\text{кан})}\overset{G}{\mathfrak{T}}_t{}^a), \tag{1.6.22}
$$

$$
\overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^{am} = -2\frac{\partial \overset{G}{\mathcal{L}}}{\partial g_{mn,\,a}} g_{tn} \tag{1.6.23}
$$

и

$$
\overset{G}{\mathcal{M}}_t{}^{ba} = \overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^b x^a + \overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^{ba}, \tag{1.6.24}
$$

а затем соотношения, которым они удовлетворяют:

$$
\overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^a{}_{,\,a} = -(\mathfrak{T}_t{}^a + {}^{(\text{кан})}\overset{G}{\mathfrak{T}}_t{}^a)_{,\,a} = 0, \tag{1.6.25}
$$

$$
\overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^m = -\overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^{am}{}_{,\,a}, \tag{1.6.26}
$$

$$
\overset{G}{\mathcal{T}}_t{}^{ma}{}_{,\,m,\,a} = 0, \tag{1.6.27}
$$

$$
\overset{G}{\mathcal{M}}_t{}^{ba}{}_{,\,b} = 0. \tag{1.6.28}
$$

Для канонического комплекса энергии-импульса метрического (гравитационного) поля, именуемого также *эйнштейновским псевдотензором* гравитационного поля, из

(1.6.17) при подстановке (с дифференцированием) (1.5.7) следует выражение

$$
{}^{(\text{кан})}\overset{G}{\mathfrak{T}}_t{}^a = \mathrm{t}_t{}^a = \frac{\sqrt{g}}{2\varkappa}\left[\left\{ {a \atop kr} \right\}\left(2\left\{ {r \atop mt} \right\} g^{mk} - \right.\right.
$$

$$
\left. - \left\{ {m \atop mt} \right\} g^{kr}\right) - \left\{ {m \atop mr} \right\}\left\{ {a \atop kt} \right\} g^{kr} -
$$

$$
\left. - \left\{ {m \atop mr} \right\}\left(\left\{ {r \atop qt} \right\} g^{qa} - \left\{ {q \atop qt} \right\} g^{ar}\right) - {}^{(Q)}R g_t{}^a\right]. \qquad (1.6.29)
$$

Заметим, кроме того, что вследствие (1.6.18) соотношение (1.6.2а) может быть приведено к виду

$$
\mathfrak{T}_t{}^a = {}^{(\text{кан})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_t{}^a + \overset{U}{\mathscr{V}}{}_t{}^a, \qquad (1.6.30)
$$

и в силу (1.6.7) справедливо равенство

$$
(\mathfrak{T}_t{}^a - {}^{(\text{кан})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_t{}^a)_{,\,a} = 0. \qquad (1.6.31)
$$

Итак, мы привели здесь всю совокупность дифференциальных соотношений, следующих из теоремы Нётер при сделанных выше предположениях. Теперь остается дать им правильное физическое истолкование.

Прежде всего сделаем некоторые замечания по поводу симметричного тензора энергии-импульса (1.5.13). Согласно результатам, полученным Розенфельдом [6], дифференцирование по метрическому тензору и его производным удается частично выразить через дифференцирование по функциям неметрических полей и их производным. Ключевым пунктом при этом является использование свойства антисимметрии (1.6.5), имеющего место для лагранжианов первого порядка. В самом деле, используя обозначение

$$
\mathscr{H}^{imk} = g^{ks}\frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial U_{\Omega,\, i}} S_\Omega{}^{\Gamma m}{}_s U_\Gamma, \qquad (1.6.32)
$$

находим

$$
\overset{U}{\mathscr{V}}{}^{kim} - \overset{U}{\mathscr{V}}{}^{mik} = \mathscr{H}^{ikm} - \mathscr{H}^{imk}
$$

и далее, путем соответствующей перестановки индексов и комбинирования членов, получаем

$$\overset{U}{\mathscr{V}}{}^{ikm} = \frac{1}{2}\left[\mathscr{H}^{ikm} + \mathscr{H}^{kim} + \mathscr{H}^{mki} - \mathscr{H}^{imk} - \mathscr{H}^{kmi} - \mathscr{H}^{mik}\right], \tag{1.6.33}$$

так что в силу (1.6.4) из (1.6.30) имеем

$$\mathfrak{T}_t{}^a = {}^{(\text{кан})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_t{}^a + \frac{1}{2}\left[g_{tk}\left(\mathscr{H}^{kam} + \mathscr{H}^{akm} + \mathscr{H}^{mak} - \mathscr{H}^{kma} - \mathscr{H}^{amk} - \mathscr{H}^{mka}\right)\right]_{,m}. \tag{1.6.34}$$

В частности, если для полей выполняется свойство

$$\mathscr{H}^{kim} = -\mathscr{H}^{ikm},$$

последнее выражение принимает простой вид:

$$\mathfrak{T}_t{}^a = {}^{(\text{кан})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_t{}^a + \left[g_{tk}\mathscr{H}^{mak}\right]_{,m}. \tag{1.6.35}$$

В частнорелятивистском случае выражение (1.6.34) тождественно совпадает с построенным ad hoc *тензором Белинфанте* [7].

Дадим еще раз сводку дифференциальных законов сохранения, важных для физической интерпретации результатов. Так как мы потребовали выполнения уравнений полей, то из соотношения (1.4.2), связанного с функциональными преобразованиями, следует дифференциальный закон сохранения

$$\left[\Pi^{mna}\delta g_{mn} + \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\delta U_\Omega + \delta\Theta^a\right]_{,a} = 0. \tag{1.6.36}$$

Ввиду равенства (1.6.25) величину

$${}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_t{}^a = \mathfrak{T}_t{}^a + {}^{(\text{кан})}\overset{G}{\mathfrak{T}}_t{}^a = \mathfrak{T}_t{}^a + \mathfrak{t}_t{}^a \tag{1.6.37}$$

естественно назвать *полным комплексом энергии-импульса* полного поля, ибо для нее

$${}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_t{}^a{}_{,a} = 0. \tag{1.6.38}$$

Мы дали такое истолкование именно этим последним уравнениям (из всех аналогичных им, приведенных выше), так как они представляются наиболее ему отвечающими, обладая тем особым свойством, что при переходе к случаю частной теории относительности дают в точности частнорелятивистский закон сохранения энергии-импульса (в этом пределе в полном комплексе энергии-импульса гравитационная часть обращается в нуль).

На выражение (1.6.37) уже в 1915 г. опирался Эйнштейн, хотя он и работал в специальной системе координат, так что не получил выражения (1.6.29) в приведенном здесь общем виде. Эйнштейн исходил из соотношения (1.6.8), в котором ему удалось с помощью своих уравнений гравитационного поля привести второй член слева к требуемому виду.

Однако уже введение в общей теории относительности *комплекса момента импульса* оказывается весьма затруднительным. Разумным образом можно опереться лишь на соотношение (1.6.16), которое с помощью (1.6.15) и (1.6.20) удается привести к виду

$$({}^{(\text{кан})}\mathfrak{T}_t{}^b x^a - \mathcal{V}_t{}^{ba})_{,b} = 0. \qquad (1.6.39)$$

Преобразуя это равенство, можно получить

$$({}^{(\text{кан})}\mathfrak{T}^{lb}x^a - {}^{(\text{кан})}\mathfrak{T}^{ab}x^l + \mathcal{V}^{abl} - \mathcal{V}^{lba})_{,b} =$$
$$= {}^{(\text{кан})}\mathfrak{T}_s{}^b (x^a g^{ls}{}_{,b} - x^l g^{as}{}_{,b}) + \mathcal{V}_s{}^{bl} g^{as}{}_{,b} - \mathcal{V}_s{}^{ba} g^{ls}{}_{,b}. \qquad (1.6.40)$$

Мы предприняли такое преобразование, хотя тем самым и отошли от вида дифференциального закона сохранения (1.6.39), но дело в том, что полученное соотношение в случае частной теории относительности переходит в хорошо известный закон сохранения момента импульса и центра масс.

В связи с этим хотелось бы указать на то, что многие авторы при анализе сохранения энергии-импульса основываются на соотношениях

$$T^{mn}{}_{;n} = 0 \quad \text{и} \quad T^{mn} = T^{nm}, \qquad (1.6.41)$$

следующих из уравнений Эйнштейна, обходя тем самым теорему Нётер. Из двух последних соотношений тогда следует

$$\left(\xi_m T^{mn} \sqrt{g}\right)_{,\,n} = \sqrt{g}\,(\xi_m T^{mn})_{;\,n} = \frac{\sqrt{g}}{2}\,(\xi_{m;\,n} + \xi_{n;\,m})\,T^{mn}.$$

Если же потребовать, чтобы вектор ξ_m удовлетворял *уравнениям Киллинга*

$$\xi_{m;\,n} + \xi_{n;\,m} = 0, \tag{1.6.42}$$

то мы приходим к дифференциальному закону сохранения

$$\left(\xi_m T^{mn} \sqrt{g}\right)_{,\,n} = 0, \tag{1.6.43}$$

весьма многозначительному, так как в нем фигурирует вектор (тензор ранга 1), что особенно удобно при ковариантной формулировке интегрального закона сохранения. Тогда вопрос о том, при каких условиях существуют интегральные сохраняющиеся величины для энергии и импульса, сводится к отысканию в данном пространстве-времени существующих там полей векторов Киллинга. Поскольку из уравнения

$$\Delta_{\mathscr{L}} g_{mn} = \xi_{m;\,n} + \xi_{n;\,m} = 0$$

следует, что дифференциал Ли для метрического тензора обращается в нуль, что выражает существование изометрических преобразований координат, или так называемой подвижности пространства-времени, удовлетворение уравнений Киллинга соответствует наличию симметрии пространства-времени. Иными словами, интегральные сохраняющиеся величины могут быть выражены ковариантным образом, если пространство-время обладает определенными симметриями.

Если след тензора энергии-импульса равен нулю ($T_m{}^m = 0$), то условие (1.6.42) можно ослабить, придав ему вид [1])

$$\xi_{m;\,n} + \xi_{n;\,m} = \lambda g_{mn}.$$

Некоторые авторы в отличие от (1.6.38) принимают в общей теории относительности определение величин

[1]) Вектор, удовлетворяющий такому уравнению, называется конформно-киллинговым. См. соответствующую теорию, например, в работе [19], стр. 59.— *Прим. перев.*

типа энергии-импульса, для которого справедливо уравнение вида

$$(\mathfrak{T}^{mn} + \mathfrak{t}^{mn}{}_{,})_{,\,n} = 0. \tag{1.6.44}$$

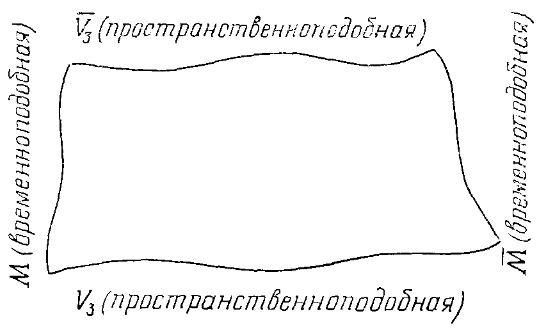
Однако ввиду того, что теорема Нётер приводит к закону (1.6.38), а также из физических соображений, к которым мы вернемся в следующем параграфе, мы отдадим предпочтение уравнению вида (1.6.38).

§ 7. *Интегральные законы сохранения*

Исследуем в общем виде вопрос о том, при каких условиях можно перейти от дифференциального закона сохранения в форме

$$J^m{}_{,\,m} = 0, \tag{1.7.1}$$

где пока не делается никаких предположений о трансформационных свойствах величины J^m, к *интегральному закону сохранения.*



Фиг. 1.

Для этого проинтегрируем последнее равенство по изображенной на фиг. 1 четырехмерной области, грани которой не делят ее на изолированные части, и попытаемся перейти к интегралу по этим гиперповерхностям (если же область «разрезана» на части гиперповерхностями граней, то аналогичное рассуждение применимо к каждой из получаемых частей). В дальнейшем мы рассмотрим два основных случая:

Случай А (сохранение величин типа заряда)

Пусть величина J^m — векторная плотность, так что можно принять

$$J^m = j^m \sqrt{g}.$$

Тогда равенству (1.7.1) можно придать явно ковариантный вид:

$$j^m{}_{;\,m} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(j^m \sqrt{g} \right)_{,\,m} = 0. \tag{1.7.2}$$

В этом случае мы можем применить теорему Гаусса в ковариантном виде, не привязывая результат к какой-либо определенной системе координат:

$$\int\limits_{V_4} \frac{1}{\sqrt{g}} \left(j^m \sqrt{g} \right)_{,\,m} d^{(4)}f = \int\limits_{V_4} j^m{}_{;\,m} d^{(4)}f = i \int\limits_{(V_4)} j^m \, df_m =$$

$$= i \int\limits_{\overline{\overline{V}}_3} j^m \, df_m - i \int\limits_{\overline{V}_3} j^m \, df_m + i \int\limits_{\substack{\text{охватыв.} \\ \text{гиперпов}}} j^m \, df_m = 0. \tag{1.7.3}$$

Использованные здесь обозначения подробно разъяснены в § 2. Будем теперь неограниченно увеличивать величину двух пространственноподобных граней, расширяя в этих направлениях нашу область. Если интеграл по временноподобной охватывающей гиперповерхности стремится к нулю

$$\int\limits_{\substack{\text{охватыв.} \\ \text{гиперпов}}} j^m \, df_m = 0, \tag{1.7.4}$$

что практически всегда имеет место в физических задачах с островным распределением величины j^m, когда пространственноподобные обкладки близки друг к другу, то остается лишь уравнение

$$\int\limits_{\overline{\overline{V}}_3} j^m \, df_m = \int\limits_{\overline{V}_3} j^m \, df_m. \tag{1.7.5}$$

Оно выражает интегральный закон сохранения рассматриваемой величины типа заряда.

Если распределение материи не является островным, то решающее значение приобретает топологическая сторона вопроса. Тогда приходится проводить рассуждения отдельно для каждого конкретного случая.

Обозначим интегральную сохраняющуюся величину, не зависящую от конкретного выбора трехмерной пространственноподобной области V_3, через

$$Q = \frac{1}{ic} \int\limits_{V_3} j^m \, df_m, \tag{1.7.6}$$

где интеграл (1.7.5) мы снабдили множителем, смысл которого станет ясен позднее. Эта величина не зависит от случайного выбора трехмерной области интегрирования лишь вследствие справедливости равенства (1.7.5).

Если пространственноподобную область V_3 отождествить с гиперповерхностью $x^4 = \text{const}$, то при ориентации векторов, на которые натягивается трехмерное подпространство, вдоль координатных линий из определения (1.2.6) получим

$$df_4 = i \sqrt{g} \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3 = i \sqrt{g} \, d^{(3)}x, \quad df_\alpha = 0. \tag{1.7.7}$$

Аналогично для гиперплоскостей x^1, x^2, $x^3 = \text{const}$ получим элементы вида

$$df_a = i \sqrt{-g_{44}} \, dx^4 \, d\sigma_a, \quad df_4 = 0, \tag{1.7.8}$$

где

$$d\sigma_a = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{g}{g_{44}}} \, \Delta_{abc} \, dV^{bc} \tag{1.7.9}$$

— элемент двумерной поверхности, который при преобразованиях в рамках данной системы отсчета ведет себя как тензор [3].

При этих предположениях

$$Q = \frac{1}{c} \int\limits_{x^4 = \text{const}} j^4 \sqrt{g} \, d^{(3)}x. \tag{1.7.10}$$

Сразу видно, что величина Q в этой форме имеет привычную структуру сохраняющихся величин, а именно является интегралом от некоторой плотности по объему. Поэтому выражение (1.7.6) можно с полным основанием считать ее релятивистским обобщением.

Проанализируем теперь уравнение, определяющее изменение (баланс) рассматриваемой величины в некоторой конечной трехмерной пространственной области. Чтобы упростить математическое описание задачи, выберем координаты таким образом, что

$\overline{V}_3$ задается как $x^4 = x^4{}_{(+)}$,

V_3 задается как $x^4 = x^4{}_{(-)}$,

$\overline{M}$ задается как $x^1 = x^1{}_{(+)}$,

M задается как $x^1 = x^1{}_{(-)}$ и т. д.

Тогда теорема Гаусса (1.7.3) перепишется в виде

$$\int\limits_{x^1=x^1{}_{(-)},\ x^1{}_{(+)}} j^m\, df_m + \int\limits_{x^2=x^2{}_{(-)},\ x^2{}_{(+)}} j^m\, df_m + \\ + \int\limits_{x^3=x^3{}_{(-)},\ x^3{}_{(+)}} j^m\, df_m + \int\limits_{x^4=x^4{}_{(-)},\ x^4{}_{(+)}} j^m\, df_m = 0.$$

С учетом формул (1.7.7) и (1.7.8) получаем отсюда

$$\int\limits_{x^1=x^1{}_{(-)},\ x^1{}_{(+)}} j^1 df_1 + \int\limits_{x^2=x^2{}_{(-)},\ x^2{}_{(+)}} j^2\, df_2 + \\ + \int\limits_{x^3=x^3{}_{(-)},\ x^3{}_{(+)}} j^3\, df_3 + \int\limits_{x^4=x^4{}_{(-)},\ x^4{}_{(+)}} j^4\, df_4 = 0$$

или, вспоминая, что строчные греческие индексы пробегают значения от 1 до 3,

$$\int\limits_{x^a=x^a{}_{(-)},\ x^a{}_{(+)}} dx^4 \int j^\mu \sqrt{-g_{44}}\, d\sigma_\mu + \\ + \int\limits_{x^4=x^4{}_{(-)},\ x^4{}_{(+)}} j^4 \sqrt{g}\, d^{(3)}x = 0.$$

Рассматривая четырехмерную область интегрирования, соответствующую фиг. 1, для которой гиперплоскости

$x^4 = x^4{}_{(+)}$ и $x^4 = x^4{}_{(-)}$ бесконечно близки друг к другу, получаем вместо последнего уравнения

$$\frac{d}{dx^4} \int\limits_{x^4=\text{const}} j^4 \sqrt{g}\, d^{(3)}x = - \int\limits_{(V_3)} j^a \sqrt{-g_{44}}\, d\sigma_a \qquad (1.7.11)$$

уравнение баланса исследуемой величины. При обращении в нуль правой части этого уравнения (с учетом взаимно обратных ориентаций интегрирования) вместо уравнения баланса мы получаем закон сохранения

$$\frac{dQ}{dx^4} = \frac{1}{c} \frac{d}{dx^4} \int j^4 \sqrt{g}\, d^{(3)}x = 0, \qquad (1.7.12)$$

который имеет место, если в пространственно ограниченной области количество втекающей величины равно количеству вытекающей или в пространственно бесконечной области трехмерная плотность тока убывает на бесконечности быстрее, чем растет величина охватывающей область поверхности. После этого четырехмерного перехода от дифференциального к интегральному закону сохранения поучительно рассмотреть, как проводится такая же процедура в трехмерном варианте. При этом целесообразно исходить из равенства (1.7.2), придав ему предварительно вид

$$(j^\mu \sqrt{g})_{,\,\mu} + \frac{\partial}{\partial x^4} (j^4 \sqrt{g}) = 0.$$

Умножая это равенство на $d^{(3)}x = dx^1\, dx^2\, dx^3$ и интегрируя по заданной пространственной области $x^4 = \text{const}$, получаем

$$\frac{d}{dx^4} \int\limits_{x^4=\text{const}} j^4 \sqrt{g}\, d^{(3)}x = - \int\limits_{x^4=\text{const}} (j^\mu \sqrt{g})_{,\,\mu}\, d^{(3)}x. \qquad (1.7.13)$$

В рассматриваемом пока случае A, когда j^m — 4-вектор, величина $j^m \sqrt{g}$ преобразуется при чисто пространственных преобразованиях координат как трехмерная векторная плотность. Поэтому в правой части полученного равенства можно ковариантным образом (независимо от выбора координат) применить теорему Гаусса и перейти от интеграла по объему к интегралу по ограничивающей этот объем поверхности. Если при этом принять сделанные выше предположения, то поверхностный интеграл обратится в нуль, и мы придем к формулировке интегрального закона сохранения в виде (1.7.12).

Случай Б (сохранение энергии-импульса)

В этом случае величина $J_{..}{}^{m}$ не является плотностью тензора первого ранга. Собственно говоря, мы имеем теперь в виду уравнение (1.6.38) как выражение дифференциального закона сохранения (1.7.1), так что полагаем

$$J_{..}{}^{m} = {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_{s}{}^{m}.$$

Таким образом, исходным пунктом нашего анализа теперь является локальный закон сохранения энергии-импульса

$$ {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_{s}{}^{m}{}_{,\,m} = 0. \tag{1.7.14}$$

В отличие от случая А при интегрировании по четырехмерной области, изображенной на фиг. 1, мы не можем здесь, вообще говоря, ковариантно (т. е. в произвольной системе координат) применить теорему Гаусса. Поэтому преобразование, проделанное в (1.7.3), невозможно, и следует выяснить, при каких условиях интегралу по 4-объему

$$\int\limits_{V_4} \frac{1}{\sqrt{g}}\, {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_{s}{}^{m}{}_{,\,m}\, d^{(4)}f = \int\limits_{V_4} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_{s}{}^{m}{}_{,\,m}\, d^{(4)}x$$

можно придать вид поверхностного интеграла. Мы можем, конечно, избавиться от интегрирования по 4-объему, так как каждый член в этой сумме сводится к необходимому нам дифференциалу, но объединить результат таким образом, чтобы получился интеграл по замыкающей гиперповерхности, можно лишь в предположении об определенной топологической структуре координатных линий. Наша цель не может быть достигнута в сферических (полярных) координатах; для этого нужна такая система координат, в которой каждая из координатных линий дважды пересекает границу области. Назовем такие координаты *координатами протяженности* (Längenkoordinaten). Как правило, возможность ввести координаты протяженности реализуется лишь в предположении об островном распределении тензора энергии-импульса.

В таком случае из дифференциального закона (1.7.14) по аналогии с (1.7.3) следует уравнение

$$\int\limits_{V_4} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m{}_{,m}\, d^{(4)}f = i \int\limits_{\bar{V}_3} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m\, df_m -$$

$$- i \int\limits_{V_3} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m\, df_m + i \int\limits_{\substack{\text{охват.}\\ \text{гиперпов}}} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m\, df_m = 0,$$

предполагающее, во всяком случае, использование координат протяженности. Если к тому же интеграл по времениподобной граничной гиперповерхности равен нулю

$$I_s = \int\limits_{\substack{\text{охват.}\\ \text{гиперпов}}} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m\, df_m = 0, \qquad (1.7.15)$$

то при предельном переходе к бесконечному трехмерному пространству будет справедливо уравнение

$$\int\limits_{\bar{V}_3} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m\, df_m = \int\limits_{V_3} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m\, df_m, \qquad (1.7.16)$$

и результат окажется не зависящим от конкретного выбора пространственной области. При таких предположениях имеет смысл ввести по аналогии с величиной Q (см. случай А) для полной системы полей, включая гравитационное, *обобщенный 4-импульс*

$${}^{(\text{полн})}P_s = \frac{i}{c} \int\limits_{V_3} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^m\, df_m = \frac{i}{c} \int\limits_{x^4=\text{const}} \frac{1}{\sqrt{g}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^4\, df_4 =$$

$$= -\frac{1}{c} \int\limits_{x^4=\text{const}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^4\, d^{(3)}x. \qquad (1.7.17)$$

И если очень сложны уже трансформационные свойства комплекса энергии-импульса, то закон преобразования обобщенного 4-импульса еще сложнее. Во всяком случае, не может быть речи о каких-либо его тензорных свойствах.

Те же рассуждения, которые были проведены в случае А, и здесь при переходе к двум бесконечно близким пространственноподобным гиперповерхностям дают уравнение изменения (баланса)

$$\frac{d}{dx^4}\int\limits_{x^4=\mathrm{const}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^4\, d^{(3)}x = -\int\limits_{(V_3)} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_s{}^a \sqrt{\frac{-g_{44}}{g}}\, d\sigma_a, \tag{1.7.18}$$

если предположить конечность пространственной области интегрирования и использование в ней координат протяженности. При равенстве нулю поверхностного интеграла (что требует особого доказательства в том случае, когда имеет место процесс гравитационного излучения) отсюда следует закон сохранения

$$\frac{d^{(\text{полн})}P_s}{dx^4} = 0. \tag{1.7.19}$$

Тройка величин

$${}^{(\text{полн})}P_\mu = \frac{i}{c}\int\limits_{V_3} \frac{1}{\sqrt{g}}\, {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_\mu{}^m\, df_m = -\frac{1}{c}\int\limits_{x^4=\mathrm{const}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_\mu{}^4\, d^{(3)}x \tag{1.7.20}$$

рассматривается как 3-импульс системы, а величина

$$\begin{aligned} {}^{(\text{полн})}\mathscr{E} = -c^{(\text{полн})}P_4 = -i\int\limits_{V_3} \frac{1}{\sqrt{g}}\, {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_4{}^m\, df_m = \\ = \int\limits_{x^4=\mathrm{const}} {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_4{}^4\, d^{(3)}x \end{aligned} \tag{1.7.21}$$

— как ее *энергия* в случае, когда тензор энергии-импульса обладает островным распределением.

В физике плоского пространства-времени, в частности в дорелятивистской физике, хорошо известно понятие *локализуемости* физических величин (массы, энергии, заряда и пр.). Под нею понимают возможность однозначно приписать любой данной точке пространства в данный момент времени определенное значение плотности соответствующей физической величины.

Иначе говоря, считается, что есть основания для следующего утверждения: в заданном объеме содержится вполне определенное количество рассматриваемой физической величины. Поскольку это утверждение органически входит в состав понятия вещества (субстанции), с этим понятием часто связывают и вышеупомянутые физические величины.

Если попытаться связать с 3-импульсом некоторую *плотность импульса*, то уравнение (1.7.20) приведет к величине

$$\pi_\mu = -\frac{1}{c}\,{}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_\mu{}^4 \sqrt{-\frac{g_{44}}{g}}\,. \tag{1.7.22}$$

Подобным же образом, согласно определению (1.7.21), в качестве *плотности энергии* следовало бы взять

$$w = {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_4{}^4 \sqrt{-\frac{g_{44}}{g}}\,. \tag{1.7.23}$$

При исследовании закона преобразования этой предполагаемой плотности энергии относительно преобразований чисто пространственных координат обнаруживается, что она ведет себя не как инвариант. Но это последнее, здесь нарушаемое свойство является основным требованием, следующим из локализуемости энергии. Другими словами, поскольку рассматриваемая величина ведет себя при чисто пространственных преобразованиях не как инвариант, мы получаем для нее в данной точке пространства численные значения, зависящие от случайного выбора системы координат. Такое субъективное поведение этой величины противоречит определению объективного физического фундаментального понятия.

Этот многозначительный факт был обнаружен Бауэром [8] сразу же после создания общей теории относительности и использован как возражение против эйнштейновской теории. Действительно, расчет показывает, что уже в плоском пространстве Минковского (где кривизна равна нулю) эйнштейновский комплекс энергии-импульса дает отличные от нуля величины, если применять сферические координаты. Строго говоря, нет оснований винить в этом сам эйнштейновский комплекс, так как, взяв сферические координаты, мы отошли от выражения комплекса энергии-импульса в координатах протяженности. Уже в § 5 было подчеркнуто, что при построении комплекса энергии-импульса использовалась также инвариантная лагранжева плотность. Такой подход, восходящий еще к Г. А. Лоренцу и в особенности проанализированный с некоторыми надеждами Мёллером [5], сталкивается однако с принципиальными трудностями, которых смог избегнуть эйнштейновский подход. Рассмотрим эту проблему несколько глубже, ограничиваясь островным распределением тензора энергии-импульса, когда на бесконечности метрика имеет следующее асимптотическое значение:

$$
\begin{aligned}
(g_{ij}) &\approx \left(\begin{array}{c|c} \left(1+\frac{r_g}{\rho}\right)\delta_{ab} & 0 \\ \hline 0 & -\left(1-\frac{r_g}{\rho}\right) \end{array}\right), \\
(g)^{ij} &\approx \left(\begin{array}{c|c} \left(1-\frac{r_g}{\rho}\right)\delta_{ab} & 0 \\ \hline 0 & -\left(1+\frac{r_g}{\rho}\right) \end{array}\right).
\end{aligned}
\tag{1.7.24}
$$

Здесь величина $\rho = \sqrt{\xi_\mu \xi^\mu}$ обобщает понятие сферической радиальной координаты [1]), а величина

$$
r_g = \frac{\varkappa M_0 c^2}{4\pi}
\tag{1.7.25}
$$

называется *гравитационным радиусом* рассматриваемой центральной массы M_0. Канонический комплекс энергии-импульса гравитационного поля, построенный с помощью инвариантной лагранжевой плотности, обладает асимптотическим поведением

$$
{}_{(\text{кан})}\overset{G}{\mathfrak{T}}{}_s{}^i \sim \frac{1}{\rho^3},
\tag{1.7.26}
$$

---

[1]) Не следует путать ξ^a с обозначаемым так же вектором в (1.1.1), (1.6.42) и т. д.; здесь это — всего лишь декартовы координаты точки, где берется значение метрического тензора, причем начало этой декартовой системы совпадает с центром симметрии поля.— *Прим. перев.*

тогда как эйнштейновский комплекс ведет себя на бесконечности как

$$t_s^i \sim \frac{1}{\rho^4}. \tag{1.7.27}$$

Так как при этом используемые координаты переходят на бесконечности в галилеевы координаты, асимптотическое значение элемента поверхности df_m имеет вид

$$df_1 \approx i d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4, \quad df_2 \approx 0, \quad df_3 \approx 0, \quad df_4 \approx 0$$
$$\text{при} \quad \xi^1 = \text{const} \text{ и т. д.};$$
$$df_4 \approx i d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad df_1 \approx 0, \quad df_2 \approx 0, \quad df_3 \approx 0$$
$$\text{при} \quad \xi^4 = \text{const}.$$

Если теперь задаться такими пространственноподобными гиперповерхностями V_3 и $\overline{V}_3$ (фиг. 1), чтобы на бесконечности они превращались в две параллельные гиперплоскости, разделенные конечным интервалом, то боковая (охватывающая) поверхность, которую можно определить без ограничения общности как гиперповерхность $\rho = \text{const}$, растет как квадрат ρ, так что интеграл (1.7.15) по этой гиперповерхности обладает асимптотикой в ковариантном случае

$$I_s \sim \frac{1}{\rho} \to 0, \tag{1.7.28}$$

а в эйнштейновском

$$I_s \sim \frac{1}{\rho^2} \to 0. \tag{1.7.29}$$

Положение существенно меняется, если рассматриваемые гиперплоскости образуют друг с другом отличный от нуля угол. Это имеет место, если обобщенный импульс подвергнуть преобразованию Лоренца. Из соображений физического смысла следует требовать, чтобы обобщенный 4-импульс, соответствующий островному распределению тензора энергии-импульса, при преобразованиях Лоренца изменялся как тензор (вектор), так как на больших расстояниях должны выполняться соотношения частной теории относительности. Из определения (1.7.17) для преобразований Лоренца приближенно следует

$$
{}^{(\text{полн})}P_{s'} = \frac{i}{c} \int\limits_{V_3'} \frac{1}{\sqrt{g'}}\, {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_{s'}{}^{m'}\, df_{m'} =
$$

$$
= \frac{i}{c} A^{s}{}_{s'} \int\limits_{V_3'} \frac{1}{\sqrt{g}}\, {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_{s}{}^{m}\, df_{m},
$$

где $A^s_{s'} = \partial x^s/\partial x^{s'}$ — коэффициенты этих преобразований. Требование, чтобы 4-импульс вел себя как истинный вектор при преобразованиях Лоренца, означает, что

$$
{}^{(\text{полн})}P_{s} = \frac{i}{c} \int\limits_{V_3'} \frac{1}{\sqrt{g}}\, {}^{(\text{полн})}\mathfrak{T}_{s}{}^{m}\, df_{m}.
$$

Сравнивая это выражение с (1.7.16), заключаем, что интеграл здесь не должен зависеть от выбора пространственноподобной гиперповерхности. Но, как известно, это может иметь место лишь при выполнении условия (1.7.15). Тогда, выбирая гиперповерхность интегрирования в нештрихованной системе отсчета как

$$
V_3 \text{ при } \xi^4 = \text{const},
$$

а в штрихованной системе — как

$$
V_3' \text{ при } \xi^{4'} = \text{const},
$$

находим, что ввиду конечности угла, образуемого гиперповерхностями интегрирования (которые становятся гиперплоскостями на бесконечности), высота охватывающей гиперповерхности оказывается пропорциональной ее радиусу. Вследствие этого сама охватывающая гиперповерхность, которую снова можно определить, полагая $\rho = \text{const}$, растет теперь как ρ^3, и в результате интересующий нас интеграл обладает асимптотикой в ковариантном случае

$$
I_s \sim \int \frac{1}{\rho^3} \rho^3\, d\Omega \to \text{const} \neq 0,
$$

а в эйнштейновском случае

$$
I_s \sim \int \frac{1}{\rho^4} \rho^3\, d\Omega \sim \frac{1}{\rho} \to 0;
$$

здесь $d\Omega$ — элемент телесного угла. Тем самым показано, что с точки зрения физического смысла единственно предпочтительным является эйнштейновское определение комплекса энергии-импульса [1]).

Вернемся теперь еще раз к вопросу, поставленному в предыдущем параграфе, а именно, следует ли строить выражение для энергии-импульса согласно (1.6.38) или согласно (1.6.44). Иными словами, какая из величин, ${}^{(\text{полн})}P_4$ или ${}^{(\text{полн})}P^4$, должна быть связана с полной энергией? Мы отдаем предпочтение определению, принятому в (1.7.21), по той, в частности, причине, что в принципе следует стремиться к установлению соответствия между теорией поля и механикой. Но в механике материальной точки, как известно, энергия $\mathscr{E}$ частицы связана с ковариантной 4-компонентой p_4 импульса соотношением

$$\mathscr{E} = -cp_4,$$

которое отвечает именно определению (1.7.21). Было бы странно в теории поля остановиться на величине, иной, чем в механике.

Проделаем поучительное упражнение — применим эйнштейновский вариант определения энергии и импульса к решению Шварцшильда с покоящейся точечной особенностью [2]). При использовании координат протяженности интегралы (1.7.20) и (1.7.21) легко берутся, так как подынтегральные выражения записываются в виде дивергенций

---

[1]) В этом сжатом обзоре автор дает характеристику лишь немногих сторон проблемы энергии в общей теории относительности (и в частности, гравитационной энергии как таковой), так что приведенная им информация неполна. Последнее высказанное им суждение разделяют не все исследователи; можно адресовать читателя к другим обзорам, в частности [25, 27], хотя они также не могут быть полными при быстром развитии событий в этой области.— *Прим. перев.*

[2]) Заметим, что мировая линия этой «покоящейся точечной особенности» не времениоподобна (и даже не изотропна), а пространственноподобна, т. е. лежит вне светового конуса и соответствует «движению» сверхсветового типа (!). Это требует осторожности в подходе к чисто вакуумному решению Шварцшильда и вызвало к жизни ряд исследований, хорошо освещенных в новейшей литературе (например, при анализе проблемы гравитационного коллапса).— *Прим. перев.*

[3], и для интегрирования существенно лишь асимптотическое поведение метрики (1.7.24). Это приводит к значению 3-импульса рассматриваемой системы

$$^{(\text{полн})}P_{\mu}=0,$$

разумному ввиду предполагаемой неподвижности шварцшильдовской особенности, а для энергии системы — к значению

$$^{(\text{полн})}\mathscr{E}=M_0c^2,$$

что также вполне удовлетворительно.

Подытожим основные заключения о проблеме сохранения интегральных энергии и импульса. В отличие от сохранения величин типа заряда, плотность которых описывается тензором первого ранга (вектором), сохраняющиеся значения импульса и энергии, вообще говоря, поддаются определению, лишь если рассматривается островное распределение тензора энергии-импульса, а вычисления ведутся в координатах протяженности. Импульс и энергия уже не обладают свойством *локализуемости*. Несмотря на многочисленные попытки найти новые определения, мы на протяжении последнего полустолетия неизменно вновь приходим к прежнему, эйнштейновскому определению этих понятий. Ввиду того что совокупность математических возможностей здесь уже хорошо изучена, едва ли можно питать надежду сколько-нибудь существенно изменить эту ситуацию. Тем самым Эйнштейн отнял у принципа энергии его абсолютный характер, часто приписываемый этому принципу и сегодня. Он выяснил границы применимости закона сохранения энергии: вследствие искривленной природы нашего мира уже нельзя формулировать сами по себе и высказывания о сохранении энергии Вселенной.

Такая «девальвация» понятий энергии и импульса [1]) не означает, однако, для физика (даже если будущее не

---

[1]) Ввиду очевидного из равенства (1.6.40) отсутствия дифференциального закона сохранения для момента импульса вопрос об интегральном сохранении этой величины стоит еще критичнее.

приведет к ее ревизии) какого-либо отказа от них, ибо в физике элементарных частиц уже произошло открытие новых фундаментальных законов сохранения, знаменующих собой более глубокое проникновение в структуру вещества [1]).

---

[1]) Можно считать, что указанная «девальвация» некоторых интегральных понятий при переходе к искривленному миру связана прежде всего с кривизной пространства-времени как со своеобразной неголономностью: все требуемые величины превосходно определяются локально (т. е. как плотности) вместе со своими локальными (т. е. дифференциальными) законами, однако все это не может быть «сшито» в интегральные величины и интегральные законы. Такая ситуация подобна невозможности в искривленном мире (или области) установить голономную декартову систему координат, позволяющую четко разграничить «настоящие» сдвиги и повороты. Однако в простейших случаях искривленного мира, когда действуют те или иные симметрии и существуют соответствующие векторы Киллинга, возникает и (ограниченная) возможность голономного интегрирования сохраняющихся величин и законов сохранения, хотя из общего хаоса удается выделить лишь какую-то часть их общего множества.

С другой стороны (автор говорит об этом очень мало), для определения понятий типа энергии и импульса фундаментальную роль играет введение конкретных систем отсчета; по-видимому, это будет чрезвычайно важно и при общерелятивистской формулировке понятий квантовой механики (подчеркнем интегральный смысл операторов, описывающих в ней наблюдаемые). Здесь невозможно подробно останавливаться на этих проблемах, поэтому мы адресуем читателя к некоторым работам (весьма различного плана), по которым можно составить представление о предмете: [3, 25—27].— *Прим. перев.*

ГЛАВА 2

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ НЁТЕР В МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. *Нерелятивистская механика материальных точек*

А. Общая теория

В механике материальных точек прежним полевым функциям соответствуют обобщенные (лагранжевы) координаты, а прежним координатам — время, как уже было отмечено в гл. 1, § 2. Таким образом,

$$U_\Omega \to \mathfrak{r}_\Omega,$$

$$x^m \to t, \quad \Lambda \to L.$$

Принцип Гамильтона

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L(\mathfrak{r}_\Omega, \dot{\mathfrak{r}}_\Omega, t)\, dt = 0, \qquad \delta \mathfrak{r}_\Omega |_{t_2} = \delta \mathfrak{r}_\Omega |_{t_1} = 0 \qquad (2.1.1)$$

(точкой обозначена полная производная по времени) приводит к *уравнениям Лагранжа*

$$\frac{\delta L}{\delta \mathfrak{r}_\Omega} = \frac{\partial L}{\partial \mathfrak{r}_\Omega} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathfrak{r}}_\Omega}\right) = 0. \qquad (2.1.2)$$

Вводя *канонический импульс*

$$\mathfrak{p}_\Omega = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathfrak{r}}_\Omega}, \qquad (2.1.3)$$

можно определить *функцию Гамильтона* (гамильтониан)

$$H = \sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega \dot{\mathfrak{r}}_\Omega - L. \qquad (2.1.4)$$

Уравнения Гамильтона, эквивалентные уравнениям Лагранжа, имеют вид

$$\dot{\mathfrak{r}}_\Omega = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{p}_\Omega},$$
$$\dot{\mathfrak{p}}_\Omega = -\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{r}_\Omega} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}\right). \qquad (2.1.5)$$

Б. Канонические преобразования

Каноническое преобразование представляет собой переход

$$\mathfrak{r}_\Omega,\ \dot{\mathfrak{r}}_\Omega,\ \mathfrak{p}_\Omega,\ L,\ H \to \bar{\mathfrak{r}}_\Omega,\ \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega,\ \bar{\mathfrak{p}}_\Omega,\ \bar{L},\ \bar{H},$$

при котором все основные уравнения для преобразованных переменных сохраняют тот вид, которым они обладали для исходных переменных. Таким образом, вместо принципа (2.1.1) имеем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{L}(\bar{\mathfrak{r}}_\Omega,\ \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega,\ t)\,dt = 0 \quad (\delta\bar{\mathfrak{r}}_\Omega|_{t_2} = \delta\bar{\mathfrak{r}}_\Omega|_{t_1} = 0), \tag{2.1.6}$$

вместо (2.1.2) —

$$\frac{\delta\bar{L}}{\delta\bar{\mathfrak{r}}_\Omega} = \frac{\partial\bar{L}}{\partial\bar{\mathfrak{r}}_\Omega} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega}\right) = 0, \tag{2.1.7}$$

вместо (2.1.3) —

$$\bar{\mathfrak{p}}_\Omega = \frac{\partial\bar{L}}{\partial\dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega}, \tag{2.1.8}$$

вместо (2.1.4) —

$$\bar{H} = \sum_\Omega \bar{\mathfrak{p}}_\Omega\dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega - \bar{L} \tag{2.1.9}$$

и вместо (2.1.5) —

$$\dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega = \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{\mathfrak{p}}_\Omega}, \quad \dot{\bar{\mathfrak{p}}}_\Omega = -\frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{\mathfrak{r}}_\Omega}. \tag{2.1.10}$$

Производящая функция (*генератор*) *канонического преобразования* $F(\mathfrak{r}_\Omega, \bar{\mathfrak{r}}_\Omega, t)$ определяется равенством

$$\bar{L} = L + \dot{F}. \tag{2.1.11}$$

Расписывая полную производную по времени, находим

$$\bar{H} - H + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_\Omega \left[\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{r}_\Omega} + \mathfrak{p}_\Omega\right]\dot{\mathfrak{r}}_\Omega + \sum_\Omega \left[\frac{\partial F}{\partial\bar{\mathfrak{r}}_\Omega} - \bar{\mathfrak{p}}_\Omega\right]\dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega = 0 \tag{2.1.12}$$

и затем

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{r}_\Omega} = -\mathfrak{p}_\Omega, \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{\mathfrak{r}}_\Omega} = \bar{\mathfrak{p}}_\Omega, \quad \bar{H} = H - \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.1.13)$$

Эти последние соотношения и выражают каноническое преобразование[1]).

B. Бесконечно малые канонические преобразования

Бесконечно малый канонический генератор $I(\mathfrak{r}_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, t)$ вводится с помощью равенства

$$F = I - \sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega \frac{\partial I}{\partial \mathfrak{p}_\Omega}. \quad (2.1.14)$$

Дифференцированием получаем отсюда

$$dF = \frac{\partial I}{\partial t} dt + \sum_\Omega \left(\mathfrak{p}_\Omega + \frac{\partial I}{\partial \mathfrak{r}_\Omega}\right) d\left(\mathfrak{r}_\Omega - \frac{\partial I}{\partial \mathfrak{p}_\Omega}\right) - \sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega \, d\mathfrak{r}_\Omega$$

и путем сравнения с равенством

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_\Omega \bar{\mathfrak{p}}_\Omega \, d\bar{\mathfrak{r}}_\Omega - \sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega \, d\mathfrak{r}_\Omega$$

находим, наконец, формулы бесконечно малого канонического преобразования

$$\bar{\mathfrak{r}}_\Omega = \mathfrak{r}_\Omega - \frac{\partial I}{\partial \mathfrak{p}_\Omega}, \quad \bar{\mathfrak{p}}_\Omega = \mathfrak{p}_\Omega + \frac{\partial I}{d\mathfrak{r}_\Omega}, \quad \bar{H} = H - \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (2.1.15)$$

Для краткости мы будем в дальнейшем писать

$$\begin{gathered} \bar{\delta}\mathfrak{r}_\Omega = \bar{\mathfrak{r}}_\Omega - \mathfrak{r}_\Omega, \quad \bar{\delta}\mathfrak{p}_\Omega = \bar{\mathfrak{p}}_\Omega - \mathfrak{p}_\Omega, \\ \bar{\delta}L = L(\bar{\mathfrak{r}}_\Omega, \dot{\bar{\mathfrak{r}}}_\Omega, t) - L(\mathfrak{r}_\Omega, \dot{\mathfrak{r}}_\Omega, t) = \frac{d}{dt}\sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega \bar{\delta}\mathfrak{r}_\Omega. \end{gathered} \quad (2.1.16)$$

На основании (2.1.15) определение (2.1.14) приводится к виду

$$F - I = \sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega \bar{\delta}\mathfrak{r}_\Omega; \quad (2.1.17)$$

---

[1]) Здесь рассмотрен один из многочисленных вариантов канонических преобразований. См. по этому поводу учебник [20] и цитируемую там литературу. О связи с квантовой механикой см. в статье Фока в приложении к книге Дирака [21].— *Прим. перев.*

отсюда и из (2.1.16) следует важное равенство

$$\frac{dI}{dt}=\frac{dF}{dt}-\bar{\delta}L. \tag{2.1.18}$$

Поэтому бесконечно малый канонический генератор I является константой движения, если L обладает такой структурой, что

$$\bar{\delta}L=\frac{dF}{dt}. \tag{2.1.19}$$

Подобно (2.1.16), мы определяем

$$\bar{\delta}H=H(\bar{\mathfrak{r}}_\Omega, \bar{\mathfrak{p}}_\Omega, t)-H(\mathfrak{r}_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, t). \tag{2.1.20}$$

Тогда с помощью (2.1.15) и *скобок Пуассона*

$$[M, N]_P=\sum_\Omega\left(\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{r}_\Omega}\frac{\partial N}{\partial \mathfrak{p}_\Omega}-\frac{\partial N}{\partial \mathfrak{r}_\Omega}\cdot\frac{\partial M}{\partial \mathfrak{p}_\Omega}\right), \tag{2.1.21}$$

определенных для функций $M(\mathfrak{r}_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, t)$ и $N(\mathfrak{r}_\Omega, \mathfrak{p}_\Omega, t)$, находим

$$\bar{\delta}H=[I, H]_P. \tag{2.1.22}$$

С другой стороны, раскрытие полной производной по времени с учетом уравнений Гамильтона (2.1.5) дает

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial t}+[I, H]_P, \tag{2.1.23}$$

откуда следует равенство

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial t}+\bar{\delta}H. \tag{2.1.24}$$

Поэтому I есть константа движения, если гамильтониан H таков, что имеет место равенство

$$\bar{\delta}H=-\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{2.1.25}$$

Это равенство является аналогом в теории Гамильтона равенства (2.1.19) теории Лагранжа.

Г. Теорема Нётер

Мы будем исходить из формулировки теоремы Нётер в форме (1.4.2). В применении к нерелятивистской механике определение преобразования симметрии (1.3.1) записывается в виде

$$L\left(\bar{\mathfrak{r}}_\Omega,\ \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_\Omega}{dt'},\ t'\right)=L\left(\mathfrak{r}_\Omega,\ \frac{d\mathfrak{r}_\Omega}{dt},\ t\right)-\frac{d}{dt}\mathcal{O}(\mathfrak{r}_\Omega,\ \bar{\mathfrak{r}}_\Omega,\ t), \quad (2.1.26)$$

где

$$\mathcal{O}=\delta\mathcal{O}+\mathcal{O}\xi \quad (2.1.27)$$

[такое же разложение, как в (1.3.4)]. Учет уравнений Лагранжа (2.1.2) дает из нётеровского тождества (1.4.2) закон сохранения

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega\delta\mathfrak{r}_\Omega+\delta\mathcal{O}\Big]=0, \quad (2.1.28)$$

а из (1.4.3) —

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega\Delta_s\mathfrak{r}_\Omega+\xi\Big(L-\sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega\dot{\mathfrak{r}}_\Omega\Big)+\mathcal{O}\Big]=0. \quad (2.1.29)$$

Д. Приложение к системе материальных точек

Чтобы придать рассмотренной выше теории более наглядный характер, мы воспользуемся моделью механики материальных точек, так как на этом примере можно превосходно разобраться в идеях довольно абстрактной общей теории и в особенности выяснить ее отношение к каноническим преобразованиям [3].

В этом случае функция Лагранжа записывается в виде

$$L=\frac{1}{2}\sum_\Omega m_\Omega\dot{\mathfrak{r}}_\Omega^2-V(|\mathfrak{r}_\Omega-\mathfrak{r}_\Gamma|), \quad (2.1.30)$$

где m_Ω — масса материальной точки номер Ω, а V — потенциальная энергия всей системы. Дифференцирование дает

$$\frac{\partial L}{\partial\mathfrak{r}_\Omega}=-\frac{\partial V}{\partial\mathfrak{r}_\Omega}, \qquad \mathfrak{p}_\Omega=m_\Omega\dot{\mathfrak{r}}_\Omega,$$

так что уравнение Лагранжа (2.1.2) принимает привычный вид уравнения движения

$$m_\Omega \ddot{\mathfrak{r}}_\Omega = -\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{r}_\Omega}\,. \tag{2.1.31}$$

Прямым расчетом теперь можно показать, что *бесконечно малые преобразования*

$$\tilde{\mathfrak{r}}_\Omega = \mathfrak{r}_\Omega + \mathfrak{b}t + \mathfrak{d} \times \mathfrak{r}_\Omega + \mathfrak{a} \tag{2.1.32}$$

и

$$t' = t + \xi \tag{2.1.33}$$

($\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$ и ξ — инфинитезимальные параметры) являются преобразованиями симметрии для функции Лагранжа (2.1.30). Эти параметры соответствуют:

$\mathfrak{b}$ — скорости поступательного движения,
$\mathfrak{d}$ — вращению,
$\mathfrak{a}$ — пространственному сдвигу (трансляции),
ξ — сдвигу во времени.

При этом (2.1.32) соответствует преобразованию функций, а (2.1.33) — преобразованию координат теории поля. Мы имеем конкретно

$$L\left(\tilde{\mathfrak{r}}_\Omega, \frac{d\tilde{\mathfrak{r}}_\Omega}{dt'}, t'\right) = L\left(\mathfrak{r}_\Omega, \frac{d\mathfrak{r}_\Omega}{dt}, t\right) + \frac{d}{dt}\left(\sum_\Omega m_\Omega \mathfrak{r}_\Omega \mathfrak{b}\right).$$

Из сравнения с (2.1.26) можно заключить, что

$$\delta\Theta = -\sum_\Omega m_\Omega \mathfrak{r}_\Omega \mathfrak{b}, \tag{2.1.34}$$

так что закон сохранения (2.1.28) принимает вид

$$\mathfrak{a}\frac{d}{dt}\left[\sum_\Omega m_\Omega \dot{\mathfrak{r}}_\Omega\right] + \mathfrak{b}\frac{d}{dt}\left[\sum_\Omega (m_\Omega \dot{\mathfrak{r}}_\Omega)\, t - \sum_\Omega m_\Omega \mathfrak{r}_\Omega\right] + \\ + \mathfrak{d}\frac{d}{dt}\left[\sum_\Omega m_\Omega \mathfrak{r}_\Omega \times \dot{\mathfrak{r}}_\Omega\right] = 0,$$

а закон (2.1.29) — вид

$$\xi\frac{d}{dt}\left[L - \sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega \dot{\mathfrak{r}}_\Omega\right] = \xi\frac{dH}{dt} = 0,$$

так как, очевидно, $\Delta_s \mathfrak{r}_\Omega = 0$. Поскольку введенные бесконечно малые параметры друг от друга не зависят и произвольны, из последних двух соотношений мы получаем закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_\Omega m_\Omega \dot{\mathfrak{r}}_\Omega\Big] = 0 \text{ (из пространственного сдвига)},$$

закон центра масс, имеющий характер закона сохранения,

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_\Omega \{m_\Omega \mathfrak{r}_\Omega - t m_\Omega \dot{\mathfrak{r}}_\Omega\}\Big] = 0 \text{ (из поступательного движения)},$$

закон сохранения момента импульса

$$\frac{d}{dt}\Big[\sum_\Omega m_\Omega \mathfrak{r}_\Omega \times \dot{\mathfrak{r}}_\Omega\Big] = 0 \text{ (из вращения)}$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{dH}{dt} = 0 \text{ (из сдвига во времени)}.$$

На языке бесконечно малых канонических преобразований теория может быть представлена следующим образом [3]. *Бесконечно малый канонический генератор* принимает вид

$$I = -\mathfrak{a}\sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega - \xi H - \mathfrak{d}\sum_\Omega \mathfrak{r}_\Omega \times \mathfrak{p}_\Omega - \\ - \mathfrak{b}\Big(t\sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega - \sum_\Omega m_\Omega \mathfrak{r}_\Omega\Big). \tag{2.1.35}$$

В соответствии с (2.1.15) это дает при дифференцировании

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\mathfrak{r}_\Omega &= \mathfrak{a} + \mathfrak{d}\times\mathfrak{r}_\Omega + \mathfrak{b}t + \xi\dot{\mathfrak{r}}_\Omega, \\ \bar{\delta}\mathfrak{p}_\Omega &= \mathfrak{d}\times\mathfrak{p}_\Omega + \mathfrak{b}m_\Omega + \xi\dot{\mathfrak{p}}_\Omega, \\ \bar{H} - H &= \mathfrak{b}\sum_\Omega \mathfrak{p}_\Omega + \xi\frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

Гамильтониан, соответствующий лагранжиану (2.1.30), имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_\Omega m_\Omega \dot{\mathfrak{r}}_\Omega^2 + V(|\mathfrak{r}_\Omega - \mathfrak{r}_\Gamma|). \tag{2.1.37}$$

Разложение в ряд Тейлора в приложении к (2.1.20) дает

$$\bar{\delta} H = \mathfrak{b} \sum_{\Omega} \mathfrak{p}_{\Omega} + \xi \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{2.1.38}$$

Тем самым показано, что H обладает требуемыми свойствами симметрии, так что величина (2.1.35) в соответствии с (2.1.24) является константой движения. К отдельно взятым законам сохранения можно перейти аналогично тому, как это уже сделано выше.

§ 2. *Релятивистская механика материальных точек*

В этом случае естественно исходить из соответствия

$$U_{\Omega} \to x^{i}, \quad x^{m} \to \begin{cases} \lambda \text{ (математический параметр) или} \\ \tau \text{ (собственное время).} \end{cases}$$

Принцип Гамильтона записывается в виде (в этом параграфе точкой обозначена полная производная по параметру λ)

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x^{i}, \dot{x}^{i})\, d\lambda = \delta \int_{P_1}^{P_2} \mathscr{L}\left(x^{i}, \frac{dx^{i}}{d\tau}\right) d\tau = 0. \tag{2.2.1}$$

Здесь P_1 и P_2 — фиксированные точки пространства-времени.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{\delta L}{\delta x^{j}} = \frac{\partial L}{\partial x^{j}} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{j}} = 0, \tag{2.2.2}$$

если в качестве параметра берется λ, или вид

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta x^{j}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^{j}} - \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (dx^{j}/d\tau)} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (dx^{i}/d\tau)} \frac{dx^{i}}{d\tau} - \mathscr{L} \right) \frac{dx_{j}}{d\tau} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (dx^{i}/d\tau)} \frac{dx^{i}}{d\tau} - \mathscr{L} \right) g_{mn,\,j} \frac{dx^{m}}{d\tau} \frac{dx^{n}}{d\tau} = 0, \tag{2.2.3}$$

если параметром служит τ [3]. *Канонический 4-импульс* определяется выражением

$$p_{i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (dx^{i}/d\tau)} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (dx^{k}/d\tau)} \frac{dx^{k}}{d\tau} - \mathscr{L} \right) \frac{dx_{i}}{d\tau}. \tag{2.2.4}$$

Для электрически заряженной частицы в электромагнитном поле имеем

$$\mathscr{L} = -m_0 c^2 + \frac{e}{c} A_m \frac{dx^m}{d\tau}, \tag{2.2.5}$$

где m_0 — масса покоя частицы, e — ее электрический заряд, A_m — 4-потенциал поля. Канонический 4-импульс при этом принимает вид

$$p_i = m_0 \frac{dx_i}{d\tau} + \frac{e}{c} A_i, \tag{2.2.6}$$

а уравнение Лагранжа (2.2.3) переходит в уравнение движения

$$m_0 \left[\frac{d^2 x_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} g_{mn,\,j} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} \right] = \frac{e}{c} B_{jm} \frac{dx^m}{d\tau}, \tag{2.2.7}$$

где $B_{jm} = A_{m,\,j} - A_{j,\,m}$ — тензор напряженности электромагнитного поля.

Применимость теоремы Нётер в этом случае оказывается весьма ограниченной, так как функция Лагранжа (2.2.5) инвариантна лишь относительно преобразования параметра

$$\lambda' = \lambda + \xi.$$

Поэтому теорему Нётер следует брать в формулировке (1.4.3), что дает соотношение

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\xi \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i \right) \right] = 0.$$

Однако оно выполняется тривиально, так как для этого случая справедливо равенство

$$L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i. \tag{2.2.8}$$

Обнаруженная ситуация с точки зрения физики вполне естественна, так как заряженная частица, помещенная в электромагнитное поле, вообще не характеризуется никакими сохраняющимися механическими величинами. Сохранение реализуется лишь в том случае, если наложить ограничения на потенциал (например, энергия сохраняется, если поле консервативно или потенциально, и т. д.).

§ 3. Система, состоящая из гравитационного максвелловского и клейн-гордоновского полей

Для такой системы лагранжева плотность [в смысле разложения (1.4.18)] имеет вид

$$\Lambda = \frac{\overset{(Q)}{R}}{2\varkappa} - \frac{1}{4} B_{mn} B^{mn} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Big[(\Phi^*_{,m} + i\alpha A_m \Phi^*) \times$$

$$\times (\Phi^{,m} - i\alpha A^m \Phi) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi^* \Phi \Big] = \overset{G}{\Lambda} + \overset{U}{\Lambda}. \quad (2.3.1)$$

Здесь Φ — комплексная *волновая функция* поля Клейна — Гордона, m_0 — масса покоя бесспиновых клейн-гордоновских частиц, $\hbar = h/2\pi$ (h — планковский квант действия) и $\alpha = e/\hbar c$ (e — электрический заряд частицы). Звездочкой обозначена соответствующая комплексно сопряженная величина.

Так как *тензор электромагнитной напряженности* $B_{mn} = A_{n,m} - A_{m,n}$ представляет собой ротор 4-потенциала, *система уравнений Максвелла с циклической перестановкой индексов*

$$B_{\langle mn,k \rangle} = B_{mn,k} + B_{km,n} + B_{nk,m} = 0 \quad (2.3.2)$$

удовлетворяется тождественно. Система неоднородных уравнений Максвелла совпадает с соответствующими *уравнениями Лагранжа* в ковариантной записи [3] [1]):

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta A_i} = \frac{\partial\Lambda}{\partial A_i} - \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial A_{i;j}} \right) = 0. \quad (2.3.3)$$

При этом дифференцирование дает

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial A_{i;j}} = B^{ij} \quad (2.3.4)$$

и

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial A_i} = \frac{\alpha\hbar^2}{2m_0 i} [\Phi^* \Phi^{,i} - \Phi^{*,i} \Phi - 2i\alpha \Phi^* \Phi A^i]. \quad (2.3.5)$$

[1]) Читателю может быть интересно, пользуясь добавлением дивергенциальных членов, перестроить лагранжиан (2.3.1) так, чтобы для электромагнитного поля действовал метод Палатини (см. примечания на стр. 25 и 30), дающий наряду с уравнениями поля (2.3.6) и стандартную связь напряженности и потенциала, не задаваемую заранее (это просто сделать для свободного электромагнитного поля).— *Прим. перев.*

Подставляя эти выражения в (2.3.3), получаем явный вид системы неоднородных уравнений Максвелла

$$B^{ij}{}_{;j}=\frac{1}{c}j^{i}, \tag{2.3.6}$$

где величина

$$j^{i}=\frac{e\hbar}{2m_0 i}\left[\Phi^{*}\Phi^{,i}-\Phi^{*,i}\Phi-\frac{2ie}{\hbar c}\Phi^{*}\Phi A^{i}\right] \tag{2.3.7}$$

представляет собой *4-вектор плотности электрического тока*, образованного полем Клейна — Гордона.

Уравнение Клейна — Гордона и соответствующее комплексно сопряженное уравнение вытекают из уравнений Лагранжа в ковариантной записи [1])

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\Phi^{*}}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi^{*}}-\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi^{*}{}_{,j}}\right)_{;j}=0, \tag{2.3.8}$$

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta\Phi}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi}-\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi_{,j}}\right)_{;j}=0. \tag{2.3.9}$$

Дифференцирование лагранжиана (2.3.1) приводит к выражениям

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi}=-\frac{\hbar^{2}}{2m_0}\left[-i\alpha A^{m}\left(\Phi^{*}_{,m}+\frac{ie}{\hbar c}A_{m}\Phi^{*}\right)+\frac{m_0^{2}c^{2}}{\hbar^{2}}\Phi^{*}\right], \tag{2.3.10}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi_{,j}}=-\frac{\hbar^{2}}{2m_0}[\Phi^{*,j}+i\alpha A^{j}\Phi^{*}], \tag{2.3.11}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi^{*}}=-\frac{\hbar^{2}}{2m_0}\left[i\alpha A_{m}(\Phi^{,m}-i\alpha A^{m}\Phi)+\frac{m_0^{2}c^{2}}{\hbar^{2}}\Phi\right] \tag{2.3.12}$$

и

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\Phi^{*}{}_{,j}}=-\frac{\hbar^{2}}{2m_0}[\Phi^{,j}-i\alpha A^{j}\Phi]. \tag{2.3.13}$$

---

[1]) Добавление к лагранжиану скалярного поля дивергенциального члена позволяет получить выражение, обращающееся в нуль в силу уравнений поля, как это автоматически имеет место для лагранжиана поля Дирака; аналогичная процедура возможна и в применении к электромагнитному лагранжиану наравне с указанной в примечании на предыдущей странице. — *Прим. перев.*

Подставляя эти выражения в (2.3.8) и (2.3.9), получаем два указанных уравнения поля:

$$\Phi^{,j}{}_{;j} - \frac{2ie}{\hbar c} A_j \Phi^{,j} - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} A_j A^j \Phi - \\ - \frac{ie}{\hbar c} A^j{}_{;j} \Phi - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi = 0 \qquad (2.3.14)$$

и

$$\Phi^{*,j}{}_{;j} + \frac{2ie}{\hbar c} A_j \Phi^{*,j} - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} A_j A^j \Phi^* + \\ + \frac{ie}{\hbar c} A^j{}_{;j} \Phi^* - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi^* = 0. \qquad (2.3.15)$$

Следующий шаг состоит в нахождении тензоров энергии-импульса максвелловского и клейн-гордоновского полей с учетом их взаимодействия, т. е. тензора энергии-импульса полного неметрического поля.

Канонический комплекс энергии-импульса (1.6.18) принимает вид

$$^{(\text{кан})}\overset{U}{\mathfrak{T}}_s{}^i = \frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial \Phi_{,i}} \Phi_{,s} + \frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial \Phi^*_{,i}} \Phi^*_{,s} + \\ + \frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial A_{m,i}} A_{m,s} - g_s{}^i \overset{U}{\mathscr{L}}. \qquad (2.3.16)$$

Чтобы перейти к симметричному комплексу энергии-импульса, нужно сначала вычислить на основании (1.4.5) выражение (1.6.32):

$$\mathscr{H}^{imk} = \frac{\partial \overset{U}{\mathscr{L}}}{\partial A_{m,i}} A^k = \sqrt{g}\, B^{mi} A^k. \qquad (2.3.17)$$

При этом мы учитываем, что поле Клейна — Гордона описывается инвариантной волновой функцией (скаляром), и поэтому в последнем выражении отсутствуют представляющие его члены. Так как выражение (2.3.17) антисимметрично по двум первым индексам, мы можем применить конструкцию (1.6.35). В результате, учитывая (2.3.4), (2.3.11) и (2.3.13), получаем для *симметричного тензора* *энергии-импульса* полного неметрического поля выражение

$$T_s{}^i = B_{sm}B^{mi} + \frac{1}{4} g_s{}^i B_{mn}B^{mn} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \left(\Phi^*{}_{,s} + \frac{ie}{\hbar c} A_s\Phi^*\right) \times \right.$$

$$\times \left(\Phi^{,i} - \frac{ie}{\hbar c} A^i\Phi\right) + \left(\Phi^{*,i} + \frac{ie}{\hbar c} A^i\Phi^*\right) \left(\Phi_{,s} - \frac{ie}{\hbar c} A_s\Phi\right) -$$

$$- g_s{}^i \left[\left(\Phi^{*,m} + \frac{ie}{\hbar c} A^m\Phi^*\right) \left(\Phi_{,m} - \frac{ie}{\hbar c} A_m\Phi\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi^*\Phi \right] \right\}. \quad (2.3.18)$$

Канонический комплекс энергии-импульса калибровочно неинвариантен (относительно *фазовых* и *градиентных преобразований*). Симметричный же комплекс энергии-импульса, напротив, обладает *калибровочной инвариантностью*, а именно из него и строятся наблюдаемые величины. Рассмотрим подробнее эти *калибровочные преобразования* (χ — вещественная калибровочная функция)

$$\widetilde{A}_i = A_i + \chi_{,i}, \qquad \widetilde{\Phi} = \Phi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}\chi\right), \qquad\qquad (2.3.19)$$
$$\widetilde{\Phi}^* = \Phi^* \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\chi\right).$$

При таком комбинированном преобразовании лагранжева плотность (2.3.1) остается форм-инвариантной, так что мы имеем дело с одним (единственным) непрерывным преобразованием симметрии, не сводящимся к преобразованиям координат. Поэтому, согласно теореме Нётер, нужно ожидать появления соответствующей сохраняющейся величины. Чтобы лучше разобраться в этой ситуации, перейдем сначала от (2.3.19) к соответствующим бесконечно малым преобразованиям (χ инфинитезимально)

$$\widetilde{A}_i = A_i + \chi_{,i}, \quad \widetilde{\Phi} = \Phi + \frac{ie}{\hbar c}\Phi\chi, \quad \widetilde{\Phi}^* = \Phi^* - \frac{ie}{\hbar c}\Phi^*\chi \qquad (2.3.20)$$

или

$$\delta A_i = \chi_{,i}, \quad \delta\Phi = \frac{ie}{\hbar c}\Phi\chi, \quad \delta\Phi^* = -\frac{ie}{\hbar c}\Phi^*\chi. \quad (2.3.21)$$

Подставляя эти величины в соотношение Нётер (2.3.7), которое здесь записывается как

$$\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_{,k}}\,\delta\Phi+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi^*{}_{,k}}\,\delta\Phi^*+\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{i,k}}\,\delta A_i\right]_{,k}=0, \quad (2.3.22)$$

получаем, используя обозначение (2.3.7), уравнение непрерывности

$$(\sqrt{g}\,j^k)_{,k}=0, \quad (2.3.23)$$

которое выражает дифференциальный закон сохранения электрического заряда как следствие калибровочной инвариантности.

§4. *Система, состоящая из гравитационного, максвелловского и дираковского полей*

Для такой системы лагранжева плотность [в смысле разложения (1.4.18)] имеет вид

$$\Lambda=\frac{{}^{(Q)}R}{2\varkappa}-\frac{1}{4}B_{mn}B^{mn}-$$
$$-\frac{\hbar c}{2}\left\{\overline{\Psi}\gamma^k\Psi_{;k}-\overline{\Psi}_{;k}\gamma^k\Psi+\frac{2m_0c}{\hbar}\overline{\Psi}\Psi\right\}. \quad (2.4.1)$$

Здесь m_0 — масса покоя электрона или позитрона; γ^k — *метрические биспинтензоры* (обобщенные матрицы Дирака), удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^k\gamma^m+\gamma^m\gamma^k=2g^{km}; \quad (2.4.2)$$

Ψ — *дираковский биспинор*; $\overline{\Psi}$ — $\Psi^+\beta$ — *сопряженный* ему биспинор.

Индекс «+» обозначает операцию *эрмитова сопряжения* (Ψ^+ — эрмитово сопряженный биспинор). Ковариантная производная биспинора определяется как

$$\Psi_{;k}=\Psi_{,k}+\Gamma_k\Psi, \quad (2.4.3)$$

где *биспинорные коэффициенты связности* имеют вид [3] [1])

$$\Gamma_k=\frac{1}{4}\gamma^j\left(\gamma_{j,k}-\left\{{l \atop jk}\right\}\gamma_l\right)-$$
$$-\frac{1}{32}\,\mathrm{Sp}\,(\gamma\gamma^j\gamma_{j,k})\,\gamma-\frac{ie}{\hbar c}A_k+\frac{i}{2}\Theta_{,k}. \quad (2.4.4)$$

---

[1]) Эти понятия рассматриваются также в более доступной для нашего читателя книге [22].— *Прим. перев.*

В этом выражении

$$\gamma = \frac{1}{4!\,i}\,\varepsilon_{nmkl}\gamma^n\gamma^m\gamma^k\gamma^l, \tag{2.4.5}$$

причем Θ определяется через

$$\gamma_{12} = \sqrt{\hat{\gamma}}\,e^{i\Theta}, \quad \text{где} \quad \hat{\gamma} = \gamma_{12}\gamma_{\dot{1}\dot{2}} \tag{2.4.6}$$

(γ_{AB} — *метрический спинор*). Если подставить выражение (2.4.4) в (2.4.3) и ограничиться частным случаем мира Минковского с галилеевыми координатами, то ковариантная производная биспинора сведется к его калибровочной производной, т. е. к операции, обычной в теории поля.

В теориях спинорных полей лагранжиан [см. (2.4.1)] обладает принципиально иной структурой, чем в теории тензорных полей, а именно имеет вид

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(U_\Omega, U_{\Omega,\,i}, g_{mn}, g_{mn,\,i}, \gamma_m, \gamma_{m,\,i}, x^i).$$

Поэтому здесь становится неприменимой тензорная теория, изложенная в гл. 1, § 4, и кладущая в основу структуру лагранжиана

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(U_\Omega, U_{\Omega,\,i}, g_{mn}, g_{mn,\,i}, x^i).$$

Положение усложняется связью между матрицами γ^m и метрическим тензором g^{mn}, выражаемой соотношением (2.4.2). Поэтому мы откажемся здесь от подробного воспроизведения расчетов, отсылая к полному анализу ситуации в [3].

Дифференцируя лагранжиан (2.4.1) и подставляя производные в *уравнения Лагранжа*

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\overline{\Psi}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\overline{\Psi}} - \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\overline{\Psi}_{,\,k}}\right)_{,\,k} = 0, \tag{2.4.7}$$

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\Psi} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi} - \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi_{,\,k}}\right)_{,\,k} = 0, \tag{2.4.8}$$

получаем *уравнение Дирака*

$$\gamma^k\Psi_{;\,k} + \frac{m_0 c}{\hbar}\,\Psi = 0 \tag{2.4.9}$$

и *сопряженное ему уравнение*

$$\overline{\Psi}_{;\,k}\gamma^k - \frac{m_0 c}{\hbar}\,\overline{\Psi} = 0. \tag{2.4.10}$$

Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе при выводе системы неоднородных уравнений Максвелла, находим для *4-вектора плотности электрического тока* поля Дирака

$$j^k = iec\overline{\Psi}\gamma^k\Psi. \qquad (2.4.11)$$

Поле Дирака обладает тем интересным свойством, что лагранжева плотность этого поля для реальной его эволюции тождественно обращается в нуль в силу уравнений Дирака (2.4.9) и (2.4.10) [1]).

В конечном итоге *тензор энергии-импульса* полного неметрического поля можно привести к виду

$$T_{ij} = B_{im}B^m{}_j + \frac{1}{4}g_{ij}B_{mn}B^{mn} - \\ - \frac{\hbar c}{4}[\overline{\Psi}(\gamma_i\Psi_{;\,j} + \gamma_j\Psi_{;\,i}) - (\overline{\Psi}_{;\,j}\gamma_i + \overline{\Psi}_{;\,i}\gamma_j)\Psi]. \qquad (2.4.12)$$

Его след равен

$$T_i{}^i = m_0c^2\overline{\Psi}\Psi. \qquad (2.4.13)$$

Из формы лагранжиана (2.4.1) видно, что существует еще одно (которое здесь также является единственным) непрерывное преобразование симметрии, не сводящееся к преобразованиям координат. Формально речь идет о тех же законах преобразования, которые ранее были записаны в виде (2.3.19), но здесь они приобретают новое содержание (χ снова вещественная калибровочная функция):

$$\widetilde{A}_i = A_i + \chi_{,\,i}, \quad \widetilde{\Psi} = \Psi e^{(ie/\hbar c)\chi}, \quad \widetilde{\overline{\Psi}} = \overline{\Psi}e^{-(ie/\hbar c)\chi} \qquad (2.4.14)$$

или в инфинитезимальном случае (когда χ бесконечно мала)

$$\widetilde{A}_i = A_i + \chi_{,\,i}, \quad \widetilde{\Psi} = \Psi + \frac{ie}{\hbar c}\Psi\chi, \\ \widetilde{\overline{\Psi}} = \overline{\Psi} - \frac{ie}{\hbar c}\overline{\Psi}\chi, \qquad (2.4.15)$$

---

[1]) Интересно также, что систему уравнений (2.4.9) и (2.4.10) легко решить алгебраически относительно электромагнитного 4-потенциала A_m (см. [25]).— *Прим. перев.*

т. е.

$$\delta A_i = \chi_{,\,i}, \quad \delta\Psi = \frac{ie}{\hbar c}\Psi\chi, \quad \delta\overline{\Psi} = -\frac{ie}{\hbar c}\overline{\Psi}\chi. \quad (2.4.16)$$

Подставим эти выражения в соответствующее *соотношение Нётер* (1.4.2), имеющее здесь вид

$$\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Psi_{,\,k}}\delta\Psi + \delta\overline{\Psi}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\overline{\Psi}_{,\,k}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{i,\,k}}\delta A_i\right]_{,k} = 0, \quad (2.4.17)$$

и получим после вычисления производных и подстановки обозначения (2.4.11) *уравнение непрерывности*

$$\left(\sqrt{g}\, j^k\right)_{,\,k} = 0, \quad (2.4.18)$$

которое выражает дифференциальный закон сохранения электрического заряда как следствие калибровочной инвариантности.

ГЛАВА 3

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИММЕТРИИ В ЧАСТНОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Собственные (непрерывные) преобразования Лоренца

Группа Пуанкаре является основной группой преобразований координат в частной теории относительности. В нее входят как однородные, так и неоднородные преобразования Лоренца.

Мы будем пользоваться в дальнейшем галилеевыми координатами

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct,$$

соответствующими метрике

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv (\eta_{ik}), \tag{3.1.1}$$

откуда следует

$$g^{ik} = \eta^{ik} = \eta_{ik}. \tag{3.1.2}$$

В общем случае преобразования Лоренца, линейные по своей природе, могут быть записаны в виде

$$x^{i'} = A_j{}^{i'} x^j + \alpha^{i'}, \tag{3.1.3}$$

где постоянные множители $A_j{}^{i'} = \partial x^{i'}/\partial x^j$ называются коэффициентами Лоренца. К этим коэффициентам сводятся *однородные преобразования Лоренца* (лоренцевы повороты). Добавочное постоянное слагаемое описывает пространственно-временные сдвиги (трансляции), и его наличие дает *неоднородные преобразования Лоренца.*

Так как преобразования Лоренца не меняют вида метрики, то из закона преобразования

$$g^{i'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} g^{mn} \tag{3.1.4}$$

для них следуют дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n}\eta^{mn}=\eta^{i'k'}=\eta^{ik}. \qquad (3.1.5)$$

Переходя к соответствующему уравнению для определителей, получаем

$$|A_m{}^{i'}|^2=1, \quad \text{или} \quad |A_m{}^{i'}|=\pm 1. \qquad (3.1.6а)$$

Собственные (непрерывные) преобразования Лоренца определяются условием

$$|A_m{}^{i'}|=1 \text{ при } A_4{}^{4'}>0 \text{ (\textit{ортохронность}).} \qquad (3.1.6б)$$

При этом первое условие математически (но не обязательно физически) выделяет непрерывные преобразования, второе же обеспечивает сохранение исходного направления времени.

Тот факт, что метрический тензор форм-инвариантен относительно *пространственно-временных сдвигов* ($\alpha^{i'}$), истолковывается как однородность пространства-времени; форм-инвариантность же метрики при *пространственно-временных поворотах* ($A_j{}^{i'}$) понимается как изотропность пространства-времени.

Для бесконечно малых преобразований Лоренца коэффициенты принимают вид

$$A_j{}^{i'}=g_j{}^i+\alpha^i{}_j \quad \text{и} \quad A_{j'}{}^i=g_j{}^i-\alpha^i{}_j. \qquad (3.1.7)$$

Если подставить такие бесконечно малые добавки $\alpha^i{}_j$ к тождественному преобразованию в уравнение (3.1.4), определяющее эти коэффициенты, то мы придем к условию антисимметрии

$$\alpha^i{}_j=-\alpha_j{}^i, \qquad (3.1.8)$$

в котором использованы стандартные правила перестановки индексов. При этом собственные преобразования Лоренца (3.1.3) принимают вид

$$x^{i'}=x^i+\alpha^i{}_jx^j+\alpha^i, \qquad (3.1.9)$$

где α^i — бесконечно малая величина, заменившая $\alpha^{i'}$.

Из общего числа 16 коэффициентов Лоренца $A_j{}^{i'}$ 10 коэффициентов не являются независимыми вследствие условий (3.1.4), так что остается всего 6 степеней свободы.

Их можно явственно усмотреть в шести друг от друга не зависящих величинах

$$\alpha^1{}_2,\quad \alpha^1{}_3,\quad \alpha^1{}_4,\quad \alpha^2{}_3,\quad \alpha^2{}_4,\quad \alpha^3{}_4,$$

называемых бесконечно малыми параметрами лоренцевых поворотов.

Введенные таким образом 6 степеней свободы описывают:

3 степени свободы — чисто пространственные повороты,

3 степени свободы — пространственно-временные повороты (равномерное поступательное движение).

К этому следует добавить еще 4 степени свободы, соответствующие пространственно-временным сдвигам:

3 степени свободы — пространственные сдвиги,

1 степень свободы — временно́й сдвиг.

§ 2. Теорема Нётер

Приведем сначала общерелятивистские выражения к случаю галилеевых координат, подчеркивая при этом самые важные детали рассуждений.

Из сравнения (1.1.1) и (3.1.9) получаем

$$\xi^i = \alpha^i{}_j x^j + \alpha^i, \tag{3.2.1}$$

так что

$$\xi^i{}_{,\,j} = \alpha^i{}_j \quad \text{и} \quad \xi^i{}_{,\,i} = 0. \tag{3.2.2}$$

Поэтому полная вариация лагранжевой плотности (1.1.10) принимает вид

$$\Delta\Lambda = \frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}\,\delta U_\Omega + [\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\delta U_\Omega]_{,\,a} + \frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}\,(\Delta_s U_\Omega - U_{\Omega,\,m}\xi^m) +$$
$$+ [\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\Delta_s U_\Omega + \xi^m(\Lambda g_m{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} U_{\Omega,\,m})]_{,\,a}, \tag{3.2.3}$$

причем вместо (1.1.14) для полной вариации интеграла действия имеем

$$\Delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4} \Delta\Lambda\, d^{(4)}x. \tag{3.2.4}$$

Принцип экстремума действия Гамильтона (1.2.1) записывается теперь в виде

$$\delta W = \frac{1}{c} \int\limits_{V_4} \delta\Lambda d^{(4)}x = 0 \quad \text{при} \quad \delta U_\Omega |_{(V_4)} = 0 \tag{3.2.5}$$

и приводит к *уравнениям Лагранжа*

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega} = \frac{\partial\Lambda}{\partial U_\Omega} - \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial U_{\Omega,\,a}}\right)_{,\,a} = 0 \tag{3.2.6}$$

вместо (1.2.7).

Соотношение, определяющее понятие *преобразования симметрии*, имело ранее вид (1.3.1); теперь оно записывается как

$$\Lambda(\widetilde{U}_{\Omega'}, \widetilde{U}_{\Omega',\,a'}, x^{a'}) = \Lambda(U_\Omega, U_{\Omega,\,a}, x^a) - \mathcal{O}^a{}_{,\,a}, \tag{3.2.7}$$

где

$$\mathcal{O}^a = \mathcal{O}^a(U_\Omega, \widetilde{U}_\Omega, x^b),$$

так как метрическое поле уже отсутствует.

Бесконечно малые преобразования симметрии (1.3.2) теперь принимают вид

$$\Delta\Lambda + \mathcal{O}^a{}_{,\,a} = 0. \tag{3.2.8}$$

Отсюда с помощью (3.2.3) можно получить также

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}\delta U_\Omega + [\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\delta U_\Omega]_{,\,a} + \frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}(\Delta_s U_\Omega - U_{\Omega,\,m}\xi^m) +$$
$$+ [\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\Delta_s U_\Omega + \xi^m(\Lambda g_m{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} U_{\Omega,\,m}) + \mathcal{O}^a]_{,\,a} = 0. \tag{3.2.9}$$

Ввиду независимости координатных и функциональных преобразований друг от друга это соотношение расщепляется на составные элементы *теоремы Нётер*:

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}\delta U_\Omega + [\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\delta U_\Omega + \delta\mathcal{O}^a]_{,\,a} = 0, \tag{3.2.10}$$

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}(\Delta_s U_\Omega - U_{\Omega,\,m}\xi^m) +$$
$$+ [\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\Delta_s U_\Omega + \xi^m(\Lambda g_m{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} U_{\Omega,\,m}) + \mathcal{O}\xi^a]_{,\,a} = 0. \tag{3.2.11}$$

§ 3. *Дифференциальные законы сохранения*

Оба только что полученных слабых закона сохранения при учете уравнений полей (т. е. для реального хода эволюции последних) переходят в *слабые дифференциальные законы сохранения*

$$[\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\delta U_\Omega + \delta\mathcal{O}^a]_{,a} = 0, \qquad (3.3.1)$$

$$[\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\Delta_s U_\Omega + \xi^m(\Lambda g_m{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} U_{\Omega,m}) + \mathcal{O}\xi^a]_{,a} = 0. \qquad (3.3.2)$$

Начнем их исследование со второго соотношения. Подставим в него выражение (1.4.4б), в котором здесь положим $S_{\Omega a} = 0$ и вследствие (3.1.8)

$$S_\Omega{}^\Gamma{}^b{}_a = -S_\Omega{}^\Gamma{}_a{}^b = \mathrm{const}. \qquad (3.3.3)$$

Используя также выражение (3.2.1), имеем

$$\alpha^m{}_n [x^n \{\Lambda g_m{}^i - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega i} U_{\Omega,m} + \mathcal{O} g_m{}^i\} - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega i} S_\Omega{}^\Gamma{}^n{}_m U_\Gamma]_{,i} +$$
$$+ \alpha^k [\Lambda g_k{}^i - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega i} U_{\Omega,k} + \mathcal{O} g_k{}^i]_{,i} = 0. \qquad (3.3.4)$$

Полагая в дальнейшем $\mathcal{O} = 0$ и используя сокращение (1.6.32)

$$\mathscr{H}^a{}_t{}^m = \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} S_\Omega{}^\Gamma{}^m{}_t U_\Gamma = -\mathscr{H}^{am}{}_t \qquad (3.3.5)$$

[такая антисимметрия следует из (3.3.3)], а также обозначение

$${}^{(\text{кан})}T_t{}^a = \frac{\partial\Lambda}{\partial U_{\Omega,a}} U_{\Omega,t} - \Lambda g_t{}^a \qquad (3.3.6)$$

для *канонического тензора энергии-импульса*, следующее здесь из (1.6.18), находим

$$\alpha^{k\,(\text{кан})}T_k{}^i{}_{,i} + \alpha_{mn}[{}^{(\text{кан})}T^{mi}x^n - \mathscr{H}^{imn}]_{,i} = 0.$$

Отсюда в силу антисимметрии коэффициентов Лоренца (3.1.8) следуют равенства

$${}^{(\text{кан})}T^{ki}{}_{,i} = 0 \qquad \mathbf{(3.3.7)}$$

и

$$[{}^{(\text{кан})}T^{mi}x^n - {}^{(\text{кан})}T^{ni}x^m + 2\mathscr{H}^{inm}]_{,i} = 0. \qquad (3.3.8)$$

Первое из них является вариантом (1.6.21), а второе — частнорелятивистской версией (1.6.40). Мы констатируем:

Сохранение энергии и импульса есть следствие пространственно-временных сдвигов, причем

α^μ (пространственный сдвиг) → сохранение импульса,

α^4 (временно́й сдвиг) → сохранение энергии.

Сохранение момента импульса и закон центра масс суть следствия инвариантности при пространственно-временных поворотах, а именно

$\alpha^{\mu\nu}$(пространственный поворот) →

→сохранение момента импульса,

$\alpha^{4\mu}$(равномерное поступательное движение) →

→ закон центра масс.

Смысл этих заключений станет еще понятнее из дальнейшего, особенно из анализа интегральных законов сохранения.

Симметричный тензор энергии-импульса на основании (1.6.34) вследствие антисимметрии (3.3.5) приводится к виду

$$T_s{}^i = {}^{(\text{кан})}T_s{}^i + g_{sk}\left(\mathscr{H}^{kim} + \mathscr{H}^{ikm} + \mathscr{H}^{mik}\right)_{,m}. \quad (3.3.9\text{а})$$

Прямым дифференцированием можно удостовериться, что эта величина также удовлетворяет равенству

$$T_s{}^i{}_{,i} = 0. \quad (3.3.9\text{б})$$

При этом мы вновь воспользовались антисимметрией (3.3.5).

Определим *тензор момента импульса* как

$$D^{mni} = \frac{1}{c}\left({}^{(\text{кан})}T^{mi}x^n - {}^{(\text{кан})}T^{ni}x^m + 2\mathscr{H}^{inm}\right) = -D^{nmi}. \quad (3.3.10)$$

Тогда соотношение (3.3.8) можно истолковать как локальный закон сохранения момента импульса (вместе с локальным законом центра масс):

$$D^{mni}{}_{,i} = 0. \quad (3.3.11)$$

Может оказаться полезным также разложить тензор момента импульса на орбитальную

$${}^{(\text{орб})}D^{mni} = \frac{1}{c}\left({}^{(\text{кан})}T^{mi}x^n - {}^{(\text{кан})}T^{ni}x^m\right) \quad (3.3.12)$$

и не зависящую от координат спиновую части

$$^{(\text{спин})}D^{mni}=\frac{2}{c}\mathscr{H}^{inm}, \qquad (3.3.13)$$

так что

$$D^{mni}={}^{(\text{орб})}D^{mni}+{}^{(\text{спин})}D^{mni}. \qquad (3.3.14)$$

В связи с этим заметим, что многие авторы, отходя от формализма теоремы Нётер, определяют тензо́р момента импульса в виде

$$\overline{D}^{mni}=\frac{1}{c}(T^{mi}x^n-T^{ni}x^m)=-\overline{D}^{nmi} \qquad (3.3.15)$$

с помощью симметричного тензора энергии-импульса. Прямым дифференцированием с привлечением (3.3.9) можно удостовериться, что наряду с (3.3.11) выполняется также закон

$$\overline{D}^{mni}{}_{,\,i}=0. \qquad (3.3.16)$$

Тензор

$$L^{il}=cD^{ilj}{}_{,\,j}, \qquad (3.3.17)$$

следующий при взятии дивергенции из общего тензора момента импульса D^{ilj} и снабженный множителем c, называют *тензором вращающего момента* (*момента силы*), обобщая соответствующее понятие механики [1]).

В гл. 1, § 6, мы упоминали о том, что наряду с нётеровским подходом к законам сохранения существует еще подход, основанный на *уравнениях Киллинга* (1.6.42). Эти уравнения принимают здесь вид

$$\xi_{m,\,n}+\xi_{n,\,m}=0, \qquad (3.3.18)$$

причем закон сохранения (1.6.43) переходит в

$$(\xi_m T^{mn})_{,\,n}=0. \qquad (3.3.19)$$

В пространстве Минковского при использовании галилеевых координат решение уравнений (3.3.18) имеет вид

$$\xi_m=\alpha_{mi}x^i+\alpha_m, \qquad (3.3.20)$$

[1]) Это определение не противоречит закону сохранения (3.3.11), так как предполагает незамкнутость системы (в дифференциальном смысле), т. е. неучет части действующих в ней факторов, дающих вклад в изменение момента импульса.— *Прим. перев.*

где требуется свойство антисимметрии [ср. с (3.2.8) и (3.1.9)]

$$\alpha_{mn} = -\alpha_{nm}. \tag{3.3.21}$$

Подставляя эти значения в (3.3.19), получаем

$$\alpha_{mi}(T^{mn}x^i)_{,n} + \alpha_m T^{mn}{}_{,n} = 0.$$

Это равенство позволяет записать с помощью (3.3.15)

$$\frac{c}{2}\alpha_{mi}\bar{D}^{min}{}_{,n} + \alpha_m T^{mn}{}_{,n} = 0, \tag{3.3.22}$$

откуда непосредственно следуют законы (3.3.9) и (3.3.16). Отсюда видно, что в частной теории относительности оба подхода к законам сохранения приводят к одним и тем же результатам.

Нам осталось рассмотреть еще первый дифференциальный закон сохранения (3.3.1), в котором мы для простоты также положим $\delta\Theta^a = 0$. Функциональную вариацию удобно представить в виде

$$\delta U_\Omega = iae_\Omega{}^\Gamma U_\Gamma, \tag{3.3.23}$$

где a — постоянный бесконечно малый параметр, а $e_\Omega{}^\Gamma$ — произвольные коэффициенты. Для простоты ограничимся однопараметрической группой симметрии. Определив общий *4-вектор плотности тока* как

$$j^a = \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a} e_\Omega{}^\Gamma U_\Gamma, \tag{3.3.24}$$

сведем (3.3.1) к уравнению непрерывности

$$j^a{}_{,a} = 0. \tag{3.3.25}$$

§ 4. Интегральные законы сохранения

В этом параграфе мы рассмотрим интегральные законы сохранения, получающиеся при интегрировании дифференциальных законов (3.3.7) или (3.3.9), (3.3.11) или (3.3.16), а также (3.3.25).

При переходе к нашему частному случаю получаем из (1.7.17) *частнорелятивистский 4-импульс*

$$P_s = \frac{i}{c}\int_{V_3} T_s{}^m\, df_m = \frac{i}{c}\int_{x^4=\mathrm{const}} T_s{}^4\, df_4 =$$

$$= -\frac{1}{c}\int_{x^4=\mathrm{const}} T_s{}^4 d^{(3)}x. \tag{3.4.1}$$

Для *3-импульса* следует записать, согласно (1.7.20),

$$P_\mu = -\frac{1}{c}\int\limits_{x^4=\mathrm{const}} T_\mu{}^4 d^{(3)}x, \tag{3.4.2}$$

а для *энергии*, согласно (1.7.21),

$$\mathscr{E} = -cP_4 = \int\limits_{x^4=\mathrm{const}} T_4{}^4 d^{(3)}x. \tag{3.4.3}$$

Из выражения (3.3.8) следует

$$T_s{}^4 = {}^{(\text{кан})}T_s{}^4 + (\mathscr{H}_s{}^{4m} + \mathscr{H}^4{}_s{}^m + \mathscr{H}^{m4}{}_s)_{,m}.$$

Ввиду антисимметрии (3.3.5) можно заменить суммирование от 1 до 4 по m на суммирование от 1 до 3 по μ:

$$T_s{}^4 = {}^{(\text{кан})}T_s{}^4 + (\mathscr{H}_s{}^{4\mu} + \mathscr{H}^4{}_s{}^\mu + \mathscr{H}^{\mu 4}{}_s)_{,\mu}.$$

Тогда, подставляя это выражение в (3.4.1), можно свести интегрирование по трехмерному объему от дивергенциальной величины к двумерному интегралу по поверхности, охватывающей этот объем; но в принятых предположениях поверхностный интеграл обращается в нуль, и вместо (3.4.1) можно также записать

$$P_s = -\frac{1}{c}\int\limits_{x^4=\mathrm{const}} {}^{(\text{кан})}T_s{}^4 d^{(3)}x. \tag{3.4.4}$$

Согласно (1.7.19), при этом выполняются интегральные законы сохранения 3-импульса

$$\frac{dP_\mu}{dt} = 0 \tag{3.4.5}$$

и энергии

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = 0. \tag{3.4.6}$$

Перейдем теперь к выводу интегрального закона сохранения момента импульса и интегрального закона центра масс. Для этого используем дифференциальный закон сохранения (3.3.11). По аналогии с прежними определениями интегральных величин (электрического заряда, 4-импульса) определим теперь *интегральный тензор момента импульса* как

$$D^{il} = \frac{1}{i}\int\limits_{V_3} D^{ilj} df_j = \int\limits_{x^4=\text{const}} D^{il4} d^{(3)}x. \qquad (3.4.7)$$

Вводя интегральный тензор орбитального момента

$$^{(\text{орб})}D^{il} = \frac{1}{i}\int\limits_{V_3} {}^{(\text{орб})}D^{ilj}\, df_j = \int\limits_{x^4=\text{const}} {}^{(\text{орб})}D^{il4} d^{(3)}x \qquad (3.4.8)$$

и интегральный тензор спинового момента

$$^{(\text{спин})}D^{il} = \frac{1}{i}\int\limits_{V_3} {}^{(\text{спин})}D^{ilj}\, df_j = \int\limits_{x^4=\text{const}} {}^{(\text{спин})}D^{il4} d^{(3)}x, \qquad (3.4.9)$$

можно записать также

$$D^{il} = {}^{(\text{орб})}D^{il} + {}^{(\text{спин})}D^{il}. \qquad (3.4.10)$$

При интегрировании по трехмерному объему дифференциальный закон сохранения (3.3.11) дает интегральный закон

$$\frac{dD^{il}}{dt} = 0. \qquad (3.4.11)$$

Прежде всего истолкуем пространственную часть $D^{\mu\nu}$ интегрального тензора момента импульса, для которой, согласно последнему уравнению, имеет место закон

$$\frac{dD^{\mu\nu}}{dt} = 0. \qquad (3.4.12)$$

Покажем, что эта сохраняющаяся величина соответствует обычному трехмерному понятию момента импульса. Она складывается из орбитальной и спиновой частей:

$$D^{\mu\nu} = {}^{(\text{орб})}D^{\mu\nu} + {}^{(\text{спин})}D^{\mu\nu}. \qquad (3.4.13)$$

По определению

$$^{(\text{орб})}D^{\mu\nu} = \int\limits_{x^4=\text{const}} {}^{(\text{орб})}D^{\mu\nu 4} d^{(3)}x =$$

$$= \int\limits_{x^4=\text{const}} \left(x^{\mu\,(\text{кан})}\pi^{\nu} \rightarrow x^{\nu\,(\text{кан})}\pi^{\mu}\right) d^{(3)}x,$$

где в соответствии с (1.7.22) мы обозначили через

$$^{(\text{кан})}\pi^{\mu} = -\frac{1}{c}\,{}^{(\text{кан})}T_{\mu}{}^{4} \tag{3.4.14}$$

каноническую плотность импульса. Таким образом, мы уже пришли к обобщению понятия орбитального момента импульса из механики.

С помощью (3.3.13) из (3.4.9) получаем

$$^{(\text{спин})}D^{\mu\nu} = \int\limits_{x^4=\text{const}} {}^{(\text{спин})}D^{\mu\nu 4}\, d^{(3)}x = \frac{2}{c}\int\limits_{x^4=\text{const}} \mathscr{H}^{4\nu\mu}\, d^{(3)}x. \tag{3.4.15}$$

Для многих целей полезно бывает ввести трехмерный момент импульса аксиального вектора

$$\mathfrak{D} = {}^{(\text{орб})}\mathfrak{D} + {}^{\text{спин}}\,\mathfrak{D} = \mathfrak{i}D^{23} + \mathfrak{j}D^{31} + \mathfrak{k}D^{12}. \tag{3.4.16}$$

Теперь перейдем к закону сохранения

$$\frac{dD^{\mu 4}}{dt} = 0. \tag{3.4.17}$$

Его можно подробно записать, используя введенную в (1.7.23) *каноническую плотность энергии*

$$^{(\text{кан})}w = {}^{(\text{кан})}T_{4}{}^{4}, \tag{3.4.18}$$

как

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x^4=\text{const}} \left[\frac{^{(\text{кан})}w}{c^2}\, x^{\mu} - {}^{(\text{кан})}\pi^{\mu} t + \frac{2}{c^2}\,\mathscr{H}^{44\mu}\right] d^{(3)}x = 0.$$

Вводя определение *центра масс*

$$\bar{x}^{\mu} = \frac{\displaystyle\int \frac{^{(\text{кан})}w}{c^2}\, x^{\mu} d^{(3)}x}{\displaystyle\int \frac{^{(\text{кан})}w}{c^2}\, d^{(3)}x}, \tag{3.4.19}$$

получаем отсюда

$$\bar{x}^{\mu} = \frac{\left(t\displaystyle\int {}^{(\text{кан})}\pi^{\mu} d^{(3)}x - \frac{2}{c^2}\int \mathscr{H}^{44\mu} d^{(3)}x + \text{const}\right)}{\displaystyle\int \frac{^{(\text{кан})}w}{c^2}\, d^{(3)}x}.$$

Совершенно очевидно, что это и есть обобщенная запись знакомого из механики закона центра масс. Следует отмтить, однако, наличие здесь чуждого механике спинового члена, появления которого можно было бы избежать, используя определение тензора момента импульса в форме (3.3.15). Но этот последний подход не вытекает из теории Нётер, а следует из независимых рассуждений.

Покажем еще, что определение (3.4.7), основанное на (3.3.10), дает для интегрального тензора момента импульса то же значение, что и определение, основанное на (3.3.15). В самом деле, используя (3.3.5), получаем путем дифференцирования

$$T^{ij} x^l - T^{lj} x^i = {}^{(\text{кан})}T^{ij} x^l - {}^{(\text{кан})}T^{lj} x^i + 2\mathscr{H}^{jli} +$$
$$+ [(\mathscr{H}^{ijm} + \mathscr{H}^{jim} + \mathscr{H}^{mji})\, x^l - (\mathscr{H}^{ljm} + \mathscr{H}^{jlm} + \mathscr{H}^{mjl})\, x^i]_{,\, m}.$$

Это равенство можно записать и по-другому:

$$\overline{D}^{ilj} = D^{ilj} + \frac{1}{c} [(\mathscr{H}^{ijm} + \mathscr{H}^{jim} + \mathscr{H}^{mji})\, x^l -$$
$$- (\mathscr{H}^{ljm} + \mathscr{H}^{jlm} + \mathscr{H}^{mjl})\, x^i]_{,\, m}. \qquad (3.4.20)$$

Полагая $j = 4$, можно свести суммирование по m от 1 до 4 к суммированию по μ от 1 до 3; тогда вследствие антисимметрии (3.3.5) получаем

$$\overline{D}^{il4} = D^{il4} + \frac{1}{c} [(\mathscr{H}^{i4\mu} + \mathscr{H}^{4i\mu} + \mathscr{H}^{\mu 4i})\, x^l -$$
$$- (\mathscr{H}^{l4\mu} + \mathscr{H}^{4l\mu} + \mathscr{H}^{\mu 4l})\, x^i]_{,\, \mu}.$$

При известных предположениях интегрирование по трехмерному объему от дивергенциального члена дает вклад, равный нулю, чем и достигается искомый результат.

В заключение остается лишь сказать несколько слов о дифференциальном законе сохранения (3.3.25) величины типа заряда. По аналогии с предыдущим анализом, вводя определение

$$Q = \frac{1}{ic} \int\limits_{V_3} j^i\, df_i = \int\limits_{x^4 = \text{const}} \rho d^{(3)} x, \qquad \rho = \frac{1}{c} j^4, \quad (3.4.21)$$

получаем интегральный закон сохранения соответствующей интегральной величины типа заряда

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \qquad (3.4.22)$$

§ 5. Случаи конкретных физических полей

В гл. 2, § 3 и 4, мы исследовали два важных случая систем физических полей в качестве примеров приложения развитой теории, а именно:

1) систему гравитационного, максвелловского и клейн-гордоновского полей и

2) систему гравитационного, максвелловского и дираковского полей.

В настоящем параграфе мы перейдем в этих системах полей к частному случаю пространства-времени Минковского и галилеевых координат.

А. Система, состоящая из максвелловского и клейн-гордоновского полей

Лагранжева плотность этой системы следует из (2.3.1) и равна

$$\Lambda = -\frac{1}{4} B_{mn} B^{mn} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Big[(\Phi^*{}_{,m} + i\alpha A_m \Phi^*) \times \times (\Phi^{,m} - i\alpha A^m \Phi) + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Phi^* \Phi \Big], \qquad (3.5.1)$$

где $\alpha = e/\hbar c$. Соответствующие уравнения поля даются соотношениями (2.3.2), (2.3.6), (2.3.14) и (2.3.15). Четырехвектор плотности электрического тока сохраняет вид (2.3.7). Для него выполняется дифференциальный закон сохранения

$$j^k{}_{,k} = 0, \qquad (3.5.2)$$

следующий из (2.3.23) и вытекающий из калибровочной инвариантности лагранжиана (3.5.1). Таким образом, в отличие от выводов общего анализа, проведенного в предыдущем параграфе, здесь речь идет о сохранении электрического заряда, определяемого формулой (3.4.21); соответствующий интегральный закон сохранения имеет вид (3.4.22).

Симметричный тензор энергии-импульса полной системы полей следует из (2.3.18) и имеет вид (для частнорелятивистской метрики)

$$T_s{}^i = B_{sm}B^{mi} + \frac{1}{4} g_s{}^i B_{mn} B^{mn} - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Big\{ (\Phi^*{}_{,s} + i\alpha A_s \Phi^*) \times \\ \times (\Phi^{,i} - i\alpha A^i \Phi) + (\Phi^{*,i} + i\alpha A^i \Phi^*)(\Phi_{,s} - i\alpha A_s \Phi) - \\ - g_s{}^i \Big[(\Phi^{*,m} + i\alpha A^m \Phi^*)(\Phi_{,m} - i\alpha A_m \Phi) + \\ + \frac{m_0{}^2 c^2}{\hbar^2} \Phi^* \Phi \Big] \Big\}. \quad (3.5.3)$$

Б. Система, состоящая из максвелловского и дираковского полей

Лагранжева плотность этой системы следует из (2.4.1) при использовании (2.4.3) и (2.4.4):

$$\Lambda = -\frac{1}{4} B_{mn}B^{mn} - \frac{\hbar c}{2} \Big\{ \overline{\Psi} \gamma^k (\Psi_{,k} - i\alpha A_k \Psi) - \\ - (\overline{\Psi}_{,k} + i\alpha A_k \overline{\Psi}) \gamma^k \Psi + \frac{2m_0 c}{\hbar} \overline{\Psi} \Psi \Big\}. \quad (3.5.4)$$

Уравнения поля Максвелла имеют привычный вид (2.3.2) и (2.3.6). При этом 4-вектор плотности электрического тока дается выражением (2.4.11). *Уравнения Дирака* имеют теперь вид

$$\gamma^k (\Psi_{,k} - i\alpha A_k \Psi) + \frac{m_0 c}{\hbar} \Psi = 0, \quad (3.5.5)$$

$$(\overline{\Psi}_{,k} + i\alpha A_k \overline{\Psi}) \gamma^k - \frac{m_0 c}{\hbar} \overline{\Psi} = 0. \quad (3.5.6)$$

Закон сохранения электрического заряда описывается соотношениями (3.5.2) и следующими из них. *Симметричный тензор энергии-импульса* полной системы полей следует из (2.4.12) и имеет вид (для частнорелятивистской метрики)

$$T_{ij} = B_{im}B^m{}_j + \frac{1}{4} g_{ij} B_{mn} B^{mn} - \frac{\hbar c}{4} [\overline{\Psi} \{\gamma_i (\Psi_{,j} - i\alpha A_j \Psi) + \\ + \gamma_j (\Psi_{,i} - i\alpha A_i \Psi)\} - \{(\overline{\Psi}_{,i} + i\alpha A_i \overline{\Psi}) \gamma_j + \\ + (\overline{\Psi}_{,j} + i\alpha A_j \overline{\Psi}) \gamma_i\} \Psi]. \quad (3.5.7)$$

Результаты, полученные здесь из общерелятивистской теории переходом к частнорелятивистскому пределу, могут быть также (если это еще не сделано) получены непосредственно из частнорелятивистской теории. При этом, в частности, следует иметь в виду, что при бесконечно малых преобразованиях Лоренца тензоры и биспиноры преобразуются следующим образом:

$$\text{а) } \Phi' = \Phi, \quad \text{б) } \Phi^{*\prime} = \Phi^* \tag{3.5.8}$$

(Φ — волновая функция поля Клейна — Гордона);

$$\text{а) } A_{j'} = A_j - \alpha^i{}_j A_i, \quad \text{б) } A^{j'} = A^j + \alpha^j{}_i A^i \tag{3.5.9}$$

(A_i — потенциал поля Максвелла);

$$\begin{aligned} &\text{а) } \Psi' = \Psi + \frac{i}{4}\alpha^{mn}\mathfrak{S}_{mn}\Psi, \\ &\text{б) } \overline{\Psi}' = \overline{\Psi} - \frac{i}{4}\alpha^{mn}\overline{\Psi}\mathfrak{S}_{mn} \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

(Ψ — волновая функция поля Дирака). Отсюда следуют выражения для *существенных вариаций*:

$$\text{а) } \Delta_s\Phi = 0, \quad \text{б) } \Delta_s\Phi^* = 0; \tag{3.5.11}$$

$$\text{а) } \Delta_s A_j = -\alpha^i{}_j A_i, \quad \text{б) } \Delta_s A^j = \alpha^j{}_i A^i; \tag{3.5.12}$$

$$\text{а) } \Delta_s\Psi = \frac{i}{4}\alpha^{mn}\mathfrak{S}_{mn}\Psi, \quad \text{б) } \Delta_s\overline{\Psi} = -\frac{i}{4}\alpha^{mn}\overline{\Psi}\mathfrak{S}_{mn}. \tag{3.5.13}$$

Здесь [1])

$$\mathfrak{S}_{mn} = \frac{1}{2i}(\gamma_m\gamma_n - \gamma_n\gamma_m). \tag{3.5.14}$$

---

[1]) Этот «матричный тензор спина» часто обозначают буквой σ (см. [24]). — *Прим. перев.*

ГЛАВА 4

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И МЕХАНИКЕ

§ 1. Несобственные (дискретные) преобразования Лоренца

Мы будем здесь исходить из данных гл. 3, § 1. Условие (3.1.6а) охватывает как собственные, так и несобственные преобразования Лоренца. Первые выделяются определяющим их условием (3.1.6б). Тогда несобственные преобразования Лоренца определяются условиями

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ |A_m{}^{i'}| = -1, \\ &\text{б)}\ |A_m{}^{i'}| = +1 \ \text{при}\ A_4{}^{4'} < 0. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Приведем их дальнейшее подразделение.

А. Пространственные отражения.

Для пространственных отражений имеются следующие четыре возможности:

$$\text{а)}\ (A_m{}^{i'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t;$

$$\text{б)}\ (A_m{}^{i'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z, \quad t' = t;$

$$\text{в)}\ (A_m{}^{i'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z, \quad t' = t;$

$$\text{г)} \quad (A_m{}^{i'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = t.$

Если в первых трех случаях производится обращение всякий раз лишь одного из пространственных направлений, то в четвертом происходит отражение всех трех пространственных координат. Следует иметь в виду, что обращение лишь двух пространственных координат сразу не есть несобственное преобразование Лоренца [1]).

Б. Обращение времени

В этом случае матрица преобразования имеет вид

$$\text{г)} \quad (A_m{}^{i'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = -t.$

В. Пространственно-временнóе отражение

Матрица преобразования имеет вид

$$(A_m{}^{i'}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = -t.$

---

[1]) Дело в том, что результат применения последовательно двух операций пространственного отражения [например, (а) и (б)] может быть достигнут и с помощью конечного непрерывного преобразования поворота, что невозможно для каждого из этих преобразований в отдельности.— *Прим. перев.*

Для этого несобственного преобразования Лоренца $|A_m^{i'}| = 1$, однако оно никак не сводится к обычным собственным преобразованиям Лоренца (поворотам), так как вследствие индефинитности метрики невозможно прийти путем лоренцевых поворотов к ситуации с противоположно ориентированным направлением оси времени. Ввиду невозможности достигнуть в инерциальной системе отсчета сверхсветовых скоростей направление времени ограничено лишь внутренностью светового конуса [1]).

§ 2. *Приложение к физическим полям и к механике*

Дискретные преобразования Лоренца по-настоящему приобретают значение лишь в квантовой теории поля, так как соответствующие симметрии и законы сохранения требуют для своего описания операторного исчисления квантовой теории, в то время как нётеровская теория, очевидно, связана с бесконечно малыми (непрерывными) преобразованиями. Несмотря на это, все же интересно исследовать поведение классических полей и при дискретных преобразованиях Лоренца. В духе нётеровской теории мы ставим при этом во главу угла форм-инвариантность лагранжевой плотности, а не ковариантность уравнений поля, которая вытекает из первой, а не наоборот.

Основная задача при нахождении трансформационных свойств геометрических объектов относительно несобственных преобразований Лоренца сводится теперь к тому, чтобы найти принцип, которому надлежит следовать. Можно, например, отыскать с помощью теории представлений группы Лоренца различные возможные *типы геометрических объектов* (тензоров и спиноров) [9], но это еще не дает ответа на вопрос, к какому из этих типов принадлежат реально существующие в природе поля. Оконча-

[1]) Ограничение инерциальными системами отсчета здесь ни при чем. Какие бы силы ни действовали на объект, он ни в один момент своего неинерциального движения также не сможет превзойти (или хотя бы достигнуть) скорость света, если он начал свое движение с досветовой скорости.— *Прим. перев.*

тельное решение этого вопроса может дать только опыт. При этом нам кажется разумным руководствоваться следующим постулатом, который мы и испробуем в качестве путеводной нити:

Форм-инвариантность лагранжевой плотности (*и тем самым и ковариантность основных физических законов*) *должна быть реализована с максимальной математически возможной полнотой.*

Причины математического характера могут поставить границы возможности осуществления этого требования; примером может служить поведение уравнения Вейля при пространственном отражении. С проявлением такой ситуации мы сталкиваемся при необходимости отказа от тех или иных законов сохранения (см., например, [4]).

Что означает, говоря наглядно, форм-инвариантность основ какой-либо теории относительно *пространственного отражения* или *обращения времени*? Дадим на это следующий ответ.

Если физическое явление инвариантно относительно пространственного отражения, значит, два физика, один из которых пользуется левой системой координат («левша»), а другой — правой («правша»), при описании этого явления придут к одному и тому же выражению для соответствующего закона природы.

Если физическое явление инвариантно относительно обращения времени, значит, при задании обращенного во времени конечного состояния в качестве нового начального состояния и новом протекании процесса в качестве конечного состояния возникает обращенное во времени начальное состояние старого процесса. Выражаясь на языке киномеханика, можно сказать, что физическое явление инвариантно при обращении времени, если демонстрация фильма об этом физическом явлении в обратном направлении соответствует тому, что возможно в рамках того же явления.

Очевидно, что инвариантность относительно обращения времени нарушается при участии необратимых процессов (например, если присутствуют эффекты трения).

А. Система, состоящая из максвелловского и клейн-гордоновского полей

Целесообразно записать лагранжеву плотность (3.5.1) в трехмерном виде

$$\Lambda = \frac{1}{2}(E_\mu E^\mu - B_\mu B^\mu) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \times$$
$$\times \left[\Phi^*{}_{,\mu}\Phi^{,\mu} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi^*}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{m_0{}^2c^2}{\hbar^2}\Phi^*\Phi\right] +$$
$$+ \frac{1}{c}A_\mu j^\mu - \varphi\rho + \frac{e^2}{2m_0c^2}(A^\mu A_\mu - \varphi^2)\Phi^*\Phi. \qquad (4.2.1)$$

Тогда из (2.3.7) определяются

3-вектор плотности электрического тока j^μ

и

плотность электрического заряда $\rho = \frac{1}{c}j^4$.

Кроме того, имеют место соотношения[1])

$$E_\mu = -\varphi_{,\mu} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_\mu}{\partial t}, \qquad B_1 = A_{3,2} - A_{2,3} \text{ и т. д.} \qquad (4.2.2)$$

Будет показано, что теория полей Максвелла и Клейна — Гордона инвариантна как относительно пространственных отражений, так и относительно обращения времени.

Пространственные отражения

Чтобы упростить исследование, мы будем как здесь, так и повсюду в дальнейшем рассматривать пространственное отражение (г) (см. § 1).

---

[1]) Вводя поле монадных векторов τ^a, единичных и касательных к конгруэнции линий физического времени рассматриваемой системы, а также используя операцию дуального сопряжения $B^*_{mn} = {}^1/_2 B_{ab}\varepsilon^{abmn}$, можно просто определить напряженности электрического и магнитного полей относительно этой системы отсчета как

$$E^m = B^{mn}\tau_n \quad \text{и} \quad B^m = -B^{mn}_{*}\ \tau_n.$$

Хотя здесь записаны 4-векторы, их временные компоненты в рамках подхода этой главы тождественно равны нулю, пространственные же даются выражениями, совпадающими (с 4.2.2). — *Прим. перев.*

Из определения 4-скорости, а именно $u^i = dx^i/d\tau$, следует

$$u^{\mu'} = -u^{\mu}, \qquad u^{4'} = u^4. \tag{4.2.3}$$

Постулируя инвариантность собственной (т. е. взятой в состоянии покоя) плотности электрического заряда:

$$\rho_0' = \rho_0, \tag{4.2.4}$$

получаем законы преобразования плотности конвекционного электрического тока ${}^{(\text{конв})}j^i = \rho_0 u^i$ и плотности электрического заряда ρ

$$\text{а)}\ {}^{(\text{конв})}j^{\mu'} = -{}^{(\text{конв})}j^{\mu}, \qquad \text{б)}\ \rho' = \rho \tag{4.2.5}$$

(плотность электрического тока проводимости мы здесь рассматривать не будем). Таким образом, для интеграла по нечетномерному объему можно установить операцию пространственного отражения — электрический заряд является инвариантом:

$$Q' = Q. \tag{4.2.6}$$

Из требования инвариантности для (4.2.1) получаем

$$A_{\mu'} = -A_{\mu}, \qquad \varphi' = \varphi. \tag{4.2.7}$$

Отсюда ввиду (4.2.2) следуют соотношения

$$E_{\mu'} = -E_{\mu}, \qquad B_{\mu'} = B_{\mu}, \tag{4.2.8}$$

так что напряженность магнитного поля ведет себя как псевдовектор (аксиальный вектор).

Затем из (4.2.1) и (2.3.7) при учете (4.2.5) находим следующий закон преобразования волновой функции:

$$\text{а)}\ \Phi'(x^{i'})\,\alpha_P\Phi(x^i), \qquad \text{б)}\ \Phi^{*\prime}(x^{i'}) = \alpha_P{}^*\Phi^*(x^i); \tag{4.2.9}$$

здесь α_P — константа, $\alpha_P{}^*\alpha_P = 1$.

Обращение времени

Из принципа соответствия с нерелятивистской теорией следует принять закон преобразования собственного времени

$$\tau' = -\tau, \tag{4.2.10}$$

из которого следуют формулы для преобразования 4-скорости

$$u^{\mu'} = -u^{\mu}, \qquad u^{4'} = u^4. \tag{4.2.11}$$

Требуя инвариантности собственной плотности электрического заряда

$$\rho_0' = \rho_0, \tag{4.2.12}$$

получаем

$$^{(\text{конв})}j^{\mu'} = -{}^{(\text{конв})}j^{\mu}, \qquad \rho' = \rho, \tag{4.2.13}$$

что дает для электрического заряда свойство инвариантности

$$Q' = Q. \tag{4.2.14}$$

Из требования инвариантности для (4.2.1) получаем соотношения

$$A_{\mu'} = -A_{\mu}, \qquad \varphi' = \varphi, \tag{4.2.15}$$

откуда вытекают законы преобразования электрической и магнитной напряженностей

$$E_{\mu'} = E_{\mu}, \qquad B_{\mu'} = -B_{\mu}. \tag{4.2.16}$$

Из (2.3.7) следуют верные законы преобразования для 4-вектора плотности электрического тока, т. е. (4.2.13), если волновые функции преобразуются по закону

$$\Phi'(x^{i'}) = \alpha_T \Phi^*(x^i); \tag{4.2.17}$$

здесь α_T — константа, $\alpha_T^* \alpha_T = 1$. Таким образом, мы имеем перекрестное («антилинейное») преобразование для волновой функции.

Б. Система, состоящая из максвелловского и дираковского полей

Запишем лагранжеву плотность (3.5.4) в трехмерных обозначениях:

$$\Lambda = \frac{1}{2}(E_\mu E^\mu - B_\mu B^\mu) - \frac{\hbar c}{2}\Big\{\overline{\Psi}\gamma^\mu(\Psi_{,\mu} - i\alpha A_\mu \Psi) - (\overline{\Psi}_{,\mu} + i\alpha A_\mu \overline{\Psi})\gamma^\mu \Psi + \frac{1}{c}\overline{\Psi}\gamma^4\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar}\varphi\Psi\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar}\varphi\overline{\Psi}\right)\gamma^4\Psi + \frac{2m_0 c}{\hbar}\overline{\Psi}\Psi\Big\}. \tag{4.2.18}$$

Тогда 4-вектор плотности электрического тока дается формулой (2.4.11)

$$j^\mu = iec\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad \rho = ie\overline{\Psi}\gamma^4\Psi = e\Psi^+\Psi. \qquad (4.2.19)$$

Будем считать, что матрицы Дирака инвариантны и относительно несобственных преобразований Лоренца:

$$\gamma'_{k'} = \gamma_k. \qquad (4.2.20)$$

(Штрих при индексе соответствует эффекту преобразования, связанному с тензорной природой этого индекса, штрих же у самой буквы отражает эффект преобразования за счет явно не выписанных спинорных индексов.)

Покажем теперь, что теория максвелловского и дираковского полей также инвариантна относительно пространственного отражения и обращения времени.

Пространственные отражения

Инвариантность лагранжевой плотности (4.2.18) обеспечивается законом преобразования

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \Psi'(x^{i'}) = \alpha_P\gamma_4\Psi(x^i), \\ &\text{б)}\ \overline{\Psi}'(x^{i'}) = -\alpha_P{}^*\overline{\Psi}(x^i)\gamma_4, \end{aligned} \qquad (4.2.21)$$

где α_P — константа, $\alpha_P{}^*\alpha_P = 1$. Тем же обеспечиваются правильные трансформационные свойства (4.2.5) 4-вектора плотности электрического тока (4.2.19).

Отметим, что при двукратном отражении имеет место преобразование

$$\Psi''(x^{i''}) = -\alpha_P{}^2\Psi(x^i). \qquad (4.2.22)$$

Обращение времени

Описание обращения времени в теории поля Клейна — Гордона может быть сопоставлено с *антилинейным* (перекрестным) преобразованием

$$\Psi'(x^{i'}) = \mathfrak{A}\overline{\Psi}^T(x^i) \qquad (4.2.23)$$

($\mathfrak{A}$ — квадратная матрица), откуда следует

$$\overline{\Psi}'(x^{i'}) = \Psi^T(x^i)\,\beta\mathfrak{A}^+\beta. \qquad (4.2.24)$$

Индекс T обозначает здесь транспонирование. Требование инвариантности лагранжевой плотности (4.2.18) приводит к матричным условиям

$$\begin{aligned} &\text{а) } \mathfrak{A}^+\beta\mathfrak{A}=\beta, \quad \text{б) } \beta\mathfrak{A}^+\beta\gamma_\mu\mathfrak{A}=-\gamma_\mu{}^T, \\ &\text{в) } \beta\mathfrak{A}^+\beta\gamma_4\mathfrak{A}=\gamma_4{}^T. \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

Присутствие в формулах транспонированных матриц наводит на мысль воспользоваться при решении рассматриваемой задачи специальным представлением *матриц Дирака*. Примем за стандартное представление следующий набор матриц:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu &= -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_4 &= i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\beta, \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

для которого

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\gamma_1{}^T = \gamma_1{}^+, \quad \gamma_2 = \gamma_2{}^T = \gamma_2{}^+, \\ \gamma_3 &= -\gamma_3{}^T = \gamma_3{}^+, \quad \gamma_4 = \gamma_4{}^T = -\gamma_4{}^+. \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

При этом *матрицы Паули* имеют вид

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2=\pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.2.28}$$

В таком представлении условия (4.2.25б) и (4.2.25в) записываются в виде

$$\begin{aligned} \beta\mathfrak{A}^+\beta\gamma_1\mathfrak{A} &= \gamma_1, \quad \beta\mathfrak{A}^+\beta\gamma_2\mathfrak{A} = -\gamma_2, \\ \beta\mathfrak{A}^+\beta\gamma_3\mathfrak{A} &= \gamma_3, \quad \beta\mathfrak{A}^+\beta\gamma_4\mathfrak{A} = \gamma_4. \end{aligned}$$

Как можно проверить подстановкой, выбор

$$\mathfrak{A}=\alpha_T\gamma_1\gamma_3\beta, \quad \mathfrak{A}^+=\alpha_T{}^*\beta\gamma_3\gamma_1 \tag{4.2.29}$$

(α_T — константа, $\alpha_T{}^*\alpha_T=1$) удовлетворяет всем условиям. Тогда преобразование обращения времени в стандартном представлении матриц Дирака имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi'(x^{i\prime}) &= \alpha_T\gamma_1\gamma_3(\Psi^+(x^i))^T, \\ \overline{\Psi}'(x^{i\prime}) &= \alpha_T{}^*\Psi^T(x^i)\gamma_3\gamma_1\beta. \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

Повторное обращение времени дает

$$\Psi''(x^{i''}) = -\Psi(x^i). \qquad (4.2.31)$$

В. Релятивистская механика материальной точки

Представляет интерес также исследование преобразований пространственного отражения и обращения времени в релятивистской механике материальной точки (трансформационные свойства нерелятивистских величин входят сюда как предельные случаи). Обратимся при этом к эйнштейновскому уравнению движения

$$m_0 \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{e}{c} B^i{}_j \frac{dx^j}{d\tau} \qquad (4.2.32)$$

и к эквивалентному ему *уравнению Гамильтона — Якоби*

$$\left(W_{,i} - \frac{e}{c} A_i\right)\left(W^{,i} - \frac{e}{c} A^i\right) + m_0{}^2c^2 = 0. \qquad (4.2.33)$$

В трехмерной записи эти уравнения имеют вид

$$m_0 \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{e}{c} B^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} + \frac{e}{c} B^\mu{}_4 \frac{dx^4}{d\tau}, \qquad (4.2.34\text{а})$$

$$m_0 \frac{d^2x^4}{d\tau^2} = \frac{e}{c} B^4{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}, \qquad (4.2.34\text{б})$$

$$\left(W_{,\mu} - \frac{e}{c} A_\mu\right)\left(W^{,\mu} - \frac{e}{c} A^\mu\right) - \\ - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial W}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m_0{}^2c^2 = 0. \qquad (4.2.35)$$

При этом имеется в виду соответствие

$$(B_{mn}) = \left(\begin{array}{c|c} B_{\mu\nu} & E_\mu \\ \hline -E_\nu & 0 \end{array}\right) = \\ = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & B^3 & -B^2 & \\ -B^3 & 0 & B^1 & E_\mu \\ B^2 & -B^1 & 0 & \\ \hline & -E_\nu & & 0 \end{array}\right). \qquad (4.2.36)$$

Пространственные отражения

Рассматривая преобразования (4.2.3), (4.2.7) и (4.2.8), сразу же обнаруживаем инвариантность обоих уравнений (4.2.34). Инвариантность же (4.2.35) обусловливается законом преобразования

$$W'(x^{i'}) = W(x^i). \tag{4.2.37}$$

При учете связи между каноническим импульсом p_i и функцией действия W

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} \tag{4.2.38}$$

можно получить законы преобразования

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ x^{\mu'}(t) = -x^{\mu}(t), \quad &&\text{б)}\ t' = t, \\ &\text{в)}\ p_{\mu'}(t) = -p_{\mu}(t), \quad &&\text{г)}\ p_{4'}(t) = p_4(t). \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

Примем, что масса покоя m_0 является инвариантом относительно пространственного отражения; тогда вследствие (4.2.3) эти же формулы сохранят силу и для механического импульса

$$^{(\text{мех})}p_i = m_0 u_i. \tag{4.2.40}$$

Для орбитального тензора момента импульса

$$d_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \tag{4.2.41}$$

получаем

$$d_{\mu'\nu'}(t) = d_{\mu\nu}(t). \tag{4.2.42}$$

Итак, в силу инвариантности уравнений движения относительно пространственного отражения величины (4.2.39а) и (4.2.39б) также являются решениями этих уравнений, если исходные величины были их решениями.

Обращение времени

Подобным же образом с помощью (4.2.11), (4.2.15) и (4.2.16) подтверждается инвариантность уравнений (4.2.34) относительно обращения времени. Инвариантность уравнений (4.2.35) можно обеспечить, задавая закон преобразования

$$W'(x^{i'}) = -W(x^i). \tag{4.2.43}$$

ЧАСТЬ Б

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

ГЛАВА 5

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИММЕТРИИ В ЧАСТНОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

§ 1. *Классическая и квантовая теория поля*

В этой главе мы рассматриваем на базе квантовой теории поля принципиальную сторону постановки вопроса, изложенной в гл. 3 для случая классической теории поля. Тем самым гл. 3 и 5 дополняют друг друга. Мы попытаемся здесь как можно больше приблизиться к подходу, использованному в гл. 3, хотя и столкнемся вскоре с определенными трудностями. Так как в гл. 3, § 1, не делалось никаких специальных предположений о c- или q-числовом характере волновых функций при рассмотрении собственных преобразований Лоренца, мы можем полностью перенести сюда результаты этого параграфа.

В любой классической теории входящие в нее зависимые переменные удовлетворяют аксиоме перестановочности и являются, таким образом, c-числами, к чему нас приучили ньютонова механика и классическая теория поля. В квантовой теории, как известно, имеет место отказ от этой аксиомы. Основные зависимые переменные, вообще говоря, уже не коммутируют друг с другом и поэтому называются q-числами, или *операторами*. Выражения для *коммутаторов* или *антикоммутаторов* многих из них имеют характерный вид и не обращаются в нуль. Такие соотношения, называемые перестановочными, встречаются как в квантовой механике, так и в квантовой теории поля;

ЧАСТЬ Б

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

ГЛАВА 5

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИММЕТРИИ В ЧАСТНОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

§ 1. *Классическая и квантовая теория поля*

В этой главе мы рассматриваем на базе квантовой теории поля принципиальную сторону постановки вопроса, изложенной в гл. 3 для случая классической теории поля. Тем самым гл. 3 и 5 дополняют друг друга. Мы попытаемся здесь как можно больше приблизиться к подходу, использованному в гл. 3, хотя и столкнемся вскоре с определенными трудностями. Так как в гл. 3, § 1, не делалось никаких специальных предположений о c- или q-числовом характере волновых функций при рассмотрении собственных преобразований Лоренца, мы можем полностью перенести сюда результаты этого параграфа.

В любой классической теории входящие в нее зависимые переменные удовлетворяют аксиоме перестановочности и являются, таким образом, c-числами, к чему нас приучили ньютонова механика и классическая теория поля. В квантовой теории, как известно, имеет место отказ от этой аксиомы. Основные зависимые переменные, вообще говоря, уже не коммутируют друг с другом и поэтому называются q-числами, или *операторами*. Выражения для *коммутаторов* или *антикоммутаторов* многих из них имеют характерный вид и не обращаются в нуль. Такие соотношения, называемые перестановочными, встречаются как в квантовой механике, так и в квантовой теории поля;

они имеют характер законов природы и фигурируют наравне с уравнениями движения.

Известно, однако, что измеряемые значения величины должны выражаться вещественными числами. Поскольку операторы квантовой теории, которыми, вообще говоря, представляются физические величины, не являются вещественными числами и поэтому не могут быть непосредственно измерены, квантовая теория нуждается еще в одном фундаментальном понятии, служащем для сопоставления операторам вещественных чисел. Речь идет о понятии *вектора состояния* в гильбертовом пространстве, который обозначается как

$$\text{кет-вектор } |\,\Phi\,\rangle \quad \text{(кет-пространство)},$$

которому через операцию эрмитова сопряжения ($+$) сопоставляется дуальный ему вектор состояния, а именно

$$\text{бра-вектор } \langle\,\Phi\,| = |\,\Phi\,\rangle^{+} \quad \text{(бра-пространство)}.$$

Скалярное произведение векторов двух различных состояний есть комплексное число

$$\langle\Psi\,|\cdot|\,\Phi\rangle \equiv \langle\Psi\,|\,\Phi\rangle.$$

Если рассматриваемая квантовая теория допускает вероятностную интерпретацию, то произвольное состояние нормируется по правилу

$$\langle\Phi\,|\,\Phi\rangle = 1 \text{ (положительно определенная метрика).} \tag{5.1.1}$$

Некоторому произвольному оператору $\mathfrak{A}$ по правилу

$$\langle\Psi\,|\,\mathfrak{A}\,|\,\chi\rangle = a \tag{5.1.2}$$

сопоставляется комплексное число a, так как величина $|\,\Phi\,\rangle = \mathfrak{A}\,|\,\chi\,\rangle$ имеет природу кет-вектора. Если наш оператор эрмитов, то конструкция

$$\langle\Phi\,|\,\mathfrak{A}\,|\,\Phi\rangle = a = a^{*} \tag{5.1.3}$$

есть вещественное число. Эрмитов оператор, соответствующий физической величине, поддающейся наблюдению, называется наблюдаемой.

В нерелятивистской квантовой механике основные наблюдаемые суть

оператор положения (*координаты*) $\mathfrak{Q}_A$

и

$$\text{оператор импульса } \mathfrak{P}_A.$$

Из них строится *оператор Гамильтона* (гамильтониан)

$$H = H(\mathfrak{Q}_A, \mathfrak{P}_A, t),$$

причем время t фигурирует как параметр.

В квантовой теории поля нам приходится иметь дело с системой независимых *полевых операторов*

$$u_A(x^i) \qquad (A = 1, 2, \ldots)$$

— основных в этой теории величин. Галилеевы координаты x^i играют здесь роль параметров. Если теория поля формулируется таким образом, то говорят, что она локальна в противоположность нелокальным теориям поля, формулируемым различными способами, например с построением функционалов путем интегрирования и т. п.

В определенном смысле имеет место формальное соответствие

$$t \to x^i,$$
$$\mathfrak{Q}_A(t) \to u_A(x^i) \equiv u_A(x^\mu, t).$$

Последнее соотношение может быть истолковано как подход к квантовой теории поля как к квантовомеханической системе с несчетно-бесконечным числом степеней свободы ввиду непрерывного характера координатного пространства, описываемого координатами x^μ.

Так как, вообще говоря, $u_A{}^+ \neq u_A$ (если задача не сводится к частному случаю эрмитова поля), часто бывает целесообразно рассматривать совместно полевые операторы и эрмитово сопряженные им операторы [1]):

$$\{U_\Omega\} = \{u_A, u_A{}^+\}.$$

Индексы Ω, Γ, Λ меняются в пределах размерностей пространства полевых операторов и соответствующих эрмитово сопряженных операторов.

---

[1]) Очевидно, что комплексная переменная равноценна двум вещественным переменным, а так как комплексное сопряжение не является линейной операцией, то получающееся удвоение числа степеней свободы удобно отразить в указании исходной комплексной переменной и сопряженной ей. Положение совершенно аналогично в случае применения эрмитова сопряжения.— *Прим. перев.*

В лагранжевой формулировке теории поля *оператор лагранжевой плотности*

$$\Lambda = \Lambda(U_\Omega,\ U_{\Omega,\, i},\ x^i) \qquad (5.1.4),$$

играет центральную роль. Он связан с *оператором Лагранжа* (лагранжианом) L следующим образом:

$$L(t) = \int\limits_{V_3} \Lambda(U_\Omega,\ U_{\Omega,\, i},\ x^i)\, d^{(3)}x. \qquad (5.1.5)$$

Из физических соображений требуется эрмитовость L:

$$L = L^+, \qquad (5.1.6)$$

ибо в противном случае важные физические операторы конструируемые из L, не будут наблюдаемыми.

Это требование эрмитовости автоматически выполняется при эрмитовости лагранжевой плотности:

$$\Lambda = \Lambda^+, \qquad (5.1.7)$$

хотя постулату (5.1.6) удовлетворяют и неэрмитовы лагранжевы плотности, если их можно «исправить» добавлением подходящего дивергенциального выражения. Все же формально очень удобно принять соотношение (5.1.7), так как при этом мы имеем симметрично построенную теорию, в которой весьма просто производится переход от исходных уравнений к соответствующим эрмитово сопряженным уравнениям поля.

§ 2. *Лагранжев формализм, теорема Нётер, дифференциальные и интегральные законы сохранения*

Внешне оператор лагранжевой плотности (5.1.4) имеет тот же вид, что и классическая лагранжева плотность. Но если последняя может обычным образом дифференцироваться по полевым функциям и их производным, как это и делалось в предыдущих главах, то дифференцирование оператора по оператору уже проблематично ввиду того, что в общем случае входящие сюда операторы не коммутируют друг с другом. Это проще всего пояснить на примере операторной функции

$$f = \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2,$$

для которой можно получить соотношение

$$df = \mathfrak{A}(d\mathfrak{A}) + (d\mathfrak{A})\mathfrak{A},$$

откуда, вообще говоря, отнюдь не следует соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}} = 2\mathfrak{A}.$$

В литературе имеются различные попытки определения разумного выражения для частного дифференцирования по оператору, но все они представляются нам более или менее неудовлетворительными. Наиболее практичным было бы следующее правило, которого мы и станем здесь придерживаться [1]).

Вычисления проводятся так же, как в классической теории, после чего множители расставляются по правилу нормального произведения.

Нормальное произведение, которое обозначается обрамляющими его двоеточиями, определено таким образом, что при перемножении под его знаком произведений полевых операторов, куда входит ряд множителей, подразумевается изменение порядка следования операторов уничтожения и операторов рождения. По определению операторы уничтожения переносятся в правую часть произведения, а операторы рождения — в левую. В ходе такой перестановки следует принять во внимание появление знакового множителя, соответствующего перестановочным соотношениям операторов. Нормальное произведение от суммы равно сумме нормальных произведений.

С учетом этих замечаний мы перепишем основные результаты гл. 3, § 2 и 5, соответственно требованиям квантовой теории поля.

---

[1]) Для величин, возникающих при анализе теоремы Нётер, характерно суммирование по компонентам сомножителей [см., например, (1.6.18)]. Если при этом берутся производные по операторам, то и умножение полученных символических выражений производится на операторы, которые занимают «опустевшие» при дифференцировании места (так, последнее соотношение можно исправить, обозначая «опустевшие места» точкой: $(\partial f/\partial\,\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}\cdot + \cdot\mathfrak{A}$). Однако это позволяет лишь частично уйти от трудностей, не снимая проблемы, указанной здесь автором.— *Прим. перев.*

Полная вариация оператора лагранжевой плотности на основании (3.2.3) записывается как

$$\Delta\Lambda = :\frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}\delta U_\Omega: + [:\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\delta U_\Omega:]_{,a} + :\frac{\delta\Lambda}{\delta U_\Omega}(\Delta_s U_\Omega - U_{\Omega,m}\xi^m): +$$
$$+ [:\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\Delta_s U_\Omega: + \xi^m:(\Lambda g_m{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}U_{\Omega,m}):]_{,a}, \quad (5.2.1)$$

причем для полной вариации интеграла действия при новом понимании величины $\Delta\Lambda$ сохраняет силу уравнение (3.2.4):

$$\Delta W = \frac{1}{c}\int\limits_{V_4}\Delta\Lambda d^{(4)}x. \quad (5.2.2)$$

Сохраняет внешне свой вид (3.2.5) и формулировка принципа экстремума действия Гамильтона.

Исключая появление дивергенциального члена, можно придать определению (3.2.7) *преобразования симметрии* вид

$$\Delta\Lambda = \Lambda(\widetilde{U}_{\Omega'}, \widetilde{U}_{\Omega',i'}, x^{i'}) - \Lambda(U_\Omega, U_{\Omega,i}, x^i) = 0 \quad (5.2.3)$$

(форм-инвариантность лагранжевой плотности). Для существенной вариации сохраняют силу те же формулы, которые имели место в классической теории, в частности формулы (3.5.11) — (3.5.13).

Дифференциальные законы сохранения (3.3.1) и (3.3.2) тогда имеют вид ($\delta\Theta^a = 0$)

$$j^a{}_{,a} = [e_\Omega{}^\Gamma:\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}U_\Gamma:]_{,a} = 0, \quad (5.2.4)$$

$$[:\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}\Delta_s U_\Omega + \xi^m(\Lambda g_m{}^a - \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}U_{\Omega,m}) + \Theta\xi^a:]_{,a} = 0. \quad (5.2.5)$$

Канонический тензор энергии-импульса (3.3.6) принимает вид

$$^{(\text{кан})}T_t{}^a = :\frac{\partial\Lambda}{\partial U_{\Omega,a}}U_{\Omega,t}: - \Lambda g_t{}^a. \quad (5.2.6)$$

Здесь Λ продолжает пониматься в смысле *нормального произведения.* Величины (3.3.5) записываются в виде

$$\mathscr{H}^a{}_t{}^m = :\overset{U}{\Pi}{}^{\Omega a}S_\Omega{}^{\Gamma m}{}_t U_\Gamma:. \quad (5.2.7)$$

Эти выражения привлекаются для построения *симметричного тензора энергии-импульса*, который сохраняет здесь внешне обычную структуру (3.3.9а)

$$T_s{}^i = {}^{(\text{кан})}T_s{}^i + g_{sk}(\mathscr{H}^{kim} + \mathscr{H}^{ikm} + \mathscr{H}^{mik})_{,\,m}. \qquad (5.2.8)$$

Подобным же образом остаются внешне неизменными и оба определения *тензора момента импульса* (3.3.10) и (3.3.15)

$$D^{mni} = \frac{1}{c}\left({}^{(\text{кан})}T^{mi}x^n - {}^{(\text{кан})}T^{ni}x^m + 2\mathscr{H}^{inm}\right), \qquad (5.2.9)$$

$$\bar{D}^{mni} = \frac{1}{c}\left(T^{mi}x^n - T^{ni}x^m\right). \qquad (5.2.10)$$

Формально на квантовый случай можно перенести и запись *дифференциальных законов сохранения* энергии и импульса (3.3.7) и (3.3.9б), а также момента импульса и закона центра масс (3.3.11) и (3.3.16):

$$\text{а)}\ {}^{(\text{кан})}T^{ki}{}_{,\,i} = 0, \qquad \text{б)}\ T^{ki}{}_{,\,i} = 0, \qquad (5.2.11)$$

$$\text{а)}\ D^{mni}{}_{,\,i} = 0, \qquad \text{б)}\ \bar{D}^{mni}{}_{,\,i} = 0. \qquad (5.2.12)$$

Интегральные законы сохранения 4-импульса и момента импульса (вместе с законом центра масс) выглядят, как прежде:

$$\text{а)}\ \frac{dP_s}{dt} = 0, \qquad \text{б)}\ \frac{dD^{il}}{dt} = 0. \qquad (5.2.13)$$

Сохраняющиеся величины имеют при этом знакомый вид, будучи, однако, построены по правилу нормального произведения операторов:

$$P_s = -\frac{1}{c}\int\limits_{x^4=\text{const}} {}^{(\text{кан})}T_s{}^4 d^{(3)}x = -\frac{1}{c}\int\limits_{x^4=\text{const}} T_s{}^4 d^{(3)}x, \qquad (5.2.14)$$

$$D^{il} = \int\limits_{x^4=\text{const}} D^{il4} d^{(3)}x = \int\limits_{x^4=\text{const}} \bar{D}^{il4} d^{(3)}x. \qquad (5.2.15)$$

Точно так же и для сохраняющейся величины типа заряда (3.4.21)

$$Q = \frac{1}{ic}\int\limits_{V_3} j^i\, df_i = \int\limits_{x^4=\text{const}} \rho d^{(3)}x \qquad (5.2.16)$$

имеет место интегральный закон сохранения в обычной форме (3.4.22)

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \qquad (5.2.17)$$

§ 3. Конечное унитарное преобразование

Рассмотренные нами до сих пор преобразования можно связать с *унитарными преобразованиями* квантовой теории поля, причем полевой оператор U_Ω и вектор состояния $|\Phi\rangle$ или $\langle\Phi|$ преобразуются с помощью унитарного оператора $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}^+)^{-1}$:

$$\bar{U}_\Omega = \mathfrak{U} U_\Omega \mathfrak{U}^+ \tag{5.3.1}$$

и

$$|\bar{\Phi}\rangle = \mathfrak{U}|\Phi\rangle \text{ или } \langle\bar{\Phi}| = \langle\Phi|\mathfrak{U}^+. \tag{5.3.2}$$

Отсюда непосредственно видно, что скалярное произведение, состоящее из кет- и бра-векторов, инвариантно относительно унитарного преобразования:

$$\langle\bar{\Psi}|\bar{\Phi}\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle. \tag{5.3.3}$$

Часто особый интерес представляют те унитарные преобразования, оператор которых постоянен в пространстве и времени:

$$\mathfrak{U}_{,m} = 0, \tag{5.3.4}$$

что, в частности, имеет место, если $\mathfrak{U}$ строится из сохраняющихся величин. Тогда из (5.3.1) следует, что частная производная полевого оператора подчиняется тому же закону преобразования, что и исходный оператор:

$$\bar{U}_{\Omega,m} = \mathfrak{U} U_{\Omega,m} \mathfrak{U}^+. \tag{5.3.5}$$

Функциональная структура (5.1.4) лагранжевой плотности приводит тогда к равенству

$$\bar{\Lambda} = \mathfrak{U}\Lambda(U_\Omega, U_{\Omega,i}, x^i)\,\mathfrak{U}^+ = \Lambda(\bar{U}_\Omega, \bar{U}_{\Omega,i}, x^i), \tag{5.3.6}$$

т. е. к форм-инвариантности лагранжевой плотности.

Интегрируя это равенство по 4-объему, получаем

$$\mathfrak{U}\left(\int_{V_4} (U_\Omega, U_{\Omega,i}, x^i)\, d^{(4)}x\right)\mathfrak{U}^+ = \int_{V_4} \Lambda(\bar{U}_\Omega, \bar{U}_{\Omega,i}, x^i)\, d^{(4)}x.$$

Отсюда путем варьирования (оператор $\mathfrak{U}$ как константа движения не подвергается варьированию) находим

$$\mathfrak{U}\left(\int_{V_4} \delta\Lambda(U_\Omega, U_{\Omega,i}, x^i)\, d^{(4)}x\right)\mathfrak{U}^+ = \int_{V_4} \delta\Lambda(\bar{U}_\Omega, \bar{U}_{\Omega,i}, x^i)\, d^{(4)}x.$$

Вследствие соотношения

$$\delta\overline{U}_\Omega = \mathfrak{U}\delta U_\Omega \mathfrak{U}^+$$

условия на границе продолжают выполняться и для преобразованных величин, так что для них сохраняет силу и принцип Гамильтона. Это приводит к использованию прежней лагранжевой плотности в уравнениях Лагранжа для преобразованных величин:

$$\frac{\delta\Lambda(\overline{U}_\Omega, \overline{U}_{\Omega, i}, x^i)}{\delta\overline{U}_\Omega} = 0. \qquad (5.3.7)$$

Следовательно, уравнения поля имеют одинаковый вид в обеих системах переменных.

Сравним теперь соотношения (5.3.1) и (5.3.5), справедливые для унитарных преобразований, с соответствующими соотношениями для преобразований симметрии. Это приводит к отождествлению

$$\overline{U}_\Omega = \overline{U}_\Omega(x^i) = \mathfrak{U} U_\Omega(x^i)\,\mathfrak{U}^+ = \widetilde{U}_{\Omega'}(x^i), \qquad (5.3.8)$$

$$\overline{U}_{\Omega, i} = \overline{U}_{\Omega, i}(x^i) = \mathfrak{U} U_{\Omega, i}(x^i)\,\mathfrak{U}^+ = \widetilde{U}_{\Omega', i'}(x^i) = \frac{\partial \widetilde{U}_{\Omega'}(x^i)}{\partial x^i}. \qquad (5.3.9)$$

Здесь необходимо помнить о расстановке аргументов и штрихов. Тогда из *преобразования симметрии* (5.2.3) следует равенство

$$\Lambda(\overline{U}_\Omega(x^{i'}), \overline{U}_{\Omega, i}(x^{i'}), x^{i'}) = \Lambda(U_\Omega(x^i), U_{\Omega, i}(x^i), x^i),$$

т. е.

$$\mathfrak{U}\Lambda(U_\Omega(x^{i'}), U_{\Omega, i}(x^{i'}), x^{i'})\,\mathfrak{U}^+ = \Lambda(U_\Omega(x^i), U_{\Omega, i}(x^i), x^i),$$

что записывается в виде

$$\mathfrak{U}\Lambda(x^{i'})\,\mathfrak{U}^+ = \Lambda(x^i). \qquad (5.3.10)$$

Итак, для преобразований симметрии имеем

$$[\mathfrak{U}, \Lambda(x^i)] \neq 0. \qquad (5.3.11)$$

§ 4. Бесконечно малые унитарные преобразования

Бесконечно малые унитарные преобразования описываются инфинитезимальным оператором $\mathfrak{B}$, связанным с $\mathfrak{U}$ соотношением

$$\mathfrak{U} = 1 + i\mathfrak{B}. \tag{5.4.1}$$

Так как оператор $\mathfrak{U}$ унитарен, оператор $\mathfrak{B}$ должен быть эрмитовым:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^+. \tag{5.4.2}$$

Отсюда имеем

$$\mathfrak{U}^+ = 1 - i\mathfrak{B}. \tag{5.4.3}$$

Из (5.3.1) и (5.3.2) следуют трансформационные свойства при бесконечно малых преобразованиях:

$$\overline{U}_\Omega = U_\Omega + i\,[\mathfrak{B}, U_\Omega], \tag{5.4.4}$$

$$|\overline{\Phi}\rangle = |\Phi\rangle + i\mathfrak{B}\,|\Phi\rangle, \quad \text{или} \quad \langle\overline{\Phi}| = \langle\Phi| - i\,\langle\Phi|\,\mathfrak{B}. \tag{5.4.5}$$

В гл. 2 § 1 мы рассмотрели в нерелятивистской механике материальных точек канонические (в частности, бесконечно малые) преобразования. Теория канонических преобразований может быть построена и для квантовой механики или квантовой теории поля. При этом, однако, внешне лоренц-ковариантность аппарата нарушается вследствие выделения времени. Фигурирующий в таком подходе бесконечно малый генератор I связан с инфинитезимальным оператором $\mathfrak{B}$ равенством

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{\hbar} I, \tag{5.4.6}$$

что приводит к следующей записи законов (5.4.4) и (5.4.5):

$$\overline{U}_\Omega = U_\Omega - \frac{i}{\hbar}\,[I, U_\Omega], \tag{5.4.7}$$

или

$$|\overline{\Phi}\rangle = |\Phi\rangle - \frac{i}{\hbar} I\,|\Phi\rangle, \quad \text{или} \quad \langle\overline{\Phi}| = \langle\Phi| + \frac{i}{\hbar}\,\langle\Phi|\,I. \tag{5.4.8}$$

Рассмотрим теперь специально унитарные преобразования, для которых $\mathfrak{V}$, а значит, и I суть константы движения [в механике преобразования симметрии (2.1.32) и (2.1.33) обладали этим интересным свойством и приводили к постоянному во времени бесконечно малому генератору (2.1.35)]. Пусть I строится из некоторой плотности $\mathcal{J}$ по правилу

$$I = \int\limits_{x^4=\text{const}} \mathcal{J}(x^i)\, d^{(3)}x. \tag{5.4.9}$$

Тогда в силу постоянства

$$I_{,m} = 0 \tag{5.4.10}$$

получаем из (5.4.7) выражение для частной производной полевого оператора

$$\overline{U}_{\Omega,\, m} = U_{\Omega,\, m} - \frac{i}{\hbar}\,[I,\, U_{\Omega,\, m}]. \tag{5.4.11}$$

Благодаря виду функциональной структуры (5.1.4) лагранжевой плотности находим отсюда

$$\overline{\Lambda} = \Lambda - \frac{i}{\hbar}\,[I,\, \Lambda] = \Lambda\,(\overline{U}_{\Omega},\, \overline{U}_{\Omega,\, i},\, x^i). \tag{5.4.12}$$

В случае бесконечно малых преобразований ввиду (5.4.7) отождествление, даваемое соотношениями (5.3.8) и (5.3.9), записывается в виде

$$\overline{\Delta} U_{\Omega} \equiv \overline{U}_{\Omega}(x^i) - U_{\Omega}(x^i) = \widetilde{U}_{\Omega'}(x^i) - U_{\Omega}(x^i) =$$

$$= \Delta_L U_{\Omega} + \delta U_{\Omega} = -\frac{i}{\hbar}\,[I,\, U_{\Omega}], \tag{5.4.13}$$

$$\overline{\Delta} U_{\Omega,\, i} \equiv \overline{U}_{\Omega,\, i}(x^i) - U_{\Omega,\, i}(x^i) = \widetilde{U}_{\Omega',\, i'}(x^i) - U_{\Omega,\, i}(x^i) =$$

$$= \Delta_L U_{\Omega,\, i} + \delta U_{\Omega,\, i} = -\frac{i}{\hbar}\,[I,\, U_{\Omega,\, i}]. \tag{5.4.14}$$

Это дает

$$(\overline{\Delta} U_{\Omega})_{,\, i} = \overline{\Delta} U_{\Omega,\, i} \tag{5.4.15}$$

в согласии с полученным ранее выводом, что локальная вариация перестановочна с операцией частного дифференцирования по координатам. Напротив, тот факт, что существенная вариация не коммутирует с частным дифференцированием, можно толковать как указание на неравенство

$$\overline{U}_{\Omega} \neq \widetilde{U}_{\Omega'}(x^{i'}),$$

при котором подобное отождествление невозможно.

В своем дальнейшем анализе мы будем исходить из полной вариации интеграла действия (5.2.2), которой при удовлетворении уравнений поля и учете определений (5.2.6) и (5.2.9), а также дальнейших соотношений, в частности (5.2.15), можно придать вид

$$\Delta W = \frac{1}{ic} \int\limits_{(V_4)} \Big[: \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega i} \delta U_{\Omega} : + \frac{c}{2} D_{nm}{}^{i} \alpha^{mn} - {}^{(\text{кан})}T_{j}{}^{i} \alpha^{j} \Big] df_i, \tag{5.4.16}$$

если воспользоваться теоремой Гаусса. При островном распределении полей интеграл по охватывающей гиперповерхности обращается в нуль, и, вводя обозначение

$$\mathscr{W}(V_3) = \frac{1}{ic} \int\limits_{(V_3)} \Big[: \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega i} \delta U_{\Omega} : + \frac{c}{2} D_{nm}{}^{i} \alpha^{mn} - {}^{(\text{кан})}T_{j}{}^{i} \alpha^{j} \Big] df_i, \tag{5.4.17}$$

мы приходим к соотношению

$$\Delta W = \mathscr{W}(\overline{V}_3) - \mathscr{W}(V_3). \tag{5.4.18}$$

Здесь V_3 и $\overline{V}_3$ — пространственноподобные гиперповерхности-основания четырехмерной области. Используем теперь выражения (5.2.14) и (5.2.15), а также представление функциональной вариации в виде (3.3.23)

$$\delta U_{\Omega} = iae_{\Omega}{}^{\Gamma} U_{\Gamma} \tag{5.4.19}$$

(a — постоянный бесконечно малый параметр, $e_{\Omega}{}^{\Gamma}$ — свободные коэффициенты) и плотность 4-тока (смысл которой будет пока открытым), заданную в виде

$$j^{i} = ie_{\Omega}{}^{\Gamma} : \overset{U}{\Pi}{}^{\Omega i} U_{\Gamma} :. \tag{5.4.20}$$

Вводя соответствующую интегральную величину типа заряда знакомой формулой

$$Q = \frac{1}{ic} \int\limits_{V_3} j^i \, df_i, \qquad (5.4.21)$$

получаем следующее выражение для $\mathscr{W}$:

$$\mathscr{W}(V_3) = \alpha^j P_j - \frac{1}{2} \alpha^{mn} D_{mn} + aQ. \qquad (5.4.22)$$

Так как вследствие (5.2.3) для преобразований симметрии $\Delta W = 0$, величина (5.4.22), согласно (5.4.18), будет сохраняться. Отсюда обычным образом следуют заключения о сохранении импульса, энергии, момента импульса и заряда и о законе центра масс. Мы строили свои рассуждения, исходя из интеграла действия, так как этот путь привел к получению *бесконечно малого генератора* I в замкнутом виде. В самом деле, он связан с $\mathscr{W}$ соотношением

$$I = -\mathscr{W} = -\alpha^j P_j + \frac{1}{2} \alpha^{mn} D_{mn} - aQ. \qquad (5.4.23)$$

Тождественное совпадение (с точностью до постоянного множителя) сохраняющейся величины, полученной из преобразования симметрии, и бесконечно малого оператора унитарного преобразования оправдывается связью между обоими видами преобразований, даваемой соотношениями (5.3.8) и (5.3.9).

§ 5. Нахождение бесконечно малых унитарных преобразований для полевых операторов и вывод перестановочных соотношений для сохраняющихся величин

Будем исходить из закона преобразования (5.4.13), переписанного с учетом (1.1.4) и (5.4.23) в виде

$$\delta U_\Omega - S_\Omega{}^\Gamma{}_{nm} U_\Gamma \alpha^{mn} - U_{\Omega,i} \xi^i =$$
$$= \frac{i}{\hbar} \left[\alpha^i P_i - \frac{1}{2} \alpha^{ij} D_{ij} + aQ, \, U_\Omega \right].$$

Отсюда с помощью (3.2.1) и (5.4.19) получаем три важных соотношения [1])

$$e_\Omega{}^\Gamma U_\Gamma = \frac{1}{\hbar}[Q, U_\Omega], \tag{5.5.1}$$

$$U_{\Omega, i} = \frac{1}{i\hbar}[P_i, U_\Omega], \tag{5.5.2}$$

$$2S_\Omega{}^\Gamma{}_{ij}U_\Gamma + (U_{\Omega,j}x_i - U_{\Omega,i}x_j) = \frac{1}{i\hbar}[D_{ij}, U_\Omega]. \tag{5.5.3}$$

Второе из этих соотношений представляет собой релятивистское обобщение *гейзенберговского уравнения движения*. Дифференцируя его, получаем

$$U_{\Omega, i, j} = \frac{1}{i\hbar}[P_i, U_{\Omega, j}].$$

Поэтому для функции вида

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(U_\Omega, U_{\Omega, i}, x^i)$$

находим

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x^i}\right)_{\text{явн}} + \frac{1}{i\hbar}[P_i, \mathcal{A}]. \tag{5.5.4}$$

Принимая $i = 4$ и учитывая связь $P_4 = -(1/c)\,H$, где H — гамильтониан системы, получаем собственно гейзенберговское уравнение движения

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}\right)_{\text{явн}} + \frac{1}{i\hbar}[\mathcal{A}, H]. \tag{5.5.5}$$

Для интегральной величины

$$A = \int\limits_{x^4=\text{const}} \mathcal{A} d^{(3)}x \tag{5.5.6}$$

---

[1]) Эти соотношения в той или иной степени использовались ранее [24, 25]. В соотношении (5.5.3) удобнее брать не полный момент, а только спиновый, так как часть соотношения, обусловленная орбитальным моментом, выводится из (5.5.2). При этом достигается полная независимость соотношений друг от друга и их простота. Вместе с тем x^a (4-координата или 4-радиус-вектор) не является вектором (тензором первого ранга) уже в плоском мире, что чревато затруднениями.— *Прим. перев.*

путем интегрирования находим соотношение

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{1}{i\hbar}[A, H], \tag{5.5.7}$$

которое является аналогом в квантовой теории поля гейзенберговского уравнения движения квантовой механики.

Большой интерес представляет и соотношение (5.5.3). Рассмотрим его частные случаи для конкретных полевых операторов. В случае инварианта (скаляра) U имеем

$$U_{,j}x_i-U_{,i}x_j=\frac{1}{i\hbar}[D_{ij}, U]. \tag{5.5.8}$$

Для вектора U_k ввиду равенства

$$S_\Omega{}^\Gamma{}_{ij}\to S_k{}^l{}_{ij}=\frac{1}{2}(g_{ki}g_j{}^l-g_{kj}g_i{}^l) \tag{5.5.9}$$

соотношение имеет вид

$$g_{ki}U_j-g_{kj}U_i+U_{k,j}x_i-U_{k,i}x_j=\frac{1}{i\hbar}[D_{ij}, U_k]. \tag{5.5.10}$$

Аналогично можно записать его и для тензоров высших рангов.

Исходя из общих основных соотношений (5.5.1) — (5.5.3), можно вывести ряд важных соотношений, в которых в состав коммутаторов входят те или иные сохраняющиеся величины. Приведем некоторые из них, ограничиваясь, однако, случаем лагранжианов, не зависящих явно от координат:

$$\begin{gathered}\text{а) } [Q, \Lambda]=0, \quad \text{б) } [Q, j^k]=0, \quad \text{в) } [Q, {}^{(\text{кан})}T_m{}^k]=0,\\ \text{г) } [Q, D^{mni}]=0, \quad \text{д) } [Q, \mathscr{H}^{imk}]=0;\end{gathered} \tag{5.5.11}$$

$$\begin{gathered}\text{а) } [P_i, {}^{(\text{кан})}T_m{}^k]=i\hbar\,{}^{(\text{кан})}T_m{}^k{}_{,i},\\ \text{б) } [P_i, D^{mni}]=\frac{i\hbar}{c}({}^{(\text{кан})}T^{nm}-{}^{(\text{кан})}T^{mn});\end{gathered} \tag{5.5.12}$$

$$\begin{aligned}&\text{а) } [D_{ij}, {}^{(\text{кан})}T_m{}^l]=i\hbar\{{}^{(\text{кан})}T_m{}^l{}_{,j}x_i-{}^{(\text{кан})}T_m{}^l{}_{,i}x_j+\\ &+{}^{(\text{кан})}T_{mj}g_i{}^l-{}^{(\text{кан})}T_{mi}g_j{}^l+{}^{(\text{кан})}T_j{}^lg_{im}-{}^{(\text{кан})}T_i{}^lg_{jm}\},\\ &\text{б) } [D_{ij}, D^{mnl}]=i\hbar\{D^{mnl}{}_{,j}x_i-D^{mnl}{}_{,i}x_j+D^m{}_j{}^lg_i{}^n-\\ &-D^m{}_i{}^lg_j{}^n+D^{mn}{}_jg_i{}^l-D^{mn}{}_ig_j{}^l+D_j{}^{nl}g_i{}^m-D_i{}^{nl}g_j{}^m\}.\end{aligned} \tag{5.5.13}$$

Отсюда при соответствующем интегрировании получаются коммутационные соотношения для сохраняющихся величин:

$$\text{а) } [Q, P_i] = 0, \quad \text{б) } [Q, D_{mn}] = 0; \tag{5.5.14}$$

$$\begin{gathered} \text{а) } [P_i, P_j] = 0, \\ \text{б) } [P_i, D_{mn}] = i\hbar (P_m g_{ni} - P_n g_{mi}); \end{gathered} \tag{5.5.15}$$

$$[D_{ij}, D_{mn}] = i\hbar \{D_{mj} g_{ni} + D_{jn} g_{im} + D_{im} g_{nj} + D_{ni} g_{mj}\}. \tag{5.5.16}$$

Мы воздержимся здесь от расщепления индексов на пространственные и временные.

В приведенных расчетах потребовалось принять условие

$$S_\Omega{}^\Lambda{}_{nm} e_\Lambda{}^\Gamma = S_\Lambda{}^\Gamma{}_{nm} e_\Omega{}^\Lambda. \tag{5.5.17}$$

§ 6. *Приложение к физическим полям и к квантовой механике*

В этом параграфе мы переведем на язык квантовой теории поля результаты, полученные в гл. 3, § 5 для конкретных систем классических полей. Кроме того, мы обобщим на случай квантовой механики набросок классической механики, данный в гл. 2, § 1.

А. Система, состоящая из максвелловского и клейн-гордоновского полей

Лагранжева плотность (3.5.1) записывается в виде

$$\Lambda = -\frac{1}{4} : B_{mn} B^{mn} : - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Big[: (\Phi^+{}_{,m} + i\alpha A_m \Phi^+) \times \\ \times (\Phi^{,m} - i\alpha A^m \Phi) : + \frac{m_0{}^2 c^2}{\hbar^2} : \Phi^+ \Phi : \Big]. \tag{5.6.1}$$

Симметричный тензор энергии-импульса (3.5.3) принимает вид

$$T_s{}^i = : B_{sm} B^{mi} : + \frac{1}{4} g_s{}^i : B_{mn} B^{mn} : - \\ - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Big\{ : (\Phi^+{}_{,s} + i\alpha A_s \Phi^+)(\Phi^{,i} - i\alpha A^i \Phi) : +$$

$$+ :(\Phi^{+,\,i} + i\alpha A^i\Phi^+)(\Phi_{,\,s} - i\alpha A_s\Phi): -$$
$$- g_s{}^i\Big[:(\Phi^{+,\,m} + i\alpha A^m\Phi^+)(\Phi_{,\,m} - i\alpha A_m\Phi): +$$
$$+ \frac{m_0{}^2c^2}{\hbar^2} :\Phi^+\Phi:\Big]\Big\}, \quad (5.6.2)$$

причем *плотность* (*электрического*) *4-тока* (2.3.7), удовлетворяющая *уравнению непрерывности* (3.5.2)

$$j^k{}_{,\,k}, \quad (5.6.3)$$

записывается в виде

$$j^k = \frac{e\hbar}{2m_0 i}\Big[:\Phi^+\Phi^{,\,i} - \Phi^{+,\,i}\Phi - \frac{2ie}{\hbar c}\,\Phi^+\Phi A^i:\Big]. \quad (5.6.4)$$

При этом нужно иметь в виду, что максвелловское поле в отличие от поля Клейна — Гордона эрмитово:

$$A_m{}^+ = A_m.$$

Такое упрощение картины имеет место ввиду выбора вещественной метрики с сигнатурой $(+, +, +, -)$, т. е. использования галилеевых координат. В координатах Минковского положение усложняется [1]).

Заметим еще, что *нормальное произведение* для свободного поля Клейна — Гордона Φ, представимого в виде

$$\Phi = A + B^+ \quad (5.6.5)$$

(слагаемые A и B^+ обладают соответственно свойствами оператора уничтожения и оператора рождения), вследствие бозевского характера этого поля удовлетворяет следующим соотношениям:

$$:\Phi(x^i)\Phi^+(y^i): = A^+(y^i)A(x^i) + A(x^i)B(y^i) +$$
$$+ B^+(x^i)A^+(y^i) + B^+(x^i)B(y^i), \quad (5.6.6)$$
$$:\Phi^+(y^i)\Phi(x^i): = A^+(y^i)A(x^i) + B(y^i)A(x^i) +$$
$$+ A^+(y^i)B^+(x^i) + B^+(x^i)B(y^i), \quad (5.6.7)$$
$$:\Phi(x^i)\Phi(y^i): = \Phi(x^i)\Phi(y^i), \quad (5.6.8)$$
$$:\Phi^+(x^i)\Phi^+(y^i): = \Phi^+(x^i)\Phi^+(y^i). \quad (5.6.9)$$

---

[1]) Под координатами Минковского автор понимает систему, в которой временна́я координата мнимая.— *Прим. перев.*

Для свободного максвелловского поля, представимого в виде

$$A_m = \mathcal{A}_m + \mathcal{A}_m{}^+, \tag{5.6.10}$$

нормальное произведение записывается в виде

$$:A_m(x^i)\, A_n(y^i): = \mathcal{A}_m(x^i)\, \mathcal{A}_n(y^i) + \mathcal{A}_m{}^+(x^i)\, \mathcal{A}_n(y^i) + \\ + \mathcal{A}_n{}^+(y^i)\, \mathcal{A}_m(x^i) + \mathcal{A}_m{}^+(x^i)\, \mathcal{A}_n{}^+(y^i). \tag{5.6.11}$$

Б. Система, состоящая из максвелловского и дираковского полей

Перепишем *лагранжеву плотность* (3.5.4) в виде

$$\Lambda = -\frac{1}{4} : B_{mn} B^{mn} : - \frac{\hbar c}{2} \Big\{ : \overline{\Psi} \gamma^k (\Psi_{,k} - i\alpha A_k \Psi): - \\ - : (\overline{\Psi}_{,k} + i\alpha A_k \overline{\Psi}) \gamma^k \Psi : + \frac{2m_0 c}{\hbar} : \overline{\Psi}\Psi : \Big\}. \tag{5.6.12}$$

При этом сопряженный биспинор равен $\overline{\Psi} = \Psi^+ \beta$, где через Ψ^+ обозначен эрмитово сопряженный биспинорный оператор. Для *симметричного тензора энергии-импульса* (3.5.7) получим теперь выражение

$$T_{ij} = : B_{im} B^m{}_j : + \frac{1}{4} g_{ij} : B_{mn} B^{mn} : - \\ - \frac{\hbar c}{4} [: \overline{\Psi} \{\gamma_i (\Psi_{,j} - i\alpha A_j \Psi) + \gamma_j (\Psi_{,i} - i\alpha A_i \Psi)\} : - \\ - : \{(\overline{\Psi}_{,i} + i\alpha A_i \overline{\Psi}) \gamma_j + (\overline{\Psi}_{,j} + i\alpha A_j \overline{\Psi}) \gamma_i\} \Psi :]. \tag{5.6.13}$$

Плотность электрического 4-тока (2.4.11), удовлетворяющая уравнению непрерывности, записывается здесь как

$$j^k = iec : \overline{\Psi} \gamma^k \Psi : . \tag{5.6.14}$$

Для свободного дираковского поля, представимого в виде

$$\Psi = A + B^+, \quad \overline{\Psi} = \mathcal{A}^+ + \mathcal{B} \tag{5.6.15}$$

(использована обычная символика), ввиду фермиевского характера этого поля *нормальное произведение* удовлетворяет соотношениям

$$:\Psi_\alpha(x^i)\,\overline{\Psi}_\beta(y^i): = -\mathscr{A}_\beta^{+}(y^i)\,A_\alpha(x^i) + B_\alpha^{+}(x^i)\,\mathscr{A}_\beta^{+}(y^i) + \\ + A_\alpha(x^i)\,\mathscr{B}_\beta(y^i) + B_\alpha^{+}(x^i)\,\mathscr{B}_\beta(y^i), \quad (5.6.16)$$

$$:\overline{\Psi}_\beta(y^i)\,\Psi_\alpha(x^i): = \mathscr{A}_\beta^{+}(y^i)\,A_\alpha(x^i) + \mathscr{B}_\beta(y^i)\,A_\alpha(x^i) + \\ + \mathscr{A}_\beta^{+}(y^i)\,B_\alpha^{+}(x^i) - B_\alpha^{+}(x^i)\,\mathscr{B}_\beta(y^i), \quad (5.6.17)$$

$$:\Psi_\alpha(x^i)\,\Psi_\beta(y^i): = \Psi_\alpha(x^i)\,\Psi_\beta(y^i), \quad (5.6.18)$$

$$:\overline{\Psi}_\alpha(x^i)\,\overline{\Psi}_\beta(y^i): = \overline{\Psi}_\alpha(x^i)\,\overline{\Psi}_\beta(y^i). \quad (5.6.19)$$

Использованные здесь строчные греческие индексы нумеруют компоненты биспиноров и пробегают значения от 1 до 4.

В. Нерелятивистская квантовая механика

Гейзенберговское представление

Для операторов координат $\mathfrak{Q}_A$ и операторов импульса $\mathfrak{P}_A$, как известно, справедливы *гейзенберговские перестановочные соотношения*

$$\text{а)}\ [\mathfrak{Q}_A, \mathfrak{Q}_B] = 0, \quad \text{б)}\ [\mathfrak{P}_A, \mathfrak{P}_B] = 0, \\ \text{в)}\ [\mathfrak{Q}_A, \mathfrak{P}_B] = i\hbar\delta_{AB}. \quad (5.6.20)$$

Для оператора вида

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{Q}_A, \mathfrak{P}_A, t) \quad (5.6.21)$$

имеет место *гейзенберговское уравнение движения*

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\mathfrak{A}, H]. \quad (5.6.22)$$

К этому уравнению мы пришли уже в квантовой теории поля (5.5.7). Если подставить в качестве $\mathfrak{A}$ конкретные операторы $\mathfrak{Q}_A$, $\mathfrak{P}_A$ и H, получим отдельные уравнения движения

$$\frac{d\mathfrak{Q}_A}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathfrak{Q}_A, H(\mathfrak{Q}_B, \mathfrak{P}_B, t)], \quad (5.6.23\text{а})$$

$$\frac{d\mathfrak{P}_A}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathfrak{P}_A, H(\mathfrak{Q}_B, \mathfrak{P}_B, t)], \quad (5.6.23\text{б})$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (5{,}6.24)$$

Для произвольного вектора состояния $|\Phi\rangle$ справедливо уравнение движения

$$\frac{d|\Phi\rangle}{dt}=0. \tag{5.6.25}$$

Оператор Гамильтона H и *оператор Лагранжа* L связаны между собой соотношением

$$L(\mathfrak{Q}_A, \dot{\mathfrak{Q}}_A, t)=\sum_A \mathfrak{P}_A\dot{\mathfrak{Q}}_A-H(\mathfrak{Q}_A, \mathfrak{P}_A, t) \tag{5.6.26}$$

(точкой обозначена полная производная по времени). *Принцип Гамильтона*

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt=0 \quad (\delta\mathfrak{Q}_A|_{t_2}=\delta\mathfrak{Q}_A|_{t_1}=0) \tag{5.6.27}$$

приводит к *уравнениям Лагранжа*

$$\frac{\delta L}{\delta\mathfrak{Q}_A}=\frac{\partial L}{\partial\mathfrak{Q}_A}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathfrak{Q}}_A}\right)=0. \tag{5.6.28}$$

По аналогии с классической механикой (см. гл. 2, § 2) можно ввести канонические преобразования. При переходе к бесконечно малому каноническому преобразованию мы приходим к инфинитезимальному генерирующему (производящему) оператору I, удовлетворяющему по аналогии с (2.1.23) уравнению

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{1}{i\hbar}[I, H]. \tag{5.6.29}$$

Подгоняя друг к другу бесконечно малые каноническое и унитарное преобразования в смысле (5.4.1), получим уже записанное как (5.4.6) соотношение

$$\mathfrak{B}=-\frac{1}{\hbar}I. \tag{5.6.30а}$$

Для случая системы материальных точек при наличии лишь внутренних сил величина I становится сохраняющейся и принимает вид

$$I=-\mathfrak{a}\sum_\Omega \vec{\mathfrak{P}}_\Omega-\xi H-\mathfrak{d}\sum_\Omega(\vec{\mathfrak{Q}}_\Omega\times\vec{\mathfrak{P}}_\Omega)-$$
$$-\mathfrak{b}\left(t\sum_\Omega\vec{\mathfrak{P}}_\Omega-\sum_\Omega m_\Omega\vec{\mathfrak{Q}}_\Omega\right), \tag{5.6.30б}$$

подобный (2.1.35). В этом выражении индекс Ω нумерует частицы системы. Векторные обозначѐния (стрелка) служат для объединения компонент, принадлежащих всякий раз одной данной частице. Это выражение в точности соответствует конструкции (5.4.23) при ее сведении к случаю механики.

Шрёдингеровское представление

С помощью унитарного преобразования

$$\text{а) } \overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{U}^{+}, \qquad \text{б) } |\overline{\Phi}\rangle = \mathfrak{U}\,|\Phi\rangle, \tag{5.6.31}$$

где унитарный оператор $\mathfrak{U}$ определяется дифференциальным уравнением

$$H\mathfrak{U} = i\hbar\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \mathfrak{U}H = i\hbar\frac{d\mathfrak{U}}{dt}, \tag{5.6.32}$$

осуществляется переход от гейзенберговского к шрёдингеровскому представлению. В последнем представлении гейзенберговские перестановочные соотношения сохраняют привычный вид

$$\text{а) } [\overline{\mathfrak{Q}}_A, \overline{\mathfrak{Q}}_B] = 0, \quad \text{б) } [\overline{\mathfrak{P}}_A, \overline{\mathfrak{P}}_B] = 0, \quad \text{в) } [\overline{\mathfrak{Q}}_A, \overline{\mathfrak{P}}_B] = i\hbar\delta_{AB}, \tag{5.6.33}$$

уравнения движения для операторов принимают вид

$$\frac{d\overline{\mathfrak{A}}}{dt} = \frac{\partial\overline{\mathfrak{A}}}{\partial t}, \tag{5.6.34}$$

а уравнение движения для произвольного вектора состояния сводится к уравнению Шрёдингера

$$\overline{H}\,|\overline{\Phi}\rangle = i\hbar\,\frac{d\,|\overline{\Phi}\rangle}{dt}. \tag{5.6.35}$$

ГЛАВА 6

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И В ЧАСТНОРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. *Общая теория*

В гл. 4, § 1, мы рассматривали несобственные преобразования Лоренца. Так как там не делалось никаких предположений о природе полевых функций, все сделанные выводы можно перенести без каких-либо ограничений на квантовую теорию поля. К несобственным (дискретным) преобразованиям Лоренца в квантовой теории поля добавляется еще одно важное дискретное преобразование, чуждое классической теории, а именно *преобразование зарядового сопряжения* (*переход от частиц к античастицам*). Так как характерным элементом квантовой теории поля является учет частиц и античастиц как квантов данного поля, зарядовое сопряжение представляет собой специфическую операцию квантовой теории поля.

Ниже дается общее изложение теории дискретных симметрий.

В ходе квантового обобщения непрерывных преобразований нас интересовали унитарные или антиунитарные преобразования $\mathfrak{U}$, так как они обладают важным свойством оставлять инвариантными вероятности переходов. Этого требования следует продолжать придерживаться из физических соображений. Значит, оператор $\mathfrak{U}$ должен описывать *преобразование симметрии*; при этом, согласно (5.3.10), выполняется соотношение

$$\mathfrak{U}\Lambda(x^{i\prime})\,\mathfrak{U}^{+} = \Lambda(x^{i}). \qquad (6.1.1)$$

Приняв равенство (5.3.4)

$$\mathfrak{U}_{,m} = 0, \qquad (6.1.2)$$

мы еще прежде могли установить форм-инвариантность уравнений движения. Пусть это предположение сохраняет силу и для дискретных преобразований.

Рассмотрим сначала унитарный оператор $\mathfrak{U}$, записав его в виде

$$\mathfrak{U} = e^{i\mathfrak{W}}, \tag{6.1.3}$$

где оператор $\mathfrak{W}$ должен быть эрмитовым, чтобы обеспечить унитарность $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{+}. \tag{6.1.4}$$

В самом деле, отсюда следует

$$\mathfrak{U}^{+} = e^{-i\mathfrak{W}}, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U}^{+} = 1.$$

Требование (6.1.2) влечет за собой следующее условие для $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W}_{,m} = 0. \tag{6.1.5}$$

Итак, мы имеем постоянный эрмитов оператор $\mathfrak{W}$, который должен быть связан с физическими сохраняющимися величинами. Сравнение с выражением (5.4.1) показывает, что в случае непрерывных преобразований будет просто

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{B}. \tag{6.1.6}$$

Оператор $\mathfrak{W}$, будучи эрмитовым, обладает вещественными собственными значениями. Соответствующее *уравнение для собственных значений* имеет вид

$$\mathfrak{W} \mid w\rangle = w \mid w\rangle, \tag{6.1.7}$$

где, таким образом,

$$w = w^{*}.$$

Если собственные значения оператора $\mathfrak{W}$ равны $w = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, . . ., то и оператор $\mathfrak{U}$ в силу равенства

$$\mathfrak{U} \mid w\rangle = e^{i\mathfrak{W}} \mid w\rangle = e^{iw} \mid w\rangle = \pm \mid w\rangle \tag{6.1.8}$$

обладает вещественными собственными значениями, а именно ± 1. В этом случае можно даже путем повторного умножения на $\mathfrak{U}$ показать, что

$$\mathfrak{U}^{2} = 1, \tag{6.1.9}$$

откуда далее ввиду унитарности $\mathfrak{U}$ следует и эрмитовость этого оператора

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{+}. \tag{6.1.10}$$

Это гарантирует полноту системы кет-векторов $| w \rangle$.

Если же оператор $\mathfrak{W}$ обладает собственными значениями $w = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$, то оператор $\mathfrak{U}$ в силу равенства

$$\mathfrak{U} \,| w\rangle = e^{i\mathfrak{W}} | w\rangle = e^{iw} | w\rangle = \pm\, i \,| w\rangle$$

обладает мнимыми собственными значениями $\pm i$. Тогда

$$\mathfrak{U}^2 = -1, \tag{6.1.11а}$$

и оператор $\mathfrak{U}$ является антиэрмитовым:

$$\mathfrak{U}^{+} = -\mathfrak{U}. \tag{6.1.11б}$$

Чтобы явно выразить оператор $\mathfrak{U}$ или $\mathfrak{W}$ при дискретных преобразованиях, удобно воспользоваться следующей операторной формулой:

$$\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{U}^{+} = e^{i\mathfrak{W}}\mathfrak{A}e^{-i\mathfrak{W}} = \mathfrak{A} + i\,[\mathfrak{W}, \mathfrak{A}] + \frac{i^2}{2!}\,[\mathfrak{W}, [\mathfrak{W}, \mathfrak{A}]] + \ldots . \tag{6.1.12}$$

Проблема явного выражения подобных операторов была почти одновременно рассмотрена рядом авторов [10].

§ 2. Квантовая механика (без учета спина)

Здесь нам предстоит рассмотреть трансформационный аспект нерелятивистской квантовой механики относительно дискретных преобразований Лоренца: пространственного отражения, которое будет обозначаться линейным оператором $\mathscr{P}$ (*оператором пространственной четности*), и обращения времени, изображаемого антилинейным оператором $\mathscr{T}$. Ради простоты мы обратимся к задаче одной частицы. Иногда мы будем обращаться к классической теории, разобранной в гл. 4, § 2.

А. Пространственное отражение

Гейзенберговское представление

Потребуем, чтобы оператор $\mathcal{P}$ был унитарным и эрмитовым:

$$\text{а) } \mathcal{P}^{+} = \mathcal{P}^{-1}, \quad \text{б) } \mathcal{P}^{+} = \mathcal{P}, \text{ т. е. } \mathcal{P}^{2} = 1. \tag{6.2.1}$$

Из принципа соответствия с классической теорией на основании поведения координат и импульса (4.2.39) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} &\text{а) } \mathfrak{Q}_{\mu'} = \mathcal{P}\mathfrak{Q}_{\mu}\mathcal{P}^{+} = -\mathfrak{Q}_{\mu}, \\ &\text{б) } \mathfrak{P}_{\mu'} = \mathcal{P}\mathfrak{P}_{\mu}\mathcal{P}^{+} = -\mathfrak{P}_{\mu}, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

где рассматриваются декартовы компоненты. Для операторного тензора момента импульса в соответствии с (4.2.42) следует формула

$$\mathfrak{D}_{\mu'\nu'} = \mathcal{P}\mathfrak{D}_{\mu\nu}\mathcal{P}^{+} = \mathfrak{D}_{\mu\nu}. \tag{6.2.3}$$

Гейзенберговские перестановочные соотношения (5.6.20) оказываются инвариантными при пространственном отражении, что можно проверить непосредственной подстановкой (6.2.1).

Умножая соотношения (6.2.2) слева на $\mathcal{P}$, а справа на $\mathcal{P}^{+}$, получаем

$$\text{а) } \mathcal{P}^{2}\mathfrak{Q}_{\mu}\mathcal{P}^{+2} = \mathfrak{Q}_{\mu}, \quad \text{б) } \mathcal{P}^{2}\mathfrak{P}_{\mu}\mathcal{P}^{+2} = \mathfrak{P}_{\mu} \tag{6.2.4}$$

в соответствии с (6.2.1б).

Из равенства (6.2.1б) следует, что

$$\mathcal{P} \text{ имеет собственные значения } \pm 1. \tag{6.2.5}$$

Полагая, что действует такой потенциал, при котором оператор Гамильтона форм-инвариантен относительно пространственного отражения

$$H' = \mathcal{P}H(\mathfrak{Q}_{\mu}, \mathfrak{P}_{\mu}, t)\,\mathcal{P}^{+} = H(\mathfrak{Q}_{\mu'}, \mathfrak{P}_{\mu'}, t) = H(\mathfrak{Q}_{\mu}, \mathfrak{P}_{\mu}, t), \tag{6.2.6}$$

получаем

$$[H, \mathcal{P}] = 0, \text{ т. е. } \frac{d\mathcal{P}}{dt} = 0. \tag{6.2.7}$$

Это соотношение свидетельствует о наличии у операторов H и $\mathcal{P}$ в данном случае общих собственных векторов состояния, т. е. об одновременной измеримости этих операторов.

Соответствующие уравнения для собственных значений имеют тогда вид

$$\text{а) } H\,|\,m\rangle = E_m\,|\,m\rangle, \quad \text{б) } \mathscr{P}\,|\,m\rangle = \pm\,|\,m\rangle. \tag{6.2.8}$$

Состояния с пространственной четностью $+1$ называют четными, а состояния с пространственной четностью -1 — нечетными.

Из закона преобразования оператора Гамильтона (6.2.6) можно сделать заключение о форм-инвариантности уравнений движения (5.6.23) и (5.6.24) для операторов и форм-инвариантности уравнений для собственных значений (6.2.8).

Для некоторого произвольного состояния с вектором $|\,\Phi\,\rangle$ имеет место закон преобразования

$$|\,\Phi\rangle' = \mathscr{P}\,|\,\Phi\rangle. \tag{6.2.9}$$

Смысл его правой части становится ясным, если произвести фурье-разложение $|\,\Phi\,\rangle$ по векторам собственных состояний и учесть при этом уравнения (6.2.8).

Уравнение движения для вектора произвольного состояния (5.6.25) при пространственном отражении переходит в уравнение

$$\frac{d\,|\,\Phi\rangle'}{dt} = 0. \tag{6.2.10}$$

Таким образом, уравнение движения (5.6.25) верно и для преобразованного вектора состояния. В этом смысле уравнения движения для векторов состояния форм-инвариантны.

Шрёдингеровское представление

Форм-инвариантность гейзенберговских перестановочных соотношений и уравнений движения (5.6.34) для операторов, а также уравнений для собственных значений нами уже показана. Уравнение Шрёдингера (5.6.35)

(в котором для простоты отброшены черточки над буквами)

$$H\,|\,\Phi\rangle = i\hbar\,\frac{d\,|\,\Phi\rangle}{dt} \qquad (6.2.11)$$

при умножении слева на $\mathcal{P}$ и учете (6.2.6) переходит в

$$H\,|\,\Phi\rangle' = i\hbar\,\frac{d\,|\,\Phi\rangle'}{dt}\,. \qquad (6.2.12)$$

Следовательно, преобразованный вектор состояния эволюционирует в соответствии с уравнением Шрёдингера для исходного вектора.

Б. Обращение времени

Обращение времени обладает в корне иной природой, чем пространственпое отраженис. Законы преобразования, определяемые геометрическим характером операторов, не обеспечивают в случае обращения времени форминвариантности основных законов квантовой механики (в противоположность положению, имеющему место в классической механике). Эту картину мы и будем теперь изучать, ограничиваясь для простоты консервативными системами.

Гейзенберговское представление

Здесь также из соображений соответствия с классической теорией следует попытаться произвести обобщение формул классического обращения времени (4.2.44) следующим образом:

$$\text{а)}\ \mathfrak{Q}_{\mu'}(t') = \mathfrak{Q}_{\mu}(t), \qquad \text{б)}\ \mathfrak{P}_{\mu'}(t') = -\mathfrak{P}_{\mu}(t) \qquad (6.2.13)$$

или

$$\text{а)}\ \mathfrak{Q}_{\mu'}(t) = \mathfrak{Q}_{\mu}(-t), \qquad \text{б)}\ \mathfrak{P}_{\mu'}(t) = -\mathfrak{P}_{\mu}(-t). \qquad (6.2.14)$$

Подставляя эти равенства в гейзенберговские перестановочные соотношения (5.6.20в) и гейзенберговские уравнения движения (5.6.23), находим

$$\begin{aligned} &\text{а) } [\mathfrak{Q}_{\mu'}(t'),\ \mathfrak{P}_{\nu'}(t')] = -i\hbar\delta_{\mu'\nu'} \text{ или} \\ &\text{б) } [\mathfrak{Q}_{\mu'}(t),\ \mathfrak{P}_{\nu'}(t)] = -i\hbar\delta_{\mu'\nu'}; \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

$$\begin{aligned} &\text{а) } \frac{d\mathfrak{Q}_{\mu'}(t')}{dt'} = -\frac{1}{i\hbar}[\mathfrak{Q}_{\mu'}(t'),\ H(\mathfrak{Q}_{\nu'}(t'),\ \mathfrak{P}_{\nu'}(t'))], \\ &\text{б) } \frac{d\mathfrak{P}_{\mu'}(t')}{dt'} = -\frac{1}{i\hbar}[\mathfrak{P}_{\mu'}(t'),\ H(\mathfrak{Q}_{\nu'}(t'),\ \mathfrak{P}_{\nu'}(t'))]. \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

Здесь мы сделали следующее предположение о поведении оператора Гамильтона:

$$H(\mathfrak{Q}_{\mu}(t),\ \mathfrak{P}_{\mu}(t)) = H(\mathfrak{Q}_{\mu'}(t'),\ \mathfrak{P}_{\mu'}(t')), \tag{6.2.17}$$

которое обычно выполняется, так как H есть четная функция от импульсов.

Вид основных уравнений (6.2.15) и (6.2.16) свидетельствует сразу же об отсутствии у них форм-инвариантности относительно введенного выше обращения времени. Отсюда ясно, что преобразованные величины (6.2.14) уже не будут решениями уравнений движения. Однако любое линейное унитарное преобразование $\mathfrak{Z}$ вида

$$\begin{aligned} &\text{а) } \mathfrak{Q}_{\mu'}(t) = \mathfrak{Z}\mathfrak{Q}_{\mu}(t)\mathfrak{Z}^{+}, \\ &\text{б) } \mathfrak{P}_{\mu'}(t) = \mathfrak{Z}\mathfrak{P}_{\mu}(t)\mathfrak{Z}^{+}, \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

примененное согласно правилам (5.3.8), оставляет эти основные уравнения форм-инвариантными относительно новых переменных $\mathfrak{Q}_{\mu'}(t)$ и $\mathfrak{P}_{\mu'}(t)$. Это значит, что преобразования (6.2.14) не могут быть описаны линейным унитарным оператором.

Тогда встает вопрос: может ли быть построено такое математическое исчисление, которое бы, с одной стороны, тесно примыкало к стандартному исчислению линейных операторов, а с другой стороны, обладало совершенно новыми чертами, удовлетворяющими новым требованиям. В частности, заранее ясно, что подобное исчисление не может выражаться на языке матричной алгебры, ибо она базируется на алгебре линейных операторов. Следовательно, в исчислении, которое должно быть развито, используемые операции рассматриваются лишь как вычислительные рецепты, прилагаемые ко входящим в него величинам. Поэтому появляющиеся здесь преобразованные величины часто записываются в особых скобках { }, которыми они и выделяются. При этом такие скобки нельзя просто отбрасывать, так как свойство ассоциативности уже не обязательно выполняется.

Для чисто операторных уравнений постулируем: 1) свойство ассоциативности выполняется в обычном смысле; 2) эрмитово сопряжение производится по обычному правилу. В таких уравнениях не требуется ставить какие-либо скобки.

В изложенном смысле мы прежде всего введем следующие общие предположения относительно преобразования (6.2.14):

$$\begin{aligned} &\text{а) } \mathfrak{Q}_{\mu'}(t)=\mathcal{T}\mathfrak{Q}_\mu(t)\mathcal{T}^{-1}=\mathfrak{Q}_\mu(-t),\\ &\text{б) } \mathfrak{P}_{\mu'}(t)=\mathcal{T}\mathfrak{P}_\mu(t)\mathcal{T}^{-1}=-\mathfrak{P}_\mu(-t). \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

Эрмитово сопряжение показывает, что должно иметь место соотношение

$$\mathcal{T}^{-1}=\mathcal{T}^{+}, \tag{6.2.20}$$

означающее унитарность в случае линейных операторов. Кроме того, если последовательно применить два преобразования одно вслед за другим, то получим

$$\mathcal{T}^2=1, \text{ т. е. } \mathcal{T}=\mathcal{T}^{-1}=\mathcal{T}^{+}, \tag{6.2.21}$$

а это означает эрмитовость исследуемого оператора. Если бы этот оператор был линейным, то он имел бы собственные значения ± 1.

Для оператора момента импульса из приведенных соотношений получаем

$$\mathfrak{D}_{\mu'\nu'}(t)=\mathcal{T}\mathfrak{D}_{\mu\nu}(t)\mathcal{T}^{+}=-\mathfrak{D}_{\mu\nu}(-t). \tag{6.2.22}$$

Пусть оператор Гамильтона имеет такую структуру, что

$$H'=\mathcal{T}H(\mathfrak{Q}_\mu(t),\ \mathfrak{P}_\mu(t))\mathcal{T}^{+}=H(\mathfrak{Q}_\mu(-t),\ \mathfrak{P}_\mu(-t)). \tag{6.2.23}$$

Так как в случае консервативной системы имеет место равенство

$$H(\mathfrak{Q}_\mu(-t),\ \mathfrak{P}_\mu(-t))=H(\mathfrak{Q}_\mu(t),\ \mathfrak{P}_\mu(t)), \tag{6.2.24}$$

отсюда следует

$$\frac{d\mathscr{T}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathscr{T}, H] = 0, \qquad (6.2.25)$$

если предположить справедливость гейзенберговских уравнений движения для оператора $\mathscr{T}$.

Заметим, что закон преобразования (6.2.23) согласуется с трансформационными свойствами четвертой компоненты 4-импульса.

Подводя итоги, можно сказать следующее. Требуемое преобразование (6.2.14) должно выражаться операторным образом соотношениями (6.2.19). Так как при этом не может быть и речи о линейном унитарном преобразовании, оператор $\mathscr{T}$ должен обладать новыми специфическими свойствами. Чтобы выяснить характер этих свойств, преобразуем соответствующим образом соотношение (5.6.20в). Это приводит к равенству

$$\mathscr{T}\,[\mathfrak{Q}_\mu(t),\ \mathfrak{P}_\nu(t)]\,\mathscr{T}^+ = \hbar\delta_{\mu\nu}\mathscr{T} i \mathscr{T}^+. \qquad (6.2.26)$$

Существуют следующие две возможности привести это равенство к виду (6.2.15).

а) *Вигнеровское обращение времени.* Следуя Вигнеру [11], потребуем *антилинейности* оператора $\mathscr{T}$ ($\mathscr{T} \equiv \mathscr{T}_W$):

$$\mathscr{T}_W \alpha \mathscr{T}_W^+ = \alpha^*; \qquad (6.2.27)$$

это значит, что некоторому комплексному числу α должно сопоставляться комплексно сопряженное ему число α^*. Антилинейный унитарный оператор будем называть *антиунитарным*.

Выполнение этого требования приводит к желаемым результатам как для перестановочных соотношений, так и для операторных уравнений движения.

Сам Вигнер не выразил свою теорию на языке бра- и кет-векторов. В целях последовательности изложения мы распространим его теорию на случай абстрактной квантовой теории поля. Чтобы это осуществить, необходимо затронуть еще несколько основных положений. Именно, пусть собственный кет-вектор переходит при обращении времени в собственный бра-вектор по правилу

$$|m(t)\rangle' \equiv \{\mathscr{T}_W\,|\,m(t)\rangle\} = \langle m(t)| \qquad (6.2.28а)$$

и, наоборот,

$$'\langle m(t)| \equiv \{\langle m(t)|\mathscr{T}_W{}^{+}\} = |m(t)\rangle. \qquad (6.2.28б)$$

Здесь приходится использовать обозначения со скобками, так как иначе в левой и правой частях уравнения уголки были бы направлены в противоположные стороны. Далее эти скобки препятствуют применению закона ассоциативности в соответствующих уравнениях, связывающих операторы и векторы состояния. Кроме того, правило эрмитова сопряжения не может распространяться на множители, стоящие в этих скобках.

В этих предположениях мы проанализируем сначала уравнение для собственных значений

$$H\;|m(t)\rangle = E_m\;|m(t)\rangle$$

в гейзенберговском представлении. Если бы оператор $\mathscr{T}_W$ был линейным, то в силу (6.2.25) из собственных векторов $|m(t)\rangle$ можно было бы построить и собственные векторы для $\mathscr{T}_W$. Однако ввиду правила (6.2.28) уравнение для собственных значений антилинейного оператора в обычном смысле существовать не может. Итак, известная теорема операторного исчисления здесь не справедлива.

Рассмотрим теперь произвольные векторы состояния

$$|\Phi\rangle = \sum_m \Phi_m(t)\,|m(t)\rangle \text{ и } \langle\Psi| = \sum_n \langle n(t)|\,\Psi_n{}^*(t). \qquad (6.2.29)$$

Действуя на них операторами $\mathscr{T}_W$ и $\mathscr{T}_W{}^{+}$, находим

$$|\Phi\rangle' = \{\mathscr{T}_W|\Phi\rangle\} = \sum_m \Phi_m{}^*(t)\,\{\mathscr{T}_W|m(t)\rangle\} =$$

$$= \sum_m \Phi_m{}^*(t)\,\langle m(t)| = \langle\Phi| \qquad (6.2.30а)$$

и

$$'\langle\Psi| = \{\langle\Psi|\mathscr{T}_W{}^{+}\} = \sum_n \{\langle n(t)|\mathscr{T}_W{}^{+}\}\,\Psi_n(t) =$$

$$= \sum_n |n(t)\rangle\,\Psi_n(t) = |\Psi\rangle. \qquad (6.2.30б)$$

Перемножая оба эти равенства друг на друга и вводя определение

$$\mathscr{T}_W\langle\Psi|\Phi\rangle\mathscr{T}_W{}^{+} = \{\mathscr{T}_W|\Phi\rangle\}\{\langle\Psi|\mathscr{T}_W{}^{+}\}, \qquad (6.2.31)$$

получаем

$$\mathcal{T}_W \langle \Psi | \Phi \rangle \mathcal{T}_W^+ = \sum_m \Phi_m^*(t)\, \Psi_m(t) = \langle \Phi | \Psi \rangle, \qquad (6.2.32)$$

что вполне согласуется с правилом (6.2.27). Следовательно, скалярное произведение при обращении времени претерпевает комплексное сопряжение. Тем самым обеспечивается инвариантность вероятностей перехода.

Из уравнения движения (5.6.25) для произвольного вектора состояния следует преобразованное уравнение движения

$$\frac{d\,|\Phi\rangle'}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\,\langle \Phi|}{dt} = 0. \qquad (6.2.33)$$

Эрмитово сопряжение снова переводит его в исходное уравнение движения, что и свидетельствует об инвариантности.

б) *Швингеровское обращение времени.* Вторая из упомянутых выше возможностей исследовалась Швингером [12], достигшим того же эффекта для соотношения (6.2.26) в предположении, что оператор $\mathcal{T}$ приводит к обращению порядка сомножителей (пусть $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}_s$):

$$\mathcal{T}_s (\mathfrak{A}(t)\, \mathfrak{B}(t))\, \mathcal{T}_s^+ = \mathfrak{B}'(t)\, \mathfrak{A}'(t). \qquad (6.2.34)$$

Заметим, что и это предположение несовместимо с законом ассоциативности, ибо иначе было бы можно отбросить скобки, и при этом сохранился бы порядок следования операторов.

Законы преобразования векторов состояния могут быть записаны так же, как это было сделано выше.

В заключение вернемся вновь к основной проблеме. Преобразование (6.2.14), рассматриваемое как несомненно верное для операторов координат и импульсов, приводит к (6.2.15), нарушая тем самым форм-инвариантность перестановочных соотношений. Можно было бы и удовольствоваться этим заключением, из которого следует, что основные законы квантовой механики не обладают форм-инвариантностью относительно обращения времени. Если же принять за первичный постулат форм-инвариантность основных законов квантовой механики вообще (как это было нами сделано выше), то получается, что вытекающее отсюда «правильное» обращение времени не ограничивается просто преобразованием (6.2.14), а требует дополнительной операции в смысле Вигнера или в смысле Швингера.

Шрёдингеровское представление

Преобразование обращения времени в приложении к перестановочным соотношениям или уравнениям движения для операторов здесь не имеет каких-либо особенностей. Поэтому мы сосредоточим внимание на уравнении Шрёдингера (6.2.11).

В шрёдингеровском представлении произвольный вектор состояния можно представить в виде фурье-разложения

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_m \Phi_m(t)\,|m\rangle \quad \text{или} \quad \langle\Phi(t)| = \sum_m \langle m|\Phi_m^*(t). \quad (6.2.35)$$

а) *Вигнеровское обращение времени.* В силу (6.2.28а) из (6.2.35) получаем

$$|\Phi(t)\rangle' \equiv \{\mathscr{T}_W|\Phi(t)\rangle\} = \langle\Phi(t)|. \qquad (6.2.36)$$

Применяя теперь оператор $\mathscr{T}_W$ к уравнению (6.2.11), находим

$$\{\mathscr{T}_W(H(\mathfrak{Q}_\mu(t),\ \mathfrak{P}_\mu(t))\,|\Phi(t)\rangle)\} = -i\hbar\frac{d}{dt}\langle\Phi(t)|. \qquad (6.2.37)$$

Чтобы далее преобразовать это уравнение, необходимо прояснить смысл его левой части. Отождествим систему собственных кет-векторов $|m\rangle$ с собственными векторами оператора Гамильтона; тогда

$$H|\Phi(t)\rangle = \sum_m \Phi_m(t)\,E_m\,|m\rangle$$

и далее

$$\{\mathscr{T}_W(H|\Phi(t)\rangle)\} = \sum_m \langle m|\Phi_m^*(t)\,E_m =$$

$$= \sum_m \langle m|H\Phi_m^*(t) = \langle\Phi(t)|H.$$

Поэтому уравнение (6.2.37) переходит в уравнение

$$\langle\Phi(t)|H = -i\hbar\frac{d}{dt}\langle\Phi(t)|.$$

Эрмитово сопряжение дает отсюда уравнение Шрёдингера в обычном виде, что и доказывает его форм-инвариантность. Тем самым оправдываются и предположения (6.2.28).

Согласно равенству (6.2.32), шрёдингеровские собственные функции

$$\Psi_m(q_\mu) = \langle q \mid m \rangle \tag{6.2.38}$$

при обращении времени претерпевают комплексное сопряжение:

$$\mathcal{T}_W \Psi_m \mathcal{T}_W^+ = \Psi_m^*.$$

Сделаем еще два замечания относительно уравнения Шрёдингера в координатном представлении

$$H_D \Phi(q_\mu, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(q_\mu, t)}{\partial t}, \tag{6.2.39}$$

где H_D — дифференциальный оператор Гамильтона. Поскольку, строго говоря, речь идет о классическом уравнении, рассмотрение можно проводить в духе гл. 4, § 2. Последовательно производя преобразование $t \to t' = -t$ (также в присутствии электромагнитного 4-потенциала), приходим к уравнению, принимающему при комплексном сопряжении вид исходного уравнения Шрёдингера, но уже для волновой функции Φ^*, которую следует рассматривать как обращенную во времени:

$$\Phi' = \mathcal{T}_W \Phi \mathcal{T}_W^+ = \Phi^*.$$

Этот результат вполне согласуется с выводом (6.2.32).

б) *Швингеровское обращение времени.* Так как в этом случае преобразование векторов состояния совпадает с имеющим место в теории Вигнера, от рассмотрения этого случая мы воздержимся.

§ 3. *Квантовая теория поля*

А. Пространственное отражение

Полностью в духе общей формулы преобразования (5.3.8) запишем

$$U_{\Omega'}(x^i) = \mathcal{P} U_\Omega(x^i) \mathcal{P}^+. \tag{6.3.1}$$

Оператор $\mathscr{P}$ обладает свойством унитарности

$$\mathscr{P}^{+}=\mathscr{P}^{-1}. \tag{6.3.2}$$

Из (6.3.1) следует равенство

$$U_{\Omega''}(x^{i})=\mathscr{P}^{2}U_{\Omega}(x^{i})\,\mathscr{P}^{+2}. \tag{6.3.3}$$

Вектору вакуумного состояния мы по определению припишем четность $+1$:

$$\mathscr{P}\,|0\rangle=+\,|0\rangle. \tag{6.3.4}$$

Б. Обращение времени

Будем описывать обращение времени как операцию

$$U_{\Omega'}(x^{i})=\mathscr{T}\,U_{\Omega}(x^{i})\,\mathscr{T}^{+}, \tag{6.3.5}$$

потребовав унитарности $\mathscr{T}$:

$$\mathscr{T}^{+}=\mathscr{T}^{-1}. \tag{6.3.6}$$

Отсюда следует

$$U_{\Omega''}(x^{i})=\mathscr{T}^{2}U_{\Omega}(x^{i})\,\mathscr{T}^{+2}. \tag{6.3.7}$$

Как известно из квантовой механики, операция обращения времени антилинейна.

В духе предыдущих предположений вигнеровское обращение времени определяется соотношением ($\mathscr{T}=\mathscr{T}_{W}$):

$$U_{\Omega'}(x^{i})=\mathscr{T}_{W}U_{\Omega}(x^{i})\,\mathscr{T}_{W}^{+}; \tag{6.3.8}$$

кроме того,

$$\text{а) } \mathscr{T}_{W}\alpha\mathscr{T}_{W}^{+}=\alpha^{*}, \quad \text{б) } |\Phi\rangle'\equiv\{\mathscr{T}_{W}\,|\Phi\rangle\}=\langle\Phi\,|. \tag{6.3.9}$$

Швингеровское обращение времени соответственно дается соотношениями

$$U_{\Omega'}(x^{i})=\mathscr{T}_{s}U_{\Omega}(x^{i})\,\mathscr{T}_{s}^{+}, \tag{6.3.10}$$

$$\mathscr{T}_{s}(U_{\Omega}(x^{i})\,V_{\Sigma}(x^{i}))\,\mathscr{T}_{s}^{+}=V_{\Sigma'}(x^{i})\,U_{\Omega'}(x^{i}), \tag{6.3.11}$$

$$|\Phi\rangle'\equiv\{\mathscr{T}_{s}\,|\Phi\rangle\}=\langle\Phi\,|. \tag{6.3.12}$$

В. Зарядовое сопряжение (переход от частиц к античастицам)

Как было отмечено выше, это преобразование специфично для квантовой теории поля. Определим его соотношениями

$$\text{а) } U_\Omega' = \mathscr{C} U_\Omega \mathscr{C}^+, \quad \text{б) } |\Phi\rangle' = \mathscr{C}|\Phi\rangle. \qquad (6.3.13)$$

Преобразование зарядового сопряжения не влияет на координаты. Для него справедливы равенства

$$\text{а) } \mathscr{C}^+ = \mathscr{C}^{-1}, \quad \text{б) } \mathscr{C}^+ = \mathscr{C}, \text{ т. е. } \mathscr{C}^2 = 1. \qquad (6.3.14)$$

Оператор преобразования $\mathscr{C}$ определяется таким образом, чтобы под его действием произвольный заряд Q менял свой знак:

$$\text{а) } \mathscr{C} Q \mathscr{C} = -Q, \text{ или б) } \mathscr{C} Q + Q \mathscr{C} = 0. \qquad (6.3.15)$$

Последнее равенство находится в противоречии с требованием

$$[\mathscr{C}, Q] = 0, \qquad (6.3.16)$$

которое должно выполняться в случае одновременной измеримости наблюдаемых $\mathscr{C}$ и Q. Если постулировать справедливость последнего уравнения, то из этого будет следовать существование общей системы собственных векторов

$$\text{а) } Q|q\rangle = q|q\rangle, \quad \text{б) } \mathscr{C}|q\rangle = \xi_C|q\rangle, \quad \xi_C = \pm 1; \qquad (6.3.17)$$

здесь q — собственные значения оператора заряда Q, а ξ_C — собственные значения оператора $\mathscr{C}$ (*зарядовая четность*).

Умножая соотношение (6.3.15б) на $|q\rangle$, в силу (6.3.17) получаем равенство

$$\xi_C q|q\rangle = 0. \qquad (6.3.18)$$

Отсюда видно, что зарядовая четность может быть определена лишь для системы, полный заряд которой равен нулю ($q = 0$). Известным иллюстрационным примером может служить позитроний.

Вектору вакуумного состояния $|0\rangle$ мы по определению приписываем зарядовую четность $\xi_C = 1$, так что для него

$$\mathscr{C}|0\rangle = +|0\rangle. \qquad (6.3.19)$$

§ 4. Система, состоящая из максвелловского и клейн-гордоновского полей

Мы будем исходить здесь из основ, заложенных в гл. 5, § 6, и сравнивать результаты квантовой теории поля с выводами из классической теории, полученными в гл. 4, § 2. При этом по возможности будет рассматриваться система связанных полей, и лишь позднее будет наложено ограничение свободных полей.

А. Пространственное отражение

Общая теория

Требование, чтобы пространственное отражение было в применении к лагранжевой плотности (5.6.1) преобразованием симметрии в духе (6.1.1), приводит к следующим законам преобразования полевых операторов:

$$\text{а) } A_{\mu'}(x^i) = \mathcal{P} A_\mu(x^i)\,\mathcal{P}^+ = -A_\mu(-x^\nu,\ t), \qquad (6.4.1)$$

$$\text{б) } \varphi'(x^i) = \mathcal{P}\varphi(x^i)\,\mathcal{P}^+ = \varphi(-x^\nu,\ t);$$

$$\text{а) } \Phi'(x^i) = \mathcal{P}\Phi(x^i)\,\mathcal{P}^+ = \alpha_P\Phi(-x^\nu,\ t), \qquad (6.4.2)$$

$$\text{б) } \Phi^{+\prime}(x^i) = \mathcal{P}\Phi^+(x^i)\,\mathcal{P}^+ = \alpha_P{}^*\Phi^+(-x^\nu,\ t).$$

Здесь α_P — комплексное постоянное число, подчиненное условию

$$\alpha_P^*\alpha_P = 1. \qquad (6.4.3а)$$

Повторное применение оператора четности к (6.4.2) в предположении $\mathcal{P}^2 = 1$ дает, кроме того,

$$\alpha_P^2 = 1, \qquad (6.4.3б)$$

так что

$$\alpha_P = \pm 1. \qquad (6.4.3в)$$

Число α_P называют собственной четностью поля.

Два соотношения (6.4.1) можно объединить в одно:

$$A_{m'}(x^i) = \mathcal{P} A_m(x^i)\,\mathcal{P}^+ = I_m A_m(-x^\nu,\ t); \qquad (6.4.4)$$

при этом знаковый множитель

$$I_m = \begin{cases} -1 & \text{для } m = 1,\ 2,\ 3, \\ +1 & \text{для } m = 4. \end{cases}$$

Суммирование по повторяющимся дважды индексам m здесь отсутствует (расстановка индексов также не предписывает суммирования). Законы преобразования (6.4.1) и (6.4.2) согласуются с классическими формулами (4.2.7) и (4.2.9).

Мы установим далее, что для плотностей электрического тока и заряда, а также и для самого электрического заряда обеспечены правильные трансформационные свойства.

Свободные поля

В случае свободных полей *фурье-разложения* имеют вид

$$\Phi(x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{m_0 c^2}{\overline{\Omega}(k)\hbar}} \left(\alpha(k_\mu) e^{ik_j x^j} + \beta^+(k_\mu) e^{-ik_j x^j}\right) d^{(3)}k, \qquad (6.4.5)$$

$$A_m(x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\Omega(k)}}\, e_m{}^{\Sigma}(k_\mu) \times \left(a_\Sigma(k_\mu) e^{ik_j x^j} + a_\Sigma{}^+(k_\mu) e^{-ik_j x^j}\right) d^{(3)}k. \qquad (6.4.6)$$

При этом

$$\text{а)}\ \overline{\Omega}(k) = c\sqrt{k^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}}, \qquad (6.4.7)$$
$$\text{б)}\ \Omega(k) = ck = -ck_4$$

и в (6.4.6) проводится суммирование по Σ от 1 до 4. Если не выписывать коммутаторов, равных нулю, то для операторов рождения и уничтожения имеют место *перестановочные соотношения*

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ [\alpha(k_\mu),\ \alpha^+(\overline{k}_\mu)] = \delta(k_\mu - \overline{k}_\mu),\\ &\text{б)}\ [\beta(k_\mu),\ \beta^+(\overline{k}_\mu)] = \delta(k_\mu - \overline{k}_\mu); \end{aligned} \qquad (6.4.8)$$

$$[a_\Lambda(k_\mu),\ a_{\overline{\Lambda}}{}^+(\overline{k}_\mu)] = \delta_{\Lambda\overline{\Lambda}}\delta(k_\mu - \overline{k}_\mu), \qquad (6.4.9а)$$

$$[a_3(k_\mu),\ a_3{}^+(\overline{k}_\mu)] = [a_4(k_\mu),\ a_4{}^+(\overline{k}_\mu)] = -\delta(k_\mu - \overline{k}_\mu). \qquad (6.4.9б)$$

Перестановочные соотношения для полевых функций (операторов) имеют вид [1])

---

[1]) О перестановочных функциях см., например, в монографии [24].— *Прим. перев.*

$$\text{а)}\ [\Phi(x^i),\ \Phi(\bar{x}^i)] = 0, \tag{6.4.10}$$

$$\text{б)}\ [\Phi(x^i),\ \Phi^+(\bar{x}^i)] = -\frac{2m_0ci}{\hbar}\Delta(x^i - \bar{x}^i),$$

$$[A_m(x^i),\ A_n(\bar{x}^i)] = i\sigma_{mn}(x^i - \bar{x}^i). \tag{6.4.11}$$

При этом в основу квантования максвелловского поля кладется предложенная Валатэном и развитая нами далее процедура, использующая сильное условие Лоренца ($a_3 + a_4 = 0$), калибровочно инвариантный лагранжиан и гильбертово пространство с определенной метрикой [13].

Для основных *интегральных сохраняющихся величин* поля Клейна — Гордона следуют выражения

$$Q = e\int(\alpha^+\alpha - \beta^+\beta)\,d^{(3)}k, \tag{6.4.12}$$

$$^{(\text{К-Г})}P_\mu = \hbar\int k_\mu(\alpha^+\alpha + \beta^+\beta)\,d^{(3)}k, \tag{6.4.13}$$

$$^{(\text{К-Г})}H = \hbar\int\bar{\Omega}(\alpha^+\alpha + \beta^+\beta)\,d^{(3)}k \tag{6.4.14}$$

и для поля Максвелла

$$^{(\text{М})}P_\mu = \hbar\sum_{\Lambda=1}^{2}\int k_\mu a_\Lambda{}^+ a_\Lambda\,d^{(3)}k, \tag{6.4.15}$$

$$^{(\text{М})}H = \hbar\sum_{\Lambda=1}^{2}\int\Omega a_\Lambda{}^+ a_\Lambda d^{(3)}k. \tag{6.4.16}$$

Здесь и далее индекс Λ пробегает поперечные степени свободы максвелловского поля, т. е. $\Lambda = 1, 2$.

Применяя законы преобразования (6.4.1) и (6.4.2) к операторам рождения и уничтожения, получаем соотношения

$$\begin{aligned}&\text{а)}\ \mathcal{P}\alpha(k_\mu)\mathcal{P}^+ = \alpha_P\alpha(-k_\mu),\\ &\text{б)}\ \mathcal{P}\beta(k_\mu)\mathcal{P}^+ = \alpha_P{}^*\beta(-k_\mu);\end{aligned} \tag{6.4.17}$$

$$\begin{aligned}&\text{а)}\ \mathcal{P}a_\Lambda(k_\mu)\mathcal{P}^+ = -(-1)^\Lambda a_\Lambda(-k_\mu),\\ &\text{б)}\ \mathcal{P}a_3(k_\mu)\mathcal{P}^+ = a_3(-k_\mu).\end{aligned} \tag{6.4.18}$$

Непосредственное вычисление показывает, что коммутационные соотношения (6.4.8) — (6.4.11) инвариантны относительно определенного таким образом пространственного отражения. Тем самым обеспечивается инвариантность всей основы теории Максвелла — Клейна — Гордона относительно отражения.

Для интегральных величин (6.4.12) — (6.4.16) следуют ожидавшиеся законы преобразования:

$$\text{а)}\ \mathcal{P}Q\mathcal{P}^+=Q,\quad \text{б)}\ \mathcal{P}^{(\text{К}-\text{Г})}P_\mu\mathcal{P}^+=-{}^{(\text{К}-\text{Г})}P_\mu,\quad \text{в)}\ \mathcal{P}^{(\text{К}-\text{Г})}H\mathcal{P}^+={}^{(\text{К}-\text{Г})}H; \tag{6.4.19}$$

$$\text{а)}\ \mathcal{P}^{(\text{М})}P_\mu P^+=-{}^{(\text{М})}P_\mu,\quad \text{б)}\ \mathcal{P}^{(\text{М})}H\mathcal{P}^+={}^{(\text{М})}H. \tag{6.4.20}$$

Явное выражение для оператора пространственной четности в случае свободных полей

Далее нас будет интересовать задача явного построения оператора пространственной четности (часто называемого просто оператором четности). Оператор $\mathcal{P}$ мы представим при этом в виде

$$\mathcal{P}=e^{iP}. \tag{6.4.21}$$

В случае поля Клейна—Гордона соотношения (6.4.17) принимают вид

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ e^{iP}\alpha(k_\mu)e^{-iP}=\alpha_P\alpha(-k_\mu),\\ &\text{б)}\ e^{iP}\beta(k_\mu)e^{-iP}=\alpha_P{}^*\beta(-k_\mu), \end{aligned} \tag{6.4.22}$$

причем $P=P^+$.

Рассмотрим сначала первое из этих соотношений. Применяя здесь вспомогательную формулу (6.1.12), находим (забегая вперед, подставляем $P\to\overset{\alpha}{P}$):

$$\alpha(k_\mu)+i[\overset{\alpha}{P},\alpha(k_\mu)]+\frac{i^2}{2!}[\overset{\alpha}{P},[\overset{\alpha}{P},\alpha(k_\mu)]]+\ldots=$$
$$=\alpha_P\alpha(-k_\mu). \tag{6.4.23}$$

Это равенство удовлетворяется, если принять

$$[\overset{\alpha}{P},\alpha(k_\mu)]=\frac{\pi}{2}[\alpha(k_\mu)-\alpha_P\alpha(-k_\mu)]. \tag{6.4.24}$$

Оператор $\overset{\alpha}{P}$ определяется из (6.4.24) как

$$\overset{\alpha}{P} = -\frac{\pi}{2}\int \alpha^{+}(k_{\mu})\,[\alpha(k_{\mu})-\alpha_{P}\alpha(-k_{\mu})]\,d^{(3)}k =$$
$$= -\frac{\pi}{4}\int [\alpha(k_{\mu})-\alpha_{P}\alpha(-k_{\mu})]^{+}\times$$
$$\times[\alpha(k_{\mu})-\alpha_{P}\alpha(-k_{\mu})]\,d^{(3)}k. \quad (6.4.25)$$

Рассмотрим аналогичным образом и второе из соотношений (6.4.22), придав ему подобную же структуру. На основании коммутативности полученных операторов в конце концов находим

$$^{(\text{к-г})}P = -\frac{\pi}{2}\int (\alpha^{+}(k_{\mu})\,[\alpha(k_{\mu})-\alpha_{P}\alpha(-k_{\mu})]+$$
$$+\beta^{+}(k_{\mu})\,[\beta(k_{\mu})-\alpha_{P}\beta(-k_{\mu})])\,d^{(3)}k =$$
$$= -\frac{\pi}{4}\int ([\alpha(k_{\mu})-\alpha_{P}\alpha(-k_{\mu})]^{+}\,[\alpha(k_{\mu})-\alpha_{P}\alpha(-k_{\mu})]+$$
$$+[\beta(k_{\mu})-\alpha_{P}\beta(-k_{\mu})]^{+}\,[\beta(k_{\mu})-\alpha_{P}\beta(-k_{\mu})])\,d^{(3)}k. \quad (6.4.26)$$

Поскольку

$$^{(\text{к-г})}P\,|\,0\rangle = 0,$$

в согласии с (6.3.4) получаем

$$^{(\text{к-г})}\mathscr{P}\,|\,0\rangle = |\,0\rangle.$$

Так как оператор $^{(\text{к-г})}P$ является сохраняющейся величиной, для него должно выполняться соотношение

$$[^{(\text{к-г})}P,\ ^{(\text{к-г})}H] = 0.$$

Оно проверяется и непосредственным расчетом. Поэтому для операторов $^{(\text{к-г})}P$ и $^{(\text{к-г})}H$ можно построить общие собственные векторы состояния. Собственные векторы оператора Гамильтона, получаемые многократным применением оператора рождения с определенным значением волнового числа к вектору вакуумного состояния, еще не являются собственными векторами оператора четности. Однако, так как собственные значения энергии вырождены (одно и то же значение энергии имеют состояния с k_{μ} и с $-k_{\mu}$), общие собственные векторы состояния строятся путем линейной комбинации. Таким образом, одночастичному состоянию, построенному с помощью $\alpha^+(k_\mu)$, соответствует общий для обоих операторов собственный вектор

$$|1(k_\mu)\rangle_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1(k_\mu)\rangle - \alpha_P|1(-k_\mu)\rangle), \qquad (6.4.27)$$

где

$$|1(k_\mu)\rangle = \alpha^+(k_\mu)|0\rangle.$$

Расчет дает

$$^{(\text{К-Г})}P|1(k_\mu)\rangle_g = -\pi|1(k_\mu)\rangle_g. \qquad (6.4.28)$$

Отсюда следует, что для такого состояния оператор $^{(\text{К-Г})}\mathcal{P}$ обладает собственным значением -1 и т. д.

Теперь можно спросить, как существование новой сохраняющейся величины — четности — объясняется теорией Нётер. Вид выражения (6.4.26) показывает, что оператор четности обладает нелокальной структурой, так как в подынтегральном выражении содержатся операторы рождения и уничтожения, зависящие как от k_μ, так и от $-k_\mu$. Эта нелокальность переносится и на координатное пространство. Но теорию Нётер понимают как локальную теорию, и поэтому она не запрещает появления новых нелокальных сохраняющихся величин.

По аналогии с тем, как это было в случае поля Клейна — Гордона, оператор четности можно построить и для максвелловского поля. При этом получаем выражение

$$^{(\text{M})}P = -\frac{\pi}{2}\int d^{(3)}k \sum_{\Lambda=1}^{2} a_\Lambda{}^+(k_\mu)(a_\Lambda(k_\mu) + (-1)^\Lambda a_\Lambda(-k_\mu)) =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\int d^{(3)}k \sum_{\Lambda=1}^{2} (a_\Lambda(k_\mu) + (-1)^\Lambda a_\Lambda(-k_\mu))^+ \times$$

$$\times (a_\Lambda(k_\mu) + (-1)^\Lambda a_\Lambda(-k_\mu)), \qquad (6.4.29)$$

которое следует подставить в формулу (6.4.21).

Б. Вигнеровское обращение времени

Ввиду ограниченного объема этой книги мы коснемся здесь лишь вигнеровского обращения времени, представление о котором попытаемся перенести из квантовой механики в квантовую теорию поля. Требование, чтобы вигнеровское обращение времени в применении к лагранжевой плотности (5.6.1) было преобразованием симметрии, приводит к следующим законам преобразования полевых операторных функций:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ A_{\mu'}(x^i) = \mathcal{T}_W A_\mu(x^i)\mathcal{T}_W{}^+ = -A_\mu(x^\nu,\ -t),\\ &\text{б)}\ \varphi'(x^i) = \mathcal{T}_W\varphi(x^i)\mathcal{T}_W{}^+ = \varphi(x^\nu,\ -t); \end{aligned} \tag{6.4.30}$$

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \Phi'(x^i) = \mathcal{T}_W\Phi(x^i)\mathcal{T}_W{}^+ = \alpha_T\Phi(x^\nu,\ -t),\\ &\text{б)}\ \Phi^{+\prime}(x^i) = \mathcal{T}_W\Phi^+(x^i)\mathcal{T}_W{}^+ = \alpha_T{}^*\Phi^+(x^\nu,\ -t). \end{aligned} \tag{6.4.31}$$

При этом должно выполняться равенство

$$\alpha_T{}^*\alpha_T = 1. \tag{6.4.32}$$

При повторном применении вигнеровского обращения времени к (6.4.31) получаем также в предположении $\mathcal{T}_W{}^2 = 1$

$$\alpha_T{}^2 = 1, \tag{6.4.33а}$$

откуда

$$\alpha_T = \pm 1. \tag{6.4.33б}$$

В этом состоит принципиальное отличие законов преобразования (6.4.31) от формул классической теории, что видно из сравнения с (4.2.17).

Обнаруживается, что как для плотности электрического тока (4.2.5а), так и для плотности заряда (4.2.5б) обеспечены правильные трансформационные свойства.

В случае свободных полей инвариантными относительно вигнеровского обращения времени будут и перестановочные соотношения (6.4.8) — (6.4.11).

Мы воздержимся здесь от приведения законов преобразования операторов рождения и уничтожения.

Для интегральных величин (6.4.12) — (6.4.16) следуют разумные законы преобразования

$$\begin{aligned} &\text{а) } \mathscr{T}_W Q \mathscr{T}_W^{+} = Q, \\ &\text{б) } \mathscr{T}_W {}^{(\text{К-Г})}P_\mu \mathscr{T}_W^{+} = -{}^{(\text{К-Г})}P_\mu, \\ &\text{в) } \mathscr{T}_W {}^{(\text{К-Г})}H \mathscr{T}_W^{+} = {}^{(\text{К-Г})}H; \end{aligned} \tag{6.4.34}$$

$$\begin{aligned} &\text{а) } \mathscr{T}_W {}^{(\text{М})}P_\mu \mathscr{T}_W^{+} = -{}^{(\text{М})}P_\mu, \\ &\text{б) } \mathscr{T}_W {}^{(\text{М})}H \mathscr{T}_W^{+} = {}^{(\text{М})}H. \end{aligned} \tag{6.4.35}$$

Явный вид оператора вигнеровского обращения времени мы также не станем здесь выписывать.

В. Зарядовое сопряжение

Законы преобразования, соответствующие всем требованиям зарядового сопряжения, имеют вид

$$\begin{aligned} &\text{а) } \Phi' = \mathscr{C}\Phi\mathscr{C}^{+} = \alpha_C \Phi^{+}, \quad \text{б) } \Phi^{+\prime} = \mathscr{C}\Phi^{+}\mathscr{C}^{+} = \alpha_C^{*}\Phi, \\ &\text{в) } A_m' = \mathscr{C}A_m\mathscr{C}^{+} = -A_m. \end{aligned} \tag{6.4.36}$$

Чтобы показать инвариантность лагранжевой плотности (5.6.1) и правильные трансформационные свойства физических величин, существенно писать все эти выражения в виде нормальных произведений, так как лишь при таком стандартном расположении сомножителей удается получить требуемые результаты. При этом условии для введенного выше коэффициента получаем

$$\alpha_C^{*}\alpha_C = 1. \tag{6.4.37}$$

В случае свободных полей нетрудно также показать инвариантность перестановочных соотношений и вывести законы преобразования для операторов рождения и уничтожения. Мы не приводим здесь эти результаты ввиду ограниченного объема книги. Теперь мы можем вывести законы преобразования интегральных величин, имеющие вид

$$\begin{aligned} &\text{а) } Q' = \mathscr{C}Q\mathscr{C}^{+} = -Q, \quad \text{б) } {}^{(\text{К-Г})}P_\mu' = \mathscr{C}\,{}^{(\text{К-Г})}P_\mu\mathscr{C}^{+} = {}^{(\text{К-Г})}P_\mu, \\ &\text{в) } {}^{(\text{К-Г})}H' = \mathscr{C}\,{}^{(\text{К-Г})}H\mathscr{C}^{+} = {}^{(\text{К-Г})}H, \end{aligned} \tag{6.4.38}$$

$$\text{г)}\quad {}^{(\mathrm{M})}P_\mu{}' = \mathscr{C}\,{}^{(\mathrm{M})}P_\mu \mathscr{C}^+ = {}^{(\mathrm{M})}P_\mu,$$

$$\text{д)}\quad {}^{(\mathrm{M})}H' = \mathscr{C}\,{}^{(\mathrm{M})}H \mathscr{C}^+ = {}^{(\mathrm{M})}H.$$

Построение оператора зарядового сопряжения осуществляется аналогично тому, как это делалось в случае оператора четности.

§ 5. Система, состоящая из максвелловского и дираковского полей

В этом параграфе мы также даем лишь набросок соответствующей теории. Здесь мы опять постараемся по возможности рассматривать систему связанных полей. Результаты, уже полученные для максвелловского поля, здесь можно было бы просто вновь воспроизвести, но от этого мы воздержимся.

А. Пространственное отражение

Лагранжева плотность (5.6.12) инвариантна относительно пространственного отражения, если биспиноры преобразуются по закону

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \Psi'(x^i) = \mathscr{P}\Psi(x^i)\mathscr{P}^+ = \alpha_P \gamma_4 \Psi(-x^\nu, t), \\ &\text{б)}\quad \overline{\Psi}'(x^i) = \mathscr{P}\overline{\Psi}(x^i)\mathscr{P}^+ = -\alpha_P{}^*\overline{\Psi}(-x^\nu, t)\gamma_4. \end{aligned} \qquad (6.5.1)$$

При этом должно иметь место равенство

$$\alpha_P{}^*\alpha_P = 1. \qquad (6.5.2)$$

Это обеспечивает хорошие трансформационные свойства плотности 4-вектора электрического тока (5.6.14).

В случае свободных полей *фурье-разложение* дираковского поля имеет вид

$$\Psi(x^i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times$$

$$\times \int d^{(3)}k \left\{ e^{ik_j x^j} \alpha_\Lambda(k_\mu) V^\Lambda(k_\mu) + e^{-ik_j x^j} \beta_\Lambda(k_\mu)^+ W^\Lambda(k_\mu) \right\} \qquad (6.5.3)$$

(суммирование по Λ от 1 до 2). Здесь V^Λ и W^Λ — постоянные проектирующие матрицы, возникающие в решении уравнения Дирака для плоских волн. Для них справедливы стандартные соотношения ортонормированности и полноты. Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют *перестановочным соотношениям* [1])

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\ \{\alpha_\Lambda(k_\mu),\ \alpha_{\overline{\Lambda}}(\overline{k}_\mu)\}=0,\\
&\text{б)}\ \{\beta_\Lambda(k_\mu),\ \beta_{\overline{\Lambda}}(\overline{k}_\mu)\}=0,\\
&\text{в)}\ \{\alpha_\Lambda(k_\mu),\ \beta_{\overline{\Lambda}}(\overline{k}_\mu)\}=0,\\
&\text{г)}\ \{\alpha_\Lambda(k_\mu),\ \alpha_{\overline{\Lambda}}(\overline{k}_\mu)^+\}=\delta_{\Lambda\overline{\Lambda}}\delta(k_\mu-\overline{k}_\mu),\\
&\text{д)}\ \{\beta_\Lambda(k_\mu),\ \beta_{\overline{\Lambda}}(\overline{k}_\mu)^+\}=\delta_{\Lambda\overline{\Lambda}}\delta(k_\mu-\overline{k}_\mu),
\end{aligned}\tag{6.5.4}$$

тогда как для операторных полевых функций имеем

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\ \{\Psi_\alpha(x^i),\ \Psi_\beta(\overline{x}^i)\}=0,\\
&\text{б)}\ \{\Psi_\alpha(x^i),\ \overline{\Psi}_\beta(\overline{x}^i)\}=\\
&=i\left(\gamma_{\alpha\beta}{}^j\Delta_{,j}-\frac{m_0c}{\hbar}\delta_{\alpha\beta}\Delta\right)=iS_{\alpha\beta}(x^i-\overline{x}^i).
\end{aligned}\tag{6.5.5}$$

Важнейшие *интегральные сохраняющиеся величины* дираковского поля записываются в виде

$$Q=e\sum_{\Lambda=1}^{2}\int(\alpha_\Lambda{}^+\alpha_\Lambda-\beta_\Lambda{}^+\beta_\Lambda)\,d^{(3)}k,\tag{6.5.6}$$

$$P_\mu=\hbar\sum_{\Lambda=1}^{2}\int k_\mu(\alpha_\Lambda{}^+\alpha_\Lambda+\beta_\Lambda{}^+\beta_\Lambda)\,d^{(3)}k,\tag{6.5.7}$$

$$H=\hbar\sum_{\Lambda=1}^{2}\int\overline{\Omega}(\alpha_\Lambda{}^+\alpha_\Lambda+\beta_\Lambda{}^+\beta_\Lambda)\,d^{(3)}k.\tag{6.5.8}$$

Здесь использовано сокращенное обозначение (6.4.7а).

Законы преобразования (6.5.1) теперь можно переписать для операторов рождения и уничтожения. При этом

---

[1]) Фигурными скобками обозначены антикоммутаторы.— *Прим. перев.*

следует воспользоваться некоторыми соотношениями для V^Λ и W^Λ. Это приводит к равенствам

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \mathcal{P}\alpha_1(k_\mu)\mathcal{P}^+ = \bar{\alpha}_P(k_\mu)\alpha_2(-k_\mu), \\ &\text{б)}\ \mathcal{P}\beta_1(k_\mu)^+\mathcal{P}^+ = \bar{\bar{\alpha}}_P(k_\mu)\beta_2(-k_\mu)^+. \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

Для входящих сюда коэффициентов имеют место соотношения

$$\text{а)}\ \bar{\alpha}_P{}^*\bar{\alpha}_P = 1, \quad \text{б)}\ \bar{\bar{\alpha}}_P{}^*\bar{\bar{\alpha}}_P = 1. \tag{6.5.10}$$

При этих условиях для сохраняющихся величин справедливы законы преобразования

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \mathcal{P}Q\mathcal{P}^+ = Q, \quad \text{б)}\ \mathcal{P}P_\mu\mathcal{P}^+ = -P_\mu, \\ &\text{в)}\ \mathcal{P}H\mathcal{P}^+ = H. \end{aligned} \tag{6.5.11}$$

Оператор четности удается построить уже известным способом в виде (6.4.21)

$$\mathcal{P} = e^{iP}.$$

При этом

$$\begin{aligned} P = -\frac{\pi}{2}\int d^{(3)}k\,(\alpha_1(k_\mu) - \bar{\alpha}_P(k_\mu)\alpha_2(-k_\mu))^+ \times \\ \times(\alpha_1(k_\mu) - \bar{\alpha}_P(k_\mu)\alpha_2(-k_\mu)) - \\ -\frac{\pi}{2}\int d^{(3)}k\,(\beta_1(k_\mu) - \bar{\bar{\alpha}}_P(k_\mu)^*\beta_2(-k_\mu))^+ \times \\ \times(\beta_1(k_\mu) - \bar{\bar{\alpha}}_P(k_\mu)^*\beta_2(-k_\mu)). \end{aligned} \tag{6.5.12}$$

Б. Вигнеровское обращение времени

Здесь мы также ограничимся кратким наброском лишь вигнеровского обращения времени. Подвергая этой операции лагранжеву плотность (5.6.12), обнаруживаем, что требование ее форм-инвариантности в ранее принятом за основу стандартном представлении, когда

$$\begin{aligned} &\gamma_1{}^* = -\gamma_1, \quad \gamma_2{}^* = \gamma_2, \quad \gamma_3{}^* = -\gamma_3, \\ &\gamma_4{}^* = -\gamma_4, \quad \beta^* = \beta, \end{aligned} \tag{6.5.13}$$

приводит к законам преобразования

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \Psi'(x^i) = \mathscr{T}_W \Psi(x^i) \mathscr{T}_W{}^+ = \alpha_T \gamma^1 \gamma^3 \Psi(x^\nu, -t), \\ &\text{б)}\ \overline{\Psi}'(x^i) = \mathscr{T}_W \overline{\Psi}(x^i) \mathscr{T}_W{}^+ = \alpha_T{}^* \overline{\Psi}(x^\nu, -t)\, \gamma^3 \gamma^1 \end{aligned} \tag{6.5.14}$$

причем

$$a_T{}^* \alpha_T = 1. \tag{6.5.15}$$

Плотность 4-вектора электрического тока (5.6.14) обладает правильными трансформационными свойствами.

В случае свободных полей инвариантностью относительно вигнеровского обращения времени обладают и перестановочные соотношения (6.5.5) для поля Дирака. Выражения для законов преобразования операторов рождения и уничтожения мы здесь приводить не будем.

Для интегральных величин (6.5.6) — (6.5.8) следуют законы преобразования

$$\begin{gathered} \text{а)}\ \mathscr{T}_W Q \mathscr{T}_W{}^+ = Q, \quad \text{б)}\ \mathscr{T}_W P_\mu \mathscr{T}_W{}^+ = -P_\mu, \\ \text{в)}\ \mathscr{T}_W H \mathscr{T}_W{}^+ = H. \end{gathered} \tag{6.5.16}$$

Мы не будем выводить здесь явного вида оператора вигнеровского обращения времени.

В. Зарядовое сопряжение

Здесь также нельзя обойтись без представления лагранжевой плотности (5.6.12) как нормального произведения, чтобы доказать ее инвариантность относительно зарядового сопряжения. Постулируемые трансформационные свойства

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \Psi' = \mathscr{C} \Psi \mathscr{C}^+ = \mathfrak{B} \overline{\Psi}^T, \\ &\text{б)}\ \overline{\Psi}' = \mathscr{C} \overline{\Psi} \mathscr{C}^+ = \Psi^T \beta \mathfrak{B}^+ \beta \end{aligned} \tag{6.5.17}$$

приводят для произвольно взятой матрицы $\mathfrak{B}$ к определяющему уравнению

$$\gamma^i \mathfrak{B} = -\mathfrak{B} (\gamma^i)^T. \tag{6.5.18}$$

Эта матрица определяется с помощью принятого нами за основу стандартного представления матриц Дирака, в котором справедливы соотношения

$$(\gamma_1)^T = -\gamma_1, \quad (\gamma_2)^T = \gamma_2, \quad (\gamma_3)^T = -\gamma_3, \quad (\gamma_4)^T = \gamma_4, \tag{6.5.19}$$

в виде

$$\mathfrak{B} = \alpha_C \gamma_2 \gamma_4, \tag{6.5.20}$$

так что

$$\mathfrak{B}\beta = -\beta\mathfrak{B} \quad (\beta = i\gamma^4). \tag{6.5.21}$$

При этом свободный постоянный множитель α_C должен удовлетворять соотношению

$$\alpha_C{}^* \alpha_C = 1. \tag{6.5.22}$$

Тогда

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}^+ = 1. \tag{6.5.23}$$

Для свободных полей нетрудно доказать инвариантность перестановочных соотношений. Вывод трансформационных свойств операторов рождения и уничтожения также не представляет затруднений. Приводить их здесь мы не будем.

Законы преобразования указанных выше интегральных величин выражаются тогда в виде

$$\text{а) } \mathscr{C}Q\mathscr{C}^+ = -Q, \quad \text{б) } \mathscr{C}P_\mu\mathscr{C}^+ = P_\mu, \quad \text{в) } \mathscr{C}H\mathscr{C}^+ = H. \tag{6.5.24}$$

Здесь также применяется использованный выше метод явного построения оператора зарядового сопряжения.

§ 6. *$\mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{C}$-теорема Паули и Людерса*

До сих пор мы исследовали по отдельности три дискретных преобразования $\mathscr{P}$, $\mathscr{T}$ и $\mathscr{C}$ как в общем виде, так и в приложении к конкретным полям. При этом удалось найти, что теории полей Максвелла, Клейна — Гордона и Дирака инвариантны относительно каждой из этих операций. Мы переходим теперь к $\mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{C}$-теореме, в которой, наконец, устанавливается взаимосвязь между всеми этими тремя преобразованиями. Затем мы выясним связь этих вопросов с лоренц-инвариантностью конкретной теории.

Указанная теорема была открыта еще в то время, когда не возникало сомнений об инвариантности физических теорий относительно каждой дискретной операции в отдельности, а именно до 1956 г. На конкретных примерах обнаруживалось, что теории, инвариантные относительно собственных преобразований Лоренца и пространственных отражений, инвариантны также относительно обращения времени или зарядового сопряжения [14]. Людерс смог показать [15], что $\mathscr{P}$-инвариантная релятивистская квантовая теория какого-либо поля автоматически инвариантна и относительно комбинированной операции $\mathscr{C}\mathscr{T}$. Дать окончательное общее доказательство этой теоремы удалось в 1957 г. Паули [16]. Дальнейшие важные исследования в этом направлении принадлежат Беллу и Йосту [17].

Эти результаты приобрели исключительную важность, когда было открыто, что в ядерной физике существуют взаимодействия, не инвариантные относительно отдельно взятых дискретных преобразований. Так, большую известность получила замечательная теоретическая работа Ли и Янга [4], в которой ими было предсказано нарушение $\mathscr{P}$-инвариантности в слабых взаимодействиях. Такое нарушение этой симметрии приводит, согласно изложенной выше теории, к несохранению пространственной четности. Тем самым была поколеблена прежде не подлежавшая сомнениям уверенность в право-левой симметрии законов природы. Таким образом, в процессах, обусловленных слабыми взаимодействиями, в частности в процессах, в которых участвует нейтрино, правое и левое винтовые направления оказались неравноценными.

По вопросам, связанным с доказательством $\mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{C}$-теоремы, мы отсылаем читателя к специальной литературе, так как оно требует привлечения мощных теоретико-групповых методов. Содержание же этой теоремы таково.

Если квантовая теория данного поля удовлетворяет требованиям:

а) локальности,

б) инвариантности лагранжевой плотности, имеющей вид нормального произведения, относительно собственных преобразований Лоренца,

в) стандартной связи между спином и статистикой, г) коммутативности бозе-полей со всеми остальными независимыми полями и антикоммутативности ферми-полей со всеми другими независимыми ферми-полями,

то эта теория инвариантна относительно комбинированной операции $\mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{C}$.

Тот факт, что комбинированный оператор $\mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{C}$ не может быть пропорционален единичному оператору, т. е. что речь идет не просто о тождественном преобразовании, следует из обращения порядка сомножителей под действием оператора $\mathscr{T}$ (в швингеровской формулировке).

$\mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{C}$-теорема играет важнейшую роль в физике ядра и элементарных частиц, позволяя там делать целый ряд предсказаний о протекании процессов, наблюдаемых экспериментально. Здесь невозможно дать исчерпывающее изложение этих вопросов. Мы хотим лишь охарактеризовать здесь область применимости этой теоремы (диапазон проблем) на двух конкретных примерах.

1. Для системы частиц, согласно сделанным выше заключениям, дискретные операции, взятые по отдельности, представляются следующим образом:

Пространственное отражение переводит частицу с координатами x^μ, импульсом p_μ и спином d_μ в частицу с координатами $-x^\mu$, импульсом $-p_\mu$ и спином d_μ.

Обращение времени переводит частицу с координатами x^μ, импульсом p_μ и спином d_μ в частицу с координатами x^μ, импульсом $-p_\mu$ и спином $-d_\mu$.

Обращение времени сказывается на состоянии системы таким образом, что влетающая (вылетающая) частица превращается в вылетающую (влетающую).

Зарядовое сопряжение оставляет без изменения координаты, импульс и спин частицы, заменяя ее, однако, на соответствующую античастицу.

На этом основании следует заключить, что вероятности следующих двух процессов должны совпадать (индексы, характеризующие частицу, отброшены):

I. Частица $(x^\mu, p_\mu, d_\mu) \to$ частица $(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu, \bar{d}_\mu)$.

II. Античастица $(-x^\mu, p_\mu, -d_\mu) \to$ античастица $(-\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu, -\bar{d}_\mu)$.

2. Примерами процессов, обусловленных *слабыми взаимодействиями*, являются реакции

$$n \to p^+ + e^- + \nu \quad (\beta\text{-распад}),$$

$$\mu \to e + \nu + \overline{\nu},$$

$$\pi \to \mu + \nu.$$

Несохранение пространственной четности было экспериментально подтверждено, в частности, в опытах Ву, где использовалась ядерная реакция β-распада

$$\mathrm{Co}^{60} \to \mathrm{Ni}^{60} + e^- + \nu.$$

В этих опытах измерялась угловая зависимость скорости $\mathfrak{v}$ электронов, излучаемых атомами кобальта, помещенными во внешнее магнитное поле $\mathfrak{B}$ (образец во избежание тепловых возмущений находился при сверхнизких температурах). Так как скалярное произведение $(\mathfrak{v}\mathfrak{B})$ является псевдоскаляром относительно пространственных отражений, угловое распределение должно обладать асимметрией, если слабые взаимодействия нарушают $\mathcal{P}$-инвариантность.

Согласно $\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{C}$-теореме, слабые взаимодействия должны также нарушать и $\mathcal{T}\mathcal{C}$-инвариантность.

Сначала полагали, что при нарушении $\mathcal{P}$-инвариантности должна сохраняться хотя бы $\mathcal{P}\mathcal{C}$-инвариантность и должно быть справедливо утверждение: «Наблюдаемый в зеркале процесс отличается от исходного заменой частиц на античастицы» [1]). При этом, согласно $\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{C}$-теореме, слабые взаимодействия оставляли бы в силе и $\mathcal{T}$-инвариантность. Однако в 1964 г. и это утверждение подверглось серьезным сомнениям. Именно, Кристенсен, Кронин, Фитч и Тэрли детально исследовали распад нейтрального K_2-мезона на два пиона

$$K_2 \to \pi^+ + \pi^-.$$

Результаты позволяют думать, что зеркально отраженный процесс, имеющий место для античастиц, в природе не идет с той же кривой распада, что и исходный. По-види-

[1]) См. замечательные рассуждения по этим вопросам, опубликованные в 1957 г. Ландау ([23], стр. 349 и 352).— *Прим. перев.*

мому, может нарушаться и $\mathcal{PC}$-инвариантность, а вместе с ней и $\mathcal{T}$-инвариантность.

$\mathcal{PTC}$-теорема представляет большой интерес и с точки зрения астрофизики. Зарядовое сопряжение переводит материю в антиматерию (которая также является материей в философском смысле этого слова). Поскольку в лабораторных условиях уже удалось получить простейшие атомы антиматерии, встает вопрос о существовании целых антигалактик. Но свет не обладает зарядом, и поэтому, приходя к нам на Землю из космоса, он не может принести информацию о том, излучен ли он галактикой или антигалактикой. Положение было бы иным, если бы у нас имелась в распоряжении кривая распада $\overline{K}_2$-мезона из другой галактики. Ввиду нарушения $\mathcal{PC}$-инвариантности тогда можно было бы дать однозначный ответ относительно природы этой галактики.

ЛИТЕРАТУРА[1])

1. *Noether E.*, Nachr. d. kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 235 (1918) (имеется перевод в сборнике «Вариационные принципы механики», Физматгиз, М., 1959, стр. 611).
2. *Bessel-Hagen E.*, Math. Ann., 84, 258 (1921).
3. *Schmutzer E.*, Relativistische Physik, B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1968.
4. *Lee T. D.*, *Yang C. N.*, Phys. Rev., **104**, 254 (1956) (имеется перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, М., 1957, стр. 13).
5. *Møller C.*, Ann. of Phys., 4, 347 (1958); **12**, 118 (1961); *Мицкевич Н. В.*, Ann. der Phys., 1, 319 (1958).
6. *Rosenfeld L.*, Mém. Acad. Roy. Belg., **18**, 2 (1940).
7. *Belinfante F.*, Physica, 6, 887 (1939).
8. *Bauer H.*, Phys. Zs., **19**, 163 (1918).
9. *Yang C. N.*, *Tiomno J.*, Phys. Rev., 79, 495 (1950); *Watanabe S.*, Rev. Mod. Phys., **27**, 26, 40, 179 (1955).
10. *Federbush P.*, *Grisaru M.*, Nuovo Cim., 9, 890 (1958); *Sudershan E. C. G.*, Proc. Ind. Acad. Sci., 49, 66 (1959); *Wolfenstein L.*, *Ravenhall D. G.*, Phys. Rev., 88, 279 (1953); *Bjorken J. D.*, *Drell S. D.*, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, New York, 1965.
11. *Wigner E. P.*, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 546 (1932) (имеется перевод в книге: *Е. Вигнер*, Этюды о симметрии, изд-во «Мир», М., 1971, стр. 262).
12. *Schwinger J.*, Phys. Rev., **82**, 914 (1951) (имеется перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954, стр. 115, 133).
13. *Valatin J. G.*, Dan. Mat. Fys. Medd., **26**, Nr. 13 (1951); *Schmutzer E.*, Ann. d. Phys., **24**, 397 (1970); Acta Phys. Hung., **34**, 25(1973).
14. *Biedenharn L. C.*, *Rose M. E.*, Phys. Rev., **83**, 459 (1951); *Tolhoek H. A.*, *de Groot S. R.*, Phys. Rev., **84**, 151 (1951).
15. *Lüders G.*, Zs. f. Phys., **133**, 325 (1952).
16. *Pauli W.*, в книге Niels Bohr and the Development of Physics, Pergamon Press, London, 1957 (имеется перевод в книге: «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, М., 1958, стр. 46).
17. *Bell J. S.*, Proc. Roy. Soc. London, **A231**, 479 (1955); *Jost R.*, Helv. Phys. Acta, **30**, 409 (1957).

18*. *Схоутен Я. А.*, Тензорный анализ для физиков, изд-во «Наука», М., 1965.

---

[1]) Литература, отмеченная звездочкой, добавлена переводчиком.

19*. *Яно К.*, *Бохнер С.*, Кривизна и числа Бетти, ИЛ, М., 1957.
20*. *Гантмахер Ф.*, Лекции по аналитической механике, изд-во «Наука», М., 1966.
21*. *Дирак П.*, Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.
22*. *Пенроуз Р.*, Структура пространства-времени, изд-во «Мир», М., 1972.
23*. *Ландау Л. Д.*, Собрание трудов, т. 2, изд-во «Наука», М., 1969.
24*. *Боголюбов Н. Н.*, *Ширков Д. В.*, Введение в теорию квантованных полей, ГИТТЛ, М., 1957 (в 1974 г. выходит новое издание).
25*. *Мицкевич Н. В.*, Физические поля в общей теории относительности, изд-во «Наука», М., 1969.
26*. *Зельманов А. Л.*, ДАН СССР, 61, 993 (1948); 107, 815 (1956); 135, 1367 (1960); 209, 822 (1973).
27*. Эйнштейновский сборник-1971, изд-во «Наука», М., 1972.

Специальная дополнительная литература

Leite Lopes J., Lectures on Symmetries, Gordon and Breach, New York, London and Paris, 1969.
Low F. E., Symmetries and Elementary Particles, Gordon and Breach, New York, London and Paris, 1967.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ Б

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА