Серия REFERO RELATA

*Платон мне друг, но истина дороже*

*Аристотель*

А. А. Сазанов

# ПРЕОДОЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ

## ФИЗИКА

Можно ли отождествить время с пространством?

Наглядное геометрическое объяснение парадоксов теории относительности

Вектор массы и вектор энергии

Некоторые подробности устройства Вселенной, выясняемые с позиций пространства Минковского

URSS

*Relata Refero*

**А. А. Сазанов**

# ПРЕОДОЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ

## ФИЗИКА

URSS
МОСКВА

ББК 22.313 87.22 87.6

**Сазанов Анатолий Анатольевич**

**Преодоление классического мировоззрения: Физика.** — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 280 с. (Relata Refero.)

Наука классического периода развивала мировоззрение древних атомистов, сконцентрированное в афоризме Демокрита «Начало Вселенной — атомы и пустота». Вплоть до конца XIX века атомы химических элементов отождествлялись с теми простейшими неделимыми вечными телесными частицами, которые не нуждаются в какой-либо причине для своего существования, будучи основой всех материальных объектов. И хотя в XX веке физика углубилась в исследования сложной структуры атомов и неклассической корпускулярно-волновой природы элементарных частиц, в общественном сознании до сих пор господствуют философские взгляды, главный вывод из которых выразил Ф. Энгельс: «Тот вещественный чувственно воспринимаемый мир, к которому принадлежим мы сами, есть единственный действительный мир».

Но в XX веке стало выясняться, что корни закономерностей, управляющих вещественным чувственно воспринимаемым миром, находятся не в нем, а сами вещественные тела и их мельчайшие частицы являются не основой материального мира, а внешней формой восприятия нами объектов иной природы, или иного уровня материальности. И дело не только в том, что тот уровень обнаруживается в микромире; но даже в макромире земные и небесные тела оказываются трехмерными видимыми образами форм, порождаемых процессами в четырехмерном пространстве. Осознание этого факта представляет научную революцию более радикальную, глубокую и всеохватную, чем революция, произведенная открытием Николая Коперника. Осмысление картины четырехмерного мира, предложенной сто лет назад Германом Минковским для объяснения теории относительности, является необходимым первоочередным шагом для преодоления рамок классического мировоззрения в сознании образованной публики.

Книга адресуется научным сотрудникам, аспирантам и студентам, интересующимся проблемами мировоззрения.

Издательство «Книжный дом “ЛИБРОКОМ”».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 17,5. Зак. № 2720.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978-5-397-00973-7**



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете:
http://URSS.ru
Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

7162 ID 97521

9 785397 009737

Посвящаю эту книгу моему отцу, Анатолию Николаевичу Сазанову, привившему мне любовь к познанию законов природы и человеческого общества

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — о научном мировоззрении. На протяжении по меньшей мере последнего столетия вся система народного образования воспитывает людей в духе классического научного мировоззрения, которое начало формироваться с открытия Николая Коперника, получило мощный импульс развития в трудах Исаака Ньютона и безраздельно господствовало в науке вплоть до начала XX века. Во второй главе предлагаемой книги анализируются основные идеи классического мировоззрения, выясняется его большая ценность в качестве фундамента и путеводной нити научных исследований, прогресса техники и утверждения культуры в обществе.

Дух динамизма и самокритичности научного познания природы, внесённый в сознание человечества классической наукой, привёл в первой четверти XX века к таким открытиям в физике и математике, которые выявили недостаточность основополагающих принципов классической механики и необходимость замены их более глубокими и общими закономерностями теории относительности и квантовой теории. В связи с тем, что новые соотношения в этих теориях обнаруживались и выражались только с помощью математики, глубокий физический смысл математических формул оказался трудным для расшифровки, и эта работа не может считаться завершённой даже в наши дни. А так как математический аппарат физики XX века довольно сложен и ещё не включён в программы не только среднего, но и высшего образования для тех, кто не избрал соответствующие области своей научной специальностью, то представления, которые могут быть восприняты на уровне популяризации, оказываются довольно бедными и создают впечатление, будто новая физика вносит только уточнения в те результаты, которые могут быть получены и без неё, но более грубо. Как следствие, остаётся не осознанным, что за открытиями физики и астрономии XX века стоит совершенно другая картина мира, принципиально отличающаяся от классической.

Признанная наукой картина мира служит основой для ориентации в более широком круге представлений о действительности, которые не поддаются строгой проверке в научных экспериментах, но заслуживают доверия в качестве логических выводов из уже подтверждённых теорий. Так, классическая картина мира представляет собой более детальную и аргументированную разработку умозрительных построений древних атомистов, которые пришли к прогрессивному и освободительному для их времени выводу о невозможности жизни сознания после смерти тела, поскольку иного мира, чем образованный конструкциями из мельчайших неделимых телесных частиц – атомов, быть не может. Даже в наши дни признание возможности сохранения сознания после смерти тела расценивается в научных кругах, и не только в них, как фантастический религиозный вымысел, в который не подобает верить образованному человеку.

Говоря о картине мира, соответствующей современной физике, следует различать теорию микромира, выраженную в законах квантовой механики, и теорию макромира, выраженную в законах теории относительности. Для выяснения главного, доступного образному (чтобы не сказать — наглядному) выражению отличия современной научной картины мира от классической картины, наиболее важна специальная теория относительности, вернее, её геометрическое объяснение, предложенное Германом Минковским. Уже из этого объяснения вытекает необходимость существования более тонкой и глубокой формы материи, чем доступная восприятиям наших органов чувств материя тел, и сами тела оказываются не глубочайшей основой материального мира, а формой восприятия нами более фундаментальных тонкоматериальных образований. Притом именно в тонкоматериальном мире коренятся основания закономерностей, управляющих наблюдаемым миром тел. Значит есть всё-таки мир иной? Квантовая механика по своему, с иных позиций также свидетельствует о существовании тонкой материи. Правда обнаружение тонкоматериального мира через законы физики само по себе ещё не доказывает возможность освоения его в качестве среды обитания разума, однако строгий запрет на существование мира иного, налагавшийся классическим научным мировоззрением, теперь оказывается снятым.

Для того чтобы делать по возможности надёжные философские мировоззренческие выводы из модели макромира, предложенной Минковским, необходимо дать себе труд разобраться в её математических подробностях, которые сейчас могут быть изложены доступно даже ученику выпускного класса средней школы, а тем более — заинтересованным студентам первого курса любого технического вуза. Не выполнив этой минимальной подготовительной работы, нельзя серьёзно заниматься далеко идущими обобщениями, относящимися к устройству мироздания, возможностям разумной жизни и признакам её наличия во Вселенной.

Чтобы избежать упрёков в поверхностности и антинаучности рассуждений об этих проблемах и их социологических приложениях в свете новых концепций естествознания, автор предлагаемой книги поставлен перед необходимостью дать развёрнутое изложение модели мира Минковского и некоторых принципиальных приложений её к космологии, не привлекших ещё к себе внимания специалистов. Это скорей всего покажется излишеством людям с гуманитарной направленностью мышления, склонным обсуждать эзотерические учения без углубления в математику и физику, и будет расценено ими как неоправданное утяжеление и растягивание книги. Но с другой стороны приходится иметь в виду тот контингент читателей, которые заинтересуются в первую очередь физико-математическими представлениями и лишь в преломлении через них согласятся уделить внимание философским, этическим, социологическим проблемам вступления человечества в космическую эру. Наконец, сам автор книги заинтересован в том, чтобы предложить наиболее аргументированное, полное и разветвлённое изложение своих взглядов. Это тем более необходимо потому, что новое мировоззрение, соответствующее нынешнему и будущему уровню научных знаний, еще не выкристаллизовалось, находится в процессе формирования, и данная книга предлагается в качестве доступного автору вклада в этот процесс.

Содержание книги должно дать молодым читателям также представление о том, что формирование современного и будущего научного мировоззрения — работа весьма масштабная, сопряжённая с прослеживанием всё более длинных цепочек логических связей и охватом широчайшего круга явлений, не допускающая вульгаризаторских упрощений и требующая способности синтезировать несовместимые для поверхностного взгляда противоположности. Всё это указывает на глубочайшую многоплановость и богатейшую многогранность мироздания, открывающие перед нами, людьми, безграничные перспективы жизни и творчества.

На протяжении многих веков человечество жило в неведении, очертив свой кругозор близкими окрестностями доступных для посещения территорий и доступными непосредственному восприятию предметами. Эпоха великих географических открытий и последовавших за ними открытий физики и астрономии окрасила жизнь романтикой дальних странствий и энтузиазмом познания, раздвинув пределы мира, в котором может обитать человек. Облик этого мира, закономерности, которым подчинено его существование, его история, проблемы, которыми он отягощает или облегчает жизнь людей, вошли в сферу внимания человеческого сознания. Пришлось задумываться над вещами, которые обусловлены взаимосвязью Земли с окружающими небесными телами и прежде не беспокоили людей: какова опасность столкновения нашей планеты или нашего Солнца с другими космическими телами, как выжить, когда уменьшится поток солнечной энергии, обогревающей Землю, как противодействовать увеличению дыры в озоновом слое земной атмосферы и многое другое.

Классическая наука расширила до бесконечности пределы Вселенной и время её существования, породив убеждённость в том, что «с той же самой железной необходимостью, с какой <материя> когда-нибудь истребит на земле свой высший цвет — мыслящий дух, она должна будет его снова породить где-нибудь в другом месте и в другое время» (Ф. Энгельс). Но современная космология, обнаружив начальное (сингулярное) состояние Вселенной, уже не гарантирует бесконечность существования её в будущем. Зато в антропном космологическом принципе стала просматриваться возможность причастности невообразимо могущественного разума к возникновению наблюдаемой Вселенной, открывающая перед людьми бесконечные перспективы разумной жизни. Теперь настало время соизмерять встающие перед человечеством проблемы с проблемами существования Вселенной и их зависимостью от глубин материи.

# ВВЕДЕНИЕ:
## КАКОЕ ДЕЛО ЗЕМНЫМ ЛЮДЯМ ДО НЕБА?

Конечно, небо привлекает к себе внимание. В небе находится солнце, освещающее и согревающее землю, и сезонные изменения климатических условий связаны с движением солнца относительно звёзд. Уже древние люди ориентировались по солнцу и звёздам в своих сухопутных и морских путешествиях, а осмысливая красоту звёздного неба, выделяли рисунки созвездий. Этот круг проблем, интересных и существенных для специалистов, побуждал последних расширять и углублять свои представления о небе и наблюдаемых на нём явлениях. Но в обыденной жизни большинства людей, не обременённых ответственностью за использование знаний о небе, интерес к нему даже в наши дни занимает мало места, меньше, пожалуй, чем интерес к погоде, заметно зависящей от облачного покрова.

В свете подобных прагматических соображений выглядит неоправданным повышенное, а в некоторых случаях и гипертрофированное преклонение народов древности перед небесными явлениями как судьбоносными знамениями, вселяющими большей частью чувства ужаса. В мифологии многих народов, расшифрованных древних письменах и свидетельствах о не дошедших до нас более ранних источниках встречаются сведения о неправильностях в движениях Луны и даже о том, что Луна не всегда была на небе, о появлении множества ярких комет вблизи Солнца, производивших впечатление змеев, напавших на тускнеющее светило ("борьба крылатого диска со змеями"). Если такие драмы действительно разыгрывались на небе, то они должны были отозваться на земле крупнейшими геологическими катастрофами и длительным существенным понижением средней температуры. Гипотеза, логически синтезирующая подобные явления, была предложена в середине 60-х годов прошлого века автором этих строк и его отцом и опубликована при поддержке писателя А.П. Казанцева [1]. Особенно важно, что легенды о глобальных и космических катастрофах переплетаются с легендами о небесных пришельцах, спасавших и просвещавших земных людей. Одна из таких легенд широко известна как описанное в Ветхом Завете участие ангелов в строительстве Ноева ковчега для спасения от всемирного потопа. Но, то если и было, то как «дела давно минувших дней, преданье старины глубокой» (А.С. Пушкин, «Руслан и Людмила»), «в незапамятные годы, в дни, когда ещё для смертных небеса и сами боги были ближе и доступней» (Лонгфелло, «Песнь о Гайавате», гл. XII). На протяжении же писаной истории ничего подобного не случалось, а упоминания Священного писания и некоторых почитаемых древних авторов, например Платона, о дошедших до них ещё более древних сведениях не признаются наукой достаточно убедительными свидетельствами. Поэтому сейчас научная общественность практически не интересуется подобной тематикой, осваиваемой жанром научной фантастики и ненаучной развлекательной литературы.

Но общие представления развивающейся науки о небе занимают всё большее место в формировании мировоззрения образованной публики. Ведь в небесах перед нами раскрываются просторы и богатства мироздания, в котором мы живём. Классическая наука раздвинула до бесконечности протяжённость Вселенной во всех направлениях и добыла много ценных сведений о природе наблюдаемых в небе объектов. В XX веке не только продолжено изучение строения Вселенной, но и сделаны удивительнейшие открытия в области её истории. Сверх того обнаружилась глубокая зависимость структуры и эволюции Вселенной от фундаментальных параметров материи. Этот новый круг проблем вводит сознание человека в новые отношения со Вселенной, заставляя видеть в ней не только внешнее место обитания, но и связывая с её эволюцией происхождение и даже смысл человеческой жизни. Становится очень важным, чтобы человеческое сознание всё шире и глубже наполнялось космическим содержанием.

На этот путь подталкивает массовое сознание начавшееся освоение космического пространства, знаменующее вступление земного человечества в космическую эру. Мысль о таком вступлении сейчас у всех на слуху и стала общим местом. Однако для подавляющего большинства людей эта мысль ограничена чисто техническим аспектом — возможностью отправлять летательные аппараты за пределы нашей планеты, поддерживать с ними радиосвязь, исследовать физические процессы в ближнем и в дальнем космосе, добывать полезные минералы на ближайших планетах, их спутниках и астероидах. И очень мало проявляется интереса к тому, в какой связи могут находиться эти естественнонаучные и технические завоевания с проблемами общественных отношений, уровнем интеллектуальной и нравственной развитости людей. Драматизм философского осмысления жизни с космических позиций не проникает пока серьёзно и глубоко в мировосприятие массового сознания, не является ещё основообразующим фактором формирования образа мыслей и образа жизни. Но это уже чревато далеко не безобидным диссонансом с развитием космической деятельности, ибо по мере увеличения научно-технического могущества человечества возрастают опасности, которые могут навлечь на него отдельные люди и сообщества небрежным или злоумышленным вмешательством в стихийные процессы природы.

В наши дни земное человечество подходит к уникальному критическому рубежу своей истории, за которым неизбежно кардинальное изменение образа жизни. Если предоставить ход событий стихийному развитию, то по научно обоснованным оценкам экологов и футурологов [2] к середине XXI века цивилизация окажется на грани неотвратимых катастроф глобального масштаба, обусловленных техногенной порчей природных условий, истощением запасов полезных ископаемых, обострением на почве этих недостатков борьбы между народами и экономическими корпорациями в условиях резко возросших разрушительных возможностей вооружённых сил. Такой сценарий сулит гибель или по меньшей мере глубокую деградацию цивилизации. В прошлом не раз случались падения цивилизаций региональных масштабов, после чего на историческую сцену выступали в роли будущих носителей прогресса новые сообщества. Но сейчас решается судьба цивилизации планетарной и впервые в истории, по крайней мере известной науке истории, человечество стоит перед альтернативой: либо необратимо деградировать в качестве космического субъекта и даже погибнуть, либо прорваться в будущее на уровень космической жизни и творчества. Для этого прорыва отнюдь не достаточно только технических достижений. Насущно необходимо научное осмысление с последующим практическим воплощением в жизни по меньшей мере трёх важных аспектов космического будущего.

Во-первых, требуется незамедлительное совершенствование общественных отношений и решительная переориентация массовой морали на служение общему благу в максимально глубоком и дальновидном понимании его. Крупнейший астроном XX века и инициатор привлечения внимания науки к поискам разумной жизни во Вселенной И.С. Шкловский видел, что реальные угрозы, нависшие над человечеством, могут оборвать успешное развитие нынешней технологической стадии прежде, чем люди окажутся в состоянии осуществлять крупные проекты по переселению за пределы родной планеты. «Уже сейчас мы начинаем осознавать возможность серьёзных кризисных ситуаций, с которыми может столкнуться дальнейшее развитие человечества, так как размеры и невосполнимые ресурсы земного шара ограничены… Уже сейчас ясно, что количественный экспоненциальный рост производительных сил в перспективе ближайшего столетия может сделать нашу планету непригодной для жизни (перегрев поверхности Земли, разрушение озоносферы, сверхперенаселение, катастрофическое загрязнение воздуха, воды и пр.)» [3, с. 83]. «... все глобальные процессы (рост производства и народонаселения, загрязнение окружающей среды) имеют **инерцию** (“задержки”). Время торможения неконтролируемых параметров развития сейчас подходит к тому критическому пределу, когда оно сравнивается со сроками наступления кризисной ситуации. А это означает, что если предоставить “земные дела” самотёку, то времени для **реального** освоения космического пространства скорее всего не хватит... Отсюда следует основной вывод: чтобы эффективно осваивать Космос, надо “навести порядок в собственном доме”, т.е. у нас на Земле. А это есть проблема прежде всего социальная» [3, с. 84]. Так три десятилетия назад Шкловский призывал общественность к осознанию того, что земное человечество уже подошло к рубежу, за которым заботы о выживании и прогрессе оказываются актуально связанными с проблемой жизни в космосе (по меньшей мере с нашим выходом в космическое пространство) казавшейся в предшествующие века весьма далёкой от текущих практических проблем и имевшей лишь теоретический интерес.

Задача наведения порядка в земном доме представлялась сторонникам коммунистической идеи в общих чертах ясной. Но, как обнаружилось в последнем десятилетии XX века, даже в СССР не хватило искренне убеждённых сторонников коммунистического будущего, раз под лозунгами улучшения социалистического образа жизни противники его смогли навязать народу разрушение социализма и стремление к личному обогащению в качестве главного стимула деятельности. Почва для нынешнего поражения коммунистической идеи подготовлена низведением её в массовом сознании до изобильного потребительства, недостатком глубины и широты философского и научного обоснования величия и безальтернативности цели служения общему благу. В XX веке, богатом историческими событиями и научными открытиями мировоззренческой значимости, не была в должной степени развита и обогащена теория коммунизма, разработанная ещё на базе классического научного мировоззрения. Теория классиков могла осветить путь к совершению социалистических революций в некоторых странах и к подъёму национально освободительного движения, но оказалась недостаточной для увлечения всего человечества в космическое будущее. Теперь предстоит осознать насущную потребность в новой идеологической работе и выполнять её.

Во-вторых, логическим дополнением к грандиозности космических расстояний являются глубины материи, и проникновение в эти глубины неотделимо от завоевания космических далей. До открытия элементарных частиц классическая наука отождествляла атомы химических элементов с умозрительным представлением древних философов о простейших неделимых телах как предельно глубокой первичной основе материального мира. Отсюда проистекала убеждённость в том, «что вещественный чувственно воспринимаемый мир, к которому принадлежим мы сами, есть единственный действительный мир» [4, с. 285]. В XX веке квантовая механика и модель мира Минковского, объясняющая специальную теорию относительности, привели к пониманию тел как поверхностного восприятия нами более тонких форм материи, не известных классической науке. Достижения современных средств связи, информатики, ядерной энергетики опираются на закономерности, коренящиеся в более глубоких уровнях материи, чем уровень чувственно воспринимаемых тел и предполагавшихся мельчайших неделимых телец. За научным обнаружением и техническим использованием тонкоматериального мира как поля приложения творческих способностей разума просматривается задача освоения этого мира в качестве среды обитания мыслящих существ.

В-третьих, доступная современной научной мысли экстраполяция жизнеспособности и творческих возможностей разума позволяет усматривать черты реалистичности в древних преданиях и религиозных учениях о причастности могущественных и мудрых неземных существ к воспитанию земных людей и влиянию на ход истории. При этом всё детальней вырисовывается сложность проблемы контакта и сотрудничества высокоразвитого разума с менее развитым, не дозревшим до осмысления ценности дальней цели эволюции и меры собственной ответственности за движение к ней, легко настраивающимся с одной стороны на потребительское и иждивенческое, а с другой — на рабское отношение к высшим. Именно сейчас мы стоим на пороге того уровня развития, о котором в некоторых древних источниках говорится как об очень отдалённом будущем. Представления о прекрасном будущем, суждённом людям, могли зародиться в их сознании в виде мечты. Но почему у истоков мечты оказываются, как правило, небесные пришельцы? В «Книге Еноха» [5], предка библейского Ноя, говорится о том, что Енох был взят на небо, где ангелы показали ему святое видéние: «от них я слышал всё и уразумел, что видел, но не для этого рода, а для родов отдалённых, которые явятся» (1-ый отдел). «Пришла мудрость, чтобы жить между сынами человеческими, и не нашла себе места; тогда мудрость возвратилась назад в своё место» (7-ой отдел). Пророчества об эпохе мудрости и счастья могут начать сбываться именно в наше время, если мы сумеем прорваться через угрожающие нынешней цивилизации бедствия к уже доступным воображению космическим достижениям. Этот прорыв может стать результатом только осознанных целенаправленных усилий по крайней мере передовой общественности, способной осмыслить значение пройденного человечеством исторического пути, и в первую очередь — пути познания устройства мироздания и места человека в нём. Извлекая с позиций углублённого научного рационализма принципы космической этики из древних учений, очищенные от искажений невежества и своекорыстия, очень важно находить им должное место в формировании культурного облика современного и будущего человечества как синтеза новейших достижений и мудрости тысячелетий.

На протяжении минувших веков, ознаменованных развитием классической науки после Николая Коперника, вопрос о космичности задач человечества не обретал современной остроты, но инкубационный этап его вызревания был совершенно необходим. Даже Христианская церковь, исповедующая на словах небесное происхождение Иисуса Христа («Иисус начал проповедовать и говорить: покайтесь, ибо приблизилось Царство Небесное» Мф., 4, 17; «Я сошёл с небес…» Иоанн, 6, 38; «Я от Бога исшёл и пришёл» Иоанн, 8, 42), равно как и призыв «Ищите же прежде Царства Божия и правды Его» (Мф., 6, 33), на деле не развивала космического мировоззрения. Она не могла этого делать, не владея достаточно близкими к истине представлениями о космосе. А сведя искание и завоевание Царства Небесного («Царство Небесное силою берётся, и употребляющие усилие восхищают его» Мф., 11, 12) только к личному нравственному совершенствованию, церковь сама проявляла больше усердия в защите интересов господствующих слоёв общества и своих собственных, чем в установлении социальной справедливости, требуемой второй из двух главнейших заповедей: «возлюби ближнего твоего как самого себя» (Мф., 22, 39). Поэтому неизбежно было пытливому человеческому разуму приступить к выяснению истин об устройстве мироздания и смысле жизни.

Открытие Коперника показывало людям, что они являются обитателями не только Земли, ограниченность которой стала измеримой с началом кругосветных путешествий, но и звёздной Вселенной, размеры которой не поддаются надёжной оценке даже в наши дни. Гелиоцентрическая система мира взломала убеждённость древних мыслителей в *принципиальном отличии небесных* объектов от земных и мощно стимулировала выявление универсальных законов единой материи, управляющих земными и небесными явлениями. Познание и использование этих законов увеличивало могущество людей, их свободу и независимость от природы и вместе с тем воспитывало в людях предусмотрительность и ответственность за свои поступки. Научная теория проложила путь бурному развитию техники, позволявшему всё успешней и интенсивней использовать богатства природы для удовлетворения человеческих потребностей.

Но эта естественная и не лишённая разумного оправдания тенденция принимает уродливые формы в обстановке расслоения общества на богатых и бедных. Избыточное потребление богатых и его разительный контраст с нуждами неимущих ориентирует сознание общества на устремление к личному материальному обогащению как высшей ценности жизни вопреки неоднократным предостережениям христианского Евангелия против этого извращения. «Не можете служить Богу и маммоне (богатству)» (Мф., 6, 24). «…берегитесь любостяжания, ибо жизнь человека не зависит от изобилия его имения» (Лк., 12, 15). «Иисус же сказал ученикам Своим: истинно говорю вам, что трудно богатому войти в Царство Небесное… удобнее верблюду пройти сквозь игольные уши, нежели богатому войти в Царство Божие» (Мф., 19, 23-24). И апостол Павел в первом послании к Тимофею говорит: «… корень всех зол есть сребролюбие» (6,10). Как следствие жажды наживы, причём наживы сиюминутной ("а после нас хоть трава не расти"), природные ресурсы расходуются хищнически, без разумной бережливости и своевременного восстановления, а то и безвозвратно истребляются. Такое "освоение" планеты уже привело к преждевременной угрозе глобального экологического кризиса. Как следствие, вместо гармоничного, поступательно подготовляемого врастания земного человечества *в небо, теперь предстоит аврально*, в судорогах социальных и межнациональных противоречий бороться за прорыв к космическому образу мыслей и образу жизни как спасительной альтернативе традиционной бездуховности, ставшей смертельно опасной для цивилизации.

# Глава 1.
# НАШЕЙ ПЛАНЕТЕ СРОЧНО НУЖНА НООСФЕРА

> **...преступна беззаботность мира. Неужели не замечают опасности?**
>
> **Книга «Озарение», 2, X, 8.**

> **Но теперь-то угрожает не некий гипотетический гнев божий, мы гибельно опасны самим себе своим возросшим могуществом, своей необузданной энергией, своим неуправляемым поведением.**
>
> **Тендряков В.Ф. «Покушение на миражи», [6, с. 30, глава первая, 4].**

## § 1. ПОРОЖДЕНИЕ БИОСФЕРЫ СТАЛО УГРОЗОЙ ДЛЯ НЕЁ

На протяжении нескольких миллиардов лет истории нашей планеты формировались её атмосфера, литосфера (земная кора и верхняя часть мантии), гидросфера, и на основе этих оболочек стали возникать и эволюционировать биологические организмы, общая совокупность которых обозначается в науке термином **биосфера**. В современном понимании биосфера — это область распространения жизни на Земле, состав, структура и энергетика которой определяются главным образом прошлой и современной деятельностью живых организмов. Биосфера включает населённую организмами верхнюю часть литосферы, воды океанов, морей, рек, озёр (гидросферу) и нижнюю часть атмосферы (тропосферу). Для краткой характеристики основных черт биосферы воспользуемся высказываниями великого русского учёного Владимира Ивановича Вернадского (1863 – 1945). «Понятие "биосферы", т.е. "области жизни", введено было в биологию Ламарком (1744 – 1829) в Париже в начале XIX века, а в геологию Э. Зюссом (1831 – 1914) в Вене в конце того же века. В нашем столетии биосфера получает совершенно новое понимание. Она выявляется как *планетное* явление *космического* характера... В архивах науки, в том числе и нашей, мысль о жизни как о космическом явлении существовала уже давно... в конце XVII века голландский учёный Христиан Гюйгенс (1629 – 1695) в своей предсмертной работе, в книге "Космотеорос", вышедшей в свет уже после его смерти, научно выдвинул эту проблему. Книга эта была дважды, по инициативе Петра I, издана на русском языке под заглавием "Книга мировоззрения" в первой четверти XVIII века. Гюйгенс в ней установил научное обобщение, что "жизнь есть космическое явление, в чём-то резко отличное от косной материи". Это обобщение я назвал недавно "принципом Гюйгенса" (так же называется широко известный в физике принцип, предложенный Гюйгенсом для объяснения преломления и отражения света и развитый позже Френелем для объяснения явлений дифракции и интерференции света — А.С.) Живое вещество по весу составляет ничтожную часть планеты... Количество его исчисляется долями, не превышающими десятых долей процента биосферы по весу, порядка, близкого к 0,25%... Вне биосферы его нет...Если количество живого вещества теряется перед косной и биокосной массами биосферы, то биогенные породы (т.е. созданные живым веществом) составляют огромную часть её *массы, идут далеко за пределы биосферы.* Учитывая явления метаморфизма, они превращаются, теряя всякие следы жизни, в гранитную оболочку, выходят из биосферы. Гранитная оболочка Земли есть область былых биосфер. В замечательной по многим мыслям книге Ламарка "Hydrogéologie" (1802) живое вещество, как я его понимаю, являлось создателем главных горных пород нашей планеты...Пятьсот миллионов лет тому назад, в кембрийской геологической эре, впервые в биосфере появились богатые кальцием скелетные образования животных, а растений — более двух миллиардов лет тому назад. Эта кальциевая функция живого вещества, ныне мощно развитая, была одной из важнейших эволюционных стадий геологического изменения биосферы. Не менее важное изменение биосферы произошло 70 – 110 миллионов лет назад, во время меловой системы и особенно третичной. В эту эпоху впервые создались в биосфере наши зелёные леса, всем нам родные и близкие» [7].

Начиная с первой мировой войны, В.И. Вернадский углубляется в исследование окружающей природы как закономерного геохимического и биогеохимического эволюционного процесса. Он пишет, что «стоя на эмпирической почве... оставил в стороне, сколько был в состоянии, всякие философские искания и старался опираться только на точно установленные научные и эмпирические факты и обобщения, изредка допуская рабочие научные гипотезы» [7]. Это позволяет нам теперь опираться на результаты работ Вернадского как на надёжное естественнонаучное основание при осмыслении мировоззренческих открытий биологии, физики и астрономии XX века. Первый крупный мировоззренческий вывод из идей Вернадского сделали его французские коллеги Е. Леруа и Тейяр де Шарден. «В 1922 – 1923 гг. на лекциях в Сорбонне в Париже, — пишет В.И. Вернадский, — я принял как основу биосферы биогеохимические явления... Приняв установленную мною биогеохимическую основу биосферы за исходное, французский математик и философ... Е. Леруа в своих лекциях в Коллеж де Франс в Париже ввёл в 1927 г. понятие *ноосферы* как современной стадии, геологически переживаемой биосферой. Он подчёркивал при этом, что он пришёл к такому представлению вместе со своим другом, крупнейшим геологом и палеонтологом Тейяром де Шарденом» [7, 8].

Таким образом, родоначальники понятия и названия ноосферы («из греческого *ноос* — "разум" и *сфера* в смысле оболочки Земли» — В.И.

Вернадский [7]) считали ноосферу уже "современной стадией, геологически переживаемой биосферой" после появления в ней биологического вида *homo sapiens* (человека разумного), подчёркивая своё отношение к последнему как к новому геологическому фактору, весьма активному. «Ноосфера есть новое геологическое явление на нашей планете, — пишет Вернадский [7]. — В ней впервые человек становится крупнейшей геологической силой. Он может и должен перестраивать своим трудом и мыслью область своей жизни, перестраивать коренным образом то, что было раньше... Лик планеты — биосфера — химически резко меняется человеком сознательно и главным образом бессознательно. Меняется человеком физически и химически воздушная оболочка суши, все её природные воды. В результате роста человеческой культуры в XX веке всё более резко стали меняться (химически и биологически) прибрежные моря и части Океана... *Ноосфера* — последнее из многих состояний эволюции биосферы в геологической истории — состояние наших дней... В ярком образе экономист Л. Брентано иллюстрировал планетную значимость этого явления. Он подсчитал, что если бы каждому человеку дать один квадратный метр и поставить всех людей рядом, они не заняли бы даже всей площади маленького Боденского озера на границе Баварии и Швейцарии. Остальная поверхность Земли осталась бы пустой от человека. Таким образом, всё человечество, вместе взятое, представляет ничтожную массу вещества планеты. Мощь его связана не с его материей, но с его мозгом, с его разумом и направленным этим разумом его трудом».

В этой связи В.И. Вернадский подчёркивает проблему, которая хотя и давно замечена, но не занимает заслуживаемого ею места даже в сознании интеллигенции, не говоря уже о массовом сознании. «Здесь перед нами встала новая загадка. Мысль не есть форма энергии. Как же может она изменять материальные процессы? Вопрос этот до сих пор научно не разрешён. Его поставил впервые, сколько я знаю, американский учёный, родившийся во Львове, математик и биофизик Альфред Лотка. Но решить его он не мог...Эмпирические результаты такого "непонятного" процесса мы видим кругом нас на каждом шагу» [7].

Вернадский указывает, что процесс, ведущий к формированию ноосферы в качестве геологической оболочки, прослеживается на протяжении длительной эволюции биосферы. «Младшие современники Ч. Дарвина — Д.Д. Дана (1813 - 1895) и Д. Ле Конт (1823 - 1901) — два крупнейших североамериканских геолога (а Дана к тому же минералог и биолог) — выявили ещё до 1859 г. эмпирическое обобщение, которое показывает, что эволюция живого вещества идёт в определённом направлении. Это явление было названо Дана *цефализацией*, а Ле Контом — *психозойской эрой*...Эмпирические представления о направленности эволюционного процесса — без попыток теоретически обосновать — идут глубже, в XVIII век... Дана указал, что в ходе геологического времени... т.е. на протяжении двух миллиардов лет по крайней мере, а наверное много больше, наблюдается (скачками) усовершенствование — рост — центральной нервной системы (мозга), начиная от ракообразных, на которых эмпирически и установил свой принцип Дана, *и от моллюсков* (головоногих) и кончая человеком. Это явление и названо им цефализацией. Раз достигнутый уровень *мозга* (центральной нервной системы в... эволюции не идёт уже вспять, только вперёд» [7].

Сам процесс усложнения организации продуктов естественной эволюции, идущий в направлении уменьшения энтропии, является другой великой загадкой для классического научного мировоззрения, к которой мы ещё обратимся в этой книге. Вывод же науки о появлении в качестве высшего результата эволюции биосферы биологического вида человека, способного мыслить и осознано направлять свою деятельность к достижению определённых целей, мог бы рассматриваться как подтверждение библейской версии о сотворении человека после сотворения всех предшествующих физических условий для его существования. Конечно, это сопряжено с кардинальным расширением и углублением упрощённой библейской аллегории, с истолкованием дней божественного творчества как огромных и не одинаковых по длительности эволюционных этапов. Но именно невообразимая грандиозность раскрывающихся перед наукой тайн природы и закономерный автоматизм естественных процессов побуждали не истолковывать, а отвергать религиозные представления вместе с верой в Бога. А взгляд на человека как на венец творения трансформировался в признание человечества царём природы, которому не подобает ждать от неё милостей, а подобает брать их в меру своих способностей.

Вплоть до середины XX века резервуар "милостей природы" казался неисчерпаемым, а задача производственной деятельности виделась в том, чтобы как можно шире и интенсивней эксплуатировать природу: добывать и перерабатывать всё больше угля, нефти, газа, металлов, активней использовать гидроресурсы на нужды промышленности, орошение земель и выработку электроэнергии, вовлекать в потребление людей как можно больше биоты (совокупности растений и животных). Лишь немногие наиболее глубоко мыслящие учёные видели и предупреждали, что безудержная неосмотрительная техническая деятельность людей может стать великой угрозой для биосферы Земли, а значит и для существования земного человечества. Подобные предостережения фактически не учитывались хозяйственными и политическими руководителями, ибо тем и другим проще было отмахнуться: на наш век хватит, да и задачи перед нами стоят неотложные, а потомки в своём счастливом будущем что-нибудь придумают. Но вот уже люди стали ощущать недостаток доброкачественной питьевой воды, незагрязнённого животворного воздуха, экологически чистой сельскохозяйственной продукции, сохранности озонового слоя атмосферы.

Тысячелетиями природа и человеческое общество, находясь во власти всеохватной борьбы за выживание и усиление биологических видов и особей, людских племен и государственных объединений, сохранялись как цельная геосоциальная система, управляемая законами стихийной самоорганизации. Роль авторегулятора этой системы и её подсистем выполнял закон Ле Шателье – Брауна: на возмущение, выводящее систему из состояния равновесия, она реагирует таким образом, что равновесие смещается в направлении, при котором влияние возмущения становится минимальным. Этот защитный механизм обеспечивает выживание биологических систем в допустимых для них пределах изменения условий и само существование биосферы. Но такой автоматизм работает лишь в ограниченном диапазоне воздействий, при выходе за который система претерпевает необратимое изменение: либо переходит в качественно новое состояние равновесия, либо разрушается. Современные техногенные воздействия на биосферу, по оценкам экологов, превышают в несколько раз критическое значение, позволяющее закону Ле Шателье – Брауна поддерживать привычное и благоприятное для человечества экологическое равновесие. Значит нужно ожидать необратимых изменений, и если даже биосфера в целом не разрушится, а перейдет в качественно новое состояние равновесия, последнее скорей всего окажется непригодным для жизни людей. Чтобы характеризовать остроту надвигающегося кризиса выводами авторитетных специалистов, воспользуемся цитатами из монографии [2] Л.В. Лескова, опирающейся на огромный фактический материал.

«Биосфера способна сохранять устойчивость в соответствии с принципом Ле Шателье – Брауна при условии, что доля её первичной продукции, которую человек изымает из естественных трофических цепей, не превышает 1%. Между тем в настоящее время эта величина превышает уже 10%. Процесс разрушения природных биоценозов[1)] идёт все убыстряющимися темпами. Потенциал природных ресурсов снижается примерно на 3% в год из-за ущерба, наносимого среде хозяйственной деятельностью. Масштабы этого воздействия столь велики, что с поверхности планеты ежедневно исчезает один биологический вид. Гибель тропических лесов происходит с огромной скоростью — 5% в год» [2, с. 7].

«Человек превратился в крупнейшего производителя мусора на Земле: он выводит из естественного кругооборота в две тысячи раз больше веществ органического происхождения, чем вся остальная природа. Ежегодно в океан сбрасывается 600 тысяч тонн нефти и нефтепродуктов. На атомных электростанциях производится около 100 тысяч тонн радиоактивных отходов в год. Проблема их захоронения до сих пор не имеет гарантированно безопасного решения. Во многих регионах мира ощущается нехватка чистой воды. В развивающихся странах 80% болезней обуслов-

---

[1)] Биоценоз — сообщество приспособленных друг к другу и к конкретной среде обитания животных, растений, грибов и микроорганизмов, населяющих участок суши или водоёма с однородными условиями жизни.

лены именно этой причиной. Увеличение выбросов углекислого газа в атмосферу ведет к росту средней глобальной температуры» [2, с. 7]. Последнее чревато затоплением многих областей суши (включая густонаселённые) в близком будущем вследствие таяния полярных ледяных шапок.

«Неравенство между богатыми и бедными странами не только сохраняется, но и нарастает. Двадцать процентов населения в развитых странах располагают 83% мирового дохода в то время, как на долю 20% беднейшего населения остается всего 1,4%. При этом, согласно прогнозу ООН, численность народонаселения Земли увеличится к 2020 году с 5,5 до 8 миллиардов человек главным образом за счет развивающихся стран. Обобщенным фактором материального благополучия в современную индустриальную эпоху следует считать удельное потребление энергии, иными словами, её потребление в расчёте на душу населения. Разрыв в удельном потреблении энергии между странами, относящимися к Северу и к Югу, достигает в среднем 500 %. Чтобы снизить эту величину (в условиях продолжающегося роста численности населения развивающихся стран), потребуется увеличить эксплуатацию природных ресурсов в 30 – 40 раз. По этим причинам нет ни малейших оснований полагать, что остроту современного социально – экологического кризиса, который угрожает Земле гибелью, удастся смягчить без радикальных изменений менталитета и образа жизни людей в глобальном масштабе» [2, с. 7-8].

При сохранении нынешних темпов снижения потенциала природных ресурсов (3% в год) эти ресурсы будут исчерпаны в течение трех десятилетий. А если учесть стремление развивающихся стран подниматься до уровня стран высокоразвитых в промышленном отношении, то срок окажется и того меньше. Синергетика, молодая бурно развивающаяся отрасль науки, вскрывает усугубляющие обстоятельства кризиса. Как выясняется, способность открытой нелинейной системы к самоорганизации и автоматическому поддержанию устойчивого развития по некоторому пути, называемому аттрактором, приводит к тому, что смена аттрактора происходит не постепенно в соответствии с постепенным изменением внешних условий и параметров системы, а скачком, взрывообразно. Поэтому легко поддаваясь успокоительной надежде, что “еще не вечер” и мы еще успеем отреагировать на отслеживаемые нами постепенные изменения, мы можем ранее ожидаемого срока оказаться перед лицом катастрофического перехода системы в неустойчивое состояние, которым уже не удастся управлять и которому окажется невозможно противиться. Именно так произошло политическое разрушение Советского Союза, повлекшее за собой разрушение экономики во всех республиках. Недругам России следует не столько радоваться этому неожиданному для них подарку, сколько с разумной обеспокоенностью воспринять это как прообраз ещё более грандиозной катастрофы, угрожающей всему человечеству. Может быть нынешнее 10-кратное превышение допустимого истребления биоты (10%

вместо безопасного для судьбы людей 1%) уже в ближайшие годы сделает неотвратимым наступление обвальной планетарной экологической катастрофы. А когда обвал начнётся, никакие наши меры предосторожности уже не смогут предотвратить его.

Грядёт конец света? Уже почти две тысячи лет со времени Откровения (Апокалипсиса) Иоанна Богослова проповедники пугают людей близким концом света. Передовая научная мысль на протяжении последних веков выработала противоядие против этой эпидемии религиозного страха, и теперь общество в целом стало невосприимчивым к угрозам подобного рода. Но ведь надобно видеть разницу между лжепророчествами религиозных фанатиков сектантского толка (неоднократно указывавших даже точную дату Страшного Суда) и предсказаниями, опирающимися на **научный** анализ нынешних условий жизни. Тех, кто еще не придаёт серьёзного значения экологическим исследованиям, должна насторожить по крайней мере неоспоримо фиксируемая динамика роста народонаселения. К началу XX века население Земли составляло 1,5 миллиарда человек и время его удвоения равнялось 70 годам, а на исходе XX века население достигло 5,7 миллиардов человек и время его удвоения уменьшилось до 40 лет. Сохранение нынешнего ускорения обещает практически бесконечное увеличение народонаселения уже к 2030 году, а с учётом возможных механизмов торможения численность населения может стабилизироваться в XXI веке на уровне 12 – 14 миллиардов человек. Даже это число будет катастрофически опасным при нынешних условиях и тенденциях развития. Биосфера планеты может не выдержать нагрузки, возлагаемой на неё неразумной жизнедеятельностью расплодившегося биологического вида *homo sapiens*, и тогда начнутся обвальные процессы, приводящие к острой нехватке не только сельскохозяйственной продукции, но и питьевой воды, и пригодного для дыхания воздуха (будет продаваться в баллонах, как ныне продается топливный газ?), и, возможно, территории суши, затопляемой вследствие таяния льдов при повышении средней температуры на планете. Пора уже каждому человеку задуматься над тем, что всем детям, рождённым после 2000-го года, может быть не дано будет дожить до возраста творческой зрелости, а те, кому сейчас 40 лет, могут оказаться последним поколением стариков. Кто может остаться равнодушным к такой перспективе? Разве что люди, сильно озабоченные опасностью кариеса зубов, на каких рассчитаны (каких стараются воспитать) программы российского телевидения.

«У человечества нет решительно никаких оснований для благодушия», — утверждает Л.В. Лесков. — «... динамика некоторых процессов, определяющих судьбу социоэкологической системы, например, рост численности народонаселения, соответствует режимам с обострением. В этих режимах процессы развиваются быстрее, чем по экспоненте, и носят взрывной характер. Поэтому *если лица, принимающие решения, не суме-*

*ют весьма оперативно провести в жизнь комплекс необходимых действий* (курсив мой — А.С.), то вероятность катастрофы в нашем мире в ближайшие несколько десятилетий очень высока. Но не для того человечество ценой многих страданий и высокого самопожертвования поднималось к высотам современной цивилизации, чтобы на нынешних критических рубежах покорно сложить руки и ждать, когда выходящие из-под контроля неустойчивости положат предел его существованию» [2, с. 143].

Серьёзной основательности этого суждения мало соответствует надежда его автора на то, что оперативное проведение в жизнь комплекса необходимых спасительных действий может быть обеспечено "лицами, принимающими решения". Недавние события в СССР подтвердили старую истину: каждый народ имеет таких правителей (лиц, принимающих решения), каких он достоин. А правители России в настоящее время стремятся завлечь народ на путь сомнительной возможности урвать местечко в "золотом миллиарде" человечества. Но, во-первых, ясно видно, что вожделенный доступ туда открыт только "новым русским", "новым украинцам" и прочим "новым", которые не захотят, да и не смогут способствовать вхождению остальных сограждан в избранный круг, ибо новоявленные богачи, как и сам "золотой миллиард", пользуются экономическими привилегиями как раз за счёт утеснения всех, кто к привилегиям не пробился. Во-вторых же, путь процветающего Запада в действительности не является таким надёжным и многообещающим, как кажется людям с мировосприятием бабочки-однодневки. Среди возможных направлений развития человечества в XXI веке Л.В. Лесков рассматривает сценарий "торжества западнизма" и вот к каким выводам приходит.

«... западная цивилизация, основанная на принципах рыночного хозяйства и либеральной демократии, ... опираясь на передовую технологию, ... добивается статус-кво. Происходит частичное перераспределение мировых богатств в пользу бедных стран, что позволит смягчить остроту популяционного кризиса. Энергичное осуществление хорошо финансируемых природоохранительных программ сдерживает разрушение окружающей среды. Устанавливается относительное равновесие между "золотым миллиардом", населяющим благополучный мир стран западной цивилизации, и остальной частью человечества... Нетрудно, однако, предсказать, что такое равновесие не сможет поддерживаться долго — максимум 50 лет. К концу этого срока наступит исчерпание многих ресурсов, в первую очередь нефти и газа, и наверняка произойдут радикальные изменения за пределами "золотого пояса" Запада» [2, с. 138]. «... ресурсы развития по модели западной цивилизации, начиная с 30 – 40-х годов XXI века будут в значительной степени израсходованы» [2, с. 141]. «Если уровень жизни всего населения планеты будет поднят до уровня развитых стран, то при сохранении современной технологии это неизбежно приведёт к глобальной экологической катастрофе... на базе современных технологий при сохраняющемся уровне энергопотребления у мирового сообщества не может существовать какого-либо варианта стратегии развития, который позволил бы в конечном счете избежать глобальной катастрофы» [2, с. 115]. «Сыграв роль мотора, который обеспечил взлёт и расцвет современной технической цивилизации, идеология западнизма привела её в конце концов к порогу жесточайшего за всю историю человечества кризиса... Современная западная модель человека, в основе которой лежит установка на неостановимое потребление и власть над природой, пришла в противоречие с императивом выживания человечества» [2, с. 134]. «Никто, однако, не может отрицать, что... к исчерпанию своего эволюционного потенциала подошла и современная технологическая цивилизация в целом. У неё нет больше возможностей для развития по привычным законам экспоненциального или гиперболического роста. Существуют естественные пределы, заданные самой природой нашей планеты: невозобновимые ресурсы, площадь и продуктивность возделывания земель, способность окружающей среды поглощать антропогенные загрязнения. Вот основной вывод, к которому приходит автор самого обстоятельного исследования физических и биологических основ устойчивости жизни на Земле В.Г. Горшков: "Современная цивилизация не обеспечивает ни нормальных условий жизни человека, ни устойчивого существования жизни на Земле"» [2, с. 140]. «... глобальный экологический кризис может произойти уже через 30 – 40 лет, причём в соответствии с прогнозом теории катастроф будет носить характер экологического взрыва» [2, с. 137]. «А. Зиновьев утверждает: в западном обществе доминирует не стремление к лучшему будущему, а желание сохранить настоящее и страх потерять достигнутые блага... А наиболее характерные футурологические прогнозы повествуют главным образом о новых технических достижениях: бурный рост информационной сферы, единая мировая экономика, роботизация и компьютеризация быта и т. п. Отличительная черта западной цивилизации, которая позволила ей достичь современного уровня, утверждает Зиновьев, состоит в том, что в паре "Я – Мы" доминирующую роль играло "Я". "Точки роста" западной цивилизации уже исчерпаны» [2, с. 133].

Итак, даже мирный вариант успешного развития западной цивилизации с разумными компромиссными шагами способен в лучшем случае несколько отсрочить наступление глобального экологического кризиса, но не вывести человечество на эволюционную ветвь того плодотворного прогресса, на какой мы могли бы надеяться, предчувствуя неисчерпаемые возможности разума. Если же развитие и дальше пойдет по пути междоусобной борьбы за территории, источники сырья, рынки сбыта, сферы влияния, как в прошлые времена и в настоящее время, то будущее человечества окажется гораздо хуже. Последние полвека мир балансировал на грани ядерной катастрофы. Надежда на то, что эта угроза теперь устранена, довольно хрупка, ибо не без опасных для России намерений НАТО расширяется на восток. К тому же технический прогресс будет делать ядерное оружие более доступным для многочисленных любителей государственного и даже частного терроризма. Да и помимо ядерного, разработаны и продолжают разрабатываться другие типы оружия массового поражения. Пока отдельными людьми и их объединениями, вплоть до государств, владеет желание добиваться сегодняшней частной выгоды за счёт других людей и объединений, обесценивающее и блокирующее заботу об общем долговременном благе всего человечества, достижения науки и техники будут постоянно усиливающимся источником опасности самоистребления цивилизации.

Сохранение и увеличение разрыва между богатыми и бедными странами, между Севером и Югом, сопровождаемое усилением идеологической роли фундаменталистских и националистических концепций, может развиться в мощный фактор международной напряженности, перед которым померкнут разногласия XX века между социалистическим и капиталистическим лагерями. Такой глобальный цивилизационный разлом, по мнению Л.В. Лескова, «может привести к тому, что противоборствующие стороны... истощат собственные ресурсы и тогда дробление мирового сообщества примет региональный характер... Оскудение ресурсов в этих условиях приведёт к обострению различных форм борьбы на уровне регионов, этносов, государств. Можно ожидать, что центральную роль среди них будет играть терроризм. Космическая деятельность в этих условиях будет в значительной степени свернута, а влияние науки станет минимальным» [2, с. 137]. Мировое сообщество утратит даже ту невысокую степень целостности, какую оно имеет сегодня. Наступит упадок и раздробленность нового средневековья, но уже без надежды на возрождение. Не исключается возможность того, что после катастрофы уцелеет небольшая часть человечества, которая уже не в силах будет нанести заметный ущерб биосфере планеты.

Марксистско-ленинское учение о коммунизме и практика социалистического строительства явились первой в истории человечества попыткой научного предвидения и целенаправленного построения будущего. В духе классической естественнонаучной парадигмы развитие социализма от утопии к науке опиралось на открытие объективных законов жизни общества. Верилось, что эти законы с неизбежностью приведут человечество к коммунизму, а от усилий людей могут зависеть лишь сроки победы и её издержки. В наступившую сейчас эпоху всесторонней критики коммунизма исторический детерминизм его последователей третируется как научная наивность, не тронутая углубленными представлениями синергетики о ветвлении эволюционных путей сложной нелинейной системы. Хотя социологическая система слишком сложна, чтобы можно было надёжно исследовать её методами математического моделирования, к ней все-таки приложимы общие выводы синергетики. К числу таких выводов принадлежит открытие аттракторов (от латинского *attrahere*, притягивать) — относительно устойчивых путей эволюции системы, к которым притягивается множество "траекторий" её развития, определяемых различными начальными условиями из некоторой области возможных значений. Действие аттрактора подавляет достаточно мелкие уклонения от него, направляя развитие системы в определённое русло. Но потенциал устойчивости аттрактора может исчерпаться, и тогда происходит его ветвление (бифуркация), делающее будущее системы неоднозначным, многовариантным. В общем случае выбор нового аттрактора после точки бифуркации зависит случайным образом от малых возмущений. Однако, как подчеркивал С.П. Курдюмов, крупный специалист в области синергетики, «важно наличие поля путей развития для открытых нелинейных сред, спектра структур... Хотя случайность, малые флуктуации могут сбить, отбросить с выбранного пути, ... но в некотором смысле — по крайней мере, на упрощённых математических моделях, — можно видеть всё поле возможных путей развития... Тогда становится ясным, что ветвящиеся дороги эволюции ограничены... имеют место блуждания, но не какие угодно, а в рамках вполне определенного детерминированного поля возможностей» [9].

Именно с таких позиций подходит Л.В. Лесков к прогнозированию будущего человечества. Он рассматривает 12 виртуальных сценариев развития в XXI веке. Среди них уже упомянутые выше предвидения ядерной катастрофы, торжества "западнизма", социально – экологического коллапса, цивилизационного разлома (на Север и Юг), распада мирового сообщества, вырождения человека, свёртывание цивилизации. Суммарная вероятность осуществления этих пессимистических сценариев в первой половине XXI века по оценке Л.В. Лескова достигает 0,85, да и то в предположении, что вероятность ядерной катастрофы уже сведена к нулю. Таким образом получается, что человечество имеет в лучшем случае лишь один шанс из семи выжить и сохранить свой потенциал развития в ближайшие полвека. Таково "богатство возможностей", или многовариантность нашего будущего. И опять оправдана евангельская истина: «Входите тесными вратами; потому что широки врата и пространен путь, ведущие в погибель, и многие идут ими; потому что тесны врата и узок путь, ведущие в жизнь, и немногие находят их» (Мф., 7, 13-14).

## § 2. НООСФЕРНЫЕ ВРАТА В КОСМИЧЕСКОЕ БУДУЩЕЕ

Авторы понятия ноосферы имели основания связывать её зарождение с появлением человека. И действительно, на протяжении истории человечества в общем возрастала его способность мыслить, познавать и переделывать окружающий мир. Однако далеко не всегда пользовались люди этой способностью во благо себе. Тенденции к объединению и служению общему благу противостояла и до сих пор противостоит мощная тенденция к разобщённости, к удовлетворению потребностей одних индивидуумов и сообществ за счёт причинения вреда другим, не останавливаясь и перед уничтожением соперников. Выработана даже идеология оправдания такого соперничества как эффективного средства развития жизнеспособности участников междоусобиц. Но ведь это по существу средство совершенствования животных в борьбе за выживание, не достойное человека разумного. Стихийная эволюция человеческого общества как раз и привела его на грань подрыва основ благоприятных для жизни природных условий. И теперь всё очевидней становится, что ноосфера на её нынешнем уровне, представленная современной цивилизацией, настолько разумна и деятельна, чтобы иждивенчески расширять использование даров природы, но не настолько разумна и целеустремлённа, чтобы не разрушать источники своего благополучия, а умножать и совершенствовать их, дальновидно заботиться о безграничном продлении в будущее существования мыслящих существ и росте их способностей, обеспечивая для всех людей возможности здорового образа жизни и духовного восхождения.

Земная ноосфера минувших тысячелетий и веков, включая её нынешнее состояние, несёт в себе лишь в потенции более высокое совершенство, необходимое для перехода на уровень космического творчества, и потому может быть названа потенциальной ноосферой в отличие от той подлинной актуальной ноосферы, которая сможет в качестве ответственного космического субъекта выполнять функции гаранта развития разумной жизни и направления эволюции низших царств природы в русло усложнения организации и цефализации. Подобно тому как неразвитость детского сознания и способностей уместны для ребёнка, но уродливы во взрослом человеке, так земное человечество оказалось бы несостоятельным, терпящим крушение на своём историческом пути, если бы разумность его не поднялась выше той ступени, на которой оно, оставаясь разъединенным, видит свою цель только в потреблении природных богатств своей планеты и других небесных тел. «Развитие разума, — писал К.Э. Циолковский, — торжество его и могущество создаются нами самими. Если мы, сознательные существа космоса, не стремимся к этому и не делаем для этого всё от нас зависящее, то нет и творчества разума, нет и счастья» (цитировано по книге [2], с. 39). В.И. Вернадский, предвидя великие свершения земной ноосферы, не упускал из виду и возможность её краха: «В геологической истории биосферы перед человеком открывается огромное будущее, если он поймёт это и не будет употреблять свой разум и свой труд на самоистребление... Перед ним открываются всё более и более широкие творческие возможности... В будущем нам рисуются как возможные сказочные мечтания: человек стремится выйти из предела своей родной планеты в космическое пространство. И, вероятно, выйдет» [7].

В наши дни космизация деятельности человечества обостряет и резко высвечивает нависающие опасности, но вместе с тем открывает перспективы для сотрудничества государств, которое может стать не только взаимовыгодным, а и жизненно необходимым. Первая бросающаяся в глаза выгода, указанная ещё К.Э. Циолковским, заключается в том, что в космическом пространстве и на ближайших небесных телах можно найти источники энергии (солнечное излучение) и минерального сырья. При низком уровне технического развития доступ к таким источникам требует неоправданно больших затрат и потому на первых порах важен скорее как экспериментальное достижение, чем экономическая выгода. Но здесь должна сыграть важную роль диалектика развития: дорогостоящие поначалу научно – технические достижения приведут впоследствии к небывалому подъёму производительности всего народного хозяйства. «Я надеюсь, что мои работы может быть скоро, а может быть и в отдаленном будущем дадут обществу горы хлеба и бездны могущества», — писал К.Э. Циолковский (цитировано по книге [2], с. 39). Спустя 80 лет Л.В. Лесков имеет возможность отметить уже начавшиеся проектные разработки по использованию солнечной энергии с помощью космических станций. Он пишет: «Весьма вероятно, что в XXI веке одним из основных источников энергоснабжения Земли станут космические солнечные станции (КСЭ)... По проекту министерства энергетики США и НАСА рассматривается возможность строительства 60 КСЭ мощностью 5 миллионов киловатт каждая, при этом потеря микроволновой энергии в атмосфере Земли в среднем не будет превышать 1%. Высокий КПД преобразования энергии микроволнового излучения (около 90%) способствует предотвращению "теплового загрязнения" Земли — одного из экологически опасных последствий энергетического хозяйства цивилизации... создание КСЭ мощностью порядка миллиона киловатт позволит на новых принципах организовать межорбитальные перелёты... ("космический троллейбус")... Другое перспективное направление космической энергетики, время которого наступит в XXI веке, — это орбитальные отражатели, предназначенные для освещения районов Земли. Соответствующие проектные исследования выполнены в настоящее время как в нашей стране, так и за рубежом» [2, с. 106]. Деятельность по освоению космического пространства сопряжена с высокими технологическими достижениями во многих областях. Впоследствии эти высокие технологии могут и должны найти плодотворное применение в других отраслях народного хозяйства.

Сотрудничество государств в космической области заставит через науку, технику и экономику направлять усилия и помыслы людей не на борьбу друг с другом, а на познание Вселенной, своего места и роли в её эволюции, будет выдвигать новые задачи, расширяющие кругозор. И это способно преобразить политические интересы радикальней, чем мы можем сейчас себе представить. Такие изменения потребуется совершать не с той постепенностью и стихийностью, какими до сих пор характеризовалась поступь истории, а при резкой активизации потенциала разумности и нравственности человечества. Ведь сохранение прежних тенденций сулит нашей цивилизации гибель или деградацию через 30 – 40 лет. Взгляд в прошлое убедительно показывает, что за несколько десятилетий очень непросто добиться серьёзных положительных изменений народной психологии. А сейчас речь идёт о том, чтобы человечество в целом, вопреки разделяющим его исторически сложившимся разногласиям и противоречиям, нашло в себе волю и умение защитить общие долговременные интересы, отдавая им предпочтение перед становящимися эфемерными личными и групповыми выгодами, преодолевая многие мешающие привычки и предрассудки, объединяя созидательные усилия ради выживания на общем и единственном для всех нас, ставшем вдруг маленьким и уязвимым изнутри космическом корабле по имени Земля. Никогда ещё столь грандиозная задача не вставала так неотложно перед людьми, но именно отсутствие какой-либо иной спасительной альтернативы способно побудить к осознанию и решению этой задачи. В создавшейся ситуации уместно обратить внимание на два высказывания Карла Маркса. Первое: «Философы лишь различным образом объясняли мир, но дело заключается в том, чтобы изменить его» [10]. И второе: «... человечество ставит себе всегда только такие задачи, которые оно может разрешить, так как при ближайшем рассмотрении всегда оказывается, что сама задача возникает лишь тогда, когда материальные условия её решения уже имеются налицо или, по крайней мере, находятся в процессе становления» [11]. Сегодня настало время крупных идейных подвижек, подобных по своей актуальности тем, что вызревали и воплощались в конце XIX – начале XX века, о которых также сказал Маркс: «...теория становится материальной силой, как только она овладевает массами. Теория способна овладеть массами, когда она доказывает ad hominem (т.е. применительно к каждому конкретному лицу — А.С.), а доказывает она ad hominem, когда становится радикальной. Быть радикальной — значит понять вещь в корне» [12].

Доказывать *ad hominem* преимущества космического мышления как материальной силы, способной спасти человечество и увлечь его в прекрасное будущее — значит сделать понятным для каждого индивидуума, что счастье и полнота его жизни напрямую зависит от того, насколько он постигает глубину и величие эволюции Вселенной, насколько сам участвует сознательно и активно в работе по утверждению господства разумного творчества над хаотической игрой слепых стихийных сил в природе и обществе. «Судьба существа, — писал К.Э. Циолковский в рукописи "Необходимость космической точки зрения", — зависит от судьбы Вселенной. Поэтому всякое разумное существо должно проникнуться историей Вселенной. Необходима такая высшая точка зрения. Узкая точка зрения может привести к заблуждению» (цитировано по книге [2], с. 17).

Для достижения коренного понимания каждым лицом космических проблем потребуется внести в массовое сознание представления о сути мировоззренческих открытий науки XX века и их соотношении с классическим научным мировоззрением, которое по укоренившимся традициям воспитания определяет мироощущение подавляющего большинства современной образованной публики. Не менее важно воспринять и проанализировать глубокие мысли выдающихся деятелей культуры об историческом опыте человечества и русского народа. Об этом пойдёт речь в последующих главах предлагаемой книги. А сейчас уместно подчеркнуть, что по мере возрастания могущества человечества и усложнения его деятельности будут возрастать требования к разумности и дальновидности принимаемых решений, поскольку цена ошибок будет становиться всё более высокой. Невозможно, конечно, заранее предусмотреть множество конкретных ситуаций, с которыми придётся сталкиваться в будущем. Но опыт прошлого и сила аналитического мышления позволят вырабатывать общие принципы, которыми полезно руководствоваться при выборе наилучшего пути среди противоречивых требований, и сформулировать по возможности надёжные общие критерии правильности или ошибочности конкретных действий. Выяснение таких принципов и критериев и следование им призвано способствовать разумной организации взаимодействия людей друг с другом и с природой на путях реализации ноосферного сценария прорыва человечества в космическое будущее в обход грозящей социально – экологической катастрофы. Комплекс таких принципов и критериев предложен Л.В. Лесковым в книге [2].

**1. ПРИНЦИП КРЕАТИВНОСТИ.** Вырастая из биосферы, ноосфера наследует присущую биосфере адаптивно – адаптирующую функцию, т.е. способность приспосабливаться к окружающей среде и одновременно, внося в среду изменения, перестраивать её. Но если на чисто биосферном уровне эта деятельность осуществляется стихийно под регулирующим воздействием законов эволюции сложных самоорганизующихся систем, то ведущей функцией ноосферы становится сознательная творческая (креативная, от латинского *creo* — создавать, избирать) научно – производственная деятельность, направленная на поиск и освоение новых экологических ниш в многомерном пространстве существования разума.

**2. ПРИНЦИП КОЭВОЛЮЦИИ,** т.е. согласованного развития биосферы и техносферы. Скорость приспособления (адаптации) к последствиям технической деятельности человечества отстаёт от скорости развития этой деятельности. Стратегия разумного регулирования должна быть направлена на то, чтобы человечество и природа образовывали единую устойчиво развивающуюся социоэкологическую систему. Термин коэволюция предложил Н.В. Тимофеев – Ресовский в переписке с В.И. Вернадским. Тимофеев – Ресовский считал, что небрежное отношение к биосфере, «подрыв её правильной работы будет означать не только подрыв пищевых ресурсов. В конечном счёте люди без биосферы или с плохо работающей биосферой не смогут вообще существовать на Земле» (цитировано по книге [2], с. 88).

**3. ПРИНЦИП КОМПЛИКАТИВНОСТИ** (от английского *complicasy — сложность, усложнение*). Развитие науки и техники характеризуется двумя взаимно противоположными тенденциями: вычленением новых областей знания и деятельности, требующих узкой специализации, и одновременно объединением этих дифференцированных элементов обобщающими идеями и целями. По известной в кибернетике теореме Эшби управляющая система не должна уступать управляемой в информационной сложности. Возрастающая информационно – технологическая сложность ноосферы должна сопровождаться усложнением регулирующих подсистем, возникновением всё более тонко дифференцированных и вместе с тем интегративных связей. Это требует иерархически структурированной организации, охватывающей автономные системы и блоки, и усложнения социальной стратификации ноосферы.

**4. ПРИНЦИП ГАРМОНИЗАЦИИ** интересов творческой личности с интересами общества. Для креативной функции ноосферы весьма ценна реализация творческого потенциала личности, примат творческого поиска и возможности выбора, охранение неповторимого личностного начала от размывания в унифицированную посредственность, ориентация не на схематизированного, а на реального живого человека. Это требует эффективной защиты прав личности, свободы образования, убеждений, слова. Вместе с тем устремления личности могут претворяться в её духовное восхождение только в гармоничной связи с осознанием и соблюдением интересов и блага общества в целом.

**5. ПРИНЦИП ХРУПКОСТИ ХОРОШЕГО.** Он сформулирован в теории катастроф и позволяет чётче определить границы "коридора устойчивости" саморазвивающейся системы, а значит и средства её защиты. Смысл этого принципа в том, что любая система может считаться хорошей, если она удовлетворяет некоторому набору требований, но должна быть признана плохой, если не удовлетворяется хотя бы одно из них. Поэтому **значительно легче утратить хорошее, чем плохое**. Если устойчивость системы считать хорошим качеством, то возможность её сохранения резко уменьшается вблизи границы области устойчивости, где даже малые изменения параметров системы способны ввергнуть её в режим неустойчивости. Чем сложней динамическая система и чем слабей механизмы её саморегулирования, тем более хрупко состояние её устойчивости.

Л.В. Лесков обращает внимание на некоторые **следствия** из сформулированных выше принципов. Во-первых, это необходимость согласования ценностных и целевых установок, противоречие между которыми особенно болезненно проявляется в **несоответствии между властью и мудростью**. Переход к ноосфере требует и даёт возможность устранить это несоответствие.

Второе следствие относится к направленности креативной функции ноосферы. Это не экстенсивный процесс, нацеленный на возможно более длительное поддержание стационарного равновесия, а последовательность **интенсивных качественных изменений, способствующих укреплению и росту духовного потенциала общества**. Научное творчество, открывая новые способы взаимодействия человека с окружающей средой, постоянно ведёт к нарушению равновесия, но его можно достигать на новом, более высоком уровне за счёт освоения новых экологических ниш и расширения границ динамического равновесия со средой. Ноосферу следует понимать как динамичную, интенсивно обновляющуюся путём увеличения числа степеней свободы творческого поиска.

В-третьих, необходимо учитывать, что процесс интенсивной эволюции ноосферы сопровождается (в соответствии со вторым началом термодинамики) сбросом энтропии в жизненное пространство ноосферы. По теории катастроф это должно приводить к периодическому возникновению опасных возмущений, способных привести систему в неустойчивый режим. **Предвидение таких возмущений позволит принимать меры к поддержанию устойчивого развития.**

Сознательное управление эволюцией по ноосферному сценарию требует учитывать и своевременно снимать возникающие противоречия, руководствуясь определенными **критериями**, или **императивами**.

ИМПЕРАТИВ КОГЕРЕНТНОСТИ (от латинского *cohaerentis* — согласованность, связь). В ходе мирового научно-технического прогресса старый технико-экономический уклад периодически сменяется новым, более эффективным. На современном этапе приоритетную роль играют информация и наукоёмкие производства, а экономические связи приобретают небывалый динамизм. Поэтому настоятельно необходимо поддерживать согласованность взаимодействия возникающих новых требований производства и жизни с пережитками прежнего уклада.

ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ИМПЕРАТИВ. В.И. Вернадский одним из первых обратил внимание на опасность экологического кризиса как результата противоречий между техносферой и природной средой. Он дальновидно считал разрешение этого противоречия проблемой номер один ещё в то время, когда мало кто принимал её всерьёз, и верил, что наука найдёт способ уйти от экологического кризиса, не прибегая к каким-либо ущемлениям развития человечества.

ИНТЕГРАТИВНЫЙ ИМПЕРАТИВ заключается в необходимости комплексного, научно обоснованного анализа любых крупных проектов и программ и обусловлен противоречием между креативной и адаптивно-адаптирующей функциями ноосферы. Если вторая из этих функций направлена на установление и поддержание равновесия с окружающей средой, то первая может вести к её нарушению вследствие плохо продуманных решений, принятых без учёта обратных связей. Примеров подобных некомпетентных действий достаточно много.

КОСМИЧЕСКИЙ ИМПЕРАТИВ. Ограниченность энергетических и минеральных ресурсов Земли и возможности нагружения среды техногенными отходами заставляют человечество либо остановить неуправляемый рост численности населения с последующим снижением его в несколько раз, либо перейти к индустриальному освоению космического пространства. Первый путь ведёт к остановке развития и опасности обострения конфликтов. Второй же открывает перед людьми новые возможности устойчивого развития по ноосферному сценарию.

ИМПЕРАТИВ ТОЛЕРАНТНОСТИ (от английского *tolerance* — терпимость). Противоречие между развивающимися производительными силами (техническим развитием) и консервативной социальной и информационно – управленческой структурой общества в прошлом разрешалось столкновением классов – антагонистов. С точки зрения ноосферы радикальные преобразования лучше осуществлять менее катастрофично, на основе комплементарности (взаимной дополнительности вступающих в противоречие сторон), компромисса, консенсуса. Такие методы естественны и необходимы для объединённого человечества, идущего по пути сознательно направляемой эволюции.

АНТРОПНЫЙ ИМПЕРАТИВ заключается в поддержании условий, необходимых для свободного самовыражения человеческой личности, защиты её от порабощения техногенезом. Важным аспектом антропного императива является противодействие увеличивающемуся разрыву между развитыми и отсталыми странами, между богатыми и бедными. Опасность такого разрыва обостряется тем, что в процессе демографического взрыва доля бедных стран в народонаселении планеты всё более возрастает.

ИМПЕРАТИВ ДУХОВНОСТИ. Понятие свободы ввиду его многомерности может получить ложные толкования. Люди в стремлении поставить между собой и природой техносферу рискуют превратиться в функциональный элемент последней, в придаток бездушной машины, и считать это благом. Развитие в таком направлении может привести к гибели личности в человеке, растворению её в техносфере, выхолащиванию духовного богатства человека и подавлению его свободы. Возможен и противоположный, но не менее опасный результат: возникновение иллюзии абсолютной свободы, отсутствия каких-либо ограничений творческого порыва. Это направление подпитывало нигилизм конца XIX и начала XX веков с его призывами отбросить достижения культуры прошлого. Императив духовности требует **приоритета глубоких и высоких творческих ценностей перед потребительскими.**

ИМПЕРАТИВ ГЛОБАЛЬНОГО МЫШЛЕНИЯ. В преддверии угрожающей нам глобальной катастрофы чрезвычайно важно довести до массового сознания, что выжить люди могут только сообща, а погибнуть и порознь. Поэтому в обозримом будущем **приоритет должен быть отдан общечеловеческим интересам** перед национальными, региональными, классовыми, конфессиональными, групповыми. Это следует понимать не как запрет, подавление или умаление всех прочих интересов, а лишь как призыв к правильной расстановке акцентов. К тому же на протяжении тысячелетий люди привыкали руководствоваться в своей жизни главным образом интересами личными, групповыми, региональными, в лучшем случае национальными, государственными и классовыми. Для того же, чтобы научиться служить интересам всего человечества, необходимо уделять им особое внимание в переходный период.

АНТИУТОПИЧЕСКИЙ ИМПЕРАТИВ призван разрешить противоречие между свободой воли и возможностью выбора с одной стороны, а с другой — уровнем компетентности и осознанием ответственности за сделанный выбор. Это противоречие Л.В. Лесков считает одним из наиболее опасных.

ИМПЕРАТИВ СОБОРНОСТИ требует поддержки "пассионариев — идеологов и организаторов преобразований — со стороны большинства населения" или, по крайней мере, отсутствия активного сопротивления. Применительно к нации и государству соборность означает действенное согласие членов данной нации, государства в отстаивании своей жизни на земле. История достаточно богата проявлениями национальной соборности, но ещё не выработано самое нужное в настоящее время — глобальная соборность земного человечества.

Л.В. Лесков называет сформулированные им 10 критериев ноэтическими и считает, что они играют роль элементов отрицательной реактивности, способных поддерживать устойчивость развития общества по ноосферному сценарию. Ноэтические критерии можно также назвать правилами запрета тупиковых и неоптимальных ветвей эволюции, отвечающими на вопрос "чего НЕ делать". «Система ноэтических критериев обладает тем важным свойством, что они образуют целостный комплекс: достаточно допустить нарушение хотя бы одного из них, оставив все остальные в неприкосновенности, как вероятность потери устойчивости и схода с оптимального эволюционного тренда резко возрастёт. Это свойство — очевидное следствие принципа хрупкости хорошего. Другое важное свойство системы ноэтических критериев состоит в том, что выполняя роль правил запрета, они не являются чрезмерно жёсткими: допуская сравнительно широкий спектр приемлемых вариантов конкретных стратегических программ и действий» [2, с. 92 ].

Осознание неотложности крайне серьёзных и великих в космической перспективе задач, стоящих перед человечеством, побуждает относиться с разумной критичностью к недостаткам текущей жизни, без чего не может быть надежды на улучшение. В принципах и критериях ноосферного сценария перехода к будущему заключаются указания на то, как успешней идти по этому пути, поддерживая устойчивость развития. Перед лицом грозящих катастроф очевидной для всех целью является сохранение хотя бы уже достигнутого качества жизни. Нетрудно наметить и ближайшие желательные улучшения. Однако как ближайшие опасности, так и ближайшие улучшения связываются пока главным образом с проблемой физических условий существования людей. Есть понимание того, что для решения этой проблемы необходим рост духовного потенциала общества, но в понимании самой духовности на протяжении истории выявились весьма различные точки зрения. Издревле общественным признанием в качестве носителей и толкователей духовности пользовались служители религии, так и называвшиеся представителями духовных сословий. И уже в древности высказывалась небезосновательная критика религиозных учений и их служителей. В новое время в процессе становления и систематического развития классической науки духовность рационального и экспериментального исследования мира сформировала в сознании значительной части образованной публики отношение к религии как к ставшему опорой мракобесия фантастическому, извращённому отражению в головах людей господствующих над ними природных и общественных сил. В социалистической России атеизм сделался официально признанной государственной идеологией, а после распада СССР руководство Русской Православной Церкви вновь претендует на очень тесный союз с государственной властью. В преддверии космического будущего должна быть внесена бóльшая ясность в понимание духовности. Это необходимо в целях углубления и расширения понимания исторических процессов и путей эволюции сознания. Служители религии в силу присущего ей консерватизма не смогут пойти на ревизию исповедуемых ими догматов, а для науки периодический пересмотр добытых истин является формой существования и условием прогресса. На стыке XX и XXI веков совершается крупнейшее и глубочайшее в истории человечества изменение научного мировоззрения, и чтобы ясней понять его существо, нужно хотя бы вкратце проанализировать развитие представлений о материи, Вселенной и законах природы в классический период (XV–XIX века) и выяснить, что пришлось менять в основных устоях классического мировоззрения на протяжении XX века.

# Глава 2.
# КЛАССИЧЕСКАЯ КАРТИНА МИРА

Картина, или модель мира — это обобщённое человеческое представление об устройстве мироздания, то, что в эпоху Галилея и Лапласа называли системой мира. Исходные сведения для построения такой модели люди получают через посредство восприятий своих органов чувств. Видим же мы вокруг себя тела, размещённые в пространстве. Поэтому древнеримский философ Лукреций Кар (99–55 гг. до н. э.), излагая горячо почитаемое им учение древнегреческих атомистов, в особенности ближайшего к нему по времени Эпикура (341–270 до н. э.), писал:

«Всю, самоё по себе, составляют природу две вещи:
Это, во-первых, тела, во-вторых же, пустое пространство,
Где пребывают они и где двигаться могут различно.
Что существуют тела, — непосредственно в том убеждает
Здравый смысл; а когда мы ему доверяться не станем,
То и не сможем совсем, не зная, на что положиться,
Мы рассуждать о вещах каких-нибудь тайных и скрытых»

[13, строки 419-425].

Но кроме тел на Земле, и самой Земли, мы видим в небе объекты, природа которых не раскрывается перед непосредственным восприятием, и о которых нашим предкам пришлось строить различные гипотезы. Так, Аристотель (384–322 до н.э.) представлял Вселенную в виде концентрических хрустальных сфер, вращающихся вокруг расположенной в центре их неподвижной Земли. Только после открытий Николая Коперника (1473-1543) и его последователей удалось доказать, что планеты — это тела, подобные Земле, что Земля наряду с другими планетами вращается вокруг Солнца, а "неподвижные" звёзды — это далёкие солнца. Драматизм борьбы за утверждение гелиоцентрической системы мира Коперника взамен господствовавшей после Аристотеля и Клавдия Птолемея (II век н.э.) геоцентрической системы пришлось с особенной тяжестью испытать на себе Галилео Галилею (1564 -1642). Революция в мировоззрении, произведённая Коперником, была грандиознейшей по своей истинности и радикальности за всю историю науки вплоть до начала XX века. Но эта революция ограничена всё-таки представлениями о конструкциях, построенных из тел в огромных космических просторах. Представления же классической науки о сущности самих тел не отличались принципиально от представлений атомистов древности, подкрепляя и уточняя последние. То, что Вселенная открывалась науке как бесконечная система тел, движущихся в наблюдаемом пространстве в соответствии с универсальными закономерностями, утверждало убеждённость естествоиспытателей и философов – материалистов в фундаментальной роли тел как глубочайшей основы мироздания.

Именно это кардинальное убеждение стало утрачивать свою непререкаемость в связи с открытиями, сделанными в первом десятилетии XX века и легшими в основу двух главных направлений развития новейшей физики — теории квантов и теории относительности. В 1905 году опубликована первая статья [14] Альберта Эйнштейна с предложением теории, за которой позже закрепилось название специальной теории относительности (сокращённо СТО). Три года спустя Герман Минковский показал, что эта теория является отражением картины мира, радикально отличающейся от той, какую рисуют нам органы чувств и какую на протяжении трёх веков признавала истинной классическая наука. Чтобы лучше уяснить суть произведённого Минковским переворота, необходимо очертить основные представления классического научного мировоззрения, подвергшиеся критическому пересмотру.

## § 3. УЧЕНИЕ ДРЕВНИХ АТОМИСТОВ

Из того факта, что окружающий мир предстаёт перед нами в виде множества тел, только атомисты сделали радикальный вывод, что тела являются и глубочайшей основой бытия. Демокрит (ок. 460-370 гг. до н.э.) учил: «Начало Вселенной — атомы и пустота... Атомы суть всевозможные маленькие тела, не имеющие качеств, пустота же — некоторое место, в котором все эти тела в течение всей вечности носясь вверх и вниз, или сплетаются каким-нибудь образом между собой, или наталкиваются друг на друга и отскакивают, расходятся и сходятся снова между собой в такие соединения, и, таким образом, они производят и все прочие сложные [тела], и наши тела, и их состояния и ощущения» [15, ч. 1, с. 326].

«Так что самой по себе средь вещей оказаться не может,
Вне пустоты и внетел, какой-нибудь третьей природы,
Иль ощутимой когда-либо помощью нашего чувства,
Или такой, что она разуменью была бы доступна.
Ибо всё то, что мы можем назвать, то окажется *свойством*
Этих обоих начал иль *явлением*, как ты увидишь»

— писал Лукреций Кар [13, строки 445-450].

«Дальше, тела иль вещей представляют собою начала,
Или они состоят из стеченья частиц изначальных.
Эти начала вещей ничему не под силу разрушить...
... существуют такие тела, что и прочны и вечны:
Это — вещей семена и начала в учении нашем,
То, из чего получился весь мир, существующий ныне»

[13, строки 483-502].

«Первоначалам должно быть присуще бессмертное тело,
Чтобы все вещи могли при кончине на них разлагаться,
И не иссяк бы запас вещества для вещей возрожденья.

И, наконец, не поставь никакого предела природа
Для раздробленья вещей, телá материи ныне,
Силой минувших веков раздробившись, дошли до того бы,
Что ничему уж, из них зачатóму, в известное время
Было б пробиться нельзя до высшего жизни предела.
Ибо, мы видим, скорей что угодно разрушиться может,
Чем восстановленным быть» [13, строки 545-557].

Здесь в последних двух строках глубоко подмечено то, что было установлено в статистической физике как закон возрастания энтропии, т. е. направленности всех процессов в изолированной системе от менее вероятных состояний к более вероятным, из чего делался вывод о необходимости тепловой смерти Вселенной.

«Если не будет, затем, ничего наименьшего, будет
Из бесконечных частей состоять и мельчайшее тело:
У половины всегда найдётся своя половина,
И для деленья нигде не окажется вовсе предела.
Чем отличишь ты тогда наименьшую вещь от вселенной?
Ровно, поверь мне, ничем» [13, строки 615-620].

В трактате индийского мудреца IX-X веков Харибхадры «Шад-Даршана-самуччая» древнее учение *локаята* характеризуется следующим образом. «Локаятики утверждают, что существует только тот мир, который воспринимается чувствами… для них основа сознания четыре элемента: земля, вода, огонь и воздух. Средством же познания признаются только органы чувств. Из сочетания земли и других элементов возникает и тело и т. п. … Поэтому отказ от видимого во имя невидимого чарваки считают глупостью этого мира» [15, ч. 1, с. 152-153]. На цитированных здесь страницах приведены пояснения комментатора. «Локаята — буквально "распространённый в этом мире" (*лока*), т. е. учение, признающее только этот мир… другое название этой школы — чарвака происходит от глагола *чарв* — жевать, глотать, так как эта школа "проглотила" такие категории, как добродетель, грех, дхарма, бог и т. д., признаваемые другими школами… Чарваки, как правило, не признают пятого элемента — эфира, считая его нереальным, ибо он невоспринимаем».

Сочетанием, движением, взаимодействием атомов предполагалось объяснить возникновение всех тел и их свойства, но о самих атомах могло быть сказано только то, что они — тоже тела. Таким образом атомистическая картина мира обретала замкнутость: тела, воспринимаемые нашими органами чувств, образованы из атомов, а атомы по своей сути есть тела. Эта замкнутость производила впечатление завершённой целостности, которая расценивалась как высшая убедительность и цепко удерживала в своих рамках умы многих мыслителей и их последователей.

Анализируя атомистическое мировоззрение, сейчас легко выделить в нём два принципа: принцип структурности и принцип предельности. Согласно принципу структурности тела, доступные нашим восприятиям, являются конструкциями, состоящими из более мелких тел. Принцип предельности утверждает существование предела делимости тел в виде простейших малых телец, к которым принцип структурности уже неприменим, которые уже неразложимы на части и потому названы атомами (буквально — неделимыми).

Когда начались систематические экспериментальные и теоретические исследования природы, то прежде всего стал подтверждаться принцип структурности. Были открыты молекулы как мельчайшие частицы вещества, обладающие химическими свойствами данного вещества. Среди веществ, способных к изменениям, разложению и сочетанию в химических реакциях, были найдены несколько десятков веществ, не поддающихся разложению химическим путём. Эти устойчивые вещества были названы химическими элементами, а их мельчайшие частицы — атомами химических элементов. Молекулы разложимых веществ оказались конструкциями, образованными из атомов химических элементов, и многие явления природы удалось объяснить с позиций атомно-молекулярной теории вещества. Ореол истинности принципа структурности озарял и предельную ипостась атомистического учения, тем более что была возможность отождествлять атомы химических элементов как “семена вещей” с атомами древних философов.

Но принцип предельности несёт гораздо бо́льшую философскую нагрузку, которая имела важнейшее значение для классиков древнего атомизма, а от большинства их позднейших последователей могла ускользать в тень недостаточно ясных представлений о материи. Атомы представлялись той глубочайшей положительной **основой бытия** (дополненной отрицательной основой — пустотой), за которой **искать больше нечего**. Для умозрительной позиции древних атомистов не имел смысла вопрос, из чего и как образуются атомы. Атомы понимались как первичная материя сама по себе, они ни из чего не образуются и ни во что не превращаются, а были, есть и будут вечной основой материального мира, первопричиной всех вещей и явлений, не нуждающейся в какой-либо причине для собственного существования. И подвижность атомов была провозглашена в качестве их неотъемлемого вечного свойства, как необходимого источника всех процессов и изменений, совершающихся в мире: «Это движение атомов до́лжно мыслить не имеющим начала, но существующим вечно» [15, ч. 1, с. 329]. Атомисты дерзнули утверждаемую ими глубочайшую основу мироздания наделить весьма конкретным свойством — свойством быть **телом**. При этом они довольствовались интуитивным представлением о телесности как отвлечённом качестве всех чувственно воспринимаемых тел. Научное же исследование и определение телесности стало возможным после возникновения классической механики как наиболее общей экспериментально подтверждаемой теории движений и взаимодействий тел. Абстрактной моделью тела, отвлечённой от конкретных особенностей различных тел и сохраняющей лишь черты, общие всем телам, стало в классической механике понятие **материальной точки.**

Древние атомисты ясно понимали, что их учение противоречит общепринятым религиозным представлениям о мире ином, отличном от воспринимаемого органами чувств мира тел, и о возможности сохранения в ином мире сознания человека после смерти его телесного организма. Однако они относились к этому без пессимизма утраты надежды на бессмертие, а мужественно приветствовали обретение истины, освобождающей людей от гнёта религиозных предрассудков, поддерживаемых страхом перед загробными наказаниями. Лукреций Кар призывает черпать оптимизм в познании природы, идти по жизни бесстрашно и радостно, как учил мудрый эллин Эпикур.

«В те времена как у всех на глазах безобразно влачилась
Жизнь людей на земле под религии тягостным гнётом,
С областей неба главу являвшей, взирая оттуда
Ликом ужасным своим на смертных, поверженных долу,
Эллин впервые один осмелился смертные взоры
Против неё обратить и отважился выступить против.
И ни молва о богах, ни молньи, ни рокотом грозным
Небо его запугать не могли, но, напротив, сильнее
Духа решимость его побуждали к тому, чтобы крепкий
Врат природы затвор он первый сломить устремился.
Силою духа живой одержал он победу, и вышел
Он далеко за пределы ограды огненной мира,
По безграничным пройдя своей мыслью и духом пространствам...
Так в свою очередь, днесь религия нашей пятою
Попрана, нас же самих победа возносит до неба.

Тут одного я боюсь: чтобы как-нибудь ты не подумал,
Что приобщаешься мной к нечестивым ученьям, вступая
На преступлений стезю. Но, напротив, религия больше
И нечестивых сама и преступных деяний рождала.
Было в Авлиде ведь так, где жертвенник Тривии Девы
Ифианассиной был осквернён неповинною кровью,
Пролитой греков вождями — героями лучшими войска...
Для ниспосланья судам счастливого выхода в море.
Вот к злодеяньям каким побуждала религия смертных.

Ты, ужасающим сам поддаваясь вещаньям пророков,
Будешь стремиться отпасть от меня ежечасно, пожалуй.
Сколько ведь, право, они способны придумать нелепых
Бредней, могущих смутить и нарушить все жизни устои
И безмятежность твою отравить окончательно страхом!
Да и понятно вполне: если б знали наверное люди,
Что существует конец их мытарствам, они хоть какой-то

Дать бы отпор суеверьям могли и угрозам пророков.
Ныне ж ни способов нет ни возможности с ними бороться,
Так как по смерти должны все вечной кары страшиться...
Значит, изгнать этот страх из души и потёмки рассеять
Должны не солнца лучи и не света сиянье дневного,
Но природа сама своим видом и внутренним строем».

[13, строки 62-148].

Сторонникам религии свойственна вера в то, что без надежды на посмертную награду за безгреховность земной жизни и страха перед загробными наказаниями за грехи люди не могут быть направлены на пути добродетели и нравственности. Однако в истории явлено в преизбытке примеров ханжества и изуверства, оправдывающих истинные злодейства показной добродетельностью и благонамеренностью. И немало проявлений высокой нравственности и самоотверженности людьми атеистических убеждений. Невежественным людям подброшено ложное представление об эпикурействе как беспечной приверженности к чувственным наслаждениям, чуждой духовности. Но Эпикур писал (Меннекею): «Итак, когда мы говорим, что удовольствие есть конечная цель, то мы разумеем не удовольствия распутников и не удовольствия, заключающиеся в чувственном наслаждении... но мы разумеем свободу от телесных страданий и от душевных тревог. Нет, не попойки и кутежи... не наслаждения... яствами, которые доставляет роскошный стол, рождают приятную жизнь, но трезвое рассуждение, исследующее причины всякого выбора и избегания и изгоняющие [лживые] мнения, которые производят в душе величайшее смятение. Начало всего этого и величайшее благо есть благоразумие... нельзя жить приятно, не живя разумно, нравственно и справедливо, и, наоборот, нельзя жить разумно, нравственно и справедливо, не живя приятно» [15, ч. 1, с. 357]. Своё мировоззрение, дающее опору благоразумию, Эпикур изложил в главном труде «О природе», содержащем 37 книг. Но от всего литературного наследства Эпикура до нас дошли только три письма (Геродоту, Пифоклу и Меннекею). По-видимому, достаточно полное знакомство с творениями Эпикура имел его последователь Лукреций Кар.

## § 4. ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ КЛАССИЧЕСКОГО НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ

> Школьные годы делают ньютонианцами всех людей на нашей планете. Чуть ли ни с молоком матери мы впитываем в нашу духовную плоть три аксиомы Ньютона, его пространство и время, его закон всемирного тяготения и многое, многое другое.
>
> По́лак Л.С. [16, предисловие, с. 9].

На самом деле быть ньютонианцем означает в современном понимании нечто большее, чем просто быть его последователем, каким был, например, немецкий философ Иммануил Кант. Исаак Ньютон верил в Бога, приведшего материальный мир в движение первым толчком, после чего в этом мире все процессы стали происходить под действием законов, сформулированных Ньютоном в виде аксиом. Исследователи, развивавшие на основе открытий Ньютона различные отрасли науки, создали целостное научное мировоззрение, которое сейчас принято называть классическим, и которое в целом пришло к утверждению самодостаточности чувственно воспринимаемого мира тел как не нуждающегося в какой-либо внешней по отношению к нему причине (Боге), независимо от того, верили ли в Бога отдельные творцы классического мировоззрения. В XX веке науке пришлось заниматься преодолением классического мировоззрения, начиная с его основ, но до сих пор большинство образованных людей фактически продолжает воспринимать мир с классических позиций благодаря их наглядности и привычке, поддерживаемой системой образования.

Ещё древние атомисты провозгласили в качестве главной задачи исследование природы. «По крайней мере сам Демокрит, как утверждают, говорил, что он "предпочёл бы найти одно причинное объяснение, нежели приобрести себе персидский престол"» [15, с. 329]. Лукреций Кар видел в природе главную опору борьбы с безобразием религиозного гнёта: «изгнать этот страх из души и потёмки рассеять» до́лжна «природа сама своим видом и внутренним строем» [13, строки 146-148]. Но систематические научные исследования природы начались только 16-ю столетиями позже Лукреция, после того как открытие Николая Коперника лишило в человеческом представлении Землю статуса центра Вселенной, низведя её до роли рядового спутника рядовой звезды. Тем самым утвердился взгляд на небесные светила, прежде всего планеты, блуждающие на звёздном фоне, да и сами звёзды, как на тела. Размеры Вселенной невообразимо расширились, а природа обрела единообразие — всюду тела, и на небе, как на Земле. Это мощно стимулировало интерес к исследованию общих закономерностей движения и взаимодействия тел.

Галилео Галилей выдвинул радикально смелый для его времени принцип самодвижения материи. На протяжении двух тысячелетий пользовалась общим признанием точка зрения Аристотеля: для того чтобы возбудить и поддерживать движение тела, необходимо действовать на него силой. Это представлялось вполне очевидным — телега будет стоять на месте, если лошадь не будет тянуть её. «Простейшим является случай, когда силы вообще отсутствуют, — поясняет Макс Борн. — При этом покоящееся тело, несомненно, не придёт в движение. Уже древние установили этот факт; более того, они верили, что верно и обратное, т. е. что если существует движение, то должны существовать и силы, поддерживающие его. Эта точка зрения сразу приводит к трудностям, если задаться вопросом, почему брошенный камень или стрела продолжают двигаться после того, как они были выпущены из руки. Ясно, что именно рука привела их в состояние движения, но её воздействие закончилось, как только движение началось. Древние мыслители испытали много затруднений, пытаясь уяснить, какие силы действительно поддерживают движение брошенного камня. Галилей первым стал на правильную точку зрения. Он заметил ошибочность убеждения в том, что сила должна присутствовать везде, где существует движение» [17, с. 42-43]. Вот рассуждение самого Галилея: «Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то... движение его является равномерным и продолжалось бы постоянно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца» [18, с. 119]. Свойство тел сохранять неизменным состояние своего движения, когда внешние воздействия на тело отсутствуют или взаимно уравновешиваются, получило в физике название **инерции** (от латинского *inertia* — неподвижность, бездеятельность). Таким образом, Галилей открыл закон инерции. Его уточнил Рене Декарт (1596 – 1650), указав, «что свободное тело стремится продолжать своё движение по прямой линии. Ньютон принял закон инерции в качестве первого закона механики и выразил его следующими словами: **всякое тело продолжает удерживаться в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние»** [19, с. 64].

Ещё Галилею пришлось решать вопрос, в какой мере справедливы наши суждения об отличии равномерного прямолинейного движения от *покоя тела*. Ведь очевидно, что если некоторый наблюдатель может убедиться в равномерности и прямолинейности движения хотя бы и воображаемого транспортного средства, то другой наблюдатель, связанный с этим средством, может не ощутить своего движения, поскольку не испытывает на себе воздействия каких-либо движущих сил. С подобной ситуацией сталкивается в наше время каждый пассажир железнодорожного поезда, начинающего плавно трогаться с места: заметив перемещение относительно вагонов на соседнем пути, мы не сразу осознаём, начал ли двигаться соседний поезд или мы сами. Правда, для установления истины в данном случае достаточно посмотреть на станционные строения или на землю — движение относительно земли служит достаточно убедительным критерием фактического движения. Ну а если говорить о двух кораблях в открытом космосе, установить перемещение каждого из которых относительно ближайшей планеты непросто? В этой связи М. Борн замечает: «Наш опыт не даёт нам примеров тел, которые действительно отделены от среды постоянных внешних влияний; пытаясь представить себе, как они движутся с постоянной скоростью по своим уединённым прямолинейным траекториям в астрономическом пространстве, мы сразу сталкиваемся с вопросом о том, что такое абсолютно прямая траектория в абсолютно покоящемся пространстве» [17, с. 43].

Представление о мировом пространстве, в котором не только находятся, но и движутся все тела, возникает у нас непосредственно из наблюдений окружающих предметов. Древние атомисты считали пространство одной из двух (наряду с телами) основ мироздания. Древние математики разработали весьма совершенную геометрическую теорию наблюдаемого пространства, дошедшую до нас в сочинении Евклида «Начала». Поэтому и творцы классической механики (Галилей, Кеплер, Декарт, Ньютон) восприняли традиционное представление об абсолютном трёхмерном пространстве как всеобщем вместилище, которое в силу такой своей сущности должно мыслиться как неподвижное. Ньютон в своём знаменитом труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) предпосылает формулировке основных законов механики следующие определения.

«**Абсолютное пространство** по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остаётся всегда одинаковым и неподвижным...**Абсолютное, истинное время** само по себе и самой своей сущности, без всякого отношения к чему-нибудь внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью... абсолютное время различается в астрономии от обыкновенного солнечного времени уравнением времени; ибо естественные солнечные сутки, принимаемые в повседневной практике за равные для измерения времени, на самом деле между собой не равны; это неравенство исправляется астрономами, чтобы при измерениях движений небесных светил применять более правильное время» ([16], цитировано по книге [19], с. 67, 68).

Однако в пустом абсолютном пространстве "не за что зацепиться" в качестве ориентира местоположения. В математических рассуждениях о пространстве за такой ориентир легко принять любую точку пространства или систему точек, но если положение таких точек в пустом пространстве не определено по отношению к телам, которые можно увидеть, потрогать и приложить к ним измерительные инструменты, то для ориентации на практике такие точки непригодны. Это не вызывало теоретических затруднений, пока Земля представлялась неподвижным центром мироздания и в качестве такового могла служить всеобщим материальным ориентиром в пространстве. Но когда выяснилось, что Земля, подобно другим планетам (латинское слово *planēta* и греческое *plagktos* имеют смысл "блуждающий") движется в пустом пространстве, пришлось ориентироваться на более фундаментальное тело, каковым в гелиоцентрической системе мира Коперника является Солнце. Однако и Солнце, наряду с миллиардами звёзд в нашей Галактике, перемещается в наблюдаемом пространстве, да и галактики движутся в расширяющейся Вселенной.

Сознавая подобные трудности, Ньютон, пользовался понятиями *места*, *относительного пространства* и *относительного движения*. «**От-**

**носительное пространство** есть какая-либо ограниченная подвижная часть абсолютного пространства...Так, если рассматривать Землю подвижной, то пространство атмосферного воздуха, которое по отношению к Земле остаётся всегда одним и тем же, будет составлять то одну часть пространства абсолютного, то другую... **Место** есть часть пространства, занимаемая телом... **Абсолютное движение** есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое; **относительное движение** есть перемещение тела из одного относительного его места в другое, относительное же... Распознавание истинных движений отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами» ( [16], цитировано по книге [19], с. 67, 69). Комментируя приведённые высказывания Ньютона, К.А. Путилов, делает следующее важное замечание. «Из определений Ньютона мы не получаем ответа на вопрос: какой физический смысл имеют слова "покой" и "равномерность" движения в первом законе механики? Мы вправе, конечно, требовать, чтобы на этот, казалось бы "простой" вопрос был дан совершенно ясный ответ. Однако именно простые" вопросы часто оказываются наиболее трудными для разрешения. Ни один из вопросов, касающихся сущности основных понятий физики, в действительности не является "простым". В этом отношении понятия физики гораздо сложнее математических. С ними нельзя обращаться, как с понятиями математическими, и не приходится требовать, чтобы вся глубина, весь истинный смысл физического понятия были исчерпаны в его определении; многие вопросы, возникающие сразу после рождения нового физического понятия, проясняются постепенно, по мере развития физики. Физический смысл "покоя" и "равномерности" раскрывается не в определениях, которые предшествуют труду Ньютона, а в итоговых выводах ньютоновой механики» [19, с. 68-69].

Отмеченное Ньютоном отличие «истинных движений отдельных тел» (по отношению к абсолютному пространству) от «кажущихся» движений (в относительном пространстве) не мешало получать достаточно правильные решения обширного класса задач с помощью законов классической механики. Причина этого в том, что всегда удавалось найти такое «место» и связанное с ним относительное пространство, в котором законы классической механики выполняются без заметных нарушений. Например, для тел, неподвижных относительно земной поверхности или движущихся относительно неё равномерно и прямолинейно, отклонения от всех трёх законов Ньютона практически отсутствуют, что позволило сформулировать классический принцип относительности, называемый также галилеевским принципом относительности. Галилей писал: «Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля... подвесьте, далее, наверху ведёрко, из которого вода будет капать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как... все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придётся бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении... Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую стороны) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно» [20, с. 146-147 (середина бесед второго дня)]. Тут важна оговорка «если только движение будет равномерным и без качки», ибо в случае движения корабля с ускорением падающие сверху капли воды перестанут попадать в подставленный сосуд с узким горлышком, прыжки в сторону кормы станут длинней, чем в сторону носа корабля, и т. п. А если опыты производить в закрытом вагоне, движение которого можно особенно резко ускорять или замедлять, то даже лежащие на полу предметы станут сдвигаться с места как бы самопроизвольно, без нашего участия (с формальным нарушением второго и третьего законов Ньютона). Таким образом, существуют «относительные пространства», «места», системы отсчёта, по отношению к которым закон инерции не выполняется. Такие системы отсчёта получили название **неинерциальных** в отличие от **инерциальных** систем, в которых закон инерции выполняется.

По убеждению Ньютона сформулированные им законы механики совершенно точно выполняются в абсолютном пространстве с учётом абсолютного времени. Следовательно, такая абсолютная система отсчёта инерциальна. Из этого утверждения в сочетании с принципом относительности Галилея вытекает, что любая система отсчёта, движущаяся относительно абсолютной системы равномерно прямолинейно, тоже инерциальна. Тем самым бесконечно расширяется сфера справедливости законов классической механики, но вместе с тем бесконечно усложняется задача отыскания абсолютной системы, которая становится неотличимой от всех прочих инерциальных систем отсчёта. Таким образом, галилеевский принцип относительности фундаментально важен для классической механики. Обобщая те конкретные примеры, с помощью которых Галилей иллюстрировал открытый им принцип в приведённой выше цитате из книги [20], Альберт Эйнштейн дал следующую формулировку классического принципа относительности: **никакие механические опыты и наблюдения, производимые внутри инерциальной системы, не дают возможности решить вопрос, имеет ли вся эта система в целом прямолинейное равномерное движение или же она находится в покое.** В иной формулировке галилеевский принцип относительности сводится к утверждению: «Если законы механики справедливы в одной системе координат, то они справедливы и в любой другой системе, движущейся прямолинейно и равномерно относительно первой» [21, с. 456]. Сам Ньютон допускал, что «может оказаться, что в природе не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих... Возможно, что не существует в природе такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенной точностью», и Ньютон видит задачу механики и физики в «...нахождении истинных движений тел по причинам, их производящим, по их проявлениям и по разностям кажущихся движений» (цитировано по книге [19], с. 69). Вплоть до конца XIX века физики сохраняли веру в существование абсолютной системы отсчёта в трехмерном наблюдаемом пространстве и не теряли надежды обнаружить её или по крайней мере неопровержимо доказать её существование.

При исследовании многих явлений бытового и технического характера системы отсчёта, неподвижные относительно Земли, могут считаться инерциальными с удовлетворительной точностью. Но более точные эксперименты (например, маятник Фуко) позволяют обнаружить неинерциальность земной системы отсчёта. В задачах небесной механики Земля явно не годится на роль инерциальной системы отсчёта, но можно получать достаточно точные предсказания движения Земли и других небесных тел, относя расчёты к системе, связанной с Солнцем и далёкими звёздами. В современной космологии проблема поиска инерциальной системы отсчёта ещё более расширяется: может ли быть найдена (либо вообще существует ли) инерциальная система отсчёта, связанная с какой-нибудь галактикой? По мнению Эйнштейна «вопрос о том, существует ли вообще инерциальная система, ещё не решён» [21, с. 456]. Общая теория относительности Эйнштейна применима к искривлённым пространствам, в которых прямых линий в принципе не может быть, а значит не может быть и инерциальных систем отсчёта в строгом их понимании. Но в классической механике признание существования инерциальных систем отсчёта было одним из основополагающих не вызывавших сомнения принципов, как подчёркнуто Максом Борном: «Существует бесконечное число эквивалентных систем, называемых инерциальными и совершающих поступательное движение (равномерное и прямолинейное) относительно друг друга, в которых законы механики выполняются в своей простой классической форме» [17, с. 92]. Убеждённостью в существовании строго инерциальных систем отсчёта, в которых законы классической механики справедливы абсолютно, оправдывалось право делать из последних мировоззренческие выводы и пользоваться не вполне строго инерциальными системами отсчёта для решения практических задач с удовлетворительной точностью.

Классический принцип относительности не исключает того, что некоторые процессы могут проявляться по разному в различных инерциальных системах. В первую очередь это касается скорости движения тел по отношению к различным инерциальным системам. Пусть на прямолинейном участке реки, где скорость *u* течения воды постоянна, плывёт по течению плот, а по плоту параллельно направлению его скорости *u* идёт человек со скоростью $v'$ относительно плота (см. рис. 2.1). В этом примере берег реки и плот могут считаться инерциальными системами с практически достаточной точностью. Вполне очевидно, что скорость $v$ человека по отношению к берегу реки равна

$$v = u + v'. \tag{2.1}$$

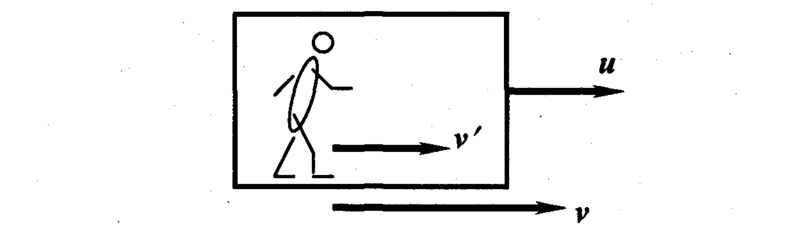


Рис. 2.1

В формуле (2.1) скорости обозначены не как векторные, а как скалярные величины, что допустимо при рассмотрении движений вдоль прямой и более удобно для вычислений. Если бы человек шёл поперёк плота в направлении, перпендикулярном к берегу (к вектору *u* скорости течения), то наблюдатель, сидящий на берегу, видел бы траекторию движения человека наклонённой к берегу. В какой из двух систем отсчёта восприятия движений человека по плоту следует считать более истинными? С точки зрения абсолютной системы отсчёта оба таких восприятия не выражают истинных движений, а согласно принципу относительности ни одно из этих восприятий не является более ложным, чем другое. Не следует ли вообще отказаться от попыток искать в наблюдаемом пространстве истинную траекторию движения тела по отношению к абсолютной системе отсчёта и признать траекторию по сути своей относительным явлением? На деле физики довольствовались именно таким решением, поскольку, как писал Эйнштейн, достаточно «знать, что́ наблюдается в одной системе... чтобы найти, что́ наблюдается в другой, если известны относительные скорости и положения обеих систем в некоторый момент времени… Обе системы эквивалентны и обе одинаково пригодны для описания событий в природе. В действительности совершенно достаточно знать результаты, полученные наблюдателем в одной системе, чтобы предсказать, какие результаты получит наблюдатель в другой» [21, с. 456]. Основой для таких предсказаний в классической механике служат довольно простые формулы, названные галилеевыми преобразованиями.

На рис. 2.2 изображена инерциальная система координат $OXYZ$, начало которой связано с материальной точкой (телом) $O$, и система координат $O'X'Y'Z'$, начало которой связано с материальной точкой $O'$, движущейся вдоль оси $OX$ со скоростью $v$ относительно $OXYZ$. Будем для краткости называть *штрихованной* систему $O'X'Y'Z'$, символы которой помечены штрихами, а систему $OXYZ$ назовём *нештрихованной*. Координаты $x'$, $y'$, $z'$ точек относительно штрихованной системы координат будем помечать штрихами, а координаты точек относительно нештрихованной системы координат будем записывать без штрихов. По представлениям клас-

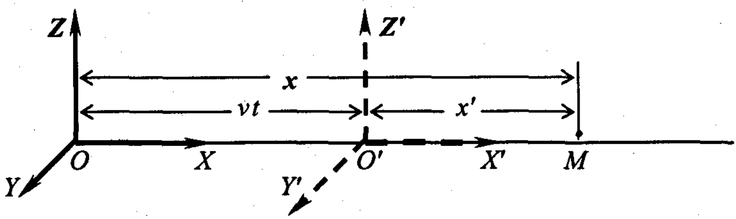


Рис. 2.2

сической механики время $t$ протекает одинаково, независимо от выбора системы отсчёта, что можно выразить формально равенством

$$t' = t, \qquad (2.2)$$

а на деле применять нештрихованный символ времени $t$ даже при пользовании штрихованной системой отсчёта. Если за начало отсчёта времени $t$ принять событие совпадения координат $x' = x$ материальных точек $O$ и $O'$, то в момент времени $t$ (независимо от того, по часам какой системы отсчитан этот момент) расстояние между материальными точками $O$ и $O'$ равно $vt$, а координаты $x'$ и $x$ материальной точки $M$ связаны равенствами

$$x' = x - vt, \qquad (2.3)$$

$$y' = y, \qquad z' = z. \qquad (2.3')$$

То, что значения абсциссы $x'$ и $x$ материальной точки $M$ различны в разных системах координат не вызывает удивления. Принцип относительности, утверждая равноправие инерциальных систем, позволяет считать одинаково истинными обе различные оценки местоположения материальной точки $M$. Но в равенствах (2.2), (2.3) кроется возможность критики классического представления об абсолютном физическом характере трёхмерного пространства как обобщения пространства наблюдаемого. Ведь если материальная точка $M$ (см. рис. 2.2) неподвижна относительно нештрихованной системы координат $OXYZ$ , то она указывает (фиксирует) определённое место $x = const$ в пространстве в любые моменты времени $t$. А поскольку та же материальная точка $M$ движется относительно штрихованной системы координат $O'X'Y'Z'$, она в различные моменты времени $t$ указывает различные точки пространства, т. е. не фиксирует определённого места в нём. Обсуждая этот парадокс, Макс Борн пишет: «...“фиксированное место” в ньютоновском абсолютном пространстве лишено (физической) реальности... На этом пути абсолютное пространство Ньютона теряет значительную часть своего таинственного существования. Пространство, в котором не существует ни одного места, которое могло бы быть фиксировано при помощи каких бы то ни было физических средств, представляется по крайней мере весьма смутной и абстрактной идеей, а не просто ящиком, наполненным материальными объектами» [17, с. 91].

Справедливость требует сказать, что Ньютон не является изобретателем понятия абсолютного пространства. Он просто утвердил в качестве предпосылки к своим аксиомам механики то представление о пространстве, которое сформировалось в сознании мыслителей ещё до нашей эры. Органы чувств дают людям наглядный образ наблюдаемого пространства (комнаты, гóрода, пóля). Математическая же обработка этого образа приводит к бесконечному расширению его во всех наблюдаемых направлениях и построению геометрической теории. В результате рождается то, что называется математической (геометрической, алгебраической) моделью пространства. Современной математике доступны построения весьма разнообразных моделей пространства, одна из которых, называемая трёхмерным собственно евклидовым пространством, наилучшим образом соответствует **наглядно воспринимаемому** образу мирового пространства, хотя и отличается от более адекватной модели мирового пространства. Здесь можно провести аналогию с тем, как геоцентрическая модель мира Аристотеля и Птолемея соответствует наглядному восприятию окружающей нас Вселенной, но отличается от более истинной гелиоцентрической модели мира настолько, что последняя долгое время казалась неприемлемой. Даже знаменитый астроном Тихо Браге, из наблюдательных материалов которого Кеплер вывел законы движения планет вокруг Солнца, не принял систему Коперника. Так и математики от древних времён вплоть до Лобачевского и Римана в XIX веке не мыслили иных моделей пространства, отличающихся в принципиальных свойствах (линейных и метрических) от наблюдаемого пространства, вследствие чего математическая модель трёхмерного собственно евклидова пространства представлялась учёным единственно возможным истинным образом мирового физического пространства. Именно этой модели присущи такие свойства, которые были приписаны абсолютному пространству Ньютона: трехмерность, бесконечная протяжённость в трёх измерениях, неподвижность, однозначная определённость местоположения каждой точки пространства и все метрические свойства (обусловливающие сравнимость длин непараллельных отрезков и определённость численной меры углов).

С позиций же современной науки видно, что трудность совмещения классического (ньютонова) понимания абсолютного пространства с принципом относительности в сущности означала недостаточную пригодность математической модели трёхмерного собственно евклидова пространства к описанию свойств реального мирового пространства. Перефразируя цитированное выше суждение М. Борна, скажем, что потеря абсолютным пространством Ньютона значительной части «своего таинственного существования» заключается в обнаружении недостаточной пригодности этой модели пространства для описания физической реальности. Эта мысль станет более понятной и особенно интересной после знакомства с моделью мирового пространства и материальных объектов, предложенной Германом Минковским для объяснения специальной теории относительности. И признавая в принципе глубину цитированного выше высказывания К.А. Путилова о том, что «понятия физики гораздо сложнее математических… и не приходится требовать, чтобы вся глубина, весь истинный смысл физического понятия были исчерпаны в его определении», можно не согласиться с тем, что «с ними нельзя обращаться, как с понятиями математическими» [19, с. 69]. Не только можно, но и нужно, как показывает опыт развития физики XX века, выражать физические закономерности на языке математических моделей, отыскивая такие модели, которые наилучшим образом отражают экспериментально подтверждаемые стороны реальности. Модель трёхмерного собственно евклидова пространства в качестве абсолютного пространства классической механики прекрасно годилась для математического решения того широкого круга задач, которые входили в компетенцию этой теории и отвечали запросам практики классической эпохи. Но расширение и углубление исследований природы потребовали привлечения более общих и глубоких математических моделей.

Из преобразований Галилея (2.2), (2.3), (2.3′) вытекают два мировоззренчески важных вывода. Во-первых, из равенства (2.2) следует, что события $P$ и $Q$, одновременные в нештрихованной инерциальной системе отсчёта, т.е. удовлетворяющие равенству $t_P = t_Q$, являются одновременными и в любой другой (штрихованной) инерциальной системе отсчёта

$$t'_P = t_P = t_Q = t'_Q\,, \qquad (2.4)$$

и промежуток времени между событиями $P$ и $R$, измеренный в нештрихованной инерциальной системе отсчёта, имеет такое же значение в любой другой (штрихованной) инерциальной системе отсчёта

$$T'_{PR} = t'_R - t'_P = t_R - t_P = T_{PR}\,. \qquad (2.5)$$

Во-вторых, пространственное расстояние между любыми точками $A$ и $B$ тоже не зависит от того, в какой инерциальной системе отсчёта измеряется это расстояние. Для ситуации, изображённой на рис. 2.2 и описываемой преобразованиями (2.3), (2.3′) пространственных координат, проще всего убедиться в неизменности расстояния между точками $A$ и $B$, лежащими на оси $OX$ (хотя ценой усложнения вычислений можно получить такой же результат для любых точек трёхмерного пространства):

$$l_{AB} = x_B - x_A\,,$$

$$l'_{AB} = x'_B - x'_A = (x_B - vt) - (x_A - vt) = x_B - x_A = l_{AB}. \qquad (2.6)$$

Разумеется, при этом необходимо измерять значения пространственных координат точек в один и тот же момент времени. В рассуждениях этого абзаца мы вынуждены употреблять термин "системы отсчёта" в сочетании с эпитетом "инерциальные", потому что опираемся на галилеевы преобразования координат пространства и времени при переходах между инерциальными системами отсчёта. Но в классической механике промежутки времени и расстояния между точками трёхмерного пространства считаются не зависящими от выбора любых систем отсчёта, в том числе неинерциальных.

Для того чтобы законы механики могли применяться к любым телам, нужно было выделить из множества тел, различающихся конкретными особенностями, обобщённую абстрактную модель тела, обладающую важнейшими с точки зрения механики свойствами, присущими всем телам. Так как всякое тело обладает массой, то носителем этой массы должна стать и абстрактная модель тела. Что касается формы и размеров тела, то от них во многих случаях можно отвлечься и рассматривать движение только одной точки тела, например, его центра масс. Так сформировалось понятие материальной точки в качестве обобщённой модели тела.

> **Материальной точкой** называется обобщённая модель тела, размерами, формой и внутренней структурой которого можно пренебречь по условиям рассматриваемой задачи, причём существенны следующие характеристики материальной точки:
> — в геометрическом аспекте материальная точка является точкой трёхмерного собственно евклидова пространства;
> — в физическом аспекте материальная точка обладает массой в отличие от пустых точек пространства;
> — материальные точки в своих движениях и взаимодействиях подчиняются законам классической механики, а это в частности означает, что с каждой материальной точкой можно связать систему отсчёта пространства и времени, относительно которой данная материальная точка неподвижна.

(2.7)

Объект, не обладающий хотя бы одним из трёх указанных здесь признаков не является телом в том смысле, какой вкладывается в это понятие классической физикой. В учебниках и справочниках **материальная точка** определяется как тело, размерами и формой которого можно пренебречь при описании его движения в условиях рассматриваемой задачи, а масса тела приписывается представляющей его материальной точке. Это обычное для классической механики определение материальной точки становится недостаточным при переходе к модели мира Минковского. Поскольку модель мира Минковского основывается на четырёхмерном пространстве с метрическими свойствами, отличными от привычных для нас собственно евклидовых свойств пространства классической картины мира, становится очень важным подчеркнуть, что материальная точка в качестве основного объекта классической механики мыслится как точка трёхмерного собственно евклидова пространства.

В задачах небесной механики при вычислениях орбит планет можно считать планеты материальными точками и в этой связи не интересоваться их вращением вокруг собственной оси и отклонениями их формы от сферической. Если же по условию задачи требуется учитывать форму тела и движения его частей, отличные от поступательного перемещения центра масс, то тело рассматривают как систему материальных точек и исследуют (рассчитывают) движение различных частей тела как отдельных материальных точек или подсистем материальных точек. Тело называется по латыни *corpus*, а маленькое тельце (каким мыслился атом) — *corpusculum*. Поэтому классическая картина мира, представляющая мироздание в согласии с древними атомистами как множество тел, заслуживает названия **корпускулярной картины мира**, а материя, представляемая в своём глубочайшем исходном облике в виде мельчайших неделимых и вечных телец (атомов), может быть названа корпускулярной материей, или **корпускулярным уровнем материи**, если допустимо предполагать существование иных, более глубоких уровней материи. Имея в виду понимание любых тел как материальных точек или систем материальных точек, можно выразить классическую картину мира в кратком обобщении следующим образом.

| | |
|---|---|
| **Вселенная** есть бесконечная система материальных точек, движущихся в трёхмерном собственно евклидовом пространстве вечно, на протяжении бесконечного промежутка времени, не имеющего ни начала, ни конца . | ( 2. 8 ) |

Хотя законы теории относительности выходят за пределы теории классической механики, они принимаются как уточнение последней, применимое к любым материальным точкам. Но важно подчеркнуть, что за этой применимостью кроется преодоление классической картины мира, ибо теория относительности служит проявлением иной картины устройства мироздания, к которой классические образы описания реальности приложимы лишь условно, в качестве внешней видимости, а не в качестве глубочайшей сущности. Здесь можно провести аналогию с тем, как без отказа от гелиоцентрической системы мира можно с очевидной условностью говорить о суточном вращении небесного свода и годовом движении Солнца по эклиптике (среди зодиакальных созвездий).

Великое достоинство науки состоит в стремлении и умении обнаруживать за внешней наглядно воспринимаемой видимостью явлений углублённую скрытую сущность. Было бы несправедливо утверждать, что восприятия органов чувств всегда обманывают нас. Прав был Лукреций в том, что отказывая в доверии восприятиям и здравому смыслу, «не сможем совсем, не зная, на что положиться, мы рассуждать о вещах каких-нибудь тайных и скрытых». Поэтому истинность наших суждений должна несомненно проверяться опытом. Но область проверенных опытом суждений всегда ограничена, а люди не всегда могут правильно оценить эти границы и потому, как правило, стремятся распространить (экстраполировать) проверенные опытом истины за пределы границ опыта. Иногда такая экстраполяция становится триумфом науки, как было с законом всемирного тяготения, но случается и так, что экстраполяция, будучи неадекватной (не оправданной) становится источником принципиальных заблуждений. Проиллюстрируем это несколькими хрестоматийными примерами.

Опыт тысячелетий убеждал людей в том, что могут быть перемещены различные предметы, подчас даже очень большие, даже горы при мощных землетрясениях, но невозможно передвинуть земную поверхность в целом. Поэтому наблюдая движения небесных светил и даже обнаруживая в них закономерности, позволяющие ориентироваться на местности и отсчитывать промежутки времени, древние люди убеждённо заключали, что небесные светила и весь небосвод вращаются вокруг Земли. Неадекватная экстраполяция в данном случае состояла в том, что опыт, оправданный в отношении земных предметов, был распространён на объекты небесные, природа которых вообще была непонятна. Впрочем, именно непонятность облегчала экстраполяцию: раз неизвестно, что такое небо, то нет принципиальных причин отказать ему в способности к вращению, которое ведь и в самом деле наблюдается. Но когда было осознано, что в небесах мы созерцаем другие земли (планеты) и солнца (звёзды), образующие мир неизмеримо бóльший, чем наша Земля, то стало ясно, что вращать его вокруг Земли невозможно, и следует объяснять небесные движения с учётом движений самóй Земли.

Другим долго господствовавшим заблуждением было представление о Земле как плоском диске. В основе этого представления лежал надёжно проверенный факт: если отвлечься от местных неровностей, то поверхность Земли в равнинных местностях до сáмого горизонта видна как плоскость. Ещё явственней это видно на обширной водной поверхности, причём такая видимость сохраняется даже при перемещениях на очень большие расстояния. Отсюда делался вывод, что Земля в целом как носитель всех имеющихся не ней морей, полей, лесов, гор, имеет в общем плоскую поверхность. В наше время школьники на первых же уроках географии знакомятся с явлениями, доказывающими общую кривизну земной поверхности. Самое простое из них — постепенное появление из-за горизонта высоких объектов (корабельных мачт, башен маяков, вулканических пиков) по мере приближения к ним в диапазоне расстояний 5 – 50 километров. Ещё более веское доказательство — изменение угловой высоты над горизонтом Полярной звезды и всех звёзд в момент их кульминации при значительных перемещениях наблюдателя в направлении с севера на юг. С помощью таких наблюдений нетрудно даже вычислить радиус земного шара. Если, к примеру, при перемещении наблюдателя строго в южном направлении на расстояние $l = 668$ км высота полярной звезды над горизонтом уменьшится на угол $6^{\circ}$ ($\alpha = 0{,}1047$ радиан), то это будет соответствовать значению радиуса Земли $R = l / \alpha = 6380$ км. Несомненно, оба эти явления вполне могли быть замечены древними греками и римлянами, но сконцентрировать на этих явлениях пытливое внимание и сделать из них правильные выводы мешала общепринятая убеждённость в дискообразности Земли. И ведь не только инерция мысли не позволяла отказаться от этой убеждённости. Дерзнув заподозрить шарообразность Земли, люди столкнулись бы с такими трудностями, преодолеть которые в древности не могли. Даже если бы в качестве промежуточной модели между плоским диском и шаром представили бы Землю подобной плосковыпуклой линзе (шаровому сегменту), что требовало менее радикальной ломки мировоззрения, то и с этим не мог бы примириться здравый смысл наших далёких предков, поскольку по их представлениям с выпуклой земной поверхности вода должна стекать вниз, и на земле не осталось бы ни рек, ни морей. Таким образом, требовались весьма существенные изменения в человеческих представлениях о природе вещей, чтобы простейшие свидетельства шарообразности Земли обрели ту убедительность, какую они имеют для наших современников. На этих примерах ясно видно, как господство определённого представления влияет на отбор и оценку фактов, способных противоречить ему.

История науки предстаёт перед нами как процесс преодоления заблуждений. И всё же мы не должны впадать в принципиальное заблуждение, полагая, будто устройство природы коварно обрекает нас на бесконечную сеть ошибочных представлений о ней. Гораздо плодотворней оптимистическая позиция Галилея, назвавшего Вселенную открытой книгой. «Кто устремляется к высшей цели, тот занимает более высокое место; вернейшее же средство направить свой взгляд вверх — это изучать великую книгу природы, которая и составляет настоящий предмет философии… Из достойных изучения естественных вещей на первое место, по моему мнению, должно быть поставлено изучение устройства Вселенной» [20, с. 21 (посвящение «Диалога» великому герцогу Тосканскому)]. «Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять её может лишь тот, кто сначала научится постигать её язык и толковать знаки, которыми она написана. Написана же она на языке математики, и знаки её — треугольники, круги и другие геометрические фигуры, без которых человек не смог бы понять в ней ни одного слова; без них он был бы обречён блуждать в потёмках по лабиринту» [22, с. 41 (Первое взвешивание, конец гл. VI)].

Но природа бесконечно глубока и многогранна, и мы сами повергаем себя в заблуждение, когда вместо очень внимательного и последовательного изучения книги природы поспешно перескакиваем через её страницы, заменяя своими измышлениями написанное в них. Галилей убеждён в том, что тщательное изучение природы способно вести людей к совершенному познанию истины: «... я утверждаю, что человеческий разум познаёт некоторые истины столь совершенно и с такой абсолютной достоверностью, какую имеет сама природа; таковы чистые математические науки, геометрия и арифметика; хотя божественный разум знает в них бесконечно больше истин, ибо он объемлет их все, но в тех немногих, которые постиг человеческий разум, я думаю, его познание по объективной достоверности равно божественному, ибо оно приходит к пониманию их необходимости, а высшей (чем необходимость — А.С.) степени достоверности не существует» [20, с. 89 (конец бесед первого дня)].

Поиски указанной Галилеем **объективной** достоверности стали главнейшей задачей науки. При этом на место недостаточно определённого философского понятия объективности в точных науках ставится понятие **инвариантности**. Инвариантно то, что не изменяется при всех доступных нам изменениях условий опыта и наблюдения. В простейших случаях зависимость явления от условий его наблюдения вполне очевидна. Например, если я скажу сидящему за столом лицом ко мне собеседнику, что окно нашей комнаты находится слева, то собеседник выскажет не менее истинное суждение, утверждая, что окно находится справа от него. Каждому ясно, что содержание истинного суждения в этом примере изменяется с изменением позиции наблюдателя, а не является собственной характеристикой окна. Легко внести поправку, усиливающую степень инвариантности суждений, указав, например, что окно находится на западной стороне дома. Но это, в свою очередь, тоже не является собственной характеристикой окна, а отражает соотношение между домом и земной поверхностью. С более широкой и глубокой точки зрения можно было бы указать, что поскольку в данный момент в окно видно созвездие Ориона, направление от стола между собеседниками к окну совпадает с направлением от Солнца к звёздам Ориона. Однако через четыре с половиной часа в то же окно будет видно созвездие Льва, а это уже иное направление в космосе.

Возьмём другой пример. Видимый угловой диаметр Солнца равен примерно половине градуса. И так как он не изменяется заметным образом при любых перемещениях наблюдателей по Земле, то нашим древним предкам, не знавшим ни природы Солнца, ни его диаметра, ни расстояния до него, непросто было осознать, что этот видимый диаметр не является собственной характеристикой Солнца, что это относительная характеристика, зависящая от условий наблюдения Солнца.

Наконец, рассмотрим такой пример, когда распознать относительность привычной характеристики тел удалось только с помощью великого научного открытия. Субъективное восприятие тяжести предметов разное у разных людей. Чемодан с собранными в дорогу вещами может показаться неподъёмным пожилой женщине, а для спортивно тренированного внука её та же ноша будет не тяжела. На пружинных весах в аэропорту вес чемодана будет оценён независимо от ощущений человека, но означает ли это, что вес тела является его собственной характеристикой? Ответить на этот вопрос нетрудно после того, как Исаак Ньютон сформулировал второй закон механики

$$F = ma \tag{2.9}$$

и закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{Mm}{l^2} \tag{2.10}$$

(здесь $F$ — сила, действующая на тело массы $m$, $a$ — ускорение, которое сообщает массе $m$ сила $F$, $M$ — масса планеты, $l$ — расстояние между центрами масс $m$ и $M$, $G$ — универсальная гравитационная постоянная). То, что мы называем весом тела, есть сила $F$, с которой притягивается тело к центру планеты. И так как Земля с достаточной для бытовых задач точностью может считаться шаром, то находящиеся на её поверхности тела удалены от центра планеты на одинаковое расстояние $l$, вследствие чего коэффициент пропорциональности $GM/l^2$ между массой $m$ тела и силой $F$ притяжения массы к центру Земли практически постоянен, что мешало обнаружению различия между массой и весом. Но если перейти на другую планету, скажем, на Луну, то сила $F$ изменится из-за изменений $M$ и $l$, и человек, весящий на Земле 600 ньютонов, будет притягиваться к центру Луны с силой 100 ньютонов. Итак, вес тела не является собственной характеристикой только этого тела, а является величиной относительной, выражающей взаимодействие тела с телом планеты. Но относительность веса несравненно трудней было обнаружить, чем относительность расположения окна слева или справа от наблюдателя, поскольку условия, при которых вес тела остаётся постоянным, человеку несравненно трудней изменить, чем изменить свою позицию по отношению к окну. Относительность веса была осознана теоретически задолго до того, как появились технические возможности удаляться от центра планеты на расстояния, заметным образом превосходящие её радиус $l$, или добираться до других планет.

Последний пример показывает, что величина, которая долго считалась собственной характеристикой материального объекта, может в действительности оказаться относительной. Все три примера свидетельствуют, что за каждой относительной характеристикой обнаруживается характеристика инвариантная, а если и не инвариантная, то более устойчивая, требующая для доказательства её относительности более радикального изменения позиции наблюдателя. В первом примере собеседники, расходящиеся во мнениях относительно расположения окна слева или справа, сойдутся в том, что окно комнаты обращено на запад. Во втором примере за относительностью углового размера Солнца находим линейный диаметр Солнца, не зависящий от расстояния до наблюдателя. Наконец, в третьем примере за относительностью веса тела обнаруживается его масса $m$, которая служит коэффициентом пропорциональности (мерой инертности тела) в основном законе динамики (2.9) и не зависит от того, с какой силой притягивается это тело той или иной планетой.

Так мы подходим к чрезвычайно важному в философском отношении вопросу: а существуют ли вообще какие-либо абсолютно инвариантные характеристики материального мира, или любые возможные характеристики и величины в глубочайшей сути своей представляют лишь соотношения между различными сторонами действительности? У разных мыслителей есть свои ответы на этот вопрос. Но интересным и содержательным будет не столько получение однозначного ответа, сколько рассмотрение научных и философских аргументов в пользу того или иного решения.

В основе классической физики лежала убеждённость в абсолютной инвариантности (абсолютной независимости от условий измерения) по меньшей мере четырёх физических величин:

1) расстояния $l_{AB}$ между любыми точками $A$ и $B$ (см. (2.6)) мирового пространства, которое отождествлялось с математической моделью трёхмерного собственно евклидова пространства;

2) промежутка времени $T_{PR}$ между любыми событиями $P$ и $R$ (см. (2.5));

3) массы $m$ любого тела (материальной точки (2.7));

4) электрического заряда каждого носителя этого заряда.

На чём основывалась убеждённость в абсолютной инвариантности этих величин? Во-первых, на том, что ни в каких доступных классической науке экспериментах и наблюдениях в пределах достижимой точности измерений не обнаруживалась зависимость четырёх указанных величин от условий их наблюдения. Во-вторых, классическая механика выработала логически строгие теоретические построения, с позиций которых удалось объяснить широчайший круг земных и небесных явлений от движений и взаимодействий молекул до движений и взаимодействий планет и звёзд. Поэтому теория классической механики считалась всеобъемлющей, её стремились применять даже к загадочному мировому эфиру. «После того как поперечность световых волн была обнаружена и подтверждена многочисленными экспериментами, в уме Френеля родилась идея будущей *динамической теории света*, которая должна быть построена в полном соответствии с принципами механики и характером оптических явлений на основе свойств эфира и свойств действующих на него сил... Пространство в механике считается пустым постольку, поскольку в нём не присутствуют материальные тела. Пространство в оптике заполнено эфиром. Эфир рассматривают как некоторого рода материю, имеющую определённую массу, плотность и упругость» [17, с. 135, 146]. И так как в основе классической механики лежало представление об абсолютной инвариантности четырёх указанных выше величин, то немыслимо было подвергать сомнению надёжность несущих опор грандиозного здания науки. Таким образом, стройность и широкая применимость классической картины мира стала ручательством истинности её основ. На эти-то основы и посягнул А. Эйнштейн своей теорией, приводившей к признанию относительности пространственно-временных и динамических характеристик материального мира.

Поведение любой системы материальных точек в принципе может быть рассчитано с помощью законов классической механики как результат движений и взаимодействий всех материальных точек, из которых состоит система. При этом отнюдь не обязательно, чтобы материальные точки совпадали с такими реальными структурными элементами тел как молекулы и атомы. В качестве материальных точек могут рассматриваться просто достаточно малые объёмы вещества. Критерием же достаточной малости во многих задачах физики служит допустимость выполнения интегрирования (суммирования) мелких элементов объёма ($dV$), площади ($dS$), длины ($d\,l$). Этим методом исследуются и моделируются состояния так называемых сплошных сред. Если достаточно малые (в указанном смысле) элементы объёма содержат большое число молекул (атомов), то дискретностью структурных элементов вещества можно пренебрегать и считать, что вещество непрерывно заполняет некоторый объём пространства. Так последовательно сформировался и укрепился в науке взгляд на мироздание как бесконечную систему (2.8) материальных точек.

Решающий вклад в формирование этого взгляда принадлежит Исааку Ньютону, первооткрывателю совокупности основных законов, управляющих движениями и взаимодействиями материальных точек. Поэтому Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813) имел все основания сказать: «Счастлив Ньютон, ибо систему мира можно создать только один раз». Но сам Лагранж придал теории механики Ньютона совершенную математическую форму, что не только облегчило подходы к решению многих трудных задач, но и проложило путь к важным мировоззренческим выводам. Лагранж показал, что поведение любой системы материальных точек удовлетворяет определённой для неё системе дифференциальных уравнений. Выполнив интегрирование этих уравнений, можно найти зависимость от времени пространственных координат всех материальных точек, входящих в рассматриваемую механическую систему, т. е. получить информацию о её состояниях в любые моменты времени как в прошлом, так и в будущем. В самих дифференциальных уравнениях Лагранжа выражаются лишь общие закономерности поведения всех механических систем, а поведение каждой конкретной системы определяется дополнительно так называемыми её начальными условиями, которые представляют значения пространственных координат и скоростей всех материальных точек этой системы в какой-нибудь фиксированный момент времени. Именно начальные условия позволяют выделить из всех функциональных зависимостей, представляющих возможные решения системы уравнений, те однозначно определённые функции, которыми описывается история конкретной системы материальных точек. На практике в достаточно большой и сложной системе учёт всех материальных точек и начальных условий может оказаться непосильной задачей для нас. Ещё более сложна задача интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений системы. Но вопрос о нашей способности или неспособности решать такие задачи есть всё-таки вопрос уровня наших знаний и технических возможностей, а принципиально важна другая проблема.

Ведь если материальные точки в любой их системе в каждый момент времени имеют определённое взаиморасположение в пространстве и определённые скорости, то существует и однозначно определённое этими условиями решение дифференциальных уравнений Лагранжа. Значит однозначно определены положения и скорости всех материальных точек в любой момент времени безотносительно к тому, знаем ли мы их или не знаем. Значит можно говорить о **предопределённости** поведения любой системы материальных точек. Эта предопределённость убедительнейшим образом подтверждается способностью специалистов по небесной механике правильно предсказывать положения небесных светил на много лет вперёд (что и реализуется изданием астрономических ежегодников на будущее). Пьер Симон Лаплас (1749 – 1827), по праву считающийся создателем теории небесной механики, писал: «Современные события имеют с событиями предшествующими связь, основанную на очевидном принципе, что никакой предмет не может начать быть без причины, которая его произвела… Мы должны рассматривать современное состояние Вселенной как результат её предшествующего состояния и причину последующего. Разум, который для какого-нибудь данного момента знал бы все силы, действующие в природе, и относительное расположение её составных частей, если бы он, кроме того, был достаточно обширен, чтобы подвергнуть эти данные анализу, обнял бы в единой формуле движения самых огромных тел во Вселенной и самого лёгкого атома. Для него не было бы ничего неясного, и будущее, как и прошлое, было бы у него перед глазами… Кривая, описываемая молекулой воздуха или пара, управляется столь же строго и определённо, как и планетные орбиты: между ними лишь та разница, что налагается нашим неведением» [23]. Предположенный Лапласом в этом высказывании всеведущий разум вошёл в поговорку как “лапласовский ум”. Можно отрицать реальное существование такого ума, который по сути отождествлялся бы с божественным, но как отрицать сам принцип предопределённости, если он логически выводится из признанных наукой в качестве универсальной истины закономерностей механики, выраженных в дифференциальных уравнениях Лагранжа? Лаплас не мог отрицать этот принцип, не изменяя своим научным убеждениям, а вместе с ним и вслед за ним многие учёные вынуждены были считать предопределённость глубоко обоснованным принципом устройства природы, которому должны покориться сомнения, опирающиеся на обыденный человеческий опыт и здравый смысл. Даже на рубеже XIX и XX столетий крупный физик-теоретик Людвиг Больцман (1844 – 1906) не отказывался от «идеала науки представить дух и волю как "сложные действия частиц материи"» (цитировано по [24, с. 305]).

Именно дух и воля представляются неподвластными (или не вполне подвластными) законам механики, ибо опыт и здравый смысл убеждают нас буквально на каждом шагу в нашей принципиальной способности нарушать предопределённость в ходе событий. Например, я во время прогулки в предгорьях Кавказского хребта близ Кисловодска, нашёл на одном из утёсов лежащий в углублении камень массой с полцентнера, лежащий так, по-видимому, со времён горообразования. Он мог подвергаться на протяжении тысячелетий атмосферным воздействиям, которые не были способны сбросить его вниз. Случайно оказавшаяся там птица или животное, пусть даже человек, либо не могли, либо не имели надобности изменить положение камня. По законам механики лежать бы ему на том же месте, пока процессы выветривания не превратят его в песок или не случится землетрясение. Но, желая продемонстрировать нарушение этой механической предопределённости, я выкатил камень из углубления на край утёса и сбросил вниз. Последовательные сторонники принципа предопределённости сказали бы, что намерение сбросить камень не было моим свободным волеизъявлением, а было предопределено всем ходом событий в бесконечной системе материальных точек, которую мы называем Вселенной. Нельзя не согласиться с тем, что научному объяснению поддаётся механический процесс поднимания камня человеком и преобразования химико-биологической энергии потреблённой человеком пищи в механическую работу его костно-мышечной системы. Однако исходный мысленный импульс, побуждающий эту систему к определённому действию, например, решение либо сбросить камень вниз, либо только передвинуть его на другое место, не вытекает из общих законов механики, даже квантовой. В последней цитате из Лапласа я опустил слова, которые теперь уместно привести: «Воля, сколь угодно свободная, не может без определённого мотива породить действия, даже такие, которые считаются нейтральными» [23]. Мотив в моём "эксперименте" с камнем конечно был — продемонстрировать моим собеседникам способность человека нарушать механическую предопределённость, но суть философского обобщения этого принципа механики именно в том и состоит, чтобы признать причиной всех явлений, не исключая психической мотивации, процессы в материальном мире, как его понимала классическая физика. И если физико-математический склад ума многих естествоиспытателей побуждал их принять принцип предопределённости, то другие мыслители, напротив, не мирились с расширением его в область философских обобщений.

Красочно и глубоко представлена эта проблема в рассказе В.Г. Короленко «Необходимость». Юный Кассапа, сын раджи Личави, говорит трём мудрым старцам о гнетущих его сомнениях.

«...Вы полагаете, очевидно, что я обязан ответить вам за каждый рубец на спине раба Джеваки, нанесённый домоправителем. А я сильно сомневаюсь, обязан ли я отвечать даже за свои собственные поступки.

Старцы опять переглянулись.

— Продолжай сын мой, если тебе угодно.

— Угодно? — перебил юноша с горьким смехом. — В том-то и дело, что я не знаю, угодно ли мне что-нибудь или нет. И мне ли угодно то, что я хочу, или это хочет кто-то другой за меня» [25].

В ответ старец Улайя рассказал об опыте исследования этой проблемы двумя другими старцами Дарну и Пураной. Дарну подошёл к развалинам древнего храма, на котором было написано: «Я Необходимость, владычица всех движений». (Разве не в такой роли выступают уравнения Лагранжа?) Погрузившись в медитацию перед изваянием божества, Дарну воспринимает внутренним слухом:

«Все творения, все дыхания, всё существующее, всё живущее — немощно, бессильно, безвластно; под влиянием необходимости достигает оно цели своего бытия, которая есть смерть. Это я управляю всеми пятьюдесятью коленами твоей жизни от колыбели до настоящего мгновения. Ты не сделал ничего во всю твою жизнь; ни одного доброго и ни одного злого дела... Ты не сделал ни одного движения во всю твою жизнь, которое не было бы вперёд рассчитано мною... Потому что я — Необходимость... Ты гордишься своими поступками или погружаешься в глубокое раскаяние о своём грехе. Твоё сердце трепетало от любви или от злобы, а я — я смеюсь над тобою, потому что я — Необходимость, и всё было предписано мною».

Чтобы не быть рабом необходимости и сохранить свободу своего выбора, Дарну сопротивляется желаниям напиться воды из ручья, съесть упавший к его ногам плод, лишаясь постепенно подвижности и воли и слыша издевательские насмешки Необходимости, утверждающей, что ею как раз и предусмотрено это бездействие Дарну, ведущее его к смерти. Тем временем к храму приходит старец Пурана и медитирует рядом с Дарну, стремясь познать Необходимость не через сопротивление ей, а через готовность к полному подчинению. Дарну первым приходит в себя, стряхивает оцепенение и предлагает Пуране уйти от идола.

«Куда нам идти, друг Дарну? — спросил ослеплённый (своими видéниями — А.С.) Пурана. — Нет ли указаний на стенах храма?

— Оставь в покое и храм, и божество, — ответил Дарну. — Пойдём ли мы направо, это будет согласно с необходимостью. Пойдём ли мы налево, это тоже с нею согласно. Разве ты не понял, друг Пурана, что это божество признаёт своими законами всё то, что решает наш выбор? Необходимость — не хозяин, а только бездушный счётчик движений. Счётчик отмечает лишь то, что было. А то, что ещё должно быть — будет только через нашу волю».

Конечно, в цитированном рассказе ради акцента на главных мыслях о свободе воли и ответственности человека за свои поступки допущено отвлечение от весьма серьёзных обстоятельств. Мы вольны пойти направо или налево, но не в нашей власти вызывать и направлять необозримое множество движений, совершающихся в мегамире, макромире и микромире. Наука несомненно постигает истину, обнаруживая закономерности в процессах на этих уровнях мироздания и делая предсказания, реализующиеся с необходимостью. Астрономы, зная о предстоящем через несколько лет полном затмении Солнца Луной, планируют наблюдательные эксперименты, готовят аппаратуру для них, оформляют заранее документы, позволяющие организовать экспедицию в выбранное в полосе затмения место. Однако, уже сейчас есть принципиальная возможность "отменить" будущие затмения, вызвав с помощью мощной ядерной бомбардировки разрушение Луны. Разумеется, нужно избежать такого преступления как угрозы со стороны любителей стратегии "звёздных войн". Но актуально важной может стать другая космическая ситуация. Например, если хорошо известные закономерности движения и взаимодействия небесных тел будут вести к столкновению астероида с нашей планетой, то мы могли бы предпринять некоторые меры к предотвращению этой катастрофы (раздробить астероид, либо с помощью установленных на нём реактивных двигателей вызвать желаемое изменение его орбиты). Таким образом, вопрос о свободе воли перерастает в вопрос об изменяющихся границах возможностей разумных существ. Надо думать, что в природе есть место и закономерной необходимости и свободе воли, а нам надлежит постигать, каким образом могут составлять естественное единство эти два принципа, кажущиеся несовместимыми. Несовместимость их с точки зрения классической механики и опирающегося на неё мировоззрения служит указанием на недостаточную глубину и широту классической картины мира. По-видимому, в более близкой к истине картине мироздания, необходимость и свобода воли не будут представляться столь несовместимыми.

Возможность применять абстрактную физическую модель материальной точки (2.7) как к большим телам, так и к весьма мелким их частям, подтверждала структурный принцип атомистического учения. И хотя понятие материальной точки не заключает в себе представления о пределе делимости тел, оно не противоречит существованию такого предела, а, напротив, вполне согласуется с представлением о предельно малых частицах тел как материальных точках. К концу XIX века в связи с открытием Менделеевым периодической системы элементов всё больше привлекает к себе симпатии та мысль, что различие свойств атомов химических элементов следует искать в различии их строения из более мелких и простых частиц. Такого взгляда придерживался сам Д.И. Менделеев. Об этом писал в 1886 г. крупный русский химик А.М. Бутлеров: «так называемые ныне “атомы” некоторых элементов в сущности, быть может, способны подвергаться химическому делению, т.е. они неделимы не по своей природе, а неделимы только доступными нам ныне средствами и... могут быть разделены в процессах, которые будут открыты впоследствии» (цитировано по книге [26]). Годом раньше Энгельс, работая над «Диалектикой природы», писал: «Но атомы отнюдь не являются чем-то простым, не являются вообще мельчайшими известными нам частицами вещества. Не говоря уже о самой химии, которая всё больше и больше склоняется к мнению, что атомы обладают сложным составом, большинство физиков утверждает, что мировой эфир, являющийся носителем светового и теплового излучения, состоит тоже из дискретных частиц, столь малых, однако, что они относятся к химическим атомам и физическим молекулам так, как эти последние к механическим массам, т.е. относятся как $d^2x$ к $dx$» [27, с. 585. Заметки и фрагменты [Математика]]. Представление большинства физиков о мельчайших дискретных частицах мирового эфира на деле было лишь догадкой, экстраполяцией структурного принципа атомизма, своеобразно заимствованного теорией классической механики. В действительности же первая элементарная частица (электрон) с массой почти в две тысячи раз меньшей массы атома водорода была открыта в 1897 г.

Можно было согласиться с тем, что известные науке атомы химических элементов не тождественны подлинно неделимым телам, которые назвали атомами древние мыслители. Представлялось возможным опустить уровень неделимости ещё на одну или несколько ступеней. Что касается принципа предельности, то он, по внешней видимости, стал безразличен для теории классической механики, наиболее общие законы которой казались применимыми к любым материальным объектам, независимо от их масштабов, и уже переставала встречать решительный отпор мысль об отказе от предела делимости материи, как заметил Энгельс в развитие приведённой выше цитаты (см. [27] ): «Здесь, таким образом, в принятых в настоящее время представлениях о строении материи мы имеем перед собою также и дифференциал второго порядка, и ничто не мешает каждому, кому это доставит удовольствие, предположить, что в природе должны быть ещё также и аналоги для $d^3x$, $d^4x$ и т. д.». Для древних атомистов представление о бесконечной последовательности дробления материи было неприемлемо потому, что это вело к утрате свойства телесности. Соглашались ли на такую утрату приверженцы классического научного мировоззрения, готовы ли они были признать телесность производным качеством, внешней формой проявления чего-то отличного от тел? История науки свидетельствует, что такой готовности заранее не было, ибо не только к уже открытому электрону, но и к гипотетическим дискретным частицам мирового эфира пытались применять закономерности классической механики, рассматривая эти объекты как материальные точки, либо системы материальных точек. Материальная же точка по смыслу своему является абстрактной моделью тела.

Отказ от моделирования материального мира с помощью представления о материальных точках, определяющие характеристики которого перечислены в (2.7), был бы и отказом от понимания мирового пространства как трёхмерного собственно евклидова. Ведь классические представления о пространстве и времени являются неотъемлемой чертой именно корпускулярной картины мира, слепком с неё, отражением наиболее общих свойств мира тел. Признание **абсолютной инвариантности классических** пространственно-временных и динамических характеристик материального мира равносильно признанию того, что материя в принципе не может не иметь тех свойств, какими обладают все тела. Если древним атомистам для утверждения взгляда на тела как основу бытия потребовалось провозгласить существование предела делимости тел, то учёные XIX века могли не испытывать в этом особой надобности, поскольку основополагающая роль тел была уже надёжно защищена общими классическими представлениями о необходимых свойствах пространства, времени и массы.

## § 5. ЦАРСКИЙ ПУТЬ В ГЕОМЕТРИЮ — АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ НАБЛЮДАЕМОГО ПРОСТРАНСТВА

В основе классического научного мировоззрения лежала убеждённость в том, что истинное мировое пространство в своих принципиальных свойствах является таким же, как пространство, воспринимаемое нами через посредство органов чувств, т. е. **наблюдаемое пространство**. Больших успехов в изучении свойств наблюдаемого пространства добились уже древние мыслители. Наиболее полный свод тех знаний о пространстве дошёл до нас в сочинении «Начала» Евклида, жившего в Александрии в начале III века до нашей эры. Известна легенда о том, как властитель Египта попросил Евклида изложить славную науку геометрию покороче и поскорей, на что Евклид ответил, что «в геометрию нет царского пути». Видный французский математик XX века Густав Шоке писал: «... сегодня мы владеем простым “царским путём” в геометрию, ведущим через понятия “векторного пространства” и “скалярного произведения” <векторов>... Евклид положил в основу своей геометрии на плоскости признаки равенства треугольников. Двадцать три века спустя математики определяют плоскость как аффинное (линейное — А.С.) пространство размерности 2 с заданным в нём скалярным произведением» [28, с. 14, 10]. Это уже линейно-алгебраическое определение, позволяющее “оторваться” от чувственно воспринимаемых геометрических образов и перейти полностью на аналитический язык математики. Однако, чтобы говорить на таком языке, понимать его и мыслить на нём, очень важно научиться ясно видеть соответствия между геометрическими соотношениями и выражениями их посредством математических формул.

Слово “вектор” латинского происхождения. Глагол *vehere* означает перевозить, перемещать, и в древнем Риме словом *vector* (*несущий*) называли извозчиков и носильщиков. Математическое понятие **геометрического вектора** обозначает прямолинейное перемещение из одной точки пространства в другую точку (**направленный отрезок**) и поистине лучше подходит на роль простейшего элемента пространства, чем отдельно взятая точка. Ведь пространство — это не одна точка, а множество, или лучше сказать, система точек. Именно с помощью векторов может быть выражено строение пространства. Две основные алгебраические операции над геометрическими векторами: сложение векторов и умножение вектора на вещественное число — определяются естественно и наглядно.

На рис. 2.3 прямолинейный переход из точки $O$ в точку $A$ обозначен как геометрический вектор $\boldsymbol{a}$, а переход из точки $A$ в точку $S$ представлен как вектор $\boldsymbol{b}$. Последовательное выполнение переходов $\overline{OA}$ и $\overline{AS}$ приводит к тому же результату, что и прямой переход из точки $O$ в точку $S$, выражаемый вектором $\boldsymbol{s}$. Это можно записать в виде равенства

$$\overline{OA} + \overline{AS} = \overline{OS}\,, \tag{2.11}$$

или в однобуквенных обозначениях

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}\,. \tag{2.11'}$$

В соотношении (2.11′) выражена алгебраическая операция сложения геометрических векторов (направленных отрезков), которая двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{s}$ как их сумму. Геометрический смысл суммы направленных отрезков (и смысл операции сложения) определяется следующим образом.

*Определение 2.1.* Если с точкой конца вектора $\boldsymbol{a}$ совместить точку начала вектора $\boldsymbol{b}$, то суммой $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ этих векторов будет вектор $\boldsymbol{s}$, представляющий прямолинейный переход из точки начала вектора $\boldsymbol{a}$ в точку конца вектора $\boldsymbol{b}$.

Это определение суммы геометрических векторов называют правилом треугольника, но оно применимо и тогда, когда складываются векторы, лежащие на одной прямой.

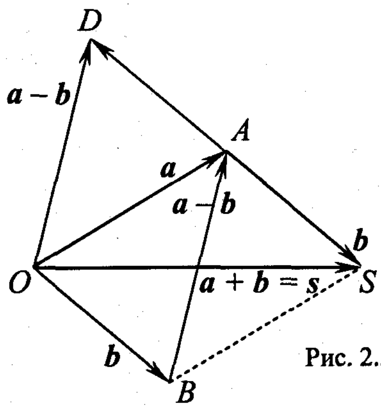


Рис. 2.3

Операция сложения векторов используется для алгебраического определения **нулевого вектора**: нулевым называется такой вектор $\boldsymbol{o}$, который при прибавлении к **любому** вектору $\boldsymbol{a}$ приводит к сумме, равной тому же самому вектору $\boldsymbol{a}$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a} . \qquad (2.12)$$

Записав соотношение (2.12) для переходов между точками

$$\overline{OA} + \overline{AA} = \overline{OA} , \qquad (2.12')$$

видим, что геометрически нулевой вектор отождествляется с точкой, так как у него точка конца совпадает с точкой начала. Поэтому направление нулевого вектора не определено, *что позволяет приписывать ему любое* направление и считать параллельным любому вектору.

С помощью понятия нулевого вектора определяется понятие **противоположного** вектора. Вектор $(-\boldsymbol{a})$ называется противоположным вектору $\boldsymbol{a}$, если сумма этих векторов равна нулевому вектору

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o} . \qquad (2.13)$$

Запись соотношения (2.13) для переходов между точками

$$\overline{OA} + \overline{AO} = \overline{OO} \qquad (2.13')$$

показывает, что у взаимно противоположных векторов меняются местами точки начала и конца.

Для того чтобы сделать более богатыми возможности выражения геометрических соотношений средствами алгебраических операций над векторами, принято соглашение не считать необходимой характеристикой вектора точку его приложения (начала). Это значит, что при желании мы можем совместить точку начала вектора с любой точкой пространства. Но чтобы при таких перемещениях не изменялось ни направление, ни длина вектора, нужно переносить его как цельный объект, не нарушая параллельности первоначальному направлению. Это означает, что если мы, например, выполним параллельный перенос вектора $\boldsymbol{b}$ на рис. 2.3 из точки приложения $A$ в точку приложения $O$, то конец вектора $\boldsymbol{b}$ совпадёт с такой точкой $B$, что четырёхугольник $OASB$ будет параллелограммом. Это построение позволяет дать другое истолкование сумме векторов $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}$: если совместить точки начала векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то вектор, исходящий из той же точки и совпадающий с диагональю параллелограмма построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, будет представлять их сумму. Определение суммы векторов **правилом параллелограмма** равносильно правилу треугольника (*определению 2.1*) за исключением случая параллельности слагаемых векторов, когда на них не удастся построить параллелограмм.

Геометрические векторы, точка начала которых может быть выбрана в пространстве произвольно, называются **свободными** векторами. Два свободных вектора называются равными, если их можно совместить путём параллельного переноса, не изменяя направления, так, чтобы при совпадении точек их начала совпали точки их конца. Пользуясь свободой векторов, легко доказать с помощью рис. 2.3, что от перемены мест слагаемых векторов сумма их не изменяется (**коммутативность**) операции сложения:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s} = \overline{OS} = \overline{OA} + \overline{AS} = \overline{OB} + \overline{BS} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}. \qquad (2.14)$$

Рис. 2.4 доказывает сочетательное свойство (**ассоциативность**) операции сложения векторов:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \qquad (2.15)$$

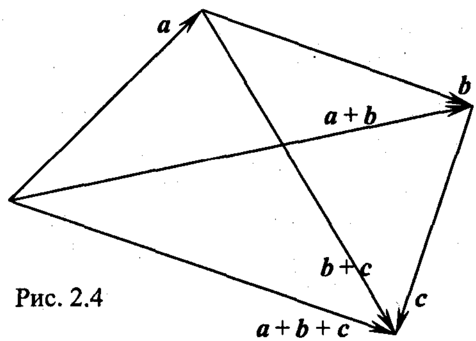


Рис. 2.4

В алгебре операция вычитания определяется через операцию сложения. Разностью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется такой вектор

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}, \qquad (2.16)$$

сумма которого с вычитаемым вектором равна уменьшаемому вектору

$$\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.$$

К обеим частям этого равенства прибавим вектор $(-\boldsymbol{b})$, противоположный вектору $\boldsymbol{b}$, и воспользуемся свойством ассоциативности (2.15)

$$(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{d}+\{\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})\} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

Из последнего равенства с учётом соотношений (2.13) и (2.12) находим

$$\boldsymbol{d}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$
и подставляем это выражение в (2.16)
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \qquad (2.16')$$
Таким образом, вычитание вектора $\boldsymbol{b}$ равносильно прибавлению противоположного ему вектора $(-\boldsymbol{b})$.

На рис. 2.3 изображён вектор $\overline{AD} = (-\overline{AS}) = (-\boldsymbol{b})$ и построен вектор разности
$$\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}. \qquad (2.17)$$
Так как четырёхугольник $OBAD$ — параллелограмм (стороны $OB$ и $DA$ параллельны и одинаковы по длине) то
$$\overline{BA} = \overline{OD} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}, \qquad (2.17')$$
т.е. в параллелограмме $OASB$, построенном на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ диагональ $\overline{OS} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ представляет сумму этих векторов, а диагональ $\overline{BA}$ — их разность (2.17′). Чтобы не ошибиться в выборе одного из двух взаимно противоположных направлений диагонали разности, нужно просто записать переход из точки $B$ в точку $A$ по сторонам ломаной $BOA$
$$\overline{BA} = \overline{BO} + \overline{OA} = (-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}. \qquad (2.17'')$$
Из правила треугольника (2.11) и правила параллелограмма следует, что вектор суммы (разности) двух векторов лежит в *одной плоскости* с векторами, участвующими в операции сложения (вычитания). Векторы, лежащие в одной плоскости ("соплоскостные"), называются по латыни **компланарными.** С учётом права параллельного переноса свободных векторов компланарность нужно понимать более широко: компланарные векторы могут не лежать в одной плоскости, но существует плоскость, которой все они параллельны и в которую их можно поместить путём параллельного переноса.

Второй операцией над векторами является умножение вектора на число.

*Определение 2.2.* Произведением геометрического вектора $\boldsymbol{a}$ на **вещественное** число $\lambda$ называется вектор
$$\boldsymbol{b} = \lambda\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,\lambda, \qquad (2.18)$$
***параллельный*** вектору $\boldsymbol{a}$ и направленный одинаково с $\boldsymbol{a}$ при $\lambda > 0$, но противоположно $\boldsymbol{a}$ при $\lambda < 0$, причём абсолютная величина числа $\lambda$ показывает, сколько раз отрезок $\boldsymbol{a}$ уложится на отрезке $\boldsymbol{b}$. Произведение любого вектора $\boldsymbol{a}$ на число ноль является нулевым вектором.

Векторы, связанные равенством (2.18), взаимно параллельны по *определению 2.2*. Свободные параллельные векторы можно путём параллельного переноса помесить на одной прямой линии, и тогда они станут "солинейными", или, по латыни, **коллинеарными.** В расширенном смысле для свободных векторов понятие коллинеарности равнозначно понятию параллельности. Подчеркнём, что сравнение длин векторов, заложенное в *определение 2.2* операции умножения вектора на вещественное число, имеет ограниченную область применения — только для параллельных векторов, ибо непараллельные векторы не могут быть связаны соотношением (2.18) при вещественном значении числа $\lambda$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на вещественное число объединяют общим названием — **линейные операции.** Из *определений 2.1* и *2.2* линейных операций над геометрическими векторами следует, что для любых геометрических векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любых вещественных чисел $\lambda$, $\mu$ справедливы следующие 8 соотношений:

1°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

3°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$ — определение нулевого вектора $\boldsymbol{o}$;

4°. $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$, где $(-\boldsymbol{a})$ — противоположный вектор ;

5°. $1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;

6°. $\mu(\lambda\,\boldsymbol{a}) = (\mu\,\lambda)\,\boldsymbol{a}$;

7°. $(\lambda+\mu)\,\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{a}+\mu\,\boldsymbol{a}$;

8°. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\,\boldsymbol{a}+\lambda\,\boldsymbol{b}$.

Эти соотношения называются **свойствами линейных операций** над векторами и кладутся в основу широких обобщений.

Как из *определений 2.1*, *2.2*, так и из свойств линейных операций вытекают следующие соотношения, очевидные для геометрических векторов:

$$0\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \qquad (2.19)$$

— произведение любого вектора на число ноль равно нулевому вектору;

$$(-1)\cdot\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{a}) \qquad (2.20)$$

— произведение любого вектора на отрицательную единицу равно противоположному вектору;

$$\lambda\cdot\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \qquad (2.21)$$

— произведение нулевого вектора на **любое** число $\lambda$ есть нулевой вектор.

Восемь перечисленных выше свойств линейных операций над векторами и следствия из них позволяют преобразовывать любые линейные соотношения между векторами по привычным правилам алгебры чисел.

С помощью таких преобразований легко убедиться, что **любая комбинация линейных операций** над одним вектором сводится к умножению этого вектора на вещественное число. Например,

$$\boldsymbol{b} = \{(5\,\boldsymbol{a}+0{,}36\,\boldsymbol{a})\cdot 0{,}75-1{,}32\,\boldsymbol{a}\}\cdot\frac{1}{3}+0{,}7\cdot(2\,\boldsymbol{a}) = 2{,}3\,\boldsymbol{a}\,.$$

Поэтому выражение $\lambda\,\boldsymbol{a}$ называется **линейной комбинацией** вектора $\boldsymbol{a}$. Объяснение такого результата очевидно: умножая вектор $\boldsymbol{a}$ на любые вещественные числа, можно получить только векторы, параллельные $\boldsymbol{a}$, и сложение таких векторов даст вектор, параллельный $\boldsymbol{a}$. Но параллельные между собой векторы связаны соотношением вида (2.18).

Аналогичным образом, какими бы ни были векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, любая комбинация линейных операций над ними сведётся к выражению

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b},$$

которое называется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

И любая комбинация линейных операций над $k$ векторами $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ может быть сведена путём алгебраических преобразований к простейшему выражению

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k, \qquad (2.22)$$

которое называется *линейной комбинацией* $k$ векторов.

Очень важные геометрические отношения связаны с вопросом, каким образом из определённой системы векторов можно построить линейную комбинацию, равную нулевому вектору. Конечно, всегда есть возможность построить так называемую **тривиальную** линейную комбинацию, в которой все без исключения числовые коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ при векторах равны нулю. Но сама по себе эта возможность не даёт никакой информации о векторах. Другое дело, если известно, что из данных векторов можно построить линейную комбинацию, равную нулевому вектору, **только тривиально**, и больше никаким другим способом. Например, если равенство

$$\lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \qquad (2.23)$$

может быть *выполнено* ***только*** *при $\lambda = 0$, то это говорит о том, что вектор* $\boldsymbol{a}$ **ненулевой** ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$), потому что для нулевого вектора равенство (2.23) выполняется при любом значении $\lambda$ (см. (2.21)). И напротив, если равенство (2.23) может быть выполнено **нетривиальным** способом (при $\lambda \neq 0$), то это говорит о том, что вектор $\boldsymbol{a}$ нулевой.

Применим аналогичные рассуждения к системе из двух векторов. Если линейная комбинация двух векторов может быть обращена в нулевой вектор

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \qquad (2.24)$$

**нетривиальным** способом, то это значит, что хотя бы один из коэффициентов комбинации отличен от нуля. Пусть, например, $\mu \neq 0$. Тогда можно разделить обе части равенства (2.24) на $\mu$ и представить вектор $\boldsymbol{b}$ в виде линейной комбинации вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{a}. \qquad (2.24')$$

Возможность последнего соотношения говорит о **параллельности** векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и о существовании линейной зависимости между ними. Напротив, если бы равенство (2.24) могло быть выполнено **только** в тривиальном случае, и больше ни в каком, то из него нельзя было бы получить выражение одного из векторов в виде линейной комбинации другого вектора, и это означало бы отсутствие линейной зависимости между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, указывая на их **непараллельность** друг другу.

Рассмотренные примеры иллюстрируют важнейшие для теории пространства соотношения между векторами — их линейную зависимость и линейную независимость.

*Определение 2.3.* Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется **линейно зависимой**, если из этих векторов может быть построена линейная комбинация (2.22), равная **нулевому** вектору

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o} \qquad (2.25)$$

при соблюдении условия **нетривиальности**

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0, \qquad (2.26)$$

означающего что **хотя бы один** из коэффициентов комбинации (2.25) **отличен от нуля**.

Выполнение условия нетривиальности (2.26) позволяет получить из уравнения (2.25) выражение хотя бы одного из векторов системы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в виде линейной комбинации **остальных** векторов этой системы. В случае, если система состоит только из одного вектора, остальных векторов в ней не будет, но и для одного вектора имеет смысл (как показано выше) вопрос о возможности или невозможности совместного выполнения условий (2.25) и (2.26). Чтобы не вводить для этого исключительного случая новый термин, согласились говорить о линейной зависимости или независимости всей системы векторов, хотя в действительности для систем более чем одного вектора имеется в виду не зависимость системы векторов от чего-то внешнего по отношению к ней, а зависимость **внутри** системы между входящими в неё векторами.

*Определение 2.4.* Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется **линейно независимой**, если для этих векторов не могут быть выполнены совместно оба условия (2.25) и (2.26).

Суть различия между линейно зависимыми и независимыми системами в том, что из векторов линейно зависимой системы можно построить равную нулевому вектору линейную комбинацию (2.25) как тривиальным, так и нетривиальным способами, а для линейно независимой системы векторов условие (2.25) может быть выполнено только тривиально.

Наибольшее возможное число линейно независимых векторов в пространстве является важнейшей характеристикой пространства, называемой его **размерностью**. Прямая линия представляет частную разновидность пространства. Но любые два вектора, лежащих на одной прямой (или параллельных ей) связаны линейной зависимостью вида (2.18). Значит на прямой не найдётся двух линейно независимых векторов. Вместе с тем, на прямой найдётся **ненулевой** вектор, а он удовлетворяет *определе-*

*нию 2.4* линейной независимости, ибо, как было показано выше, равенство (2.23) может быть выполнено только тривиальным способом (при $\lambda = 0$). Поэтому прямую называют одномерным пространством.

На основании *определения 2.3* запишем условие линейной зависимости трёх векторов (совместное выполнение условий (2.25) и (2.26)) :

$$\left.\begin{aligned} \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{o} \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &\neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

Согласно условию нетривиальности хотя бы один коэффициент в линейной комбинации (2.27) векторов отличен от нуля. Пусть, например, $\nu \neq 0$. Тогда из векторного линейного уравнения (2.27) будет следовать

$$\boldsymbol{c} = -\frac{\lambda}{\nu}\boldsymbol{a} - \frac{\mu}{\nu}\boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}.$$

Суммарный вектор $\boldsymbol{c}$ компланарен слагаемым векторам $\alpha\boldsymbol{a}$ и $\beta\boldsymbol{b}$, а так как вектор $\alpha\boldsymbol{a}$ параллелен вектору $\boldsymbol{a}$, и вектор $\beta\boldsymbol{b}$ параллелен вектору $\boldsymbol{b}$, то векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны (лежат в одной плоскости или могут быть приведены в неё путём параллельного переноса). Таким образом, алгебраическое условие (2.27) линейной зависимости трёх векторов выражает геометрическое условие их компланарности. Отсюда следует, что любые три вектора плоскости линейно зависимы. Вместе с тем на плоскости найдутся два линейно независимых вектора, ибо, как показано выше, для любых двух **непараллельных** векторов равенство (2.24) может быть выполнено только тривиальным способом. Значит наибольшее число линейно независимых векторов плоскости равно двум, что и дало повод называть плоскость двумерным пространством.

Если же оба условия (2.27) не могут быть выполнены совместно, то, согласно *определению 2.4*, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно независимы, и это означает, что они не могут быть приведены в одну плоскость путём параллельного переноса. Такие векторы называют **некомпланарными**.

Линейно независимые векторы обладают тем замечательным свойством, что они могут служить основой (**базисом**) для алгебраического выражения через них любых векторов соответствующего пространства: один линейно независимый вектор (ненулевой) может быть базисом одномерного пространства (прямой линии), а два линейно независимых вектора могут быть базисом плоскости.

Далее нам понадобится понятие радиус-вектора. Согласившись считать векторы свободными, мы лишились возможности указывать с помощью векторов определённые точки пространства. Чтобы обрести такую возможность, нужно выбрать в пространстве определённую точку в качестве всеобщего ориентира местоположения, которую называют **полюсом** пространства и чаще всего обозначают буквой $O$. Всякий вектор, имеющий своим началом точку полюса, называют **радиус-вектором**. Таким образом, радиус-векторы не свободны, а привязаны своим началом к точке полюса, исходят из полюса. После выбора точки $O$ полюса каждая точка $M$ пространства может быть определена взаимно однозначно своим радиус-вектором $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$. Радиус-векторы чаще всего обозначают латинской строчной буквой $\boldsymbol{r}$, снабжая её в случае надобности индексом для отличия от радиус-векторов других точек, например, $\boldsymbol{r}_o = \overline{OM_0}$, $\boldsymbol{r}_A = \overline{OA}$. Радиус-векторы удовлетворяют общему определению геометрического вектора как направленного отрезка и обладают всеми свойствами геометрических векторов, наряду со свободными векторами, отличаясь от последних только фиксированностью точки своего начала.

Выберем в пространстве точку полюса $O$ и ненулевой вектор $\boldsymbol{e}$ (см. рис. 2.5). Все радиус векторы

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = \rho\, \boldsymbol{e}, \qquad (2.28)$$

являющиеся вещественными ($\rho$ – вещественное число) линейными комбинациями вектора $\boldsymbol{e}$, лежат на одной прямой, проходящей через точку $O$ параллельно вектору $\boldsymbol{e}$


Рис. 2.5

и при изменении значений $\rho$ в соотношении (2.28) от $-\infty$ до $+\infty$ конец радиус-вектора (2.28) побывает во всех точках прямой $OM$. Поэтому соотношение (2.28) можно назвать векторным уравнением прямой $OM$, выражающим переменный радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ любых точек этой прямой в виде линейных комбинаций базисного вектора $\boldsymbol{e}$.

Выбрав в пространстве точку полюса $O$ и два непараллельных (линейно независимых) вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, будем рассматривать множество всех радиус-векторов, представимых в виде линейных комбинаций

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = \rho_1 \boldsymbol{e}_1 + \rho_2 \boldsymbol{e}_2. \qquad (2.29)$$

Радиус-векторы (2.29) компланарны векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, а так как они исходят из точки $O$, то они принадлежат плоскости ($O$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$) проходящей через точку $O$ параллельно векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ (направляющим векторам плоскости). При изменении коэффициента $\rho_1$ от $-\infty$ до $+\infty$ множество радиус-векторов $\boldsymbol{r}_1 = \rho_1 \boldsymbol{e}_1$ заполнит прямую $OM_1$. Прибавление к радиус-вектору $\boldsymbol{r}_1 = \rho_1 \boldsymbol{e}_1$ радиус-вектора $\boldsymbol{r}_2 = \rho_2 \boldsymbol{e}_2$ (по правилу параллелограмма, как показано на рис. 2.6) сместит точку $M_1$ в положение $M$, а так как такому же смещению на вектор $\rho_2 \boldsymbol{e}_2$ подвергнутся все точки прямой $OM_1$, то вся эта прямая сместится в положение $M_2 M$. При изменении коэффициента $\rho_2$ от $-\infty$ до $+\infty$ прямая $OM_1$ будет "заметать" всю плоскость ($O$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$), определённую векторным уравнением (2.29). Это означает, что радиус-векторами (2.29) можно указать все без исключения точки плоскости

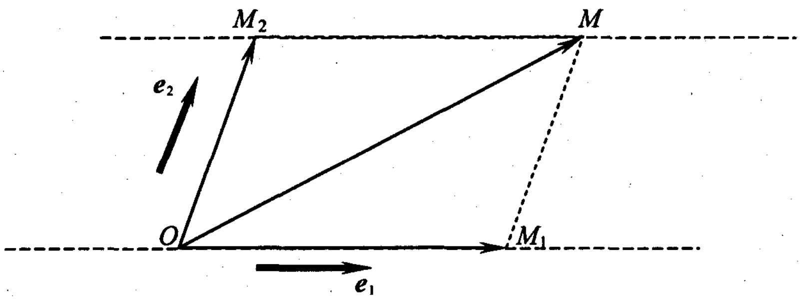


Рис. 2.6

$(O, e_1, e_2)$, но нельзя указать ни одной точки, не принадлежащей этой плоскости. Упорядоченная система двух линейно независимых векторов $e_1$, $e_2$ играет роль базиса плоскости (2.29), так как любой принадлежащий этой плоскости вектор может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $e_1$, $e_2$.

Выберем в пространстве точку полюса $O$ и три некомпланарных (линейно независимых, не удовлетворяющих обоим условиям (2.27)) вектора $e_1$, $e_2$, $e_3$ и будем рассматривать радиус-векторы, представимые в виде линейных комбинаций векторов $e_1$, $e_2$, $e_3$:

$$r = \overline{OM} = \rho_1 e_1 + \rho_2 e_2 + \rho_3 e_3. \tag{2.30}$$

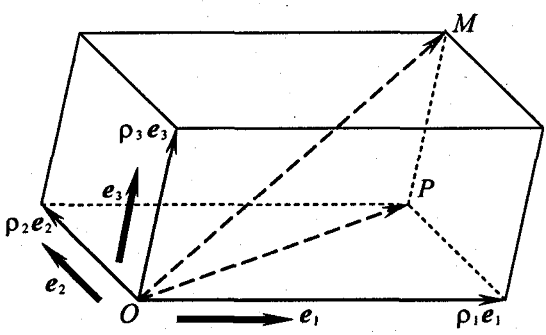


Рис. 2.7

Расчленим линейную комбинацию (2.30) на две части:

$$r = \overline{OM} = (\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2) + \rho_3 e_3. \tag{2.30'}$$

Если в первой части, представляющей радиус-вектор

$$\overline{OP} = (\rho_1 e_1 + \rho_2 e_2),$$

давать коэффициентам $\rho_1$, $\rho_2$ независимо друг от друга любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то точка $P$ будет представителем любой точки плоскости $(O, e_1, e_2)$, как было показано в связи с рис. 2.6. Значение коэффициента $\rho_3$ мы сначала будем считать фиксированным и отличным от нуля. Тогда прибавление постоянного вектора $\rho_3 e_3$ к радиус-вектору $\overline{OP}$ переместит точку $P$ в положение $M$, а так как точка $P$ является представителем любой точки плоскости $(O, e_1, e_2)$, то вся эта плоскость подвергнется смещению на вектор $\rho_3 e_3$, перейдя в положение $(M, e_1, e_2)$. Если далее давать коэффициенту $\rho_3$ любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то плоскость $(O, e_1, e_2)$ будет "заметать" всё бесконечное трёхмерное пространство. Таким образом, радиус-векторами (2.30) можно указать все без исключения точки трёхмерного пространства и нельзя указать ни одной точки, не принадлежащей этому пространству. Согласно классическим представлениям о мироздании вне бесконечного трёхмерного пространства как всеобщего вместилища ничего и быть не может.

Любой **свободный** вектор $l$ трёхмерного пространства может быть приложен в точке полюса $O$, и тогда он совпадёт с каким-нибудь радиус-вектором (2.30), т.е. может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $e_1, e_2, e_3$:

$$l = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 . \qquad (2.31)$$

А так как по смыслу понятия свободного вектора он не изменяется при параллельном переносе в любую точку пространства, то равенство (2.31) не зависит от выбора точки приложения вектора $l$. Убедившись в том, что не только любые радиус-векторы, но и любые свободные векторы трехмерного пространства представимы в виде линейных комбинаций трёх некомпланарных векторов $e_1, e_2, e_3$, мы извлечём из равенства (2.31) весьма важный вывод: если к линейно независимой системе трёх векторов трёхмерного пространства добавить любой вектор этого пространства, то полученная система четырёх векторов будет линейно зависимой. Действительно, представив равенство (2.31) в виде

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + (-1)\, l = o , \qquad (2.31')$$

мы получаем линейную комбинацию четырёх векторов, равную нулевому вектору. При этом линейная комбинация (2.31′) **нетривиальна**, потому что какими бы ни были коэффициенты $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ (хотя бы даже все три равнялись нулю), коэффициент $(-1)$ при векторе $l$ отличен от нуля. Это означает (согласно *определению 2.3*), что система векторов $e_1, e_2, e_3, l$ линейно зависима. Таким образом, в трёхмерном пространстве не найдётся четырёх линейно независимых векторов, но любые три некомпланарных вектора этого пространства линейно независимы. Вот что лежит в основе представления о наблюдаемом пространстве как пространстве трёхмерном.

Мы не можем представить себе наглядно, пространство с числом измерений больше трёх, однако имеем возможность выражать с помощью векторно-алгебраических формул положение любой точки в четырёхмерном пространстве и определять в нём линейными векторными уравнениями не только прямые и плоскости, но даже различные трёхмерные подпространства, называемые гиперплоскостями. Больше того, всё это мы можем проделывать с математическими моделями пространств с любым числом измерений $n$. На вопрос, реализованы ли в природе пространства с числом измерений больше трёх, и какой физический смысл могут иметь дополнительные измерения, призвана ответить физика. Возможности физических исследований сильно расширяются благодаря тому, что математики глубоко осмыслили строение наблюдаемого пространства и способны предложить различные модели других типов пространств. При этом установлено, что главной характеристикой пространства является его размерность и сформулировано её обобщённое определение.

*Определение 2.5.* Размерностью пространства называется наибольшее число линейно независимых векторов в нём.

Замечательно, что из общего *определения 2.5* размерности пространства логически вытекает представление о базисе пространства. В $n$ – мерном пространстве можно выбрать (согласно определению размерности) упорядоченную систему $n$ линейно **независимых** векторов

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n\,. \tag{2.32}$$

Добавив к линейно независимой системе (2.32) **любой** вектор $\boldsymbol{a}$ рассматриваемого $n$ – мерного пространства, мы неизбежно получим **линейно зависимую** систему $n + 1$ векторов

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{a}, \tag{2.33}$$

ибо по определению размерности в $n$ – мерном пространстве любые $n + 1$ векторов линейно зависимы. Значит (согласно *определению 2.3*) для системы векторов (2.33) могут быть выполнены **совместно** два соотношения типа (2.25), (2.26):

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\dots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n+\lambda_{n+1}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}, \tag{2.34}$$

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_n^2+\lambda_{n+1}^2\neq 0. \tag{2.35}$$

По условиям рассматриваемой задачи коэффициент $\lambda_{n+1}$ не может быть равен нулю. В самом деле, в случае $\lambda_{n+1}=0$ соотношения (2.34) и (2.35) приняли бы вид

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\dots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{o},$$

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_n^2\neq 0,$$

и их совместное выполнение означало бы линейную зависимость векторов (2.32) в противоречии с принятым условием. Отличие от нуля коэффициента $\lambda_{n+1}$ позволяет разделить на него обе части уравнения (2.34) и выразить вектор $\boldsymbol{a}$ через векторы (2.32):

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\boldsymbol{e}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}\boldsymbol{e}_2+\dots-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\boldsymbol{e}_n=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\dots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n.$$

Так как вектор $\boldsymbol{a}$ взят нами в качестве представителя **любого** вектора $n$ – мерного пространства, то полученное выражение

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \qquad (2.36)$$

доказывает, что любой вектор этого пространства может быть выражен в виде линейной комбинации максимальной (по числу элементов, равному размерности пространства) линейно независимой системы векторов. Конечно, таких систем векторов в пространстве бесконечно много, но только одну из них выбирают на роль **базиса** пространства, занумеровав в ней векторы в определённом порядке. Выяснив замечательные свойства базиса пространства, можно сформулировать его определение, не опирающееся явным образом на понятие размерности пространства.

*Определение 2.6.* **Базисом** пространства называется система векторов этого пространства, удовлетворяющая двум требованиям: 1) эта система линейно независима, и 2) любой вектор рассматриваемого пространства является линейной комбинацией векторов базиса.

Представление (2.36) вектора в виде линейной комбинации базисных векторов называют **разложением вектора по базису** пространства, а коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ этой комбинации называют **координатами** вектора относительно данного базиса. На этом чисто **алгебраическом** определении координат вектора основано и алгебраическое определение координат точки: координатами точки $M$ называют координаты радиус-вектора $\overline{OM} = r$ этой точки. Но понятие радиус-вектора имеет смысл лишь в том случае, если в пространстве выбрана точка полюса $O$, из которой исходят все радиус-векторы. Таким образом, для определения координат точки необходимо указать не только базис, но и полюс пространства.

*Определение 2.7.* Совокупность базиса и полюса пространства называется декартовой **системой координат** в этом пространстве.

Введение координат векторов и точек позволяет выражать и решать геометрические задачи в числах. При этом важную роль играет следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Если в пространстве выбран базис $e_1, e_2, e_3$, то каждый вектор $l$ этого пространства может быть представлен в виде линейной комбинации

$$l = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \qquad (2.37)$$

векторов данного базиса одним и только одним способом.

Докажем теорему от противного. Допустим, что наряду с разложением (2.37) существует другое разложение

$$l = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \lambda'_3 e_3 \qquad (2.37')$$

того же вектора по тому же базису, т.е. упорядоченная совокупность $\lambda'_1$, $\lambda'_2$, $\lambda'_3$ штрихованных координат не совпадает с упорядоченной совокупностью $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нештрихованных координат вектора $\boldsymbol{l}$. Тогда, вычитая из равенства (2.37′) равенство (2.37), и приводя подобные члены, получим линейную комбинацию

$$\boldsymbol{l} - \boldsymbol{l} = (\lambda'_1 - \lambda_1)\, \boldsymbol{e}_1 + (\lambda'_2 - \lambda_2)\, \boldsymbol{e}_2 + (\lambda'_3 - \lambda_3)\, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{o} \qquad (2.38)$$

базисных векторов, равную нулевому вектору. Но векторы базиса линейно независимы (см. *определение 2.6* ) и потому (см. *определение 2.4* и абзац после него) линейная комбинация (2.38) может быть только **тривиальной:**

$$\lambda'_1 - \lambda_1 = 0\,, \qquad \lambda'_2 - \lambda_2 = 0\,, \qquad \lambda'_3 - \lambda_3 = 0\,,$$

что равносильно равенствам

$$\lambda'_1 = \lambda_1\,, \qquad \lambda'_2 = \lambda_2\,, \qquad \lambda'_3 - \lambda_3\,.$$

Единственность разложения (2.37) доказана.

Подведём итоги. С помощью всего лишь двух линейных операций над векторами можно выражать на языке алгебраических уравнений ряд важнейших геометрических соотношений и характеризовать их числовыми значениями с использованием координат векторов.

1. Важнейшая характеристика пространства — его размерность — определяется как наибольшее число линейно независимых векторов в этом пространстве.

2. Выбрав в пространстве полюс, можно указать радиус-вектором любую точку пространства, а после выбора базиса определять точки их координатами.

3. Векторными линейными уравнениями можно определить ориентацию и положение любых прямых и плоскостей в пространстве.

4. Отношения параллельности и непараллельности прямых и плоскостей выражаются через отношения линейной зависимости и независимости между векторами, характеризующими ориентацию и положение прямых и плоскостей в пространстве. Для численного решения этих задач используются системы линейных уравнений, представляющих координатное выражение векторных линейных уравнений.

5. Операция умножения вектора на вещественное число позволяет сравнивать длины параллельных векторов.

Все те свойства пространства и геометрические соотношения, которые могут быть выражены с помощью только линейных операций над векторами, называются линейными соотношениями и свойствами (их называют также аффинными).

Но средствами одних только линейных операций над векторами нельзя выразить сравнение длин **непараллельных** отрезков (линейно независимых векторов) и определить численные значения углов (так как последние основаны на сравнении длин непараллельных отрезков). Существующая в наблюдаемом пространстве соизмеримость непараллельных отрезков и определённость углов обусловлена наличием не только линейных, но и **метрических** свойств у этого пространства.

Для выражения средствами векторной алгебры метрических свойств пространства необходимо добавить к линейным операциям третью операцию над векторами, называемую **скалярным умножением векторов**. Математический термин "скаляр" происходит от латинского слова *scalae* — лестница, переосмысленного в научно-техническое понятие **шкалы** (английское *scale*). Шкалой является числовая ось, т.е. прямая, на которой выбрана точка начала отсчёта, единица измерения и положительное направление. Всякая величина, которая может быть определена одним вещественным числом и отображена на точку числовой оси (шкалы), называется скалярной величиной, или просто скаляром. Вектор как элемент пространства с числом измерений больше единицы характеризуется упорядоченной совокупностью не меньше чем двух координат и потому не является скаляром. Операция скалярного умножения векторов ставит в соответствие любым двум векторам пространства определённое вещественное число (скаляр), называемое скалярным произведением этих векторов. Наиболее наглядное определение скалярного произведения векторов, предлагаемое в школьном курсе геометрии, выражается равенством

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\boldsymbol{a},\wedge\boldsymbol{b}), \qquad (2.39)$$

где $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ — длины (модули) перемножаемых векторов,

$(\boldsymbol{a},\wedge\boldsymbol{b})$ — угол между этими векторами,

$\boldsymbol{ab}$ — скалярное произведение векторов.

Для того чтобы вычислять по формуле (2.39) скалярное произведение векторов, нужно знать их длины и угол между векторами. Но если уже известны эти характеристики пары векторов, то возникает вопрос, какую полезную дополнительную информацию будет нести их скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$. Вот если бы была возможность вычислить скалярное произведение векторов иначе, чем по формуле (2.39), то этой формулой можно было бы воспользоваться для выражения через скалярные произведения векторов модулей векторов и угла между векторами. Действительно, применяя формулу (2.39) к умножению вектора на самого себя, получим

$$\boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\cos(\boldsymbol{a},\wedge\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|^2\cdot\cos 0 = |\boldsymbol{a}|^2,$$

откуда следует

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}} \quad \text{и соответственно} \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{\boldsymbol{bb}}\,. \qquad (2.40)$$

С учётом (2.40) найдём из (2.39) выражение косинуса угла через скалярные произведения векторов

$$\cos(\boldsymbol{a},\wedge\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{ab}}{\sqrt{\boldsymbol{aa}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{bb}}}\,. \qquad (2.41)$$

Замечательно, что обоснование возможности находить скалярные произведения векторов в обход формулы (2.39) заключается в самой формуле

(2.39). Можно доказать, что скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$, определённое формулой (2.39), удовлетворяет следующим трём соотношениям при любом выборе векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и вещественного числа $\lambda$:

$$1^{\circ}.\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}; \qquad (2.42)$$

$$2^{\circ}.\ (\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}); \qquad (2.43)$$

$$3^{\circ}.\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}. \qquad (2.44)$$

С помощью свойств (2.42) – (2.44) можно выражать скалярное произведение векторов через их координаты относительно выбранного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ пространства. Покажем это на простом примере векторов двумерного пространства (плоскости):

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2. \qquad (2.45)$$

Свойства (2.42) – (2.44) скалярного произведения позволяют преобразовать произведение линейных комбинаций (2.45) следующим образом:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} &= (\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2)(\beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2) = \\ &= \alpha_1\beta_1\cdot(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1) + \alpha_1\beta_2\cdot(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) + \\ &+ \alpha_2\beta_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1) + \alpha_2\beta_2\cdot(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2). \end{aligned} \qquad (2.46)$$

Произведения координат векторов нам известны, если заданы разложения (2.45) этих векторов по базису. Значит, чтобы воспользоваться формулой (2.46) необходимо знать только скалярные произведения **базисных** векторов, которые принято записывать в таблице (матрице)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.47)$$

Подчеркнём, что роль базиса как основы пространства, проявляется и в задаче о скалярном умножении векторов. Векторов в пространстве бесконечно много, а число базисных векторов ограничено размерностью пространства. И подобно тому как любой вектор пространства может быть представлен в виде линейной комбинации всего лишь нескольких базисных векторов, так скалярное произведение любых векторов выражается через несколько скалярных произведений векторов базиса.

Вычисления по формуле (2.46) значительно упростятся, если векторы базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ выбрать так, чтобы матрица (2.47) их скалярных произведений приняла наиболее простой вид

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.47')$$

Выраженные в матрице (2.47') равенства $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 = 1$ означают, что длина (2.40) каждого базисного вектора равна единице: $|\boldsymbol{e}_1| = \sqrt{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1} = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = \sqrt{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2} = 1$. А равенства $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = 0$ означают, что векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ взаимно перпендикулярны (образуют угол $90^{\circ}$). Базис с такими метрическими характеристиками называется **ортонормированным**. Подставляя в формулу (2.46) значения скалярных произведений базисных векторов из (2.47'), получим

$$\boldsymbol{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2. \qquad (2.48)$$

Подчеркнём, что упрощённой формулой (2.48) вместо (2.46) можно пользоваться только в тех случаях, когда базис удовлетворяет условиям ортонормированности (2.47'). Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представлены разложениями по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ **трёхмерного** пространства

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \beta_3\boldsymbol{e}_3,$$

и этот базис тоже ортонормированный (векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ попарно перпендикулярны и длины их равны единице), то таким же способом, как получена формула (2.48), легко получить формулу скалярного произведения

$$\boldsymbol{ab} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \qquad (2.48')$$

Итак, имеется возможность вычислять скалярное произведение любых векторов, не зная ни их длин, ни угла между ними, а зная только координаты разложения векторов по базису и скалярные произведения базисных векторов. Это позволяет пользоваться формулами (2.40), (2.41) как **алгебраическими определениями длин и углов**. Но тогда необходимо дать иное определение операции скалярного умножения векторов, не опирающееся на геометрические понятия длины и угла в отличие от формулы (2.39). Поскольку возможность пользоваться формулой (2.46) и её аналогами (2.48), (2.48') обусловлена свойствами (2.42), (2.43), (2.44) скалярного произведения векторов, эти свойства нужно сохранить в качестве аксиом при переходе от определения операции скалярного умножения формулой (2.39) к аксиоматическому (алгебраическому) определению операции.

Но тогда возникают другие проблемы. Пока мы пользуемся значениями длины отрезков, взятыми из опыта, не возникает сомнений в том, что длины выражаются **вещественными** числами. Но если перейти к теоретическому (аксиоматическому) определению длины равенством (2.40), то есть ли гарантия, что у какого-нибудь вектора скалярный квадрат не окажется отрицательной величиной, вследствие чего модуль такого вектора придётся выражать мнимым числом? Такую гарантию необходимо обеспечивать специальной аксиомой, если мы хотим, чтобы аксиоматические определения скалярного произведения векторов и длин векторов не вступали в противоречие с теми свойствами наблюдаемого пространства, которые неизменно подтверждаются всем нашим опытом. Поэтому в дополнение к свойствам (2.42), (2.43), (2.44) надо добавить четвёртую аксиому

$$\left.\begin{array}{l} 4^0.\ \boldsymbol{aa} > 0, \textit{ если вектор } \boldsymbol{a} \textit{ ненулевой}, \\ \boldsymbol{aa} = 0, \textit{ если вектор } \boldsymbol{a} \textit{ нулевой}. \end{array}\right\} \qquad (2.49)$$

И ещё одно сомнение остаётся. Косинус вещественного аргумента может принимать только такие значения, которые по абсолютной величине не превосходят единицы:

$$|\cos(\boldsymbol{a},{}^\wedge \boldsymbol{b})| \le 1 . \qquad (2.50)$$

А будет ли для любых ненулевых векторов удовлетворять условию (2.50) величина, определённая формулой (2.41)? Если бы пришлось добавлять ещё одну аксиому для выполнения условия (2.50), то аксиоматическое определение операции скалярного умножения векторов стало бы слишком громоздким и искусственным. Но сейчас будет показано, что условие

$$|\cos(\boldsymbol{a},{}^\wedge \boldsymbol{b})| = \frac{|\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{|\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}|}{\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}}} \le 1 , \qquad (2.50')$$

равносильное условию (2.50) при пользовании формулой (2.41), автоматически будет выполнено, если выполнены требования (2.42), (2.43), (2.44), (2.49). Прежде всего отметим, что условия (2.50) и (2.50′) имеют смысл только для ненулевых векторов, потому что нулевой вектор не имеет определённого направления, и модуль нулевого вектора равен нулю. При любом выборе векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и любом вещественном значении $\lambda$ в силу условия (2.49) справедливо неравенство

$$(\lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \ge 0 . \qquad (2.51)$$

Соотношения (2.42), (2.43), (2.44) позволяют представить неравенство (2.51) в виде

$$\lambda^2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\lambda + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b} \ge 0 . \qquad (2.51')$$

Левая часть неравенства (2.51′) есть квадратный трёхчлен относительно $\lambda$, а коэффициентами служат скалярные произведения векторов. Так как неравенства (2.51), (2.51′) выполняются для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ при любых вещественных значениях $\lambda$, то при тех же произвольных условиях дискриминант квадратного трёхчлена не положителен:

$$4(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2 - 4(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}) \le 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2 \le (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}) .$$

Так как скалярные квадраты векторов не отрицательны в силу условия (2.49), то смысл последнего неравенства не изменится при извлечении квадратного корня из обеих его частей:

$$|\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}| \le \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}} \quad \Longleftrightarrow \quad |\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}| . \qquad (2.52)$$

Неравенству (2.52) присвоено имя математиков Коши и Буняковского. Оно равносильно условию (2.50′), (2.50) для ненулевых векторов, в чём легко убедиться, разделив обе части неравенства на его правую часть.

Итак, выполнения соотношений (2.42), (2.43), (2.44), (2.49) достаточно, чтобы, определив скалярное произведение векторов как произведение разложений этих векторов по базису пространства (формулой типа (2.46)), а длины векторов и углы между векторами формулами (2.40) и (2.41), мы получили именно те метрические свойства пространства, какие находим в наблюдаемом пространстве. Правда, для пользования формулой типа (2.46) необходимо ещё знать значения скалярных произведений базисных векторов, фигурирующие в матрице типа (2.47). Эти значения мы можем вычислить по формуле (2.39), измерив предварительно длины базисных векторов и углы между ними, либо, при построении теоретической модели пространства можем выбрать значения элементов матрицы по своему произволу, соблюдая требования (2.42) и (2.49). В широких обобщениях понятия вектора и скалярного умножения векторов, встречающихся в многочисленных приложениях линейной алгебры, правила вычисления скалярных произведений векторов могут быть и другими, но общие требования к операции (аксиомы) формулируются так же, как в соотношениях (2.42), (2.43), (2.44), (2.49).

*Определение 2.8.* Если в пространстве, представляющем собой множество векторов, над которыми можно выполнять две линейные операции, определено правило, по которому любой паре векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ставится в соответствие вещественное число $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ (их скалярное произведение) при соблюдении для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любого вещественного числа $\lambda$ четырёх требований (аксиом)

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\,; \\ 2^\circ.\ (\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\,; \\ 3^\circ.\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}\,; \\ 4^\circ.\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}>0,\ \textit{если вектор } \boldsymbol{a} \textit{ ненулевой}, \\ \qquad \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}=0,\ \textit{если вектор } \boldsymbol{a} \textit{ нулевой}. \end{array}\right\} \qquad (2.53)$$

то говорят, что такое пространство имеет собственно евклидовы метрические свойства и называют пространство **собственно евклидовым.**

С помощью всего лишь **трёх** алгебраических операций над векторами: сложения векторов, умножения векторов на вещественные числа и скалярного умножения векторов — любые геометрические задачи в наблюдаемом пространстве могут быть сформулированы и решены аналитически в терминах алгебраических уравнений. А сверх того, эти операции позволяют постигнуть глубочайшие свойства пространства — выделить в нём линейные свойства и метрические свойства.

По убеждению классической физики мировое пространство, вмещающее в себе всё бесконечное множество тел, существующих во Вселенной, является **трёхмерным собственно евклидовым** пространством. Для краткости мы называли его и будем называть в дальнейшем **наблюдаемым** пространством, имея в виду, что именно таким представляется наблюдателю мировое пространство. Это представление о мировом пространстве пришлось пересматривать в связи с обнаружением новых фундаментальных закономерностей в природе, описываемых теорией относительности.

## § 6. АПОФЕОЗ КЛАССИЧЕСКОГО НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ

В учениях даже великих мировых религий не объясняется устройство мироздания. Утверждается только, что мир сотворён божественной премудростью, непостижимой для человека. Людям же следует верить в это и исполнять требования, предписываемые религией как угодные Богу, хотя они зачастую противостоят человеческим “естественным” склонностям и стремлениям. Конечно, служители религии не могли остаться в полной изоляции от попыток человеческого разума осмыслить устройство наблюдаемого мира, но и в этом они вынуждены были придерживаться взглядов наиболее авторитетных мыслителей прошлого, выработанных ещё до зарождения систематических научных исследований природы. «Представления о мире в ту пору, — пишет А.Э. Штекли, автор замечательной книги о Галилео Галилее, — покоились не на сказке о трёх китах, а на хорошо разработанной и целостной системе взглядов. Эта система опиралась на учение о Вселенной Аристотеля, очищенное от языческой скверны, на авторитет Птолемея, выдающегося астронома древности, и на суждения богословов, умело толкующих библейские тексты и творения отцов церкви... Достаточно было положиться на собственный опыт, чтобы признать что ты ходишь по твёрдой и неподвижной Земле. Здравый смысл и показания чувств были единодушны... В высших школах, ссылаясь на авторитет Аристотеля и его комментаторов, учили, что Земля, покоящаяся в центре Вселенной, окружена хрустальными сферами — прозрачными полыми шарами, движущимися один в другом. Планеты не птицы, они не летают по небу, они укреплены на этих сферах и вращаются вместе с ними. Движет небесными сферами сам Бог» [29, с. 8, 9].

Коперник и Галилей не посягали на признание Бога Творцом и Вседержителем мироздания, а пытались объяснить блюстителям чистоты веры, что чем более истинной и грандиозной оказывается раскрывающаяся перед людьми картина божественного творения, тем лучше это служит постижению могущества и мудрости Бога. Но церковь предпочла для себя роль непримиримой гонительницы новых открытий и тем обрекла проповедуемое ею учение на противостояние с развивающейся наукой. По мере того как росло число земных и небесных явлений, которые удавалось объяснить с позиций математики и основных принципов механики, крепла убеждённость естествоиспытателей в универсальности найденных ими ключей к тайнам природы. Познав красоту и плодотворность логических объяснений, опирающихся на уже открытые законы материи, учёные стали стремиться к поискам причин природных явлений в самой природе, а не в сверхъестественном промысле. И даже те, кто подобно Ньютону и Канту, не отрицали божественного начала, ограничивали его роль только сотворением материи и приведением её в движение первичным толчком, после чего природа должна была существовать как автоматически действующий механизм без какого-либо внешнего вмешательства.

Иммануил Кант (1724 – 1804) писал в своём первом крупном произведении [30, с. 201-202]: «Разумеется, строение, форма, красота и совершенство — всё это отношения между элементами и субстанциями, составляющими вещество мироздания; это видно в тех устройствах, которые во все времена свидетельствуют о мудрости Бога, и больше всего согласуется с ней развитие их в естественной последовательности по укрепившимся в ней общим законам. Поэтому мы можем с полным правом предположить, что порядок и строение миров развиваются постепенно, в некоторой последовательности во времени из запасов сотворённого природного вещества, но сама эта основная материя, свойства и силы которой служат причиной всех изменений, есть непосредственное следствие божественного бытия; следовательно, она сразу должна быть настолько богатой и полной, чтобы развитие её сочетаний могло вечно происходить по одному плану, охватывающему всё, что только может существовать, и не допускающему никакой меры, — одним словом, по бесконечному плану». Современники и потомки могли видеть в этом высказывании уступку теологии, поскольку в 1755 году, когда вышла в свет в Германии «Всеобщая естественная история и теория неба», небезопасно было отводить Богу ограниченную роль в сотворении мироздания и дерзать объяснять всё существующее с помощью принципов Ньютона. Недаром Кант не обозначил своего имени на этом сочинении и даже "всеподданнейшее" посвящение его прусскому королю Фридриху Великому подписал анонимно: Автор. Однако общий дух этого произведения не позволяет подозревать Канта в неискренности, и мы ещё будем иметь повод прокомментировать приведённое здесь и некоторые другие высказывания Канта с точки зрения открытий науки XX века. «Всеобщая естественная история...» не получила широкого распространения и на протяжении нескольких десятилетий оставалась незамеченной естествоиспытателями и философами, возможно потому, что издатель книги обанкротился и склад был опечатан. Лишь в 1791 г. были изданы составленные по поручению уже знаменитого Канта его учеником извлечения из этой книги, а затем при жизни Канта книга издавалась в 1797, 1798, 1799 годах. Зато уже в XIX веке эта работа, содержащая гипотезу о формировании не только солнечной системы, но также звёзд, галактик и всей Вселенной стала оказывать сильное плодотворное влияние на естествознание, стимулируя распространение вглубь и вширь идей эволюционизма.

Космогоническая гипотеза Канта построена умозрительно, но в отличие от древних философов, Кант опирается на представления науки XVIII века, которых не было у древних. Это делало его гипотезу научно приемлемой и способной оказывать эффективное воздействие на развитие науки. В рассуждениях Канта присутствуют замечательные прозрения, к экспериментальному доказательству и теоретическому обобщению которых физика подошла лишь век спустя. Ещё в эпоху господства теории флогистона представления о превращении кинетической энергии движения тел в теплоту применяются Кантом (несмотря на отсутствие строгих научных терминов) для объяснения эволюции тел и даже Вселенной. Кант рассуждает о том, что в каждой космической системе под действием силы притяжения центрального тéла обращающиеся вокруг последнего телá когда-нибудь упадут на него, но сама эта катастрофа вызовет разогрев материи, возвращая её к прежнему хаотическому состоянию. «После того как вялость круговых движений в нашем мироздании в конце концов низвергнет все планеты и кометы на Солнце, жар последнего неизмеримо возрастёт благодаря смешению в нём многих и больших масс... Усиленный до крайности новым притоком питания,... огонь этот, без сомнения, не только вновь разложит всё на мельчайшие элементы, но и с расширяющей силой, соответствующей степени жара, и со скоростью, не ослабляемой никаким сопротивлением промежуточного пространства, вновь разбросает и рассеет эти элементы в том же огромном пространстве, которое они занимали до первоначального формирования природы, чтобы затем, когда сила центрального огня из-за почти полного рассеяния его массы уменьшится, сочетанием притягательных и отталкивательных сил повторить с не меньшей закономерностью прежние образования и присущие системам движения и породить новое мироздание... И когда через всю бесконечность миров и пространств мы следим за этим фениксом природы, который лишь затем сжигает себя, чтобы вновь возродиться юным из своего пепла, когда мы видим, что природа даже там, где она распадается и дряхлеет, неисчерпаема в новых проявлениях... тогда наш дух, размышляя обо всём этом приходит в глубокое изумление» [30, с. 212, 213]. «Творение никогда не кончается. Оно, правда, однажды началось, но оно никогда не прекратится» [30, с. 206].

В свете этих высказываний позволительно думать, что мы живём в одном из "новых мирозданий", порождаемых циклически природой, а не в той первичной стадии природы, которая формировалась Богом. Отсюда уже можно сделать шаг к полному упразднению Бога, заменив представление о сотворении им материи представлением о вечном существовании несотворённой и неуничтожимой материи как глубочайшей основы бытия. Обоснованием и пропагандой такого мировоззрения активно занялись французские энциклопедисты. «Чтобы доказать всеобщую применимость своей теории, — писал Ф. Энгельс, — они избрали кратчайший путь: они смело применяли её ко всем объектам знания в том гигантском труде, от которого они получили своё имя, в "Энциклопедии". Таким образом, в той или иной форме, — как открытый материализм или как деизм, — материализм стал мировоззрением всей образованной молодёжи во Франции. И влияние его было так велико, что во время великой революции это учение, рождённое на свет английскими роялистами, доставило французским республиканцам и сторонникам террора теоретическое знамя и дало текст для “Декларации прав человека”» [31, с. 311]. Сотрудник «Энциклопедии» Поль Анри Гольбах (1723 – 1789) издал в 1770 г. своё сочинение «Система природы, или о законах мира физического и мира духовного» под именем Ж.Б. Мирабо, члена Французской академии, умершего в 1760 г. Дополнительной мерой предосторожности (помимо сокрытия подлинного имени автора) служило то, что в качестве места издания этой книги был указан Лондон, хотя в действительности она была издана в Амстердаме. Незамедлительно подтвердилась уместность предосторожностей, ибо 13 августа 1770 г. эта книга была предана публичному сожжению по приговору Парижского парламента. «Система природы...» воспринималась как библия атеизма. А.И. Герцен сказал о ней: «Эта книга — заключение французского материализма... После этой книги можно было делать частные приложения, можно было комментировать “System de la nature...”, но далее идти в дерзком отрицании невозможно» [32].

То, что во второй половине XVIII и в первой половине XIX веков считалось дерзким отрицанием, то стало в XX веке и вплоть до наших дней общепринятым научным мировоззрением, хотя и со многими существенными поправками, обусловленными достижениями науки за два последних века. Гольбах писал: «Вселенная — это колоссальное соединение всего существующего, представляет нам повсюду лишь материю и движение; её совокупность раскрывает перед нами лишь необъятную и непрерывную цепь причин и следствий;... идея природы заключает в себе необходимым образом идею движения. Но, спросят нас, откуда эта природа получила своё движение? Мы отвечаем, что от себя самой, ибо она есть **великое целое, вне которого ничто не может существовать** (выделение моё— А.С.). Мы скажем, что движение — это способ существования (façon d’ětre), вытекающий необходимым образом из сущности материи; что материя движется благодаря собственной своей энергии» [33]. То, что Гольбах чеканную формулировку «**движение — это способ существования материи**» сопровождает добавочными фразами о том, откуда берётся движение, является скорей всего реакцией на представление великого Ньютона о первом толчке, которым Бог должен был привести в движение материю.

Известный советский астроном и педагог Б.А. Воронцов-Вельяминов заметил в своей книге о Лапласе «Изучать строение Вселенной после борьбы, всю тяжесть которой испытали на себе Галилей и Джордано Бруно, стало возможным, но изучать вопрос о происхождении мира было дерзостью, на которую могли отважиться лишь немногие» [34, с. 119]. Правда, во Франции после Великой революции степень риска для таких исследований сделалась минимальной, и Лаплас уже мог не скрывать своего атеизма даже перед Наполеоном Бонапартом. «22 августа 1795 г. специальным параграфом конституции вместо упразднённых академий был учреждён Национальный институт республики: “Институт входит в состав республики. Он должен собирать открытия, совершенствовать науки и художества. Каждый год он должен давать отчёт законодательным органам об успехах наук и о трудах каждого своего раздела”... Роль и значение Лапласа в Институте с первых же дней его существования были очень велики» [34, с. 161]. В 1796 г. вышел в свет труд Лапласа «Изложение системы мира», в одном из примечаний к которому изложена кратко гипотеза о происхождении солнечной системы, развитая полнее в последующих изданиях книги (1799, 1808, 1813, 1824 гг.). В русском переводе [35] этой книги, выполненной пулковским астрономом В.М. Васильевым, помещена статья переводчика «Лаплас и его вклад в развитие астрономии», в которой в частности рассказано о беседе с Лапласом генерала Бонапарта, ставшего после государственного переворота 18 брюмера (9 ноября 1799 г.) первым консулом. «Получив от Лапласа экземпляр “Изложения системы мира”, Наполеон как-то сказал ему: “Ньютон в своей книге говорил о Боге, в вашей же книге я не встретил имени Бога ни разу”. Лаплас ответил: «Гражданин первый консул, в этой гипотезе я не нуждался”» [35, с. 366].

Космогоническая гипотеза Лапласа, как крупнейшего авторитета в области небесной механики, внушала доверие к его рассуждениям и выводам и возбудила повышенный интерес к опубликованной четырьмя десятилетиями раньше космогонии Канта. Обе эти гипотезы слились в сознании научной общественности под общим названием гипотезы Канта – Лапласа. В действительности же эти гипотезы различаются не только мировоззренческими позициями их авторов, но и выбором предмета исследования. Кант стремился объяснить происхождение не только отдельных звёздных систем, но и Вселенной в целом из первозданной материи, а Лаплас, считая материю не созданной, а существующей в бесконечном пространстве на протяжении бесконечного времени, рассуждал о происхождении лишь определённых материальных форм на определённом промежутке времени в известной нам области пространства. Лаплас рассматривает происхождение Солнечной системы из заполняющей её пространство разреженной газовой туманности, имевшей сгущение в центре. Да и эта модель не выдумана Лапласом, а заимствована им из наблюдательных материалов Вильяма Гершеля (1738 – 1822).

Для первой половины XIX века великое мировоззренческое и стимулирующее развитие науки значение гипотезы Канта–Лапласа заключалось в привнесении в естествознание и философию идей самопроизвольной эволюции материального мира. В качестве пережитка религиозного мировоззрения долго сохранялось представление о неизменности мироздания. Небо и Земля, разделение Земли на континенты, климатические условия, виды растений и животных были для религии такими, какими их первоначально создал Бог. На протяжении не только одной человеческой жизни, но и нескольких поколений научных наблюдений, и даже всей писанной истории, в этих областях не было заметно принципиальных изменений. Да и открываемые наукой законы математики и механики тоже имели статус неизменных и вечных. Поэтому научные представления об эволюции природы стали формироваться с большим запозданием, от второй половины XVIII до середины XIX века.

Потребность в эволюционных теориях была осознана в первую очередь не в биологии, где для этого были найдены впоследствии богатейшие материальные доказательства, а в механике, точнее, в небесной механике. И вовсе не потому, что в небесных объектах была замечена крупномасштабная изменчивость (за исключением движения планет, комет и вспышек новых звёзд). Но механика первой встала на путь естественных объяснений физических явлений без участия каких-либо сверхъестественных сил. Поэтому здесь раньше была осознана острота вопроса о происхождении планет и звёзд. Ведь атомистическое мировоззрение, воспринятое и успешно развиваемое классической физикой, допускало вечное существование без возникновения и уничтожения только для мельчайших неделимых частиц тел, а все прочие тела, будучи сложными сочетаниями атомов, должны были возникнуть каким-то способом. Поэтому если не возлагать конструирование тел на Бога, то необходимо было понять, как могли образоваться основные небесные тела, чтобы в дальнейшем на них происходили процессы, приводящие к возникновению жизни, и даже жизни разумной.

Эволюционные теории в геологии и биологии стали укореняться позже, чем в науке о небе, ибо в каждой из земных наук должны были состояться свои собственные открытия, доказывающие изменчивость во времени предмета их исследований. Это лишь задним числом нам легко рассуждать о ясности уже пройденных путей. Но не будем забывать, что космогонические гипотезы Канта и Лапласа были всё-таки гипотезами, а наука не была бы наукой, если бы она безынерционно разворачивалась в сторону каждой гипотезы. В геологии эволюционные идеи утвердил Чарльз Ляйель (1797 – 1875). В начале XIX века пользовалась признанием теория катастроф французского зоолога, анатома и палеонтолога Жоржа Кювье (1769 – 1832), из которой следовало, что изучение современных геологических факторов не поможет установить историю земной поверхности в давно прошедшие времена. Ляйель же после тщательного изучения геологических отложений пришёл к выводу, что масштабы геологической деятельности в далёком прошлом и в современную эпоху не имеют больших различий. Он разработал с точным изложением фактов и убедительным объяснением их учение о медленном и непрерывном изменении земной поверхности под влиянием постоянно действующих геологических факторов (атмосферные осадки, текучие воды, извержения вулканов и др.).

В начале 1830-х годов появился отдельными выпусками классический труд Ляйеля «Основы геологии», и уже в 1840-х годах в Англии, а к началу 1860-х и во всём мире старые геологические теории уступили место эволюционному актуализму. При исследовании геологических отложений в последовательности слоёв обнаруживались остатки вымерших растений и животных, приспосабливавшихся к меняющимся условиям обитания.

Ляйель был знаком с выводами Чарльза Дарвина (1809 – 1882), сделавшего к 1842 году первые наброски теории биологической эволюции и убеждал его опубликовать их. Но первое сообщение Дарвина об этом в печати появилось только в 1858 г., а уже в 1859 г. вышел его знаменитый труд «Происхождение видов путём естественного отбора, или сохранение благоприятствуемых пород в борьбе за жизнь». В развитие этих идей Ч. Дарвин выпустил в 1868 г. книгу «Изменение домашних животных и культурных растений», дополняя идеи естественного отбора фактами отбора искусственного в результате целенаправленной деятельности человека. Дарвин пошёл ещё дальше, опубликовав в 1871 г. книгу «Происхождение человека и половой отбор», а в 1872 г. — «Выражение эмоций у человека и животных», где приводил многочисленные свидетельства в пользу животного происхождения человека. Даже во второй половине XIX века было большой дерзостью утверждать естественное происхождение человека без божественного вмешательства. Дарвиновские идеи биологической эволюции произвели на современников гораздо большее впечатление, чем эволюция геологическая, так как имели более близкое отношение к происхождению жизни. Крупный физик Людвиг Больцман, упомянутый выше (в конце § 4) в связи с противоречием между механической предопределённостью и свободой человеческой воли, сказал: «Если Вы спросите меня относительно моего убеждения, назовут ли нынешний век железным веком или веком пара и электричества, я отвечу, не задумываясь, что наш век будет называться веком механического миропонимания природы — веком Дарвина» [36].

Очень убедительным подтверждением биологической эволюции стало обнаружение параллелизма между процессами в палеонтологии (науке о древней жизни) и эмбриологии (науке о развитии зародышей биологических организмов). Самым трудным оказалось преодоление пропасти между неживой и живой материей. Поэтому особенно большие надежды возлагались на развитие химии органических соединений и возможности синтезировать из неорганических веществ такие продукты, которые раньше можно было получать только как порождение живых организмов. Однако полного заполнения пропасти между живым и неживым наука не смогла добиться и к началу XXI века. До сих пор мы не можем синтезировать из атомов химических элементов живую клетку, хотя современная биофизика дошла уже до изучения биологических явлений на атомно-молекулярном уровне.

Научное мировоззрение, сложившееся к концу XIX века, по справедливости можно назвать материалистическим. Конечно, найдутся люди, не разделяющие столь однозначного определения. Они укажут на многогранность науки, на наличие в ней таких аспектов, которые ведут к признанию Высшего Разума, на то, что многие учёные, в том числе крупнейшие творцы фундаментальных научных идей, верили в Бога, либо на свой особый манер — в существование в Космосе высокоразвитых разумных существ. Да, отдельные учёные могли высказывать подобные взгляды, но парадигма науки, т.е. органическая совокупность идей, убеждений, оценок, методов исследования, разделяемых и применяемых большинством участников научного сообщества, имеет свою логику становления и может развиваться в известных пределах независимо от взглядов выдающихся мыслителей, пока те не в силах обосновать свои убеждения аргументами, приемлемыми для науки. Так классическая наука взяла у Ньютона законы механики и отвергла его веру в Бога, восприняла кантовские представления о самопроизвольном формировании и эволюции космических систем и не приняла ту его мысль, что «основная материя, свойства и силы которой служат причиной всех изменений, есть непосредственное следствие божественного бытия; следовательно, она сразу должна быть настолько богатой и полной, чтобы развитие её сочетаний могло вечно происходить по одному плану, охватывающему всё, что только может существовать » [30, с. 202].

Парадигме классической науки, как и современной, не чужд принцип Оккама (ок. 1300 – 1349): «То, что можно объяснить посредством меньшего, не следует выражать посредством бóльшего» [15, 891]. Нельзя не признать большой заслугой классической науки то, что она сделала неприемлемой подмену решения конкретной научной проблемы, причинного объяснения определённых явлений ссылками на непостижимую мудрость и всемогущество Творца неба и земли. Благодаря этой здоровой традиции если и придётся признать творческое участие высокоразвитого разума в каких-либо процессах природы, то не иначе как с устремлённостью к раскрытию закономерных оснований и механизма такого творчества, что будет устремлением к естественнонаучному объяснению. Научное исследование природы в XVI – XIX веках не обнаруживало в ней следов разумной творческой деятельности, кроме деятельности земных людей, а потому всё, что нельзя было объяснить вмешательством человека, оставалось приписывать действию стихийной эволюции.

В противоположность принципу предопределённости классической механики, в теориях эволюции земной коры и биосферы большая роль отводится случайности. Случайно могут происходить землетрясения, извержения вулканов, ураганы, ливни, засухи. Случайно возникают некоторые навыки и генетические изменения у биологических особей, приводящие в дальнейшем к изменению вида. Случайным называется такое событие, которое при осуществлении некоторого комплекса условий может произойти или не произойти. Но что такое "определённый комплекс условий"? В теории классической механики это так называемые начальные условия, наложенные на систему дифференциальных уравнений Лагранжа, выражающих поведение данной системы материальных точек. Однако при рассмотрении даже такого простого случайного события, как выпадение грани с шестёркой при бросании игрального кубика, мы не составляем систему дифференциальных уравнений для системы материальных точек кубика и окружающих его частиц, способных предопределить выпадение той или иной грани; не выясняем начальные условия такой системы и тем более не интегрируем дифференциальные уравнения. Больше того, в теории квантовой механики выясняется, что начальные условия в их классическом понимании принципиально не достаточны для определения состояния и поведения квантовомеханической системы, выяснения причинно – следственных связей в ней. Так откуда же нам знать, как ляжет кубик в результате бросания его на плоскость? Мы можем контролировать (учитывать) в опыте с бросанием кубика лишь небольшой набор таких условий, как правильность геометрической формы кубика и плоскости, на которую он упадёт, однородность материала кубика и твёрдость материалов кубика и плоскости. Этого мало, чтобы однозначно предсказать результат опыта, но и небольшой комплекс контролируемых условий позволяет делать вероятностное предсказание результатов опыта. В частности вероятность выпадения любой из граней кубика при одном бросании равна 1/6. Отсюда не следует, что при шести бросаниях кубика каждая его грань выпадет точно по одному разу. Не исключено, что все шесть раз будет выпадать одна и та же грань, хотя это очень маловероятно (вероятность равна $(1/6)^6 = 1/46656 \approx 0{,}000\,002\,143$). Однако если бросать кубик 6000 раз, то число выпадений каждой грани будет очень близко подходить к тысяче. Таким образом, в природе действуют вероятностные, или статистические закономерности, а подчинение им случайных событий могло быть понято как не противоречащее механическому принципу предопределённости. В невообразимо большом множестве различных сочетаний атомов могут реализовываться с большей или меньшей вероятностью те или иные сложные комбинации, воспринимаемые нами как случайные. Научное рассмотрение таких реализаций стало предметом статистической физики, в развитие которой большой вклад внёс упоминавшийся выше австрийский физик Людвиг Больцман.

Если религия объясняет свершение тех или иных событий волей Бога, то наука считала принципиально возможным объяснять события геологической и биологической эволюции случайным сочетанием факторов, которое даже при очень малой вероятности может реализоваться в каком-либо месте сколь угодно большого объёма пространства на протяжении сколь угодно большого промежутка времени. В классическом научном понимании эволюции природы вместо отрицаемого божественного вмешательства большая творческая роль отводится случайности. Это вовсе не означает, что наука готова допускать всё, что можно произвольно сфантазировать. Могут ли, например, все молекулы воздуха собраться в одной половине герметически закрытого помещения? Теоретически это не исключается, но вероятность такого события настолько ничтожна, что правильней считать его невозможным.

Последовательные приверженцы классического научного мировоззрения отрицали Бога не только потому, что считали возможным найти в закономерностях, внутренне присущих материи, причины всего, что происходит в природе. Согласно такому убеждению, Богу не только нечего делать в материальном мире, но и негде находиться в качестве надприродной нематериальной сущности, поскольку нет никакого иного реального мира, кроме мира тел, воспринимаемых органами чувств. Фридрих Энгельс, выражая точку зрения Людвига Фейербаха, свою собственную и многих творцов классической науки, писал, «что тот вещественный, чувственно воспринимаемый мир, к которому принадлежим мы сами, есть единственный действительный мир и что наше сознание и мышление, каким бы сверхчувственным оно ни казалось, является продуктом вещественного, телесного органа, мозга. Материя не есть продукт духа, а дух сам есть лишь высший продукт материи. Это, разумеется, чистый материализм» [4].

Сегодня мы можем высказать немало критических замечаний в адрес классического научного мировоззрения. Но они связаны главным образом с содержанием познаний, которые расширялись и углублялись, притом весьма радикально. Основные же методологические позиции, выработанные классической наукой, замечательно надёжны и плодотворны и восприняты как драгоценное наследие наукой современной. Представление о предмете науки как мире бесконечном и целостном, в котором все явления и события взаимосвязаны, открывает путь к диалектическому пониманию закономерного и объективного. Обнаружение общих свойств во множестве разнообразных объектов образует основу закономерностей. Углубление и обобщение свойств и закономерностей материального мира ведёт человеческий разум к углублению и расширению понимания материи, подготовленному развитием науки XX века и становящемуся особенно актуальным в веке XXI.

Классическое научное мировоззрение основывалось главным образом на открытых классической физикой закономерностях неживой природы, а убеждённость в принципиальной истинности этих закономерностей и сделанных выводов из них была огромной в научных кругах и в более широких кругах образованной публики. Ярким свидетельством тому служит высказывание одного из крупнейших творцов классической физики Уильяма Томсона (1824–1907), удостоенного в 1892 г. за научные заслуги титула лорда Кельвина, члена Лондонского королевского общества с 1851 г. и президента этой высокоавторитетной академии наук в 1890 – 1895 годы. Приведём здесь красочное описание и комментарии этого эпизода из книги [37, 156-158]. «...“Сегодня можно смело сказать, что грандиозное здание физики — науки о наиболее общих свойствах и строении неживой материи, о главных формах её движения — в основном возведено. Остались мелкие отделочные штрихи...” Так говорил высокий седовласый джентльмен, выступая перед коллегами в канун нового, 1900 года. Имя говорившего — Вильям Томсон, сэр Вильям, лорд Кельвин, президент Лондонского королевского общества и учёный с мировой славой. Покойно устроившись в старинных креслах с высокими спинками, джентльмены удовлетворённо кивали головами. Что ж, они немало сделали для того, чтобы иметь право услышать такие слова, завершающие XIX век. Завтра наступит новое столетие. Столетие, в котором физикам останутся на долю только “мелкие отделочные штрихи”... Так рассуждали физики... XIX век — время взгляда на науку как на конечную сумму знаний. Эта сумма уже накоплена, будущему поколению остаётся только привести кое-что в порядок, причесать, разложить по полочкам...В физике... была к 1899 году парочка туманных облачков на горизонте (необъяснённость отрицательного результата экспериментов Майкельсона по обнаружению эфирного ветра и несовпадение с результатами экспериментов теоретических предсказаний спектра излучения абсолютно чёрного тела, особенно в ультрафиолетовой области — А.С.). Но что такое пара необъяснённых опытов по сравнению с храмом классической физики?.. И вот он наступил, этот новый таинственный XX век. Через пять лет из “облачков” на “физическом горизонте” рванули такие молнии, что прозревшие внезапно учёные обнаружили страшную картину. Храм науки, величественное здание классической физики, оказался крошечной, жалкой сторожкой на строительной площадке новой физики — физики теории относительности и атомного ядра».

Это не означает, что возведённый в предшествующие века храм классической физики стал совсем непригодным, утратил свою ценность. Законы классической механики и в наши дни с успехом применяются для решения многих задач технического характера и расчётов движений небесных тел вплоть до скоростей в несколько десятков километров в секунду. Но движения со скоростями более десятков тысяч километров в секунду совершаются в соответствии с законами, заметно отличающимися от классических. Людям, недостаточно сведущим в новых теориях, может казаться, что дело сводится всего лишь к уточнениям формул классической механики. Однако эти уточнения имеют такой характер, что они принципиально несовместимы с главными устоями классической механики и получают оправдание лишь позиций иной картины мира, отличной от классической. Возникшую на рубеже XIX – XX веков ситуацию можно уподобить тому, как для уточнения расчётов движений планет пришлось отказаться от геоцентрической системы мира и признать более истинной гелиоцентрическую систему Коперника. И подобно тому как геоцентрическая картина мира находит объяснение в качестве внешней видимости, формы восприятия землянами гелиоцентрической системы, так классическая картина мира оказывается формой восприятия картины мира, снимками с которой являются теория относительности и квантовая механика. Соответственно возросшему уровню развития науки революция в мировоззрении, вызревшая на протяжении XX века, более грандиозна и радикальна, затрагивает более широкий круг явлений и более глубокие основы материального мира, чем революция, произведённая открытием Коперника. Выяснились границы применимости законов классической физики, а за теми границами необходимо обратиться к новым закономерностям не только ради уточнения теоретических предсказаний явлений, но, что гораздо важнее, для выработки более истинных представлений об устройстве мироздания, чтобы глубже понять место, возможности и роль человека в нём.

# Глава 3.

# ЧЕТЫРЁХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ МИРА ПО МИНКОВСКОМУ

...мир богаче, живее, разнообразнее, чем он кажется, ибо каждый шаг развития науки открывает в нём новые стороны.

В.И. Ленин [24, с. 130].

## § 7. СВОЙСТВА СВЕТА НЕ ВПИСЫВАЮТСЯ В КЛАССИЧЕСКУЮ КАРТИНУ МИРА

Камнем преткновения для классической физики стали свойства света. Чтобы понять хоть что-то существенно важное в явлении света, пришлось разрабатывать новые физические теории. Исследования распространения света привели к специальной теории относительности. Исследования излучения и поглощения света привели к теории квантов. Но начав со света, эти разделы науки изменили коренным образом и теорию тел.

Исаак Ньютон считал свет потоком корпускул — световых телец, которые согласно законам механики движутся прямолинейно при отсутствии внешних воздействий (по закону инерции), отражаются от зеркала подобно упругому шарику при ударе о плоскость и увеличивают свою скорость под влиянием притяжения частиц прозрачной среды, в которую проникают (последнее утверждение при жизни Ньютона ещё не могло быть проверено экспериментально). Это находилось в хорошем согласии с общим представлением о мельчайших частицах тел как основных элементах, ответственных за все явления в материальном мире, но главная привлекательность корпускулярной теории заключалась в том, что она согласовывалась со способностью света преодолевать пустое межпланетное и межзвёздное пространство. Явления интерференции и дифракции света побудили Ньютона высказать мысль о периодичности светового процесса и попытаться создать компромиссную корпускулярно-волновую теорию света (в 1675 г.), однако вплоть до конца XVIII века корпускулярная теория света пользовалась наибольшим признанием.

Христиан Гюйгенс (1629–1695) написал в 1678 г. «Трактат о свете» (изданный в 1690 г.), в котором по аналогии с акустическими явлениями рассматривал свет как упругие импульсы, распространяющиеся волнообразно в особой среде — **эфире**, заполняющей всё пространство внутри материальных тел и между ними. Согласно знаменитому принципу Гюйгенса, каждая точка, до которой доходит световое возбуждение, становится в свою очередь центром вторичных сферических волн. При этом Гюйгенс не только не предполагал, но и прямо отрицал строгую периодичность световых волн и применимость к ним понятия длины волны.

В начале XIX века трудами *Юнга (1773 – 1829)* и *Френеля (1788 – 1827)* формируется хорошо обоснованная экспериментами и теоретическими построениями волновая теория света, объясняющая явления интерференции и дифракции света и различие цветов с помощью представления о длинах волн световых колебаний. Открытие и исследование явления поляризации света заставило предположить, что световые волны являются поперечными колебаниями (перпендикулярными к направлению распространения волны), и это привлекло особенно пристальное внимание к выяснению свойств мирового эфира как носителя световых колебаний. Дело в том, что упругие поперечные колебания могут возникать только в твёрдых телах, но было весьма затруднительно приписывать свойства твёрдого тела эфиру, если мы воспринимаем его как пустоту межпланетного и межзвёздного пространства, не оказывающую сопротивления движению тел сквозь неё. Актуальность выяснения свойств мирового эфира резко возросла после доказательства того, что световые колебания представляют разновидность электромагнитных колебаний, основы теории которых разработал Максвелл (1831 – 1879).

Во второй половине XIX века ключевые проблемы теории распространения, излучения и поглощения света потребовали внести максимально возможную ясность в различные аспекты взаимодействия мирового эфира с веществом тел. Генрих Герц (1857 – 1894), доказавший экспериментально (в 1888 г.) существование электромагнитных волн, предсказанных теоретически Максвеллом, считал, что эфир полностью увлекается телами при их движении. Вследствие этого оптические и электромагнитные явления в движущейся среде не должны отличаться от тех же явлений в среде неподвижной, подобно тому как механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Тем самым Герц распространял на оптику и электродинамику галилеевский принцип относительности, представляющий одну из основ классической механики. Последовательное развитие электродинамики Герца наталкивалось на серьёзные трудности и вступало в противоречие с результатами опытов, важнейший из которых выполнил Физо (1819 – 1896) в 1851 году.

Результаты опыта Физо могли быть объяснены частичным увлечением эфира телом, хотя ещё в 1818 г. Френель предложил теорию, не использующую представление о частичном увлечении эфира, но тоже позволяющую объяснить результат Физо. По мысли Френеля эфир не увлекается движущимся телом, а проходит через тело, увеличивая при этом свою плотность, вследствие чего скорость эфира по отношению к телу оказывается меньше скорости движения тела.

Хендрик Антон Лоренц (1853 – 1928) считал мировой эфир неподвижной средой, которая не поддаётся увлечению движущимися телами и с которой может быть связана абсолютно покоящаяся система отсчёта, не обнаружимая с помощью механических явлений. Электромагнитные (в частности, оптические) опыты должны были, по мнению Лоренца, дать возможность обнаружить движение системы отсчёта наблюдателя относительно мирового эфира, что принято было называть обнаружением "эфирного ветра". Теория Лоренца приводила к такой же формуле для определения скорости света в движущейся среде, как и теория Френеля, что порождает видимость частичного увлечения эфира. Для обнаружения эфирного ветра требовалось удостовериться в изменении скорости света в движущейся среде с точностью до величины $\beta^2 = v^2/c^2$, где $c$ — скорость света относительно эфира (абсолютной системы отсчёта), а $v$ — скорость движения среды относительно эфира. Для планеты Земля, движущейся по орбите со скоростью $v = 30$ км / с, погрешность измерений не должна превосходить $\beta^2 = 10^{-8}$.

Выполнить с такой и более высокой точностью опыты, позволяющие обнаружить эфирный ветер, смогли Майкельсон (1852 – 1931) и Морли. Эти знаменитые опыты, неоднократно повторенные со всё возрастающей точностью другими экспериментаторами, дали отрицательный результат: **эфирного ветра нет**. Было сделано немало попыток объяснить отсутствие эфирного ветра, но все они в конечном счёте не выдерживали критики. Наиболее радикальное объяснение предложил сам Лоренц (и независимо от него Фитцджеральд) в 1892 г. Это так называемая *контракционная* гипотеза, согласно которой тело, движущееся относительно эфира, испытывает сокращение своего размера в направлении движения в $\sqrt{1-\beta^2}$ раз. Однако в числе других опытов, учитывающих эффекты "второго порядка" (с точностью не хуже, чем $\beta^2$) были и такие, которых контракционная гипотеза не могла объяснить. В 1895 г. А.Х. Лоренц пришёл к выводу, что в теле, движущемся относительно эфира, должна быть иной и мера времени, но такое "местное время" Лоренц считал лишь вспомогательной математической величиной, отличной от истинного универсального времени, измеряемого в неподвижных относительно эфира телах.

В 1905 г. в статье [14] Альберт Эйнштейн (1879 – 1955) предложил принципиально новый подход к проблеме. Вместо того чтобы пытаться объяснить на основе классической картины мира отрицательный результат опытов по обнаружению эфирного ветра, Эйнштейн отнёсся к этому экспериментально установленному факту как к указанию на справедливость двух аксиоматических утверждений (постулатов). Первый постулат распространял известный в механике принцип относительности также на электродинамические и оптические явления. Согласно механическому (галилеевскому) принципу относительности, во всех инерциальных системах отсчёта законы механики проявляются одинаково, что не позволяет установить абсолютное различие между состояниями покоя и равномерного прямолинейного движения систем, и позволяет с равным правом принимать любую инерциальную систему за неподвижную. Классические представления о мировом эфире подпитывали надежду на то, что с помощью оптических (шире — электродинамических) экспериментов удастся выделить не относительно неподвижную, а абсолютно неподвижную систему отсчёта, по отношению к которой имеет смысл понятие абсолютной (постоянной) скорости света. Первым постулатом Эйнштейна отрицалась возможность существования (или по крайней мере — обнаружения с помощью каких-либо физических экспериментов) абсолютной системы отсчёта. Вторым постулатом Эйнштейна утверждалось постоянство скорости света в вакууме по отношению к любым инерциальным системам отсчёта. Так как с точки зрения классической картины мира второй постулат находится в непримиримом противоречии с первым, то намерение строить теорию на совмещении этих постулатов могло быть только либо ошибкой безрассудства, либо дерзновением гениальной смелости мысли. Эйнштейн посмел усомниться в истинности классических устоев и сумел логически развить из своих постулатов стройную систему следствий, изменяющих устои. Рассмотрение этих следствий мы отложим до тех пор, когда сможем объяснить их с позиций модели мира, предложенной Германом Минковским.

## § 8. ПУСТЬ НЕ ВХОДИТ НЕ ЗНАЮЩИЙ ГЕОМЕТРИИ

*Первым, кто понял, что теория относительности является отражени*ем картины мира, принципиально отличной от привычной классической, и указал основные черты нового, более глубокого и близкого к истине представления об устройстве мироздания, стал Герман Минковский. Он родился 22 июня 1864 г. в России в местечке Алексоты близ Ковно (ныне город Каунас) Минской губернии в семье немецких родителей. В 1872 г. семья вернулась в Германию. Юность Германа прошла в Кенигсберге, где он учился в гимназии и университете, а затем в Берлинском университете. С 1885 по 1894 г. преподавал математику в Боннском университете, в должности приват-доцента с 1887 г. и в должности экстраординарного профессора с 1892 г. В 1894 – 1896 гг. Герман Минковский был профессором университета в Кенигсберге, а в 1896 – 1902 гг. — профессором Цюрихского Высшего технического училища, в котором с 1896 по 1900 гг. получал высшее образование Альберт Эйнштейн. С 1902 г. до конца жизни 12 января 1909 г. Герман Минковский работал в должности профессора в Геттингенском университете, где вместе с Клейном и Гильбертом создал знаменитую Геттингенскую математическую школу. Брат Германа Минковского Оскар Минковский (1858–1931) был известным физиологом, обнаружившим, что заболевание диабетом происходит от недостаточной выработки поджелудочной железой гормона, названного позже инсулином.

С позиций модели мира, предложенной Германом Минковским, становится ясно, что оба постулата и все эффекты специальной теории относительности выглядят парадоксальными, противоречащими здравому смыслу, лишь потому, что их пытаются истолковать в рамках классической картины мира, представляющей мироздание в виде системы материальных точек, движущихся в трёхмерном собственно евклидовом пространстве (см. (2.8), (2.7) в § 4). Согласно же Минковскому, мировое пространство имеет не три, а четыре измерения, а главное — не собственно евклидовы, а иные метрические свойства, названные впоследствии псевдоевклидовыми. С изменением модели мирового пространства неразрывно связано изменение привычных представлений о материальных объектах как о материальных точках. Идеи Минковского оказались настолько неожиданными и смелыми, что современники смогли воспринять их в лучшем случае как остроумное, но чисто формальное и искусственное математическое ухищрение, которое всё-таки нельзя считать моделью реального мира. Так и закрепился в литературе расхожий штамп — «четырёхмерный формализм Минковского».

Например, в книге [38] сказано, что Минковский «чисто формальным приёмом включения в качестве четвёртой координаты величины $x_4 = ict$ дал геометрическую интерпретацию преобразований Лоренца и теории относительности». В книге [39] читаем на стр. 217: «И действительно, четырёхмерный формализм Минковского является адекватным языком релятивистской физики». В знаменитом курсе теоретической физики Ландау и Лифшица в томе 2 «Теория поля» пространство Минковского названо фиктивным: «Часто полезно *из соображений наглядности* (курсив в цитате мой — А.С.) пользоваться *фиктивным* пространством, на осях которого откладываются три пространственных координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются "мировыми точками". Всякой частице соответствует некоторая линия ("мировая линия") в этом *фиктивном* четырёхмерном пространстве» [40, с. 13]. Слово "фикция" (от латинского *fictio* — вымысел) обозначает намеренно созданное, измышленное положение, построение, не соответствующее действительности и обычно используемое с какой-либо определённой целью (ср., например, фиктивный брак). В последующих изданиях книги [40], включая восьмое в 2003 г., вместо слова "фиктивное" употреблён русский эквивалент "воображаемое".

В 1988 г. в издательстве «Наука» вышла книга [41] автора этих строк (повторенная в 1990 г. издательством «Мир» в переводе [42] на испанский язык), посвящённая доказательству того, что мировое пространство действительно обладает линейными и метрическими свойствами пространства Минковского, а векторные динамические характеристики мировых линий отнюдь не фиктивны, если они проявляются в чувственно воспринимаемом пространстве в виде наблюдаемых характеристик тел —

массы, импульса и энергии. Сам Герман Минковский в докладе «Пространство и время», с которым он выступил 21 сентября 1908 г. в Кёльне на 80-ом собрании немецких естествоиспытателей и врачей, сказал: «Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен ещё сохранить самостоятельность» [43, с. 167]. «Некоторый вид соединения» пространства и времени — это и есть то, что Герман Минковский назвал мировым пространством, а мы теперь называем пространством Минковского. Обособление же времени от пространства, свойственное классическому научному мировоззрению, Минковский назвал фикцией, что, пожалуй, в более точном смысле должно обозначать внешнюю видимость, маскирующую реальность. В мировых же линиях Минковский несомненно видел углублённое представление о материальных объектах (взамен классических материальных точек), если сказал: «...по моему мнению, физические законы могли бы найти своё наисовершеннейшее выражение как взаимоотношения между мировыми линиями» [43, с. 168]. Но Герману Минковскому не дано было утвердить в науке своё открытие в его подлинной значимости, так как через три с половиной месяца после выступления с докладом «Пространство и время» он умер от приступа аппендицита.

Недоверчивое отношение к очень странной модели мира Минковского на протяжении двух первых десятилетий достаточно оправдано тем, что и сама специальная теория относительности ещё не завоевала признания научной общественности, как было засвидетельствовано на серьёзном официальном уровне. Нобелевская премия присуждена Альберту Эйнштейну в ноябре 1922 года за «работы по теоретической физике, в частности открытие фотоэлектрического эффекта, не учитывая при этом... работы по теории относительности и теории гравитации, которые будут оценены после их подтверждения в будущем» [44, с.473].

Ситуация с реакцией общественности на теорию относительности и объясняющую её модель Минковского имеет сходство с тем, как было воспринято открытие Николая Коперника. Коперник ясно сознавал, что его идеи встретят жёсткое неприятие церковных кругов и до последних лет жизни воздерживался от публикации самóй теории и доказательств её справедливости, намереваясь ограничиться опубликованием только таблиц для предвычисления положений планет на небе. Но его смогли переубедить преданный друг епископ Тидеман Гизе и молодой математик Иоахим Георг Ретик (1514 – 1576), который изучил астрономию и математику в Цюрихе и в 1537 – 1542 гг. был (одновременно с Лютером) профессором в Виттенберге. Согласившись на издание своего главного сочинения «О вращениях небесных сфер», Коперник поручил Ретику надзор за печатанием книги в Нюрнберге. Когда же Ретику пришлось в конце 1542 г. переехать в Лейпциг, он передал свои полномочия Андрею Оссиандеру, лютеранскому богослову и математику, с которым Коперник ещё ранее вёл переписку. Оссиандер советовал для успокоения аристотеликов и богословов не настаивать на истинности гелиоцентрической системы мира, а рекомендовать её как всего лишь удобный математический приём (математический формализм?), дающий хорошие результаты при вычислении движений планет. Хотя Коперник и Ретик, не были согласны с этим советом, в них не возникло недоверие к Оссиандеру. Однако, когда книга вышла (почти одновременно со смертью Коперника, наступившей 24 мая 1543 г.), то в ней оказалось анонимное предисловие, позволявшее думать, что оно принадлежит автору, но излагавшее позиции Оссиандера. Вероятно, то впечатление, будто Коперник сомневался в истинности своей теории, позволило церковным верхам сначала благосклонно отнестись к его книге. «На основе расчётов Коперника была проведена календарная реформа» [29, с. 190] (при папе Римском Григории XIII введён в 1582 году вместо юлианского новый календарь, называемый теперь григорианским). Однако позже, когда значение идей Коперника для астрономии и мировоззрения стало проясняться, его книга была признана еретической и внесена «декретом святой конгрегации» от 5 марта 1616 г. в список запрещённых для чтения книг впредь до её исправления в духе анонимного предисловия. 22 июня 1633 г., спустя 90 лет после издания книги Коперника, инквизиция вынесла Галилео Галилею обвинительный приговор за распространение учения о неподвижности Солнца и движении Земли и потребовала отречения от этого пагубного для веры воззрения.

Николай Коперник поставил эпиграфом к книге «О вращениях небесных сфер» слова, которые девятнадцатью веками ранее великий древнегреческий философ Платон (427–347 гг. до н. э.) начертал над входом в расположенную в его имении школу (Академию): «Μηδετς άγεωμέτρητος εισιτω», что переводится как «Негеометр да не войдёт» или «Пусть не входит не знающий геометрии». Открытие Коперника противоречило наглядной убедительности чувственных восприятий, представлениям великих мыслителей, пользовавшихся общим признанием, и догматам религии. Склонить людей к признанию истинности модели мира, бросающей вызов привычному здравомыслию и авторитетам, мог только более непререкаемый авторитет геометрических закономерностей. Но оценить неотразимую убедительность такой аргументации мог лишь тот, кто даст себе труд проследить за всеми геометрическими выкладками, вместо того чтобы отвергать вслепую или принимать на веру их результаты. Поразительным образом идущее из глубины веков и тысячелетий пророчество Платона и Коперника не утрачивает своей истинности и в наши дни. Доступ к пониманию и признанию модели мира Минковского, а вместе с ней и законов специальной теории относительности открывается опять же через геометрию. Но только теперь требуется более глубокая и общая геометрическая теория, чем та, которой было достаточно Копернику, Галилею, Кеплеру, Декарту, Ньютону и всем другим творцам и последователям классического научного мировоззрения.

Первый и главный шаг к пониманию особенностей пространства Минковского был сделан в § 5 настоящей книги рассмотрением алгебраических оснований геометрии наблюдаемого пространства. Там была выяснена фундаментальная роль линейных и метрических свойств пространства и способов их выражения. Что касается линейных свойств, то пространство Минковского отличается от наблюдаемого пространства только размерностью: 4 вместо 3. Но в пространстве Минковского имеются также трёхмерные и двумерные подпространства, а свойства линейных операций над векторами, перечисленные в § 5 между формулами (2.18) и (2.19), в наблюдаемом пространстве и в пространстве Минковского полностью совпадают. Главное отличие пространства Минковского от наблюдаемого пространства заключается в **метрических** свойствах и обусловлено только тем, что из перечня (2.53) обязательных аксиоматических требований к операции скалярного умножения векторов исключена четвёртая аксиома, т. е. оставлены только три требования (2.42), (2.43), (2.44) в качестве обязательных, а для условий (2.49) допускаются нарушения (условия (2.49) могут выполняться для некоторой части векторов в пространстве Минковского и не выполняться для других векторов). Скалярное произведение векторов, определённое с помощью такой усечённой системы аксиом, называется **псевдоевклидовым** в отличие от собственно евклидова скалярного произведения векторов, удовлетворяющего полной системе четырёх аксиом (2.53). Поэтому говорят, что пространство Минковского обладает **псевдоевклидовыми метрическими свойствами,** т.е. является псевдоевклидовым пространством в отличие от собственно евклидова наблюдаемого пространства.

Тем, что изменение в аксиоматике с виду невелико, обусловлено формально-алгебраическое сходство обоих типов евклидова пространства. Это формальное сходство простирается ещё дальше: в псевдоевклидовом пространстве сохраняется определение длин векторов формулой (2.40)

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}}\,, \tag{3.1}$$

и углов — формулой (2.41)

$$\cos(\boldsymbol{a},\wedge \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{ab}}{\sqrt{\boldsymbol{aa}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{bb}}}\,, \tag{3.2}$$

как и в пространстве собственно евклидовом. Однако геометрическое обличье метрических свойств псевдоевклидова пространства оказывается настолько отличным от привычных для нас собственно евклидовых метрических свойств, что представляется даже не то что фантастическим, а прямо-таки абсурдным. В этом, по-видимому и коренится причина затянувшегося на столетие отношения к предложенной Минковским модели мира как к математическому формализму, который нельзя всерьёз отождествлять с материальной реальностью.

Подобная трактовка математических моделей не является чем-то необычным для физики. Например, Макс Борн отмечает, что формальное сходство закона взаимодействия электрических зарядов (закона Кулона) с ньютоновским законом всемирного тяготения привело к перенесению в электростатику принципа дальнодействия. Когда же была развита теория потенциала, то она стала теорией псевдоблизкодействия. «При этом подходе к электростатике... мы имеем дело не с истинной теорией близкодействия... ибо дифференциальные уравнения описывают только изменение поля от точки к точке и не содержат членов, описывающих изменения во времени. Поэтому они не позволяют проследить передачу электрической силы с конечной скоростью, но, несмотря на свою дифференциальную форму, представляют мгновенное действие на расстоянии... Но поскольку метод потенциалов в те времена рассматривался как **искусственный математический приём** (выделение моё — А.С.), противопоставление классической теории дальнодействия фарадеевской теории близкодействия оставалось непреодолённым» [17, с. 188, 204].

## § 9. ПОВЕСТЬ О ЧИСЛАХ, КОТОРЫЕ “В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ НЕ СУЩЕСТВУЮТ”

> «Развитие современной математики затрудняется не тем, что трудно освоиться с новыми идеями, а тем, что трудно отказаться от старых... Новую теорию часто трудно понять потому, что человеку свойственно сохранять образ мысли, связанный со старой теорией».
>
> У.У. Сойер [45].

Пожалуй, главным препятствием к признанию модели Минковского в качестве выражения закономерностей, реализованных в материальном мире, было участие мнимых чисел в этой модели. Основанием для включения требований (2.49) в систему аксиом (2.53) в конце § 5 послужило то, что только они гарантируют вещественность значений длин любых векторов при определении длин формулой (2.40) и обращение в нуль длины только у нулевого вектора (определённого равенством $3^{\circ}$ в перечне свойств линейных операций между формулами (2.18) и (2.19)). Поэтому согласившись не считать обязательными требования (2.49) в псевдоевклидовом пространстве, мы тем самым допускаем существование в нём векторов, длина которых выражается мнимым числом, и, что ещё поразительней, снимаем запрет на существование векторов, которые не будучи нулевыми, могли бы иметь длину, равную нулю. Уместно ли говорить о реальности такого пространства, если сами мнимые числа изначально были введены в математику как чуждые реальности объекты ? Со времён Рене Декарта мнимыми числами называются корни квадратные из отрицательных вещественных чисел. В противовес мнимым, т.е. вымышленным, воображаемым, нереальным, привычные числа 1, 2, 3, ... , $\pm 3/7$, ... , $\sqrt{2}$, ... , $\pi =$ $= 3.14159265...$ и т.п. называют действительными или вещественными (реальными). Если $y \neq 0$ — вещественное число, отличное от нуля, то его квадрат может быть только положительным числом $y^2 > 0$, а символ $(-y^2)$ будет обозначать любое отрицательное вещественное число. Символу $\sqrt{-y^2}$, обозначающему формально корень квадратный из отрицательного вещественного числа, не может соответствовать никакое вещественное число. Что же заставило математиков вовлекать в свой арсенал квадратные корни из отрицательных чисел, лишённые на первый взгляд какого-либо смысла? Причин для этого немало, а наиболее понятная связана с проблемой существования корней некоторых квадратных уравнений.

Корни приведённого квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (3.3)$$

выражаются формулой

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ . \qquad (3.4)$$

При условии

$$(p/2)^2 - q < 0 \qquad (3.5)$$

выражение (3.4) не может равняться никакому вещественному числу, и это подтверждается тем, что график параболы

$$y = x^2 + px + q \qquad (3.6)$$

не будет иметь общих точек с осью $OX$ в случае (3.5). Такова, например, парабола

$$y = x^2 - 6x + 13\ . \qquad (3.7)$$

По формуле (3.4) для корней параболы (3.7) получаются выражения

$$x_1 = 3 + \sqrt{9-13} = 3 + \sqrt{-4}, \qquad x_2 = 3 - \sqrt{-4}, \qquad (3.8)$$

вызывающие двойное недоумение. Во-первых, непонятно содержание символа $\sqrt{-4}$. Во-вторых, не меньшее (если не большее) недоумение вызывает проблема сложения этого непонятного символа (не представляющего никакого вещественного числа) с числом вещественным. Для математики обычным делом является обобщение операций, в частности операции сложения. На вполне логически законной основе рассматривается сложение не только вещественных чисел, но и направленных отрезков (геометрических векторов), функций, матриц, операторов, но в каждом из таких случаев складываемые объекты и их сумма имеют одинаковую природу. В конструкциях же вида (3.8) это логическое требование представляется вызывающе нарушенным, коль скоро речь идёт о сложении объектов различной природы и получении объекта, отличного по смыслу своему от обоих слагаемых. И всё-таки, каждое из выражений (3.8) обращает в ноль ординату $y$ при подстановке в (3.7) :

$$(3+\sqrt{-4})^2 - 6(3+\sqrt{-4}) + 13 =$$

$$= 9 + 6\sqrt{-4} + (\sqrt{-4})^2 - 18 - 6\sqrt{-4} + 13 = 4 + (\sqrt{-4})^2 = 4 - 4 = 0.$$

Таким образом, странные выражения (3.8) удовлетворяют формальным признакам корня квадратного трёхчлена (3.7), хотя и не принадлежат множеству **R** вещественных чисел. Значит, придётся либо признать корни (3.8) запрещённым, нереальным, воображаемым продуктом математических действий, либо расширить множество **R** вещественных чисел так, чтобы новое множество включало в себя и объекты типа (3.8). Решение проблемы было найдено не сразу. Сначала была введена универсальная форма записи квадратных корней из отрицательных чисел. Например, объект $\sqrt{-4}$ можно представить в виде $\sqrt{(-1)\cdot 4} = 2\sqrt{-1}$ и свести задачу извлечения квадратного корня из любого отрицательного числа к извлечению корня из отрицательной единицы. Леонард Эйлер ввёл обозначение

$$\sqrt{-1} = i, \qquad i^2 = -1 \tag{3.9}$$

($i$ — первая буква французского слова *imaginaire* — воображаемый) и назвал объект (3.9) мнимой единицей. Так как квадрат любого отличного от нуля вещественного числа $y$ положителен, то число $-y^2$ отрицательно, и потому выражение корня квадратного из $-y^2$ в обозначении Эйлера принимает вид

$$\sqrt{-y^2} = \sqrt{(-1)y^2} = y\sqrt{-1} = iy. \tag{3.10}$$

Укоренился обычай называть объекты вида $iy$ **мнимыми** числами, если $y$ — вещественное число. В этих обозначениях корни (3.8) квадратного уравнения (3.7) записываются так:

$$x_1 = 3 + \sqrt{9-13} = 3 + 2i, \qquad x_2 = 3 - 2i.$$

Всякое выражение

$$z = x + iy, \tag{3.11}$$

имеющее вид суммы (разности) вещественного и мнимого чисел (где числа $x$ и $y$ вещественные), называется **комплексным** числом.

Репутация нереальности мнимых чисел распространялась на числа комплексные, понимаемые как сумма действительного числа с мнимым. Каждый человек, знакомящийся с комплексными числами без надлежащего углубления в эту проблему, вынужден испытывать чувство недоумения перед тем, что операция, привычно считающаяся бессмысленной, вдруг вводится в математику как полноправная. Те, кому в дальнейшем не приходится иметь дело с математикой, забывают об этом казусе, а другие постепенно привыкают формально оперировать комплексными числами и видеть оправдание странного формализма в получаемых с его помощью полезных результатах. Но ощущение невыясненности конфликта не могло не вызывать беспокойства у людей, склонных к углублённому мышлению, хотя лишь немногие из них оставили литературные свидетельства, нашедшие путь к широкой публике.

К проблеме мнимых чисел неоднократно обращался Фридрих Энгельс. В «Анти-Дюринге» он писал: «Противоречием является также и то, что отрицательная величина должна быть квадратом какой-либо величины... Поэтому квадратный корень из минус единицы есть не просто противоречие, но даже прямо абсурдное противоречие, действительная бессмыслица. И всё же $\sqrt{-1}$ является во многих случаях необходимым результатом правильных математических операций; более того, чтó было бы с математикой, как низшей, так и высшей, если бы ей запрещено было оперировать с $\sqrt{-1}$ ?» [46, с. 125]. Мнимые величины Энгельс считал продуктом «свободного творчества и воображения самого разума» [46, с. 37] и вполне определённо отказывал им в объективном существовании вне нашего сознания. В конце статьи «Естествознание в мире духов» есть такое высказывание: «Однако если только мы привыкнем приписывать корню квадратному из минус единицы или четвёртому измерению какую-либо реальность вне нашей головы, то уже не имеет особенно большого значения, сделаем ли мы ещё один шаг дальше, признав также и спиритический мир медиумов» [27, с. 382]. Речь не о том, насколько авторитетны высказывания Энгельса по вопросам математики, в которой он не был специалистом. Но Энгельс был одним из наиболее образованных людей своего времени. В предисловии ко второму изданию «Анти-Дюринга» он признавал, что естественными науками мог заниматься только нерегулярно, и «когда приобрёл необходимый для этого досуг, то... подверг себя в области математики и естествознания процессу полного "линяния"... сознание своей неуверенности... сделало меня осторожным; никому не удастся найти у меня действительных прегрешений против известных в то время фактов, а также и неправильностей в изложении принятых в то время теорий» [46, с. 11]. Именно свидетельство Энгельса о принятых в его время научных взглядах и представляет интерес.

Полувеком позже другой известный человек, писатель Андрей Платонов, автор «Чевенгура», «Котлована», «Ювенильного моря», очерков и рассказов, владеющий "опережающим вúдением" мастер жанра "утопии-предупреждения" опубликовал в газете «Воронежская коммуна» (№ 12 от 18 января 1921 года) статью «Слышные шаги (революция и математика)» об открытии Германа Минковского. Текст этой газетной публикации воспроизведён в томе ранних сочинений Платонова, вышедшем под названием «Государственный житель» в издательстве «Советский писатель» (Москва, 1988 г.) и в издательстве Мастацкая литература (Минск, 1990 г.). На эти издания любезно обратил моё внимание художник Василий Леонидович Устюжанин, посещавший ранее мой семинар по модели мира Минковского. Приведём здесь выдержки из статьи Платонова.

«Социальная революция — ворота в царство сознания, в мир мысли и торжествующей науки... Это не будет теперешней наукой, тлеющей в университетах, лабораториях и библиотеках. Это будет бушующее пламя познания, охватившее все города, все улицы, все существа нашей планеты. Познание станет таким же нормальным и постоянным явлением, как теперь дыхание или любовь... Страсть к познанию всё больше, всё мучительней разгорается в человечестве. В ожидании царства сознания трудно и все смотрят далеко вперёд... Человек есть тот, кем он хочет быть, а не тот, кто живёт у всех на глазах. Тихими шагами идёт к нам будущее, а мы к нему бежим навстречу и радуемся заранее. И наша радость не обманется. Мы уже слышим приближение того, чего никогда не было...

Был математик Минковский, который теперь умер. Он нашёл зависимость времени и пространства. Такую тесную связь, почти тождество, что время и пространство есть как бы две взаимно одна другую производящие величины. Он раз написал такую формулу: $\sqrt{-1}$ секунд = 300 тысячам километров.[1)] Т.е. величина времени, равная корню квадратному из отрицательной величины (–1 секунд) равняется скорости 300 000 километров — скорости света. Значит некоторая величина времени равна некоторой величине пространства. Они тождественны, они — одно... Значит формула Минковского определяет зависимость двух основных понятий человеческого сознания — времени и пространства... Время, равное корню квадратному из –1 секунд, беспрерывно производит, вмещает в себя линейное пространство, соответственное, тождественное, одно без другого невозможно и бессмысленно. Они уравновешиваются взаимно и только потому существуют.

Квадратный корень из –1 есть величина мнимая, т.е. не существующая, не поддающаяся познанию. Раньше она приводила в священный ужас математиков. О ней, вероятно, уже знал Пифагор, когда смешал математику с религией. Но при вычислениях мнимая величина предполагается существующей, реальной, и результаты получаются точные. Больше того, мнимые величины открыли математике новые просторы. Есть влекущая, обещающая много тайна в том, что пространство по формуле Минковского, равняется **мнимой** величине. Тут есть указание, закрытая дверь на большую дорогу. Несовершенство нашего сознания в том, что я, например, не мог понять сразу эту формулу, а сначала почувствовал её; её истина

---

[1)] По-видимому, в типографии газеты не нашлось литеры шрифта с математическим символом корня и его заменили сходной по начертанию латинской буквой V, вследствие чего равенство Минковского приобрело неузнаваемый вид и бессмысленное содержание V–1 = 300 тыс. км. В таком виде оно и воспроизведено в обоих вышеназванных изданиях 1988 и 1990 годов вопреки тому, что следующая фраза статьи правильно выражает формулу словами. — А.С.

не открылась для меня, а вспыхнула, После уже я перевёл её в сознание и закрепил там. Поэтому формулу Минковского трудно объяснить. Её надо взять сразу, мгновенно схватить её крайнюю сущность, и тогда поймёшь. Тут уже чувство предшествует мысли».

Вот та фраза и формула Минковского, на которую ссылается Платонов: «Сообразно с этим можно сущность этого постулата математически весьма выпуклым образом облечь в следующую мистическую формулу

$$3 \cdot 10^5 \text{ км} = \sqrt{-1} \text{ сек.»} \qquad (3.12)$$

[43, с. 178]. Уж если сам Герман Минковский, признанный специалист по геометрической теории чисел, назвал формулу (3.12) мистической, то значит и он видел в ней нечто удивительное и не вполне понятное, что скорей всего было связано с участием мнимой единицы в выражении закономерностей природы.

Конечно, наука не может довольствоваться, подобно писателю Платонову, только вспышкой чувства, предшествующего мысли. Не отрицая ценности подобных интуитивных вспышек, математик и физик обязаны дойти до рационального объяснения удивительных теоретически и экспериментально найденных истин. По крайней мере, проблема "не существующих, не поддающихся познанию" мнимых чисел решена сейчас в алгебре с достаточной ясностью. В том же 1878 году, когда вышло первое издание «Анти-Дюринга» и Энгельс написал (но не опубликовал) статью «Естествознание в мире духов» для «Диалектики природы» [27, с. 382], математик Г.Ф. Фробениус (1849 – 1917) доказал замечательную теорему. Согласно теореме Фробениуса множество **C** комплексных чисел представляет **единственно допустимую** возможность расширения множества **R** вещественных чисел **с сохранением всех алгебраических свойств** последних. Перечислим эти свойства:

1) сложение и умножение любых вещественных чисел коммутативно (перестановочно): $a+b=b+a$, $ab=ba$;

2) сложение и умножение любых вещественных чисел ассоциативно (сочетательно): $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$;

3) операция умножения дистрибутивна (распределительна) относительно операции сложения ($(a+b)c=ac+bc$);

4) существует нулевой элемент (число 0), сумма которого с любым элементом $a$ равна $a$: $a+0=a$;

5) существует единичный элемент (число 1), произведение которого на любое число $a$ равно $a$: $1 \cdot a = a$;

6) обе указанные операции (сложение и умножение) обладают обратными операциями (вычитанием и делением, кроме деления на ноль).

Этими же свойствами обладают и операции над комплексными числами.

В высшей алгебре глубоко осмыслена в теории полей и многочленов логическая необходимость комплексных чисел и правомерность представления их в так называемой алгебраической форме (3.11). Комплексные числа являются вершиной процесса расширения понятия числа, происходившего на протяжении истории развития науки. Если человека, не изучавшего специально теорию чисел, спросить, что такое число, то первый ответ, который придёт ему в голову, будет наверно таким: число — это количество предметов. Этот ответ правилен лишь в очень узком смысле, поскольку он охватывает только множество **N** так называемых натуральных чисел (целых положительных). Легко видеть, что множество **N** удовлетворяет не всем перечисленным выше требованиям. В нём нет нулевого элемента (хотя иногда ноль всё-таки включают в множество натуральных чисел). В множестве **N** не всегда выполнимы операции вычитания и деления. Например, уравнения $5+x=2$ и $5y=2$ не имеют корней $x=2-5$ и $y=2/5$ в множестве натуральных чисел. Но по отношению к операциям сложения и умножения множество **N** **замкнуто**, так как сумма и произведение любых натуральных чисел являются натуральными числами (не выходят из множества **N** ).

Уже в древности люди стали пользоваться дробными числами: полмешка зерна, три четверти кувшина вина и т. п. Математикам осталось лишь закрепить эту практическую потребность, согласившись считать числом не только количество предметов, но и отношение количеств. Расширенное таким образом множество стало замкнутым не только относительно сложения и умножения, но и относительно операции деления (кроме деления на ноль).

Гораздо медленней и трудней входило в научный обиход понятие отрицательного числа. На этот счёт в учебнике [47] сказано: «В Европе математики XVI века хотя и пользовались иногда отрицательными числами, всё же называли их "ложными" и "неясными", "меньше чем ничто"». По-видимому, в последнем термине и заключается главная причина неприятия отрицательных чисел: ведь если ноль служит математическим символом отсутствия какого-либо количества, то как понять количество, которое меньше чем ничто? Лишь в XVII веке, после того как Декарт ввёл в употребление отображение чисел на точки прямой (числовой оси), отрицательные числа в этом геометризованном понимании перестали казаться чем-то нереальным и обрели полное равноправие с положительными числами, обозначая точки, расположенные на прямой с другой стороны от начала отсчёта (нуля).

Множество, включающее в себя все целые и дробные, положительные и отрицательные числа, стало замкнутым относительно операций сложения и вычитания, умножения и деления (кроме деления на ноль) и оказалось удовлетворяющим всей совокупности требований, перечисленных выше (в абзаце после формулы (3.12) Минковского). Эта совокупность требований играет очень важную роль в математике: удовлетворяющее ей множество элементов любой природы называется **полем**. Множество всех целых и дробных, положительных и отрицательных чисел называется **по-**

**лем рациональных чисел** и обозначается буквой **Q**. Рациональное число определяется как отношение целых чисел $m$ и $n$ (положительных или отрицательных) при условии, что в дроби $m/n$ знаменатель $n$ отличен от нуля. Рациональными эти числа названы в противовес числам иррациональным, не принадлежащим полю **Q**.

Наиболее популярным примером иррационального числа, привлекшим к себе внимание уже древних математиков в связи с теоремой Пифагора (ок. 570 – ок. 500 гг. до н. э.), является корень квадратный из двойки. В квадрате со стороной, равной единице, длина диагонали должна равняться $\sqrt{2}$. Однако равенство

$$\sqrt{2} = m/n \qquad m^2/n^2 \tag{3.13}$$

не может быть выполнено ни при каких целых значениях $m$ и $n$. Мы вправе считать, что числа $m$ и $n$ не имеют общих множителей (при наличии таковых можно на них сократить дробь). Кроме того, $|n| \neq 1$, т. е. $\sqrt{2}$ не является целым числом, так как из неравенства $1 < 2 < 4$ следует $1 < \sqrt{2} < 2$. Возведя равенство (3.13) в квадрат, мы получили бы $2 = m^2/n^2$. Но числа $m^2$ и $n^2$ не имеют общих множителей, поскольку их не имеют числа $m$ и $n$, причём $n^2 > 1$. Значит $m^2/n^2$ — несократимая дробь, которая не может равняться целому числу 2. Этим отвергается возможность выполнения равенства (3.13).

Так как объект $\sqrt{2}$ и бесконечное множество других объектов $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, . . . , которые не могут быть представлены в виде отношения целых чисел, не укладывались в принятое представление о числе, то их долго не могли признать полноценными числами. Ведь если объект, обозначенный символом $\sqrt{2}$, нельзя представить в виде отношения целых чисел, то как же можно выразить точным образом обозначаемое им количество? Переход к записи в виде десятичной дроби не решает проблемы, поскольку такая дробь должна содержать бесконечно много знаков, не обладая периодичностью, т.е. никогда не может быть выписана с окончательной определённостью. В связи с этой невыразимостью возникло даже представление о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Однако, какая же здесь несоизмеримость, если квадрат длины диагонали выражается вполне определённым целым числом, равным сумме квадратов длин катетов прямоугольного треугольника? В конце концов, признавая корень квадратный из двойки и множество других столь же невыразимых объектов числами, нельзя было не отметить чрезвычайно странный и непонятный, непостижимый для человеческого разума (*ratio* — разум по латыни) характер таких чисел. Поэтому их стали называть **иррациональными** (не поддающимися разумному истолкованию) числами. Иррациональных чисел оказалось бесконечно много, как и чисел рациональных. И так же, как каждому рациональному числу может быть поставлена в соответствие взаимно однозначно точка на числовой оси, так и каждому иррациональному числу соответствует на этой оси своя вполне определённая точка. Если считать настоящими и полноценными только рациональные числа, то их отображения на числовую ось не заполнят её непрерывно, сплошь, так как на оси останется бесконечно много "дырок" — точек, служащих образами иррациональных чисел. Но объединение множества всех рациональных чисел со всеми иррациональными числами представляет множество **R** вещественных чисел, являющееся полем, а уж вещественным числам соответствуют на числовой прямой точки, заполняющие эту прямую сплошь, непрерывно, без каких-либо "дырок".

В качестве предельно широкого обобщения множества вещественных чисел комплексные числа обладают наибольшим совершенством. Выразительные возможности множества **C**, включая в себя все возможности множества **R**, значительно превосходят последние. Многие задачи, трудно решаемые и даже неразрешимые при пользовании только вещественными числами, получают решение, и часто довольно простое при использовании чисел комплексных. Крупный физик-теоретик XX века Ю.П. Вигнер в своей знаменитой лекции «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» сказал: «Неискушённому уму комплексные числа не покажутся естественными и простыми, а результаты физических наблюдений сами по себе не могут содержать комплексные числа... Ничто в нашем повседневном опыте не вынуждает нас вводить такие числа. С другой стороны, если у математика попросить объяснить его интерес к комплексным числам, то он не без негодования укажет вам на прекрасные теоремы, касающиеся алгебраических уравнений, степенных рядов и вообще аналитических функций, доказательство которых стало возможным только благодаря введению комплексных чисел. Математиков никогда не перестанет интересовать это прекрасное достижение их гения» [48, с. 537]. Вигнер имел причину затронуть здесь вопрос о естественности комплексных чисел. Хотя они заслуживают по своим математическим достоинствам названия совершенных и настоящих, назвать их естественными не позволяли два обстоятельства. Во-первых, название натуральных (естественных в переводе на русский язык) давно закреплено за самым узким множеством **N** целых положительных чисел. Во-вторых, вплоть до начала XX века у учёных не было повода считать комплексные числа естественными как раз потому, что для выражения основных закономерностей классической физики достаточно было пользоваться только вещественными числами и в природе не обнаруживались объекты и соотношения, требующие для своего выражения мнимых и комплексных чисел. Но комплексные числа стали насущно необходимы для выражения закономерностей новых отраслей физики, развитых в XX веке. В математическом аппарате квантовой механики состояние материальной системы определяется волновой функцией, называемой также функцией состояния. Функция состояния принимает комплексные значения, и линейные операторы квантовой механики, действующие на эту функцию, зачастую формируются с участием мнимых чисел. В упомянутой уже лекции Вигнера на этот счёт сказано, что «использование комплексных чисел в квантовой механике не является вычислительным трюком прикладной математики; они входят в самую суть формулировки основных законов квантовой механики» [48, с. 540]. Роль мнимых и комплексных чисел в модели мира Минковского будет подробно рассматриваться ниже. Сейчас уже нет никаких оснований считать комплексные (и в частности, мнимые) числа нереальными и неестественными под тем предлогом, что для них не нашлось места в реальности материального мира природы.

Поскольку в наши дни уже недопустимо мириться с отношением к мнимым и комплексным числам как к чему-то недостаточно понятному и чуждому реальности, а по установившейся традиции преподавания комплексных чисел в средней школе и технических вузах учащиеся не получают достаточно глубоких знаний об этих объектах, то нужно признать более предпочтительным иной подход к комплексным числам и иную форму их представления, использующую геометрическую интерпретацию. Алгебраическая форма записи (3.11) порождает видимость сложения **однокомпонентных** объектов различной природы (вещественного числа с мнимым), хотя на самом деле такого сложения здесь не происходит. Сумма вещественных чисел $3+2$ может быть выражена одним вещественным числом 5, но сумма $3+2i$ в принципе не может быть заменена однокомпонентным объектом, избавляющим от указания двух различных компонент. А так как мнимая компонента $2i$ определяется вещественным числом 2, то возникла мысль об использовании пары **только вещественных** чисел для определения комплексного числа. При этом потребуется придерживаться строго установленной упорядоченности в записи компонент, чтобы избежать двусмысленности истолкования. Принято составляющую алгебраической записи $x+iy$, содержащую множитель $i=\sqrt{-1}$, обозначать вещественным числом на втором (правом) месте в упорядоченной паре, разделяя компоненты пары точкой с запятой:

$$x+iy = (x\,;y)\,. \qquad (3.14)$$

Запись комплексного числа в виде упорядоченной пары вещественных чисел имеет прежде всего то преимущество, что указывает на возможность установления взаимно однозначного соответствия между комплексным числом $(x\,;y)$ и лежащей на плоскости точкой с абсциссой $x$ и ординатой $y$. Это весьма существенно, что для геометрической интерпретации комплексных чисел недостаточно прямой, а требуется плоскость.

Принимая упорядоченную пару $(x\,;y)$ вещественных чисел за основу определения и записи комплексных чисел, мы лишимся логического права выводить операции над упорядоченными парами из привычных действий над алгебраическими выражениями вида $x+iy$ с учётом равенства $i^2=-1$. Однако и несогласия с такими привычными действиями нельзя допустить. Поэтому придётся отнестись к правилам

$$(x+iy)+(u+iv) = (x+u) + i(y+v), \qquad (3.15)$$

$$(x+iy)\cdot(u+iv) = (xu-yv) + i(xv+yu) \qquad (3.16)$$

как наводящим соображениям к угадыванию принимаемых за аксиомы правил сложения и умножения упорядоченных пар, представляющих комплексные числа.

*Определение 3.1.* Комплексными числами называются упорядоченные пары

$$z = (x\,;y) \qquad (3.17)$$

**вещественных** чисел, над которыми операции сложения и умножения выполняются по правилам

$$(x\,;y)+(u\,;v) = (x+u\,;y+v), \qquad (3.18)$$

$$(x\,;y)\cdot(u\,;v) = (xu-yv\,;\ xv+yu). \qquad (3.19)$$

Правило (3.19) умножения упорядоченных пар легко запомнить в такой формулировке: первая составляющая произведения упорядоченных пар равна разности произведений предшествующих элементов $xu$ в парах и их последующих элементов $yv$, а вторая составляющая равна сумме произведений крайних элементов $xv$ и средних элементов $yu$. *Определение 3.1* должно быть дополнено определением равенства комплексных чисел как упорядоченных пар вещественных чисел.

*Определение 3.2.* Комплексные числа $(x\,;y)$ и $(u\,;v)$ равны между собой в том и только том случае, если $x=u$ и $y=v$.

Правила выполнения операций вычитания и деления комплексных чисел выводятся **логически** из аксиоматических определений операций сложения и умножения равенствами (3.18) и (3.19). Но мы не станем приводить здесь эти несложные выводы, а ограничимся лишь результатами: вычитание комплексных чисел выполняется по правилу

$$z_1-z_2 = (x_1;y_1)-(x_2;y_2) = (x_1-x_2\ ;\ y_1-y_2), \qquad (3.20)$$

а деление комплексных чисел выполняется по правилу

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1\,;y_1)}{(x_2\,;y_2)} = \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\ ;\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right). \qquad (3.21)$$

Выделим такие комплексные числа, у которых вторая составляющая равна нулю

$$z_1 = (x_1\,;0), \qquad z_2 = (x_2\,;0). \qquad (3.22)$$

Приступая заново к построению теории комплексных чисел как упорядоченных пар вещественных чисел по *определению 3.1*, мы, строго говоря, не имеем права заранее отождествлять объекты (3.22) с однокомпонентными вещественными числами, а должны прийти к этому выводу логическим путём. Выполним над упорядоченными парами все четыре арифметических действия по правилам (3.18) – (3.21):

$$z_1 + z_2 = (x_1\,;0) + (x_2\,;0) = (x_1+x_2\;;\,0)\,,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1\,;0) - (x_2\,;0) = (x_1-x_2\;;\,0)\,,$$

$$z_1\cdot z_2 = (x_1\,;0)\cdot(x_2\,;0) = (x_1x_2-0\;;\,0+0) = (x_1x_2\;;\,0)\,,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1\,;0)}{(x_2\,;0)} = \left(\frac{x_1\,x_2+0\cdot 0}{x_2^2+0}\;;\;\frac{x_2\cdot 0-x_1\cdot 0}{x_2^2+0}\right) = \left(\frac{x_1}{x_2}\,;0\right).$$

Замечательно, что в результате четырёх операций над комплексными числами вида (3.22) получаются числа такого же вида — с равной нулю второй составляющей, причём первая составляющая в результирующем комплексном числе формируется по привычным правилам соответствующих действий над однокомпонентными вещественными числами. Поэтому если в записи исходных чисел (3.22) и в результатах операций над ними отбросить равную нулю вторую составляющую как "лишнюю деталь"

$$(x\,;0) = x\,, \qquad (3.23)$$

то содержание производимых операций не подвергнется искажению. Таким образом, для вещественных чисел безразлично, представлены ли они в виде привычных однокомпонентных объектов или в виде двухкомпонентных объектов с равной нулю второй составляющей. Равенство (3.23) выражает тот факт, что поле **R** вещественных чисел является подполем поля **C** комплексных чисел.

По аналогии с упорядоченными парами специального вида (3.22) следует рассмотреть упорядоченные пары

$$(0;y_1), \qquad (0;y_2) \qquad (3.24)$$

с равной нулю первой компонентой. Легко видеть, что при сложении и вычитании упорядоченных пар (3.24) получаются комплексные числа такого же типа. Но при перемножении и делении чисел (3.24) происходит изменение их типа, а именно получаются числа с равной нулю второй составляющей, которые могут быть представлены согласно (3.23) в виде однокомпонентных вещественных чисел :

$$(0;y_1)\cdot(0;y_2) = (0-y_1y_2\;;\,0+0) = (-y_1y_2\;;\,0) = -y_1y_2\,, \qquad (3.25)$$

$$\frac{(0;y_1)}{(0;y_2)} = \left(\frac{0\cdot 0+y_1\,y_2}{0+y_2^2}\;;\;\frac{0\cdot y_1-0\cdot y_2}{0+y_2^2}\right) = \left(\frac{y_1}{y_2}\,;0\right) = \frac{y_1}{y_2}. \qquad (3.26)$$

Равенства (3.25) и (3.26) означают, что множество упорядоченных пар вида (3.24) не является подполем поля **C** комплексных чисел, в отличие от пар (3.22), потому что операции умножения и деления объектов (3.24) дают в результате объекты иного вида, а именно вида (3.22).

Частным случаем равенства (3.25) будет умножение числа вида (3.24) на самого себя

$$(0;y)\cdot(0;y) = (0;y)^2 = (-y^2;0) = -y^2\,, \qquad (3.27)$$

и если $y=1$, то получим

$$(0;1)^2 = (0;1)\cdot(0;1) = (-1;0) = -1. \qquad (3.28)$$

Так как $y$ — вещественное число, отличное от нуля, то его квадрат $y^2$ положителен в соответствии с правилом перемножения вещественных чисел, и, следовательно, число $-y^2$ отрицательно. Равенство (3.27) показывает, что корень квадратный из отрицательного вещественного числа не может быть вещественным числом, т.е. комплексным числом типа (3.23), но является комплексным числом типа (3.24) с нулевой первой составляющей. В частности, квадратный корень из отрицательной единицы является комплексным числом $(0;1)$. Сравнивая равенства (3.9), (3.28) и (3.27), можем записать

$$i = \sqrt{-1} = (0;1), \qquad (3.29)$$

$$iy = y\sqrt{-1} = \sqrt{-y^2} = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{-y^2} = (0;y). \qquad (3.30)$$

Итак, упорядоченные пары вида (3.30) с равной нулю первой составляющей — это и есть те объекты, к которым на протяжении нескольких веков относились как к не существующим в реальности, воображаемым, мнимым числам. Но ни в представлении о мнимых числах, ни в таком термине, ни в обозначении $iy$ мнимого числа не будет надобности, если изначально вводить расширение **C** поля **R** вещественных чисел как множество упорядоченных пар вещественных чисел по *определению 3.1*. Конечно, переход к упорядоченной паре тоже сопряжён с серьёзной ломкой привычных представлений о числе, но этот переход не порождает мистических неясностей даже при первом знакомстве с новыми числами. Ведь главное затруднение здесь будет обусловлено привычкой относиться к числу как к количеству и невозможностью увидеть в упорядоченной паре чисел однозначное выражение количества. Это недоумение нетрудно рассеять ссылкой на то, что даже понятие вещественного числа уже потребовало опираться на геометрическую интерпретацию числа как точки на прямой, что существенно для осмысления реальности отрицательных и рациональных чисел. Тогда легче освоиться с мыслью, что следующим шагом в расширении и углублении понятия числа стала интерпретация числа как точки на плоскости, а особенности операций (3.18) и (3.19) сложения и умножения упорядоченных пар обусловлены необходимостью сохранения всех алгебраических свойств множества вещественных чисел. Отмеченная выше (после формулы (3.8)) видимая бессмысленность сложения вещественного числа с мнимым как объектов разной природы исчезает при пользовании *определением 3.1* комплексных чисел и расшифровывающими равенствами (3.23), (3.30):

$$x + iy = (x;0) + (0;y) = (x;y). \qquad (3.31)$$

Ведь действительным смыслом этого равенства является сложение двух объектов, имеющих одну и ту же общую природу — двух упорядоченных пар вещественных чисел по аксиоматическому правилу (3.18).

На вопрос о возможностях последующих расширений путём перехода к упорядоченным тройкам, четвёркам и т. д. вещественных чисел, в алгебре имеется исчерпывающий ответ. Упомянутой выше теоремой Фробениуса обоснована **единственность** расширения поля **R** вещественных чисел до поля **C** комплексных чисел, т. е. невозможность существования каких-либо иных **числовых** полей, включающих в себя в качестве подполя поле **R** вещественных чисел. Сошлёмся на известного алгебраиста А.Г. Куроша: «можно ли при некоторых $n$ так определить умножение векторов в $n$-мерном действительном векторном пространстве, чтобы по отношению к этому умножению и обычному сложению векторов наше пространство оказалось числовой системой, содержащей в себе систему действительных чисел? Можно показать, что этого сделать нельзя, если требовать выполнения всех тех свойств операций, которые имеют место в системах рациональных, действительных и комплексных чисел. Если же **отказаться от коммутативности умножения**, то такое построение возможно в четырёхмерном пространстве; получающаяся система чисел называется *системой кватернионов*. Аналогичное построение возможно и в восьмимерном пространстве — получается так называемая *система чисел Кэли*. Здесь приходится отказываться, впрочем, не только от коммутативности умножения, но и от его ассоциативности, заменяя последнюю одним более слабым требованием» [49, с. 114-115].

Важнейшим свойством поля **C** комплексных чисел, которым не обладает поле **R**, является возможность извлекать корни любой целой степени из любого комплексного числа, не выходя из поля **C**. Поэтому нет ничего удивительного в том, что корнем квадратным из упорядоченной пары $(-1\,;0)$ является упорядоченная пара $(0\,;1)$. После того как логическая непротиворечивость, полноценность и естественность комплексных чисел, представляемых в виде упорядоченных пар вещественных чисел, утверждена в сознании учащегося, можно без затруднений принять соглашение об использовании понятий, сохраняющихся в математическом обиходе по традиции от тех времён, когда некоторые результаты математических операций над вещественными числами казались нереальными, воображаемыми, мнимыми. Если не относиться к объектам и соотношениям, выраженным с помощью мнимых чисел, как к неполноценно реальным объектам и соотношениям, то не будет никакого вреда от употребления традиционной терминологии и символики, связанных с мнимыми числами.

## § 10. КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОСКОСТЬ

Для того чтобы понять смысл участия комплексных чисел в геометрических построениях, необходимо рассмотреть операцию умножения геометрических векторов на комплексные числа. Пусть $\boldsymbol{e}$ — какой-нибудь **ненулевой** геометрический вектор, а в комплексном числе $(x\,;y)$ по крайней мере вторая составляющая отлична от нуля ($y \neq 0$). Произведение вектора $\boldsymbol{e}$ на комплексное число $(x;y)$ представим в виде

$$(x;y)\boldsymbol{e} = \{(x;0)+(0;y)\}\boldsymbol{e} = (x;0)\boldsymbol{e} + (0;y)\boldsymbol{e}. \qquad (3.32)$$

Если бы векторы $(x;0)\boldsymbol{e}$ и $(0;y)\boldsymbol{e}$ были взаимно параллельны, то параллельной им была бы и их сумма (3.32), которую можно было бы представить в виде произведения вектора $\boldsymbol{e}$ на **вещественное** число, а это противоречит исходному условию о том, что комплексное число $(x;y)$ не является вещественным ($y \neq 0$). Так как в силу равенства (3.23) вектор

$$(x;0)\boldsymbol{e} = x\boldsymbol{e} \qquad (3.33)$$

**параллелен** вектору $\boldsymbol{e}$, то значит именно непараллельность вектора

$$(0;y)\boldsymbol{e} \qquad (3.34)$$

вектору $\boldsymbol{e}$ ответственна за непараллельность векторов $\boldsymbol{e}$ и $(x;y)\boldsymbol{e}$. Последнее очевидно и из следующего соображения. Если бы вектор (3.34) был параллелен вектору $\boldsymbol{e}$, то при некотором вещественном значении $\lambda$ выполнялось бы равенство

$$(0;y)\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e} = (\lambda;0)\boldsymbol{e},$$

что явно невозможно ни при каких значениях $\lambda$.

С учётом равенств (3.30) представим вектор (3.34) в виде

$$(0;y)\boldsymbol{e} = (iy)\boldsymbol{e} = y(i\boldsymbol{e}). \qquad (3.34')$$

В силу вещественности числа $y$ вектор $y(i\boldsymbol{e})$ параллелен вектору $(i\boldsymbol{e})$, и потому вектор

$$i\boldsymbol{e} = (0;1)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f} \qquad (3.35)$$

**не параллелен** вектору $\boldsymbol{e}$. Внося (3.35), (3.34') и (3.33) в (3.32), получим

$$(x;y)\boldsymbol{e} = x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f}. \qquad (3.36)$$

Доказанная здесь непараллельность векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ означает, что они линейно независимы (см. *определение 2.3* и предшествующий ему текст после формулы (2.24') в § 5). Теперь мы можем уточнить, что векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ линейно независимы в **вещественном** отношении, но они **линейно зависимы в комплексном отношении**, поскольку вектор $\boldsymbol{f}$ является **комплексной линейной комбинацией** (3.35) вектора $\boldsymbol{e}$. Если вещественным коэффициентам $x$ и $y$ давать независимо друг от друга любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то множество всех представленных правой частью равенства (3.36) линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ заполнит всю плоскость, определённую базисом $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$. Равенство (3.36) говорит о том, что эта же плоскость как носитель всех принадлежащих ей векторов является множеством **комплексных** линейных комбинаций **одного** ненулевого вектора $\boldsymbol{e}$. Таким образом эта плоскость является одновременно **двумерным вещественным** пространством $L_R^2$ и **одномерным комплексным** пространством $V^1$. Геометрический смысл равенства (3.36) иллюстрируется рисунком 3.1.

Элементы обоих указанных пространств являются одними и теми же геометрическими векторами (направленными отрезками), которые не изменяют своей природы в зависимости от того, к какому пространству отне-

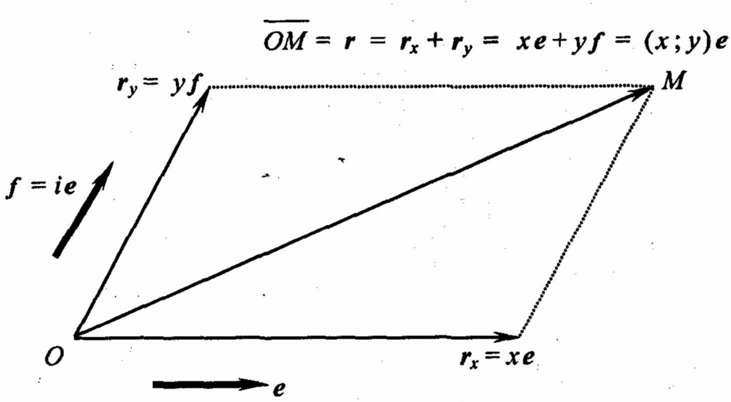


Рис. 3.1

сены. Включённость геометрических векторов в пространство $V^1$ или $L_R^2$ сказывается только в том, какой тип линейной зависимости или независимости между ними имеет место. В пространстве $V^1$ любые векторы, даже непараллельные, являются комплексными линейными комбинациями одного ненулевого вектора $\boldsymbol{e}$ и **линейно зависимы в комплексном отношении** (смысле), а в пространстве $L_R^2$ всякий вектор представим в виде вещественной линейной комбинации $x\boldsymbol{e}+y\boldsymbol{f}$ двух непараллельных векторов и любые непараллельные векторы линейно независимы в вещественном отношении.

Следует подчеркнуть, что в равенстве (3.36) из левой части автоматически вытекает правая часть, т. е. комплексное одномерное линейное пространство является вместе с тем вещественным двумерным линейным пространством. Однако нельзя утверждать, что всякое вещественное двумерное линейное пространство будет вместе с тем комплексным одномерным пространством. Для того чтобы такое утверждение было справедливым, на вещественное двумерное линейное пространство должны быть **наложены отношения комплексной линейной зависимости** между его векторами. Чтобы выполнить такое наложение, достаточно условиться считать второй базисный вектор $\boldsymbol{f}$ вещественного пространства **комплексной** линейной комбинацией (3.35) первого базисного вектора $\boldsymbol{e}$. Лишь после этого можно будет истолковать вещественную линейную комбинацию $x\boldsymbol{e}+y\boldsymbol{f}$ как комплексную линейную комбинацию $(x\,;y)\,\boldsymbol{e}$. Плоскость, на которой определено отношение комплексной линейной зависимости между любыми её векторами, т. е. плоскость, являющуюся **одномерным комплексным** пространством $V^1$, называется **комплексной плоскостью.** Подчеркнём, что возникновение отношения комплексной линейной зависимости между любыми векторами плоскости обусловлено введением операции умножения любого вектора этой плоскости на любое комплексное число. Участие комплексных, и в частности мнимых чисел, в выражении геометрических свойств комплексной плоскости не является чем-то неестественным или противным логике, а органически включено в само определение этого геометрического объекта.

До сих пор ничего не было сказано о взаимном расположении векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, участвующих в равенстве (3.36), и соотношении между их длинами. Так ведь эти характеристики векторов обусловлены **метрическими** свойствами пространства, как было сказано в § 5 (перед формулой (2.39)), а для формирования и выражения метрических свойств требуется определить операцию скалярного умножения векторов. Мы же пока рассматривали только **линейную** операцию умножения векторов на комплексные числа (другая линейная операция — сложение векторов — выполняется на комплексной плоскости так же, как на плоскости, являющейся двумерным вещественным пространством $L_R^2$, т. е. по правилу треугольника), а с помощью только линейных операций можно установить лишь факт параллельности или непараллельности векторов, что и было сделано. Проблема наложения метрических свойств на комплексную плоскость исследована в книге [50], в которой подробно рассмотрены две различные операции умножения векторов комплексной плоскости. Там показано, что результат каждой из этих операций выражается комплексным числом, причём первая компонента этого комплексного числа совпадает со скалярным произведением векторов вещественного двумерного пространства и определяет его метрические свойства. Одна из двух операций скалярного умножения векторов налагает на комплексную плоскость метрические свойства, ничем не отличающиеся от привычных для нас собственно евклидовых свойств вещественного двумерного пространства, а другая операция порождает **псевдоевклидовы** метрические свойства, в выражении которых участвуют мнимые числа, что вполне логично и естественно для комплексной плоскости. Не отвлекаясь здесь на рассмотрение взаимодействия псевдоевклидовых метрических свойств комплексной плоскости с её линейными свойствами, мы воспользуемся правом отождествить одномерное комплексное пространство (комплексную плоскость) с двумерным вещественным пространством и станем рассматривать псевдоевклидовы метрические свойства вещественного двумерного пространства. Заметим однако, что без обращения к комплексной плоскости нельзя с удовлетворительной логичностью обосновать участие мнимых чисел в выражении метрических свойств вещественного пространства, поскольку вещественному пространству как таковому по определению чужды комплексные числа. Плоскость, несущую на себе псевдоевклидовы метрические свойства, называют **псевдоевклидовой плоскостью**, комплексной или вещественной. Ниже речь пойдёт только о вещественной псевдоевклидовой плоскости.

## § 11. СРАВНЕНИЕ ДЛИН И ОТНОШЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ВЕКТОРОВ НА ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Как было сказано в конце § 8 (в абзаце перед формулами (3.1), (3.2)), аксиоматическое определение операции псевдоевклидова скалярного умножения векторов состоит из трёх обязательных требований (2.42), (2.43), (2.44)

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ.\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\boldsymbol{a},\\ &2^\circ.\ (\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}),\\ &3^\circ.\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c},\end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

которые должны выполняться для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и любого вещественного числа $\lambda$. Именно на выполнении этих соотношений основано выведение формулы (2.46), которую мы теперь для разложений векторов по базису $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}+\alpha_2\boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{e}+\beta_2\boldsymbol{f} \tag{3.38}$$

запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = {}&\alpha_1\beta_1\cdot(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}) + \alpha_1\beta_2\cdot(\boldsymbol{e}\boldsymbol{f}) +\\ &+ \alpha_2\beta_1\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{e}) + \alpha_2\beta_2\cdot(\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Чтобы формула (3.39) оставила возможность для некоторых векторов иметь **отрицательное** значение скалярного квадрата, необходимо это нарушение аксиомы (2.49) предусмотреть для одного из базисных векторов. Выбрав значения скалярных произведений

$$\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}=1, \qquad \boldsymbol{e}\boldsymbol{f}=0, \qquad \boldsymbol{f}\boldsymbol{f}=-1,$$

получим по аналогии с условиями ортонормированности (2.47′) условия **псевдоортонормированности**

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{f}\boldsymbol{e} & \boldsymbol{f}\boldsymbol{f}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Внося условия (3.40) псевдоортонормированности базиса $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ в формулу (3.39), получим упрощённый вариант формулы скалярного псевдоевклидова произведения векторов

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2. \tag{3.41}$$

В дальнейшем будет удобно иметь дело с радиус-векторами

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = x\boldsymbol{e}+y\boldsymbol{f} \tag{3.42}$$

произвольно взятых точек $M$. Согласно формуле (3.41) скалярный псевдоевклидов квадрат вектора (3.42) равен

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = x^2-y^2,$$

а длина (модуль) вектора определится формулой (3.1)

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}} = \sqrt{x^2-y^2}. \tag{3.43}$$

Применяя формулу (3.1) к базисным векторам $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, скалярные произведения которых заданы таблицей (матрицей) (3.40), найдём, что длина вектора $\boldsymbol{e}$ равна вещественной единице

$$|\boldsymbol{e}| = \sqrt{\boldsymbol{ee}} = \sqrt{1} = (1\,;0) = 1\,, \tag{3.44}$$

а длина вектора $\boldsymbol{f}$ равна мнимой единице

$$|\boldsymbol{f}| = \sqrt{\boldsymbol{ff}} = \sqrt{-1} = (0\,;1) = i\,. \tag{3.45}$$

Со школьных лет мы привыкаем к тому, что выражаемые с помощью формул геометрические соотношения можно иллюстрировать рисунками. Но такие геометрические иллюстрации выполняются на плоскости, имеющей собственно евклидовы метрические свойства. Плоскостей же с псевдоевклидовыми метрическими свойствами мы не можем изготовить и никогда не видели их по тем причинам, которые будут выяснены в ходе дальнейшего ознакомления с моделью мира Минковского. Тем не менее, отказываться от геометрических иллюстраций не следует, хотя и придётся прибегать к некоторым условностям, отображая псевдоевклидовы метрические соотношения на плоскость с собственно евклидовыми метрическими свойствами.

Главная условность будет заключаться в том, что на собственно евклидовой плоскости нет векторов, длина которых выражалась бы мнимым числом. Значит такие векторы придётся изображать на рисунке в виде векторов вещественной длины. В частности вектор $\boldsymbol{f}$ надо будет изобразить имеющим длину, равную вещественной единице, как и вектор $\boldsymbol{e}$, в ознаменование того факта что в выражениях (3.44), (3.45) длин этих векторов комплексными числами в виде упорядоченных пар фигурирует вещественное число 1.

Обращение в ноль скалярного произведения векторных величин выражает специфическое отношение, которое даже в весьма широком обобщении принято в математике называть отношением ортогональности, хотя бы оно и не имело в некоторых случаях никакого геометрического смысла. Поэтому равенство $\boldsymbol{ef} = 0$ из условий (3.40) может и не означать того, что угол между векторами $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ псевдоевклидовой плоскости выражается числом $\pi/2$, как в плоскости собственно евклидовой. Равенство нулю псевдоевклидова скалярного произведения векторов называют условием **псевдоортогональности** этих векторов. Когда будет выяснен геометрический смысл отношения псевдоортогональности векторов, мы увидим, что ему не противоречит отображение таких векторов на собственно евклидову плоскость рисунка (3.2) как образующих прямой угол $\pi/2$.

Выбрав точку полюса $O$, примем её за начало системы координат и проведём через $O$ координатные оси $OX$ и $OY$ в направлениях базисных векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ соответственно. Так мы получаем отображение на собственно евклидову плоскость рисунка 3.2 координатной системы $OXY$ и базиса $e$, $f$ псевдоевклидовой плоскости. В силу оговоренных выше условностей метрические свойства псевдоевклидовой плоскости будут изображаться на рис. 3.2 с искажениями, которые всё-таки подчинены определённым закономерностям, позволяющим пользоваться условными изображениями как наглядными иллюстрациями подлинных псевдоевклидовых метрических соотношений, выраженных точными математическими формулами. В отличие от неизбежных искажений в изображении **метрических** псевдоевклидовых свойств на собственно евклидовой плоскости рисунка, **линейные** свойства не подвергаются никаким искажениям, потому что они обусловлены только **линейными операциями** над векторами, а линейные операции имеют одно и то же определение и один и тот же геометрический смысл в собственно евклидовом и псевдоевклидовом пространствах. Это означает, что точки, лежащие на одной прямой (принадлежность точек к прямой является линейным свойством пространства) в псевдоевклидовой плоскости, будут лежать на одной прямой и в отображении на собственно евклидову плоскость рисунка. Параллельные прямые псевдоевклидовой плоскости отобразятся в параллельные же прямые на рисунке, а непараллельные прямые сохранят свою непараллельность и в отображении. Наконец, отношение длин параллельных отрезков в псевдоевклидовой плоскости останется неизменным при отображении на собственно евклидову плоскость рисунка.

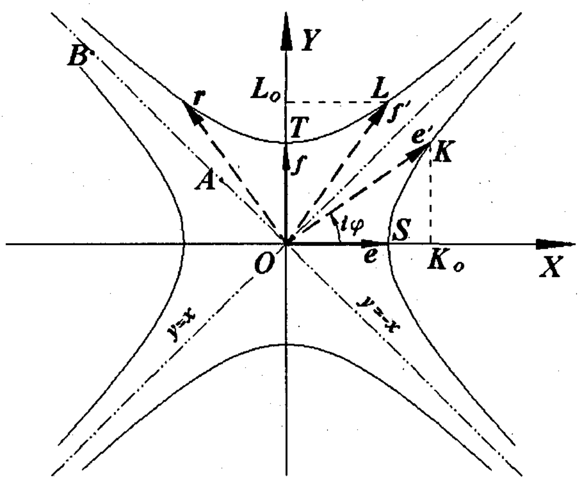


Рис. 3.2

Сравнение длин непараллельных отрезков удобно начать с отрезков одинаковой длины. На собственно евклидовой плоскости все радиус-векторы $r$ одинаковой длины $|r|$, исходящие из точки полюса $O$ (начала координат), указывают своими концами точки окружности с центром $O$. Выясним, какая кривая на псевдоевклидовой плоскости будет аналогом собственно евклидовой окружности. При этом нужно будет учесть, что на псевдоевклидовой плоскости есть два типа длин: выражаемые вещественными числами и выражаемые мнимыми числами. Все радиус-векторы (3.42), длина которых, определённая формулой (3.43), равна вещественной единице, должны удовлетворять условию

$$|\boldsymbol{r}| = 1\,, \iff \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r} = 1\,, \iff x^2 - y^2 = 1\,. \qquad (3.46)$$

На собственно евклидовой плоскости точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.46), принадлежат двум ветвям равнобочной гиперболы с действительной осью $OX$. Асимптотами гиперболы (3.46) служат прямые

$$y = x\,, \qquad y = -x\,, \qquad (3.47)$$

изображённые на рис. 3.2 штрих-пунктирными линиями. Все радиус-векторы, длины которых равны мнимой единице, удовлетворяют условию

$$|\boldsymbol{r}| = i\,, \Leftrightarrow \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r} = i^2 = -1\,, \Leftrightarrow x^2 - y^2 = -1\,, \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 1\,. \qquad (3.48)$$

На собственно евклидовой плоскости уравнению (3.48) соответствуют ветви равнобочной гиперболы, сопряжённой с гиперболой (3.46). Координатная ось $OY$ является действительной осью гиперболы (3.48), имеющей те же асимптоты (3.47). Получился весьма удивительный результат: ветви (3.46) и (3.48) гипербол оказываются собственно евклидовыми образами такой кривой, которая на псевдоевклидовой плоскости должна обладать главным свойством окружности — одинаковой удалённостью точек кривой от одной точки (центра). Поэтому, объединив уравнения (3.46) и (3.48) в одно уравнение

$$(x^2 - y^2)^2 = 1\,, \qquad (3.49)$$

мы назовём его уравнением **псевдоевклидовой** единичной окружности.

При первом знакомстве с этим фактом кажется, что его можно всецело объяснить условностями отображения плоскости с псевдоевклидовой метрикой на плоскость с собственно евклидовой метрикой. Условности, конечно, имеют место, поскольку векторы с мнимым значением длины отображаются в векторы с вещественным значением длины, а псевдоортогональные векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ изображаются на рисунке как образующие прямой угол $\pi/2$. Однако в гиперболе адекватно отображено то свойство псевдоевклидовой окружности (3.49), что на ней есть точки со сколь угодно большими (по абсолютной величине) значениями абсциссы $x$ и ординаты $y$. Для собственно евклидовой окружности, напротив, такое невозможно, ибо абсолютная величина значений координат любой её точки не превосходит радиуса окружности $|\boldsymbol{r}| = 1$. Различия в формах псевдоевклидовой и собственно евклидовой окружностей не может не быть уже потому, что формула (3.43) длины вектора на псевдоевклидовой плоскости разительно отличается от формулы, определяющей длину отрезка на собственно евклидовой плоскости. Псевдоевклидова окружность (3.49) вызывает у нас недоумение только потому, что мы не знали и не допускали иной закономерности сравнения длин непараллельных отрезков, кроме привычных и наглядно воспринимаемых закономерностей собственно евклидова пространства. Теперь же логика алгебраических и геометрических соотношений раскрывает перед нами неведомые прежде возможности, и требуется выяснить, реализуются ли эти возможности в природе.

Особенно интересные свойства псевдоевклидовой окружности связаны с нарушением непрерывности этой кривой в отличие от непрерывности собственно евклидовой окружности. На прямых (3.47), как легко видеть, нет точек, координаты которых удовлетворяли бы уравнениям (3.46) или (3.48), что является достаточным и удовлетворительным объяснением разрыва непрерывности ветвей гиперболы на асимптотах (3.47). Но истолкование уравнений (3.46) и (3.48) как условий постоянства отличных от нуля псевдоевклидовых расстояний точек каждой ветви от центра симметрии $O$ даёт тому же факту неожиданное новое освещение: на прямых (3.47) потому не может быть точек псевдоевклидовой окружности, удалённых от $O$ на расстояние 1 или $i$, что расстояние от $O$ любой точки этих прямых, определённое по формуле (3.43), оказывается равным нулю. Для иллюстрации на рис. 3.2 показаны точки $A$ и $B$ прямой $y = -x$. Отрезок $\overline{OA}$ не является нулевым вектором (так как точки его начала и конца различны) и укладывается на отрезке $\overline{OB}$ три раза, что позволяет записать равенство

$$\overline{OB} = 3 \cdot \overline{OA}\,. \qquad (3.50)$$

Поскольку в (3.50) выражена линейная операция умножения вектора на **вещественное** число (см. *определение 2.2* и равенство (2.18) в § 5), оно представляет линейное свойство (отношение длин параллельных векторов), не зависящее от того, какие метрические свойства, наложены на плоскость. Собственно евклидовы метрические свойства не вступают в противоречие с равенством (3.50), а псевдоевклидовы метрические свойства противоречат ему. Действительно, координаты точек $A$ и $B$ прямой $y = -x$ удовлетворяют условиям

$$y_A = -x_A\,, \qquad y_B = -x_B\,,$$

вследствие чего формула (3.43) даёт для радиус-векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ значения длины, равные нулю:

$$|\overline{OA}| = \sqrt{x_A^2 - y_A^2} = 0\,, \qquad |\overline{OB}| = \sqrt{x_B^2 - y_B^2} = 0\,. \qquad (3.51)$$

Таким же свойством обладают любые точки прямых (3.47): определённое по формуле (3.43) расстояние каждой точки этих прямых от точки полюса (начала координат) $O$ равно нулю, потому что на прямых (3.47) выполняется условие

$$x^2 - y^2 = 0\,. \qquad (3.52)$$

На первый взгляд кажется, что мы столкнулись с противоречием, требующим отвергнуть псевдоевклидовы метрические отношения как бессмысленные. Разве не абсурдно, что два ненулевых вектора, один из которых в три раза длиннее другого (согласно (3.50)), имеют одинаковую длину, да ещё равную нулю? Однако более внимательное рассмотрение покажет, что здесь нет противоречия, потому что различные суждения о длине векторов основаны на различных операциях над векторами. Равенство (3.50) основано на линейной операции умножения ненулевого вектора на отличное от нуля вещественное число и применимо только к параллельным векторам (согласно *определению 2.2* из § 5). Равенства же (3.51) получены в результате применения формулы (3.43), основанной на операции скалярного псевдоевклидова умножения векторов. Правда, парадоксальным представляется то, что указанные две операции приводят к различию результатов сравнения длин векторов, чего не бывает в собственно евклидовом пространстве. Сейчас будет показано, что такое различие не возникает в общем случае и в псевдоевклидовом пространстве, а присуще только специфическому классу векторов этого пространства, названных **изотропными векторами**, причём является для них логически непротиворечивым. Условие (3.52), которому удовлетворяют координаты изотропных векторов и точек изотропных прямых на плоскости с псевдоевклидовыми метрическими свойствами, называется **условием изотропности**.

Если **ненулевые** векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ связаны соотношением $\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$, где $\lambda$ — вещественное число, отличное от нуля, то определённое этим равенством сравнение длин, которые можно назвать **линейными длинами** взаимно параллельных векторов, выражается равенством

$$|\boldsymbol{b}|_{\text{лин}} = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|_{\text{лин}} . \qquad (3.53)$$

Значения длин векторов, определённые на основе операции **псевдоевклидова** скалярного умножения векторов формулами

$$|\boldsymbol{b}|_{\text{метр}} = \sqrt{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}} , \qquad |\boldsymbol{a}|_{\text{метр}} = \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}} , \qquad (3.54)$$

назовём **метрическими длинами** векторов. Сравнение метрических длин (3.54) имеет смысл для векторов любых направлений, в чём и заключается его достоинство. К параллельным векторам применимы оба определения длины: линейное (3.53) и (метрическое (3.54). Внося в первую из формул (3.54) равенство $\boldsymbol{b} = \lambda\, \boldsymbol{a}$ и учитывая вторую из формул (3.54), получим

$$|\boldsymbol{b}|_{\text{метр}} = \sqrt{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}} = \sqrt{(\lambda \boldsymbol{a})(\lambda \boldsymbol{a})} = \sqrt{\lambda^2 (\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})} =$$

$$= |\lambda| \cdot \sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}} = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|_{\text{метр}} . \qquad (3.55)$$

Для неизотропных взаимно параллельных векторов (у которых $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} \neq 0$ и $\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} \neq 0$) соотношение (3.55) метрических длин совпадает с соотношением (3.53) длин линейных. И так как в собственно евклидовом пространстве все векторы не изотропные, эффект несовпадения линейных и метрических длин не мог выявиться. Он выявился в псевдоевклидовом пространстве, и именно для изотропных векторов. Впрочем, и для изотропных взаимно параллельных векторов ( у которых $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = 0$ и $\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = 0$ ) равенство (3.55) остаётся справедливым:

$$|\boldsymbol{b}|_{\text{метр}} = \sqrt{\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}} = 0 = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|_{\text{метр}} = |\lambda|\cdot\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}} = |\lambda|\cdot 0 = 0, \quad (3.55')$$

хотя у них метрическая длина не совпадает с линейной.

При всей логической непротиворечивости явления изотропности может остаться сомнение в его естественности, т. е. в его реализованности в природе. Однако рассмотрение кинематических и динамических эффектов специальной теории относительности с позиций модели мира Минковского покажет, что псевдоевклидовы векторы импульса электромагнитных сигналов (фотонов) являются изотропными, и хотя в линейном отношении модули этих векторов могут различаться в широчайшем диапазоне, как обнаруживается с помощью спектроскопии, в метрическом отношении они имеют одинаковый модуль, равный нулю, что отражено в общеизвестном факте равенства нулю массы покоя любых фотонов (см. § 22).

Всякий вектор, параллельный изотропному вектору, будет тоже изотропным, потому что для его координат выполняется условие (3.52) изотропности. Через **каждую** точку псевдоевклидовой плоскости проходят две непараллельные изотропные прямые, но на рисунке мы будем изображать только изотропные прямые (3.47), проходящие через точку $O$ начала координат. Эти изотропные прямые $y = x$ и $y = -x$ разбивают псевдоевклидову плоскость на четыре сектора: правый, левый, верхний и нижний. Каждый сектор однозначно характеризуется парой неравенств:

$$x^2 - y^2 > 0, \qquad \begin{cases} x > 0 \ - \ \textit{правый сектор}, \\ x < 0 \ - \ \textit{левый сектор}, \end{cases} \qquad (3.56)$$

$$x^2 - y^2 < 0, \qquad \begin{cases} y > 0 \ - \ \textit{верхний сектор}, \\ y < 0 \ - \ \textit{нижний сектор}. \end{cases} \qquad (3.56')$$

Всякий **неизотропный** вектор псевдоевклидовой плоскости принадлежит одному и только одному из этих четырёх секторов. Разумеется, принадлежность вектора к тому или другому сектору определяется не точкой приложения вектора, а тем, какой из четырёх пар неравенств, указанных в (3.56) – (3.56′), удовлетворяют координаты данного неизотропного вектора. Чтобы определить принадлежность вектора к сектору визуально по рисунку, нужно или совместить путём параллельного переноса вектора его точку приложения с точкой $O$ начала координат, или, не изменяя точки приложения вектора, провести через неё изотропные прямые (параллельные прямым $y = x$ и $y = -x$). Применяя неравенства (3.56), (3.56′) к формуле (3.43), видим, что метрические длины (модули) всех векторов, принадлежащих **правому и левому** секторам (в которых $x^2 - y^2 > 0$), выражаются **вещественными** числами, а длины (модули) всех векторов, принадлежащих **верхнему и нижнему** секторам (в которых $x^2 - y^2 < 0$), выражаются **мнимыми** числами. Внутри каждого из четырёх секторов (3.56), (3.56′) соответствующая ветвь псевдоевклидовой окружности (3.49) является **непрерывной** кривой. Этим обстоятельством мы в первую очередь и воспользуемся для решения вопроса о численных значениях углов на псевдоевклидовой плоскости.

Но прежде выясним с помощью рис. 3.2 геометрический смысл отношения псевдоортогональности векторов. Возьмём на правой ветви псевдоевклидовой окружности (3.49) произвольно точку $K$ и обозначив вектор $\overline{OK}$ символом $\boldsymbol{e}'$ запишем его разложение по базису $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ в виде

$$\overline{OK} = \boldsymbol{e}' = \alpha\boldsymbol{e} + \beta\boldsymbol{f}. \qquad (3.57)$$

Так как координаты точек правой ветви $SK$ окружности (3.49) удовлетворяют уравнению (3.46) и неравенству $x > 0$, то и координаты $\alpha$, $\beta$ в разложении (3.57) удовлетворяют этим условиям

$$|\overline{OK}| = |\boldsymbol{e}'| = \alpha^2 - \beta^2 = 1, \qquad \alpha > 0. \qquad (3.58)$$

Для того чтобы вектор

$$\boldsymbol{f}' = \gamma\boldsymbol{e} + \delta\boldsymbol{f} \qquad (3.59)$$

удовлетворял условию псевдоортогональности

$$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{f}' = 0, \qquad (3.60)$$

должно будет согласно формуле (3.41) выполняться равенство

$$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{f}' = \alpha\gamma - \beta\delta = 0,$$

из которого следует

$$\alpha\gamma = \beta\delta. \qquad (3.60')$$

Если бы вектор $\boldsymbol{f}'$ принадлежал правому или левому секторам псевдоевклидовой плоскости (см. (3.56)), то значения координат векторов (3.57), (3.59) подчинялись бы неравенствам

$$\alpha^2 - \beta^2 > 0 \iff |\alpha| > |\beta|, \qquad \gamma^2 - \delta^2 > 0 \iff |\gamma| > |\delta|,$$

что несовместимо с равенством (3.60′). Следовательно вектор $\boldsymbol{f}'$, псевдоортогональный к вектору $\boldsymbol{e}' = \overline{OK}$, может принадлежать только нижнему или верхнему секторам (3.56′). Если выбрать такой вектор $\boldsymbol{f}'$ в верхнем секторе, то тогда будет $\delta > 0$, что позволит с учётом (3.58) представить равенство (3.60′) в виде

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\delta}. \qquad (3.60'')$$

На рис. 3.2 изображён вектор $\boldsymbol{f}' = \overline{OL}$, удовлетворяющий условию (3.60″) и указывающий своим концом точку $L$ на верхней ветви $TL$ единичной псевдоевклидовой окружности (3.49).

В отображении на собственно евклидову плоскость рис. 3.2 отношение $\beta/\alpha$ представляет тангенс угла $\angle K_0OK$, а отношение $\gamma/\delta$ представляет тангенс угла $\angle L_0OL$. Следовательно равенство (3.60″) означает, что образы псевдоортогональных векторов на псевдоевклидовой плоскости принадлежат соседним секторам противоположного смысла (правому и верхнему) и ориентированы симметрично относительно образа изотропного направления, разделяющего эти секторы. В частности это условие выполнено для базисных векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$, изображённых на рис. 3.2 как взаимно перпендикулярные в собственно евклидовом смысле.

Чем больше будет отклонён вектор $\boldsymbol{e}'$ в правом секторе от направления $\boldsymbol{e}$ (приближаясь к изотропному направлению $x = y$), тем больше псевдоортогональный к нему вектор $\boldsymbol{f}'$ в верхнем секторе будет отклоняться от направления $\boldsymbol{f}$, приближаясь к тому же изотропному направлению $x = y$. В пределе окажется, что изотропный вектор

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e} + x\boldsymbol{f} \qquad (3.61)$$

(представляющий частный случай вектора (3.42) при $y = x$) **псевдоортогонален к самому себе**. Эта совершенно немыслимая с точки зрения собственно евклидовой метрики ситуация вполне логична в пространстве с псевдоевклидовыми метрическими свойствами, потому что справедливое для вектора (3.61) равенство

$$\boldsymbol{rr} = x^2 - y^2 = 0$$

означает одновременно как обращение в ноль метрической длины (3.43) вектора (3.61) по свойству изотропности (3.52), так и псевдоортогональность этого вектора к самому себе.

## § 12. ТРИГОНОМЕТРИЯ НА ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Как было сказано в конце § 8, при истолковании геометрических свойств псевдоевклидова пространства численное значение угла определяется формулой (3.2)

$$\cos(\boldsymbol{a},\wedge\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{\boldsymbol{ab}}{\sqrt{\boldsymbol{aa}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{bb}}},$$

совпадающей по внешнему виду с формулой (2.41), которая применяется для вычисления значений углов в собственно евклидовом пространстве. Применим эту формулу к базисному вектору $\boldsymbol{e}$ и к вектору $\boldsymbol{e}'$, заданному разложением (3.57) при условиях (3.58):

$$\cos(\boldsymbol{e},\wedge\boldsymbol{e}') = \frac{\boldsymbol{e}(\alpha\boldsymbol{e}+\beta\boldsymbol{f})}{|\boldsymbol{e}|\cdot\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} = \frac{\alpha}{1\cdot 1} = \alpha \qquad (3.62)$$

(здесь применены соотношения (3.37), (3.40), (3.44), (3.58)).

Геометрический смысл координаты $\alpha$ вектора (3.57) $\overline{OK} = \boldsymbol{e}'$ ясно виден на рис. 3.2. Проходящая через точку $K$ прямая $K_0K$, параллельная оси $OY$, отсекает на оси $OX$ отрезок $OK_0$, образуя треугольник $OK_0K$, стороны которого связаны между собой линейным уравнением сложения векторов

$$\overline{OK} = \overline{OK_0} + \overline{K_0K}\,. \qquad (3.63)$$

Сравнивая разложение (3.63) вектора $\overline{OK}$ на компоненты, параллельные базисным векторам $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ соответственно, с разложением (3.57) того же вектора, видим, что

$$\overline{OK_0} = \alpha \boldsymbol{e}, \qquad \overline{K_0K} = \beta \boldsymbol{f}. \qquad (3.63')$$

Отсюда найдём модули векторов:

$$\overline{OK_0} \cdot \overline{OK_0} = (\alpha \boldsymbol{e})(\alpha \boldsymbol{e}) = \alpha^2(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}) = \alpha^2, \qquad |\overline{OK_0}| = \alpha, \quad (3.64)$$

$$\overline{K_0K} \cdot \overline{K_0K} = (\beta \boldsymbol{f})(\beta \boldsymbol{f}) = \beta^2(\boldsymbol{f}\boldsymbol{f}) = -\beta^2, \qquad |\overline{K_0K}| = i\beta. \quad (3.64')$$

Треугольник $OK_0K$ выглядит как прямоугольный в изображении на рис. 3.2 , потому что псевдоортогональные векторы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ изображены как взаимно перпендикулярные (что не противоречит условию псевдоортогональности, как сказано в абзаце между формулами (3.60") и (3.61)). Но в псевдоевклидовой плоскости треугольник $OK_0K$ нельзя, строго говоря, назвать прямоугольным, потому что, как скоро выяснится, углу между псевдоортогональными векторами вообще не может быть приписано определённое численное значение. Однако отношение псевдоортогональности является с алгебраической точки зрения аналогом собственно евклидовой ортогональности. Поэтому, избегая называть треугольник $OK_0K$ в псевдоевклидовой плоскости прямоугольным, мы всё-таки согласимся называть его псевдоортогональные стороны $OK_0$ и $K_0K$ **катетами**, а третью сторону $OK$ — **гипотенузой**. Отношение длины $\alpha$ катета $OK_0$ (см. (3.64)), прилежащего к углу $\angle K_0OK$, к длине 1 гипотенузы $OK$ (см. (3.58)) представляет косинус угла $\angle K_0OK$ не только по смыслу аналитического равенства (3.62), но и по геометрическому смыслу, аналогичному определению косинуса в собственно евклидовой плоскости:

$$\cos(\boldsymbol{e},\wedge \boldsymbol{e}') = \frac{|\overline{OK_0}|}{|\overline{OK}|} = \frac{\alpha}{1} = \alpha. \qquad (3.65)$$

Эта аналогия наводит на мысль о том, что и численное значение угла в псевдоевклидовой плоскости может определяться **отношением длины непрерывной дуги псевдоевклидовой окружности, стягивающей угол, к радиусу дуги.** Бесконечно малый элемент $dl$ дуги имеет (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка) такую же длину, как хорда этого элемента дуги. На рис. 3.3 вектор хорды $\overline{KK_1}$ равен разности радиус-векторов точек $K_1$ и K

$$\overline{KK_1} = \overline{OK_1} - \overline{OK} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}$$

и представляет **приращение** радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ точки $K$ при перемещении по дуге в точку $K_1$:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} + \Delta \boldsymbol{r}.$$

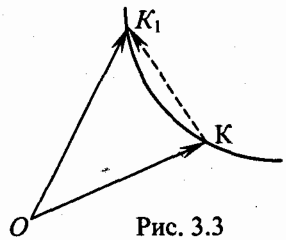


Рис. 3.3

В пределе при стремлении точки $K_1$ вдоль дуги к точке $K$ приращение $\Delta \boldsymbol{r}$ радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ может быть заменено **дифференциалом** $d\boldsymbol{r}$ радиус-вектора. А чтобы найти этот векторный дифференциал, нужно представить уравнение дуги в векторной форме. Радиус-вектор (3.42) произвольной точки $M$ псевдоевклидовой плоскости будет указывать своим концом не какие угодно точки, а именно точки $K$ правой ветви единичной псевдоевклидовой окружности (3.49), если координаты $x, y$ точки $K$ связаны определяющей эту кривую функциональной зависимостью (см. (3.46))

$$y = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad (3.66)$$

$$\boldsymbol{r} = \overline{OK} = x\boldsymbol{e} + y\boldsymbol{f} = x\boldsymbol{e} + \sqrt{x^2 - 1}\cdot\boldsymbol{f}. \qquad (3.67)$$

Дифференциал $d\boldsymbol{r}$ радиус-вектора (3.67) разлагается по базису $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ с координатами, являющимися дифференциалами координат радиус-вектора

$$d\boldsymbol{r} = dx\cdot\boldsymbol{e} + dy\cdot\boldsymbol{f} = dx\cdot\boldsymbol{e} + \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\boldsymbol{f}. \qquad (3.68)$$

В пределе при стремлении точки $K_1$ вдоль дуги $\widehat{KK_1}$ на рис. 3.3 к точке $K$ вектор $d\boldsymbol{r}$ с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости совпадает с вектором хорды $\overline{KK_1}$ и с сам*о*й дугой $\widehat{KK_1}$, имея направление **касательной** к дуге в точке $K$, а длина $dl$ бесконечно малой дуги $\widehat{KK_1}$ совпадает с длиной $d\boldsymbol{r}$.

$$dl = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx^2 - dy^2} = \sqrt{dx^2 - \frac{x^2\cdot dx^2}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{-1}{x^2-1}}\cdot dx = i\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}. \qquad (3.69)$$

При этом, как легко видеть, векторный дифференциал (3.68), имеющий направление касательной к дуге (3.66), **псевдоортогонален** к радиус-вектору (3.67) любой точки этой дуги:

$$\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = x\cdot dx - \sqrt{x^2-1}\cdot\frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2-1}} = 0. \qquad (3.70)$$

Так как радиус-векторы (3.67) принадлежат правому сектору псевдоевклидовой плоскости, то псевдоортогональные к ним векторные дифференциалы $d\boldsymbol{r}$ должны принадлежать верхнему или нижнему сектору, о чём и говорит мнимое значение (3.69) модуля $|d\boldsymbol{r}|$.

Длину конечного участка дуги $SK$ (см. рис. 3.2) правой ветви (3.66) единичной псевдоевклидовой окружности найдём интегрированием элемента длины $dl$ (3.69) в пределах изменения абсциссы от $x_S = 1$ до $x_K = \alpha$ (см. (3.57) и (3.63))

$$l_{\overline{SK}} = i\cdot\int_1^{\alpha} dl = i\cdot\int_1^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = i\cdot ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|_1^{\alpha} =$$
$$= i\cdot ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right) = i\cdot ln(\alpha+\beta)\,. \qquad (3.71)$$

Здесь учтена положительность величины под знаком логарифма, что позволило снять знак модуля, и использовано равенство $\beta = \sqrt{\alpha^2-1}$, вытекающее из (3.58). Отношение длины (3.71) дуги к радиусу этой дуги, равному вещественной единице, мы намерены истолковать как численное значение угла, между векторами $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$. И так как это отношение выражается мнимым числом, применим для угла соответствующее обозначение $i\varphi$, где $\varphi$ — вещественный параметр, не имеющий сам по себе геометрического смысла угла в псевдоевклидовой плоскости

$$(\boldsymbol{e},\widehat{\ }\boldsymbol{e}') = i\varphi = (0\,;\varphi) = \frac{i\cdot ln(\alpha+\beta)}{1} = i\cdot ln(\alpha+\beta)\,. \qquad (3.72)$$

Как было показано в (3.62) и (3.65), координата $\alpha$ в разложении (3.57) имеет аналитический и геометрический смысл косинуса угла (3.72). Однако численные значения, принимаемые косинусом в псевдоевклидовой плоскости, разительно отличаются от привычных численных значений косинуса в плоскости с собственно евклидовыми метрическими свойствами. Различие это обусловлено тем, что в собственно евклидовой плоскости углы, выступающие в роли аргумента косинуса, принимают только вещественные значения, а в псевдоевклидовой плоскости значения углов выражаются числами, которые по давно сложившейся традиции называются мнимыми. В § 9 выяснено, что современная теория комплексных чисел совершенно не нуждается в понятии мнимого числа как объекта воображаемого, чуждого физической реальности. В последующих параграфах будут приведены доказательства органической включённости так называемых мнимых чисел в фундаментальные закономерности природы. Поэтому на непривычные геометрически соотношения, описываемые в параграфах 11 и 12, следует смотреть именно как на непривычные, а не фантастические. А в математике уже со времён Леонарда Эйлера (1707 – 1783) известно, что в отличие от значений косинуса вещественного аргумента, заключённых между $-1$ и $+1$ (см. (2.50) в конце § 5), косинус мнимого аргумента принимает вещественные положительные значения $\geq 1$ (из промежутка $[1;\ +\infty)$). Путём разложения функций в степенные ряды Тейлора Эйлер получил свою знаменитую формулу

$$e^{ix} = \cos x + i\cdot\sin x , \qquad (3.73)$$

равносильную формуле

$$e^{-ix} = \cos x - i\cdot\sin x , \qquad (3.73')$$

где иррациональное число $e \approx 2{,}718281828459045...$ есть основание натуральных логарифмов. Если аргументу $x$ в формулах (3.73), (3.73′) дать мнимое значение $x = i\varphi$, то эти формулы примут вид

$$e^{i(i\varphi)} = \cos(i\varphi) + i\cdot\sin(i\varphi) = e^{-\varphi} , \qquad (3.74)$$

$$e^{-i(i\varphi)} = \cos(i\varphi) - i\cdot\sin(i\varphi) = e^{\varphi} . \qquad (3.74')$$

Складывая равенства (3.74) и (3.74′), получим

$$2\cos(i\varphi) = e^{\varphi} + e^{-\varphi} , \qquad \cos(i\varphi) = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) .$$

Формальная связь функции $\cos(i\varphi)$ с гиперболой была замечена задолго до формирования теории псевдоевклидовой геометрии (в которой выясняется роль гиперболы как образа псевдоевклидовой окружности), и так как эта функция принимает только вещественные значения, то её стали рассматривать как функцию **вещественного** аргумента и назвали **гиперболическим косинусом**, присвоив ей обозначение $\mathrm{ch}\,\varphi$:

$$\mathrm{ch}\,\varphi = \cos(i\varphi) = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) . \qquad (3.75)$$

Сейчас мы убедимся, что определение угла в псевдоевклидовой плоскости равенством (3.72), вытекающим из геометрического истолкования угла как отношения длины стягивающей угол дуги псевдоевклидовой окружности к радиусу дуги, равносильно определению косинуса этого угла равенством (3.75). Записав логарифмическое соотношение (3.72) в вещественной форме

$$\varphi = \ln(\alpha + \beta) , \qquad (3.76)$$

мы конечно утратим геометрический смысл, поскольку значение угла в псевдоевклидовой плоскости выражается мнимым числом, но формально математическая равносильность равенств (3.72) и (3.76) при этом не будет нарушена. Результат потенцирования равенства (3.76) можно записать двояко:

$$e^{\varphi} = \alpha + \beta , \qquad e^{-\varphi} = \frac{1}{\alpha + \beta} . \qquad (3.76')$$

Складывая эти равенства, исключим координату $\beta$:

$$e^{\varphi} + e^{-\varphi} = \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 1}{\alpha + \beta} = \frac{2\alpha^2 + 2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = 2\alpha .$$

Здесь использовано равенство $\beta^2 + 1 = \alpha^2$, равносильное равенству (3.58). Отсюда находим (учитывая, что согласно (3.62), (3.65) (3.72) $\alpha = \cos(i\varphi)$)

$$\alpha = \cos(i\varphi) = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$$

в полном согласии с (3.75). Легко видеть, что значения $\cos(i\varphi)$ принадлежат промежутку $[1; +\infty)$.

Этот факт, обнаруженный чисто аналитическим путём, имеет весьма удивительный (вернее, непривычный) геометрический смысл. Привычный геометрический смысл определения косинуса мнимого аргумента отношением (3.65) длины прилежащего катета к длине гипотенузы равносилен тому, что катет $OK_0$ является псевдоортогональной проекцией гипотенузы $OK$ (см. рис. 3.2) согласно формуле

$$|\overline{OK_0}| = |\overline{OK}| \cdot \cos(i\varphi). \qquad (3.77)$$

И так как угол $i\varphi$ между непараллельными векторами $\overline{OK_0}$ и $\overline{OK}$ отличен от нуля, то $\cos(i\varphi) > 1$ и **проекция** $|\overline{OK_0}|$ **оказывается длинней проецируемого отрезка** $|\overline{OK}|$. Рис. 3.2 иллюстрирует это достаточно наглядно: любая точка $K$ ветви $SK$, имеющей уравнение (3.66), удалена от точки $O$ на расстояние, равное вещественной единице, а абсцисса $\alpha$ такой точки может принимать любые значения из промежутка $[1; +\infty)$. Отсюда вытекает ещё более поразительное следствие: **длина ломаной линии, соединяющей две точки, меньше расстояния между этими точками по прямой,** если все отрезки ломаной принадлежат одному сектору псевдоевклидовой плоскости. Следствием реализованности в природе этого удивительного свойства псевдоевклидовой метрики являются все эффекты специальной теории относительности.

Выясним область определения функции $\cos(i\varphi)$. Если радиус-вектор (3.57) $\overline{OK}$ точки $K$ (см. рис. 3.2), скользящей вдоль ветви (3.66), поворачивать против часовой стрелки, приближая его к изотропному лучу $y = x$, то выражаемая мнимым числом длина (3.71) дуги $SK$ будет стремиться к положительной бесконечности

$$\lim_{\alpha \to +\infty} i \cdot \ln(\alpha + \beta) = \lim_{\alpha \to +\infty} i \cdot \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) = +i\infty \qquad (3.78)$$

и к той же положительной бесконечности будет стремиться значение угла $i\varphi$ между векторами $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ (см. (3.72)). При повороте же радиус-вектора $\overline{OK}$ по часовой стрелке (к изотропному лучу $y = -x$) ордината $\beta$ будет принимать отрицательные значения $\beta = -\sqrt{\alpha^2 - 1}$, потому что точка $K$ будет скользить вдоль **нижней** части ветви (3.66). В результате выражение под знаком логарифма, оставаясь положительным, будет стремиться к нулю, а значение логарифма — к отрицательной бесконечности

$$\lim_{\alpha \to +\infty} i \cdot \ln(\alpha + \beta) = \lim_{\alpha \to +\infty} i \cdot \ln(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}) = i \cdot \ln(+0) = -i\infty. \qquad (3.79)$$

Таким образом, изотропный луч $y = -x$, являющийся нижней границей правого сектора, образует отрицательный бесконечно большой угол с вектором $\boldsymbol{e}$, а изотропный луч $y = x$, ограничивающий правый сектор сверху, образует с вектором $\boldsymbol{e}$ положительный бесконечно большой угол. А так как всякий **неизотропный** вектор, принадлежащий правому сектору псевдоевклидовой плоскости, образует с вектором ***e*** угол, выражаемый **конечным** мнимым числом (хотя бы и сколь угодно большим по абсолютной величине), то справедливо следующее утверждение:

| | |
|---|---|
| угол между любым неизотропным вектором сектора псевдоевклидовой плоскости и каждым изотропным вектором, указывающим границу этого сектора, не имеет определённого численного значения, будучи бесконечно большим ( $\pm i\infty$ ). | ( 3. 80 ) |

Эта истина, на которую в дальнейшем неоднократно придётся ссылаться, имеет чрезвычайно важное значение для объяснения специальной теории относительности. Попутно мы выяснили, что численное значение угла определено (имеет смысл) только при том условии, что векторы образующие угол, принадлежат одному и тому же сектору псевдоевклидовой плоскости. Именно так и должно быть при определении численного значения угла отношением длины дуги псевдоевклидовой окружности, стягивающей угол, к радиусу окружности. Ведь дуга псевдоевклидовой окружности является непрерывной линией только в пределах одного сектора, а на изотропных границах сектора имеет разрыв.

Проведённые в этом параграфе рассуждения об определении численных значений углов между векторами, принадлежащими правому сектору, можно применить к каждому из секторов псевдоевклидовой плоскости. Результаты получатся такие же, с тем лишь отличием, что в верхнем *(и нижнем) секторе длины радиусов выражаются мнимыми числами*, а длины участков псевдоевклидовой окружности — вещественными числами, потому что касательные к окружности векторы (имеющие направления дифференциалов $d\boldsymbol{r}$ радиус-векторов) принадлежат правому или левому секторам. При этом положительное направление отсчёта углов (от отрицательной бесконечности $-i\infty$ к положительной бесконечности $+i\infty$) совпадает с направлением кратчайшего поворота от первого базисного вектора ***e*** ко второму базисному вектору ***f***, т.е. с направлением поворота против часовой стрелки на рис. 3.2. Угол между векторами, принадлежащими различным секторам псевдоевклидовой плоскости, не может иметь определённого численного значения, потому что такие векторы разделены изотропными направлениями, переход через которые равносилен прыжку через бесконечность для значений угла. По этой причине отношение **псевдоортогональности** векторов на псевдоевклидовой плоскости не может быть характеризовано определённым значением угла, что прекрасно согласуется с возможностью располагать образы таких векторов на собственно евклидовой плоскости рисунка под любым углом. В отличие от численных значений углов, скалярные псевдоевклидовы произведения векторов определены (имеют определённое значение) для **любых** векторов псевдоевклидовой плоскости.

Аналогия между псевдоевклидовой и собственно евклидовой окружностями, между треугольником с псевдоортогональными катетами на псевдоевклидовой плоскости и прямоугольным треугольником на плоскости собственно евклидовой простирается также на тригонометрические функции синуса и тангенса. В треугольнике $OK_0K$ на псевдоевклидовой плоскости отношение длины катета $K_0K$, противолежащего углу $\angle K_0OK$, к длине гипотенузы $OK$

$$\frac{|\overline{K_0K}|}{|\overline{OK}|} = \frac{|\beta \boldsymbol{f}|}{|\boldsymbol{e}|} = \frac{\pm|\beta|\cdot|\boldsymbol{f}|}{1} = i\beta = \sin(i\varphi) \qquad (3.81)$$

будет аналогом синуса для собственно евклидова прямоугольного треугольника, хотя в псевдоевклидовой плоскости длина $K_0K$ выражается мнимым числом. В равенствах (3.81) учтено, что координата $\beta$ вектора $\overline{OK}$ (3.57) может принимать как положительные, так и отрицательные вещественные значения. Выражение координаты $\beta$ через вещественный параметр $\varphi$ найдём, исключая из (3.76′) координату $\alpha$:

$$e^{\varphi} - e^{-\varphi} = \alpha + \beta - \frac{1}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-1}{\alpha+\beta} = \frac{2\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = 2\beta\,.$$

Здесь использовано равенство $\alpha^2 - 1 = \beta^2$, равносильное (3.58). Таким образом получаем выражение

$$\beta = \frac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}) = \operatorname{sh}\varphi, \qquad (3.82)$$

совпадающее с определением гиперболического синуса. Подставляя выражение (3.82) в (3.81), получим

$$\sin(i\varphi) = i\beta = i\cdot\operatorname{sh}\varphi = \frac{i}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi})\,. \qquad (3.82')$$

Такое же выражение синуса мнимого аргумента можно получить, вычитая равенство (3.74) из (3.74′).

Отношение синуса мнимого аргумента к косинусу должно представлять с аналитической точки зрения тангенс мнимого аргумента

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{\sin(i\varphi)}{\cos(i\varphi)} = \frac{i\cdot\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} = i\cdot\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}} = i\cdot\operatorname{th}\varphi. \qquad (3.83)$$

Это полностью соответствует геометрическому определению тангенса угла $\angle K_0OK = i\varphi$ отношением длины $i\beta$ противолежащего катета $K_0K$ к длине $\alpha$ прилежащего катета $OK_0$ (см. (3. 64′), (3.64)):

$$\operatorname{tg}(\boldsymbol{e},\wedge\boldsymbol{e}') = \operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{|\overline{K_0K}|}{|\overline{OK_0}|} = \frac{i\beta}{\alpha} = \frac{\sin(i\varphi)}{\cos(i\varphi)} = i\cdot\operatorname{th}\varphi. \qquad (3.83')$$

В дальнейших выводах будет играть весьма важную роль тот факт, что значения гиперболического тангенса

$$\text{th}\,\varphi = \frac{\text{sh}\,\varphi}{\text{ch}\,\varphi} = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{e^{\varphi}+e^{-\varphi}} \tag{3.84}$$

заключены между $-1$ и $+1$, не достигая этих границ, но стремясь к ним при стремлении к бесконечностям значений аргумента

$$\lim_{\varphi\to+\infty} \text{th}\,\varphi = +1, \qquad \lim_{\varphi\to-\infty} \text{th}\,\varphi = -1. \tag{3.85}$$

Об этом достаточно наглядно говорит дробное выражение (3.84), в котором числитель по абсолютной величине меньше знаменателя при любых значениях $\varphi$, а различие в значениях числителя и знаменателя становится сколь угодно малым при $\varphi \to \pm\infty$.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что соотношения между функциями вещественного аргумента, известные в тригонометрии собственно евклидовой плоскости, остаются в силе и при аналитическом продолжении в область комплексных значений аргумента. Пользуясь выражениями (3.75) и (3.82′), легко убедиться в справедливости основного тригонометрического тождества для мнимых значений аргумента косинуса и синуса:

$$\cos^2(i\varphi)+\sin^2(i\varphi) = \text{ch}^2\varphi-\text{sh}^2\varphi = \frac{1}{4}(e^{\varphi}+e^{-\varphi})^2-\frac{1}{4}(e^{\varphi}-e^{-\varphi})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\{(e^{2\varphi}+2e^0+e^{-2\varphi})-(e^{2\varphi}-2e^0+e^{-2\varphi})\} = \frac{1}{4}(2+2) = 1.$$

Обычно это тождество записывают в терминах гиперболических функций

$$\text{ch}^2\varphi-\text{sh}^2\varphi = 1. \tag{3.86}$$

Выполняя деление обеих частей равенства (3.86) на $\text{ch}^2\varphi$, получим

$$1-\text{th}^2\varphi = \frac{1}{\text{ch}^2\varphi},$$

откуда следует

$$\text{ch}\,\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\text{th}^2\varphi}}. \tag{3.87}$$

Из равенств

$$\text{th}\,\varphi = \frac{\text{sh}\,\varphi}{\text{ch}\,\varphi} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{sh}\,\varphi = \text{th}\,\varphi\cdot\text{ch}\,\varphi$$

и (3.87) находим

$$\text{sh}\,\varphi = \frac{\text{th}\,\varphi}{\sqrt{1-\text{th}^2\varphi}}. \tag{3.88}$$

Выражения (3.87) и (3.88) помогут дать простое геометрическое истолкование ряду удивительных соотношений в специальной теории относительности.

## § 13. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ВЕКТОРОВ НА ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ ПЕРЕХОДАХ МЕЖДУ ПСЕВДООРТОНОРМИРОВАННЫМИ БАЗИСАМИ

Вот теперь мы подошли к возможности получить главные соотношения, служащие ключом к пониманию специальной теории относительности. В конце § 11 было обосновано существование в верхнем секторе псевдоевклидовой плоскости вектора (3.59)

$$f' = \gamma e + \delta f,$$

псевдоортогонального к вектору $e'$ (3.57), принадлежащему правому сектору при условиях (3.58) и имеющему метрическую длину, равную вещественной единице. Там же было сказано, что в частности можно так выбрать вектор $f'$, чтобы он совпал с радиус-вектором $\overline{OL}$, указывающим своим концом точку $L$ на верхней ветви $TL$ единичной псевдоевклидовой окружности (3.49). В таком случае координаты вектора

$$f' = \overline{OL} = \gamma e + \delta f$$

должны будут удовлетворять условиям

$$|\overline{OL}| = |f'| = \gamma^2 - \delta^2 = -1, \qquad \delta > 0 \tag{3.89}$$

которые в сочетании с условием (3.60") псевдоортогональности позволят выразить координаты $\gamma$ и $\delta$ вектора $f'$ через координаты $\alpha$ и $\beta$ вектора $e'$. В cáмом деле, равенство (3.60")

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\delta}$$

означает пропорциональность координат

$$\gamma = k\beta, \qquad \delta = k\alpha, \tag{3.90}$$

а положительность координат $\alpha$ и $\delta$ согласно условиям (3.58) и (3.89) требует, чтобы был положителен и коэффициент пропорциональности

$$k > 0.$$

Подставляя выражения (3.90) в равенство (3.89), получим

$$k^2\beta^2 - k^2\alpha^2 = k^2(\beta^2 - \alpha^2) = k^2(-1) = -1$$

(здесь учтено, что $\beta^2 - \alpha^2 = -1$ согласно равенству (3.58) $\alpha^2 - \beta^2 = 1$), откуда следует (ввиду $k > 0$), что

$$k = 1,$$

и потому (см. (3.90), (3.89))

$$\gamma = \beta, \qquad \delta = \alpha,$$

$$f' = \overline{OL} = \beta e + \alpha f, \qquad \alpha > 0. \tag{3.91}$$

Учитывая выясненный в (3.62), (3.65), (3.72), (3.75) тригонометрический смысл координаты $\alpha$

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi$$

и тригонометрический смысл координаты $\beta$ (см. (3.82))

$$\beta = \operatorname{sh}\varphi,$$

представим разложения (3.57) и (3.91) векторов $e'$ и $f'$ в виде

$$e' = \overline{OK} = \operatorname{ch}\varphi\cdot e + \operatorname{sh}\varphi\cdot f, \qquad f' = \overline{OL} = \operatorname{sh}\varphi\cdot e + \operatorname{ch}\varphi\cdot f. \quad (3.92)$$

Вычисляя скалярные псевдоевклидовы произведения этих векторов $e'$ и $f'$ по формуле (3.41), нетрудно убедиться в справедливости для них таких же условий псевдоортогональности, как условия (3.40) для векторов $e$ и $f$:

$$\begin{pmatrix} e'e' & e'f' \\ f'e' & f'f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

Значит векторы $e'$ и $f'$, определённые разложениями (3.92), годятся на роль псевдоортонормированного базиса.

Но прежде чем перейти к задаче, указанной в названии § 13, внесём в разложения (3.92) векторов $e'$ и $f'$ поправку, полезную для выяснения физического смысла геометрических соотношений между векторами псевдоевклидовой плоскости. Для физических приложений удобней будет использовать в качестве основного **верхний** сектор псевдоевклидовой плоскости и отсчитывать углы от базисного вектора $f$. Верхняя ветвь $TL$ псевдоевклидовой единичной окружности (3.49) удовлетворяет условию (3.48) и имеет уравнение

$$y = \sqrt{x^2+1}\,. \quad (3.94)$$

Поэтому радиус-векторы любых точек ветви (3.94) разлагаются по базису $e$, $f$ следующим образом

$$r = xe + yf = xe + \sqrt{x^2+1}\cdot f, \quad (3.95)$$

а дифференциал радиус-вектора (3.95) имеет (по аналогии с (3.68)) выражение

$$dr = dx\cdot e + dy\cdot f = dx\cdot e + \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2+1}}\cdot f. \quad (3.96)$$

Длина вектора $dr$ (3.96) совпадает в пределе (при $dx\to 0$) с длиной $dl$ элемента дуги (3.94) и выражается (в отличие от (3.69)) вещественным числом

$$dl = |dr| = \sqrt{dx^2 - dy^2} = \sqrt{dx^2 - \frac{x^2\cdot dx^2}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{dx^2}{x^2+1}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},$$

а потому и интеграл, представляющий длину конечного участка дуги $TL$

$$l_{\overline{TL}} = \int_0^x dl = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|_0^x = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = ln(x+y), \quad (3.97)$$

тоже выражается вещественным числом. Так как интересующий нас конкретный вектор (3.91) $f' = \overline{OL}$ имеет значения координат $x = \beta$, $y = \alpha$, согласованные с координатами вектора (3.57) $\overline{OK} = e'$ при условиях (3.58), то применительно к вектору (3.91) длина (3.97) принимает значение

$$l_{\overline{TL}} = ln(\alpha+\beta). \quad (3.97')$$

Отношение длины (3.97′) дуги к длине её радиуса $|\overline{OL}| = i$ представляет численное значение угла, отсчитываемого от вектора $f$ к вектору $f' = \overline{OL}$:

$$(f,\widehat{\ } f') = i\psi = (0;\psi) = \frac{ln(\alpha+\beta)}{i} = -i\cdot ln(\alpha+\beta). \qquad (3.98)$$

Сравнивая **направленные** углы $(e,\widehat{\ } e')$ и $(f,\widehat{\ } f')$, определённые равенствами (3.72) и (3.98), видим, что эти углы имеют не только взаимно противоположные направления (что было ясно и раньше) но и одинаковые абсолютные величины:

$$(e,\widehat{\ } e') = i\varphi = -i\psi = -(f,\widehat{\ } f'). \qquad (3.99)$$

Равенство (3.99) позволяет представить разложения (3.92) в виде

$$e' = \operatorname{ch}\psi\cdot e - \operatorname{sh}\psi\cdot f, \qquad (3.100)$$

$$f' = -\operatorname{sh}\psi\cdot e + \operatorname{ch}\psi\cdot f, \qquad (3.100')$$

поскольку косинус является чётной функцией и потому

$$\operatorname{ch}\varphi = \cos(i\varphi) = \cos(-i\psi) = \cos(i\psi) = \operatorname{ch}\psi,$$

а синус — функция нечётная

$$\operatorname{sh}\varphi = \sin(i\varphi) = \sin(-i\psi) = -\sin(i\psi),$$

так что

$$\sin(i\varphi) = i\cdot\operatorname{sh}\varphi = -\sin(i\psi) = -i\cdot\operatorname{sh}\psi \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sh}\varphi = -\operatorname{sh}\psi.$$

Разложения (3.100), (3.100′) специально приспособлены для применения к верхнему сектору псевдоевклидовой плоскости, в котором угол $i\psi$ отсчитывается от базисного вектора $f$ в положительную сторону против часовой стрелки и в отрицательную по часовой стрелке (на рис. 3.2).

Любой радиус-вектор $r$ на псевдоевклидовой плоскости может быть представлен разложением как по псевдоортонормированному базису $e$, $f$,

$$r = xe + yf \qquad (3.101)$$

так и по псевдоортонормированному “штрихованному” базису $e'$, $f'$

$$r = x'e' + y'f'. \qquad (3.101')$$

Внося в (3.101′) разложения (3.100), (3.100′) векторов штрихованного базиса, получим

$$r = x'e' + y'f' = x'(\operatorname{ch}\psi\cdot e - \operatorname{sh}\psi\cdot f) + y'(-\operatorname{sh}\psi\cdot e + \operatorname{ch}\psi\cdot f) =$$
$$= (x'\cdot\operatorname{ch}\psi - y'\cdot\operatorname{sh}\psi)\cdot e + (-x'\cdot\operatorname{sh}\psi + y'\cdot\operatorname{ch}\psi)\cdot f.$$

В правой части последнего равенства записано разложение вектора $r$ по нештрихованному базису $e$, $f$, как и в (3.101). Поэтому в силу доказанной в § 5 теоремы 2.1 о единственности разложения вектора по данному базису координаты при векторах $e$ и $f$ должны быть одинаковыми:

$$x'\cdot\operatorname{ch}\psi - y'\cdot\operatorname{sh}\psi = x, \qquad -x'\cdot\operatorname{sh}\psi + y'\cdot\operatorname{ch}\psi = y. \qquad (3.102)$$

Решая систему линейных уравнений (3.102) относительно $x'$, $y'$, найдём выражения штрихованных координат (по отношению к базису $e'$, $f'$) вектора $r$ через нештрихованные координаты $x, y$ того же вектора по отношению к базису $e$, $f$:

$$\boxed{x' = x\cdot\operatorname{ch}\psi + y\cdot\operatorname{sh}\psi, \qquad y' = x\cdot\operatorname{sh}\psi + y\cdot\operatorname{ch}\psi.} \qquad (3.103)$$

Это и есть искомые преобразования координат вектора при переходе от одного (нештрихованного) псевдоортонормированного базиса к другому (штрихованному) псевдоортонормированному базису псевдоевклидовой плоскости. Подчеркнём ещё раз, что вещественный параметр $\psi$ в формулах (3.102′) служит представителем **направленного** угла $i\psi$ (3.98), отсчитываемого в верхнем секторе от вектора $f$ нештрихованного базиса к вектору $f'$ штрихованного базиса.

Для того чтобы преобразования (3.103) "заиграли" со всей яркостью наглядной подсказки, нужно представить их в несколько иной форме, воспользовавшись выражениями (3.87), (3.88) гиперболического косинуса и гиперболического синуса через гиперболический тангенс

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\psi}}, \qquad \operatorname{sh}\psi = \frac{\operatorname{th}\psi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\psi}}.$$

Внося эти выражения в преобразования (3.103), получим окончательно

$$x' = \frac{x + y\cdot\operatorname{th}\psi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\psi}}, \qquad y' = \frac{x\cdot\operatorname{th}\psi + y}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\psi}}. \qquad (3.103')$$

## § 14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

«Спрашивайте природу! Она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать непременно и удовлетворительно».

Н.И. Лобачевский

(цитировано по книге [37, с. 187])

В истории науки абстрактно-математическое построение неевклидовой геометрии Лобачевского, стимулировавшее в дальнейшем интерес к теории многомерных **нелинейных** пространств с отрицательной или положительной кривизной, почти на столетие опередило практическое применение моделей такого типа к объяснению физических явлений (в общей теории относительности). Построение же моделей **линейных** пространств с псевдоевклидовыми метрическими свойствами не требует столь сложного и громоздкого математического аппарата, как модели искривлённых пространств, однако оно не было выполнено раньше XX века. Объяснить это запаздывание можно тем, что Н.И. Лобачевского, как и других математиков, вдохновляло давно вызревшее стремление найти доказательство пятого постулата Евклида, а отсюда легче было сделать дерзновенный шаг к исследованию того, к чему поведёт отказ от пятого постулата или замена его другим постулатом. К открытию и постижению псевдоевклидовой геометрии ведёт отказ от четвёртой аксиомы скалярного умножения векторов, но сама эта аксиома вместе с разделением свойств пространства на линейные и метрические была осмыслена во всей своей глубине только в XX веке. А уж следствия, проистекающие из отказа от неё, казались настолько нереальными, что заставили считать пространство Минковского фиктивным, воображаемым четырёхмерным формализмом, о чём свидетельствуют цитированные в начале § 8 этой книги высказывания академиков Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, профессоров П.С. Кудрявцева и И.Я. Конфедератова (ссылки [38], [39], [40]). Если бы содержание параграфов 10–13 настоящей книги было изложено где-нибудь в середине XIX века, то оно могло бы вызвать гораздо больше негодования, чем геометрия Лобачевского, раздражавшая многих его современников, даже далёких от математики. Ведь вместо трудных для понимания абстракций Лобачевского и Римана, доступных только узкому кругу специалистов, в псевдоевклидовой геометрии приходится сталкиваться с выводами, вызывающе абсурдно противоречащими убедительности очевидности и здравого смысла, понятными каждому человеку: с существованием векторов, имеющих мнимую (воображаемую?) длину, и, что ещё хуже, с ненулевыми векторами, длина которых равна нулю, с тем, что косинус угла принимает только положительные значения не меньшие единицы (катет длинней гипотенузы?), что расстояние между двумя точками на криволинейном пути короче прямолинейного отрезка, соединяющего эти точки. Но после открытий Альберта Эйнштейна и Германа Минковского появилась реальная возможность подойти к решению этих спорных вопросов с позиций Лобачевского («спрашивайте природу!») и Галилея, призывавшего читать открытую книгу Вселенной во всеоружии математических знаний.

Труды творцов теории относительности (Х.А. Лоренца, Дж. Фитцджеральда, Анри Пуанкаре, Альберта Эйнштейна) увенчались утверждением в науке так называемых лоренцевых преобразований в качестве универсального закона природы. В этих преобразованиях сконцентрирована сущность специальной теории относительности, ибо если принять их в качестве угаданного постулата, то из них можно вывести математически не только все удивительные релятивистские эффекты, но и оба исходных постулата Эйнштейна. Хотя в наибольшей общности преобразования Лоренца применяются к движениям тел и распространению электромагнитных колебаний в трёхмерном вещественном собственно евклидовом пространстве, удобно для начального ознакомления ограничиться более простой задачей движения тел и электромагнитных сигналов в одномерном наблюдаемом пространстве. Такой подход широко применяется в учебниках и имеет и то достоинство, что позволяет вкусить плоды от древа познания геометрии псевдоевклидовой плоскости прежде знакомства с основными особенностями теории четырёхмерного мира Минковского. Одномерное упрощение высветит ярче и нагляднее простые объяснения парадоксов относительности. Впрочем, ничто не мешает при желании добавить к оси $OX$ наблюдаемого пространства ещё и оси $OY$, $OZ$, рассматривая однако относительное движение систем отсчёта только в направлении оси $OX$, так чтобы координаты $y$ и $z$ при этом оставались одинаковыми в обеих координатных системах, как показано на рис. 2.2 в § 4 и отражено в формулах (2.3), (2.3′) галилеевых преобразований.

После того как Х.А. Лоренц дополнил в 1895 г. свою гипотезу о сокращении длин тел, движущихся по отношению к мировому эфиру, представлением о **местном времени** в движущейся системе координат, потребовалось чётко разграничивать понятия системы координат и **системы отсчёта пространства и времени.** Система координат понималась в классической физике как чисто пространственная геометрическая конструкция, например, как система осей $OXYZ$, которую можно было назвать также и системой отсчёта, поскольку по классическим понятиям ход времени не зависел от выбора системы координат. Но когда такая зависимость была усмотрена, стало необходимым отсчитывать время в каждой системе координат по неподвижным относительно неё часам. С тех пор **совокупность системы координат и часов,** неподвижных относительно этой системы координат, стали называть **системой отсчёта** пространства и времени. При этом особо выделяют **инерциальные системы отсчёта,** применяя для них общепринятое сокращение **ИСО.** Так как Х.А. Лоренц первый стал применять вместо галилеевских преобразований (2.3) и (2.2) принципиально новые преобразования

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad t' = \frac{t - \dfrac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad (3.104)$$

то за последними закрепилось в науке название **лоренцевых преобразований,** хотя статус глубочайшего универсального закона природы они обрели только в теории относительности А. Эйнштейна. Лоренц относился к величине $t'$, определённой второй из формул (3.104), как к вспомогательному параметру, который удобно ввести чисто формально для упрощения вычислений и придания некоторым формулам инвариантного характера. Физический смысл действительного времени Лоренц признавал лишь за величиной $t$, а не $t'$, которая зависит от пространственной координаты $x$ и потому была названа *местным* временем (в отличие от *универсального* времени $t$). Ценно свидетельство самого Лоренца на этот счёт: «... теория [Эйнштейна] электромагнитных явлений в движущихся системах приобрела простоту, которой я не был в состоянии достигнуть. Главной причиной моей неудачи была моя приверженность к идее, что только переменная $t$ может считаться истинным временем и что моё местное время $t'$ должно рассматриваться как не более чем вспомогательная математическая величина. Наоборот, в теории Эйнштейна $t'$ играет ту же самую роль, как и $t$» [цитировано по книге 51, с. 458]. Напомним, что для Лоренца *истинным* было время $t$, которое отсчитывается в абсолютно неподвижной системе координат, связанной с мировым эфиром. Надёжность новаторства Эйнштейна заключалась в том, что он исходил из двух своих постулатов как экспериментально подтверждаемых фундаментальных законов природы и выводил из них следствия (в частности, лоренцевы преобразования) чисто логическим путём.

В настоящее время преобразования (3.104) признаны глубочайшим законом природы, и никакая новая теория не будет заслуживать серьёзного научного внимания, если она противоречит преобразованиям Лоренца, или, как говорят, не удовлетворяет требованию лоренц-инвариантности. Это обстоятельство придаёт чрезвычайную значительность сходству формул (3.104) лоренцевых преобразований с формулами (3.103′) преобразований координат вектора при переходах между псевдоортонормированными базисами правой ориентации на комплексной плоскости с псевдоевклидовыми метрическими свойствами.

При сравнении преобразований (3.103′) с преобразованиями (3.104) прежде всего обращает на себя внимание отождествление

$$\mathrm{th}^2\psi = (v/c)^2, \qquad (3.105)$$

а после подстановки его в (3.103′) выясняется потребность в равенстве

$$y = ct. \qquad (3.106)$$

Наконец, станет видно, что из двух равенств, получающихся при извлечении квадратного корня из (3.105), следует выбрать

$$\mathrm{th}\,\psi = -v/c \qquad (3.107)$$

для превращения преобразований (3.104) в преобразования (3.103′):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{x - (-c\cdot\mathrm{th}\,\psi)\cdot\dfrac{y}{c}}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\psi}} = \frac{x + y\cdot\mathrm{th}\,\psi}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\psi}}, \qquad (3.108)$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\dfrac{y}{c} - \dfrac{x}{c}\cdot(-\mathrm{th}\,\psi)}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\psi}} = \frac{1}{c}\cdot\frac{x\cdot\mathrm{th}\,\psi + y}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\psi}} = \frac{y'}{c}. \qquad (3.108')$$

Равенства (3.108′) сводятся к равенству

$$y' = ct', \qquad (3.109)$$

подтверждающему справедливость соотношения (3.106) для любой штрихованной инерциальной системы отсчёта (ИСО) пространства и времени и соответствующего ей штрихованного псевдоортонормированного базиса $e'$, $f'$ псевдоевклидовой плоскости.

Итак, лоренцевы преобразования (3.104) **расшифровываются** как преобразования (3.103′) координат векторов псевдоевклидовой плоскости при переходах между псевдоортонормированными базисами, а **ключом к шифру** служат равенства (3.106) и (3.107). Но если преобразования Лоренца признаны современной наукой в качестве универсального закона природы, то следует признать универсальным законом природы и псевдоевклидовость мирового пространства и искать истоки удивительных эффектов специальной теории относительности, равно как и её основополагающих постулатов, в линейных и метрических свойствах псевдоевклидова пространства. В первую очередь надлежит выяснить физический смысл ключевых равенств (3.106) и (3.107).

## § 15. МИРОВЫЕ ЛИНИИ

Соотношения (3.106) и (3.107) выявлены сначала путём чисто формального сравнения преобразований (3.104) и (3.103′) и потому на первый взгляд представляются взаимно независимыми. Однако при более пристальном рассмотрении равенство (3.106) выделяется в качестве основного и наиболее революционного по своему содержанию, в связи с чем мы будем в дальнейшем называть его **равенством Минковского**, подобно тому как знаменитая формула $E = mc^2$ ассоциируется с именем Эйнштейна. Равенство Минковского (3.106) приобретёт более геометризованный вид после умножения обеих его частей на мнимую единицу $i = (0\,;1)$:

$$iy = (ic)t, \qquad (3.110)$$

т.е. при записи в комплексной форме

$$(0;1)y = (0;1)\cdot ct \quad \Longleftrightarrow \quad (0;y) = (0;c)t. \qquad (3.110')$$

В записи (3.110) фигурирует не просто координата $y$, а величина $iy = (0;y)$, имеющая **геометрический смысл длины** отрезка в верхнем секторе псевдоевклидовой плоскости, и равенство (3.110) утверждает **в качестве закона природы** пропорциональность расстояния $iy = (0\,;y)$ той величине, которую мы воспринимаем как промежуток времени $t$ между некоторыми событиями. **Мнимый коэффициент пропорциональности**

$$ic = (0;c) \qquad (3.111)$$

показывает, какому пространственному расстоянию $(0\,;y)$ соответствует принятая нами единица времени. По смыслу формул преобразований Лоренца размерность и значение коэффициента пропорциональности (3.111) совпадает с размерностью и значением скорости распространения электромагнитных сигналов в вакууме, которую для краткости называют скоростью света. Но постоянная

$$c = 2,99792458\cdot 10^8 \text{ м/сек.} \qquad (3.112)$$

имеет в физике более широкий смысл, чем скорость света. Она выступает в роли коэффициента пропорциональности между единицами измерения различных физических величин. Например, абсолютная электростатическая единица заряда (ед. $СГС_Q$) связана с единицей заряда в системе СИ (кулоном Кл) соотношением

$$1 \text{ ед. } СГС_Q = \frac{10}{c} \text{ Кл}.$$

Поэтому в наиболее общем смысле коэффициент (3.112) называют **универсальной электродинамической постоянной**. И в равенстве (3.110) универсальная постоянная (3.112) играет роль **коэффициента перехода** от единиц измерения времени к единицам измерения пространственной протяжённости, а то, что последняя выражается мнимым числом, не заключает в себе чего-либо таинственного и непонятного. Изложение теории относительности (и модели мира Минковского) может быть построено таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности между временем и пространством в равенстве (3.110) выражался вещественным числом, но тогда привычные нам пространственные расстояния вдоль осей $OX$, $OY$, $OZ$ пришлось бы выражать мнимыми числами. Именно такая форма изложения специальной теории относительности избрана в известном курсе теоретической физики Ландау и Лифшица (см. в [40] формулу (2.4) на с. 13 и фразу «мнимые интервалы называют *пространственноподобными*» перед формулой (2.10) на с. 16).

О том, что промежутки времени являются по сути формой восприятия нами пространственной протяжённости, можно было высказывать умозрительные догадки в эпоху до возникновения классической механики. Так, Блаженный Августин писал в 400 году н. э.: «Теперь я вижу, что время есть действительно какое-то протяжение» [15, ч. 2, с. 588]. Но для классической физики подобное представление уже стало принципиально неприемлемым. И не только потому, что наука не обнаруживала какой-либо связи между промежутками пространства и времени наподобие равенства (3.106). С точки зрения классической механики в природе нет никаких оснований для объединения промежутков времени хотя бы с одним из измерений пространства в двумерное пространство, в котором имели бы физический смысл линейные операции над векторами пространства и времени, а тем более, операция скалярного умножения столь разнородных векторов в качестве основания для определённости углов между ними и метрической соизмеримости их модулей.

В самом деле, в теоретических рассуждениях и прикладных задачах механики широко применяются **графики движения материальных точек**, на которых каждому элементарному механическому событию (положению материальной точки в определённый момент времени $t$ в определённом месте наблюдаемого пространства, характеризуемом координатами $x$, $y$, $z$) ставится в соответствие упорядоченная совокупность четырёх чисел $t, x, y, z$, однако это не давало повода вводить в арсенал науки понятие четырёхмерного пространства–времени. Рассмотрим для лучшей наглядности движение (равномерное или неравномерное) материальной точки в наблюдаемом одномерном пространстве прямой, принятой за ось $OX$.

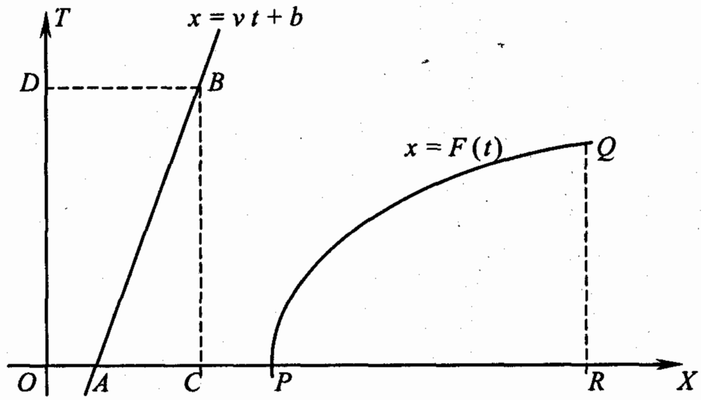


Рис. 3.4

В таких случаях **элементарное событие** определяется упорядоченной парой чисел $x$, $t$, означающей, что в момент времени $t$ материальная точка имеет пространственную координату $x$. Множеству всевозможных упорядоченных пар $x$, $t$ соответствует множество точек плоскости, отнесённой к системе координат $OXT$ (см. рис. 3.4). Характер движения материальной точки вдоль оси $OX$ выражается зависимостью

$$x = F(t) \tag{3.113}$$

значений пространственной координаты $x$ от значения $t$ отсчёта времени, и график зависимости (3.113), представленный линией $PQ$ (в общем случае кривой) на плоскости $OXT$, называется графиком движения материальной точки. Если материальная точка движется с постоянной скоростью, то зависимость (3.113) выражается линейной функцией

$$x = vt + b, \tag{3.113'}$$

графиком которой является прямая ($AB$ на рис. 3.4). В частности, при $v = 0$ равномерное движение (3.113′) превращается в неподвижность (покой) и графиком его служит прямая, параллельная оси $OT$ времени (пространственная координата $x$ не изменяет своего значения $x = b$ с течением времени). Сама ось $OT$ может рассматриваться как график движения (покоя) той материальной точки, которая принята за начало координат на оси $OX$.

Хотя по внешней видимости графики одномерного движения принадлежат плоскости $OXT$, эта плоскость представляет собой двумерное пространство лишь в качестве поля рисунка, а в природе, согласно представлениям классической механики, два одномерных пространства, изображённых осями $OX$ и $OT$, не образуют двумерного пространства. Это в первую очередь подтверждается тем фактом, что на классических графиках движения типа рис. 3.4 реальный физический смысл имеют только отрезки, параллельные одной из координатных осей, например, отрезок $AC$ имеет смысл расстояния, пройденного в одномерном пространстве оси $OX$ материальной точкой, а отрезок $CB = OD$, имеет смысл промежутка времени, затраченного на прохождение пути $AC$. Длина же наклонного отрезка $AB$ или кривой $PQ$ не имеет никакого физического смысла на классическом графике движения. Да и не может иметь по той причине, что вне условностей графика не определена соизмеримость отрезков осей $OX$ и $OT$ и не определён угол между этими осями. Угол $\angle XOT$ изображают как прямой только ради удобства иллюстраций, а в самой природе классическая физика не находит никаких оснований для того, чтобы считать ось времени перпендикулярной к пространственной оси $OX$.

Глядя на график $AB$ равномерного движения (3.113′), мы привычно напишем равенства

$$\frac{|AC|}{|CB|} = v = \operatorname{tg}\angle ABC,$$

не обращая внимания на заключённое в них внутреннее противоречие. Противоречие же состоит в том, что отношение длин катетов $AC$ и $CB$, равное тангенсу угла $ABC$, есть величина безразмерная, поскольку отрезки $AC$ и $CB$ **на рисунке** измерены одной и той же единицей длины, а скорость $v$ как отношение расстояния $|AC| = x_C - x_A$ к промежутку времени $|CB| = t_B - t_C = t_B - t_A$ между событиями $A$ и $B$ имеет размерность $[\text{м}/\text{с}]$, вследствие чего приравнивать скорость к тангенсу в строгом смысле нельзя. Да и само отношение к отрезкам $AC$ и $CB$ как к катетам прямоугольного треугольника оправдано только **условностью** изображения осей $OX$ и $OT$ как взаимно перпендикулярных. Из-за содержательного различия величин $v$ и $\operatorname{tg}\angle ABC$ скорости один метр в секунду может соответствовать, например, значение тангенса $1/2$, если в соответствии с принятыми масштабами на координатных осях секунда изображена на графике отрезком в два раза более длинным, чем отрезок, изображающий метр. С принципиально иной ситуацией мы будем иметь дело в модели мира Минковского.

Прежде всего, в псевдоевклидовой плоскости ось $OX$ пространственных координат и ось $OY$, по которой откладываются хоть и пропорциональные времени отрезки (3.110), но тоже имеющие смысл расстояний в псевдоевклидовом пространстве, являются одномерными подпространствами безусловно **единого двумерного** вещественного псевдоевклидова пространства $OXY$ (одномерного комплексного) и безусловно псевдоортогональны друг к другу. Хотя отношение псевдоортогональности имеет содержательное отличие от перпендикулярности на собственно евклидовой плоскости, псевдоортогональные стороны треугольника полноценно заслуживают названия катетов, поскольку отношения сторон такого треугольника имеют, как показано в § 12 (см. (3.65), (3.81), (3.83′)), геометрический смысл соответствующих тригонометрических функций угла в псевдоевклидовой плоскости. Равенство (3.107) **имеет силу универсального закона природы** и определяет связь между численным значением скорости $v$ и значением тангенса угла $i\psi$ **объективно**, как не зависящую от произвола субъекта, строящего график движения материальной точки. Действительно, равенство (3.107) может быть представлено в виде

$$v = -c \cdot \operatorname{th} \psi = (i \cdot i) \cdot c \cdot \operatorname{th} \psi = (ic) \cdot \operatorname{tg}(i\psi). \qquad (3.114)$$

В равенстве (3.114), равносильном равенству (3.107), коэффициент $ic$, имеющий размерность $[\text{м}/\text{с}]$, согласовывает ("уравнивает") размерности величин в правой и левой частях, а так как этот коэффициент является универсальной мировой константой, то согласно (3.114), (3.107) существует объективная взаимно однозначная связь численного значения наблюдаемой скорости $v$ материальной точки с численным значением угла $i\psi$, и физический смысл этой связи надлежит выяснить.

Подставив в уравнение (3.113) произвольного одномерного движения материальной точки выражение

$$t = y/c\ ,$$

равносильное (3.106), придадим уравнению (3.113) вид

$$x = F(y/c) = f(y). \qquad (3.115)$$

Хотя формально уравнение (3.115) отличается только заменой аргумента $t$ на аргумент $y$ от уравнения (3.113), написанного для классического понимания движения материальной точки, важное содержательное различие этих уравнений заключается в том, что уравнение (3.115) в силу учёта в нём равенства (3.106) Минковского, приспособлено для построения графика движения не только на обычной собственно евклидовой плоскости, но также на плоскости псевдоевклидовой. Уравнение (3.115) определяет на псевдоевклидовой плоскости линию, которую Герман Минковский назвал **мировой линией**, хотя он ещё не пользовался термином "псевдоевклидово пространство". Макс Борн, также не пользуясь этим термином, писал: «... мировую линию следует понимать как изображение движения точки» [17, с. 288]. В качестве первого шага к постижению глубокого физического смысла мировой линии мы можем отнестись к ней как графику движения материальной точки, построенному на псевдоевклидовой плоскости. При этом сразу же вызывает интерес то обстоятельство, что хотя никто до Минковского не додумывался строить графики движения тел на плоскости с непривычными метрическими свойствами, в таких графиках нашёлся ключ к пониманию некоторых фундаментальных закономерностей природы. Так **не строит ли сама природа эти графики**, т.е. мировые линии?

В преобразовании (3.103′) координат векторов на псевдоевклидовой плоскости угол $i\psi$ есть угол, отсчитываемый от вектора $f$ нештрихованного базиса (координатной оси $OY$) к орту $f'$ штрихованного базиса (координатной оси $OY'$), а в лоренцевых преобразованиях (3.104) $v$ есть скорость движения штрихованной ИСО по отношению к нештрихованной ИСО (см. рис. 2.2 в § 4). В системе координат нештрихованной ИСО уравнение движения материальной точки $O'$, принятой за начало штрихованной системы координат, имеет вид

$$x = vt.$$

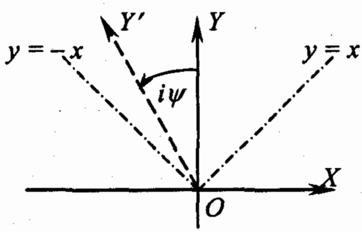


Рис. 3.5

График этой функции, построенный на псевдоевклидовой плоскости в псевдоортонормированной системе координат $OXY$, изображён на рис. 3.5 как ось $OY'$ штрихованной псевдоортонормированной системы координат. В задаче о преобразовании координат векторов на псевдоевклидовой плоскости угол $i\psi$, отразившийся в формулах (3.103′) своим вещественным параметром $\psi$, это и есть угол между координатными осями $OY$ и $OY'$. Сама ось $OY$ на рис. 3.5 имеет смысл графика движения (покоя) материальной точки $O$, принятой за начало координатной системы нештрихованной ИСО. Действительно, координата $x = 0$ материальной точки $O$ в нештрихованной ИСО не изменяется с течением времени, а уравнение оси $OY$ как раз и имеет вид $x = 0$. Таким образом, мировая линия $OY'$, образующая угол $i\psi$ с мировой линией $OY$, воспринимается наблюдателем, связанным с нештрихованной ИСО, в виде материальной точки, движущейся со скоростью $v$, которая, по-видимому, связана с углом $i\psi$ равенством (3.114).

В общем случае мировая линия может быть кривой, что соответствует общей закономерности (3.113) движения материальной точки с переменной скоростью. На рис. 3.6 такая мировая линия (3.115), отнесённая к псевдоортонормированной правой системе координат $OXY$ псевдоевклидовой плоскости, изображена в виде дуги $PQ$. Возьмём на этой дуге точку $Q$ с координатами $x, y$ (изображающую состояние $x$, $t$ материальной точки) и рассмотрим переход из неё в бесконечно близкую точку $Q_1$ той же мировой линии, порождающий приращения координат $dx$ и $dy$. С бесконечно малым участком $QQ_1$ кривой совпадает касательная к ней, но так как нарисовать и рассмотреть очень малый участок мы не сможем, то на рис. 3.6 элемент $QQ_1$ линии и его проекции на координатные оси показаны в сильно увеличенном масштабе в виде треугольника $QQ_1S$ с псевдоортогональными сторонами $QS$ и $SQ_1$. При вычислении тангенса угла $SQQ_1$ надо учесть, что длина катета $QS$ выражается мнимым числом $i \cdot dy$:

$$\operatorname{tg}\angle SQQ_1 = \frac{|SQ_1|}{|QS|} = \frac{dx}{d(iy)} = \frac{dx}{i\cdot dy}.$$

Подставляя сюда равенство

$$dy = c\cdot dt, \tag{3.116}$$

вытекающее из (3.106) в результате дифференцирования, получим

$$\operatorname{tg}\angle SQQ_1 = \frac{dx}{i\cdot c\cdot dt} = \frac{v}{ic},$$

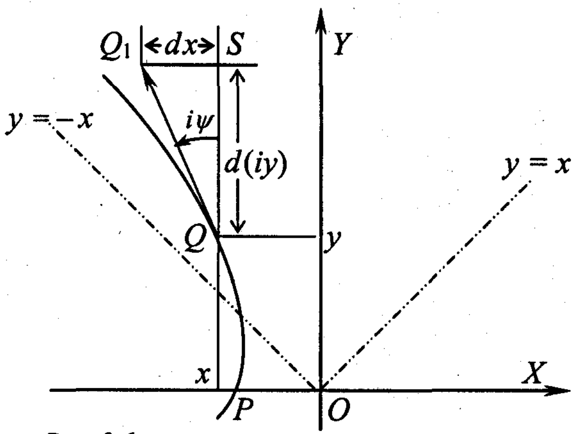


Рис. 3.6

ибо производная $dx/dt$ имеет физический смысл скорости материальной точки, соответствующей мировой линии $PQ$. Записав последнее равенство в форме

$$v = (ic)\cdot \operatorname{tg}\angle SQQ_1,$$

видим, что оно совпадает с универсальным равенством (3.114), если угол $i\psi$ понимать как угол $\angle SQQ_1$, который касательная $QQ_1$ к мировой линии $PQ$, определённой уравнением (3.115), образует с мировой прямой $OY$, служащей графиком движения материальной точки $O$ начала координат нештрихованной ИСО. Итак, равенство (3.106), отчётливо выражающее в записи (3.110) **пространственную природу времени**, действительно является **главным** ключом к выяснению псевдоевклидовой геометрической подоплёки преобразований Лоренца и всей специальной теории относительности, а равенство (3.107), равносильное равенству (3.114), выводится в качестве следствия из равенства Минковского (3.106) через посредство понятия мировой линии.

Отныне нам придётся пользоваться двумя различными, но взаимосвязанными точками зрения на материальные объекты. Для классической механики, материальные объекты являются материальными точками, и движение их рассматривается по отношению к инерциальным системам отсчёта пространства и времени (ИСО). Каждая ИСО состоит из координатной системы, связанной с определёнными взаимно неподвижными материальными точками, и из часов, неподвижных относительно этой координатной системы. Переход от одной ИСО (нештрихованной) к другой ИСО (штрихованной) описывается преобразованиями Лоренца. С точки зрения модели мира Минковского, материальные объекты являются мировыми линиями, которые для начала можно считать графиками движения материальных точек, построенными в псевдоевклидовом пространстве. Пока мы ограничиваемся рассмотрением движений материальных точек в одномерном наблюдаемом пространстве, мировые линии таких движений принадлежат двумерному псевдоевклидову пространству (плоскости), а форма каждой мировой линии выражается её уравнением вида (3.115) $x = f(y)$ по отношению к определённой псевдоортонормированной системе координат $OXY$ в псевдоевклидовой плоскости. Связь между инерциальной системой отсчёта пространства и времени в наблюдаемом собственно евклидовом пространстве и соответствующей ей псевдоортонормированной системой координат в псевдоевклидовом пространстве заключается в том, что материальная точка, принятая за начало системы координат данной ИСО, неподвижна относительно этой ИСО и график её движения в координатных осях $OXT$ (см. рис. 3.4) совпадает с осью $OT$ времени, а в псевдоортонормированной системе координат $OXY$ на псевдоевклидовой плоскости в роли графика движения материальной точки начала координат ИСО выступает мировая линия этой материальной точки, совпадающая с координатной осью $OY$, по которой отсчитываются расстояния $iy = (ic)\,t$. За точку начала системы координат $OXY$ псевдоевклидовой плоскости принимается то состояние материальной точки начала координат ИСО, которое принято за начало отсчёта времени. Подчеркнём, что координаты векторов однозначно определены по отношению к выбранному базису, а базисные векторы могут рассматриваться как свободные (не имеющие фиксированной точки приложения). Поэтому для определения координат векторов важны лишь направления осей координатной системы $OXY$ и не важен выбор точки начала координат этой системы. Выбор точки начала (полюса пространства) важен только для определения радиус-векторов, поскольку все они имеют своим началом точку полюса. Поэтому там, где это оправдано, мы будем понимать изменение псевдоортонормированной системы координат только как изменение направлений осей системы, а точку $O$ начала координат будем считать неизменной, что позволит говорить, например, о переходе от нештрихованной системы координат $OXY$ к штрихованной системе координат $OX'Y'$, не помечая штрихом точку $O$ начала координат.

## § 16. САМОЕ ЯРКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РЕАЛЬНОСТИ МИРОВЫХ ЛИНИЙ

Всем знакомо правило сложения скоростей, которое считалось истинным в классической механике. Это правило (2.1) иллюстрируется рисунком 2.1 в § 4, изображающем движение плота со скоростью $u$ на прямолинейном участке реки. Человек, идущий по плоту со скоростью $v'$, имеет относительно берега скорость $v$

$$v = u + v'. \qquad (3.117)$$

В формуле (3.117) скорости обозначены как скалярные величины, что допустимо при рассмотрении движений вдоль прямой и более удобно для вычислений. Простая и не вызывающая сомнений формула (3.117) стала камнем преткновения, когда наука занялась пристальным исследованием явления распространения света, ибо с такой формулой несовместимо постоянство скорости света по отношению к любым системам отсчёта, на которое указывали опыты по обнаружению эфирного ветра, описанные в § 7.

Формуле (3.117) противоречат постулаты Эйнштейна, а из них (через посредство лоренцевых преобразований) вытекает так называемая *релятивистская* формула сложения скоростей

$$v = \frac{u + v'}{1 + \dfrac{u v'}{c^2}}. \qquad (3.118)$$

При значениях скоростей $u$ и $v'$, значительно меньших, чем скорость (3.112) света в вакууме формула (3.118) даёт значения скорости $v$, практически не отличающиеся от значений, определённых по формуле (3.117). Но различие становится заметным и даже доходящим до принципиального противоречия при скоростях, близких к скорости света.

Представим следующую ситуацию. В потоке космических лучей летит навстречу Земле радиоактивное ядро атома со скоростью $u = 0{,}5\,c$, равной половине скорости света, и при распаде этого ядра испускается электрон, летящий по тому же направлению к Земле со скоростью $v' = 0{,}8\,c$ по отношению к ядру. Тогда по формуле (3.117) скорость $v$ электрона относительно Земли должна превысить скорость света (3.112)

$$v = 0{,}5\,c + 0{,}8\,c = 1{,}3\,c,$$

что противоречит современным теоретическим представлениям и экспериментальным данным. По формуле же (3.118) получается

$$v = \frac{0{,}5\,c + 0{,}8\,c}{1 + \dfrac{0{,}5\,c \cdot 0{,}8\,c}{c^2}} = \frac{1{,}3\,c}{1{,}4} = 0{,}92857142 \cdot c$$

в согласии с теорией и экспериментом. Даже если радиоактивное ядро излучит $\gamma$ – квант, движущийся со скоростью света $v' = c$ относительно ядра, то и по отношению к Земле скорость $\gamma$–кванта будет равна $c$:

$$v = \frac{0,5c + c}{1 + \frac{0,5c \cdot c}{c^2}} = \frac{1,5c}{1,5} = c.$$

Последним результатом подтверждается на частном примере постулат Эйнштейна о постоянстве скорости света и такое же подтверждение получается для любых значений переносной скорости $u$:

$$v = \frac{u + c}{1 + \frac{uc}{c^2}} = \frac{u + c}{1 + \frac{u}{c}} = \frac{u + c}{c + u} \cdot c = c. \qquad (3.119)$$

Формула (3.118) имеет силу точного закона природы, а формула (3.117) является приблизительным частным вариантом формулы (3.118), которым можно пользоваться при значениях скоростей движения $u$, $v'$, $v$, пренебрежимо малых по сравнению со скоростью света (3.112). Достоинства формулы (3.118) высветятся ещё ярче, если мы осмыслим её с позиций модели мира Минковского, для которой закономерность (3.118) является естественной.

Пусть в нештрихованной инерциальной системе отсчёта начало системы координат $OX$ связано с материальной точкой $O$. Этой ИСО будет соответствовать в псевдоевклидовой плоскости, изображённой на рис. 3.7, псевдоортонормированная система координат $OXY$. По прямой $OY$ направлена мировая линия материальной точки $O$. Если материальная точка $O'$, принятая за начало координатной системы $O'X'$ штрихованной ИСО (изображённой на рис. 2.2 в § 4), движется со скоростью $u$ вдоль оси $OX$, то мировая линия материальной точки $O'$ будет направлена по координатной оси $OY'$ в псевдоевклидовой плоскости $OXY$ на рис. 3.7. Угол $i\psi$ между осями $OY$ и $OY'$ определяется из универсального соотношения (3.114)

$$\operatorname{tg}(i\psi) = \frac{u}{ic}. \qquad (3.120)$$

Пусть материальная точка $A$ движется в наблюдаемом пространстве вдоль осей $OX$ и $O'X'$, изображённых на рис. 2.2 в § 4, со скоростью $v'$ относительно штрихованной ИСО. Тогда мировая линия $OA$ материальной точки $A$ образует с осью $OY'$ угол $i\varphi$, определяемый соотношением типа (3.114)

$$\operatorname{tg}(i\varphi) = \frac{v'}{ic}. \qquad (3.120')$$

С осью $OY$ мировая линия $OA$ образует угол $i\psi + i\varphi$, связанный со скоростью $v$ материальной точки $A$ относительно нештрихованной ИСО соотношением

$$\operatorname{tg}(i\psi+i\varphi) = \frac{v}{ic}. \qquad (3.120'')$$

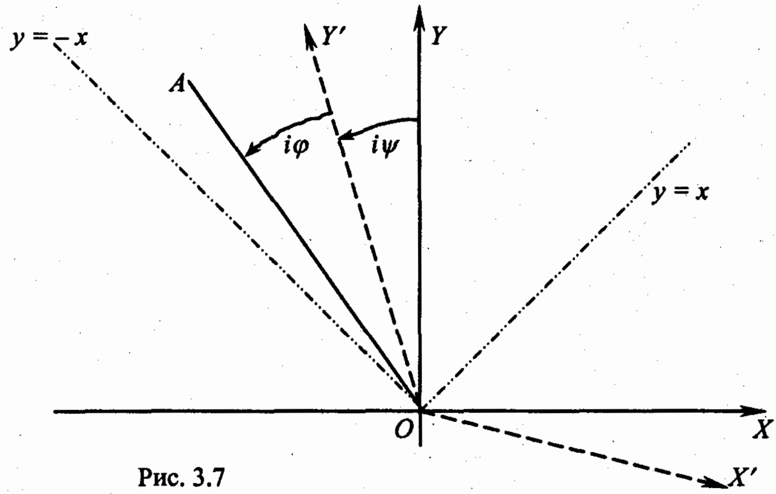


Рис. 3.7

Известная тригонометрическая формула тангенса суммы двух углов остаётся справедливой и для мнимых значений углов на псевдоевклидовой плоскости:

$$\operatorname{tg}(i\psi+i\varphi) = \frac{\operatorname{tg}(i\psi)+\operatorname{tg}(i\varphi)}{1-\operatorname{tg}(i\psi)\cdot\operatorname{tg}(i\varphi)}. \qquad (3.121)$$

Подставляя в (3.121) выражения тангенсов (3.120), (3.120′) и (3.120″), получим

$$\frac{v}{ic} = \frac{1}{ic}\cdot\frac{u+v'}{1-\dfrac{u}{ic}\cdot\dfrac{v'}{ic}} = \frac{1}{ic}\cdot\frac{u+v'}{1+\dfrac{uv'}{c^2}},$$

а после умножения обеих частей последнего равенства на $ic$ придём к формуле (3.118).

Таким образом, за странной и громоздкой с виду формулой (3.118) так называемого релятивистского закона сложения скоростей скрывается просто-напросто **тригонометрическое тождество** (3.121), зашифрованное с помощью равенства (3.114), равносильного равенству (3.107). В таком понимании формула (3.118) в смысле наглядной убедительности своего содержания не только не уступает классической формуле (3.117), приблизительно верной лишь при малых скоростях, но даже превосходит её простотой и естественностью. А строгая точность и универсальность формулы (3.118) говорит о том, что **в природе в действительности осуществ-**

**ляется не сложение скоростей материальных точек, а сложение углов между мировыми линиями.**

Тригонометрическое истолкование (3.121) закона (3.118) сложения скоростей позволяет объяснить **постоянство скорости света**, принятое Эйнштейном в качестве второго основополагающего постулата теории относительности. В конце § 12 было отмечено (см. (3.80)), что на псевдоевклидовой плоскости каждое изотропное направление образует бесконечно большой угол $\pm i\infty$ с любым неизотропным направлением. Но любой мнимоединичный вектор верхнего сектора может быть выбран в качестве вектора $f$ псевдоортонормированного базиса псевдоевклидовой плоскости, и следовательно, любой луч, принадлежащий верхнему сектору и исходящий из полюса $O$, может быть принят за ось $OY$ псевдоортонормированной системы координат $OXY$. Ось же $OY$ может представлять собой, как показано выше, построенный в псевдоевклидовой плоскости график движения (мировую линию) материальной точки начала координат некоторой инерциальной системы отсчёта (ИСО). Таким образом, каждой псевдоортонормированной системе координат в псевдоевклидовой плоскости соответствует определённая ИСО в наблюдаемом пространстве. И тот факт, что угол между изотропной прямой и **любой** осью $OY$ бесконечно велик ($i\psi = \pm i\infty$), означает (в силу равенства (3.114)), что в **любой** ИСО изотропная должна восприниматься в виде точки, движущейся со скоростью

$$v = (ic)\cdot \operatorname{tg}(i\psi) = (ic)\cdot \operatorname{tg}(\pm i\infty) = (ic)\cdot i\cdot \operatorname{th}(\pm\infty) =$$
$$= i^2\cdot c\cdot(\pm 1) = \mp c, \qquad (3.122)$$

т.е. **скоростью света**. Здесь мы учли, что значения гиперболического тангенса стремятся к +1 или −1 при стремлении вещественного аргумента этой функции к положительной или отрицательной бесконечности (см. (3.84), (3.85) в конце § 12 или графики гиперболических функций в любом справочнике по высшей математике). Объект, движущийся со скоростью света $c$, есть не что иное как световой (электромагнитный) сигнал.

Попутно мы выяснили, что явление, воспринимаемое нами как распространение электромагнитного сигнала, обусловлено физическим воздействием, передаваемым по изотропной. Это должно быть отмечено в качестве важного принципа модели мира Минковского:

| в мировом псевдоевклидовом пространстве электромагнитные воздействия могут передаваться только по изотропным прямым. | (3. 123) |
|---|---|

Так же просто объясняется первый постулат Эйнштейна — о равноправии всех инерциальных систем отсчёта. Это просто иносказательная констатация очевидного геометрического факта равноправия всех псевдоортонормированных систем координат в псевдоевклидовой плоскости.

## § 17. ЯВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В § 4 рассмотрено представление классической науки о Вселенной как системе материальных точек (см. (2.8), (2.7)). В полном согласии с фундаментальной ролью материальных точек в классической картине мира, пространственно-временные и динамические характеристики мира тел воспринимались как абсолютные инварианты (не зависящие от условий наблюдения). Но в специальной теории относительности выяснилась зависимость классических инвариантов от выбора системы отсчёта пространства и времени, и это уже ставило под сомнение статус материальных точек как абсолютных объектов. В объяснении специальной теории относительности, предложенном Германом Минковским, **в роли носителей инвариантных характеристик материального мира выступают мировые линии**. В докладе [43, с. 168] Минковский сказал: «Мы получаем тогда в качестве изображения, так сказать, вечного жизненного пути субстанциальной точки некоторую кривую в мире, *мировую линию*, точки которой можно однозначно отнести к параметру $t$ во всём интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Весь мир представляется разложенным на такие мировые линии, и мне хотелось бы сразу отметить, что, по моему мнению, физические законы могли бы найти своё наисовершеннейшее выражение как взаимоотношения между этими мировыми линиями». В последней фразе ясно сказалось понимание Минковским мировых линий как материальных объектов (или, по его терминологии, субстанциальных объектов), определяющих характер **физических** законов. Но предшествующие слова об однозначной соотнесённости точек мировой линии с параметром времени $t$ «во всём интервале от $-\infty$ до $+\infty$» подтолкнули современников и потомков к представлению о **предопределённости** хода событий (мировых точек), "прорисованных" мировыми линиями. Примером такого вульгаризованного представления может служить следующее высказывание: «Геометрия, связывающая пространство и время в четырёхмерное многообразие, была разработана профессором из Бреслау Г. Минковским в соответствии с преобразованием Лоренца и другими следствиями из специальной теории относительности. С точки зрения реальности такого мира **всё, что может произойти, уже существует в будущем и продолжает существовать в прошлом. Перемещаясь по оси времени, мы только сталкиваемся с событиями в своём настоящем»** (выделено жирным шрифтом в книге [52]). Однако это уже слишком предвзятое толкование слов Минковского, который мог иметь в виду и то, что мировые линии, простираясь из прошлого в будущее, обретают свою определённость, "прорисованность", реализованность лишь в процессе превращения будущего через настоящее в прошлое по мере течения времени. А то, что изменения отсчётов времени

$t$ принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty; +\infty)$, было общепринятым представлением классической физики.

Взгляд на ход времени как процесс образования мировых линий отстаивает автор настоящих строк в книгах [41], [42], [50]. При этом взгляде мировые линии представляются материальными объектами, которые уже сформировались, проявились в своей прошлой части, а в будущем их ещё нет, поскольку каждое из будущих состояний мира наступит лишь тогда, когда до него дойдёт процесс проявления мировых линий, который я назвал в [41, с. 124] **мировым проявляющим процессом**. Фронт мирового проявляющего процесса, или **проявляющий фронт**, служит границей проявленности, сформированности, материализованности мировых линий и отделяет на каждой линии в качестве её **настоящего момента времени** уже реализованное прошлое от ещё не реализованного, не проявленного будущего. Процесс течения времени заключается в том, что настоящий момент времени, как совокупность всех точек мирового проявляющего фронта, безостановочно перемещается от прошлого к будущему, и это именно **физический объективный процесс**, совершающийся в материальном мире, а не субъективное скольжение наших восприятий по оси времени, "сталкивающее" нас в нашем настоящем с уже существующими в будущем событиями (наподобие кинофильма). Наша убеждённость в том, что не только мы сами, но и все существующие во Вселенной тела вовлечены в процесс течения времени, может быть осмыслена как охваченность всего мироздания мировым проявляющим процессом, формирующим мировые линии. Этот процесс и создаёт у нас впечатление хода времени. По мере перемещения проявляющего фронта в мировом пространстве он оставляет позади себя проявленную область прошлого, а перед проявляющим фронтом в направлении его перемещения мировые линии ещё не сформировались, отсутствуют. Обсуждением предполагаемой формы проявляющего фронта и направлений его перемещения мы займёмся позже, после того, как реальность мировых линий и процесса их роста будет более детально обоснована на макроскопическом уровне рассмотрения проблемы.

Подобно тому, как понятие материальной точки в классической механике представляет обобщённую модель телесных макрообъектов, а проникновение в микромир стало предметом квантовой механики, так и понятие мировой линии в модели мира Минковского представляет по существу макрообъект. Механизм формирования мировых линий в модели Минковского самой по себе не раскрывается, но, выясняя реальность мировых линий как материальных объектов, формируемых природой, мы вынуждены будем обратиться к представлению о формах материи более тонких и глубоких уровней, чем уровень корпускулярный, воспринимаемый нами в виде тел. Представления об утончающихся градациях материи уже стали неотъемлемой частью современной научной парадигмы. Как отмечено в книге [53, с. 100], «... история определённо научила нас, что каждый раз, когда мы углубляем наше понимание Вселенной, мы находим всё меньшие компоненты микромира, составляющие более тонкий уровень организации материи».

Мир тонкоматериальных форм не укладывается в систему образов и математических описаний, апробированных на уровне более грубых материальных форм корпускулярного мира тел. Математические соотношения, которые мы в первую очередь используем для выражения закономерностей каждого уровня материи, не всегда легко поддаются образному истолкованию. Если такое истолкование найдено для специальной теории относительности в виде модели мира Минковского, то квантовая механика ставит перед нами более трудные проблемы. В математическом аппарате квантовой механики выделяется в качестве основного объекта так называемая функция состояния, которую общепринято обозначать символом $\Psi$ и называть пси-функцией. Эта функция принимает комплексные значения и определяет состояние квантовомеханического объекта, механические характеристики которого (координаты в наблюдаемом пространстве, импульс, момент импульса, энергия) описываются с помощью линейных операторов, действующих на пси-функцию. Макс Борн дал в 1926 г. вероятностное истолкование $\Psi$-функции, которое в простейшем случае (для отдельно взятой элементарной частицы) выражается формулой

$$w(x,y,z,t) = \frac{dW}{dV} = \left|\Psi(x,y,z,t)\right|^2, \qquad (3.124)$$

где $|\Psi(x, y, z, t)|$ — модуль комплексного значения $\Psi$-функции, $dW$ — сколь угодно малая вероятность того, что частица, состояние которой определяется данной $\Psi$-функцией, окажется в момент времени $t$ в сколь угодно малом объёме $dV$ наблюдаемого пространства, являющемся окрестностью точки с координатами $x$, $y$, $z$, $t$, и наконец, $w(x, y, z, t)$ — плотность вероятности этого события. Та область пространства, в которой плотность $w(x, y, z, t)$ вероятности достигает значений, близких к максимально возможному, воспринимается нами как местоположение частицы, точнее — наиболее вероятное место её обнаружения, хотя не исключается, что частица может быть обнаружена и в других местах, но с гораздо меньшей вероятностью. Таким образом, в квантовомеханическом описании объект *материальная точка* оказывается формой восприятия нами чего-то отличного от привычного образа телесной частицы. При этом общие идеи атомизма реализуются в квантовой механике в форме квантования (дискретности) значений механических характеристик.

В современной теории суперструн предлагаются более глубокие истолкования квантовомеханических явлений. Теоретически и экспериментально установлено, что протоны и нейтроны состоят из частиц меньшего размера, названных *кварками*, и теория берётся за исследование структуры кварков, электронов, мюонов и нейтрино. «Она утверждает, что если бы мы могли исследовать эти частицы с более высокой точностью, на много порядков превышающей наши современные технические возможности, мы обнаружили бы, что каждая из частиц является не точечным образованием, а состоит из крошечной одномерной *петли*. Внутри каждой частицы — вибрирующее, колеблющееся, пляшущее волокно, подобное бесконечно тонкой резиновой ленте, которое физики… назвали *струной*… Теория струн добавляет новый микроскопический уровень — колеблющуюся петлю — к уже известной иерархии, идущей от атомов к протонам, нейтронам, электронам и кваркам… Основываясь на одном принципе — что на самом микроскопическом уровне всё состоит из комбинаций вибрирующих волокон, — теория струн даёт единый способ объяснения свойств всех взаимодействий и всех видов материи» [53, с. 18-19].

На языке популярно упрощённых образов можно ограничиться предположением о существовании тонкой и глубокой формы материи, которая в невозмущённом, недифференцированном состоянии не даёт о себе знать нам в виде каких-либо физических явлений. В ходе мирового проявляющего процесса из этой материи формируются мировые линии. Можно ожидать, что важную роль в формировании мировых линий должны играть явления, родственные образованию вихрей, которые сказываются в наличии спина у элементарных частиц, в гипотезе о торсионных полях и в широкой распространённости вихреобразных структур в природе вплоть до галактик. Вглядевшись внимательней в цитированное (в первом абзаце этого параграфа) высказывание Минковского, нетрудно увидеть, что он назвал мировые линии изображениями «вечного жизненного пути субстанциальной точки». Не означает ли это, что акцент следует делать не на том, что мировая линия есть **график** (изображение), а на том, мировая линия изображает **путь**, т.е. **процесс**, ибо само понятие пути включает в себя представление о его **постепенном преодолении**, отличном от омертвевшей завершённости графика. Очевидно, именно отношение к мировой линии как к **графику** движения материальной точки послужило препятствием к осмыслению мировой линии как естественного физического процесса. Ведь на графики принято смотреть как на геометрическую иллюстрацию (притом условную) закономерности движения материальных точек, определённой в равной мере для прошлого и будущего времени в духе классического детерминизма, выраженного в уравнениях Лагранжа. Кроме того, на протяжении десятилетий в научном сообществе бытовало отношение к модели мира Минковского как к чисто формальному, условному математическому ухищрению, ценность которого сводится лишь к удобству систематизации закономерностей специальной теории относительности и на которое можно не распространять все требования, предъявляемые к физической реальности. Такое отношение не стимулировало серьёзной заинтересованности в выяснении физического смысла течения времени с новых позиций, открываемых моделью Минковского. В свою очередь, представление о предопределённости, которое связывали с понятием мировых линий, рассматривалось как серьёзный аргумент против их реальности. В § 8 настоящей книги приведены вошедшие в университетские учебники высказывания о фиктивности мировых линий (ссылки [38], [39], [40]), и такое отношение к модели мира Минковского на деле ещё не изжито в наши дни. Между тем, как раз представление о формировании мировых линий гармонически сочетает механическую предопределённость, позволяющую заранее рассчитывать движения небесных тел, с возможностью намеренно изменять ход будущих событий через изменение направлений роста мировых линий в нарушение их предопределённости.

Вопрос о том, почему мы не воспринимаем зрительно мировые линии в их натуральной протяжённости, решается в модели Минковского очень просто и убедительно. Пусть на рис. 3.8 мировая линия наблюдателя совпадает с осью $OY$ псевдоортонормированной системы координат в псевдоевклидовой плоскости, и точка $O$ начала координат соответствует состоянию наблюдателя в его настоящий момент времени. Тогда часть прямой $OY$, определяемая неравенством $t < 0$ (изображённая на рисунке жирной линией), заключает в себе состояния наблюдателя, уже реализовавшиеся, или проявившиеся в наблюдаемом мире. Так как электромагнитные воздействия могут передаваться в мировом псевдоевклидовом пространстве только по изотропным линиям (см. (3.123) в конце § 16), то наблюдатель, находящийся в состоянии, отмеченном на рисунке мировой точкой $O$, может воспринять электромагнитный сигнал только от точки $P$ на другой мировой линии $PF$, поскольку именно в точке $P$ пересекает ту мировую линию изотропная прямая $x = -y$, проходящая через мировую точку $O$ наблюдателя. Любая другая точка $R$ мировой линии $PF$ не будет видна наблюдателю, связанному с точкой $O$, поскольку отрезок $OR$ не является изотропным. Но по прошествии некоторого времени $t$ граница проявленности мировой линии $OY$ окажется перенесённой проявляющим процессом из точки $O$ в точку $Q$, лежащую на одной изотропной с точкой $R$ (отрезок $QR$ параллелен изотропной $x = -y$). Тогда наблюдатель из точки $Q$ увидит мировую точку $R$, а точка $P$ станет уже недоступной его восприятию, так как отрезок $QP$ не является изотропным и не может служить каналом передачи электромагнитных воздействий. Таким образом, **мы лишены возможности видеть в один и тот же момент времени** (в одном и том же своем состоянии, из одной мировой точки) **р а з л и ч н ы е точки другой мировой линии, т. е. не можем видеть сразу какой-нибудь участок ее.** По этой причине протяженность псевдоевклидова пространства в направлении мировой линии $OY$ недоступна нашему зрительному восприятию. Так как мы не воспринимаем зрительно различие значений координаты $y = c\,t$ в виде пространственного различия, то протяжённость псевдоевклидова пространства в направлении оси $OY$ оказывается "скраденной" от нас, вследствие чего четырехмерное мировое пространство представляется нам трехмерным и обладающим собственно евклидовыми метрическими свойствами (а двумерному сечению четырёхмерного пространства плоскостью $OXY$ будет соответствовать одномерное пространство оси $OX$ в наблюдаемом пространстве).

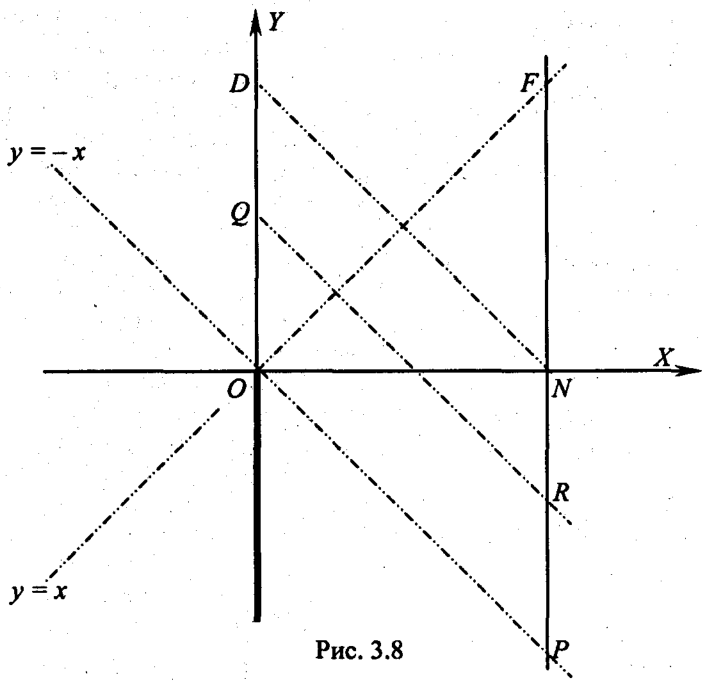


Рис. 3.8

Через мировую точку $O$ наблюдателя проходит, кроме изотропной $OP$ ($x = -y$), изотропная прямая $x = y$, пересекающая мировую линию $PF$ в точке $F$, координата $y_F$ которой соответствует более позднему моменту времени, чем момент, отмеченный мировой точкой $O$. Не означает ли это, что можно увидеть будущее состояние тела, соответствующего мировой линии $PF$? Ни наш повседневный опыт, ни научные эксперименты не подтверждают возможность приёма электромагнитных сигналов из будущего. Это объясняется тем, что в будущем, в отличие от прошлого, нам еще нечего видеть. **В прошлом находятся уже сформировавшиеся, реализованные, проявившиеся в природе части мировых линий, а в области псевдоевклидова пространства, соответствующей будущим моментам времени, мировые линии еще не сформировались, не проявились.** Границу между проявленной (прошлой) и еще не проявленной (будущей) частями мировой линии каждый из нас воспринимает как настоящий момент времени. Точку $N$ мировой линии $PF$, одновременную точке $O$ наблюдателя в его системе отсчёта, наблюдатель сможет увидеть лишь тогда, когда мировой проявляющий процесс (ход **времени**) перенесёт наблюдателя в мировую точку $D$, лежащую на одной **изотропной** с точкой $N$.

Итак, зрительные восприятия, в основе которых лежит электромагнитное воздействие на сетчатку глаза, позволяют нам в каждый момент времени “выхватывать” из мировой линии только одну её точку. Эту точку мы и считаем материальным объектом, называя его **материальной точкой**. В понятии материальной точки истинное сочетается с обманчивым. Истинно то, что мировую линию мы воспринимаем в виде точки, вернее, в виде последовательности точек, сменяющих одна другую. Истинно и то, что эти точки представляют состояния одного и того же материального объекта. Обманчиво то, что сам материальный объект мы считаем точечным (или занимающим некоторый объём наблюдаемом пространстве), не имеющим протяжённости в четвёртом измерении, а протяжённость материального объёкта в четвёртом измерении считаем чем-то отличным от пространства, а именно временем. Мировые линии, не будучи телами, представляют нечто большее, чем тела, служат основой *явления* тел.

Понятие мировой линии разрывает замкнутость атомистического мировоззрения (тела состоят из атомов, а атомы есть тела), для которого не имел смысла вопрос о происхождении атомов. В противовес представлению о самодостаточности атомов, с которых всё начинается и которыми всё заканчивается, понятие мировой линии предполагает наличие источников и причин вне её. Отсутствие мировых линий воспринимается нами как отсутствие тел, пустота. Однако, как считать пустотой то, из чего формируются материальные объекты, названные мировыми линиями? Повидимому, правильней будет предположить существование **субкорпускулярных** форм материи, из которых формируются мировые линии, воспринимаемые нами в виде материальных точек (тел).

Приверженцы классической картины мира не замечали очень важного парадокса. В классической картине, как и в модели мира Минковского, будущее считается не существующим. Но, согласно классическому мировоззрению, прошлое тоже не существует, потому что те конструкции из материальных точек, которые образовывали прошлые состояния материального мира, заменились новыми конструкциями, образующими мир современный. Однако и в классической картине мира зрительным восприятиям доступны только прошлые состояния материи, так как на прохождение световых сигналов от окружающих объектов требуется время, тем большее, чем больше расстояние до объектов в наблюдаемом пространстве. Но если прошлые состояния мира уже не существуют, то что же мы видим вокруг себя? В модели мира Минковского такой парадокс не возникает, ибо в ней **прошлое существует**. Его материализованность зафиксирована в проявленных частях мировых линий, существует в четырёхмерном мировом пространстве, и её-то мы воспринимаем через посредство электромагнитных воздействий, передающихся по изотропным.

Для классической картины мира в роли хранителя и переносчика всех образов прошлого должен был выступать мировой эфир, заполняющий бесконечное трёхмерное наблюдаемое пространство. Но и в этом есть своя парадоксальность. Удивительно, что колебания мирового эфира, несущие образы прошлого, должны сохраняться, не затухая и не размываясь на протяжении миллиардов лет, и они как бы защищены от интерференции с другими волнами, идущими со всех трёхмерных направлений от объектов самой различной удалённости. Нужна по меньшей мере четырёхмерность мироздания, чтобы дать возможность строгого упорядочения и разграничений в хаотическом "хозяйстве" эфирных колебаний.

## § 18. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭФФЕКТ СОКРАЩЕНИЯ ДЛИНЫ ДВИЖУЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ

Объяснение явления материальной точки, данное в предыдущем параграфе, примéним к объяснению эффекта сокращения длины движущегося стержня. Этот эффект теории относительности представляет самое серьёзное препятствие для примирения с ней неподготовленного сознания. Формально он выводится довольно просто из лоренцевых преобразований, а для осмысления его привлекаются соображения о синхронизации часов с учётом конечности скорости световых сигналов и относительности понятия одновременности событий. Но без решительного обращения к модели мира Минковского эти соображения оставляют впечатление теоретического формализма, не способного преодолеть подспудно господствующее в сознании представление о всяком теле, в том числе и стержне, как абсолютном материальном объекте, который должен обладать собственными характеристиками, не зависящими от условий его наблюдения.

Х.А. Лоренц в 1892 г. ещё мог полагать (довольно логично с классической точки зрения), что загадочный неуловимый мировой эфир вызывает деформирующее сокращение движущегося относительно него стержня. Но теория относительности А.Эйнштейна отрицает (вполне справедливо) наличие абсолютной системы отсчёта пространства и времени, позволяющей отличить абсолютный покой от движения, так что движение стержня по отношению к наблюдателю, считающемуся неподвижным, вполне равноправно движению наблюдателя по отношению к стержню, принятому за неподвижный. Поэтому как только мы согласимся с тем выводом, что чем больше скорость стержня по отношению к наблюдателю, тем короче стержень, нам тут же придётся ломать голову над вопросом, почему должна изменяться длина неподвижного стержня, если по отношению к нему движется наблюдатель. О чём же здесь в самом деле речь: о действительной (объективной) длине материального предмета или о кажущейся наблюдателю оценке этой длины? Такой же вопрос можно поставить в связи с относительностью (зависимостью от позиции наблюдателя) промежутков времени и массы тела, но там абсурдность (с классической точки зрения) относительности не столь резко бросается в глаза в связи с недостаточно ясным представлением о сущности времени и массы. С длиной же стержня как будто всё предельно ясно — мы видим и осязаем этот предмет и его длину, и трудно понять, почему стержень должен изменяться, если наблюдатель движется по отношению к нему.

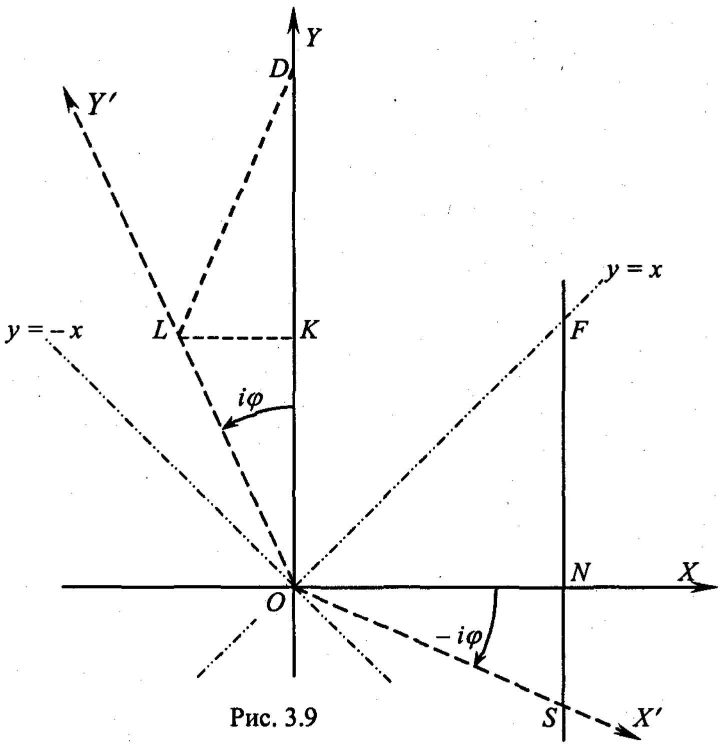


Рис. 3.9

Модель мира Минковского непринуждённо и убедительно снимает указанные выше недоумения. Для модели Минковского стержень — явление кажущееся. Такого самостоятельного объекта просто нет в природе, как нет в ней и объекта “материальная точка”. Материальная точка является лишь формой восприятия нами реального материального объекта — мировой линии, а стержень, рассматриваемый как система материальных точек, заполняющих отрезок прямой, представляет форму восприятия **полосы мировых линий**. Пусть это будет на рис. 3.9 сплошная полоса параллельных мировых прямых, ограниченная слева прямой $OY$, соответствующей материальной точке левого конца стержня, а справа — прямой $SF$, соответствующей материальной точке правого конца стержня. Наблюдатель, мировая линия которого принята за ось $OY$, отождествит полосу

$OYSF$ с **неподвижным** стержнем, поскольку координата $x$ точек каждой мировой линии в этой полосе имеет **постоянное для данной линии** значение. Поэтому длина неподвижного стержня будет справедливо оценена как разность абсцисс точек $N$ и $O$ (или любых других точек, одна из которых принадлежит прямой $OY$, а другая прямой $SF$, т.е. мировым прямым, воспринимаемым в виде материальных точек концов неподвижного стержня):

$$l = x_N - x_O = x_N - 0 = x_N = |ON|. \qquad (3.125)$$

Наблюдатель, мировая линия которого принята за ось $OY'$, наклонённую к оси $OY$ на угол $i\varphi$, будет воспринимать себя как движущегося со скоростью (3.114)

$$v = (ic) \cdot tg(i\varphi),$$

по отношению к стержню или, что то же, воспринимать себя неподвижным, а стержень движущимся по отношению к своей штрихованной инерциальной системе отсчёта (ИСО) пространства и времени. В самом деле, по отношению к штрихованной координатной системе $OX'Y'$ в псевдоевклидовой плоскости штрихованная абсцисса $x'$ точек каждой мировой прямой из полосы $OYSF$ изменяется вдоль этой мировой прямой (т.е. с течением времени). При этом ограничивающие полосу мировые прямые $OY$ и $SF$ будут восприниматься как материальные точки концов стержня. Для движущегося стержня (в отличие от неподвижного) принципиально важно, чтобы значения абсциссы обоих концов стержня были отнесены к **одному и тому же** моменту времени. Ведь если отмечать положения левого и правого концов движущегося стержня в различные (для данного наблюдателя) моменты времени, то разность абсцисс этих концов не будет представлять длину стержня. Но событиям, одновременным в штрихованной инерциальной системе отсчёта пространства и времени, соответствуют на псевдоевклидовой плоскости те мировые точки, которые лежат на одной и той же прямой, параллельной оси $OX'$ (псевдоортогональной к мировой прямой $OY'$ наблюдателя). В частности, такими будут события, представленные на рис. 3.9 мировыми точками $O$ и $S$. Значит в роли длины $l'$ движущегося стержня выступит разность штрихованных абсцисс точек $O$ и $S$

$$l' = |OS| = x'_S - x'_O = x'_S - 0 = x'_S. \qquad (3.126)$$

В треугольнике $ONS$ с псевдоортогональными сторонами $ON$ и $NS$ угол $NOS$ равен $(-i\varphi)$. Поэтому

$$\frac{|ON|}{|OS|} = \frac{l}{l'} = \cos(-i\varphi) = \operatorname{ch}\varphi. \qquad (3.127)$$

Подставляя в (3.127) выражения

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}, \qquad \operatorname{th}\varphi = -\frac{v}{c},$$

получим

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \text{th}^2\varphi} = l \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}\,. \qquad (3.128)$$

Так как при традиционном изложении специальной теории относительности равенство (3.128) выводится формально-математическим путём из преобразований Лоренца без опоры на модель мира Минковского, которая органически родственна лоренцевым преобразованиям, то читателю приходится осмысливать сокращение длины движущегося стержня с привычных позиций классической картины мира, для которой тело стержень есть материальный объект, существующий в пространстве и времени сам по себе, независимо от условий его наблюдения. Тогда зависимость длины стержня от выбора системы отсчёта пространства и времени производит впечатление мистического парадокса. Источник парадоксальности в том, что за материальный объект "стержень" принимается одна из возможных форм восприятия подлинно инвариантного материального объекта — полосы мировых линий. В действительности же не один и тот же стержень имеет различные длины по отношению к различным наблюдателям, а различные наблюдатели воспринимают в качестве стержней различные сечения одной и той же полосы мировых линий, ибо в роли длины стержня выступает длина сечения полосы мировых линий, псевдоортогонального к мировой прямой наблюдателя. Полоса мировых линий между прямыми $OY$ и $SF$ есть материальный объект, обладающий собственными характеристиками, которые не зависят от выбора координатной системы (инвариантны). Инвариантность свойственна также отрезкам $ON$ и $OS$ в мировом псевдоевклидовом пространстве, но если естественное различие этих отрезков подменяется представлением о различии длин одного и того же объекта (стержня), то получается ложный парадокс.

## § 19. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭФФЕКТ УМЕНЬШЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПРОМЕЖУТКОВ ВРЕМЕНИ

Наиболее ярко и кратко суть открытия Минковского выражается равенством (3.106), (3.110)

$$iy = (ic)t\,,$$

означающим, что пространственная протяжённость $iy$ в направлении координатной оси $OY$ воспринимается нами в виде промежутка времени $t$, пропорционального этой протяжённости. Так как мы не имеем возможности измерять протяжённость $iy$ непосредственно в единицах длины, то приходится измерять её **косвенно в единицах времени** с помощью некоторого периодического процесса (часов). Например, таким периодическим процессом будет гармоническое колебание материальной точки вдоль оси $OX$ с периодом $T$

$$x = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t+Tn)\right). \qquad (3.129)$$

Такой колеблющейся материальной точке соответствует **мировая линия** синусоидальной формы, уравнение которой получается из (3.129) с помощью равенства (3.106), (3.110):

$$x = \sin\left(\frac{2\pi}{cT}y\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{cT}y + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{cT}(y+\lambda n)\right), \qquad (3.129')$$

где

$$i\lambda = (ic)T \qquad (3.130)$$

— **длина волны** мировой линии (3.129′). Промежутку времени $t$, заключающему в себе $k$ периодов $T$ $(t = kT)$, соответствует **расстояние**

$$iy = (ic)t = (ic)Tk = (i\lambda)k \qquad (3.130')$$

вдоль **оси** $OY$ мировой линии (3.129′), заключающее в себе $k$ длин $i\lambda$ волны. Таким образом, привычному для нас измерению промежутка времени в периодах $T$ часового механизма соответствует измерение длины (3.130′) мировой линии в длинах волны (3.130) периодической мировой линии колеблющейся материальной точки часов.

Истолкование промежутка времени $t$ как длины $iy$ отрезка координатной оси $OY$, выраженное равенством (3.110), справедливо не только для оси $OY$, но и для любой мировой прямой (см. (3.109)). В частности, длина отрезка $OL$ мировой прямой $OY'$, принятой на рис. 3.9 за ось штрихованной псевдоортонормированной системы координат $OX'Y'$, будет в соответствующей ей штрихованной инерциальной системе отсчёта (ИСО) пространства и времени восприниматься в виде промежутка времени $t'_L$ согласно равенству

$$|OL| = iy'_L = (ic)\,t'_L. \qquad (3.131)$$

Отметим на оси $OY$ точку $K$, одновременную мировой точке (событию) $L$ в нештрихованной ИСО, т.е. имеющую такое же значение **нештрихованной** координаты

$$y_K = c\,t_K = c\,t_L = y_L. \qquad (3.132)$$

Равенства (3.132), равносильные равенству

$$t_K = t_L, \qquad (3.132')$$

представляют условие одновременности в нештрихованной ИСО событий $L$ и $K$. Сравним длины отрезков $OL$ и $OK$:

$$|OK| = iy_K = (ic)\,t_K, \qquad (3.133)$$

$$\cos(i\varphi) = \operatorname{ch}\varphi = \frac{|OK|}{|OL|} = \frac{iy_K}{iy'_L} = \frac{(ic)\,t_K}{(ic)\,t'_L} = \frac{t_K}{t'_L}. \qquad (3.134)$$

Отсюда следует

$$t'_L = \frac{t_K}{\operatorname{ch}\varphi} = t_K \cdot \sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi} = t_K \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}\,. \qquad (3.134')$$

Это простое равенство стало источником большого заблуждения в связи с отбрасыванием буквенных индексов при обозначениях моментов времени $t_K$ и $t'_L$. Формальные основания для такого отбрасывания кажутся на первый взгляд достаточными. Условие (3.132′) одновременности событий $K$ и $L$ **в нештрихованной** ИСО, выраженное равенством $t_K = t_L$ нештрихованных отсчётов времени этих событий, как будто бы позволяет заменить в равенстве (3.134′) символ $t_K$ символом $t_L$, придав этому равенству вид

$$t'_L = t_L \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}\,, \qquad (3.135)$$

означающий, что в левой и правой частях равенства (3.135) фигурируют **промежутки** времени $t'_L$ и $t_L$, определяемые **одним и тем же событием** $L$. Но тогда индекс, обозначающий событие, можно вообще отбросить ввиду произвола в выборе события и писать равенство (3.135) в виде

$$t' = t \cdot \sqrt{1 - (v/c)^2}\,, \qquad (3.135')$$

как его и пишут во всех учебниках, видя в соотношении (3.135) сравнение двух различных оценок **одного и того же** промежутка времени. Истоки такого взгляда коренятся в привычном представлении классической науки о едином универсальном времени.

В 1907 году А. Эйнштейн объяснил в статье [54] соотношение (3.135′) следующим образом: «... часы, движущиеся относительно некоторой системы отсчёта со скоростью $v$, идут в этой системе медленнее в отношении $1 : \sqrt{1 - (v/c)^2}$, чем те же часы в случае, если они покоятся относительно той же системы отсчёта». В книге [55], написанной Эйнштейном совместно с Л. Инфельдом в 1938 году и вышедшей третьим изданием в 1954 г. (при жизни Эйнштейна) имеются высказывания такого же смысла. Например: «Каждая система координат должна быть снабжена собственными часами, покоящимися в ней, так как движение изменяет ритм часов». Такой способ выражения (а значит и понимания) проник в издаваемые позже книги. Например, в «Теории поля» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица написано: « ... собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных» [40, с. 18]. Во второй из цитированных фраз дано совершенно неправильное истолкование правильного утверждения, выраженного в первой фразе. Что может означать замедление ритма или хода часов, если не такое изменение единицы измерения времени, когда каждая секунда, отмеренная движущимися часами, длится дольше, чем секунда, отмеренная по часам неподвижным? Будто бы в одном и том же промежутке времени укладываются различные количества "правильных" секунд, отсчитанных неподвижными часами, и "замедленных", "растянутых" секунд, отсчитанных часами движущимися. Но часы, изменяющие свой ритм, вообще непригодны в качестве измерительного прибора. Как раз наоборот, именно благодаря тому, что исправно функционирующим часам присуще свойство **сохранять свой ритм неизменным** при изменении скорости их перемещения в пространстве, они и способны обнаруживать различие промежутков времени $t_K$ и $t'_L$, обусловленное различием длин отрезков $OK$ и $OL$ мировых линий, изображённых на рис. 3.9.

Ошибка замены правильного равенства (3.134′) неправильными равенствами (3.135) и (3.135′) проистекает из того, что факт одновременности (3.132′) событий $K$ и $L$ относительно **нештрихованной** инерциальной системы отсчёта пространства и времени истолкован как равенство промежутка времени между событиями $O$ и $K$ промежутку времени между событиями $O$ и $L$. В действительности же эти промежутки времени определяются различными парами событий и различными длинами отрезков $OK$ и $OL$ в псевдоевклидовом мировом пространстве. При этом длина каждого из отрезков $OK$ и $OL$ является величиной инвариантной, не зависящей от выбора системы отсчёта пространства и времени.

Соотношение (3.134) длин (3.133) и (3.131) отрезков $OK$ и $OL$ есть соотношение между длиной проецируемого отрезка $OL$ и длиной его псевдоортогональной проекции $OK$ на ось $OY$. Если применить то же соотношение к отрезкам мировых линий, являющимся материальными объектами, то длина отрезка представит объективную, собственную, инвариантную временну́ю характеристику материального объекта, а проекция отрезка на некоторую ось координат $OY$ будет лишь формой восприятия реального промежутка, зависящей от позиции наблюдателя, связанного с мировой линией $OY$. Справедливость этого соотношения подтверждается экспериментально. Под действием космических лучей в земной атмосфере (на высотах 20–30 км) рождаются элементарные частицы мю-мезоны, называемые также мюонами. Средняя продолжительность жизни мюона, измеренная в такой ИСО, относительно которой он неподвижен или имеет малую скорость, равна $t_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ секунд (за это время число мюонов уменьшается вследствие их распада в $e = 2{,}72$ раз). Среднему времени жизни $t_0$ соответствует длина мировой линии мюона $(i\,c)\,t_0 = i \cdot 660$ метров. Если бы даже мюоны двигались со скоростью света, то они могли бы пролететь за своё среднее время жизни расстояние не больше 660 метров. В таком случае интенсивность потока мюонов на уровне моря была бы в тысячи раз меньше, чем наблюдаемая в действительности. Объяснение экспериментальных данных заключается в том, что для **быстрых** мюонов **наблюдаемое** в земной системе отсчёта время жизни оказывается в десятки раз больше их собственного времени жизни $t_0$. В самом деле, если на рис. 3.9 длина отрезка $OL$ равна $(ic)t_0 = i \cdot 660$ м, а угол $i\varphi$ равен $3i$, то косинус этого угла равен $\cos(3i) = \mathrm{ch}\, 3 = 10{,}07$, и таким образом псевдоортогональная проекция $OK$ отрезка $OL$ на мировую линию нашей планеты определяет **наблюдаемое** время жизни быстрого мюона как в 10 раз превосходящее его собственное время $t_0$. Соответственно в земной системе отсчёта мюон проходит расстояние не 660 м, а 6600 метров.

В вызывающем величайшее удивление несведущих людей так называемом **парадоксе близнецов** в действительности сказывается инвариантность длин мировых линий. Пусть мировые линии двух братьев – близнецов с момента их рождения сливаются с осью $OY$, которую в космических масштабах можно считать совпадающей с мировой линией нашей планеты и даже солнечной системы. Мировой точкой $O$ на рис. 3.9 обозначим событие старта межзвёздного корабля, уносящего одного из братьев в дальний космос с субсветовой скоростью. После этого мировая линия брата, оставшегося на Земле, по-прежнему совпадает с $OY$, а мировая линия астронавта отклоняется и принимает направление $OL$, образующее с $OY$ тем больший угол $i\varphi$, чем больше скорость космического корабля по отношению к Земле. Для ориентировки отметим, что скорости $0{,}86 \cdot c$ соответствует (по формуле (3.114)) угол $i\varphi = i \cdot 1{,}3$ и значение $\sqrt{1 - \mathrm{th}^2\varphi} = 0{,}5$. Пусть мировая точка $L$ обозначает то событие, после которого путешественник начинает процесс возвращения домой, изображённый отрезком $LD$ его мировой линии. Путь между событием $O$ расставания и событием $D$ встречи с Землёй брат – астронавт проходит по ломаной (кривой) мировой линии $OLD$, а брат – домосед — по прямолинейному отрезку $OD$, который при указанных выше условиях будет в два раза длинней ломаной $OLD$. И если, например, астронавт потратит на путешествие 20 лет, то его брат после расставания будет ждать встречи на Земле 40 лет.

Братья – близнецы в данном примере придуманы специально для того, чтобы сильней поразить привычное к классическим представлениям сознание релятивистским эффектом. Можно обойтись без братьев и просто рассматривать межзвёздный рейс космического корабля. Реальный и инвариантный (не зависящий от выбора системы отсчёта) участок $OLD$ мировой линии звездолёта имеет длину, которая меньше (в 2 раза в рассмотренном примере) длины прямолинейного (мало отличающегося от прямой) отрезка $OD$ мировой линии Земли, но эти две различные мировые линии соединяют одну и ту же пару точек (событий) $O$ и $D$. Такая ситуация подобна вполне привычной земной. Если на земле из пункта $O$ в пункт $D$ один пешеход идёт по прямой $OD$, а другой по ломаной через пункт $L$, то длина ломаной будет больше длины прямолинейного отрезка.

Но на псевдоевклидовой плоскости длина ломаной, напротив, меньше длины прямой, поскольку косинус угла наклона больше единицы и псевдоортогональные проекции наклонных звеньев ломаной на отрезок $OD$ длинней проецируемых отрезков.

## § 20. УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ КАК ПРОЯВЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ МИРОВОЙ ЛИНИИ

Всякая инерциальная система отсчёта (ИСО) пространства и времени связана неподвижно с такой системой материальных точек, мировые линии которых в псевдоевклидовом пространстве являются взаимно параллельными прямыми. Угол $i\varphi$ между непараллельными мировыми прямыми воспринимается нами как скорость $v$ относительного движения соответствующих этим прямым материальных точек согласно универсальному равенству (3.114)

$$v = (ic)\cdot tg(i\varphi) .$$

Изменение относительной скорости $v$ является следствием изменения угла $i\varphi$ между мировыми линиями. Направление кривой линии в каждой её точке совпадает с направлением касательной к линии в этой точке, и если угол $i\varphi$, отсчитываемый от координатной оси $OY$ до касательной к мировой линии изменяется по мере перемещения вдоль линии, то это значит, что линия искривляется. Таким образом, кривая мировая линия будет восприниматься в любой инерциальной системе отсчёта в виде материальной точки, движущейся с переменной скоростью, т. е. с ускорением. Выясним связь между кривизной мировой линии и наблюдаемым ускорением соответствующей этой линии материальной точки .

На рис. 3.10 изображена плоская мировая линия, уравнение которой в псевдоортонормированной системе координат $OXY$ мы запишем в виде

$$x = f(y) . \qquad (3.136)$$

Функцию (3.136) представим в параметрической форме уравнениями

$$y = y(s) , \qquad x = x(s) . \qquad (3.136')$$

Параметр $s$ может быть выбран произвольно, но мы примем за параметр $s$ то вещественное число, с участием которого выражается длина

$$is = (0;s) \qquad (3.137)$$

мировой линии (3.136), отсчитываемая от некоторой точки на ней в сторону роста линии (увеличения координаты $y$). Длина кривой линии складывается из длин бесконечно большого числа бесконечно малых участков линии, каждый из которых может быть заменён с достаточной точностью отрезком прямой, имеющим такую же длину и касающимся мировой линии в некоторой точке данного участка. Так как мировая линия воспринимается нами в виде материальной точки, а скорость материальной точки по отношению к любому наблюдателю меньше скорости света, то касательная к любой мировой линии в каждой её точке образует конечный угол $i\varphi$ с осью $OY$. Значит вектор касательной к мировой линии, направленный в сторону её роста, может принадлежать только верхнему сектору псевдоевклидовой плоскости, и иметь длину, выражаемую только мнимым числом. Отсюда следует, что мнимым числом будет выражаться и длина любого участка искривлённой мировой линии, складывающаяся из бесконечно малых отрезков касательных к линии. Длину сколь угодно малого участка кривой мировой линии мы будем выражать через приращение или дифференциал параметра $s$ :

$$d(is) = i \cdot ds . \qquad (3.137')$$

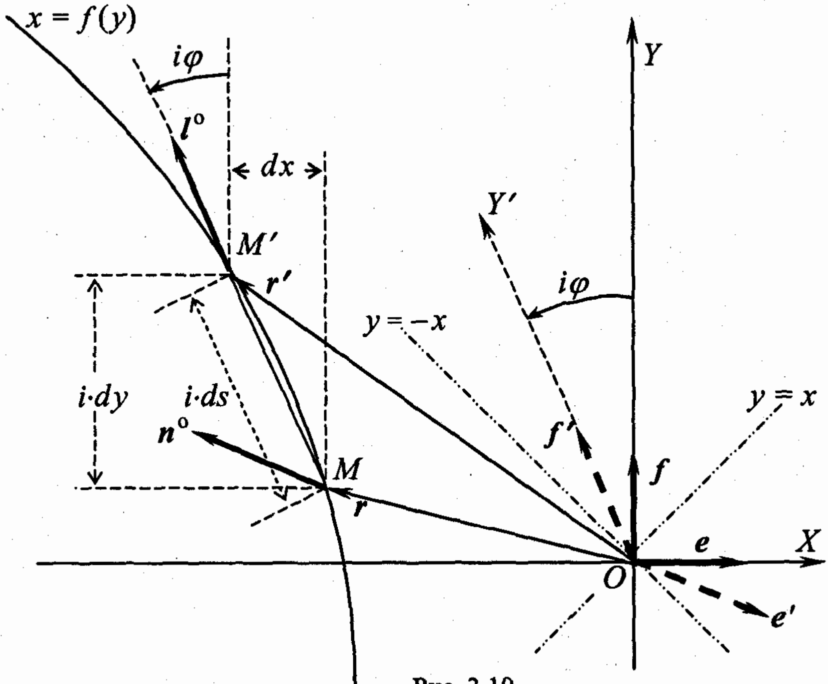


Рис. 3.10

Каждой точке $M$ мировой линии (3.136), заданной параметрическими уравнениями (3.136′), соответствует определённое значение $s_M$ параметра $s$. От параметрических уравнений (3.136′) мировой линии перейдём к векторному её уравнению. Координаты $y = y(s)$ и $x = x(s)$ точки $M$ на мировой линии являются координатами радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ этой точки

$$\boldsymbol{r}(s) = \overline{OM} = \boldsymbol{e} \cdot x(s) + \boldsymbol{f} \cdot y(s) , \qquad (3.138)$$

где $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{f}$ — единичные базисные векторы, указывающие направления осей $OX$ и $OY$ соответственно. Смещение из точки $M$ в бесконечно близкую к ней точку $M'$ (указываемую радиус-вектором $\boldsymbol{r}'=\overline{OM'}$) выражается дифференциалом радиус-вектора (3.138)

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}\cdot dx + \boldsymbol{f}\cdot dy = \boldsymbol{e}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot ds + \boldsymbol{f}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot ds. \qquad (3.139)$$

Дифференциал (3.139) есть вектор, направленный по касательной к мировой линии (3.138), причём положительному приращению $ds$ соответствует направление векторного дифференциала $d\boldsymbol{r}$ в сторону роста мировой линии. Умножив $d\boldsymbol{r}$ на вещественное число $1/ds$, мы получим вектор

$$\frac{1}{ds}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{e}\cdot\frac{dx}{ds} + \boldsymbol{f}\cdot\frac{dy}{ds}, \qquad (3.140)$$

касательный (как и векторный дифференциал $d\boldsymbol{r}$) к мировой линии в точке $M$, но **направленный всегда в сторону роста мировой линии** (как при положительном, так и при отрицательном приращении $ds$ параметра.

При бесконечно малом приращении $ds$ параметра длина вектора $d\boldsymbol{r}$ совпадает с длиной (3.137′) бесконечно малого участка мировой линии:

$$|d\boldsymbol{r}| = |d(is)| = i\cdot|ds|. \qquad (3.141)$$

Отсюда найдём длину вектора (3.140)

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \frac{1}{|ds|}\cdot|d\boldsymbol{r}| = \frac{i\cdot|ds|}{|ds|} = i = (0;1). \qquad (3.142)$$

Равенство этой длины мнимой единице позволяет назвать векторную производную (3.140) **ортом касательной** к мировой линии. Обозначим её как

$$\boldsymbol{l}^{o} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \qquad (3.143)$$

и подчеркнём ещё раз, что орт $\boldsymbol{l}^{o}$ касательной к мировой линии всегда направлен **в сторону роста мировой линии** (в будущее). Длина (3.142) орта касательной неизменна, и единственное, что может в нём изменяться — это наклон к координатной оси и другим мировым линиям. В предстоящих рассуждениях ориентация орта касательной $\boldsymbol{l}^{o}$ будет играть исключительно важную роль как главная характеристика направления мировой линии в каждой её точке.

Координаты орта касательной $\boldsymbol{l}^{o}$ зависят от угла $i\varphi$ наклона его к оси $OY$. На рис. 3.10 бесконечно малый участок $MM'$ мировой линии (3.138), совпадающий с векторным дифференциалом (3.139), изображён в сильно увеличенном виде (в отличие от орта $\boldsymbol{l}^{o}$ и других единичных векторов), чтобы хорошо были видны его проекции $i\cdot dy$ и $dx$ на направления координатных осей $OY$ и $OX$. Очевидны равенства

$$\cos(i\varphi) = \frac{i\cdot dy}{i\cdot ds} = \frac{dy}{ds} = \operatorname{ch}\varphi, \qquad (3.144)$$

$$\sin(i\varphi) = \frac{dx}{i \cdot ds} = -i \cdot \frac{dx}{ds} = i \cdot \operatorname{sh}\varphi, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{ds} = -\operatorname{sh}\varphi. \qquad (3.145)$$

Подставляя выражения (3.144), (3.145) в (3.140), получим

$$\boldsymbol{l}^0 = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = -\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{sh}\varphi + \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{ch}\varphi. \qquad (3.146)$$

Разложение (3.146) орта касательной $\boldsymbol{l}^0$ приводит к тому же значению его длины, что и равенство (3.142):

$$|\boldsymbol{l}^0| = \sqrt{(-\operatorname{sh}\varphi)^2 - (\operatorname{ch}\varphi)^2} = \sqrt{-(\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi)} = \sqrt{-1} = i. \qquad (3.147)$$

Если при перемещении вдоль мировой линии орт $\boldsymbol{l}^0$ касательной к ней изменяет угол $i\varphi$ своего наклона к оси $OY$, то это и означает **искривление** мировой линии. Очевидной характеристикой кривизны мировой линии является изменение угла $i\varphi$ на протяжении единицы длины мировой линии, выражаемое производной

$$\frac{d\,(i\varphi)}{d\,(is)} = \frac{d\varphi}{ds} = K, \qquad (3.148)$$

которую мы назовём **коэффициентом кривизны** или просто кривизной мировой линии. Кривизна $K$ будет положительной, если угол $i\varphi$ возрастает по мере продвижения вдоль мировой линии в сторону её роста. На рис. 3.10 мировая линия $x = f\,(y)$ имеет положительную кривизну (изогнута влево), так как при продвижении вдоль этой линии в направлении возрастания параметра $s$ (и координаты $y$) орт касательной $\boldsymbol{l}^0$ поворачивается в положительную сторону (кратчайшего поворота от базисного орта $\boldsymbol{e}$ к базисному орту $\boldsymbol{f}$ ).

Зависимость направления орта $\boldsymbol{l}^0$ касательной от параметра $s$ длины мировой линии побуждает рассмотреть производную этой векторной функции по параметру $s$ :

$$\frac{d\boldsymbol{l}^0}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d\boldsymbol{l}^0}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{d\varphi}(-\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{sh}\varphi + \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{ch}\varphi) \cdot K =$$

$$= K \cdot (-\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{ch}\varphi + \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{sh}\varphi) = K\boldsymbol{n}^0. \qquad (3.149)$$

Здесь вектор

$$-\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{ch}\varphi + \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{sh}\varphi = \boldsymbol{n}^0 \qquad (3.150)$$

имеет модуль, равный вещественной единице

$$|\boldsymbol{n}^0| = \sqrt{(-\operatorname{ch}\varphi)^2 - (\operatorname{sh}\varphi)^2} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi} = 1, \qquad (3.151)$$

и псевдоортогонален к орту $\boldsymbol{l}^0$ касательной:

$$\boldsymbol{n}^0 \boldsymbol{l}^0 = (-\operatorname{ch}\varphi) \cdot (-\operatorname{sh}\varphi) - (\operatorname{sh}\varphi \cdot \operatorname{ch}\varphi) = 0. \qquad (3.152)$$

Значит вектор $\boldsymbol{n}^0$ является **ортом нормали** к мировой линии.

Разложение (3.150) показывает, что орт нормали $\boldsymbol{n}^0$ к любой мировой линии на плоскости $OXY$ принадлежит **левому** сектору этой плоскости, так как гиперболический косинус вещественного аргумента может принимать только положительные значения и координата $(-ch\ \varphi)$ при базисном орте $\boldsymbol{e}$ всегда отрицательна. Иначе ведёт себя вектор (3.149) $K\boldsymbol{n}^{\circ}$, называемый **вектором кривизны** линии. Он всегда направлен в сторону искривления мировой линии. Действительно, если коэффициент кривизны $K$ положителен (значения угла $i\varphi$ возрастают по мере роста линии), то вектор кривизны направлен одинаково с ортом нормали $\boldsymbol{n}^{\circ}$, т.е. влево, в сторону изгиба линии. Если же $K < 0$, то кривая изгибается вправо, в сторону уменьшения значений угла $i\varphi$, и в ту же правую сторону (противоположно орту нормали $\boldsymbol{n}^{\circ}$) направлен вектор кривизны $K\boldsymbol{n}^{\circ}$. Модуль вектора кривизны равен абсолютной величине коэффициента кривизны $K$.

Чтобы прояснить связь вектора кривизны (3.149) мировой линии с вектором наблюдаемого ускорения материальной точки, надо прежде всего учесть, что ускорение представляет вторую производную пространственной координаты $x$ по **времени** $t$ **наблюдателя**, а кривизна линии оценивается второй производной по параметру $s$ длины линии. На оси $OY$, рассматриваемой как мировая линия наблюдателя, неподвижного относительно нештрихованной ИСО, промежуток времени $t$ наблюдателя связан с длиной $iy$ отрезка оси равенством Минковского (3.110), (3.106)

$$iy = (ic)t \quad \Longleftrightarrow \quad y = ct.$$

Но как было выяснено при сопоставлении (3.108), (3.108′) преобразований Лоренца (3.104) с преобразованиями (3.103′) координат вектора на псевдоевклидовой плоскости, для любого направления $OY'$ оси ординат (штрихованной координатной системы $OX'Y'$) справедливо такое же равенство Минковского в форме (3.109)

$$y' = ct'.$$

Представив равенства (3.106) и (3.109) в дифференциальной форме

$$dy = c\cdot dt, \qquad dy' = c\cdot dt', \tag{3.153}$$

применимой к любым малым участкам кривой мировой линии, приходим к выводу, что если при перемещении вдоль кривой мировой линии орт $\boldsymbol{l}^{\circ}$ касательной к ней последовательно принимает направления различных осей ординат, то каждый бесконечно малый участок $d(is)$ имеет направление определённой оси ординат, и на основании соотношений (3.153) будет справедливым равенство

$$d(is) = i\cdot ds = (ic)d\tau = i\cdot(c\cdot d\tau) \quad \Longleftrightarrow \quad ds = c\cdot d\tau, \tag{3.154}$$

где $d\tau$ имеет физический смысл бесконечно малого промежутка времени, соответствующего бесконечно малому участку $d(is)$ мировой линии. Величину $d\tau$ называют дифференциалом **собственного времени** на мировой линии. На произвольно взятом участке кривой мировой линии между точками $M_1$ и $M_2$, соответствующими значениям параметра $s_1$ и $s_2$, из бесконечно малых участков $d(is)$ составится посредством интегрирования конечная длина

$$is = \int_{s_1}^{s_2} d(is) = ic\int_{s_1}^{s_2} d\tau = (ic)\,\tau, \qquad (3.155)$$

которой соответствует **конечный** промежуток $\tau$ собственного времени данной мировой линии. Соотношение (3.154) позволяет переходить от дифференцирования радиус-вектора (3.138) и его координат $x(s)$, $y(s)$ по параметру $s$ к дифференцированию по собственному времени $\tau$ мировой линии:

$$\boldsymbol{l}^{\circ} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{c\cdot d\tau} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = c\boldsymbol{l}^{\circ}, \qquad (3.156)$$

$$\frac{d\boldsymbol{l}^{\circ}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{l}^{\circ}}{c\cdot d\tau} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\boldsymbol{l}^{\circ}}{d\tau} = c\frac{d\boldsymbol{l}^{\circ}}{ds} = cK\boldsymbol{n}^{\circ}, \qquad (3.157)$$

$$\frac{d\boldsymbol{l}^{\circ}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d}{c\cdot d\tau}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{c\cdot d\tau}\right) = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2}, \qquad (3.158)$$

откуда следует

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2} = c^2\cdot\frac{d\boldsymbol{l}^{\circ}}{ds} = c\cdot\frac{d\boldsymbol{l}^{\circ}}{d\tau} = c^2K\boldsymbol{n}^{\circ}. \qquad (3.158')$$

Так как понятие ускорения тела сформировалось в классической механике, закономерности которой применимы только для движений со скоростями значительно меньшими скорости света, то для выяснения физического смысла инвариантного вектора (3.158′) нужно сначала рассмотреть его с точки зрения такой псевдоортонормированной системы координат $OX'Y'$ и соответствующей ей штрихованной ИСО, где малая окрестность точки $M$ мировой линии (3.138) воспринималась бы в виде неподвижной или медленно движущейся материальной точки. Это условие **классического приближения** будет выполнено, если выбрать ось $OY'$ параллельной орту касательной $\boldsymbol{l}^{\circ}$, т. е. взять в качестве базисного орта $\boldsymbol{f}'$ сам орт $\boldsymbol{l}^{\circ}$ касательной к кривой в точке $M$ (см. рис. 3.10). Тогда в качестве базисного орта $\boldsymbol{e}'$ нужно будет взять вектор $-\boldsymbol{n}^{\circ}$, противоположный орту (3.150) нормали $\boldsymbol{n}^{\circ}$, потому что мы работаем с псевдоортонормированными базисами правой ориентации, у которых векторы $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ принадлежат правому сектору, тогда как орт (3.150) нормали к мировой линии принадлежит левому сектору псевдоевклидовой плоскости, что пояснено в абзаце после равенства (3.151). При выполнении такого условия классического приближения

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{l}^{\circ}, \qquad \boldsymbol{e}' = -\boldsymbol{n}^{\circ} \qquad (3.159)$$

угол $i\varphi'$ между $\boldsymbol{f}'$ и $\boldsymbol{l}^{\circ}$ будет равен нулю, и потому участок мировой линии в малой окрестности точки $M$ будет восприниматься в штрихованной ИСО в виде неподвижной (медленно движущейся материальной точки:

$$i\varphi' = 0, \qquad v' = (ic)\cdot\mathrm{tg}(i\varphi') = (ic)\cdot\mathrm{tg}(0) = 0. \qquad (3.159')$$

Как следствие равенств (3.159), (3.159′) дифференциал $d(is)$ длины мировой линии в точке $M$ совпадёт с дифференциалом $d(iy')$ длины на оси $OY'$

$$d(is) = d(iy') \quad \Longleftrightarrow \quad ds = dy' \tag{3.160}$$

и дифференциал $d\tau$ собственного времени мировой линии совпадёт с дифференциалом $dt'$ времени по часам штрихованной ИСО

$$d\tau = dt'. \tag{3.160′}$$

Тогда в малой окрестности точки $M$ дифференцирование по $\tau$ будет равносильно дифференцированию по $t'$ и выражение (3.158′) можно будет записать в виде

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{(dt')^2} = \boldsymbol{e}'\frac{d^2x'}{(dt')^2} + \boldsymbol{f}'\frac{d^2y'}{(dt')^2}\,. \tag{3.161}$$

Второе слагаемое в разложении (3.161) равно нулю, так как из равенства

$$dy' = c\cdot dt' \quad \Longleftrightarrow \quad dy'/dt' = c$$

следует

$$\frac{d^2y'}{(dt')^2} = \frac{dc}{dt'} = 0\,.$$

Таким образом, выражение (3.161) сводится к

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{(dt')^2} = \boldsymbol{e}'\frac{d^2x'}{(dt')^2} = \boldsymbol{e}'\cdot a = -\boldsymbol{n}^{\circ}a\,, \tag{3.161′}$$

где буквой $a$ обозначено численное значение наблюдаемого ускорения (второй производной пространственной координаты по времени наблюдателя) материальной точки в специально выбранной (условием (3.159) классического приближения) инерциальной системе отсчёта. Это даёт нам право смотреть на инвариантный вектор (3.158′) как на **обобщение классического ускорения**, свойственное модели мира Минковского. В связи с тем, что самая яркая черта открытия Минковского, поразившая современников, изначально виделась в четырёхмерности мирового пространства, возник обычай называть векторы этого пространства жаргонно 4-векторами (читается “четыре-вектор”). Однако главная черта векторов, принадлежащих пространству Минковского, заключается в псевдоевклидовых метрических свойствах этого пространства, и мы пришли к вектору (3.158′), рассматривая искривление мировой линии в двумерном псевдоевклидовом пространстве. Поэтому было бы более правильно так и называть их векторами псевдоевклидова пространства, или в жаргонном упрощении — псевдоевклидовыми векторами, что мы и будем делать в дальнейшем, не отказываясь вместе с тем от традиционного термина “4-вектор”. По традиции инвариантный вектор (3.158′) называют 4-вектором ускорения или ещё короче — 4-ускорением. Чтобы отличить 4-векторы от обычных векторов классической механики там, где может возникнуть неясность, будем ставить над 4-векторами стрелку: $\vec{\mathcal{A}}$ — 4-ускорение. Выпишем полученные в (3.158′) различные выражения 4-ускорения $\vec{\mathcal{A}}$:

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{d^2 r}{d\tau^2} = c^2 \cdot \frac{dl^\circ}{ds} = c \cdot \frac{dl^\circ}{d\tau} = c^2 K n^\circ. \qquad (3.162)$$

Пользуясь разложением (3.150) нормали $n^\circ$ к мировой линии по произвольному псевдоортонормированному правому базису $e$, $f$ (к которому не предъявлены специальные требования (3.159) классического приближения), запишем разложение 4-ускорения $\vec{\mathcal{A}}$ по тому же базису

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{d^2 r}{d\tau^2} = c^2 K n^\circ = c^2 K \cdot (-e \cdot \operatorname{ch}\varphi + f \cdot \operatorname{sh}\varphi). \qquad (3.162')$$

Теперь остаётся выяснить, как будет восприниматься инвариантный (не зависящий от выбора базиса в псевдоевклидовом пространстве) 4-вектор ускорения $\vec{\mathcal{A}}$ наблюдателем, связанным с **произвольной** инерциальной системой отсчёта (ИСО), а не с той ИСО, которая удовлетворяет условиям (3.159), (3.159′) классического приближения. Так как в случае произвольной ИСО мировая линия наблюдателя (параллельная оси $OY$ в псевдоевклидовом пространстве) не параллельна орту $l^\circ$ касательной к мировой линии на наблюдаемом малом участке её, а образует с $l^\circ$ угол $i\varphi$, то такой наблюдаемый участок (малая окрестность точки $M$ на рис. 3.10) будет восприниматься в виде материальной точки, движущейся со скоростью (3.114)

$$v = (ic) \cdot \operatorname{tg}(i\varphi) = -c \cdot \operatorname{th}\varphi.$$

В теории классической механики наблюдаемое ускорение материальной точки считается не зависящим от скорости точки и потому имеющим одинаковое значение во всех инерциальных системах отсчёта пространства и времени. От этого представления придётся отказаться в связи с ясно выраженной в разложении (3.162′) зависимостью координат 4-ускорения от выбора базиса $e$, $f$. На первый взгляд может показаться, что наблюдаемое ускорение совпадёт с первой координатой 4-вектора $\vec{\mathcal{A}}$, т.е. с псевдоортогональной проекцией $\vec{\mathcal{A}}$ на ось $OX$. Однако в действительности зависимость наблюдаемого ускорения от выбора ИСО оказывается сложнее.

Дело в том, что наблюдатель, мировая линия которого совпадает с координатной осью $OY$ (или параллельна $OY$), непосредственно воспринимает и измеряет своими часами не собственное время $\tau$ мировой линии, наклонённой к $OY$, а время $t$, определяемое длинами отрезков оси $OY$. Для такого наблюдателя скорость изменения радиус-вектора (3.138) и орта $l^\circ$ касательной к наблюдаемой мировой линии характеризуется не производными (3.156) – (3.158′) по переменной $\tau$, а производными по времени $t$ наблюдателя. Как видно на рис 3.10 и записано в (3.144), дифференциалы длин $d(is)$ и $d(iy)$ связаны соотношением

$$d(iy) = d(is) \cdot \operatorname{ch}\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad dy = ds \cdot \operatorname{ch}\varphi,$$

из которого следует согласно (3.153), (3.154)

$$dt = d\tau \cdot \operatorname{ch}\varphi. \qquad (3.164)$$

Поэтому дифференцирование по времени $t$ наблюдателя приведёт к замене формул (3.156) – (3.158′) другими формулами:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{\operatorname{ch}\varphi \cdot d\tau} = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi} \cdot c\boldsymbol{l}^{\circ} = \frac{c}{\operatorname{ch}\varphi} \cdot (-\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{sh}\varphi + \boldsymbol{f} \cdot \operatorname{ch}\varphi) = c \cdot (-\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{th}\varphi + \boldsymbol{f}), \tag{3.165}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d}{\operatorname{ch}\varphi \cdot d\tau}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{c}{\operatorname{ch}\varphi} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{c}{\operatorname{ch}\varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) \cdot \frac{d\varphi}{ds} =$$

$$= \frac{cK}{\operatorname{ch}\varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi}\{c \cdot (-\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{th}\varphi + \boldsymbol{f})\} = \frac{c^2K}{\operatorname{ch}\varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi}(-\boldsymbol{e} \cdot \operatorname{th}\varphi) = -\frac{c^2K}{\operatorname{ch}^3\varphi} \cdot \boldsymbol{e}. \tag{3.166}$$

В отличие от равенств (3.156) – (3.158′), где производные $d\boldsymbol{r}/d\tau$, $d\boldsymbol{l}^{\circ}/d\tau$, и $d^2\boldsymbol{r}/d\tau^2$ по собственному времени $\tau$ мировой линии являются инвариантными векторами, производные (3.165), (3.166) по времени $t$ постороннего для данной мировой линии наблюдателя представляют форму восприятия таким наблюдателем инвариантных характеристик мировой линии. У каждого наблюдателя это восприятие своё, о чём говорит зависимость производных (3.165), (3.166) от угла $i\varphi$ между касательной $\boldsymbol{l}^{\circ}$ к наблюдаемой мировой линии и направлением $OY$ мировой линии наблюдателя.

Если координаты радиус-векторов точек мировой линии представить не в виде функций параметра $s$, как в (3.138), а в виде функций времени наблюдателя $t = y/c$ (см. (3.106))

$$\boldsymbol{r}(t) = \overline{OM} = \boldsymbol{e} \cdot x(t) + \boldsymbol{f} \cdot y(t),$$

то производную (3.165) можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{e} \cdot \frac{dx}{dt} + \boldsymbol{f} \cdot \frac{dy}{dt} = \boldsymbol{e} \cdot v + \boldsymbol{f} \cdot c$$

(см. крайнее правое выражение в (3.165) с учётом $v = -c \cdot \operatorname{th}\varphi$ согласно (3.114) и $dy = c \cdot dt$ согласно (3.153)). Здесь $v$ — скорость наблюдаемой материальной точки. Дифференцируя последние равенства повторно по $t$, получим

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \boldsymbol{e} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \boldsymbol{f} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \boldsymbol{e} \cdot \frac{dv}{dt}, \tag{3.167}$$

где $dv/dt$ есть численное значение $a$ наблюдаемого ускорения. Сравнивая крайние правые выражения в (3.167) и (3.166), видим, что

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c^2K}{\operatorname{ch}^3\varphi}. \tag{3.168}$$

Внося в (3.168) выражения (3.87) (конец § 12) и (3.105) (начало § 14)

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

найдём зависимость наблюдаемого ускорения материальной точки от её скорости

$$a = \frac{dv}{dt} = -c^2 K \left(\sqrt{1-(v/c)^2}\right)^3, \qquad (3.168')$$

не известную классической механике, имевшей дело со скоростями $v$ много меньшими скорости света ($v/c \ll 1$).

## § 21. ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ

Изложенное в § 16 яркое доказательство реальности мировых линий обретает завершающую полноту убедительности лишь после выяснения того, что мировые линии в псевдоевклидовом пространстве имеют инвариантные динамические характеристики, проявляющиеся в наблюдаемом трёхмерном собственно евклидовом пространстве в виде зависящих от выбора системы отсчёта динамических характеристик тел.

Второй из трёх законов механики Ньютона

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad (3.169)$$

называют **основным законом динамики** [56, с. 53-55]. Здесь $\boldsymbol{a}$ — вектор наблюдаемого ускорения, приобретаемого материальной точкой массы $m$ под действием вектора $\boldsymbol{F}$ наблюдаемой силы. Закон (3.169), будучи прост по форме, заключает в себе серьёзные трудности для глубокого осмысления. Трудность в том, что мы не находим по настоящему взаимно независимых способов определения и измерения силы $F$ и массы $m$. Вот что пишет на этот счёт крупный физик XX века Ричард Фейнман: «... обнаружив основной закон, утверждающий, что сила есть масса на ускорение, а потом определив силу как произведение массы на ускорение, мы ничего нового не открываем... Истинное же содержание закона Ньютона таково: предполагается, что сила обладает *независимыми свойствами* в дополнение к закону $F = ma$, но характерные независимые свойства сил не описал полностью ни Ньютон, ни кто-нибудь ещё» [57]. Таким образом, остаётся смотреть на равенство (3.169) как на **определение** наблюдаемого вектора $\boldsymbol{F}$ через вектор $\boldsymbol{a}$ наблюдаемого ускорения. Специфичность этого определения заключается в коэффициенте пропорциональности $m$ между двумя одинаково направленными векторами, представляющем важную индивидуальную характеристику тела, которую Ньютон определил как количество материи в теле. Чем больше масса, тем больше модуль вектора силы, соответствующего данному вектору ускорения. Масса является главной динамической характеристикой материальной точки.

Классическая механика, не знавшая зависимости массы от скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad (3.170)$$

имела право не различать **массу покоя** $m_0$ и движущуюся со скоростью $v$ массу $m$. Но для теории относительности и модели мира Минковского, это различие приобретает принципиальную важность. Элементарные частицы нередко обнаруживаются в экспериментах как движущиеся со скоростями, сравнимыми со скоростью света, и даже близкими к ней. Поэтому, например, измерения массы электрона дают не однозначные результаты, но после пересчёта по формуле (3.170) всегда получается одно и то же значение массы покоя $m_e = 0{,}910\,953\,4 \cdot 10^{-30}$ кг, являющееся отличительным признаком всех электронов. И если указанная величина $m_e$ служит мерой инертности электрона, рассматриваемого как медленно движущаяся материальная точка, то эту же величину можно рассматривать как меру инертности мировой линии электрона, т. е. податливости линии искривляющим её внешним воздействиям. То, что мерой инертности любой мировой линии как **собственной** динамической характеристикой линии должна быть именно масса покоя $m_0$, представляется естественным, потому что каждый участок мировой линии воспринимается в виде покоящейся (либо медленно движущейся) материальной точки в той псевдоортонормированной системе координат, у которой ось $OY$ имеет направление орта касательной $l^0$ к мировой линии на рассматриваемом её участке. **Постоянство** коэффициента $m_0$ **на протяжении всей мировой линии** (будь она прямой или кривой), как раз и подтверждается универсальным постоянством массы покоя как главного отличительного признака каждого типа элементарных частиц. А если бы мировая линия $x = f(w)$ (см. рис. 3.10 в начале § 20) в окрестности точки $M$ воспринималась в инерциальной системе отсчёта (ИСО), удовлетворяющей условию классического приближения (3.159), в виде неподвижной материальной точки с массой покоя $m_0$, а окрестность любой другой точки $M'$ той же мировой линии в соответствующих точке $M'$ условиях классического приближения воспринималась бы в виде неподвижной материальной точки с иным значением $m_0'$ массы покоя, то такие материальные точки не могли бы быть отождествлены с одним и тем же телом. Ведь это означало бы, что при переходе между состояниями $M$ и $M'$ тело лишилось некоторой своей части, либо присоединило к себе часть другого тела.

Понятно, что умножая инвариантный псевдоевклидов вектор 4-ускорения $\vec{\mathcal{A}}$ (3.162) на постоянный для всей мировой линии вещественный параметр $m_0$, мы получим инвариантный псевдоевклидов вектор

$$\vec{\mathfrak{F}} = m_0 \vec{\mathcal{A}}. \qquad (3.171)$$

И так как при выполнении условий (3.159) классического приближения 4-вектор $\vec{\mathcal{A}}$ воспринимается наблюдателем в виде фигурирующего в законе (3.169) Ньютона вектора классического ускорения $\boldsymbol{a}$ медленно движущегося тела (см. (3.161′)), то при тех же условиях псевдоевклидов вектор $\vec{\mathfrak{F}}$ будет восприниматься в виде наблюдаемого классического вектора силы $\boldsymbol{F}$. Значит, подобно тому, как 4-вектор $\vec{\mathcal{A}}$ представляет собой обобщение классического наблюдаемого ускорения, так 4-вектор $\mathfrak{F}$ представляет обобщение в модели мира Минковского классического вектора силы. Ему присвоено название вектора силы Минковского. Внося в равенство (3.171) различные выражения (3.162) 4-ускорения $\vec{\mathcal{A}}$, получим соответствующие выражения силы Минковского:

$$\vec{\mathfrak{F}} = m_0\vec{\mathcal{A}} = m_0\frac{d^2r}{d\tau^2} = m_0c^2\cdot\frac{dl^\circ}{ds} = m_0c\cdot\frac{dl^\circ}{d\tau} = m_0c^2Kn^\circ. \quad (3.172)$$

Обоснованное выше (между формулами (3.170) и (3.171)) постоянство коэффициента $m_0$ на всём протяжении мировой линии, сохраняющей самотождественность, позволяет внести эту константу под знак дифференцирования в любой из трёх производных среди выражений (3.172). Наиболее интересно выполнить такую операцию с производными от $l^0$:

$$\vec{\mathfrak{F}} = m_0c^2\cdot\frac{dl^\circ}{ds} = m_0c\cdot\frac{dl^\circ}{d\tau} = c^2\cdot\frac{d(m_0l^\circ)}{ds} = c\cdot\frac{d(m_0l^\circ)}{d\tau}. \quad (3.173)$$

Обнаруживающийся при этом инвариантный 4-вектор

$$m_0l^0 = \vec{m}, \quad (3.174)$$

направленный в каждой точке мировой линии по касательной к линии в сторону её роста, назовём **вектором массы.** Он имеет модуль (см. (3.147))

$$|\vec{m}| = |m_0l^0| = m_0|l^0| = im_0, \quad (3.175)$$

выражаемый мнимым числом, как у всех векторов, принадлежащих верхнему сектору псевдоевклидовой плоскости. Таким образом, константа $m_0$ есть вещественный параметр, определяющий модуль (3.175) вектора массы, и этот модуль характеризует инертность мировой линии, т.е. меру её податливости искривляющему силовому воздействию $\vec{\mathfrak{F}} = m_0c^2Kn^\circ$. А так как направление вектора массы $\vec{m}$ указывает направление роста мировой линии в каждой её точке и изменяется при искривлении мировой линии, то можно сказать, что **искривление мировой линии заключается в изменении направления её вектора массы.**

Запишем разложение вектора массы по произвольному базису $e$, $f$ (не требуя для него выполнения специального условия (3.159)):

$$\vec{m} = \mu_1 e + \mu_2 f. \quad (3.176)$$

Сравнивая это разложение с тем, которое получается при подстановке в (3.174) разложения (3.146) орта $l^0$ касательной к мировой линии

$$\vec{m} = m_0l^0 = m_0(-e\cdot\operatorname{sh}\varphi + f\cdot\operatorname{ch}\varphi), \quad (3.176')$$

найдём (в силу единственности разложения любого вектора по данному базису пространства) выражения координат вектора массы :

$$\mu_1 = -m_0\cdot\operatorname{sh}\varphi, \quad (3.177)$$

$$\mu_2 = m_0\cdot\operatorname{ch}\varphi. \quad (3.178)$$

Подставляя сюда выражения (3.87), (3.88) гиперболических функций косинуса $\operatorname{ch}\varphi$ и синуса $\operatorname{sh}\varphi$ через $\operatorname{th}\varphi$ и равенство (3.107)

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}\,, \qquad \operatorname{sh}\varphi = \frac{\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}}\,, \qquad \operatorname{th}\varphi = -\,v/c$$

получим

$$\mu_2 = m_0\cdot\operatorname{ch}\varphi = \frac{m_0}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,, \tag{3.179}$$

$$\mu_1 = -\,m_0\cdot\operatorname{sh}\varphi = \frac{-m_0\cdot\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{-m_0(-v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m_0 v}{c\cdot\sqrt{1-(v/c)^2}}\,. \tag{3.180}$$

Выражение (3.179) координаты $\mu_2$ совпадает с формулой (3.170) зависимости массы $m$ материальной точки от скорости её движения и даёт этой загадочной зависимости простое геометрическое объяснение: так называемая движущаяся масса $m$ есть не что иное, как псевдоортогональная проекция вектора массы $\vec{m}$ мировой линии на направление базисного орта $f$ (координатной оси $OY$ наблюдателя). Без такого объяснения можно доверять справедливости математического обнаружения зависимости массы от скорости, но нельзя вполне ясно понять причину зависимости, потому что согласно принципу относительности движущуюся массу можно считать покоящейся, а движение приписать наблюдателю. Величина

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \mu_2 v = m\,v = p\,, \tag{3.181}$$

входящая в выражение (3.180) координаты $\mu_1$ вектора массы, представляет собой определение импульса, но только с учётом релятивистской зависимости (3.170) массы от скорости. Поэтому координату $\mu_1$ вектора массы можно записать в виде

$$\mu_1 = p/c \tag{3.182}$$

и представить разложение (3.176) вектора массы по произвольному псевдоортонормированному базису $e, f$ в виде

$$\vec{m} = \frac{p}{c}\,e + m\,f\,. \tag{3.183}$$

Несомненно, что и универсальная электродинамическая постоянная $c$ может быть подведена под знак дифференцирования в выражениях (3.173)

$$\vec{\mathfrak{I}} = c\cdot\frac{d(c\,m_0 l^0)}{ds} = \frac{d(c\,m_0 l^0)}{d\tau}\,. \tag{3.184}$$

Выявляющийся при этом псевдоевклидов инвариантный вектор

$$c\,m_0 l^0 = c\,\vec{m} = \vec{\pi}\,, \tag{3.185}$$

будучи произведением вектора массы $\vec{m}$ (см. (3.174)) на вещественную константу $c$, коллинеарен вектору $\vec{m}$, характеризующему мировую линию, и имеет (согласно (3.176′) и (3.183)) следующие разложения по произвольному псевдоортонормированному базису $e,\ f$:

$$\vec{\pi} = c\vec{m} = cm_0 l^0 = cm_0(-e\cdot\operatorname{sh}\varphi + f\cdot\operatorname{ch}\varphi), \qquad (3.186)$$

$$\vec{\pi} = c\vec{m} = pe + cmf. \qquad (3.187)$$

Первая координата вектора $\vec{\pi}$ в этих разложениях) представляет импульс материальной точки относительно той инерциальной системы отсчёта, в которой наблюдатель неподвижен, так что мировая линия наблюдателя параллельна координатной оси $OY$ (базисному орту $f$) в псевдоевклидовом пространстве. Вторая координата вектора $\vec{\pi}$ хотя не представляет наблюдаемого импульса, но имеет тоже размерность импульса. Это даёт повод назвать вектор $\vec{\pi}$ псевдоевклидовым импульсом (или 4-импульсом). Другим основанием для выбора такого названия служит то, что второе из выражений (3.184) с учётом (3.185) представляет псевдоевклидов вектор силы Минковского в виде производной 4-импульса $\vec{\pi}$ по собственному времени $\tau$ мировой линии

$$\vec{\Im} = \frac{d\vec{\pi}}{d\tau}, \qquad (3.188)$$

по аналогии с представлением классической силы $F$ как производной от наблюдаемого импульса $p$ по времени $t$ наблюдателя

$$F = \frac{dp}{dt}. \qquad (3.189)$$

Важно подчеркнуть следующее обстоятельство. Псевдоевклидов вектор импульса $\vec{\pi}$ имеет направление касательной $l^0$ к мировой линии, и псевдоортогональная проекция вектора $\vec{\pi}$ на ось $OX$ (базисный орт $e$) представляет наблюдаемый импульс $p$. Псевдоевклидов же вектор $\vec{\Im}$ силы Минковского коллинеарен орту нормали $n^0$ к мировой линии (см. (3.172))

$$\vec{\Im} = m_0c^2Kn^0 = m_0c^2K\cdot(-e\cdot\operatorname{ch}\varphi + f\cdot\operatorname{sh}\varphi), \qquad (3.190)$$

но наблюдаемая сила (3.189) не совпадает с псевдоортогональной проекцией вектора $\vec{\Im}$ на орт $e$

$$\text{пр.}_e\vec{\Im} = -m_0c^2K\cdot\operatorname{ch}\varphi \qquad (3.191)$$

(т. е. с координатой при орте $e$), потому что эта проекция равна производной $dp/d\tau$ наблюдаемого импульса $p$ по собственному времени $\tau$ мировой линии, а не по времени $t$ наблюдателя, как в (3.189). Пользуясь выясненной в (3.164) связью между дифференциалами $d\tau$ и $dt$

$$dt = d\tau\cdot\operatorname{ch}\varphi,$$

найдём производную от инвариантного импульса $\vec{\pi}$ по времени $t$

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \frac{d\vec{\pi}}{\operatorname{ch}\varphi\cdot d\tau} = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot\vec{\Im}. \qquad (3.192)$$

При каждом фиксированном значении вещественного положительного множителя $1/\operatorname{ch}\varphi$ производная $d\vec{\pi}/dt$ является вектором, имеющим направление силы Минковского $\vec{\mathfrak{I}}$. Но так как модуль производной $d\vec{\pi}/dt$ оказывается зависящим (через посредство угла $i\varphi$) от выбора координатной оси $OY$ (базисного орта $f$ ), и следовательно от выбора инерциальной системы отсчёта (ИСО) наблюдателем, то эта производная (3.192) не представляет однозначно определённого вектора, а скорее должна рассматриваться как представитель бесконечного множества векторов, имеющих одинаковое направление, но различные модули.

Применяя к соотношению (3.192) разложение (3.190) силы Минковского, получим

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot m_0 c^2 K\cdot(-e\cdot\operatorname{ch}\varphi + f\cdot\operatorname{sh}\varphi) = m_0 c^2 K\cdot(-e + f\cdot\operatorname{th}\varphi), \quad (3.192')$$

что с учётом ключевого равенства (3.107) $\operatorname{th}\varphi = -v/c$ даёт

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = m_0 c^2 K\cdot\{-e + f\cdot(-v/c)\} = -m_0 c^2 K\cdot\{e + f\cdot(v/c)\}. \quad (3.192'')$$

Сравнивая последнее выражение с результатом дифференцирования по $t$ разложения (3.187)

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \frac{d}{dt}(pe + cmf) = \frac{dp}{dt}\cdot e + c\cdot\frac{dm}{dt}\cdot f$$

и учитывая (3.189), видим, что

$$F = \frac{dp}{dt} = -m_0 c^2 K, \quad (3.193)$$

$$c\cdot\frac{dm}{dt} = -m_0 c^2 K\cdot\frac{v}{c} = \frac{Fv}{c},$$

а это позволяет записать (3.192″) в форме

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = F\cdot e + \frac{Fv}{c}\cdot f. \quad (3.194)$$

Отметим чрезвычайно интересный факт, вытекающий из (3.190) и (3.193). Из выражения (3.190) найдём модуль инвариантного вектора силы Минковского

$$|\vec{\mathfrak{I}}| = m_0 c^2\cdot|Kn^{\circ}| = m_0 c^2\cdot|K| \quad (3.195)$$

(коэффициент кривизны $K$ может быть положительным или отрицательным согласно (3.148), а модуль орта $n^{\circ}$ нормали к мировой линии равен вещественной единице согласно (3.151)). Таким же оказывается модуль наблюдаемой силы (3.193)

$$|F| = |-m_0 c^2 K| = m_0 c^2\cdot|K|. \quad (3.196)$$

Значит модуль наблюдаемой силы есть величина инвариантная, не зависящая от выбора системы отсчёта. Но, подчеркнём, наблюдаемая сила $F$ не совпадает с производной $d\vec{\pi}/dt$ (зависящей от выбора системы отсчёта), а представляет собой лишь первую координату этой производной (см.

(3.194)). Модуль же самóй производной $d\vec{\pi}/dt$, как видно из соотношения (3.192)

$$\left|\frac{d\vec{\pi}}{dt}\right| = \frac{1}{\operatorname{ch}\varphi}\cdot|\vec{\mathfrak{I}}|,$$

зависит от выбора системы отсчёта (через посредство угла $i\varphi$ между наблюдаемой мировой линией и мировой линией наблюдателя). Выражение (3.194) также показывает, что вторая координата производной $d\vec{\pi}/dt$ не обладает инвариантностью (в отличие от модуля (3.196) первой координаты), а зависит от выбора системы отсчёта через скорость $v$ материальной точки относительно выбранной системы.

В выражении (3.194) $F$ имеет физический смысл силы, приложенной к материальной точке, в виде которой наблюдается мировая линия, а $v$ есть скорость наблюдаемой материальной точки. Произведение $Fv$ представляет мощность $N$, т. е. работу $A$, совершаемую силой $F$ за единицу времени $t$ наблюдателя

$$Fv = N = dA/dt.$$

Так как материальная точка по определению (см. (2.7) в середине § 4) представляет тело, размеры и внутреннюю структуру которого можно не учитывать в условиях рассматриваемой задачи, то правомерно считать, что вся работа силы, действующей на материальную точку, расходуется на изменение кинетической энергии $E_K$ последней, и мощность $N$ есть скорость изменения кинетической энергии

$$Fv = N = dA/dt = dE_K/dt.$$

С учётом этого выражения и равенства (3.189) запишем формулу (3.194) в виде

$$\frac{d\vec{\pi}}{dt} = \frac{dp}{dt}\cdot e + \frac{1}{c}\cdot\frac{dE_K}{dt}\cdot f. \qquad (3.197)$$

Понятно, что в результате интегрирования по $t$ дифференциального уравнения (3.197) должны получиться выражения (3.186), (3.187) псевдоевклидова инвариантного импульса

$$\vec{\pi} = c\vec{m} = cm_0 l^0 = pe + cmf = cm_0(-e\cdot\operatorname{sh}\varphi + f\cdot\operatorname{ch}\varphi).$$

Однако сама процедура нахождения общего решения дифференциального уравнения и выделения из него нужного частного решения приведёт к раскрытию нетривиального (не известного классической механике) физического смысла массы покоя $m_0$ и движущейся массы (3.170) $m$. В общем решении обыкновенного дифференциального уравнения (3.197) присутствуют произвольные постоянные $p_0$ и $E_0$ интегрирования

$$\int\frac{dp}{dt}dt = p + p_0, \qquad \int\frac{dE_K}{dt}dt = E_K + E_0,$$

и потому общее решение этого уравнения имеет вид

$$\vec{\pi} = c\vec{m} = cm_0 l^0 = e\cdot(p + p_0) + f\cdot\frac{1}{c}\cdot(E_K + E_0)\,. \qquad (3.198)$$

Интересующий же нас физический смысл будет иметь только то частное решение дифференциального уравнения (3.197), при котором наблюдаемый импульс и кинетическая энергия **неподвижной** материальной точки обращаются в ноль

$$p = 0\,, \qquad E_K = 0\,. \qquad (3.199)$$

Но каждый достаточно малый участок мировой линии (в общем случае искривлённой) воспринимается в виде покоящейся материальной точки в той инерциальной системе отсчёта (ИСО) пространства и времени, которой соответствует в мировом псевдоевклидовом пространстве псевдоортонормированная система координат с осью $OY'$, имеющей направление касательной $l^0$ к наблюдаемому участку мировой линии (см. условия классического приближения (3.159)). Тогда будут выполнены равенства (3.199) и разложение (3.198) примет вид

$$\vec{\pi} = e'\cdot p_0 + f'\cdot\frac{E_0}{c} = -n^0\cdot p_0 + l^0\cdot\frac{E_0}{c}\,. \qquad (3.200)$$

А так как инвариантный вектор $\vec{\pi}$ имеет направление орта $l^0$ касательной к мировой линии (см. (3.198), (3.186))

$$\vec{\pi} = c\vec{m} = cm_0 l^0\,,$$

то сравнение этого выражения с (3.200) показывает, что

$$p_0 = 0 \qquad (3.201)$$

и справедливо равенство

$$\vec{\pi} = cm_0 l^0 = l^0\cdot\frac{E_0}{c}\,, \qquad (3.202)$$

из которого следует

$$cm_0 = \frac{E_0}{c}\,, \qquad \Longleftrightarrow \qquad E_0 = m_0 c^2\,. \qquad (3.202')$$

Вносят найденные значения констант интегрирования (3.201) и (3.202′) в общее решение (3.198) дифференциального уравнения (3.197), находим

$$\vec{\pi} = e\cdot p + f\cdot\frac{1}{c}\cdot(E_K + m_0 c^2)\,. \qquad (3.203)$$

Это и есть то частное решение, которое применимо к описанию мировой линии относительно любой псевдоортонормированной системы координат (с базисом $e$, $f$), а значит и к описанию движения наблюдаемой материальной точки относительно любой инерциальной системы отсчёта, и которое гарантирует обращение в ноль наблюдаемого импульса $p$ и кинетической энергии $E_K$ неподвижной материальной точки (см. (3.199)).

Сравнение разложения (3.203) с разложением (3.187)

$$\vec{\pi} = pe + cmf$$

показывает, что

$$cm = \frac{1}{c}\cdot(E_K + m_0c^2), \qquad \text{т.е.} \qquad mc^2 = E_K + m_0c^2. \qquad (3.204)$$

Отсюда вытекает не известное классической механике выражение для кинетической энергии тела:

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 = c^2(m - m_0) = c^2\cdot\Delta m, \qquad (3.205)$$

где

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_0 = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) \qquad (3.206)$$

представляет превышение массы $m$ (3.170) движущегося тела над массой покоя $m_0$ этого же тела. Связь (3.205) кинетической энергии тела с приращением его массы впервые обнаружил теоретически А. Эйнштейн. В 1905 году он писал в статье [58]: «Масса тела есть мера содержащейся в нём энергии; если энергия изменяется на величину $L$, то масса меняется соответственно на величину $L/(9\cdot10^{20})$, причём здесь энергия измеряется в эргах, а масса — в граммах. Не исключена возможность того, что теорию удастся проверить для веществ, энергия которых меняется в большей степени (например для солей радия)». Спустя 40 лет эта энергия была использована в атомной бомбе. Подставляя в (3.205) подробное выражение (3.206), найдём

$$E_K = m_0c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right), \qquad (3.207)$$

что по внешнему виду разительно отличается от привычного классического выражения кинетической энергии

$$E_K = m_0v^2/2. \qquad (3.207')$$

Однако формула (3.207′) является просто классическим приближением точной и универсальной формулы (3.207). Действительно, если выбрать штрихованный базис $e'$, $f'$, удовлетворяющий условию (3.159) классического приближения, то в соответствующей этому базису инерциальной системе отсчёта (штрихованной) близкие к точке $M$ (на рис. 3.10) участки мировой линии будут восприниматься в виде материальной точки, движущейся со скоростью $v$ много меньшей скорости света $c$ ($v/c \ll 1$). Тогда выражение в скобках в (3.207) можно преобразовать с помощью известного приблизительного равенства

$$(1+\Delta x)^\lambda \approx 1 + \lambda\cdot\Delta x,$$

дающего достаточно точные результаты при $\Delta x \ll 1$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) - 1 = \frac{v^2}{2c^2}.$$

Подставив это выражение в (3.207), получим (3.207′).

Значение (3.202′) константы интегрирования $E_0 = m_0c^2$ называют энергией **покоя** тела, ибо за счёт уменьшения именно этой величины выделяется в ядерных реакциях кинетическая энергия (3.205), соответствующая "дефекту массы" $\Delta m$. Известны даже такие реакции, когда весь запас энергии $E_0$ в массе покоя $m_0$ элементарных частиц преобразуется без остатка в кинетическую энергию. Это происходит при аннигиляции электрона с позитроном, в результате которой обе элементарные частицы исчезают и вместе с ними исчезают их массы покоя $m_e = 0{,}9109534 \cdot 10^{-30}$ кг, но результатом реакции становится рождение двух высокоэнергичных квантов (гамма – квантов) электромагнитного излучения, не имеющих массы покоя. Отсутствие массы покоя у фотонов (квантов электромагнитного излучения) будет рассмотрено ниже. Выяснение энергетического содержания константы интегрирования (3.202′) $E_0 = m_0c^2$ даёт основание назвать величину $mc^2$ (см. (3.204)) **полной энергией** $E$ тела, представляющей сумму его внутренней энергии (энергии покоя $E_0$) кинетической энергии $E_K$

$$mc^2 = E_K + m_0c^2 = E_K + E_0 = E\,. \qquad (3.208)$$

С учётом обозначения (3.208) полной энергии выражение (3.203) 4-импульса $\vec{\pi}$ примет вид

$$\vec{\pi} = e \cdot p + f \cdot \frac{E}{c}, \qquad (3.209)$$

побуждающий обратить внимание на псевдоевклидов инвариантный вектор

$$\vec{\mathcal{E}} = c\vec{\pi} = m_0c^2 l^0 = e \cdot cp + f \cdot E = c^2 m_0(-e \cdot \operatorname{sh}\varphi + f \cdot \operatorname{ch}\varphi)\,, \qquad (3.210)$$

который заслуживает названия 4-энергии, поскольку вторая его координата представляет полную энергию $E$ и первая координата имеет размерность энергии. Модуль 4-вектора энергии $\vec{\mathcal{E}}$ выражается мнимым числом

$$|\vec{\mathcal{E}}| = m_0c^2 i = iE_0\,. \qquad (3.210')$$

Таким образом, константа (3.202′) $E_0 = m_0c^2$, воспринимаемая нами как энергия покоя, есть вещественный параметр, определяющий модуль 4-вектора энергии, подобно тому, как модуль (3.175) $im_0$ вектора массы воспринимается нами в виде массы покоя $m_0$. И подобно тому как вектор массы (3.174) наблюдаемой мировой линии воспринимается в проекции (3.178) $\mu_2 = m_0 \cdot \operatorname{ch}\varphi$ на мировую линию наблюдателя в виде массы (3.179) $m$ **движущейся** материальной точки, так проекция вектора $\vec{\mathcal{E}}$ на мировую линию наблюдателя (на базисный орт $f$ — см. (3.210))

$$\text{пр.}_f\,\vec{\mathcal{E}} = m_0c^2 \cdot \operatorname{ch}\varphi = E \qquad (3.211)$$

воспринимается в виде полной энергии $E = E_K + E_0$ **движущегося** тела.

Подчеркнём значительность главного результата рассмотрения динамических характеристик материальных объектов в модели мира Минковского. Орту $l^0$ касательной к мировой линии коллинеарны (и направлены одинаково с $\boldsymbol{l}^0$ в сторону роста мировой линии) три основных инвариантных динамических вектора

4-вектор массы (3.174), (3.183) $$\vec{m} = m_0 \boldsymbol{l}^0 = \frac{p}{c}\boldsymbol{e} + m\boldsymbol{f}, \qquad (3.212)$$

4-вектор импульса (3.185), (3.187) $$\vec{\pi} = c\vec{m} = cm_0\boldsymbol{l}^0 = p\boldsymbol{e} + cm\boldsymbol{f}, \qquad (3.213)$$

4-вектор энергии (3.210) $$\vec{\mathfrak{E}} = c^2\vec{m} = c^2 m_0 \boldsymbol{l}^0 = pc\boldsymbol{e} + c^2 m\boldsymbol{f}, \qquad (3.214)$$

а орту $\boldsymbol{n}^0$ нормали к мировой линии коллинеарен инвариантный вектор (3.172) силы Минковского

$$\vec{\mathfrak{F}} = m_0\frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\tau^2} = m_0 c^2 \cdot \frac{d\boldsymbol{l}^0}{ds} = m_0 c \cdot \frac{d\boldsymbol{l}^0}{d\tau} = m_0 c^2 K \boldsymbol{n}^0.$$

Определение (3.188) силы Минковского через 4-импульс

$$\vec{\mathfrak{F}} = \frac{d\vec{\pi}}{d\tau}$$

мы можем теперь дополнить ещё более интересным определением через 4-вектор энергии. Действительно, произведение дифференциала 4-импульса на универсальную электродинамическую постоянную есть дифференциал 4-вектора энергии $d\vec{\mathfrak{E}} = c \cdot d\vec{\pi}$, а произведение дифференциала $d\tau$ собственного времени $\tau$ мировой линии на $c$ есть дифференциал $ds = c \cdot d\tau$ вещественного параметра $s$ длины (3.137) $is$ мировой линии. Поэтому

$$\vec{\mathfrak{F}} = \frac{d\vec{\pi}}{d\tau} = \frac{c \cdot d\vec{\pi}}{c \cdot d\tau} = \frac{d\vec{\mathfrak{E}}}{ds}. \qquad (3.215)$$

Последнее выражение представляет собой наиболее широкое обобщение основного закона динамики и снимает трудность истолкования второго закона Ньютона, отмеченную Р. Фейнманом (см. цитату из [57] в начале § 21 после формулы (3.169)). Там сказано, что нет способов независимого измерения массы и силы, сообщающей этой массе ускорение. Теперь же мы видим простое и глубокое соотношение: сила есть **производная** от 4-вектора энергии $\vec{\mathfrak{E}}$ по вещественному параметру $s$ длины мировой линии.

Замечательно, что соотношения (3.212) – (3.215) позволяют выразить в форме одной закономерности пять фундаментальных законов классической механики, открытие и утверждение которых в науке охватывает промежуток времени в два с половиной столетия. В 1585 году Джовани Бенедетти высказал мысль о принципе инерции [59, с.28, 354] и применил его для объяснения ускорения тела. В 1632 г. в книге [20] Г. Галилея даны представления о принципе инерции и принципе относительности [59, с. 72, 355]. В 1644 г. в труде Р. Декарта «Начала философии» впервые чётко сформулирован закон инерции и помещён закон сохранения количества движения, хотя и без учёта векторного характера этой величины [59, с. 100, 355]. Широкой публике принцип инерции известен в формулировке первого закона механики Ньютона: «всякое тело продолжает удерживаться в своём состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние» (цитировано по [19], с. 64). В 1748 г. М.В. Ломоносов провозгласил общее теоретическое утверждение о неуничтожимости и несотворимости материи и движения (закон сохранения материи и движения), а в 1756 г. подтвердил экспериментально сохранение массы вещества в химических реакциях. И только в середине XIX века трудами Ю. Мейера (1842 г.), Дж. Джоуля (1843 г.), Г. Грина и Г. Гельмгольца (1847 г.) открыт и утверждён закон сохранения энергии, причём Гельмгольц придал закону сохранения энергии наиболее общий характер, считая его справедливым не только для механических и тепловых, но также для электрических, химических, физиологических и всех иных материальных процессов. Существенным условием справедливости законов сохранения количества движения и энергии является изолированность (замкнутость) рассматриваемой системы тел, т. е. отсутствие взаимодействия её каким-либо образом с внешними по отношению к этой системе телами.

Условию изолированности системы материальных точек соответствует изолированность (полная в идеальном случае или приблизительная на практике) системы мировых линий. 4-векторы энергии мировых линий, входящих в такую систему, складываются геометрически в суммарный 4-вектор энергии $\vec{\mathcal{E}}$ системы. В сущности 4-вектор энергии мировой линии сложного тела, рассматриваемой как "жгут" нитей мировых линий частей тела, тоже представляет векторную сумму векторов энергии нитей. И если такая объединяющая система мировых линий ("жгут") не испытывает внешних воздействий, способных искривить её, то суммарный 4-вектор энергии системы не изменяет своего направления, что означает сохранение **прямолинейности** совокупной мировой линии в процессе её проявления (роста), не противоречащую искривлению отдельных линий, входящих в изолированную систему. Это непосредственно следует из равенства (3.215): при постоянстве 4-вектора энергии $\vec{\mathcal{E}}$ его производная по параметру $s$ длины мировой линии, характеризующая кривизну линии, равна нулевому вектору. И обратно, если эта производная есть нулевой вектор, что говорит об отсутствии искривления мировой линии, то 4-вектор энергии последней постоянен. Но постоянство 4-вектора энергии означает постоянство направления орта $l^0$ касательной к мировой линии и вместе с тем постоянство вектора $\vec{m}$ массы и 4-вектора импульса $\vec{\pi}$. Прямолинейная же мировая линия, угол $i\varphi$ наклона которой к любой из осей $OY$ сохраняет постоянное значение, воспринимается в любой инерциальной системе отсчёта в виде материальной точки, движущейся с постоянной скоростью (3.114)

$$v = (ic) \cdot tg(i\varphi) .$$

Вот и получается, что из принципа инерции (о постоянстве скорости материальной точки относительно некоторой ИСО) и принципа относительности (о равноправии всех ИСО), вытекают законы сохранения векторов массы, 4-импульса и 4-энергии мировой линии (системы мировых линий) не испытывающей внешних воздействий. Все четыре закона сохранения (скорости в законе инерции, массы, импульса и энергии), справедливые для изолированного тела, сконцентрированы в одном простом математическом равенстве (3.215) при условии постоянства 4-вектора $\vec{\mathcal{E}}$. А при снятии этого ограничительного условия равенство (3.215) служит также обобщением второго закона механики Ньютона. Поистине это **основной закон динамики**, охватывающий пять законов классической физики.

## § 22. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОТОНА

Каждый человек ощущает, что свет (и обобщённо — электромагнитное излучение) переносит энергию. Мы греемся в лучах Солнца и испытываем дискомфорт, когда поток этого излучения уменьшается по разным причинам или чрезмерно увеличивается. Давление света, обусловленное импульсом, мы не ощущаем (ибо импульс в $c$ раз меньше энергии), но тонкими экспериментами, которые впервые провёл П.Н. Лебедев в 1899 году, и давление света на тела доказано. А в современной астрофизике выяснена важная роль давления излучения звезды на окружающее пылевое и газовое вещество. Следовательно электромагнитное излучение должно характеризоваться триадой (3.212) – (3.214) инвариантных 4-векторов: энергии, импульса, массы. Но что касается массы, то кто же в наш век не знает, что масса покоя любых фотонов, даже весьма энергичных, равна нулю?

В конце § 16 было показано (см. (3.122), (3.123)), что согласно модели мира Минковского электромагнитные воздействия могут передаваться только по изотропным прямым. Но если 4-векторы массы, импульса, энергии направлены по касательной $l^0$ к мировой линии в любой её точке, то эти же векторы в качестве динамических характеристик электромагнитного излучения должны быть параллельными изотропным прямым и, следовательно, сами должны быть изотропными векторами. Испускание и поглощение электромагнитного излучения осуществляется не в виде непрерывного процесса, как считалось в классической физике, а в виде дискретных порций — квантов. Энергия кванта излучения, как открыл Макс Планк, пропорциональна частоте электромагнитных колебаний. В современной литературе принято по соображениям удобства пользоваться так называемой **циклической частотой** ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\upsilon, \qquad (3.216)$$

где T — период колебаний, $\upsilon$ ("ню") — число колебаний в единицу времени (обычная частота). Поэтому формулу Планка пишут в виде

$$\vec{E} = \hbar\omega , \qquad (3.217)$$

где $\hbar = (1{,}0545887 \pm 0{,}0000057)\cdot 10^{-34}$ Дж · сек — постоянная Планка. Квант электромагнитного поля называют **фотоном** *и считают его элементарной частицей*. Поэтому мы будем далее динамические характеристики электромагнитного излучения называть динамическими характеристиками фотона. Записывать 4-вектор массы фотона в виде $\vec{m} = m_0 l^0$ бессмысленно, потому что вещественный параметр $m_0$ характеризует мнимое значение $i\,m_0$ **метрического** модуля (3.175) вектора массы, а так как у изотропного вектора массы фотона метрический модуль равен нулю, то равен нулю и вещественный параметр $m_0$, имеющий для неизотропных мировых линий физический смысл массы покоя материальной точки. Вошло в привычку говорить, что масса покоя фотона равна нулю, но это выражение весьма неудачно по форме и содержанию, поскольку фотон понимается как элементарный световой сигнал, который по отношению к любой системе отсчёта пространства и времени имеет скорость $c$, т. е. не может находиться в состоянии покоя ни при каких условиях. Лучше не пользоваться таким нечётким выражением и говорить вполне точно о равенстве нулю метрического модуля массы у всех фотонов. Соответственно равны нулю метрические модули изотропных 4-векторов импульса и энергии любых фотонов.

Для изотропных 4-векторов энергии, импульса и массы остаётся только один способ выражения — в виде разложения по псевдоортонормированному базису. И так как наличие у фотона наблюдаемой полной энергии $E$ и наблюдаемого импульса $p$, участвующих в качестве координат в разложении (3.210)

$$\vec{\mathcal{E}} = e\cdot cp + f\cdot E$$

4-вектора энергии, не подлежит сомнению, то именно это разложение мы положим в основу рассуждений об изотропности динамических характеристик фотона. Условие изотропности (см. (3.52) в § 11)

$$x^2 - y^2 = 0$$

применительно к вектору $\vec{\mathcal{E}}$ примет вид

$$p^2c^2 = E^2 ,$$

и так как коэффициент при базисном орте $f$ в разложении любого вектора верхнего сектора псевдоевклидовой плоскости может иметь только положительное значение, то $E > 0$ и из последнего равенства следует

$$pc = \pm E , \qquad \text{что равносильно соотношению} \qquad p = \pm\frac{E}{c} . \qquad (3.218)$$

Внося в (3.218) выражение (3.217) энергии фотона по формуле Планка, найдём, что импульс фотона равен

$$p = \pm \frac{\hbar\omega}{c}\,. \qquad (3.218')$$

Знак (+) при значении импульса (3.218′) будет иметь место в разложении (3.210) изотропного 4-вектора энергии, параллельного изотропной прямой $y = x$, а у векторов, параллельных второму изотропному направлению $y = -x$, значение наблюдаемого импульса отрицательно

$$\vec{\mathcal{E}}_{+} = \frac{\hbar\omega}{c}\cdot c\cdot \boldsymbol{e} + \hbar\omega\cdot \boldsymbol{f} = \hbar\omega(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}), \qquad \vec{\mathcal{E}}_{-} = \hbar\omega(-\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}). \quad (3.219)$$

Замечательно то обстоятельство, что все три динамические характеристики фотона, будучи изотропными векторами, не могут быть определены иначе, как своими координатами (однозначно зависящими от частоты ω). Это создаёт впечатление, будто для них возможны только субъективные оценки, всецело зависящие от выбора системы отсчёта пространства и времени (соответственно — только от выбора псевдоортонормированной системы координат). Однако действительные соотношения оказываются более утончёнными и богатыми объективной информацией.

Когда речь шла о неизотропных векторах энергии $\vec{\mathcal{E}} = m_0 c^2 \boldsymbol{l}^0$, то можно было выбрать в бесконечном множестве псевдоортонормированных базисов такой специальный базис (3.159) $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{l}^0$, $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{n}^0$, чтобы псевдоортогональная компонента вектора $\vec{\mathcal{E}}$ в направлении $\boldsymbol{f}$ совпадала с самим вектором $\vec{\mathcal{E}}$. Но среди всех псевдоортонормированных базисов нет такого, у которого вектор $\boldsymbol{f}$ был бы параллелен **изотропному** вектору $\vec{\mathcal{E}}$. Поэтому сам по себе изотропный 4-вектор энергии не даёт оснований для выделения специального псевдоортонормированного базиса, имеющего какие-либо преимущества перед другими псевдоортононормированными базисами в деле определения изотропного вектора. Однако всякий фотон рождается в результате определённого события излучения, связанного с определённой мировой линией, а эта связь уже позволяет выделить специальный (обозначим его как нештрихованный) базис $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$ и соответствующую ему инерциальную систему отсчёта, по отношению к которой атом, излучивший данный фотон, является неподвижным. Пусть по отношению к такой (нештрихованной) ИСО интересующий нас фотон характеризуется частотой ω, определяющей квант энергии $E = \hbar\omega$. Этот фотон может быть воспринят (обнаружен) некоторым наблюдателем только в акте поглощения определённым атомом, позволяющим выделить определённую (штрихованную) ИСО, относительно которой поглощающий атом неподвижен. Если штрихованная ИСО (определённая актом поглощения фотона) имеет скорость $v$ относительно нештрихованной ИСО (определённой актом излучения того же фотона), то фотон передаст поглотившему его атому энергию $E' = \hbar\omega'$, определённую частотой $\omega'$. Будет ли поглощённая энергия $E' = \hbar\omega'$ меньше или больше излучённой энергии $E =$

$= \hbar\omega$, зависит от направления скорости $v$ штрихованной ИСО по отношению к нештрихованной ИСО. Связь между частотами $\omega$ и $\omega'$, известная под названием эффекта Доплера, могла бы быть легко выведена здесь, но нам эта подробность не понадобится. Достаточно того, энергия $E = \hbar\omega$ (и частота $\omega$), которую имеет фотон по отношению к ИСО, связанной с излучившим этот фотон атомом, может играть роль объективной характеристики фотона, хотя она и не является инвариантной величиной в строгом смысле слова. Каждый атом можно узнать по спектру частот его излучения, измеренных в лабораторных условиях. Но если наблюдается быстро движущийся излучатель, то хотя абсолютные значения частот его спектральных линий могут сильно измениться, **отношения** частот останутся такими же, как в спектре неподвижного излучателя.

Например, если фотоны излучаются атомами водорода в спектральных линиях $H_\alpha$ (циклическая частота $\omega_\alpha = 2{,}8701074 \cdot 10^{15}$ сек$^{-1}$, длина волны $\lambda_\alpha = 656{,}3$ нм) и $H_\beta$ ($\omega_\beta = 3{,}8750288 \cdot 10^{15}$ сек$^{-1}$, $\lambda_\beta = 486{,}1$ нм), то отношение этих частот равно

$$k_{\beta\alpha} = \omega_\beta / \omega_\alpha = 1{,}3501337\,. \qquad (3.220)$$

В случае параллельности 4-векторов энергии фотонов $H_\alpha$ и $H_\beta$ между ними имеется линейная зависимость

$$\vec{\mathcal{E}}_\beta = \hbar\omega_\beta \cdot (e+f) = \frac{\hbar\cdot\omega_\beta}{\hbar\cdot\omega_\alpha} \cdot \hbar\omega_\alpha \cdot (e+f) = k_{\beta\alpha} \cdot \hbar\omega_\alpha \cdot (e+f) = k_{\beta\alpha} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\alpha\,.$$

Различие частот $\omega_\alpha$ и $\omega_\beta$, а значит и наблюдаемых энергий $E_\alpha$ и $E_\beta$, являющихся координатами изотропных 4-векторов $\vec{\mathcal{E}}_\alpha$ и $\vec{\mathcal{E}}_\beta$, с полной определённостью обнаруживается в наблюдениях спектра излучения. Эти различия означают, что в **линейном отношении** изотропный 4-вектор энергии $\vec{\mathcal{E}}_\beta$ превосходит изотропный 4-вектор энергии $\vec{\mathcal{E}}_\alpha$ в 1,35 раз, хотя в метрическом отношении модули 4-векторов энергии этих фотонов одинаковы в их равенстве нулю. При этом линейная зависимость $\vec{\mathcal{E}}_\beta = k_{\beta\alpha} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\alpha$ между изотропными векторами инвариантна, поскольку отношение (3.220) частот не изменяется при переходах между псевдоортонормированными базисами. Так **природа демонстрирует нам принципиальное различие линейных и метрических модулей изотропных векторов** (см. конец § 11).

## § 23. ОСНОВНЫЕ ЧЕРТЫ ЧЕТЫРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

Мы не можем **наглядно** представить четырёхмерное пространство, и в этом параграфе выяснится, почему не можем. Но данное в § 5 аналитическое *определение 2.5* размерности пространства (перед формулой (2.32)), основанное на алгебраическом отношении линейной независимости векторов, позволяет работать с теоретическими моделями пространств любой размерности. Согласно этому определению в четырёхмерном пространстве найдётся линейно независимая система четырёх векторов, и в частности — базис (см. *определение 2.6* после формулы (2.36)), состоящий из четырёх векторов, а после всего сказанного в §§ 11 – 22 нетрудно понять, какой четвёртый вектор добавляется в пространстве Минковского к трём доступным нашим наглядным восприятиям векторам базиса трёхмерного наблюдаемого пространства. На псевдоевклидовой плоскости координатная ось $OY$, вдоль которой отсчитываются пропорциональные времени $t$ **пространственные** расстояния $iy = (ic)t$ (см. (3.106) и (3.110)), сочетается с осью $OX$, представляющей **произвольно** взятую прямую в наблюдаемом трёхмерном пространстве. Поэтому логично обратить внимание на сочетание **всего трёхмерного** наблюдаемого пространства с такой координатной осью, на которой расстояния выражаются мнимыми числами и могли бы быть пропорциональными времени. При этом надо будет выбрать подходящие буквенные обозначения для четырёх координатных осей и указывающих их направления базисных векторов.

Общепринято сохранять привычные обозначения $OX$, $OY$, $OZ$ за теми осями четырёхмерного пространства, которые могут выступать в роли координатных осей наблюдаемого пространства. А так как буквами $x$, $y$, $z$ латинский алфавит заканчивается, то предшествующую им букву $w$ уместно применить к обозначению четвёртой координатной оси $OW$. Для гармоничного сочетания с таким алфавитным порядком координат и соблюдения традиций сохраним за базисными векторами осей $OX$, $OY$, $OZ$ порядковые номера 1, 2, 3 соответственно, пользуясь обозначениями $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, а четвёртому базисному вектору (указывающему направление оси $OW$) присвоим номер “ноль”: $\boldsymbol{e}_0$. Тогда разложение любого радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ в четырёхмерном пространстве по базису $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ будет иметь вид

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = w\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 . \qquad (3.221)$$

Для того чтобы каждая из координатных плоскостей $OWX$, $OWY$, $OWZ$, содержащих ось $OW$, имела псевдоевклидовы метрические свойства, необходимо и достаточно, чтобы длина базисного вектора $\boldsymbol{e}_0$ выражалась мнимым числом, а длины базисных векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — вещественными числами. Поэтому условие псевдоортонормированности базиса $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ примет вид

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.222)$$

С помощью матрицы (3.222) легко получить выражение скалярного псевдоевклидова квадрата вектора (3.221)

$$\boldsymbol{rr} = -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \qquad (3.223)$$

и длины (модуля) вектора

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{-w^2+x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (3.223')$$

Так как координатная ось $OW$ в плоскости $OWX$ играет теперь такую же роль, как ось $OY$ на псевдоевклидовой плоскости $OXY$ в предшествующих параграфах, то найденное ранее основное соотношение (3.106), (3.110) теперь надо будет писать в виде

$$w = ct, \qquad iw = (ic)t. \qquad (3.224)$$

Рассмотрим, что представляет собой множество точек в четырёхмерном пространстве Минковского, у которых радиус-векторы (3.221) псевдоортогональны к базисному орту $\boldsymbol{e}_0$ (к координатной оси $OW$). Условие этой псевдоортогональности

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_0 = (w\boldsymbol{e}_0+x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_0 = 0 \qquad (3.225)$$

после преобразований с помощью матрицы (3.222) примет вид

$$w\cdot\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0+x\cdot\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_0+y\cdot\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_0+z\cdot\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_0 = 0,$$

$$w\cdot(-1)+x\cdot 0+y\cdot 0+z\cdot 0 = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad w = 0. \qquad (3.225')$$

Полученное уравнение (3.225′) $w = 0$ определяет геометрическое место всех тех точек четырёхмерного пространства, у радиус-векторов которых первая координата должна быть равна нулю, тогда как остальные три координаты $x$, $y$, $z$ могут принимать независимо друг от друга любые значения между $-\infty$ и $+\infty$. Множество таких точек и их радиус-векторов

$$\boldsymbol{r} = 0\cdot\boldsymbol{e}_0+x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3 = x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3 \qquad (3.225'')$$

заполняет трёхмерное пространство с базисом $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, для которого матрица скалярных произведений векторов, представляющая часть матрицы (3.222), имеет вид

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.226)$$

Скалярный квадрат любого радиус-вектора из множества (3.225″), определённый с помощью матрицы (3.226)

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = x^2+y^2+z^2, \qquad (3.227)$$

не может принимать отрицательных значений и обращается в ноль только у нулевого вектора (все координаты которого равны нулю). Таким образом, множество точек с радиус-векторами (3.225″) описывается такой же математической моделью, как и привычное для нас наблюдаемое пространство — моделью вещественного трёхмерного пространства с собственно евклидовыми метрическими свойствами. Но замечательно то, что если люди на протяжении веков не могли себе представить какое-либо пространство вне бесконечного трёхмерного наблюдаемого пространства, то теперь мы обнаруживаем трёхмерное пространство в качестве составной части четырёхмерного пространства Минковского. Определение трёхмерного собственно евклидова пространства радиус-векторов (3.225″) уравнением (3.225′) $w=0$ имеет формальное сходство с определением плоскости. Поэтому трёхмерное пространство (2.225′), (3.225″) получило название **гиперплоскости**. Роль трёхмерной гиперплоскости в четырёхмерном пространстве подобна роли двумерной плоскости в трёхмерном пространстве. Но плоскость в трёхмерном пространстве мы можем рассматривать "извне", т. е. из такой точки, которая не принадлежит этой плоскости, и можем наглядно представить вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Увидеть же "извне" трехмерное пространство гиперплоскости (3.225″) и перпендикуляр к ней мы не можем.

Тем не менее, формальное сходство гиперплоскости с плоскостью оказывается весьма глубоким. Подобно тому как мы можем представить трёхмерное пространство состоящим из кипы взаимно параллельных плоскостей, "нанизанных" на перпендикулярную им всем ось, так аналитическими методами нетрудно обнаружить, что параллельные между собой не пересекающиеся трёхмерные гиперплоскости заполняют четырёхмерное пространство или некоторую часть его. Покажем, что через любую точку $P$ оси $OW$ проходит псевдоортогональная к этой оси гиперплоскость, не пересекающаяся с гиперплоскостью (3.225′), если точка $P$ не совпадает с точкой $O$. Радиус-вектор точки $P$ имеет разложение по базису

$$\boldsymbol{r}_P = w_P\cdot\boldsymbol{e}_0 + 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + 0\cdot\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3\,,$$

а разность радиус-векторов (3.221) и $\boldsymbol{r}_P$ имеет разложение

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_P = \overline{OM} - \overline{OP} = \overline{PM} = (w-w_P)\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,.$$

Те из векторов $\overline{PM}$, которые псевдоортогональны к оси $OW$, удовлетворяют уравнению

$$\boldsymbol{e}_0\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_P) = 0 \iff \boldsymbol{e}_0\cdot\{(w-w_P)\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\} = 0\,,$$

$$(w-w_P)\cdot(-1) + x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 0 = 0 \iff w = w_P\,. \qquad (3.228)$$

Видно, что гиперплоскости (3.228), (3.225′), псевдоортогональные к оси $OW$, не имеют ни одной общей им точки, если $w_P \neq 0$. Если координате $w_P$ давать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$, то гиперплоскости $w=w_P$, "нанизанные" на псевдоортогональную к ним ось $OW$, могут заполнить всё бесконечное четырёхмерное псевдоевклидово пространство индекса 1. Индекс 1 указывает на то, что в этом пространстве **только один** из базисных векторов имеет отрицательный псевдоевклидов скалярный квадрат $\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 = -1$.

Рассмотрим ещё один геометрический образ, полезный для аналитического осмысления понятия гиперплоскости. В четырёхмерном пространстве Минковского геометрическое место точек, удалённых от точки $O$ начала координатной системы $OWXYZ$ на **вещественное** расстояние $R$, определяется уравнением (см. (3.223) и (3.223′))

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{-w^2+x^2+y^2+z^2} = R\,, \qquad (3.229)$$

$$\text{или} \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = R^2\,, \iff -w^2+x^2+y^2+z^2 = R^2\,. \qquad (3.229')$$

Это геометрическое место точек четырёхмерного пространства уместно назвать **гиперповерхностью**. Не имея возможности составить цельное зрительное представление о гиперповерхности (3.229), воспользуемся методом сечений. Точки, принадлежащие пересечению гиперповерхности (3.229′) с гиперплоскостью (3.225′) $w = 0$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ w = 0, \end{cases} \tag{3.230}$$

равносильной уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{3.230′}$$

Это значит, что системой уравнений (3.230) определяется сфера радиуса $R$, принадлежащая всеми своими точками трёхмерному собственно евклидову пространству гиперплоскости (3.225′) $w = 0$. Пересечение гиперповерхности (3.229) с гиперплоскостью (3.228) $w = w_P$, определяется системой уравнений

$$\begin{cases} -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ w = w_P, \end{cases} \tag{3.231}$$

равносильной уравнению

$$-w_P^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + w_P^2. \tag{3.231′}$$

Это тоже сфера, но принадлежащая всеми своими точками другой гиперплоскости (3.228) $w = w_P$, и центром сферы (3.231′) служит точка $P$, в которой гиперплоскость (3.228) пересекается в координатной осью $OW$, а радиус сферы (3.231′), равный $\sqrt{R^2 + w_P^2}$, больше радиуса $R$ сферы (3.230′). Сферы (3.230′) и (3.231′) не пересекаются между собой, потому что принадлежат трёхмерным пространствам различных гиперплоскостей (3.225′) и (3.228), не имеющих ни одной общей точки при $w_P \neq 0$.

У привычной собственно евклидовой сферы обнаруживаются очень непривычные свойства при рассмотрении её как объекта, принадлежащего четырёхмерному пространству. Мы привыкли к тому, что направлениями из центра сферы в любые точки сферы исчерпываются все возможные в наблюдаемом пространстве направления и убеждены в том, что нельзя перейти из центра сферы в точку, удалённую от центра больше, чем на радиус, не пересекая сферы. Однако, все точки сферы (3.230) принадлежат гиперплоскости (3.225′) $w = 0$, а из этой гиперплоскости можно выйти в другие гиперплоскости по любым направлениям, не принадлежащим к трёхмерному пространству $w = 0$, и затем вернуться в любую точку этой гиперплоскости, удалённую от центра $O$ больше чем на радиус $R$. Таким, образом в четырёхмерном пространстве есть возможность перейти из внутренней области сферы (3.230) во внешнюю область, не пересекая самой сферической поверхности. Это подобно тому, как из центра окружности можно перейти во внешнюю по отношению к ней область не пересекая окружности, если двигаться по линии, выходящей из плоскости окружности, тогда как без выхода из плоскости окружности такой переход совершить невозможно.

Если гиперплоскости (3.225′), (3.228), псевдоортогональные к координатной оси $OW$, оказались хорошо знакомыми нам трёхмерными собственно евклидовыми пространствами, то в гиперплоскостях, псевдоортогональных к каждой из осей $OX$, $OY$, $OZ$, мы обнаружим замечательные новшества. Геометрическое место точек, у которых радиус-векторы (3.221) псевдоортогональны к базисному орту $\boldsymbol{e}_3$ (к координатной оси $OZ$), определяется условием

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_3 = (w\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3 = 0\,, \tag{3.232}$$

которое после преобразований с помощью матрицы (3.222) примет вид

$$w\cdot\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_3 + x\cdot\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + y\cdot\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + z\cdot\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3 = 0\,,$$

$$w\cdot 0 + x\cdot 0 + y\cdot 0 + z\cdot 1 = 0\,, \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = 0\,. \tag{3.232′}$$

Уравнению (3.232′) $z = 0$ удовлетворяют все те точки четырёхмерного пространства, у радиус-векторов которых четвёртая координата должна быть равна нулю, тогда как первые три координаты $w$, $x$, $y$ могут принимать независимо друг от друга любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Множество таких точек и их радиус-векторов

$$\boldsymbol{r} = w\cdot\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 = w\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \tag{3.232″}$$

заполняет трёхмерное пространство с базисом $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, для которого матрица скалярных произведений векторов, представляющая часть матрицы (3.222), имеет вид

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.233}$$

Скалярный квадрат любого радиус-вектора из множества (3.232″), определённый с помощью матрицы (3.233)

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = -w^2 + x^2 + y^2\,, \tag{3.233′}$$

может быть положительным или отрицательным, и даже равным нулю без того, чтобы вектор $\boldsymbol{r}$ был нулевым. Соответственно модуль

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{-w^2 + x^2 + y^2} \tag{3.233″}$$

векторов (3.232″) может выражаться вещественным или мнимым числом и даже быть равным нулю у ненулевых векторов. Такие возможности уже знакомы нам по псевдоевклидовой плоскости, но теперь предстоит иметь дело уже не с плоскостью, а с трёхмерным псевдоевклидовым пространством. Наиболее интересным для характеристики этого пространства является множество **ненулевых** радиус-векторов (3.232″), удовлетворяющих условию **изотропности**

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = -w^2 + x^2 + y^2 = 0\,. \tag{3.234}$$

Уравнению (3.234) соответствует в трёхмерном собственно евклидовом пространстве коническая поверхность с вершиной в точке $O$. Это становится вполне очевидным при записи уравнения (3.234) в виде

$$x^2 + y^2 = w^2\,. \tag{3.234′}$$

Действительно, давая координате $w$ фиксированное значение

$$w = w_P , \qquad (3.235)$$

мы тем самым зададим уравнение плоскости, которая в собственно евклидовом пространстве ортогональна, а в псевдоевклидовом пространстве псевдоортогональна к оси $OW$. В обоих случаях пересечение этой плоскости с поверхностью (3.234′) является окружностью

$$x^2 + y^2 = w_P^2 \qquad (3.235')$$

радиуса $w_P$, который тем больше, чем больше абсолютная величина числа $w_P$. Коническая поверхность (3.234′) изображена на рис. 3.11. Так как все образующие конуса (3.234) являются изотропными радиус-векторами, то он получил название **изотропного конуса.**

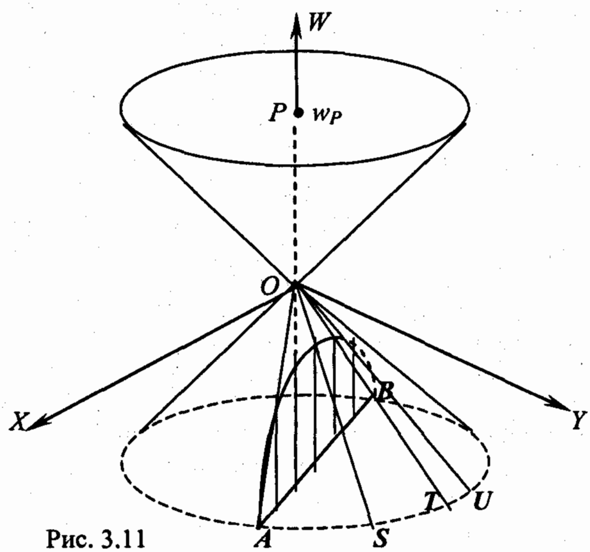


Рис. 3.11

Именно наличие изотропного конуса даёт возможность наблюдателю воспринимать зрительно плоскую полосу мировых линий в виде прямолинейного стержня. При объяснении эффекта сокращения длины движущегося стержня в § 18 мы рассматривали на рис. 3.9 плоскую полосу мировых линий между прямыми $OY$ и $SF$, но сам наблюдатель, состояние которого изображено мировой точкой $O$, ограниченный условиями двумерного псевдоевклидова пространства $OXY$, соответствующего одномерному наблюдаемому пространству оси $OX$, не мог воспринимать весь стержень зрительно. Ведь в одномерном наблюдаемом пространстве приходится смотреть на стержень вдоль линии стержня и видеть все точки стержня спроецированными в одну точку. В двумерном же **псевдоевклидовом** пространстве (в плоскости рис. 3.9) к наблюдателю приходят световые сигналы только от тех точек мировых линий полосы $OYSF$, которые лежат на изотропной $y = -x$, и опять наблюдаемые точки полосы проецируются в одну точку.

Иная ситуация в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве гиперплоскости $z = 0$, отнесённой к координатной системе $OWXY$. На рис. 3.11 изображена (вертикальной штриховкой) плоская полоса мировых линий, параллельная оси $OW$. Эта полоса пересекается с изотропным конусом (3.235) по гиперболе, точки которой и воспринимает по изотропным $OS$, $OT$, $OU$ наблюдатель, состояние которого изображено точкой $O$. Но складывающийся у наблюдателя зрительный образ плоской полосы мировых линий не имеет вида гиперболы, а имеет вид прямой $AB$, потому что различия значений координаты $w$ точек гиперболы не воспринимаются в виде пространственных различий, а при снятии пространственных различий координаты $w$ все точки гиперболы воспринимаются как спроецированные на прямую $AB$. И любая фигура, спроецированная на плоскость $OXY$, может быть воспринята зрительно наблюдателем, находящимся в мировой точке $O$, но действительным материальным источником такого зрительного образа будет цилиндрическая поверхность, образованная мировыми линиями, проходящими через контуры, очерчивающие фигуру на плоскости $OXY$. Трёхмерное псевдоевклидово пространство гиперплоскости $z = 0$ представляет собой приложение модели мира Минковского к объяснению зрительного восприятия двумерного мира плоскости $OXY$. Зрительное восприятие **трёхмерного** наблюдаемого мира получает объяснение только в четырёхмерной модели мира Минковского.

Изотропный конус (3.234) выделяет в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве три области: две внутренние полости конической поверхности (верхнюю и нижнюю) и внешнюю по отношению к конусу область. У всех векторов (3.232″), принадлежащих **внешней** области, модуль (3.233″) выражается **вещественным** числом, так как внешняя область определяется неравенством

$$-w^2 + x^2 + y^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 > w^2 . \qquad (3.236)$$

Обе **внутренние** полости изотропного конуса удовлетворяют неравенству

$$-w^2 + x^2 + y^2 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 < w^2 . \qquad (3.237)$$

При этом **верхняя внутренняя** полость определяется неравенствами

$$w > \sqrt{x^2 + y^2} > 0 , \qquad (3.237')$$

а **нижняя** внутренняя полость — неравенствами

$$w < -\sqrt{x^2 + y^2} < 0 . \qquad (3.237'')$$

У всех векторов, принадлежащих внутренним полостям, модуль выражается **мнимым** числом. Это разбиение пространства на области не зависит от того, по отношению к какой из псевдоортонормированных координатных систем задано уравнение изотропного конуса, потому что образующими изотропного конуса (3.234) являются изотропные радиус-векторы, а свойство всякого изотропного вектора иметь метрическую длину, равную нулю, не зависит от выбора координатной системы (инвариантно).

Такими же псевдоевклидовыми метрическими свойствами, как рассмотренная гиперплоскость (3.232′), отнесённая к псевдоортонормированной системе координат $OWXY$, обладает псевдоортогональная к оси $OY$ гиперплоскость $OWXZ$ ($y = 0$) и псевдоортогональная к оси $OX$ гиперплоскость $OWYZ$ ($x = 0$). И всякая иная гиперплоскость, содержащая в себе координатную ось $OW$ системы координат $OWXYZ$ четырёхмерного псевдоевклидова пространства Минковского, является трёхмерным псевдоевклидовым пространством. В дальнейшем при встрече с трудностями наглядных представлений о линейных и метрических соотношениях и о геометрических конструкциях (гиперповерхностях) в четырёхмерном пространстве Минковского мы сможем прибегать к упрощающим иллюстрациям, используя аналогию с трёхмерным псевдоевклидовым пространством, в котором за счёт понижения размерности гиперплоскостям соответствуют плоскости, а трехмерным гиперповерхностям — двумерные поверхности, обладающие характерными метрическими особенностями своих аналогов из четырёхмерного псевдоевклидова пространства индекса 1.

Теперь обратимся к тем **ненулевым** радиус-векторам (3.221)

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = w\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\,,$$

принадлежащим четырёхмерному псевдоевклидову пространству индекса 1, у которых скалярный квадрат (3.223) равен нулю

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{3.238}$$

и следовательно равен нулю метрический модуль (3.223′)

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{-w^2 + x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{3.238′}$$

Множество всех этих изотропных радиус-векторов образует гиперповерхность, имеющую уравнение (3.238), о которой нам нужно составить по возможности ясное представление. Понять, что такое гиперплоскость, было легче, потому что гиперплоскость в четырёхмерном пространстве является трёхмерным линейным пространством, о котором мы имеем и зрительное представление, и теоретическое. Главная трудность в понимании гиперплоскостей состояла в том, что мы не можем увидеть их извне и представить наглядно их взаимное расположение в четырёхмерном пространстве. Но о гиперповерхности, определённой уравнением (3.238), мы совсем не имеем зрительного представления, хотя именно она играет важнейшую роль в формировании нашего зрительного представления об окружающем материальном мире. Ведь зрительные восприятия основаны на электромагнитных сигналах, которые могут передаваться только по изотропным. Главным методом изучения гиперповерхности (3.238) будет метод сечения её гиперплоскостями и плоскостями.

Пересечение гиперповерхности (3.238) с гиперплоскостью $OXYZ$, имеющей уравнение (3.225′) $w = 0$, определяется системой условий

$$\begin{cases} -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \\ w = 0, \end{cases} \quad \text{равносильной условию} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0\,.$$

Но таким условиям удовлетворяет только нулевой радиус-вектор, т.е. точка, в данном случае точка $O$ начала координатной системы $OWXYZ$.

Пересечение гиперповерхности (3.238) с гиперплоскостью $w = w_P$ (3.228) определяется системой условий

$$\begin{cases} -w^2+x^2+y^2+z^2 = 0, \\ w = w_P, \end{cases} \quad \text{равносильной условию} \quad x^2+y^2+z^2 = w_P^2. \tag{3.239}$$

Это уравнение определяет сферу радиуса $|w_P|$ в трёхмерном собственно евклидовом пространстве гиперплоскости (3.228). Если $w_P > 0$, то гиперплоскость $w = w_P$ находится над координатной гиперплоскостью $OXYZ$, и симметрично относительно $OXYZ$ расположена гиперплоскость $w = -w_P$, пересекающая гиперповерхность (3.238) по сфере такого же радиуса $w_P$.

Пересечение гиперповерхности (3.238) с гиперплоскостью $OWXY$, имеющей уравнение (3.232′) $z = 0$, определяется системой условий

$$\begin{cases} -w^2+x^2+y^2+z^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{равносильной уравнению} \quad x^2+y^2 = w^2,$$

в котором мы узнаём уравнение (3.234′) изотропного конуса псевдоевклидовой гиперплоскости $z = 0$. Аналогичным образом псевдоевклидова гиперплоскость $OWYZ$, имеющая уравнение $x = 0$, пересекается с гиперповерхностью (3.238) по изотропному конусу

$$y^2+z^2 = w^2, \tag{3.240}$$

а псевдоевклидова гиперплоскость $OWXZ$, имеющая уравнение $y = 0$, пересекается с гиперповерхностью (3.238) по изотропному конусу

$$x^2+z^2 = w^2 \tag{3.240′}$$

гиперплоскости $OWXZ$. Аналогия гиперповерхности (3.238) с изотропным конусом трёхмерного псевдоевклидова пространства глубока и всестороння. Эта гиперповерхность содержит в себе все изотропные радиус-векторы четырёхмерного псевдоевклидова пространства и не содержит иных векторов. Сечения гиперповерхности (3.238) псевдоевклидовыми гиперплоскостями являются изотропными конусами этих гиперплоскостей, а сечения собственно евклидовыми **гиперплоскостями** $w = w_P$, псевдоортогональными к координатной оси $OW$, являются собственно евклидовыми сферами подобно тому, как в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве сечения изотропных конусов собственно евклидовыми **плоскостями** $w = w_P$, псевдоортогональными к оси $OW$, являются собственно евклидовыми окружностями. Наконец, и уравнение (3.238) похоже на уравнения (3.235′), (3.240), (3.240′) изотропных конусов, отличаясь от них только бóльшим количеством переменных. Поэтому вполне обоснованно гиперповерхность (3.238) получила название **изотропного гиперконуса** четырёхмерного пространства Минковского.

Не имея зрительно воспринимаемого образа изотропного гиперконуса, мы не сможем наглядно представить, какие области он выделяет в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве. Но в этом нетрудно разобраться с помощью аналитических признаков, подобных тем, что характеризуют изотропный конус в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве. В множестве радиус-векторов (3.221), принадлежащих четырёхмерному пространству Минковского, есть подмножество векторов, имеющих **положительный** скалярный квадрат (3.223)

$$\boldsymbol{rr} = -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 > 0 \qquad (3.241)$$

и **вещественное** значение модуля (3.223′). Представив условие (5.60) в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 > w^2, \qquad (3.241')$$

легко понять, что на любой собственно евклидовой гиперплоскости $w = w_P$ (3.228) условие (3.241′) выполняется только для таких точек, которые находятся **вне сферы** радиуса $R = |w_P|$, а радиус этот тем больше, чем больше по абсолютной величине удаление $|w_P|$ гиперплоскости $w = w_P$ от координатной гиперплоскости *OXYZ*, имеющей уравнение $w = 0$. Сама сфера радиуса $R = |w_P|$ в гиперплоскости $w = w_P$ есть не что иное как пересечение этой гиперплоскости с изотропным гиперконусом (3.238). Такой геометрический смысл аналитического условия (3.241′) делает вполне обоснованным представление об этом условии как определении **внешней области** изотропного гиперконуса (3.238). К тому же, приравнивая к нулю одну из переменных в левой части неравенства (3.241′), мы получим определение внешней области изотропного конуса соответствующей псевдоевклидовой гиперплоскости. Например, при $z = 0$ неравенство примет вид неравенства (3.236), которым определяется внешняя область изотропного конуса (3.234′) в псевдоевклидовой гиперплоскости $z = 0$.

Радиус-векторы (3.221), у которых скалярный квадрат отрицателен

$$\boldsymbol{rr} = -w^2 + x^2 + y^2 + z^2 < 0, \qquad (3.242)$$

имеют модуль (3.223′), выражаемый **мнимым** числом. Представив условие (3.242) в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 < w^2, \qquad (3.242')$$

легко понять, что на любой собственно евклидовой гиперплоскости $w = w_P$ (3.228) условие (3.242′) выполняется только для таких точек, которые находятся **внутри сферы** радиуса $R = |w_P|$, а радиус этот тем больше, чем больше по абсолютной величине удаление $|w_P|$ гиперплоскости $w = w_P$ от координатной гиперплоскости *OXYZ*, имеющей уравнение $w = 0$. Этим геометрическим смыслом оправдано представление об аналитическом условии (3.242′) как об определении **внутренней** области изотропного гиперконуса (3.238). В отличие от внешней области (3.241′) внутренняя область (3.242′) распадается на две изолированные одна от другой части. Одну из этих частей, определённую условием

$$w > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0, \qquad (3.243)$$

будем называть **верхней** внутренней полостью изотропного гиперконуса (3.238), а другую, определённую условием

$$w < -\sqrt{x^2+y^2+z^2} < 0\,, \qquad (3.243')$$

— **нижней** внутренней полостью гиперконуса. Для перехода из нижней внутренней полости в верхнюю надо или пересечь точку $O$ начала всех образующих изотропный гиперконус (3.238) радиус-векторов, называемую **вершиной** гиперконуса и не принадлежащую ни одной из внутренних полостей (3.243), (3.243′), или выйти из внутренней полости во внешнюю область (3.341′), чтобы из неё перейти в другую внутреннюю полость.

В конце § 17 (перед рис. 3.8) было объяснено, почему мы не воспринимаем зрительно различие значений координаты $ct$ в виде пространственных различий, вследствие чего протяжённость псевдоевклидова пространства вдоль мировых линий оказывается "скраденной" от нас. По этой причине (как иллюстрируется рисунком 3.11) хотя наблюдатель в точке $O$ воспринимает световые сигналы от мировых точек, имеющих различные значения координаты $w = ct$ на **кривой** в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве, эти точки представляются наблюдателю лежащими на **прямой** $AB$, а само трёхмерное псевдоевклидово пространство представляется спроецированным на плоскость, имеющую собственно евклидовы метрические свойства. Эти примеры с пониженной размерностью псевдоевклидовых пространств позволяют понять, что и в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве, которое мы не можем представить и изобразить наглядно, происходит то же самое "скрадывание" четвёртого измерения (в направлениях мировых линий), вследствие чего доступные наблюдениям точки мировых линий воспринимаются как спроецированные на гиперплоскость, псевдоортогональную к мировой линии $OW$ наблюдателя. Так как эта гиперплоскость несёт на себе собственно евклидовы метрические свойства, то окружающий нас мир растущих (проявляющихся) мировых линий воспринимается нами в виде множества материальных точек, заполняющих трёхмерное собственно евклидово пространство. Вот почему мы лишены возможности воспринимать зрительно псевдоевклидовы метрические свойства псевдоевклидовых плоскостей, гиперплоскостей и вмещающего их четырёхмерного псевдоевклидова пространства. А не видя этих свойств, мы склонны относиться к ним как к "нереальным" при первом столкновении с ними, хотя их глубочайшая реальность и логическая необходимость выясняется при основательном исследовании закономерностей природы и геометрии мирового пространства.

## § 24. ПОСТУЛАТ АБСОЛЮТНОГО МИРА

Это выражение принадлежит Герману Минковскому. Обсуждая доводы в пользу того, что более полному и глубокому осознанию явлений природы соответствует группа $G_c$ преобразований, сохраняющих постоянным выражение

$$c^2 \cdot dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

в четырёхмерном мире пространства и времени, чем группа $G_\infty$, сохраняющая неизменным выражение

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

в наблюдаемом трёхмерном пространстве ньютоновой механики, Минковский сказал в своём докладе [43, с. 173]: «...термин "*постулат относительности*", для требования инвариантности по отношению к группе $G_c$, кажется мне слишком бледным. Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам даётся только четырёхмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название: *постулат абсолютного мира* (или коротко: мировой постулат)».

При жизни Минковского ещё не была выработана та математическая терминология, которой мы пользуемся сегодня. «Четырёхмерный в пространстве и времени мир» — это мир материальных объектов (мировых линий) в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1, называемом также пространством Минковского. Именно этот четырёхмерный мир Герман Минковский назвал с полной определённостью **абсолютным миром**, понимая его как не зависящую от условий наблюдения инвариантную сущностную реальность, которая даётся нам в явлениях проецирования на мировую линию наблюдателя («проекция на время») и на псевдоортогональную к линии гиперплоскость («проекция на пространство»). Представление Исаака Ньютона об абсолютном пространстве как остающемся «всегда одинаковым и неподвижным... по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему» (см. цитату из [16] в начале § 4), оказалось несостоятельным по той причине, что Ньютон (наряду со своими предшественниками и последователями) отождествлял абсолютное мировое пространство с его наблюдаемым образом (проекцией на трёхмерную собственно евклидову гиперплоскость). Эта ошибка давала о себе знать сначала тем, что «..."фиксированное место" в ньютоновском абсолютном пространстве лишено (физической) реальности» (см. цитату из [17, с.91] в § 4), а к концу XIX века выяснилось, что принцип относительности противоречит и ещё более резко взгляду на наблюдаемое пространство как абсолютное, опровергая даже убеждённость классического научного мировоззрения в инвариантности расстояний в наблюдаемом пространстве (см. в § 4 равенства (2.6) с применением галилеевых преобразований (2.3)).

В наблюдаемом пространстве материальные объекты выступают в виде материальных точек (тел), и инерциальная система координат (в которой выполняются законы Ньютона) может быть связана только с взаимно неподвижными материальными точками. Принцип относительности позволяет считать такую систему тел покоящейся в наблюдаемом пространстве, но этот же принцип позволяет связать другую инерциальную систему координат с иной системой тел, которые даже в случае движения их с одинаковыми постоянными скоростями относительно первой системы также могут быть приняты за неподвижные. Таким образом, представляя всё наблюдаемое пространство неподвижным относительно одной из инерциальных систем координат, мы, однако, будем вынуждены признать пространство движущимся относительно многих других инерциальных систем.

Иная ситуация в четырёхмерном пространстве Минковского, в котором материальные объекты выступают в виде мировых линий. Здесь уже нет насильственной необходимости считать всё четырёхмерное пространство движущимся. Хотя мировые линии находятся в процессе роста (проявления), на них есть уже проявленные, сформировавшиеся участки и точки, имеющие полноценный статус физических объектов. С такими мировыми точками и могут быть связаны не лишённые физического смысла псевдоортонормированные системы координат (см., например, на рис. 3.9 в § 18 координатные системы $OXY$ и $OX'Y'$). Здесь важно именно то, что принципиальная, или чисто теоретическая возможность построения таких систем координат не вступает в противоречие с их физическим смыслом, хотя на практике наблюдатель не имеет возможности увидеть из мировой точки $O$ своего настоящего момента времени (см. рис. 3.9) мировые точки $N$ и $S$, определяющие направления координатных осей $OX$ и $OX'$, и не может "остановить мгновение", чтобы в последующие моменты быстро текущего времени ощущать себя присутствующим в мировой точке $O$. Не на практической возможности наблюдателя совместить себя с различными мировыми точками по своему выбору основана истинность суждений о материальном мире, отнесённом к псевдоортонормированной системе координат в четырёхмерном пространстве Минковского, но сама адекватность, или истинность этого геометрического представления об устройстве материального мира позволяет извлечь даже из идеально представляемой картины **совокупность следствий, доступных экспериментальной проверке**. Среди таких следствий мы находим точную формулу (3.118), (3.121) сложения скоростей в § 16, наблюдаемое увеличение среднего времени жизни мюонов (в конце § 19), изменение наблюдаемой массы $m$ электронов в зависимости (3.170) от скорости их движения (в § 21), точную формулу (3.207) кинетической энергии и "дефекта массы" $\Delta m$, используемого технически для извлечения внутриядерной энергии.

А. Эйнштейн вывел логически специальную теорию относительности из двух постулатов, противоречащих классической картине мира, но не противоречащих накопленным экспериментальным данным. В само́й теории относительности эти постулаты не подлежат объяснению а из предложенной Г. Минковским модели мира непринуждённо вытекают убедительные и наглядные логические объяснения не только всех релятивистских эффектов, но и исходных постулатов Эйнштейна (см. окончание § 16). Это не означает, что теперь теория относительности совсем перестала нуждаться в постулировании каких-либо исходных истин. Просто постулируемые представления переместились на более общий и глубокий уровень, что с полной ясностью понимал Минковский, назвав представление о мировых линиях в четырёхмерном пространстве **постулатом** абсолютного мира. Особенно замечательно и знаменательно, что акцент на абсолютность мирового постулата был сделан Минковским как раз в те годы, когда под воздействием плохо понимаемой теории относительности, развенчавшей абсолютную инвариантность расстояний в наблюдаемом пространстве, промежутков времени и масс тел, многие философы и философствующие естествоиспытатели проявляли склонность к поспешному отказу от какой-либо объективности пространственно – временных и динамических характеристик мира, вплоть до заявлений об исчезновении материи. Например, английский математик и философ Карл Пирсон писал в книге «Грамматика науки»: «Мы не можем утверждать, что пространство и время имеют реальное существование; они находятся не в вещах, а в нашем способе воспринимать вещи… Подобно пространству, время есть один из *способов (буквально: планов, plans), которым* эта великая сортировочная машина, человеческая познавательная способность, размещает в порядке (arranges) свой материал… Пространство и время суть не реальности мира явлений, а способы (модусы, modes), которыми мы воспринимаем вещи» (цитировано по [24], с. 190).

В предложенной Минковским модели мироздания материальный мир обретает подлинную абсолютность геометрических характеристик, которую, как выяснилось, не могла обеспечить классическая картина мира, основанная на наблюдаемом трёхмерном собственно евклидовом пространстве. За относительностью расстояний в наблюдаемом пространстве и промежутков времени, отсчитанных по часам взаимно движущихся инерциальных систем отсчёта, открылась инвариантность пространственно-подобных и времени-подобных интервалов, а в сущности — расстояний между любыми точками мирового четырёхмерного псевдоевклидова пространства индекса 1. За относительностью наблюдаемой массы как основной динамической характеристики тел обнаружилась инвариантность (независимость от условий наблюдения) псевдоевклидова вектора массы и однонаправленных с ним псевдоевклидовых векторов импульса и энергии в каждой точке мировой линии.

Если инварианты классической механики способствовали утверждению представления о телах (материальных точках) как первооснове мироздания, то инварианты модели мира Минковского утверждают основообразующую роль мировых линий **вопреки поверхностной очевидности.** В реальности тел (и их обобщающей модели — материальных точек) мы не сомневаемся прежде всего потому, что воспринимаем тела всеми своими органами чувств. Реальность мировых линий как материальных объектов вызывала сомнения именно потому, что они не видны как линии. Однако законы специальной теории относительности, управляющие миром материальных точек, расшифровываются как взаимоотношения между мировыми линиями. Взаимное расположение мировых линий в псевдоевклидовом мировом пространстве, их форма и динамические характеристики инвариантны, т. е. не зависят от выбора координатной системы, которая используется для описания событий. Напротив, пространственно-временные и динамические характеристики мира материальных точек (взаимное расположение материальных точек в наблюдаемом пространстве, их массы и промежутки времени) зависят от выбора системы отсчёта пространства и времени, т. е. от условий наблюдения. Это значит, что **мировые линии обладают большей степенью объективности (независимости от позиции воспринимающего субъекта), чем материальные точки.** Учитывая глубокую объективность мировых линий, нельзя отказать им в действительном существовании, а учитывая, что мировые лини воспринимаются нами в виде объектов, которые мы считаем ***материальными*** (точками и системами точек), нельзя отказать мировым линиям также в материальности. Не будучи телом, мировая линия представляет собой нечто большее, чем тело, служит основой явления тела.

# Глава 4.

# ВЕЧНА ЛИ ВСЕЛЕННАЯ?

## § 25. КЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ВСЕЛЕННОЙ

Вселенная — вся окружающая нас природа, бесконечная в пространстве и времени и включающая в себя бесчисленное множество качественно различных форм материи.

Философский словарь. М.: 1963.

Обобщённым истоком классических научных представлений о Вселенной служит основной принцип учения Демокрита: «Начало Вселенной — атомы и пустота... Миров бесчисленное множество… И ничто не возникает из небытия… атомов — бесконечное множество, пустота же беспредельна по величине… Атомы суть всевозможные маленькие тела, не имеющие качеств, пустота же — некоторое место, в котором все эти тела в течение всей вечности носясь вверх и вниз, или сплетаются каким-нибудь образом между собой, или наталкиваются друг на друга и отскакивают, расходятся и сходятся снова между собой в такие соединения, и, таким образом, они производят и все прочие сложные [тела], и наши тела, и их состояния и ощущения» [15, ч. 1, с. 326]. В ходе развития классической науки расширялись и углублялись знания людей о строении земных и небесных тел и закономерностях, которым подчинены их движения и взаимодействия, но основной принцип не подвергался научно аргументированному сомнению, если не считать поправки к пониманию пустоты: в пространстве, не занятом телами, признавалось присутствие гравитационного и электромагнитного полей. Что же касается телесной основы мироздания, то у классической науки не было веского повода вносить существенные поправки в понимание материи древними атомистами, отлитое в стихах Лукреция:

«Эти начала вещей ничему не под силу разрушить…
… существуют такие тела, что и прочны и вечны:
Это — вещей семена и начала в учении нашем,
То, из чего получился весь мир, существующий ныне»

[13, строки 485-502].

«Если же, кроме того, не была бы материя вечной,
То совершенно в ничто обратились давно бы все вещи…
Первоначалам должно быть присуще бессмертное тело,
Чтобы все вещи могли при кончине на них разлагаться,
И не иссяк бы запас вещества для вещей возрожденья».

[13, строки 540-547].

«За основание тут мы берём положенье такое:
Из ничего не творится ничто по божественной воле...
Если же будем мы знать, что ничто не способно возникнуть
Из ничего, то тогда мы гораздо яснее увидим
Наших заданий предмет: и откуда являются вещи,
И каким образом всё происходит без помощи свыше».

[13, строки 149-159].

При такой мировоззренческой основе необходимо было признать бесконечной и вечной и Вселенную как совокупность всех существующих атомов. Научным же исследованиям предстояло только выяснять подробности строения Вселенной и формы организации бесчисленных миров, что оставляло всё-таки большой простор для весьма революционных открытий от утверждения гелиоцентрической системы мира до обнаружения множества звёздных островов — галактик. Правда, остаётся ещё двойственность в понимании вечности материи и Вселенной. Если придерживаться последовательно логики древних атомистов, то Вселенная, состоящая из неуничтожимых и не возникающих движущихся атомов, должна быть вечной как по направлению в будущее, так и по направлению в прошлое. В сáмом деле, если «ничто не способно возникнуть из ничего», то наличное бытие атомов было всегда и ему не могло предшествовать «ничто» как отсутствие атомов — первоначала вещей. И по свидетельству Цицерона «Он [Демокрит] полагает, что... это движение атомов должно мыслить не имеющим начала, но существующим вечно» [15, ч. 1, с. 329]. Такое же представление о бесконечности материи и Вселенной в пространстве и вечности во времени утверждали приверженцы философского материализма классической эпохи в истории науки.

Нельзя не отметить однако, что яркий след в формировании и утверждении классического научного мировоззрения оставили также крупные мыслители, верившие в божественный акт творения. Например, Иммануил Кант, в космогонической гипотезе которого, как отмечал Ф. Энгельс (Введение к [27]), «заключалась отправная точка всего дальнейшего движения вперёд» в развитии идей эволюционизма, писал: «... мы можем с полным правом предположить, что порядок и строение миров развиваются постепенно, в некоторой последовательности во времени из запасов сотворённого природного вещества; но сама эта основная материя, свойства и силы которой служат причиной всех изменений, есть непосредственное следствие божественного бытия; следовательно, она сразу должна быть настолько богатой и полной, чтобы развитие её сочетаний могло вечно происходить по одному плану, охватывающему всё, что только может существовать, и не допускающему никакой меры, — одним словом, по бесконечному плану» [30, с. 202]. Сам Исаак Ньютон отвёл Богу прерогативу «первого толчка», сообщившего материи движение, без которого она не произвела бы действующего механизма Вселенной, способной порождать жизнь и её высшую форму — жизнь мыслящую. Но если материя и Вселенная не всегда существовали, а возникли, то их вечность может быть только односторонней — по направлению к будущему. «Сотворение мира, — писал Кант, — дело не одного мгновения. Начавшись с создания бесчисленного множества субстанций и материй, оно продолжается через всю вечность со всё возрастающей степенью плодотворности… Творение никогда не кончается. Оно, правда, однажды началось, но оно никогда не прекратится» [30, с. 205, 206].

Но, по мнению Ньютона и Канта, после "запуска" механизма Вселенной Бог уже не вмешивается в его функционирование. Как раз в этой отстранённости Кант видел ярчайшее доказательство бесконечной божественной мудрости, полагая, что вмешательство Бога в природные процессы было бы чудом для природы, принижающим совершенство творческого замысла её создателя. «Мироустройство, которое не может удержаться без чуда, не отличается постоянством, а ведь постоянство — признак божественного выбора; значит гораздо более соответствует ему рассмотрение всего творения как единой системы, которая связывает единым центром все миры и системы миров, наполняющие всё бесконечное пространство» [30, с. 202]. Вера в причину Вселенной (Причину Космоса по терминологии К.Э. Циолковского), существующую вне материи и Вселенной, была для Ньютона и Канта плодом их личной интуиции, а в теории и экспериментальных (наблюдательных) данных классического естествознания не находилось оснований для такого представления. Поэтому в классическом научном мировоззрении возобладало в общем то убеждение, что существование материи и её движения не нуждаются в каком-либо внешнем источнике. Этот взгляд на Вселенную был широко распространён в среде естествоиспытателей, поскольку по сути классического научного мировоззрения наука призвана искать причины всех явлений природы в само́й природе, а не в инициативе надприродных, или, как принято говорить, сверхъестественных сущностей. Во всяком случае этот вопрос, с обеих точек зрения, мог быть оставлен за рамками научных исследований закономерностей, управляющих спонтанными процессами в мире уже существующей материи.

Если Вселенная в качестве всеобъемлющей материальной системы бесконечна в пространстве и времени (хотя бы в одном из двух направлений времени), то это отнюдь не исключает пространственной и временно́й ограниченности отдельных её частей. Мнение Канта на этот счёт заслуживает того, чтобы представить его в собственном изложении автора, не смущаясь пространностью цитирования. «В непреодолимой склонности каждого вполне сформировавшегося мироздания к постепенной гибели своей можно усмотреть ряд доводов в доказательство того, что в противовес этому в других местах Вселенная будет создавать новые миры, дабы восполнить ущерб, нанесённый ей в каком-либо месте… Не следует удивляться тому, что даже на великих творениях божьих лежит печать бренности. Всё, что конечно, что имеет начало и происхождение, несёт на себе признак своей ограниченной природы: оно должно пройти и иметь конец... Ньютон, этот великий почитатель божественной мудрости, проявляющейся в совершенстве её творений, сочетавший глубочайшее понимание слаженности природы с величайшим благоговением перед проявлением божественного всемогущества, видел себя вынужденным возвестить гибель природы ввиду естественной склонности к ней механики движений... Мы не должны, однако, жалеть о гибели того или иного мироздания как о действительной потере для природы. О её богатстве свидетельствует та расточительность, с какой она бесчисленным множеством новых созданий сохраняет всю полноту своего совершенства, в то время как отдельные части её отдают дань бренности... Есть ли основание не верить, что природа, сумевшая перейти из хаоса к закономерному порядку и стройной системе, способна с такой же лёгкостью восстановить себя из нового хаоса, в который её ввергло уменьшение её движений, и возобновить первоначальную связь? Разве пружины, приводившие в движение и порядок вещество рассеянной материи, не могут вновь, после того как остановка машины привела их в состояние покоя, быть приведены в действие приумноженными силами... по тем же законам, по которым было осуществлено первоначальное формирование?.. После того как вялость круговых движений в нашем мироздании в конце концов низвергнет все планеты и кометы на Солнце, жар последнего неизмеримо возрастёт благодаря смешению в нём столь многих и больших масс... Усиленный до крайности новым притоком питания... огонь этот, без сомнения, не только вновь разложит всё на мельчайшие элементы, но и с расширяющей силой, соответствующей степени жара, и со скоростью, не ослабляемой никаким сопротивлением промежуточного пространства, вновь разбросает и рассеет эти элементы в том же огромном пространстве, которое они занимали до первоначального формирования природы, чтобы затем, когда сила центрального огня из-за почти полного рассеяния его массы уменьшится, сочетанием притягательных и отталкивательных сил повторить с не меньшей закономерностью прежние образования и присущие системам движения и породить новое мироздание. Если, таким образом, отдельная планетная система распадается и затем снова восстанавливается присущими ей силами и если этот процесс повторяется не один раз, то может наконец наступить время, когда великая система, звеньями которой служат неподвижные звёзды, с уничтожением своих движений также будет ввергнута в хаос. В таком случае ещё менее можно сомневаться, что соединение бесчисленного множества таких раскалённых масс, как эти пылающие солнца, вместе с сонмом их планет рассеет вещество их массы, разложенной невероятным жаром, в том пространстве, где они когда-то образовались, и даст таким образом материал для новых образований по тем же механическим законам, на основании которых пустынное пространство может снова оживиться мирами и системами [миров]. И когда через всю бесконечность времён и пространств мы следим за этим фениксом природы, который лишь затем сжигает себя, чтобы вновь возродиться юным из своего пепла,.. тогда наш дух, размышляя обо всём этом, приходит в глубокое изумление...» [30, с. 208-213].

Если из суждений Канта изъять упоминания о Боге и акте Творения, то приведённой здесь цитате будет вполне созвучна картина Вселенной, набросанная кратко Фридрихом Энгельсом во введении к «Диалектике природы». «И вот мы снова вернулись к взгляду великих основателей греческой философии о том, что вся природа, начиная от мельчайших частиц её до величайших тел… находится в вечном возникновении и уничтожении… движении и изменении. С той только существенной разницей, что то, что у греков было гениальной догадкой, является у нас результатом строгого научного исследования, основанного на опыте, и потому имеет гораздо более определённую и ясную форму. Правда, эмпирические доказательства этого круговорота ещё не совсем свободны от пробелов, но последние незначительны по сравнению с тем, что уже твёрдо установлено; притом они с каждым годом всё более и более заполняются... Из вихреобразно вращающихся раскалённых газообразных туманностей... развились благодаря сжатию и охлаждению бесчисленные солнца и солнечные системы нашего мирового острова, ограниченного самыми крайними звёздными кольцами Млечного пути… Но "всё, что возникает, заслуживает того, чтобы погибнуть". Может быть, пройдут ещё миллионы лет… но неумолимо надвигается время, когда истощающаяся солнечная теплота будет уже не в силах растапливать надвигающийся с полюсов лёд… когда постепенно исчезнет и последний след органической жизни, и Земля… будет кружить в глубоком мраке по всё более коротким орбитам вокруг тоже умершего Солнца, на которое она, наконец, упадёт… И та же судьба, которая постигнет нашу Солнечную систему, должна раньше или позже постигнуть все прочие системы нашего мирового острова, должна постигнуть системы всех прочих бесчисленных мировых островов… Но движение материи — это не одно только грубое механическое движение… это — теплота и свет, электрическое и магнитное напряжение, химическое соединение и разложение, жизнь и, наконец, сознание. Говорить, будто материя за всё время своего бесконечного существования имела один только единственный раз — и то на одно мгновение по сравнению с вечностью её существования — возможность дифференцировать своё движение и, таким образом, развернуть всё богатство этого движения и что до этого и после этого она навеки ограничена одним простым перемещением, — говорить это значит утверждать, что материя смертна и движение преходяще. Неуничтожимость движения надо понимать не только в количественном, но и в качественном смысле. Материя, чисто механическое перемещение которой хотя и содержит в себе возможность превращения при благоприятных условиях в теплоту, электричество, химическое действие, жизнь, но которая не в состоянии породить из себя самой эти условия, такая материя *потерпела определённый ущерб в своём движении*... Но здесь мы вынуждены либо обратиться к помощи творца, либо сделать тот вывод, что раскалённый сырой материал для солнечных систем нашего мирового острова возник естественным путём, путём превращений движения, которые *присущи от природы* движущейся материи и условия которых должны, следовательно, быть снова воспроизведены материей, хотя бы спустя миллионы миллионов лет, более или менее случайным образом, но с необходимостью, присущей также и случаю... Впрочем, вечно повторяющаяся последовательная смена миров в бесконечном времени является только логическим дополнением к одновременному сосуществованию бесчисленных миров в бесконечном пространстве... Вот вечный круговорот, в котором движется материя... в котором каждая конечная форма существования материи — безразлично, солнце или туманность, отдельное животное или животный вид, химическое соединение или разложение — одинаково преходяща и в котором ничто не вечно, кроме вечно изменяющейся, вечно движущейся материи и законов её движения и изменения. Но как бы часто и как бы безжалостно ни совершался во времени и в пространстве этот круговорот; сколько бы миллионов солнц и земель ни возникало и не погибало; как бы долго ни длилось время, пока в какой-нибудь солнечной системе и только на одной планете не создались условия для органической жизни... у нас есть уверенность, что материя во всех своих превращениях остаётся вечно одной и той же, что ни один из её атрибутов никогда не может быть утрачен и что поэтому с той же самой железной необходимостью, с какой она когда-нибудь истребит на земле свой высший цвет — мыслящий дух, она должна будет его снова породить где-нибудь в другом месте и в другое время».

Общей чертой картин Вселенной, очерченных Кантом и Энгельсом, является представление о неоднократной, а на протяжении вечности — и бесконечно кратной повторяемости гибели и возрождений космических структур любых уровней от планет до галактик и систем галактик. В обеих картинах существованию Вселенной в целом не грозит исчезновение, поскольку не может исчезнуть существующая материя, а разрушения упорядоченных структур материи в том или ином месте и времени, переводящие материю в хаотическое состояние, неотвратимо компенсируются возрождением в других местах и временах обновлённых упорядоченных структур, способных стать носителями жизни. Картина Вселенной, описанная Энгельсом, получила в космологии название **стационарной** модели Вселенной. Стационарная — значит не меняющаяся с течением времени. Крупномасштабные процессы угасания и возрождения миров изменяют лишь конечные области Вселенной, но так как компенсирующие процессы противоположной направленности происходят в других областях мирового пространства и в другие эпохи, то Вселенная как бесконечное всеобъемлющее целое остаётся всегда самой себе равной. Именно стационарную модель Вселенной принимала как наиболее истинную научная общественность вплоть до первых десятилетий XX века, хотя на протяжении XIX века были уже отмечены три противоречащих ей парадокса: фотометрический парадокс, парадокс тепловой смерти и гравитационный парадокс.

Кант также говорит о процессах разрушений в конечных областях различных масштабов во Вселенной и о компенсации их процессами упорядочивающего структурирования в других областях и временах, однако описанная Кантом модель Вселенной не может быть названа стационарной. Ведь по мнению Канта Вселенная имела начало: «Творение никогда не кончается. Оно, правда, однажды началось, но оно никогда не прекратится» [30, с. 206]. «Для того чтобы проследить, как эта общая система природы строится на основании механических законов стремящейся к формированию материи, необходимо допустить, что где-то в бесконечном пространстве рассеянного основного первичного вещества это вещество было расположено наиболее густо, и это большое скопление здесь дало всей Вселенной массу, послужившую точкой опоры… Но что особенно важно и заслуживает наибольшего внимания, так это то, что по излагаемой нами системе творение, или вернее, формирование природы согласно порядку в ней, начинается прежде всего у этого центра, беспрестанно распространяясь отсюда всё дальше, дабы в течение вечности наполнить бесконечное пространство мирами и системами миров… В каждый конечный период времени, продолжительность которого соразмерна величине того, что должно быть создано, от этого центра всегда начинает формироваться только некоторая конечная сфера; остальная бесконечная часть тем временем ещё противоборствует беспорядочности и хаосу и находится тем дальше от окончательного сформирования, чем больше она удалена от сферы уже сформировавшейся природы… Мы увидели бы, как бесконечное пространство божественного присутствия, в котором имеется всё для всевозможных образований природы, погружено в безмолвную ночь; оно наполнено веществом, призванным служить материалом для образования будущих миров, и полно импульсов для приведения его в движение, слабо начинающих те движения, которые со временем должны оживить эти беспредельные пустые пространства… сфера сформировавшейся природы беспрестанно занимается своим расширением… Немалое удовольствие — силою воображения перенестись за пределы завершённого творения в пространство хаоса и увидеть, как почти первозданная природа вблизи сферы уже сформировавшегося мира постепенно теряется во всём несформировавшемся пространстве, проходя через все ступени и оттенки несовершенства» [30, с. 203-206]. «… когда мы видим, что природа даже там, где она распадается и дряхлеет, неисчерпаема в новых проявлениях, а на другой границе творения, в пространстве несформировавшейся первичной материи она непрестанно расширяет сферу божественного откровения, дабы и вечность, и все пространства наполнить его чудесами, тогда наш дух, размышляя обо всём этом, приходит в глубокое изумление...» [30, с. 213].

Таким образом, Кант описал в 1755 году чисто умозрительно картину не стационарной, а **расширяющейся Вселенной**, а наука на путях теоретических и экспериментальных исследований подошла к обнаружению расширения Вселенной только в третьем десятилетии XX века. Конечно современные представления о расширяющейся Вселенной имеют существенные отличия от представлений Канта, сложившихся на заре становления классической физики.

## § 26. ОБНАРУЖЕНИЕ РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ НЕГО

Охарактеризуем кратко суть трёх парадоксов, упомянутых в конце предыдущего параграфа. Знаменитый астроном Ольберс (1758 – 1840), открывший первые астероиды (Палладу и Весту), обратил внимание на то, что если Вселенная содержит бесконечно много звёзд, то на луче зрения, направленном в любую точку неба, встретится хотя бы одна звезда. Так как освещённость, создаваемая излучением звезды на поверхности приёмника света, обратно пропорциональна расстоянию до звезды, то звёзды представляются нам слабыми источниками света. Но интенсивность светового потока, называемая также его яркостью, не зависит от расстояния до источника света, и если бы в каждой точке неба находилась звезда, то всё небо должно было бы сиять, как поверхность звезды, при условии, что поглощение света звёзд в космическом пространстве достаточно мало, что по-видимому так и есть. В таком случае непонятно, почему ночное небо мы видим чёрным. Это так называемый **фотометрический парадокс**.

В 1850 г. Р. Клаузиус сформулировал закон, получивший название второго начала термодинамики: «невозможно перенести теплоту от более холодной системы к более горячей при отсутствии других одновременных изменений в обеих системах или в окружающих телах». В 1851 г. Уильям Томсон независимо от Клаузиуса дал другую формулировку второго начала термодинамики: «в природе невозможен процесс, единственным результатом которого была бы механическая работа, совершаемая за счёт охлаждения теплового резервуара». Результатом, сопутствующим получению работы, является передача теплоты от охлаждаемого резервуара окружающим телам, ведущая к выравниванию температур. Рассматривая Вселенную как замкнутую изолированную систему, У. Томсон пришёл в 1852 г. к выводу о неизбежности тепловой смерти Вселенной в результате выравнивания температур всех тел в ней, после чего уже не будет возможности превращения имеющейся теплоты в другие виды энергии. Позже Р. Клаузиус, введя понятие энтропии (1865 г.), возрастающей в необратимых процессах, подтвердил вывод У. Томсона: «... энтропия Вселенной стремится к некоторому максимуму. Чем больше Вселенная приближается к этому предельному состоянию, ...тем больше исчезают поводы к дальнейшим изменениям, а если бы это состояние было наконец достигнуто, то не происходило бы больше никаких дальнейших изменений и Вселенная находилась бы в некотором мёртвом состоянии инерции» (цитировано по [37], с. 152-153). Но если этот вывод справедлив, то разве не должна была Вселенная за бесконечное время своего существования уже давно перейти в состояние тепловой смерти вопреки наблюдаемой действительности? Выдвигались возражения против правомерности перенесения на бесконечную Вселенную закономерности, установленной для конечных изолированных термодинамических систем. Л. Больцман, давший статистическое истолкование второго начала термодинамики и вероятностное объяснение энтропии, указал на возможность случайных отклонений (флуктуаций) от термодинамического равновесия систем, состоящих из большого числа элементов, а в бесконечной Вселенной такая флуктуация может охватывать всю доступную нашим наблюдениям область. Конечно, Вселенная могла и не успеть дойти до состояния тепловой смерти, если время существования Вселенной ограничено, что представлялось неприемлемым с точки зрения классического научного мировоззрения.

В конце XIX века Г. Зеелигер сформулировал **гравитационный** парадокс, согласно которому закон всемирного тяготения Ньютона, определяющий поле тяготения в конечной системе тел, приводил к неопределённости при попытке распространить его на всю бесконечную Вселенную. «Чтобы преодолеть эту трудность, требовалось предположить, что плотность распределения массы по объёму быстро и без ограничений падает. Но это сводило представление о бесконечной Вселенной с равномерно распределённым звёздным населением ко Вселенной конечной» (цитировано по [37], с. 156).

Таким образом в начале XX века стала насущной потребностью в науке разработка такой модели Вселенной, которая была бы свободна от уже осознанных парадоксов. К этому не мог не приложить сил Альберт Эйнштейн, создавший на основе общей теории относительности новую теорию гравитации. Но власть традиций оказалась столь сильной, что даже новаторская модель Вселенной в искривлённом замкнутом пространстве, предложенная Эйнштейном в 1917 году, была стационарной.

В 1922 году советский математик А.А. Фридман показал, что гравитационные уравнения общей теории относительности допускают нестационарные решения, приводящие к представлению о расширении Вселенной в современную эпоху. Независимо от этих теоретических разработок, в наблюдательной астрономии на протяжении первой четверти XX века вызревал вывод о "разбегании галактик", равносильный представлению о расширении Вселенной. Когда мы наблюдаем отдельные звёзды (а в качестве обособленных объектов видны невооружённым глазом звёзды лишь ближайшего окружения Солнечной системы в радиусе около 50 световых лет), смещение частоты их излучения в спектральных линиях в сторону увеличения встречается столь же часто, как смещение в сторону уменьшения частоты (красное смещение). Это означает, что одни звёзды приближаются к нам по лучу зрения, другие удаляются от нас, и нет статистического преобладания удаления над приближением. Иная картина обнаруживается при изучении спектров галактик. В 1912 году, когда природа видимых на небе туманных пятнышек и расстояния до них ещё не были выяснены, американский астроном Слайфер исследовал спектры 17 туманностей, и лишь у двух из них обнаружил фиолетовое смещение, свидетельствующее о приближении туманностей к нам, а остальные объекты показали красное смещение (удаление). К началу двадцатых годов Слайфер исследовал спектры 41 туманности, и почти у всех обнаружил красное смещение, свидетельствующее об удалении их от нас со скоростями 300 – 1800 км/сек.

Этот удивительный результат заинтересовал также американских астрономов М. Хьюмассона и Э.П. Хаббла. К 1929 году Хаббл установил экспериментально фундаментальную закономерность: скорость $v$ удаления галактик от нас пропорциональна расстоянию $r$ до них

$$v = H \cdot r, \qquad (4.1)$$

где $H$ — универсальная постоянная, получившая название **постоянной Хаббла**. По современным оценкам [60] значение $H$ заключёно в пределах

$$H = (50 \div 100)\,\frac{км}{с \cdot Мпс} = (1{,}62 \div 3{,}24) \cdot 10^{-18}\ с^{-1} \qquad (4.2)$$

и имеет тот смысл, что скорость удаления от нас галактик возрастает на $50 \div 100$ километров в секунду с увеличением расстояния от нас на каждый миллион парсек (*Мпс*), т.е. на каждые 3,26 миллиона световых лет. Этот процесс увеличения расстояний между галактиками назван процессом **расширения Вселенной.** Из закона (4.1) Хаббла следует, что в прошлом расстояния между галактиками были меньше.

Теоретическое осмысление процесса расширения Вселенной изначально базируется на общей теории относительности, и к настоящему времени разработаны различные космологические модели для описания эволюции Вселенной. Общей чертой этих моделей является признание начального состояния Вселенной, названного **сингулярным** (особенным). В той близости от сингулярного состояния, когда ещё можно рассчитывать на применимость общей теории относительности (это так называемое планковское время $t_p \approx 3 \cdot 10^{-44}$ секунды), радиус Вселенной имел порядок планковской длины $r_p \approx 10^{-33}$ см. Представление о сингулярном состоянии

Вселенной как исходном пункте наблюдаемого сейчас процесса её расширения считается в современной космологии наиболее надёжно установленным фактом. Это признавалось участниками международного симпозиума по космологии, состоявшегося в сентябре 1973 в Кракове в связи с 500-летием со дня рождения Николая Коперника [61]. Об этом сказано в книге [62] известных советских специалистов по космологии Я. Б. Зельдовича и И.Д. Новикова: «... релятивистская космология приходит к выводу о необходимости в прошлом во Вселенной состояния, в котором вещество имеет огромную плотность ($\rho >> 10^{14}$ г/см$^3$), а пространство-время — огромную кривизну, так называемого сингулярного состояния (с. 13)... В настоящее время строго доказано, что сингулярность в реальной Вселенной в прошлом была, даже если ранние стадии расширения резко отличались от однородного изотропного расширения (с. 24)». А это значит, что именно из состояния сингулярности начинается процесс формирования материальных объектов, проявленных во Вселенной. В угоду классической традиции есть тенденция вместить всю имеющуюся во Вселенной массу и энергию в сверхмикроскопические (планковские) размеры Вселенной в состоянии сингулярности.

То, что у постоянной Хаббла $H$ (4.2) размерность обратна времени, указывает на её связь с некоторым промежутком времени, играющим важную роль в эволюции Вселенной. И в самом деле в различных моделях Вселенной промежуток времени $T$, приблизительно равный величине, обратной постоянной Хаббла

$$T \approx 1/H = (10 \div 20) \cdot 10^9 \text{ лет}, \qquad (4.3)$$

имеет смысл **возраста Вселенной**, т.е. времени, отделяющего нынешнее состояние Вселенной от её состояния сингулярности. Пока ещё науке недоступно теоретическое или экспериментальное исследование самого́ состояния сингулярности Вселенной и того, что ему предшествовало. На этот счёт можно в лучшем случае высказывать гипотезы, опирающиеся на общие принципы нового мировоззрения, приходящего на смену классическому научному мировоззрению. И подобно тому, как классическая убеждённость в вечности и несотворимости Вселенной исходила из убеждённости в вечности и несотворимости материи, так теперь научное признание происхождения из состояния сингулярности той Вселенной, плодом и наблюдателями которой мы себя ощущаем, заставляет ставить и решать вопрос о происхождении материи наблюдаемой Вселенной.

Один из замечательнейших фактов, надёжно установленных наукой, заключается в том, что все доступные наблюдению объекты во Вселенной состоят из тех же химических элементов и элементарных частиц, какие известны на Земле. Поэтому познание закономерностей взаимодействия элементарных частиц и строения атомов открывает путь к пониманию того, как от наиболее общих фундаментальных свойств материи зависит строение и эволюция Вселенной. Этот круг вопросов также обсуждался на международном симпозиуме по космологии в 1973 г. Фундаментальными параметрами материи являются массы основных элементарных частиц (электрона, протона, нейтрона) и безразмерные константы четырёх известных физике типов взаимодействий (гравитационного, слабого, электромагнитного и сильного). **Безразмерная** константа гравитационного взаимодействия равна $\alpha_g = G \cdot m_p^2 / \hbar c = 5{,}9 \cdot 10^{-39}$, где $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная, $m_p = 1{,}67264 \cdot 10^{-27}$ кг — масса покоя протона, $\hbar = 1{,}05459 \cdot 10^{-34}$ Дж·сек — постоянная Планка, $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ м/сек — универсальная электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме). Безразмерная константа электромагнитного взаимодействия, получившая исторически название постоянной тонкой структуры (спектра), равна $\alpha_c = e^2/\hbar c = 7{,}29735 \cdot 10^{-3} = 1/137$, где $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-11}$ Кл = = 1,51997 $\text{Н}^{0,5} \cdot \text{м}$ — заряд электрона. Безразмерные константы слабого (weak) и сильного (strong) взаимодействий зависят от энергии взаимодействия. При средней энергии процесса взаимодействия в миллиард электрон-вольт константу $\alpha_w$ слабого взаимодействия можно приближённо считать равной $10^{-5}$, а константу $\alpha_s$ сильного взаимодействия равной нескольким единицам. Физики обнаружили, что небольшие изменения фундаментальных параметров материи способны резко повлиять на возможность появления тех или иных объектов во Вселенной и на характер их эволюции. Оказывается, что тот набор значений фундаментальных параметров, какой мы находим во Вселенной, обеспечивает возможность формирования звёзд, способных породить планетные системы, возможность построения сложных атомов и молекул, необходимых для возникновения жизни земного типа. Профессор Кембриджского университета Брэндон Картер сказал в своём докладе на симпозиуме в Кракове: «Например, хорошо известно, что константа сильного взаимодействия велика лишь настолько, что на пределе обеспечивает связь нуклонов в ядрах: если бы она была несколько меньше, то водород был бы единственным элементом, и это, по всей вероятности, тоже было бы несовместимо с существованием жизни… Если бы константа, характеризующая гравитационное взаимодействие, была существенно ниже критического значения (или если бы постоянная тонкой структуры была увеличена лишь не намного, а все другие параметры при этом оставались бы фиксированными), то главная последовательность (на диаграмме Герцшпрунга-Рессела, показывающей распределение звёзд в зависимости от температуры и светимости — А.С.) состояла бы только из конвективных красных звёзд. Напротив, если бы постоянная, характеризующая гравитационное взаимодействие, была больше, чем она есть (или если бы постоянная тонкой структуры была слегка уменьшена), то главная последовательность состояла бы целиком из излучающих голубых звёзд… Вполне возможно, что образование планет зависит от существования сильно конвективной фазы (в процессе эволюции звезды — А.С.), когда звезда приближается к главной последовательности... Если это правильно, то более сильное гравитационное взаимодействие было бы несовместимо с образованием планет и, значит, с существованием наблюдателей» [61, с. 379, 378].

Другой участник того же симпозиума Джон Уилер сказал в общей дискуссии: «Дикке думает, что Вселенная меньшего размера, чем наша, существовала бы меньшее время, чем наша, и не давала бы возможности протекать термоядерному синтезу, необходимому для создания тяжёлых элементов, жизни и познаваемости Вселенной. Фактически Дикке предлагает нашему вниманию следующее высказывание: “Вселенная так велика по той причине, что мы в ней живём”. Картер выдвигает аналогичный тезис, согласно которому физические постоянные имеют те значения, которые они имеют, поскольку другие их значения исключили бы жизнь. Ведь изменение постоянной тонкой структуры всего лишь на несколько процентов в одну сторону (в сторону увеличения — А.С.) потребует, чтобы все звёзды были красными звёздами, и существование хотя бы одной звезды типа нашего Солнца при этом было бы невозможно. Изменение этой постоянной на несколько процентов в другую сторону заставило бы все звёзды быть голубыми, и снова существование хотя бы одной звезды типа нашего Солнца было бы невозможно. Соображения Хокинга, Дикке и Картера приводят к вопросу: а не замешан ли человек в проектировании Вселенной более радикальным образом, чем мы думали до сих пор? Этот вопрос столь интересен, что было бы хорошо услышать немного подробней об этом от самогó Картера» [61, с. 368].

И Картер ответил на вызов. На последующих страницах сборника [61] напечатан его доклад «Совпадения больших чисел и антропологический принцип в космологии» (с. 369-380). Одним из примеров совпадения больших чисел является то, что величина $1/\alpha_g = 1{,}7 \cdot 10^{38}$, обратная безразмерной константе гравитационного взаимодействия, совпадает с точностью до одного–двух порядков с массой звёзд в галактике. Значение $T_0$ возраста Вселенной «по порядку величины равно времени жизни типичной звезды на главной последовательности (диаграммы Герцшпрунга – Рессела — А.С.), что весьма правдоподобно, поскольку в более поздние моменты Галактика будет содержать сравнительно малое число поставляющих энергию звёзд (и в основном очень слабых), тогда как в более ранние моменты времени, чем сегодняшний возраст Вселенной, тяжёлые элементы (присутствие которых, по-видимому, необходимо для жизни) не смогли бы ещё образоваться». Наконец, по представлениям современной космологии, будущее Вселенной зависит от соотношения между нынешней средней плотностью $\rho_0$ вещества и критической плотностью $\rho_к$

$$\rho_к = \frac{3H^2}{8\pi G}, \qquad (4.4)$$

выражаемой через постоянную Хаббла (4.2). «Если средняя плотность вещества во Вселенной $\rho_0$ меньше критической, то... Вселенная будет вечно расширяться; если же знак неравенства обратный, то в будущем расширение сменится сжатием» [63, с. 34].

Б. Картер предложил две формулировки так называемого антропного принципа (АП) в космологии, указывающие на связь возможности появления человека с параметрами, характеризующими как основные свойства материи, так и структуру и эволюцию Вселенной. **Слабый антропный принцип** утверждает, «что наше положение во Вселенной по необходимости является привилегированным в том смысле, что оно должно быть совместимо с нашим существованием в качестве наблюдателей». Это недостаточно ясное высказывание расшифровывается как наиболее благоприятное положение людей на временнóй шкале эволюции Вселенной. Л.М. Гиндилис пишет: «Слабый АП применяется к параметрам, которые зависят от современного возраста Вселенной... При применении слабого АП речь идёт о положении человека во временнóй шкале... сильный АП применяется к параметрам, которые от возраста Вселенной не зависят он накладывает ограничение не на положение человека во времени, а на параметры присущие самóй Вселенной. В этом смысле ограничения являются более сильными, отсюда и название: сильный АП. Поскольку во Вселенной существует жизнь и наблюдатель, то условия должны допустить его существование, независимо от того, когда и как он возникнет. А если они этого не допускают, то наблюдатель никогда не сможет возникнуть» [64]. Вот формулировка **сильного антропного принципа**, данная самим Картером: «Вселенная (и, следовательно, фундаментальные параметры, от которых она зависит) должна быть такой, чтобы в ней на некотором этапе эволюции допускалось существование наблюдателей» [61, с. 373].

Главная ценность антропного космологического принципа, особенно в его сильной формулировке, заключается в констатации на высоком научном уровне того факта, что требуется специальная тонкая настройка фундаментальных параметров материи для формирования той Вселенной, в которой все процессы эволюции могут происходить спонтанно, в силу внутренних причин, заключённых в свойствах материи, и закономерно порождать биологическую жизнь и жизнь разумную в её человеческом обличии, как доказано нашим собственным существованием.

Список тонко настроенных фундаментальных параметров материи можно дополнить следующими фактами, заимствованными из книги [53]. «В течение некоторого времени многие физики считали, что протоны, нейтроны и электроны являются "атомами" в том смысле, который вкладывали в это слово древние греки. Однако эксперименты, проведённые в 1968 г. на Стэнфордском линейном ускорителе... продемонстрировали, что ни протоны, ни нейтроны не являются фундаментальными... они состоят из трёх частиц меньшего размера, названных *кварками*. Это вымышленное название было заимствовано теоретиком Мюрреем Гелл-Манном, предсказавшим существование кварков, из произведения ирландского писателя… Экспериментаторы установили, что сами кварки делятся на два типа, которые… были названы *u*-кварками и *d*-кварками. Протон состоит из двух *u*-кварков и одного *d*-кварка, а нейтрон — из двух *d*-кварков и одного *u*-кварка. Всё, что мы видим на Земле и в небесах, по-видимому, состоит из комбинаций электронов, *u*-кварков и *d*-кварков. Не существует экспериментальных данных, указывающих на то, что какая-либо из этих трёх частиц состоит из элементов меньшего размера. Однако имеется масса данных, свидетельствующих о том, что Вселенная содержит дополнительные компоненты. В середине 1950-х гг. Фредерик Райнес и Клайд Коуэн получили решающее экспериментальное доказательство существования четвёртого типа элементарных частиц, названных *нейтрино*. Существование этих частиц было предсказано в начале 1930-х гг. Волфгангом Паули… В середине 1930-х гг. физики, исследующие космические лучи… открыли ещё одну частицу, названную *мюоном*. Эта частица идентична электрону, за исключением того, что она примерно в 200 раз тяжелее… Используя всё более мощную технику, физики продолжали сталкивать крошечные частицы материи всё более высокой энергии… Среди образовавшихся осколков учёные искали новые фундаментальные частицы, чтобы добавить их к растущему списку элементарных частиц. Вот что они обнаружили: ещё четыре кварка — *c*, *s*, *b* и *t*, ещё одного, даже более тяжёлого, родственника электрона, названного тау-лептоном, а также ещё две частицы, свойства которых схожи со свойствами нейтрино (они получили названия *мюонного нейтрино* и *тау-нейтрино*, чтобы отличить их от первого нейтрино, которое стало называться *электронным нейтрино*). Эти частицы образуются в соударениях при высокой энергии, они существуют только в течение коротких промежутков времени и не входят в состав обычной материи. Но и это ещё не конец истории. Каждая из этих частиц имеет соответствующую ей *античастицу*, обладающую такой же массой, но являющуюся противоположной в некоторых других отношениях, например, противоположной по электрическому заряду. Физики подметили закономерность в свойствах этих частиц (см. таблицу, в которой массы частиц указаны в долях массы протона). Частицы материи чётко разделяются на три группы, которые часто называют *семействами*. Каждое семейство состоит из двух кварков, электрона или одного из его родственников, и одного из типов нейтрино. Свойства соответствующих частиц в трёх семействах идентичны за исключением массы, которая последовательно увеличивается в каждом следующем семействе. В настоящее время… показано, что *всё* вещество, найденное по сей день — естественное или полученное искусственно при помощи гигантских устройств для столкновения атомов — состоит из комбинаций частиц, входящих в эти семейства, и соответствующих им античастиц… Разделение на семейства, по крайней мере, вносит какую-то видимость порядка, но при этом возникают многочисленные “почему”. Почему требуется так много фундаментальных частиц, особенно если вспомнить, что для подавляющего большинства окружающих нас тел требуются только электроны, *u*-кварки и *d*-кварки. Почему семейств три? Почему не одно семейство или не четыре, или не какое-нибудь другое число? Почему наблюдается такой, на первый

| Семейство 1 | | Семейство 2 | | Семейство 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Частица* | *Масса* | *Частица* | *Масса* | *Частица* | *Масса* |
| Электрон | 0,00054 | Мюон | 0,11 | Тау | 1,9 |
| Электронное нейтрино | $< 10^{-8}$ | Мюонное нейтрино | < 0,0003 | Тау-нейтрино | < 0,033 |
| *u*-кварк | 0,0047 | *c*-кварк | 1,6 | *t*-кварк | 189,0 |
| *d*-кварк | 0,0074 | *s*-кварк | 0,16 | *b*-кварк | 5,2 |

взгляд совершенно случайный, разброс значений масс частиц, например, почему масса тау-частицы в 3520 раз больше массы электрона? Почему масса *t*-кварка в 40200 раз больше массы *u*-кварка? Все эти числа выглядят странно, они кажутся случайными. Являются ли они игрой случая, связаны ли они с каким-то божественным выбором, или эти фундаментальные свойства нашей Вселенной имеют какое-то разумное научное объяснение?» [53, с. 14-15].

При любом из предполагаемых ответов на вопрос, поставленный в последней фразе, придётся учитывать, что в соответствии с сильным антропным принципом космологии размеры, время жизни, химический состав, структура и характер эволюции Вселенной весьма остро зависят от значений и комбинации фундаментальных параметров материи, и в случае довольно небольших отклонений от существующих параметров Вселенная, в которой мы живём, скорей всего не получилась бы. Вопрос вопросов в том, каким образом обеспечены выбор и осуществление этой тонкой и в высшей степени плодотворной настройки. Как тут не вспомнить цитированное выше (в начале § 6 ) высказывание Канта, которому наука на протяжении двух столетий не придавала серьёзного значения: «... мы можем с полным правом предположить, что порядок и строение миров развиваются постепенно, в некоторой последовательности во времени из запасов сотворённого природного вещества, но сама эта основная материя, свойства и силы которой служат причиной всех изменений, есть непосредственное следствие божественного бытия; следовательно, она сразу должна быть настолько богатой и полной, чтобы развитие её сочетаний могло вечно происходить по одному плану, охватывающему всё, что только может существовать...» [30, с. 202]. Большинство современных исследователей по укоренившейся в науке традиции не приемлют причину Вселенной вне самóй Вселенной, и Б. Картер выдвинул гипотезу **ансамбля вселенных.** «Всегда, конечно, можно как выход из положения — за неимением более строгого физического аргумента — придать предсказанию, основанному на сильном антропологическом принципе, статус объяснения с помощью рассуждения, использующего понятие “ансамбль миров”. Под этим я имею в виду ансамбль вселенных, характеризуемых всеми мыслимыми комбинациями начальных условий и фундаментальных констант (различие между двумя этими понятиями, не вполне чётко очерченное, состоит в том, что фундаментальные константы относятся главным образом к локальным, а начальные условия к глобальным характеристикам вселенных). Существование какого-либо организма, который можно назвать наблюдателем, будет возможно лишь для определённых ограниченных комбинаций параметров, которые выделяют в ансамбле миров познаваемое подмножество» [61, с. 375-376]. К обсуждению гипотезы ансамбля миров мы обратимся в следующей главе, а пока перейдём к тем изменениям в представлениях о Вселенной и её эволюции, которые вытекают из объяснения материальных точек, тел, элементарных частиц как форм восприятия мировых линий.

## § 27. АБСОЛЮТНОЕ ВРЕМЯ ВСЕЛЕННОЙ В МОДЕЛИ МИРА МИНКОВСКОГО

Модели Вселенной, основанные на использовании общей теории относительности, изначально строятся в четырёхмерном **искривлённом** псевдоримановом пространстве индекса 1. В отличие от линейного (не искривлённого) псевдоевклидова четырёхмерного пространства индекса 1, свойства которого вполне определены указанными в его названии характеристиками, псевдоримановы пространства, имеющие размерность 4 и индекс 1, могут различаться значениями своей кривизны, а применительно к моделям Вселенной не исключаются различия кривизны на разных стадиях эволюции Вселенной. Это сильно усложняет задачу построения моделей Вселенной в псевдоримановом пространстве. Кроме того, математический аппарат псевдоримановых (искривлённых) пространств намного сложней математического аппарата псевдоевклидова (не искривлённого) пространства. В результате возможности наглядных представлений о той или иной модели Вселенной в псевдоримановом пространстве бедны, что не только затрудняет популярное изложение модели, но и понижает (если не сводит на нет) контролирующую роль наглядных представлений в тех случаях, когда для уменьшения вычислительных сложностей приходится прибегать к некоторым упрощениям самóй математической модели.

Есть ли какие-либо основания для рассмотрения модели Вселенной в линейном (не искривлённом) псевдоевклидовом пространстве? Есть, и авторы работ по космологии иногда прибегают к такому рассмотрению для иллюстрации и подтверждения некоторых выводов, хотя делают это недостаточно корректно, как будет показано ниже. Пока ещё остаётся не решённым в науке вопрос о значении средней плотности $\rho_0$ вещества во Вселенной, а от отношения его

$$\Omega = \rho_0/\rho_\kappa \qquad (4.5)$$

к критической плотности $\rho_\kappa$ зависит судьба эволюции Вселенной, как отмечено после формулы (4.4). И в обзорной статье [65, с. 100, 99] сказано: «Характер дальнейшей эволюции зависит от величины $\Omega$. Если $\Omega \leq 1$, то расширение будет продолжаться неограниченно долго, если $\Omega > 1$, то оно сменится сжатием. Величина $\Omega$ определяет также... знак $k$, т.е. знак кривизны пространства сопутствующей системы отсчёта... На основании всех имеющихся сейчас наблюдательных и теоретических сведений полагают, что $\Omega_0$ (т.е. значение $\Omega$ в современную эпоху — А.С.) весьма близко к 1, так что $k \approx 0$». Но **псевдориманово** четырёхмерное пространство индекса 1 **с кривизной, равной нулю** — это и есть четырёхмерное **псевдоевклидово** пространство индекса 1, т.е. пространство Минковского. А если кривизна $k$ и отлична от нуля, это отличие невелико, что делает уместным использование модели Минковского в качестве линейного приближения. Это тем более интересно, что при применении модели Минковского к космологии выявляются такие проблемы, на которые во всяком случае должно быть обращено внимание с целью осмысления их с удовлетворительной ясностью с позиций общей теории относительности.

Есть побудительные мотивы и более радикального свойства к тому, чтобы заинтересоваться рассмотрением строения и эволюции Вселенной в пространстве Минковского. В книге [66] изложена теория гравитации, отличающаяся от развитой А. Эйнштейном на основе ОТО (общей теории относительности). Авторы [66] утверждают, что их теория РТГ (релятивистская теория гравитации) «объясняет результаты всех гравитационных экспериментов» (с. 3), что «неинерциальные системы отсчёта так же допустимы в теории относительности, как и инерциальные», а «этот фундаментальный факт и не был ясен Эйнштейну» (с. 8), что «приняв ОТО, мы должны отказаться... от фундаментального принципа — закона сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля... но это очень большая потеря, и мы были бы слишком легкомысленны, если без должных экспериментальных оснований согласились бы на неё» (с. 9). Авторы [66] считают, что «Эйнштейн и Гильберт совершили при построении ОТО принципиальный отход от теории относительности... покинули удивительной простоты пространство Минковского... и вошли в дебри римановой геометрии, которые затянули и последующие поколения физиков, занимающихся гравитацией» (с. 9). В [66] утверждается, что «пространство Минковского... есть фундаментальное пространство, общее для всех физических полей, в том числе и гравитационного... отражает динамические свойства, общие для всех форм материи... обеспечивает существование единых характеристик для всех форм вещества и гравитационного поля» (с. 10). Подчеркнём, что такой взгляд находится в прекрасном согласии с отмеченным в § 24 отношением к пространству Минковского как к абсолютному пространству. Вместе с тем, по мнению автора этих строк, предложившего в [41], [42], [50] концепцию мирового проявляющего фронта, теория римановых пространств должна найти применение в исследованиях **локальных** искривлений гиперповерхности проявляющего фронта, связанных по-видимому с явлением гравитации.

По совокупности указанных причин не будет лишено смысла и интереса рассмотрение ряда проблем строения и эволюции Вселенной с позиций модели мира Минковского. Эта модель обретает не достававшую ей прежде полноту именно в связи с открытием расширения Вселенной из начального состояния сингулярности. Коль скоро в сингулярности как в зародыше сконцентрированы причины появления всех тех объектов, к которым может быть приложено хотя бы с ограничениями понятие материальной точки (а одна из существеннейших черт материальной точки — наличие у неё массы покоя), то все мировые линии в качестве объектов, воспринимаемых в виде материальных точек, должны иметь своё начало после сингулярности в большей или меньшей удалённости от неё. Так как эффект расширения Вселенной, выраженный уравнением Хаббла (4.1), проявляется именно на межгалактических расстояниях, и тем определённей, чем больше расстояния, то естественно представлять модель Вселенной как систему **мировых линий галактик**. При этом надо иметь в виду, что огромное число доступных наблюдениям галактик позволяет смотреть на них как на молекулы газа. «В космологии в качестве материи чаще всего рассматривается газ. Это может быть и "обычный" газ, и газ, "молекулами" которого являются галактики, и ультрарелятивистский газ фотонов и т. д.» — сказано в книге [62, с. 44]. Считается, что начало образования галактик приходится на эпоху $10^{16}$ секунд ($\approx 0{,}3 \cdot 10^{9}$ лет) после сингулярности, что составляет $(0{,}015 \div 0{,}03)\,T$, или в среднем $1/45$ часть нынешнего возраста (4.3) Вселенной. Таким образом, изображая на рисунке мировую линию нашей Галактики как имеющую длину 45 мм, надо будет расположить начало этой линии всего лишь в одном миллиметре от точки сингулярности Вселенной. Есть такие проблемы, где учёт этой относительно малой величины будет иметь принципиально важное значение, а в остальных случаях мы не совершим существенной ошибки, считая мировые линии галактик начинающимися от точки сингулярности, как они изображены на рис. 4.1.

На этом рисунке показано двумерное сечение четырёхмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 псевдоевклидовой плоскостью $OWX$, проходящей через точку $S$ сингулярности Вселенной и мировую точку $O$, представляющую состояние нашей Галактики в её настоящий момент времени. Мировую линию $SO$ нашей Галактики, как и мировые линии других галактик, мы будем считать прямыми, ограничиваясь рассмотрением только тех из этих прямых, которые принадлежат плоскости $SOX$. При таких упрощающих условиях будут получены выводы об абсолютном времени Вселенной, справедливые и в более общих случаях.

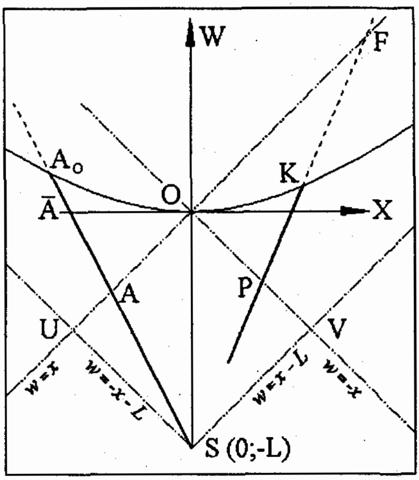


Рис. 4.1

Классическое научное мировоззрение не знало иного времени, кроме абсолютного, но для классического научного мировоззрения парадоксальным было бы само понятие конечного возраста Вселенной, предполагающее акт её возникновения. Для современной космологии, оперирующей понятиями возраста и начала (сингулярности) Вселенной, парадоксальность их должна усматриваться в другом, а именно допущении абсолютных оценок промежутков времени. Мы понимаем возраст Вселенной как определённый в системе отсчёта нашей Галактики промежуток времени $T$ (4.3) между состоянием $S$ сингулярности Вселенной и состоянием $O$ нашей Галактики в её настоящий момент времени (или в настоящую эпоху, поскольку по сравнению с десятком миллиардов лет возраста Вселенной десяток веков в истории цивилизации можно уподобить одному мгновению)

$$t_O - t_S = T - 0 = T. \qquad (4.6)$$

Но какую оценку $T_A^{[O]}$ получит промежуток времени (4.6) между событиями $S$ и $O$ по отношению к системе отсчёта галактики $A$ (имеющей на рис. 4.1 мировую линию $SA$), удаляющейся от нашей Галактики со скоростью, например,

$$v = 0{,}866 \cdot c\,? \tag{4.7}$$

Так как с такой же скоростью удаляется наша Галактика от галактики $A$, то значения $T_A^{[O]}$ и $T$ связаны между собой формулой типа (3.134′) в § 19

$$T = T_A^{[O]} \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} = T_A^{[O]} \cdot \sqrt{1-0{,}866^2} = 0{,}5 \cdot T_A^{[O]}\,,$$

откуда следует

$$T_A^{[O]} = 2\,T\,. \tag{4.8}$$

В системе отсчёта галактики $A$ промежутком времени (4.8) отделено от события $S$ такое состояние $A^{[O]}$ галактики $A$, которое одновременно состоянию $O$ нашей Галактики. Если же, наоборот, заинтересоваться событием $\overline{A}$ состояния галактики $A$, одновременным событию $O$ настоящего момента времени нашей Галактики в системе отсчёта нашей Галактики, то промежуток времени

$$t_{\overline{A}} - t_S = T_{\overline{A}} - 0 = T_{\overline{A}}$$

между событиями $S$ и $\overline{A}$ окажется равным

$$T_{\overline{A}} = T \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} = T \cdot \sqrt{1-0{,}866^2} = 0{,}5 \cdot T\,. \tag{4.8′}$$

Такие соотношения совершенно закономерны с точки зрения специальной теории относительности, согласно которой события, разделённые пространственноподобным интервалом (события $O$ и $A^{[O]}$, $O$ и $\overline{A}$), являются “абсолютно удалёнными” друг от друга, поскольку «в любой системе отсчёта эти события происходят в разных местах пространства... Понятия “одновременно”, “раньше” и “позже” для этих событий, однако, относительны» [40, с. 17]. И Макс Борн подчеркнул с полной категоричностью: «*Не существует такой вещи, как абсолютная одновременность* (курсив Борна — А.С.). Тому, кто однажды уяснил себе это, трудно понять, почему выяснение столь простого факта потребовало многих лет точных исследований» [17, с. 278]. Зависимость понятия одновременности от выбора системы отсчёта пространства и времени в специальной теории относительности основана на **координатном критерии**: одновременными признаются те события, которым соответствуют мировые точки, имеющие одинаковое значение координаты $w = ct$ в выбранной псевдоортонормированной системе координат, что наглядно демонстрируют рассмотренные примеры. Событие $A^{[O]}$ (отделённое от события $S$ промежутком времени (4.8)) одновременно событию $O$ с точки зрения системы отсчёта галактики $A$, но происходит позже события $O$ с точки зрения системы отсчёта нашей Галактики. Событие же $\overline{A}$ одновременно событию $O$ в системе отсчёта нашей Галактики, но происходит раньше события $O$ с точки зрения системы отсчёта галактики $A$. Вопрос о том, какое состояние (*событие*) $A_O$ галактики $A$ одновременно состоянию $O$ настоящего момента времени нашей Галактики **вне связи** с определённой системой отсчёта (координат), т. е. **абсолютно одновременно**, не имеет смысла в специальной теории относительности самой по себе, без применения к определённой модели Вселенной. Но этот вопрос оправдан, более того, остро актуален в модели мира Минковского, обогащённой представлением современной космологии о состоянии сингулярности Вселенной.

В интерпретации специальной теории относительности с позиций предложенной Германом Минковским модели мира определены на основе координатного критерия понятия **абсолютного прошлого и абсолютного будущего** по отношению к любому событию $O$. На рис 4.1 все события, которые соответствуют мировым точкам, принадлежащим нижнему сектору между изотропными $OU$ и $OV$, включая границы этого сектора, являются абсолютно прошлыми по отношению к событию $O$, а все мировые точки верхнего сектора, выделенного теми же изотропными, представляют события абсолютно будущие по отношению к $O$. Это обусловлено тем, что в любых псевдоортонормированных системах координат с осью $OW$, принадлежащей верхнему сектору (верхней внутренней полости изотропного гиперконуса), все мировые точки нижнего сектора (нижней внутренней полости изотропного гиперконуса с вершиной $O$) имеют значения координаты $w$ меньшие, чем значение $w_O$ в точке $O$. Таким образом понятия абсолютного прошлого и абсолютного будущего не вступают в противоречие с **координатным** критерием одновременности, единственным, имеющим смысл в специальной теории относительности самой по себе. Пусть отрезок $PF$ на рис 4.1 изображает мировую линию некоторой галактики, причём в точках $P$ и $F$ эта линия пересекается с изотропными, проходящими через точку $O$. Точка $P$ на изотропной $w = -x$ и все другие точки мировой линии $PF$, имеющие значение координаты $w < w_P$, принадлежат области абсолютного прошлого относительно точки $O$, а точка $F$ на изотропной $w = x$ и все другие точки линии $PF$, имеющие значение координаты $w > w_F$, принадлежат области абсолютного будущего относительно точки $O$. Внутри отрезка $PF$ нет ни одной точки абсолютно прошлой или абсолютно будущей относительно $O$ по координатному критерию, и если мы станем отрицать существование внутри $PF$ точки $K$, обладающей свойством абсолютной одновременности точке $O$, то такая точка вообще выпадет из логической схемы, и придётся либо отказаться от признания точки, отделяющей абсолютно будущее от абсолютно прошлого на мировой линии $PF$, либо наделить этим свойством весь открытый отрезок $PF$. Но тогда нужно обратить внимание на то, что на мировых линиях, более близких к линии $SO$, длина промежутка между самой поздней абсолютно прошлой и самой ранней абсолютно будущей точками будет уменьшаться, обратившись в ноль на линии *SO*. Этот нулевой отрезок и есть та точка *O*, которая в качестве границы между абсолютно прошлыми и абсолютно будущими состояниями нашей Галактики имеет физический смысл её состояния в настоящий момент времени.

По отношению к событию нашего настоящего момента времени в области абсолютного прошлого находится вся уже сформировавшаяся, проявленная часть нашей мировой лини, которая реально существует в прошлом в качестве материализованного объекта. Впереди же границы проявленности нашей мировой линии, т.е. в области абсолютного будущего по отношению к событию настоящего момента времени, мировая линия ещё не проявлена, не сформировалась, её там ещё нет. Какую форму будет принимать мировая линия после настоящего момента времени, зависит от закономерности взаимодействия её с окружающими материальными объектами. Не исключено, что на эти взаимодействия может оказать влияние целенаправленная деятельность разумных существ. Например, если закономерности взаимодействий будут вести к столкновению астероида с нашей планетой, то люди уже могут предпринять ряд мер, чтобы избежать этой опасности (раздробить астероид или с помощью установленных на нём реактивных двигателей вызвать изменение его орбиты). Представление о процессе формирования, проявления мировых линий гармонично сочетает механическую предопределённость, позволяющую заранее рассчитывать движения небесных тел, публикуемые в астрономических ежегодниках, с возможностью изменять ход будущих событий в нарушение их предопределённости.

Мы с полной определённостью воспринимаем событие настоящего момента времени на своей собственной мировой линии как границу её проявленности, ощущая себя живущими именно в настоящий момент времени, и нет оснований отказывать в таком ощущении другим существам, которые могут быть связаны с другими мировыми линиями. Наблюдать граничные точки настоящего момента времени на других мировых линиях (отличных от нашей) мы не можем, потому что такие точки не находятся на изотропных прямых, проходящих через точку *O* нашего настоящего момента времени. Однако нет и геометрических оснований отрицать на мировой линии *PF* другой галактики существование определённой точки *K*, отделяющей абсолютно прошлую часть этой линии как уже сформировавшуюся, реализованную, проявленную, от ещё не сформировавшейся части линии. Именно в этой роли границы между проявленным и непроявленным заключается сходство точки *K* с точкой *O*, позволяющее применить к ним понятие абсолютной одновременности, основанное не на координатном критерии, а на критерии проявленности.

После того как в космологию вошло признание события сингулярности Вселенной, способного служить универсальным начальным пунктом отсчёта любых промежутков времени, пришлось применять и понятие абсолютного времени (с неотделимым от него понятием абсолютной одновременности) хотя введение этих понятий осуществлено, так сказать, “контрабандным” путём, “с чёрного хода”, а не с “парадного”, т.е. без чёткого теоретического обоснования и даже без принятия соответствующих терминов.

Любой разумный обитатель галактики $A$ вправе будет выдвинуть веские возражения против обеих наших оценок (4.8) и (4.8′) тех состояний $A^{[O]}$ и $\overline{A}$ галактики $A$, которые мы готовы признать одновременными (с той или иной координатной точки зрения) нашему событию $O$. Он мог бы сказать, что в наших оценках упущено (искажено) главное. Сами-то мы, обитатели галактики $O$, видим главное отличительное свойство своего состояния, представленного мировой точкой $O$, в том, что это есть состояние **настоящего момента времени**, граница, отделяющая уже реализованное, сформировавшееся прошлое от ещё не реализованного, не проявленного будущего, и эта граница находится на вполне определённом расстоянии

$$iL = (ic)T = |SO| \qquad (4.9)$$

от мировой точки $S$ сингулярности Вселенной. А если мы претендуем на то, что длиной (4.9) определяется не только возраст $T$ (4.3) нашей Галактики, но и возраст всей Вселенной то должны будем признать, что и во всех других галактиках их состояние настоящего момента времени, их граница проявленности удалена от состояния $S$ сингулярности на такое же расстояние (4.9). В частности это должно означать, что на мировой линии галактики $A$ границей проявленности служит мировая точка $A_O$, удалённая от точки $S$ сингулярности на такое же расстояние

$$|SA_O| = iL = (ic)T. \qquad (4.9')$$

Поскольку же содержание равенств (4.9), (4.9′) не зависит от выбора системы координат (системы отсчёта пространства и времени), то мировые точки $O$ и $A_O$ связаны между собой отношением **абсолютной одновременности**. Существование такого отношения и нужно признать с полной определённостью, чтобы понятие **возраста Вселенной** не выглядело как контрабандное употребление классического представления об абсолютном времени, отменённого специальной теорией относительности. Отношение абсолютной одновременности потому не вступает в противоречие с относительной одновременностью, что оно основано не на координатном критерии, а на понимании физического смысла настоящего момента времени как границы проявленности каждой мировой линии.

Независимо от того, в какой модели Вселенной признаётся объективность понятия возраста Вселенной, последнее по сути своей предполагает выделенность во всех галактиках такого их состояния настоящего момента времени, которым отделяется реализованное, проявленное прошлое от ещё непроявленного будущего, а совокупность таких состояний образует фронт мирового проявляющего процесса, или **проявляющий фронт**.

От выбора модели Вселенной, от выбора типа пространства, в котором строится модель, может зависеть форма (уравнение) проявляющего фронта, но не тот факт, что все точки проявляющего фронта отделены одинаковым промежутком времени (возрастом Вселенной) от состояния сингулярности Вселенной. В рассматриваемой нами модели Вселенной в пространстве Минковского глобальное уравнение проявляющего фронта (без учёта его местных искривлений) определяется равенством (4.9), (4.9′) применительно к мировым линиям любых галактик. Считая в первом приближении мировые линии галактик прямыми, исходящими из точки $S$ сингулярности, мы можем отождествить их с радиус-векторами $\boldsymbol{r}^*$, исходящими из $S$. Так как в дальнейшем нам не раз придётся делать переходы между координатными системами $OWXYZ$ и $SWXYZ$, различающимися только точкой начала координат, но основанными на одном и том же псевдоортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, то нелишне будет выписать соотношения между координатами любой точки $M$ относительно этих систем. В системе $OWXYZ$ координаты точки $M$ определяются как координаты её радиус-вектора $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$, исходящего из точки $O$ (см. (3.221) в начале § 23)

$$\boldsymbol{r} = \overline{OM} = w\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 . \qquad (4.10)$$

В системе $SWXYZ$ координаты той же точки $M$ определяются как координаты её радиус-вектора $\boldsymbol{r}^* = \overline{SM}$, исходящего из точки $S$

$$\boldsymbol{r}^* = \overline{SM} = w^*\boldsymbol{e}_0 + x^*\boldsymbol{e}_1 + y^*\boldsymbol{e}_2 + z^*\boldsymbol{e}_3 . \qquad (4.10')$$

Радиус-вектор $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ может быть очевидным образом представлен в виде суммы векторов

$$\overline{OM} = \overline{OS} + \overline{SM} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{r} = \overline{OS} + \boldsymbol{r}^* ,$$

откуда следует

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} - \overline{OS} . \qquad (4.11)$$

Так как вектор $\overline{OS}$ коллинеарен базисному орту $\boldsymbol{e}_0$ (оси $OW$), то его разложение по базису имеет вид (см. рис. 4.1)

$$\overline{OS} = -L\boldsymbol{e}_0 + 0\cdot\boldsymbol{e}_1 + 0\cdot\boldsymbol{e}_2 + 0\cdot\boldsymbol{e}_3 ,$$

что при подстановке вместе с (4.10) в (4.11) даст

$$\boldsymbol{r}^* = \overline{SM} = (w+L)\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 . \qquad (4.11')$$

Сравнивая (4.10′) и (4.11′), видим, что

$$w^* = w+L , \qquad x^* = x , \qquad y^* = x , \qquad z^* = x . \qquad (4.12)$$

В четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1 геометрическое место точек, удалённых от точки $S$ на расстояние (4.9) $|\boldsymbol{r}^*| = iL$, определяется уравнением типа (3.223)

$$\boldsymbol{r}^*\boldsymbol{r}^* = (iL)^2 = -L^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -(w^*)^2 + (x^*)^2 + (y^*)^2 + (z^*)^2 = -L^2 ,$$

представляющим обе внутренние полости псевдоевклидовой гиперсферы с центром $S$. Внося сюда равенства (4.12), представим это уравнение в координатах относительно системы $OWXYZ$

$$-(w+L)^2+x^2+y^2+z^2 = -L^2$$

и в равносильной форме

$$(w+L)^2 = x^2+y^2+z^2+L^2. \qquad (4.13)$$

Извлекая квадратный корень из (4.13), выделим (положительным значением корня) **верхнюю внутреннюю** полость гиперсферы

$$w+L = +\sqrt{x^2+y^2+z^2+L^2}, \qquad w = -L+\sqrt{x^2+y^2+z^2+L^2}. \qquad (4.14)$$

Это и есть глобальное (без учёта возможных локальных искривлений) **уравнение мирового проявляющего фронта** в модели Вселенной по Минковскому. Псевдоевклидова плоскость $OWX$ на рис. 4.1 ( $y = 0, z = 0$), пересекает гиперсферу (4.14) по верхней дуге

$$w = -L+\sqrt{x^2+L^2} \qquad (4.14')$$

псевдоевклидовой окружности радиуса (4.9) $|SO| = iL$ с центром $S$. Точки $A_O$ и $K$, в которых мировые линии $OA$ и $PK$ других галактик пересекаются с проявляющим фронтом, являются абсолютно одновременными между собой и с точкой $O$ настоящего момента времени нашей Галактики.

Как показано выше (см. (3.70) в § 12), касательная к дуге псевдоевклидовой окружности псевдоортогональна к радиусу, проведённому из центра дуги в точку касания. В этой связи можно сделать пару замечаний к рассматриваемой модели. Если мировая линия галактики (прямая или кривая) не совпадает с радиусом, исходящим из точки $S$ сингулярности, а наклонена к радиусу, то любой участок линии проецируется на радиус в отрезок, длина которого больше длины проецируемого участка. Отсюда следует, что искривлённая мировая линия галактики имеет меньшую длину, чем прямая мировая линия (см. конец § 19), и потому **собственное время жизни галактики не может превосходить возраста Вселенной.**

Второе замечание — о том, что модель Минковского не налагает геометрического запрета на бесконечность числа галактик во Вселенной. Такая бесконечность может быть реализована даже в двумерном сечении, изображённом на рис. 4.1. Так как ветвь (4.14′) $\widetilde{A_O O K}$ псевдоевклидовой окружности имеет бесконечно большую протяжённость в обе стороны от точки $O$, то на ней могут разместиться бесконечно много точек, разделённых сколь угодно большими расстояниями, отсчитываемыми вдоль ветви. Если к примеру точка $A_O$ представляет абсолютно одновременное нам состояние галактики $M\,31$ ("Туманности Андромеды"), удалённое от нас на $2\cdot10^6$ световых лет, а для радиуса (4.9), (4.9′) $iL = (ic)\,T$ псевдоевклидовой гиперсферы (4.14) и псевдоевклидвой окружности (4.14′) принять значение, соответствующее максимальной оценке возраста (4.3) Вселенной $T = 20\cdot10^9$ лет, то угол $\angle OS\,A_O = i\varphi$ составит всего лишь $i\cdot10^{-4}$. Такие углы можно откладывать в каждую сторону от $SO$ бесконечно много раз, потому что каждая из изотропных, проходящих через точку $S$ сингулярности Вселенной (в частности изотропные $SU$ и $SV$ на рис. 4.1) составляет бесконечно большой угол $i\infty$ с прямой $SO$. При этом мировые линии любых галактик, расходящиеся радиально от $S$ и образующие угол больше чем $i \cdot 10^{-4}$, пересекут ветвь (4.14′) псевдоевклидовой окружности проявляющего фронта в точках, разделённых расстоянием, большим, чем $2 \cdot 10^{6}$ световых лет. В четырёхмерном пространстве таких возможностей ещё больше, так как в отличие от одномерности бесконечной ветви (4.14′), представляющей плоское сечение проявляющего фронта (4.14), сам этот проявляющий фронт, будучи псевдоевклидовой гиперсферой, имеет бесконечный трёхмерный объём.

Прежде чем мировой проявляющий фронт достиг своего нынешнего положения (4.14), (4.14′), он должен был в предшествующие эпохи представлять собой внутренние верхние полости псевдоевклидовых гиперсфер меньших радиусов. Выберем в качестве **единицы измерения** радиусов таких гиперсфер нынешнее значение $iL$ (4.9) радиуса проявляющего фронта. Тогда значения этого радиуса в минувшие эпохи можно выражать долями выбранной единицы (4.9)

$$(iL)\gamma = (ic)T\gamma, \qquad 0 < \gamma < 1. \qquad (4.15)$$

Процесс увеличения радиуса (4.15) псевдоевклидовой гиперсферы мирового проявляющего фронта представляет главную характеристику эволюции Вселенной и заслуживает названия **течения абсолютного времени** Вселенной. Как следствие выбора единицы (4.9) пространственных расстояний, в роли единицы измерения абсолютного времени Вселенной будет выступать современный возраст $T$ (4.3) Вселенной. То, что абсолютное значение этого возраста известно нам пока с точностью до коэффициента 2, не станет помехой для выяснения гораздо более точных относительных характеристик Вселенной. Так как любую эпоху в истории фазы расширения Вселенной мы сможем определить промежутком абсолютного времени

$$T\gamma, \qquad 0 < \gamma < 1, \qquad (4.15')$$

отделяющего эту эпоху от состояния $S$ сингулярности Вселенной, то коэффициент $\gamma$ условимся называть **коэффициентом эпохи**. Таким образом, течению абсолютного времени Вселенной мы сможем сопоставлять непрерывное изменение коэффициента эпохи. При этом **будущим эпохам** будут соответствовать значения **коэффициента $\gamma$, превосходящие единицу.**

Коль скоро мировые линии галактик мало отличаются от прямых и исходят из относительно малой окрестности точки $S$ сингулярности, то представление их в виде радиусов, исходящих из $S$, в общем должно правильно отражать характер структуры Вселенной. Тогда в прошлые эпохи расстояния между абсолютно одновременными состояниями галактик должны быть меньше современных расстояний. На рис. 4.2 изображена ветвь псевдоевклидовой окружности нынешнего проявляющего фронта (ветвь $OK$ верхней гиперболы) и ветвь (нижняя) линии проявляющего фронта в эпоху $\gamma = 1/4$, имевшая в четыре раза меньший радиус. Этот прошлый проявляющий фронт пересекает мировые линии $SO$ и $SK$ в точках, расстояние между которыми в 4 раза меньше расстояния $OK$ на современной линии проявляющего фронта. Таким образом, **явление разбегания галактик** по закону Хаббла (4.1) **может быть объяснено как отражение процесса проявления мировых линий галактик, расходящихся веерообразно от малой окрестности точки $S$ сингулярности.**

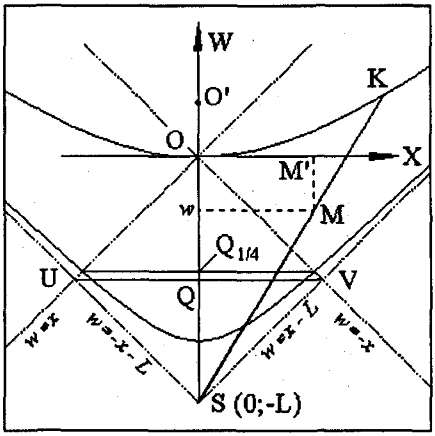


Рис. 4.2

В прошлые эпохи $\gamma < 1$ точки мировых линий галактик, принадлежавшие одной и той же внутренней полости псевдоевклидовой гиперсферы проявляющего фронта, имели физический смысл абсолютно одновременно проявляемых состояний галактик. Но и после того как эти состояния оказались в области уже проявленного мира вследствие перемещения проявляющего фронта в будущее, они сохранили общее им свойство одинаковой удалённости от точки $S$ сингулярности Вселенной. Таким образом, в расширенном смысле **абсолютно одновременными** можно назвать не только те мировые точки, которые принадлежат проявляющему фронту и служат границей проявленности мировых линий, но и те уже проявленные точки, которые **удалены на одинаковое расстояние** $(iL)\gamma$ **от точки $S$** сингулярности.

Уравнение внутренней верхней полости псевдоевклидовой гиперсферы произвольного радиуса $(iL)\gamma$ (4.15) с центром в точке $S$ получим по аналогии с уравнением (4.14) современного проявляющего фронта (в котором $\gamma = 1$):

$$-(w+L)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (iL\gamma)^2 = -(L\gamma)^2 ,$$

$$(w+L)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (L\gamma)^2 ,$$

$$w+L=+\sqrt{x^2+y^2+z^2+(\gamma L)^2}\ ,\quad w=-L+\sqrt{x^2+y^2+z^2+(\gamma L)^2}\ . \quad (4.16)$$

Псевдоевклидова плоскость $OWX$ ($y = 0$, $z = 0$), пересекает гиперсферу (4.16) по верхней дуге

$$w = -L + \sqrt{x^2+(\gamma L)^2} \quad (4.16')$$

псевдоевклидовой окружности радиуса $(iL)\gamma$ с центром $S$.

Восприятия удалённых объектов, как непосредственно зрительные, так и через посредство различных приёмников электромагнитного излучения, лимитировано изотропными прямыми, проходящими через мировую точку наблюдателя (в его настоящий момент времени), потому что только по изотропным могут передаваться электромагнитные сигналы (см. (3.123) в конце § 16). На рис. 4.1 изображён отрезок $PK$ мировой линии некоторой галактики, где $P$ и $F$ — точки пересечения этой линии с изотропными прямыми, проходящими через точку $O$ наблюдателя. Точка $P$ и все другие точки мировой линии $PK$, имеющие значение координаты $w < w_P$, принадлежат области абсолютного прошлого относительно точки $O$ и потому уже проявлены, материализованы, если проявлена или проходит через акт проявления мировая точка $O$. Но наблюдатель в точке $O$ может воспринять на мировой линии $PK$ только точку $P$, находящуюся на одной изотропной с $O$. Точка $F$, лежащая на продолжении мировой линии $PK$ (не важно, прямой или подвергшейся искривлению), принадлежит изотропной $w = x$ и области абсолютного будущего относительно точки $O$. Поэтому точка $F$ и все другие точки линии $PF$, имеющие координату $w > w_P$, ещё не проявлены в момент проявления точки $O$ и не могут быть наблюдаемы из $O$. Внутренние точки отрезка $PF$ не могут быть наблюдаемы из точки $O$, поскольку ни одна из них не принадлежит изотропной, проходящей через $O$, но именно среди них находится та точка $K$, которая могла бы заслуживать названия абсолютно одновременной точке $O$.

## § 28. КРАЙ ВСЕЛЕННОЙ И ГОРИЗОНТ ВИДИМОСТИ ВО ВСЕЛЕННОЙ

По аналогии с изотропным гиперконусом (3.238), имеющим вершину в точке $O$ начала координатной системы $OWXYZ$ (см. конец § 23)

$$-w^2+x^2+y^2+z^2 = 0\ , \quad (4.17)$$

можно записать уравнение изотропного гиперконуса с вершиной в точке $S$ сингулярности Вселенной в системе координат $SWXYZ$

$$-(w^*)^2+(x^*)^2+(y^*)^2+(z^*)^2 = 0\ ,$$

что с помощью равенств (4.12) просто переводится к выражению относительно координатной системы $OWXYZ$:

$$(w+L)^2 = x^2+y^2+z^2\ . \quad (4.18)$$

Граница **верхней** полости гиперконуса (4.18) имеет уравнение

$$w + L = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \qquad w = -L + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \quad (4.19)$$

и отделяет **верхнюю внутреннюю** область

$$w > -L + \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4.19')$$

гиперконуса (4.18) от его **внешней области**

$$w < -L + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (4.19'')$$

Если в качестве оси $SW$ выбрать любой луч, принадлежащий внутренней верхней области (4.19′), то всякая плоскость, содержащая в себе ось $SW$, пересечёт гиперконус (4.18) по некоторой паре его различных образующих, изображённых на рис. 4.1 и 4.2 в виде изотропных $SU$ и $SV$. Такая плоскость несёт на себе псевдоевклидову метрику, а для псевдоевклидовой плоскости было показано (см. (3.80) в § 12), что любой неизотропный вектор, принадлежащий одному из её секторов, составляет бесконечно большой угол с каждым из двух изотропных направлений, ограничивающих сектор. Поэтому углы, имеющие **конечное** численное значение $i\varphi$, могут образовывать с осью $SW$ только те направления, которые принадлежат **внутренней** верхней области (4.19′), а мировые линии, имеющие такие направления, будут восприниматься в виде материальных точек, движущихся относительно друг друга со скоростями $v$, **меньшими** скорости $c$ света в вакууме, как следует из универсальной формулы типа (3.114)

$$v = -c \cdot th\,\varphi = (ic) \cdot tg(i\varphi) \qquad (4.20)$$

и того факта, что значения гиперболического тангенса $\mathrm{th}\,\varphi$ заключены между $-1$ и $+1$, не достигая этих границ при конечных значениях $\varphi$ (см. (3.84), (3.85) в конце § 12). Таким образом, можно утверждать, что любые мировые линии (и в их числе мировые линии галактик), существующие во Вселенной, могут иметь только те направления, указываемые ортами касательных $l^0$, которые принадлежат внутренней области (4.19′) изотропного гиперконуса с вершиной $S$. И так как мировые линии, характеризуемые неизотропным вектором массы (воспринимаемые в виде тел с отличной от нуля массой покоя) могли возникнуть лишь после состояния сингулярности Вселенной и лишь во внутренней области (4.19′), то они не могут в процессе своего проявления достигнуть границы (4.19) и уж тем более — выйти за эту границу во внешнюю область (4.19″). Значит **во внешней области** изотропного гиперконуса (4.18) с вершиной в точке $S$ сингулярности **нет мировых линий**, т.е. нет таких объектов, которые могли бы восприниматься нами в виде тел. А коль скоро именно тела (мировые линии тел) являются источниками электромагнитных сигналов, то из внешней области к нам не поступают электромагнитные сигналы, внешняя область не излучает света. Вот уж поистине “тьма внешняя”, или “кромешная” (находящаяся за “кромкой”, краем (4.19)), если воспользоваться евангельским выражением (Мф., 25, 30). Высказанные здесь соображения дают повод назвать изотропную гиперповерхность (4.19) **Краем Вселенной.**

Даже не располагая достоверной информацией о самом состоянии сингулярности, можно ожидать, что в нём, как и в доступной нашим наблюдениям и теоретическому осмыслению близости от него, электромагнитные сигналы могут передаваться только по изотропным. Тогда изотропный гиперконус (4.19) Края Вселенной нужно будет признать **областью существования первичных фотонов** как материальных объектов Вселенной в состоянии сингулярности, не сводимом к одной только точке $S$ вершины первичного изотропного гиперконуса. Существование Края Вселенной не налагает геометрического запрета на возможность существования бесконечного множества мировых линий галактик, потому что любая мировая линия отделена бесконечно большим углом от любой из образующих изотропного гиперконуса (4.19) Края Вселенной, и в таком бесконечном угловом диапазоне может разместиться бесконечно много других мировых линий галактик. Это наглядно пояснено в конце § 27 (второе замечание между формулами (4.14′) и (4.15)) для плоского сечения, изображённого на рис. 4.1 и 4.2. Именно псевдоевклидовыми метрическими свойствами пространства Минковского обусловлен тот замечательный факт, что при любом сколь угодно большом, но конечном значении угла между $SO$ и $SK$ на бесконечной дуге $\widetilde{OK}$ можно откладывать в обе стороны от точки $K$ бесконечно многократно характерные расстояния между абсолютно одновременными состояниями галактик.

Но существование Края (4.19) Вселенной приводит к тому, что значение радиуса доступной наблюдениям Вселенной оказывается ограниченным. Этого ограничения не было бы, если бы мы могли наблюдать состояния других галактик, абсолютно одновременные нашему состоянию настоящего момента времени. Например, если бы в ситуации, изображённой на рис. 4.1 и 4.2 мы могли наблюдать из мировой точки $O$ нашей Галактики абсолютно одновременную ей точку $K$ другой галактики, удалённую по дуге $OK$ на сколь угодно большое расстояние, то не было бы ограничения на расстояния до наблюдаемых объектов. Однако в действительности можно наблюдать только такие состояния других галактик, которые представлены мировыми точками, лежащими на одной изотропной с мировой точкой наблюдателя. В частности на мировой линии галактики $K$ будет доступна восприятию наблюдателя $O$ только та точка $P$, которая лежит на изотропной $w = -x$, проходящей через точку $O$. Как видно на рис. 4.2, при удалении точки $K$ на бесконечно большое расстояние от $O$ вдоль ветви $\widetilde{OK}$ мировая линия $SK$ будет стремиться, как к своему предельному положению, к изотропной $SV$, а точка $P$ будет стремиться, как к своему недостижимому пределу, к точке $V$, расстояние которой от мировой линии $SO$ нашей Галактики ограничено.

Необходимо уточнить, что можно понимать под расстоянием до наблюдаемых во Вселенной объектов. Пусть $M(w;\ x;\ y;\ z)$ — какая-нибудь проявленная мировая точка мировой линии $SK$, принадлежащая внешней области (3.241′) изотропного гиперконуса (3.238) с вершиной в точке $O$ наблюдателя (см. конец §23). Длина

$$|\overline{OM}| = \sqrt{-w^2+x^2+y^2+z^2} \qquad (4.21)$$

пространственноподобного интервала $OM$ выражается вещественным числом и представляет **инвариантное** (не зависящее от выбора системы отсчёта) расстояние между мировыми точками $O$ и $M$. Это первое истолкование расстояния между определёнными состояниями галактик.

Псевдоортогональная проекция

$$\text{пр.}_{OXYZ}|\overline{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4.22)$$

интервала (4.21) на гиперплоскость $OXYZ$, псевдоортогональную к мировой линии $SO$ наблюдателя, представляет вторую возможность истолкования расстояния между мировыми точками $O$ и $M$. В изображённом на рис. 4.2 сечении четырёхмерного пространства плоскостью $OWX$ расстояние (4.22) равно абсолютной величине абсциссы точки $M$

$$\text{пр.}_{OX}|\overline{OM}| = \sqrt{x^2+0+0} = |x|. \qquad (4.22')$$

**Расстояние** (4.22), (4.22′) есть **относительная** величина, зависящая от выбора инерциальной системы отсчёта, и точка $M'$, являющаяся псевдоортогональной проекцией мировой точки $M$ на гиперплоскость $OXYZ$ (или на ось $OX$), **относительно одновременна** точке $O$ в координатной системе $OWXYZ$ (и в $SWXYZ$).

Наконец, расстоянием между мировыми точками абсолютно одновременных состояний галактик можно назвать длину дуги псевдоевклидовой окружности с центром в $S$, соединяющей эти точки. Например, такова длина дуги $\overset{\frown}{OK}$ проявляющего фронта на рис. 4.2. Учитывая, что вектор $\overline{SK}$ имеет координаты

$$w_K - w_S = w_K - (-L) = w_K + L, \qquad x_K - x_S = x_K - 0 = x_K,$$

можно представить уравнение (4.14′) кривой $\overset{\frown}{OK}$ в векторной форме

$$\boldsymbol{r}_S = (w+L)\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1, \qquad (4.23)$$

где $\boldsymbol{r}_S$ — радиус-вектор, проведённый из точки $S(-L;\ 0;\ 0;\ 0)$ в любую точку дуги (4.14′). Векторный дифференциал

$$d\boldsymbol{r}_S = \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2+L^2}}\cdot\boldsymbol{e}_0 + dx\cdot\boldsymbol{e}_1$$

имеет направление касательной к дуге (4.14′), а его модуль

$$|d\boldsymbol{r}_S| = dx\cdot\sqrt{-\frac{x^2}{x^2+L^2}+1} = \frac{L\cdot dx}{\sqrt{x^2+L^2}} = dl \qquad (4.24)$$

совпадает при $dx \to 0$ с длиной $dl$ элемента дуги (4.14′). Обратим внимание на геометрический смысл соотношения (4.24). Как видно из (4.14′) и (4.23), выражение

$$\sqrt{x^2+L^2} = w+L$$

представляет собой координату по оси $SO$ вектора $dr_S = \overline{SK}$, идущего от точки $S$ сингулярности Вселенной к точке $K$ на проявляющем фронте (4.14′). Это значит, что на оси $SO$ отрезок, имеющий длину $i\cdot(w+L) = i\cdot\sqrt{x^2+L^2}$, является псевдоортогональной проекцией вектора $\overline{SK}$ на ось $SO$. И так как длина вектора $\overline{SK}$ равна $iL = |\overline{SK}|$ — радиусу (4.9), (4.9′) псевдоевклидовой гиперсферы проявляющего фронта, то отношение

$$\frac{i\cdot\sqrt{x^2+L^2}}{iL} = \frac{\sqrt{x^2+L^2}}{L} = \cos\widehat{OSK} = \cos(i\varphi) = ch\,\varphi \qquad (4.25)$$

есть не что иное как косинус угла $\widehat{OSK}$ между мировыми линиями галактик $SO$ и $SK$. Таким образом равенство (4.24) имеет геометрический смысл

$$dl = dx/ch\,\varphi = dx/\cos(i\varphi), \qquad (4.25')$$

позволяющий смотреть на дифференциал $dx$ координаты как на псевдоортогональную проекцию дифференциала $dl$ длины дуги ($dx = dl\cdot\cos(i\varphi)$). Поскольку формула (4.25) получена при рассмотрении плоскости $OWX$, в ней присутствует координата $x$. Но в общем случае расстояние точки $K$ от прямой $SO$ можно обозначить греческой буквой $\rho$, и тогда выражение (4.25) косинуса примет вид

$$\cos\widehat{OSK} = \cos(i\varphi) = ch\,\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2+L^2}}{L}. \qquad (4.25'')$$

Выполняя интегрирование в пределах от $x=0$ до $x=x_K$, получим длину участка $\widetilde{OK}$ дуги

$$l_{\widetilde{OK}} = L\cdot\int\limits_0^{x_K}\frac{dx}{\sqrt{x^2+L^2}} = L\cdot ln\left|x+\sqrt{x^2+L^2}\right|_0^{x_K} = L\cdot ln\left|\frac{x_K+\sqrt{x_K^2+L^2}}{L}\right|. \qquad (4.26)$$

Подчеркнём, что кривая $\widetilde{OK}$ является геометрическим местом мировых точек (событий), абсолютно одновременных событию $O$. С позиций классической картины мира именно расстояние между абсолютно одновременными состояниями галактик имеет наиболее интересный физический смысл. Но если в классической картине мира это расстояние измеряется по прямой в наблюдаемом трёхмерном собственно евклидовом пространстве, то в модели мира Минковского величина (4.26) представляет длину кривой линии, а не прямой. Как было сказано в конце § 27 (второе замечание между формулами (4.14′) и (4.15)), на бесконечной кривой (4.14′) могут разместиться бесконечно много абсолютно одновременных состояний галактик, разделённых сколь угодно большими расстояниями. Формула (4.26) служит точным подтверждением этому, ибо из неё следует, что при стремлении к бесконечности абсолютной величины координаты $x_K$ стремится к бесконечности и длина $l_{\widetilde{OK}}$ дуги $\widetilde{OK}$, поскольку

$$ln\left|x_K+\sqrt{x_K^2+L^2}\right| \to \pm\infty \qquad \text{при} \qquad x_K \to \pm\infty. \qquad (4.27)$$

Так как псевдоевклидова гиперсфера (4.14) проявляющего фронта является **трёхмерным** геометрическим местом абсолютно одновременных мировых точек, то не выходя из неё можно удаляться от точки $O$ по псевдоевклидовым окружностям за счёт устремления к бесконечности значений каждой из трёх координат $x$, $y$, $z$ и всех их вместе. В этом есть сходство с классическим представлением о мировом пространстве как бесконечном трёхмерном. Но классическая модель наблюдаемого трёхмерного пространства является линейной, а трёхмерное пространство абсолютно одновременных мировых точек псевдоевклидовой гиперсферы — искривлённое. Впрочем, оно недоступно нашим восприятиям и никак не связано с наблюдаемым пространством, которое представляет собой **внешнюю видимость довольно сложной геометрической конструкции в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1.**

К наблюдателю, связанному с мировой точкой $O$, представляющей событие настоящего момента времени на мировой линии $SO$ нашей Галактики, может поступить электромагнитный сигнал только от той точки $A$ мировой линии $SA_O$ другой галактики (см. рис. 4.1), которая находится на пересечении $SA_O$ с изотропной, проходящей через $O$. Так как метрическая длина изотропного интервала $OA$ равна нулю, то она не может играть роль меры пространственноподобного расстояния между точками $O$ и $A$. Длина дуги $\widetilde{OA_O}$ псевдоевклидовой окружности (4.14′) является замечательной характеристикой инвариантного пространственноподобного расстояния между абсолютно одновременными событиями, однако точка $A_O$ недоступна наблюдению из точки $O$. Поэтому из трёх возможных истолкований (4.21), (4.22), (4.26) пространственноподобных расстояний между точками псевдоевклидова пространства только псевдоортогональная проекция (4.22), (4.22′) может служить мерой удалённости наблюдаемой мировой точки $A$ от мировой точки $O$ наблюдателя.

Если вектор $\overline{OM}$ (4.10) окажется изотропным, то он будет иметь равную нулю метрическую длину (4.21), но не будет нулевым вектором, так как точка его конца не совпадает с точкой начала. Поэтому у него будет отлична от нуля координата $w$ и хотя бы одна из координат $x$, $y$, $z$. Согласно (4.22) и уравнению

$$w = -\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4.28)$$

нижней части изотропного гиперконуса (3.238) с вершиной $O$ (см. середину § 23) пространственная удалённость от оси $OW$ точки $A$, принадлежащей изотропной $OA$, воспринимаемая как расстояние между $A$ и $O$ в смысле (4.22), (4.22′), определяется значением

$$\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2} = -w_A . \qquad (4.29)$$

Связь этого значения с расстоянием (4.15) мировой точки $A$ от точки $S$ сингулярности Вселенной найдём, рассмотрев пересечение изотропного гиперконуса (4.28) с псевдоевклидовой гиперсферой (4.16), содержащей точку $A$:

$$\begin{cases} w=-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ , \\ w=-L+\sqrt{x^2+y^2+z^2+(\gamma L)^2}\ . \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{L}{2}(1-\gamma^2), \\ w_\gamma = -\dfrac{L}{2}(1-\gamma^2)\ . \end{cases} \qquad (4.30)$$

Пересечение (4.30) представляет собой собственно евклидову сферу

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{L}{2}(1-\gamma^2) \qquad (4.31)$$

радиуса

$$R_\gamma = \frac{L}{2}(1-\gamma^2)\ . \qquad (4.32)$$

Все точки сферы (4.31) принадлежат собственно евклидовой гиперплоскости

$$w = -\frac{L}{2}(1-\gamma^2) = w_\gamma\ , \qquad (4.33)$$

которая отделена от точки $O$ промежутком времени

$$t_\gamma = \frac{w_\gamma}{c} = -\frac{L}{2c}(1-\gamma^2) = -\frac{T}{2}(1-\gamma^2) \qquad (4.33')$$

по часам системы отсчёта наблюдателя из нашей Галактики. Поэтому, например, в случае $\gamma = 0{,}1$ наблюдаемое событие $A$ удалено от нас в прошлое на $0{,}9\cdot T$ лет по шкале абсолютного времени Вселенной и на

$$t_\gamma = t_{0,1} = -\frac{T}{2}(1-0{,}01) = -0{,}495\cdot T \text{ лет}$$

в системе отсчёта наблюдателя. Отсутствие чёткого различения относительной и абсолютной одновременностей может быть источником недоразумений в оценке времени свершения событий.

Для достижения лучшей наглядности в последующих рассуждениях на рис. 4.2 изображена псевдоевклидова окружность (4.16′) радиуса $iL/4$, позволяющая увидеть точки её пересечения с изотропными $w=x$ и $w=-x$. Эти точки принадлежат собственно евклидовой сфере (4.31) при значении $\gamma=1/4$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{L}{2}\left[1-(1/4)^2\right], \qquad (4.34)$$

имеющей радиус (4.32)

$$R_{1/4} = \frac{L}{2}\left[1-(1/4)^2\right] = 0{,}46875 \cdot L, \qquad (4.35)$$

довольно близкий к $L/2$, и расположенной в собственно евклидовой гиперплоскости

$$w = -\frac{L}{2}\left[1-(1/4)^2\right] = 0{,}46875 \cdot L = w_{1/4}. \qquad (4.36)$$

Конечно, в гиперплоскости (4.36) есть и другие собственно евклидовы сферы с радиусами меньшими, чем, (4.35), концентричные сфере (4.34), но такие сферы не пересекаются с изотропным гиперконусом (4.28), и принадлежащие им точки мировых линий недоступны наблюдению из $O$. Центр $Q_{1/4}$ всех этих сфер тоже принадлежит гиперплоскости (4.36) и тоже не может наблюдаться из $O$. Сферы с центром $Q_{1/4}$, имеющие бо́льший радиус, чем (4.35), тоже не пересекаются с изотропным гиперкнусом (4.28), хотя сферы таких радиусов могут пересекаться с (4.28), если они принадлежат гиперплоскостям более ранних эпох $\gamma < 1/4$ и имеют центры, отличные от $Q_{1/4}$. Наилучшую наглядность эта ситуация получит, если рассматривать в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве изотропный конус с вершиной $O$ и его пересечения по собственно евклидовым окружностям радиусов (4.32) с псевдоевклидовыми сферами, имеющими радиусы (4.15).

Мировая точка $O(0;\, 0;\, 0;\, 0)$ наблюдателя не совпадает с точкой $Q_{1/4}$ центра собственно евклидовой сферы (4.34), но отличается от этого центра $Q_{1/4}(-L/4;\, 0;\, 0;\, 0)$ только значением первой координаты, а это различие не воспринимается зрительно как пространственная разделённость точек. А так как три координаты $x = 0, y = 0, z = 0$ у точек $O$ и $Q_{1/4}$ одинаковы и именно они определяют локализацию точки в **наблюдаемом трёхмерном пространстве**, то наблюдатель $O$ не ощущает своего несовпадения с центром $Q_{1/4}$ собственно евклидовой сферы (4.34), а ощущает себя находящимся в этом центре. Точно такие же рассуждения справедливы для всех других собственно евклидовых сфер (4.31), различающихся своими радиусами (4.32) и своими центрами $Q_\gamma(w_\gamma;\, 0;\, 0;\, 0)$ при изменении коэффициента $\gamma$ в интервале $(0;\, 1)$. И хотя эти сферы не являются концентричными в четырёхмерном пространстве, они кажутся наблюдателю имеющими один общий центр $O$ в наблюдаемом им трёхмерном пространстве. Таким образом синтезируется иллюзорное представление о собственно евклидовом шаре, окружающем наблюдателя. Это именно тот зрительный образ Вселенной, который во всей своей полноте доступен космонавтам на больших расстояниях от Земли, а от остальных обитателей планеты она заслоняет собой половину небесного свода. Более детальный анализ свойств наблюдаемого трёхмерного пространства будет выполнен в следующем параграфе, а пока мы сконцентрируем внимание на радиусе наблюдаемого шара.

Стереоскопичность нашего зрения позволяет ощущать различие расстояний до близких земных предметов, и этот эффект усиливается привычкой связывать уменьшение угловых размеров знакомых предметов с увеличением расстояния до них. Кроме того есть возможность измерять расстояние до предметов по их параллактическому смещению при изменении местоположения наблюдателя. Но применительно к небесным телам об эффекте стереоскопичности нашего зрения говорить не приходится, так что все они представляются нам расположенными на одной сфере неопределённого радиуса. А когда люди научились измерять расстояния до планет и даже до звёзд и галактик, то сложилось убеждение в том, что радиус сферы, ограничивающей наблюдаемый шар, не должен иметь предела, причём это явилось не столько результатом измерений, сколько продуктом философской экстраполяции классической картины мира. Но такой убеждённости противоречит рассматриваемая здесь модель Вселенной в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 1. Так как мировых линий галактик (и вообще каких-нибудь мировых линий) нет за пределами Края Вселенной (4.19), да и на само́м Крае их нет, то пересечение изотропного гиперконуса (4.19) с изотропным гиперконусом (4.28) наблюдателя

$$\begin{cases} w = -\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ , \\ w = -L + \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = -w, \\ w = -L - w, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{L}{2}, \\ w = -\dfrac{L}{2} \end{cases}$$

является той граничной собственно евклидовой сферой

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = L/2 \qquad (4.37)$$

радиуса

$$R_h = L/2\,, \qquad (4.38)$$

за пределами которой (и на которой) не может находиться доступное наблюдению из точки $O$ состояние какой-либо галактики. Сфера (4.37) принадлежит всеми своими точками собственно евклидовой гиперплоскости

$$w_h = L/2\,, \qquad (4.39)$$

и центр $Q(-L/2;\ 0;\ 0;\ 0)$ сферы (4.37), *отмеченный на рис.* 4.2, находится в гиперплоскости (4.39). И опять же наблюдатель $O$ ощущает себя находящимся в центре $Q$ сферы (4.37), на которой однако ему наблюдать нечего, но сфера (4.37) играет важную роль границы шара, в котором наблюдателю $O$ (кажущемуся центру шара) представляются размещёнными все наблюдаемые объекты Вселенной. Таким образом, наблюдаемый нами небесный свод не раскрывает бесконечных глубин Вселенной, а ограничен радиусом (4.38).

Это отнюдь не означает, что бесконечных глубин пространства во Вселенной нет. В конце §27 (второе замечание между формулами (4.14′) и (4.15)) было показано, что в бесконечном трёхмерном пространстве псевдоевклидовой гиперсферы (4.14) проявляющего фронта есть место для бесконечного множества состояний галактик, абсолютно одновременных состоянию настоящего времени нашей Галактики, при том что расстояния между этими состояниями могут быть сколь угодно большими. Этим вполне удовлетворяется наше традиционное философское представление о бесконечности Вселенной в пространстве и бесконечности числа галактик во Вселенной. Однако воспринимать зрительно бесконечность расстояний в пространстве нам не дано потому, что существует Край Вселенной (4.19), который в системе отсчёта любой галактики ограничивает область видимости во Вселенной сферой (4.37), заслуживающей названия **космологического горизонта**. А воспринимать бесконечность числа галактик мы не можем по другой причине, о которой речь пойдёт ниже.

Значение (4.38) противоречит общепринятым в научной литературе оценкам радиуса космологического горизонта. Например, в статье [65, с. 100] сказано: «Ограниченность эволюции во времени приводит к понятию возраста Вселенной... от сингулярности до современной эпохи прошло время $t_0 \approx 13 \cdot 10^9$ лет. Конечность времени, протекшего с момента сингулярности, приводит к существованию так называемого космологического горизонта (или просто горизонта) во Вселенной. Действительно, любые сигналы, распространяющиеся с предельной скоростью, равной скорости света, успевают прийти к наблюдателю к моменту времени $t_0$ с конечного расстояния. Максимальное расстояние (расстояние до горизонта) определяется тем, что сигнал был испущен при $t = 0$… Наряду с возрастом теория рассматривает характерный размер, по порядку величины совпадающий с $ct_0$, который определяет область пространства, принципиально доступную наблюдениям к моменту $t_0$». То, что радиус космологического горизонта определён здесь *приблизительно*, как «по порядку величины совпадающий с $ct_0$», можно отнести на счёт математических сложностей космологических моделей Вселенной в искривлённом псевдоримановом четырёхмерном пространстве. Однако на предыдущей странице [65, с. 99] сказано, что «на основании всех имеющихся сейчас наблюдательных и теоретических сведений полагают, что $\Omega_0$ (см. (4.5) в начале § 27 — А.С.) весьма близок к 1, так что $k \approx 0$», где $k$ — кривизна пространства. Но четырёхмерное псевдориманово пространство с нулевой кривизной есть линейное псевдоевклидово пространство Минковского. И именно для пространства Минковского дан в статье [65] рис. 3, иллюстрирующий (с понижением размерности) цитированное высказывание о космологическом горизонте. Тот рис. 3 из [65] воспроизводим здесь как рис. 4.3. На этом рисунке точка сингулярности Вселенной отмечена буквой $O$, а в виде конуса, исходящего из $O$ как из вершины, изображена верхняя полость изотропного гиперконуса, названная нами выше Краем Вселенной. Окружность, помеченная надписью “современный горизонт”, изображает, очевидно, собственно евклидову сферу, по которой Край Вселенной пересекается с гиперплоскостью, псевдоортогональной к мировой линии земного наблюдателя и отделённой от состояния сингулярности промежутком времени $t_0$ — возрастом Вселенной. Такая гиперплоскость действительно должна пересекаться с Краем Вселенной по сфере радиуса $ct_0$, да только точки той сферы не принадлежат изотропному гиперконусу, имеющему своей вершиной земного наблюдателя, и потому не могут принадлежать горизонту видимости во Вселенной. Странно, что на рис. 4.3, воспроизводящем рис. 3 из статьи [65], и в словесном описании изображённой на рисунке ситуации, игнорируется тот общепризнанный факт, что земной наблюдатель может получать электромагнитные сигналы от окружающего мира только по изотропным, сходящимся в точке наблюдения. В общем рассуждения о горизонте видимости во Вселенной проведены в статье [65] с грубой упрощённостью, свойственной классической картине мира, о чём свидетельствует и размещение объекта вне горизонта во внешней по отношению к Краю Вселенной области.

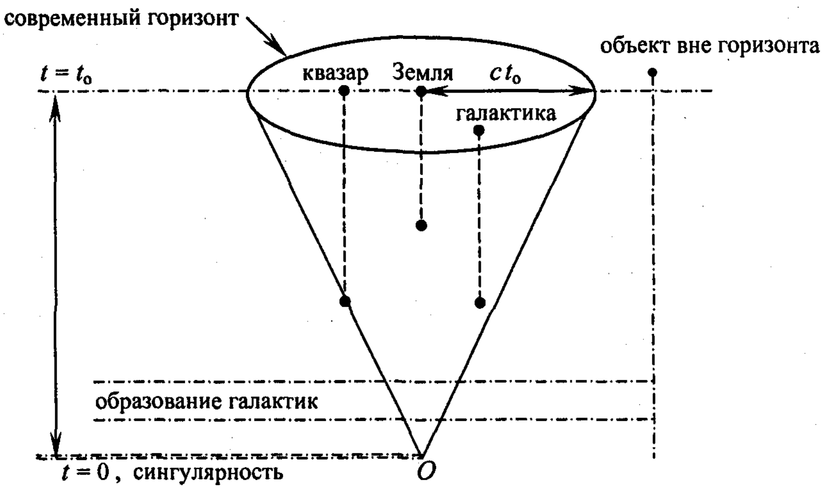


Рис. 4.3

Из существования космологического горизонта делается вывод, что в пространстве, ограниченном горизонтом, может наблюдаться лишь конечное число галактик. Так, в книге [63, с. 47] сказано: «Вселенная начала расширяться около 13 миллиардов лет назад. Значит во Вселенной не может быть объектов, более старых, чем 13 миллиардов лет, не может быть источников, которые светят дольше 13 миллиардов лет. Это обстоятельство ведёт к важнейшему следствию — к наличию горизонта видимости во Вселенной... Свет, вышедший из какого-либо источника даже вскоре после начала расширения мира, успеет пройти лишь конечное расстояние во

Вселенной — около 13 миллиардов световых лет... Точки пространства Вселенной, лежащие от нас на этом расстоянии, называют горизонтом видимости. Области Вселенной, лежащие за горизонтом, сегодня принципиально ненаблюдаемы. Мы не можем увидеть более далёкие галактики... свет от галактик из-за горизонта просто не успел до нас дойти... Таким образом, мы можем видеть только конечное число звёзд и галактик во Вселенной. До создания теории расширяющейся Вселенной попытки рассмотрения бесконечного пространства, равномерно в среднем заполненного звёздами, наталкивались на любопытный парадокс... В этом случае всё ночное небо должно сиять, как поверхность Солнца и звёзд. Парадокс получил название фотометрического... После создания теории расширяющейся Вселенной парадокс разрешился сам собой. В расширяющейся Вселенной для каждого наблюдателя есть горизонт видимости. Поэтому он видит конечное число звёзд, весьма редко разбросанных в пространстве. Наш взор, как правило, скользит мимо них вплоть до горизонта, не упираясь ни в одну звезду. Поэтому ночное небо между звёздами — тёмное».

Но по смыслу модели Вселенной в псевдоевклидовом пространстве Минковского существование космологического горизонта само по себе не налагает ограничения на число галактик, доступных наблюдениям, как отмечено в конце § 27 (во втором замечании между формулами (4.14′) и (4.15)). Ограничение обусловлено другим обстоятельством, которое упомянуто в приведённой выше цитате из [63, с. 47] в качестве добавления: «К тому же жизнь звёзд ограничена. Когда мы наблюдаем области вблизи горизонта, то... тогда ещё не было отдельных звёзд, и поэтому наш взор не может упереться в поверхность какой-нибудь звезды».

Решающее влияние на наблюдаемую картину Вселенной оказывает именно тот факт, что звёзды рождаются в галактиках, а образование галактик началось по оценкам современной космологии в эпоху около

$$T_g \approx 0{,}3 \cdot 10^9 \text{ лет} \tag{4.40}$$

**после сингулярности**. Если бы мировые линии всех галактик начинались в самóй точке $S$ сингулярности, то каждая из них при пересечении с изотропным гиперконусом (4.28) посылала бы наблюдателю $O$ излучение. И так как все мировые линии заключены во внутренней области (4.19′) изотропного гиперконуса (4.19) Края Вселенной, то наблюдатель видел бы в ограниченном сферой (4.37) объёме шара наблюдаемого трёхмерного пространства множество (скорее всего бесконечное) светящихся состояний галактик. Такая ситуация превзошла бы своей нелепостью классический фотометрический парадокс, описанный в начале § 26, поскольку там бесконечное множество звёзд представлялось размещённым в бесконечном трёхмерном пространстве, а не в ограниченной его части.

Промежуток $T_g$ (4.40) абсолютного времени Вселенной в среднем составляет от нынешнего возраста (4.3) Вселенной $T \approx (10 \div 20) \cdot 10^9$ лет относительную часть

$$\gamma_g = T_g / T \approx 1/45 . \qquad (4.40')$$

Конечно, галактики скорей всего зародились не строго одновременно, а на протяжении некоторого интервала абсолютного времени Вселенной, т.е. в некотором промежутке, ограниченном псевдоевклидовыми гиперсферами (4.16) при значениях $\gamma$ в окрестности $\gamma_g$ (4.40'), но в качестве вполне приемлемого упрощения для наших целей удобно будет оперировать с усреднённой псевдоевклидовой гиперсферой

$$w = -L + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + (\gamma_g L)^2} \qquad (4.41)$$

радиуса

$$(iL)\gamma_g = (ic)T\gamma_g \approx iL/45 \qquad (4.41')$$

и называть гиперсферу (4.41) **фронтом зарождения галактик**. Фронт зарождения галактик пересекается с изотропным гиперконусом (4.28) наблюдателя $O$ по собственно евклидовой сфере (4.31) при $\gamma = \gamma_g$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{L}{2}(1 - \gamma_g^2), \qquad (4.42)$$

радиус

$$R_g = \frac{L}{2}(1 - \gamma_g^2) \qquad (4.43)$$

которой в нашу эпоху равен примерно

$$R_g \approx \frac{L}{2}[1 - (1/45)^2] = 0{,}4998\, L . \qquad (4.43')$$

Назовём собственно евклидову сферу (4.42) **горизонтом наблюдаемости зарождения галактик**, или короче — горизонтом зарождения галактик. Сфера (4.42) принадлежит всеми своими точками и центром $Q_g$ гиперплоскости

$$w = -\frac{L}{2}(1 - \gamma_g^2) = w_g , \qquad (4.44)$$

псевдоортогональной к оси *SO* и удалённой от точки *O* в прошлое на расстояние (см. (4.33'))

$$OQ_g = (ic)t_g = iw_g = -\frac{iL}{2}(1 - \gamma_g^2), \qquad (4.45)$$

а от точки $S$ сингулярности Вселенной на расстояние

$$SQ_g = OQ_g - OS = -\frac{iL}{2}(1 - \gamma_g^2) - (-iL) = \frac{iL}{2}(1 + \gamma_g^2) . \qquad (4.45')$$

Если попытаться изобразить радиус $R_g$ на рисунке типа 4.2, то его отличие от радиусов $QU$ и $QV$ космологического горизонта не будет заметно. Также не будет заметно расстояние, отделяющее точку $Q_g$ от точки $Q$. Но на рис. 4.2 заметно как различие отрезков $OQ_{1/4} < OQ$, так и отличие длины радиуса (4.35)

$$R_{1/4} = \frac{L}{2}[1 - (1/4)^2] = 0{,}46875\, L$$

сферы (4.34), соответствующей $\gamma = 1/4$, от радиуса $|QV| = L/2$. Нетрудно представить себе, что как внутри собственно евклидова шара радиуса (4.35) может находиться лишь конечное число наблюдаемых состояний галактик старше возраста $\gamma T = T/4$, так внутри собственно евклидова шара, ограниченного сферой (4.42) горизонта наблюдаемости галактик с радиусом (4.43′), (4.43) находится лишь конечное число галактик, вообще доступных наблюдению из точки $O$, поскольку в более раннюю эпоху галактик ещё не было. Так как звёздные источники света зарождаются и остаются в галактиках, а число доступных наблюдениям галактик ограничено, то в подавляющем большинстве возможных направлений луч зрения наблюдателя не встречается с галактиками и звёздами, и в таких условиях галактики, особенно сверхудалённые, создают на сетчатке глаза (или на других приёмниках света) настолько малую освещенность, что она может оставаться незамеченной. А лучи зрения, не сталкивающиеся с галактиками, упираются во "тьму внешнюю" за Краем (4.19) Вселенной.

Собственно евклидовым сферам (4.31) меньших радиусов (4.32) $R_\gamma$, чем радиус $R_g$ (4.43′), принадлежат состояния галактик, относящиеся к более поздним эпохам $\gamma > \gamma_g$, чем эпоха (4.40), (4.40′) зарождения галактик. Таким образом, в принципе до наблюдателя $O$ может доходить электромагнитное излучение от всех тех галактик, расстояние которых от оси $SO$ в эпоху начала их образования было меньше радиуса $R_g$ (4.43′). Число именно этих галактик ограничено, но нет оснований считать, что на бóльших, чем $R_g$, расстояниях от оси $SO$ галактики в эпоху $\gamma_g$ не образовывались. Вот только излучение от тех галактик не может быть воспринято наблюдателем $O$, поскольку их мировые линии, хоть и проявленные уже, принадлежат всеми своими точками недоступной наблюдению внешней области (3.241′) изотропного гиперконуса (3.238) с вершиной в точке $O$.

По мере увеличения радиуса $R_h$ (4.38) космологического горизонта с течением времени (в ходе мирового проявляющего процесса) увеличивается и радиус $R_g$ (4.43′) собственно евклидовой сферы, на которой находятся доступные наблюдениям начальные состояния галактик. Увеличение $R_g$ обусловлено, во-первых, увеличением радиуса $iL$ (4.9) мирового проявляющего фронта, а во-вторых, тем, что значение коэффициента (4.40′) $\gamma_g$, представляющего собой **отношение** времени (4.40) $T_g \approx 0{,}3 \cdot 10^9$ лет начала образования галактик к возрасту $T$ Вселенной уменьшается с увеличением $T$. Вторая из этих причин ответственна за то, что не только абсолютная величина радиуса $R_g$, но и **отношение**

$$R_g / R_h = \frac{L}{2}(1 - \gamma_g^2) : \frac{L}{2} = (1 - \gamma_g^2) \qquad (4.46)$$

**увеличивается** с течением времени, т. е. **радиус $R_g$ горизонта наблюдаемости галактик растёт относительно быстрей, чем радиус $R_h$ космо-**

**логического горизонта.** Радиусом $R_g$ определяется гиперконус (не изотропный) с вершиной в точке $S$, все образующие которого наклонены к оси $SO$ на угол $i\varphi_g$, удовлетворяющий условию

$$sin\,|i\varphi_g| = |R_g/(i\gamma_g L)| = \left|\frac{L}{2}(1-\gamma_g^2):(i\gamma_g L)\right| = i\,\frac{1-\gamma_g^2}{2\gamma_g}. \qquad (4.47)$$

Угол $|i\varphi_g|$, определённый соотношением (4.47), уместно назвать угловым радиусом гиперконуса наблюдаемости галактик. Мировые линии галактик (которые мы считаем прямыми в первом приближении), наклонённые к прямой $SO$ на углы, превосходящие $i\varphi_g$, не доступны наблюдению из точки $O$, поскольку они находятся за горизонтом наблюдаемости галактик. Но так как с течением времени (увеличением возраста Вселенной $T = L/c$) значения коэффициента $\gamma_g$ уменьшаются, то увеличивается абсолютная величина значений $sin\,(i\varphi_g)$, и следовательно увеличивается абсолютная величина углового радиуса $i\varphi_g$ гиперконуса, внутри которого находятся доступные наблюдению из точки $O$ начальные состояния зарождающихся галактик. Для нынешнего значения коэффициента (4.40′) $\gamma_g$ находим

$$|i\varphi_g| \approx i\cdot 3{,}81\,. \qquad (4.47')$$

Угол (4.47′) в отображении псевдоевклидовой плоскости на собственно евклидову плоскость рис.4.2 представляется практически неотличимым от угла $OSU$ (или $OSV$), потому что радиус $R_g$ (4.43′) горизонта (4.42) зарождения галактик очень мало отличается от радиуса (4.38) $R_h = L/2$ космологического горизонта (4.37). Однако в действительности в псевдоевклидовом пространстве Минковского угол между изотропной $SU$ (или $SV$) и прямой $SO$ бесконечно велик и охватывает бесконечное множество таких углов, как (4.47′). Это значит, что в представляющемся нам очень узком (в отображении на рис. 4.2) "зазоре" между гиперконусом наблюдаемости галактик и изотропным гиперконусом (4.19) Края Вселенной может разместиться бесконечное множество мировых линий галактик, по сравнению с которым конечное число доступных нашему наблюдению галактик лишь "капля в море". И если мы могли в своём неведении отождествлять множество принципиально доступных нашему наблюдению галактик со Вселенной, то теперь пришлось бы признать существование бесконечного множества таких "вселенных". Но чтобы избежать столь некорректной терминологии, мы будем говорить о множестве горизонтов наблюдаемости зарождения галактик как более удобном синониме множества гиперконусов наблюдаемости. Будем также пользоваться двумя равнозначными сокращениями этого термина: горизонт зарождения галактик и горизонт наблюдаемости галактик — сообразно тому, какое из них окажется более выразительным в определённом контексте.

Прежде всего отметим, что горизонт наблюдаемости галактик расширяется по мере течения абсолютного времени, т. е. с увеличением возраста $T$ Вселенной. Ведь эпоха (4.40) зарождения галактик имеет неизменное значение $T_g \approx 0{,}3 \cdot 10^9$ лет, и потому по мере возрастания $T$ уменьшается коэффициент $\gamma_g$ (4.40′). Это ведёт к увеличению радиуса горизонта зарождения (наблюдаемости) галактик как в линейном выражении (4.43) $R_g$, так и в угловом выражении $i\varphi_g$ через посредство равенства (4.47). Когда возраст Вселенной увеличится в $\lambda$ раз по сравнению с нынешним значением $T$

$$T' = \lambda T, \qquad iL' = icT' = i\lambda L, \tag{4.48}$$

то во столько же раз уменьшится коэффициент $\gamma_g$

$$\gamma_g' = T_g / T' = T_g / (\lambda T) = \gamma_g / \lambda,$$

и радиус $R_g$ (4.43) достигнет значения

$$R_g' = \frac{L'}{2}[1 - (\gamma_g/\lambda)^2] = \frac{\lambda L}{2} \cdot \frac{\lambda^2 - \lambda_g^2}{\lambda^2} = \frac{L}{2} \cdot \frac{\lambda^2 - \lambda_g^2}{\lambda}.$$

Отношение радиусов

$$\frac{R_g'}{R_g} = \frac{\lambda^2 - \lambda_g^2}{\lambda(1 - \lambda_g^2)} \approx \lambda \tag{4.49}$$

увеличивается приблизительно пропорционально возрасту (4.48) Вселенной и во столько же раз увеличивается значение $sin|i\varphi_g|$ (4.47).

Например, при увеличении возраста Вселенной в $\lambda = \sqrt[3]{2} = 1{,}26$ раз во столько же раз увеличится радиус $R_g$ (4.43) и $sin|i\varphi_g|$. Тогда угол $i\varphi_g$ (4.47′) достигнет значения

$$i\varphi_g' \approx i \cdot 4{,}04, \tag{4.50}$$

а объём шара, ограниченного собственно евклидовой сферой (4.42) горизонт наблюдаемости (зарождения) галактик увеличится вдвое и вдвое возрастёт число галактик, доступных наблюдению из нашей Галактики.

Это увеличение числа наблюдаемых галактик объясняется при грубоватом подходе расширением космологического горизонта — “галактики выходят из-за горизонта”. Но принципиальная тонкость заключается в уточнении, из-за **какого** горизонта выходят галактики. С точки зрения численных значений различие радиусов $R_h$ (4.38) и $R_g$ (4.43) невелико:
для $\lambda = 1$, $\gamma_g = 1/45$, $R_h = 0{,}5L$, $R_g = 0{,}49975L$, $R_h - R_g = 0{,}00025L$;
для $\lambda = \sqrt[3]{2}$, $\gamma_g' = 1/56{,}7$, $R_h' = 0{,}5L' = 0{,}62996L$, $R_g' = 0{,}62976L$,

$$R_h' - R_g' = 0{,}00020L.$$

При этом радиус $R_g'$ превосходит радиус $R_g$ в 1,25952 раз, что близко к $\sqrt[3]{2}$ ($1{,}25952^3 = 1{,}9984$). Здесь речь идёт о тонкостях, неуловимых в астрономических наблюдениях, но легко учитываемых в теоретических соотношениях, которые показывают, что галактики на горизонте зарождения с радиусом $R'_g$, соответствующим возрасту Вселенной $T' = \sqrt[3]{2}\,T$, действительно вышли за пределы космологического горизонта $R_h = 0{,}5\,L$ для возраста $T$, но они не вышли за пределы космологического горизонта $R'_h$ для возраста $T'$. И это принципиально важно, так как за пределами космологического горизонта каждой эпохи нечего наблюдать по причине отсутствия мировых линий за Краем Вселенной (4.19). И очень важно, что "узкому зазору" $R_h - R_g = 0{,}00025\,L$ между радиусами в эпоху $T$ соответствует бесконечно большой диапазон углов от $i \cdot 3{,}81$ (4.47′) до $i\infty$, а в эпоху $T' = \sqrt[3]{2}\,T$ зазору $R'_h - R'_g = 0{,}00020\,L$ соответствует бесконечно большой диапазон углов от $i \cdot 4{,}04$ (4.50) до $i\infty$. Нижние границы этих **угловых** диапазонов различаются весьма чётко, и потому выражение условий наблюдаемости галактик в терминах угловых радиусов (4.47′) и (4.50) гиперконусов даёт наиболее ясное представление о том, что мы можем видеть во Вселенной. И выясняется, что **более точно и принципиально правильно** будет говорить об увеличении числа наблюдаемых галактик с течением времени за счёт выхода их из-за **горизонта (4.42) наблюдаемости зарождения галактик**, а не из-за космологического горизонта (4.37).

До наступления эпохи (4.40), (4.40′) $\gamma_g$ зарождения галактик имеющееся во Вселенной вещество находилось в рассеянном состоянии и его излучение не обладало интенсивностью, сравнимой с излучением галактик и звёзд. Это излучение приходит к нам не только из областей внутри шара с радиусом (4.43), (4.43′), но и с более удалённых расстояний $R > R_g$ в наблюдаемом пространстве. И так как мировая линия, образующая с мировой линией $SO$ нашей Галактики угол $i\varphi$, воспринимается нами в виде материальной точки, движущейся со скоростью

$$v = (ic) \cdot tg(i\varphi) = -c \cdot th\,\varphi$$

(см. (4.20)), что вызывает доплеровское уменьшение частоты $\omega$ удаляющегося источника по закону

$$\omega' = \omega e^{-|\varphi|} \qquad (4.51)$$

(см. [50, с. 196]), то за пределами гиперконуса наблюдаемости с угловым радиусом $|i\varphi_g| \approx i \cdot 3{,}81$ (см. (4.47), (4.47′)) частота излучения воспринимается нами уменьшенной более чем в $e^{|\varphi|} = e^{3{,}81} = 45$ раз, так что свет, излучённый в зелёной области спектра с длиной волны 500 нм, регистрируется нами как инфракрасное излучении с длиной волны 22500 нм.

Фотоны от наиболее близких к сингулярности эпох, меньше чем $10^{12} \div 10^{13}$ секунд, т. е. $3 \cdot 10^4 \div 3 \cdot 10^5$ лет, не доходят до нас потому, что они полностью поглощались ионизованной плазмой, и лишь после эпохи рекомбинации $10^{12} \div 10^{13}$ секунд излучение доходит до нас, практически не взаимодействуя с нейтральными атомами. Это так называемое **реликтовое излучение**, максимум интенсивности которого регистрируется нами в длинах волн около 0,1 см [9, с. 53]. Если отнести это излучение к эпохе $T_r \approx 3{\cdot}10^5$ лет ($\gamma_r = T_r / T \approx 2{,}3 \cdot 10^{-5}$), то наибольший угловой радиус гиперконуса его наблюдаемости равен $i\varphi_r = i \cdot 10{,}68$, что соответствует значению коэффициента $e^{|\varphi|} = 43478$, а это значит, что мы воспринимаем в микроволновом диапазоне радиоволн, приходящих с наиболее удалённых расстояний, ультрафиолетовое излучение, имеющее длину волны в среднем 23 нм.

Обратим внимание на то, что реликтовое излучение позволяет значительно расширить наш кругозор, понимаемый как гиперконус наблюдаемых объектов. Угловой радиус $i\varphi_r = i \cdot 10{,}68$, соответствующий коэффициенту $\gamma_r = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ эпохи рекомбинации, превосходит угловой радиус $i\varphi_g$ (4.47′) гиперконуса наблюдаемости галактик в 2,8 раз. Если астрономические наблюдения не дают нам информацию о галактиках, мировые линии которых образуют с нашей мировой линией *SO* угол $i\varphi$, превосходящий $i \cdot 3{,}81$, то и реликтовое излучение тоже ничего не сообщает о таких галактиках, поскольку приходит из областей, лежащих за пределами сферы (4.42) горизонта наблюдаемости зарождения галактик. Но реликтовое излучение свидетельствует, что за горизонтом (4.42), вернее между горизонтами (4.42) и (4.37) есть излучающая материя, и позволяет нам высказать весьма вероятную гипотезу о существовании галактик в гиперконусе за пределами углового радиуса $i\varphi_g = i \cdot 3{,}81$. Бесспорные доказательства существования таких галактик мы сможем получать по мере того как с течением времени будет возрастать угол $i\varphi_g$. Но современного значения $i\varphi_r = i \cdot 10{,}68$ угловой радиус гиперконуса наблюдаемости галактик мог бы достигнуть лишь тогда, когда возраст Вселенной превзойдёт на три порядка современное значение $T$.

Полученные здесь результаты позволяют по новому подойти к трактовке проблемы скрытой массы Вселенной. Как показано выше, увеличение углового радиуса гиперконуса наблюдаемости галактик всего лишь на 6% от значения (4.47′) до значения (4.50) приведёт к удвоению числа наблюдаемых галактик. Значит в относительно малой окрестности нынешнего гиперконуса наблюдаемости галактик от нас скрыта, так сказать, "вторая вселенная" (если отождествлять со вселенной то, что мы можем сейчас видеть в ней). Это ближайшее окружение светящейся, хотя и не доступной нашему восприятию материи, не может не внести существенного вклада в гравитационное поле в наблюдаемой нами области Вселенной, порождая эффект присутствия якобы в ней само́й ненаблюдаемой массы.

Принятое в литературе значение радиуса космологического горизонта как равное $L = cT$ в действительности будет достигнуто при удвоении нынешнего возраста Вселенной. Тогда уменьшится в два раза значение коэффициента $\gamma_g$ (4.40′) и увеличится вдвое (согласно (4.49)) радиус горизонта наблюдаемости зарождения галактик, что приведёт к 8-кратному (по сравнению с нынешним) увеличению числа наблюдаемых галактик. Если это полное число галактик не учитывается, а средняя плотность светящейся материи в объёме шара с радиусом $L = cT$ в трёхмерном наблюдаемом пространстве определяется только по числу галактик, доступных наблюдению в нынешнюю эпоху $T$, то тем самым значение плотности оказывается заниженным в 8 раз.

Кроме того, выяснение ограниченности радиуса космологического горизонта значением (4.38) $R_h = L/2 = cT/2$ вместо принятого в литературе значения $cT$ открывает новую возможность осмысления закона Хаббла.

## § 29. АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ХАББЛА

Закон Хаббла (4.1)

$$v = H \cdot r \qquad (4.52)$$

выражает наблюдаемое явление “разбегания” галактик, давшее повод говорить о расширении Вселенной. Это явление получает наглядное и разностороннее объяснение в модели мира по Минковскому. Прежде всего, материальный объект галактика в модели Минковского понимается как мировая линия, а наблюдаемое небесное светило (тело), названное галактикой, представляет собой точку этой мировой линии. В искривлённом псевдоримановом пространстве, с которым изначально имеет дело космология, в принципе нет прямых линий, но они есть в пространстве Минковского. Этим не исключается, что мировые линии галактик могут быть искривлёнными, но в первом приближении для выяснения принципиальных черт модели Вселенной в пространстве Минковского мы считаем мировые линии галактик прямыми, радиально расходящимися от точки $S$ сингулярности Вселенной. Значение того обстоятельства, что начало формирования галактик приходится на эпоху $T_g \approx 0{,}3 \cdot 10^9$ лет после сингулярности (см. (4.40)), подробно проанализировано в § 28 в связи с понятием горизонта (4.42) наблюдаемости зарождения галактик. Согласно развиваемой здесь модели граничные точки, отделяющие проявленную часть каждой мировой линии от непроявленной области пространства, в которой мировые линии ещё не сформировались, имеют физический смысл абсолютного настоящего момента времени и располагаются на псевдоевклидовой гиперсфере (4.14) проявляющего фронта (см. конец § 27)

$$w = -L + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + L^2} \qquad (4.53)$$

радиуса (4.9)

$$iL = (ic)T, \qquad (4.53')$$

где $T$ — возраст Вселенной.

Если мировые линии галактик образуют угол $i\varphi$, то они пересекают гиперсферу (4.53) проявляющего фронта в точках, разделённых расстоянием

$$l = (iL)(i\varphi) = -L\varphi = -cT\varphi, \qquad (4.54)$$

которое измеряется по дуге псевдоевклидовой окружности радиуса (4.53′), принадлежащей гиперсфере (4.53). На рис. 4.4 такие мировые линии $SO$ и $SA_O$ рассматриваются в плоскости $OWX$ псевдоортонормированной системы координат $OWXYZ$, а длина $l$ в (4.54) есть длина дуги $\widetilde{OA_O}$ (см. (4.26) в § 27) псевдоевклидовой окружности (4.14′)

$$w = -L + \sqrt{x^2 + L^2}\ . \qquad (4.55)$$

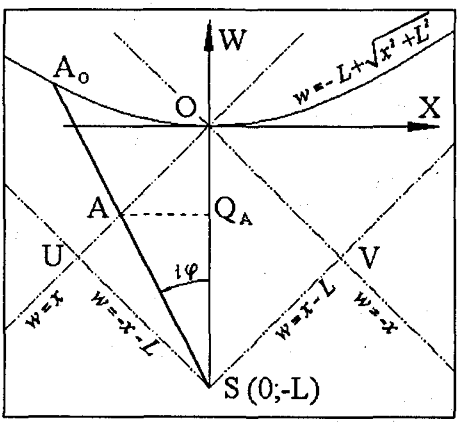


Рис. 4.4

Из соотношения (4.54) следует

$$i\varphi = l/iL = l/icT \quad \Longleftrightarrow \quad (ic)(i\varphi) = l/T. \qquad (4.56)$$

В формуле (4.56) усматривается сходство с законом Хаббла (4.52), ибо $l$ представляет расстояние между галактиками, правда в смысле (4.26), а не в смысле (4.22), (4.22′), подразумеваемом в астрономических наблюдениях и в законе Хаббла, причём множитель $1/T$ при расстоянии $l$ имеет такой же смысл

$$H \approx 1/T, \qquad (4.57)$$

какой приписывается (приблизительно) коэффициенту $H$ Хаббла в формуле (4.1), (4.52).

Главное различие между (4.52) и (4.56) заключается в том, что в левой части равенства (4.56) угол $i\varphi$ не находится под знаком тангенса, что требовалось бы для истолкования её в смысле $(ic)\cdot \mathrm{tg}\,(i\varphi)$ как скорости $v$

согласно (4.20), однако численное различие этих двух выражений невелико в диапазоне значений угла $i\varphi$

$$0 \le |i\varphi| \le i, \qquad (4.58)$$

поскольку для таких углов тангенс изменяется в пределах

$$0 \le tg|i\varphi| \le i \cdot 0{,}7616. \qquad (4.58')$$

Диапазон (4.58) важен потому, что при общепринятом значении радиуса космологического горизонта $cT = L$ отношение (4.56) $l / iL = L / iL = -i$ следовало бы понимать как ограничение, налагаемое на доступные наблюдению галактики. Отметим, что в таком случае верхняя граница $i$ диапазона (4.58) почти в 4 раза меньше значения $i \cdot 3{,}81$ углового радиуса (4.47′) гиперконуса наблюдаемости галактик. Различие верхних границ $i$ и $i \cdot 0{,}7616$ в диапазонах (4.58) и (4.58′) с лихвой перекрывается неопределённостью современных оценок (4.2) коэффициента Хаббла $H$ в законе (4.1). *В книге [60] на этот счёт сказано:* «Коэффициент пропорциональности носит название постоянной Хаббла и согласно современным измерениям равен

$$H = (50 \div 100)\,\frac{км}{с \cdot Мпс} = (1{,}62 \div 3{,}24) \cdot 10^{-18}\ с^{-1}.$$

Грубо говоря, величина $H^{-1} = (10 \div 20) \cdot 10^{9}$ лет равна возрасту Вселенной, отсчитываемому от момента сингулярности… Остающаяся довольно большая неопределённость в величине $H$ связана с трудностями определения шкалы межгалактических расстояний и едва ли может быть ликвидирована в ближайшее время». Подчеркнём то важное для дальнейшего обстоятельство, что эти оценки имеют двукратный разброс

$$H_{max} / H_{min} = 2. \qquad (4.59)$$

Существенно и то отличие равенства (4.56) от закона Хаббла, что буквой $r$ в законе (4.52) обозначается относительное расстояние от наблюдателя до наблюдаемого состояния другой галактики в смысле (4.22), измеряемое в наблюдаемом трёхмерном пространстве в системе отсчёта наблюдателя. Применительно к рис. 4.4 расстояние $r$ совпадает с абсолютной величиной (4.22′) абсциссы наблюдаемой точки $A$. В формуле же (4.56) буквой $l$ обозначено инвариантное (не зависящее от выбора системы отсчёта и недоступное непосредственному наблюдению) расстояние (4.54) вдоль дуги (4.55) между абсолютно одновременными состояниями галактик. Отличие длины дуги $\widetilde{OA_O}$ от расстояния $|x_A|$ в пределах

$$0 \le |x_A| \le L = cT$$

общепринятого значения радиуса космологического горизонта получим, подставив $|x_A| = L$ в формулу (4.26) из §28.

$$l_{\widetilde{OA_O}} = L \cdot ln\left|\frac{L + \sqrt{L^2 + L^2}}{L}\right| = L \cdot ln\left(1 + \sqrt{2}\right) = 0{,}8814 \cdot L. \qquad (4.60)$$

Таким образом, если в законе Хаббла (4.52) с учётом (4.57) подставить $r = |x_A| = L = cT$, то получим скорость $v = cT/T = c$ удаления галактики, как и должно быть вблизи космологического горизонта. Но значению $x_A = -L$ соответствует длина (4.60) дуги $l = -0{,}8814 \cdot L$ и угол

$$i\varphi = \frac{l}{iL} = \frac{-L \cdot 0{,}8814}{iL} = i \cdot 0{,}8814 .$$

Замена этого угла его тангенсом даст

$$v = (ic) \cdot tg(i \cdot 0{,}8814) = (ic) \cdot tg[i \cdot ln(1+\sqrt{2})] = -c/\sqrt{2} = -0{,}707 \cdot c .$$

Это различие на 30% тоже перекрывается неопределённостью (4.59) значений (4.2) коэффициента Хаббла.

Заметим, что если расстояние от наблюдателя до общепринятой удалённости космологического горизонта отсчитывать по дуге (4.55) $l = L = cT$, то формула (4.56) тоже даст значение скорости света

$$L/T = cT/T = c$$

(с точностью до знака, учитывающего отклонение от $SO$ влево или вправо). Формула (4.56) имеет то достоинство, что в роли коэффициента при расстоянии $l$ выступает величина, в точности равная $1/T$ (в отличие от приближённого равенства (4.57)). К тому же теоретически точный коэффициент $1/T$ определённо не зависит от расстояния до галактики в согласии с той общепринятой убеждённостью, что и «значение $H$ не зависит от расстояния до галактик» [65, с. 92].

В модели Минковского выяснение связи между скоростью удаления галактики и расстоянием до наблюдаемого состояния галактики требует отдать приоритет универсальному равенству (4.20)

$$v = (ic) \cdot tg(i\varphi) = -c \cdot th\,\varphi,$$

выражающему относительную скорость $v$ материальных точек через угол $i\varphi$ между соответствующими мировыми линиями. Вместе с тем, при принятых нами условиях (считать в первом приближении мировые линии галактик прямыми, радиально расходящимися от точки $S$ сингулярности внутри изотропного гиперконуса (4.19) Края Вселенной), углом $i\varphi$ между мировой линией $SO$ нашей Галактики и мировой линий $SA_O$ другой галактики определяется расстояние (в смысле (4.22)) наблюдаемой точки $A$ от прямой $SO$, которое в плоскости $SOA_O$, отнесённой к псевдоортонормированной системе координат $OWX$, (см. рис. 4.4) представляет абсциссу $x_A$ мировой точки $A$. Этим обстоятельством совместно с формулой (4.20) определяется связь между скоростью $v$ удаления наблюдаемого состояния галактики и расстоянием от наблюдателя до этого состояния, т.е. та самая связь, которая составляет содержание закон Хаббла, хотя форма закона в модели Минковского оказывается отличной от общепринятой.

Так как наблюдатель в точке $O$, обозначающей состояние настоящего момента времени нашей Галактики, может воспринять электромагнитное излучение лишь от той точки $A$ мировой линии $SA_O$, в которой $SA_O$ пересекается с изотропной прямой, проходящей через точку $O$, то в плоскости $OWX$ (совпадающей с $SOA_O$), координаты точки $A(w_A; x_A)$ удовлетворяют условию изотропности

$$|w_A| = |x_A| \qquad (4.61)$$

отрезка $OA$, а в силу универсального равенства Минковского (см. (3.224) в начале §23, (3.110) в начале §15) можно записать

$$iw_A = -ic|t_A|, \qquad (4.62)$$

где $t_A$ — промежуток времени, отделяющий наблюдаемое (прошлое) состояние $A$ галактики $SA_O$ от состояния $O$ наблюдателя в системе отсчёта наблюдателя. Псевдоортогональная проекция $Q_A$ точки $A$ на координатную ось $OW$ удалена от точки $O$ на расстояние

$$|OQ_A| = |iw_A| = i\cdot|x_A| = ic|t_A|. \qquad (4.63)$$

Запишем выражение тангенса угла $\angle OSA = i\varphi$ как отношение длин катетов $AQ_A$ и $SQ_A$ (см. (4.9) в §27):

$$tg\,(i\varphi) = \frac{x_A}{|SO| - |OQ_A|} = \frac{x_A}{iL - i\,|x_A|}, \qquad (4.64)$$

что равносильно

$$i\cdot tg\,(i\varphi) = i\cdot i\cdot th\,\varphi = -th\,\varphi = \frac{x_A}{L - |x_A|}. \qquad (4.64')$$

В равенствах (4.64), (4.64′) учитывается согласованность знаков угла $i\varphi$ и абсциссы $x_A$: $x_A < 0$ при $\varphi > 0$. Но так как нас будет в дальнейшем интересовать лишь абсолютная величина удаления $x_A$ наблюдаемого состояния галактики, то удобней пользоваться записью равенства (4.64′) для абсолютных величин:

$$th\,|\varphi| = \frac{|x_A|}{L - |x_A|}. \qquad (4.64'')$$

Из равенства (4.64″) получим выражение расстояния $|x_A|$ через вещественный параметр $\varphi$ угла $\angle OSA = i\varphi$

$$|x_A| = L\cdot\frac{th\,|\varphi|}{1 + th\,|\varphi|}. \qquad (4.65)$$

Заметим, что при $|\varphi| = +\infty$ будет $th\,|\varphi| = 1$ и формула (4.65) подтвердит значение (4.38) радиуса $R_h$ космологического горизонта

$$\lim_{|\varphi|\to\infty} |x_A| = L\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{L}{2} = R_h. \qquad (4.65')$$

Подставив выражение (4.64″) в универсальное равенство (4.20), получим

$$|v| = c\cdot th\,|\varphi| = \frac{c}{L - |x_A|}\cdot|x_A|. \qquad (4.66)$$

Учитывая равенства (4.9) и (4.63), можно записать (4.66) также в виде

$$|v| = \frac{1}{T - |t_A|} \cdot |x_A| . \qquad (4.66')$$

Если теперь ввести обозначение

$$\frac{c}{L - |x_A|} = \frac{1}{T - |t_A|} = J , \qquad (4.67)$$

то равенства (4.66), (4.66′) примут вид

$$|v| = J \cdot |x_A| , \qquad (4.68)$$

имеющий внешнее сходство с законом Хаббла (4.52).

Это сходство представляется на первый взгляд чисто формальным и внешним прежде всего потому, что коэффициент $H$ в (4.52) принято считать не зависящим от расстояния до наблюдаемого состояния галактики, а коэффициент $J$ (4.67) зависит от расстояния $|x_A|$. Больше того, зависимость $J$ от $|x_A|$ приведёт к абсурдному результату, если подставить в (4.67) и (4.66) значения $|x_A|$, близкие к общепринятой оценке радиуса космологического горизонта как $L = cT$:

$$J = \frac{c}{L - |x_A|} \to \infty \qquad \text{при} \qquad |x_A| \to cT ,$$

$$|v| = \frac{c}{L - |x_A|} \cdot |x_A| \to \infty \qquad \text{при} \qquad |x_A| \to cT .$$

В последнем соотношении бесконечно большое значение скорости удаления галактики, наблюдаемой вблизи космологического горизонта, противоречит астрономическим измерениям и теории, не допускающей скоростей тел, превосходящих скорость света (или равных ей).

Однако ситуация радикально меняется, если принять значение радиуса $R_h = L/2$ космологического горизонта, обоснованное выше (см. (4.38), (4.65′)):

$$\lim_{|x_A| \to L/2} J = \frac{c}{L - L/2} = \frac{2c}{L} = \frac{2}{T} . \qquad (4.69)$$

Для галактик же, близких к наблюдателю $O$ ($|x_A| \to 0$, $|t_A| \to 0$), коэффициент $J$ (4.67) стремится к $1/T$ в согласии с общепринятым истолкованием (4.57) постоянной Хаббла. Таким образом, значения коэффициента $J$ заключены между теоретическими границами

$$J_{min} = 1/T < J < 2/T = J_{max} , \qquad J_{max}/J_{min} = 2 , \qquad (4.70)$$

что совпадает с разбросом (4.59) значений (4.2) коэффициента Хаббла.

Это совпадение по меньшей мере позволяет считать пока открытым вопрос о правомерности истолкования коэффициента $H$ Хаббла как коэффициента $J$ (4.67). Мягко говоря, современные данные (4.2) о значениях $H$ не налагают запрета на формулу (4.66) и связанные с ней формулы (4.67), (4.68). Но формулы (4.66) – (4.68) имеют серьёзные преимущества перед формулой (4.52) и убеждённостью в независимости коэффициента $H$ Хаббла от расстояния до галактик.

Немаловажно то, что границы (4.70) значений коэффициента $J$ имеют теоретическое обоснование, и отношение их, равное 2, не зависит от точности астрономических наблюдений. Главное же преимущество формулы (4.66) заключается в том, что она представляет собой модификацию универсального соотношения (4.20). При этом определение тангенса угла $i\varphi$ равенством (4.64), (4.64″) в принципе геометрически справедливо. Возражения против формулы (4.64), (4.64″) могут сводиться лишь к тому, что мировые линии галактик в действительности не являются прямыми, расходящимися радиально от точки $S$ сингулярности, а искривлены, вследствие чего определение угла формулой (4.64) окажется не вполне точным. Однако уже для угла $i\varphi = i \cdot 1{,}6$ значение $tg(i \cdot 1{,}6) = i \cdot 0{,}9217$ отличается меньше чем на 8% от своего предельного значения $i$ ($tg(i\infty) = i$), и возможность столь малой ошибки не является серьёзным основанием для отказа от определения выражением (4.67) коэффициента $J$ в формуле (4.68), аналогичной формуле (4.52) Хаббла.

Подставляя в (4.67) выражение (4.65) для $|x_A|$, получим

$$J = \frac{c}{L - L \cdot \dfrac{th|\varphi|}{1 + th|\varphi|}} = \frac{c}{L} \cdot (1 + th|\varphi|) = \frac{1 + th|\varphi|}{T} . \qquad (4.71)$$

Для $\varphi = 1{,}6$ найдём

$$J_{1,6} = \frac{1 + th\,1{,}6}{T} = \frac{1{,}9217}{T} .$$

Таким образом, уже при значении углового радиуса $i\varphi = i \cdot 1{,}6$ гиперконуса, которое в 2,38 раз меньше радиуса (4.47′) $i\varphi_g = i \cdot 3{,}81$ гиперконуса наблюдаемости галактик, коэффициент $J_{1,6}$ лишь на 4% меньше своей верхней грани $J_{max} = 2 / T$ (см. (4.70)). И это является теоретической закономерностью, а не следствием ошибок в измерении расстояний до галактик, в отличие от общепринятой интерпретации разброса (4.59) значений (4.2) постоянной Хаббла. Отметим, что при $i\varphi = i \cdot 0{,}2$ коэффициент

$$J_{0,2} = \frac{1 + th\,0{,}2}{T} = \frac{1{,}1974}{T}$$

лишь на 20% превосходит $J_{min} = 1/T$, причём этому значению соответствует расстояние $|x_A|$ (4.65)

$$|x_A|_{0,2} = L \cdot \frac{th|0{,}2|}{1 + th|0{,}2|} = L \cdot \frac{0{,}1974}{1{,}1974} = 0{,}165 \cdot L = 0{,}165 \cdot cT.$$

Если закон (4.52) Хаббла воспринимать с позиций классического представления о мире как множестве тел (галактик) в наблюдаемом трёхмерном собственно евклидовом пространстве, то не удастся избежать парадоксального противоречия. Фигурирующая в (4.52) скорость $v$ удаления галактики $A$ направлена по лучу зрения $OA$ наблюдателя $O$ и очевидно не может предопределять значения скорости $v_\perp$ той же галактики в любом из направлений, перпендикулярных к лучу $OA$. Будет ли на таком перпендикулярном направлении справедлив закон (4.52) при том же универсальном значении постоянной Хаббла? Если согласиться с этим, то значение составляющей $v_{\perp}$ скорости галактики $A$ окажется неопределённым, поскольку должно быть различным для различных расстояний до наблюдателя и даже для различных взаимно противоположных направлений на выбранном перпендикуляре к лучу зрения $OA$.

Противоречие непринуждённо устраняется в модели мира Минковского, в которой выясняется (см. § 16), что релятивистский закон (3.118) сложения скоростей

$$v = \frac{u + v'}{1 + \dfrac{u\,v'}{c^2}}$$

расшифровывается как тригонометрическое тождество (3.121)

$$tg\,(i\,\psi + i\,\varphi) = \frac{tg\,(i\psi) + tg\,(i\varphi)}{1 - tg\,(i\psi)\cdot tg\,(i\varphi)}\,,$$

а ключом к шифру служит универсальное соотношение (4.20). Это означает, что в точном и универсальном смысле в природе реализовано не сложение скоростей тел, а сложение углов между мировыми линиями. Соответственно вопрос об универсальности закона (4.68) и справедливости выражений (4.67), (4.71) просто решается в терминах углов.

Но прежде необходимо уточнить: то, что мы называем лучом зрения $OA$ в наблюдаемом трёхмерном пространстве, является изотропным лучом в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве Минковского. Значение углов между изотропными не определено (бесконечно велико), однако в собственно евклидовой гиперплоскости, псевдоортогональной к оси $OW$ (совпадающей в наших рассуждениях с мировой линией $SO$ нашей Галактики) определён обычным для собственно евклидова пространства образом угол $\alpha$ между плоскостью $SOA$ и $SOB$, содержащей какую-нибудь изотропную $OB$. Именно этот угол $\alpha$ и воспринимается в наблюдаемом пространстве как угол между лучами зрения $OA$ и $OB$. В частности, если $\alpha = \pi/2$, то наблюдатель будет воспринимать лучи зрения $OA$ и $OB$ как взаимно перпендикулярные в наблюдаемом собственно евклидовом пространстве.

Все галактики, мировые линии которых наклонены к мировой линии $SO$ нашей Галактики на угол $i\varphi$, воспринимаются нами как удалённые (относительно нашей системы отсчёта) на расстояние $|x_A|$, определённое формулой (4.65). И обратно, у всех галактик, наблюдаемых из точки $O$ как удалённые на расстояние $|x_A|$, мировые линии образуют с $SO$ угол $i\varphi$, определённый формулой (4.64″). Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между расстоянием $|x_A|$ до наблюдаемого состояния галактики и углом $i\varphi$ между мировыми линиями наблюдателя и наблюдаемой галактики. А углом $i\varphi$ определяется скорость $v$ удаления наблюдаемой галактики в соответствии с универсальным соотношением (4.20). Аналогичные рассуждения справедливы для условий наблюдения мировой линии галактики $SA_O$ со стороны любых других наблюдателей. Со всех галактик, мировые линии которых образуют с $SA_O$ угол $i\varphi$, наблюдатели будут воспринимать галактику $SA_O$ как удалённую на расстояние $|x_A|$, определённое формулой (4.65), и имеющую скорость $v$ согласно (4.20). Поэтому формула (4.66) обладает универсальной справедливостью.

Из соотношения (4.66) можно получить в добавление к (4.67) и (4.68) ещё одну интересную формулу, выражающую возраст $T$ Вселенной через наблюдаемые величины $|v|$ и $|x_A|$. Решим уравнение (4.66) относительно $L$:

$$L = |x_A|\cdot(c/|v| + 1)\,.$$

Отсюда с учётом равенства (4.9) $L = cT$ найдём

$$T = |x_A|\cdot\left(\frac{1}{|v|} + \frac{1}{c}\right). \tag{4.72}$$

Скорость $|v|$ удаления близкой галактики может быть измерена с высокой точностью по смещению линий в её спектре, и потому точность определения возраста $T$ Вселенной по формуле (4.72) зависит в основном от точности оценки расстояния $|x_A|$ до наблюдаемого состояния галактики. По-видимому, с наилучшей точностью может быть измерено расстояние $|x_A|$ опять же до близких галактик. Но при малых значениях $|x_A|$ скорость $|v|$ мала, а обратная ей величина $1/|v|$ достаточно велика, чтобы по сравнению с ней можно было пренебречь слагаемым $1/c$ в (4.72). Тогда получим $T \approx |x_A|/|v|$, что с учётом (4.68) равносильно

$$T \approx 1/J\,, \qquad \text{т.е.} \qquad J \approx 1/T = J_{min}$$

(см. (4.70)). Замечательно, что для галактик, скорость $|v|$ удаления которых близка к скорости света, именно точностью измерения $|v|$ будет определяться точность близости расстояния $|x_A|$ к радиусу $L/2$ космологического горизонта (см. (4.38), (4.65′)), что обеспечит хорошее согласие с возрастом $T$, определяемым формулой (4.72) для других значений $|x_A|$ и $|v|$:

$$|x_A|\cdot\left(\frac{1}{|v|} + \frac{1}{c}\right) = \frac{L}{2}\cdot\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\right) = \frac{L}{c} = T\,.$$

Конечно, сама формула (4.72) может быть признана точной только в идеальном случае, если мировые линии наблюдаемой галактики и галактики наблюдателя не отличаются существенно от прямых, проходящих через точку $S$ сингулярности Вселенной. Отклонение от идеальных условий приведёт к отличию от реальности значения $T$, даваемого формулой (4.72). Однако в статистическом осреднении результатов множества наблюдений случайные ошибки могут быть учтены, а от систематических ошибок формула (4.72) свободна по логике модели мира Минковского.

Поэтому обнаружение систематических расхождений результатов наблюдений с формулой (4.72) могло бы стать убедительным аргументом против применимости модели Минковского к космологии. И напротив, серьёзным аргументом в пользу модели Минковского может стать обнаружение тенденции превышения значений коэффициента $H$ Хаббла, определённых по наиболее удалённым галактикам, над значениями $H$ для близких галактик. Было бы весьма интересно предпринять пристальное статистическое исследование этого вопроса по имеющимся измерениям. А пока не исключено, что двукратный разброс значений возраста (4.3) Вселенной обусловлен систематической ошибкой, источником которой является вера в независимость коэффициента Хаббла от расстояний до галактик.

Применение модели мира Минковского к проблемам космологии особенно наглядно высвечивает тот факт, что увеличение расстояний между галактиками, названное расширением Вселенной, представляет собой явление, сопутствующее течению абсолютного времени Вселенной, понимаемому как процесс формирования, роста мировых линий. В идеальном случае, если мировые линии галактик — прямые, радиально расходящиеся от точки $S$ сингулярности, расстояние между абсолютно одновременными состояниями галактик, измеренными по дуге псевдоевклидовой окружности радиуса (4.9) $i\,L = i\,c\,T$, принадлежащей проявляющему фронту (4.14), определяется формулой (4.54). В ту эпоху, когда возраст Вселенной составлял половину нынешнего, это расстояние было в 2 раза меньше. Расстояния $l$ (4.54) недоступны измерению в наблюдениях. Но и наблюдаемые расстояния $|x_A|$ между галактиками увеличиваются пропорционально возрасту Вселенной (хотя и не пропорционально углу $i\varphi$), как показывает формула (4.65)

$$|x_A| = c\cdot\frac{th|\varphi|}{1+th|\varphi|}\cdot T.$$

В описанных здесь приложениях модели Минковского к некоторым проблемам космологии не затронута гравитация, традиционно рассматриваемая с позиций общей теории относительности (ОТО) в искривлённом псевдоримановом пространстве. Это не означает, что проблема гравитации не может рассматриваться в линейном псевдоевклидовом пространстве. Однако решению сложной проблемы нелишне предпослать рассмотрение ряда более простых и наглядных геометрических соотношений, на которые до сих пор не обращалось должного внимания. Теория гравитации в пространстве Минковского, названная её авторами релятивистской теорией гравитации (РТГ) в знак того, что в ней полностью сохраняют силу закономерности специальной теории относительности (СТО), выступает в качестве альтернативной эйнштейновской теории. Авторы РТГ считают, что «пространство Минковского… есть фундаментальное пространство, общее для всех физических полей, в том числе и гравитационного… отражает динамические свойства, общие для всех форм материи» [66, с.

10]. Эйнштейновская же теория гравитации обладает тем серьёзным недостатком, что «приняв ОТО, мы должны отказаться... от фундаментального принципа — закона сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля... Но это очень большая потеря, и мы были бы слишком легкомысленны, если без должных экспериментальных оснований согласились бы на неё [66, с. 9]. «... неинерциальные системы отсчёта так же допустимы в теории относительности, как и инерциальные. Именно этот фундаментальный факт и не был ясен Эйнштейну» [66, с. 8]. Сторонники ОТО составляют сейчас подавляющее большинство, но вопрос об истинности той или иной теории не решается большинством голосов, а научная добросовестность требует внимательного отношения к поднятой сторонниками РТГ дискуссии и всестороннего анализа логических следствий нетрадиционного подхода. Даже если применимость модели Минковского, прекрасно оправдывающей себя в сфере действия специальной теории относительности, придётся отвергнуть или ограничить в космологических масштабах, это должно стать ценным отрицательным результатом науки, основанным на тщательных исследованиях, а не на интуитивных предпочтениях при недостатке внимания к альтернативным возможностям. Автор этих строк имеет свою гипотезу о перспективах применения предложенной им в книгах [41], [42], [50] концепции мирового проявляющего фронта к решению проблем гравитации. Проявляющий фронт, будучи в глобальном аспекте псевдоевклидовой гиперсферой, имеет по-видимому локальные отклонения от общей формы, обусловленные механизмами образования мировых линий, и эти локальные искривления могут быть причиной явления, воспринимаемого нами как взаимное притяжение между телами.

## § 30. ГИПОТЕЗА ОБ АНТИВСЕЛЕННОЙ

Хотя представления современной космологии о нестационарной Вселенной имеют своим истоком модели А.А. Фридмана, опирающиеся на общую теорию относительности, в которой гравитация объясняется искривлением четырёхмерного псевдориманова пространства, эта новая теория гравитации в первом приближении может быть сведена к ньютоновской теории. Как «было показано в 1934 г. Э. Милном и В. Маккри... для построения механики движения масс в однородной Вселенной нет необходимости использовать сложнейший математический аппарат теории Эйнштейна!.. для вывода законов движения масс в однородной Вселенной можно воспользоваться теорией Ньютона, а не Эйнштейна» [63, с. 13, 15]. Но при пользовании ньютоновским приближением Вселенная рассматривается в проекции на трёхмерное собственно евклидово пространство, а мировые линии заменяются представлением их в виде материальных точек (тел), размещённых в таком трёхмерном наблюдаемом пространстве.

В этой связи упускается из виду тот важный факт, что основные динамические характеристики материальных объектов: масса, импульс, энергия — являются **векторными** величинами в **четырёхмерном** пространстве, имеющими ненулевые составляющие в направлении четвёртого измерения, воспринимаемого нами в виде промежутков времени (см. (3.212) – (3.214) в конце § 21):

4-вектор массы $\quad \vec{m} = m_0 l^0 = \dfrac{p}{c} e + m f = m_0(-e \cdot \operatorname{sh}\varphi + f \cdot \operatorname{ch}\varphi),$

4-вектор импульса $\quad \vec{\pi} = c\vec{m} = pe + cmf = cm_0(-e \cdot \operatorname{sh}\varphi + f \cdot \operatorname{ch}\varphi),$

4-вектор энергии $\quad \vec{\mathcal{E}} = c^2\vec{m} = pce + c^2 m f = c^2 m_0(-e \cdot \operatorname{sh}\varphi + f \cdot \operatorname{ch}\varphi).$

Наблюдаемому трёхмерному пространству принадлежат только те составляющие динамических 4-векторов (3.212) – (3.214), которые псевдоортогональны к направлению $l^0$ мировой линии наблюдателя и в строгом смысле не являются инвариантными векторами, поскольку зависят от выбора системы отсчёта (через посредство угла $i\varphi$). Эти компоненты 4-векторов $\vec{m}$, $\vec{\pi}$, $\vec{\mathcal{E}}$ имеют одинаковые направления в трёхмерном пространстве, но только одна из них, а именно компонента

$$pe = -e \cdot c m_0 \cdot \operatorname{sh}\varphi \qquad (4.73)$$

4-импульса воспринимается нами в виде векторной величины наблюдаемого импульса в наблюдаемом пространстве, и вот по какой причине. Согласно (3.180) и (3.181) величина (4.73) может быть представлена в виде

$$pe = -e \cdot c m_0 \cdot \operatorname{sh}\varphi = e \cdot c \cdot \frac{m_0 v}{c \cdot \sqrt{1-(v/c)^2}} = e \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot v, \qquad (4.73')$$

где множитель при скорости $v$ материальной точки почти неотличим от постоянного коэффициента. Действительно, даже при очень больших для земных предметов скоростях около 1 км /сек приращение (3.206)

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_0 = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right)$$

массы покоя равно $0{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot m_0$. Поэтому наблюдаемый импульс $pe$ пропорционален наблюдаемому вектору скорости и воспринимается нами как векторная величина в трёхмерном наблюдаемом пространстве. Зависимость же компоненты

$$\frac{p}{c} e = -e \cdot m_0 \cdot \operatorname{sh}\varphi$$

вектора массы $\vec{m}$ от величины и направления скорости $v$ материальной точки практически не заметна, ибо эта компонента хоть и коллинеарна наблюдаемому импульсу $pe$, но в $c$ раз меньше его по модулю. Что касается компоненты

$$pce = -e \cdot c^2 m_0 \cdot \operatorname{sh}\varphi$$

4-вектора энергии $\vec{\mathcal{E}}$, то её зависимость от величины и направления скорости $v$ материальной точки заметить было бы нетрудно, однако для этого необходимо иметь представление о таком проявлении энергетической характеристики тела, которая пропорциональна скорости $v$ его движения и наблюдаемому импульсу $pe$. Между тем само понятие энергии (как **кинетической** энергии) возникло из противопоставления лейбницевой "живой силы" $mv^2$ декартову количеству движения $mv$ (см. статью «Мера движения. — Работа» в [27]). Окончательное выявление истинных соотношений, скрытых за этим противопоставлением, волновавшим физиков и философов в первой половине XVIII века, стало возможным только на основе знаменитых формул Эйнштейна для кинетической энергии (3.205)

$$E_K = c^2(m - m_0) = c^2 \cdot \Delta m \approx m_0 v^2/2$$

и энергии покоя (3.202′) $E_0 = m_0 c^2$, открывших путь к формированию понятий 4-векторов импульса $\vec{\pi}$ и энергии (3.210)

$$\vec{\mathcal{E}} = c\vec{\pi} = m_0 c^2 l^0.$$

Из третьего закона Ньютона (о равенстве модулей и противоположности направлений сил взаимодействия любых двух тел) следует, что эти силы взаимодействия не изменяют суммарного импульса системы взаимодействующих тел. Поэтому по отношению к системе отсчёта, связанной с центром масс $m_1$ и $m_2$ взаимодействующих тел, суммарный импульс

$$p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

равен нулю, что равносильно равенству $p_1 = -p_2$. Это значит, что первое из взаимодействующих тел не может приобрести импульс $p_1 = m_1 v_1$ без того, чтобы второе тело не получило **противоположного** импульса $p_2 = m_2 v_2$ в виде так называемого "явления отдачи", служа "опорой", от которой отталкивается первое тело. При рассмотрении расширения Вселенной **в проекции на трёхмерное наблюдаемое пространство** наблюдаемые импульсы $pe$ галактик, разбегающихся по всем направлениям, имеющимся внутри собственно евклидовой сферы, в совокупности могут нейтрализовать друг друга, так что результирующая сумма всех наблюдаемых импульсов окажется нулевым вектором. Поэтому Вселенная как целостная совокупность всех имеющихся в ней тел сможет оставаться неподвижной по отношению к трёхмерному наблюдаемому пространству, и не будет надобности в какой-либо "опоре" вне Вселенной, воспринимающей противодействие процессу её расширения.

Но при рассмотрении расширяющейся Вселенной с позиций модели мира Минковского как системы проявляющихся (удлиняющихся) мировых линий необходимо учитывать их **инвариантные** динамические характеристики, в первую очередь направленные по касательным к линиям 4-векторы $\vec{m}$, $\vec{\pi}$, $\vec{\mathcal{E}}$. Ограничиваясь в качестве представителя этих векторов 4-импульсом $\vec{\pi}$, мы легко увидим, что не найдётся таких мировых линий, у которых 4-импульсы $\vec{\pi}$ могли бы быть взаимно противоположными и в качестве таковых компенсирующими друг друга, потому что направления $l^0$ любых мировых линий принадлежат внутренней верхней области (4.19′)

$$w > -L + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

изотропного гиперконуса (4.18) с вершиной в точке $S$ сингулярности Вселенной. Все без исключения 4-импульсы, даже изотропные, имеют **отличную от нуля** составляющую в любом направлении, принадлежащем области (4.19′), и эти составляющие при сложении могут только увеличивать суммарный вектор. Нужно также учесть, что псевдоортогональная проекция 4-импульса $\vec{\pi}$ на любое принадлежащее области (4.19′) направление (неизотропное) превосходит модуль проецируемого вектора $\vec{\pi}$. Таким образом, процесс проявления Вселенной характеризуется невообразимо огромным, и может быть даже бесконечным по модулю суммарным 4-вектором импульса в любом направлении проявления. Вот и надо решать вопрос, распространяется ли на **инвариантные** 4-векторы импульса $\vec{\pi}$, характеризующие динамику роста мировых линий, закономерность уравновешивания противоположным 4-импульсом в качестве своеобразной "реакции опоры" проявляющего процесса. Это уже задача иного рода, чем задача искривления мировых линий при их взаимодействии. Опытных данных для решения этой новой для нас задачи пока нет, поскольку вообще не рассматривался процесс проявления мировых линий. Поэтому приходится полагаться пока только на интуицию, а интуиция побуждает принять во внимание следующие соображения. Вся энергия, которую мы можем черпать из природных процессов, имеет своим источником ту связанную с массой так называемую энергию покоя (3.202′) $E_0 = m_0 c^2$, которая представляет собой модуль 4-вектора энергии $\vec{\mathcal{E}}$, имеющего направление роста мировой линии. Без этой энергии не совершался бы проявляющий процесс. Но каким образом может возникнуть эта энергия? Природа в изобилии снабжает нас примерами полярных противоположностей, взаимно друг друга обуславливающих и способных нейтрализовать друг друга: положительные и отрицательные электрические заряды, притяжение и отталкивание, северный и южный магнитные полюсы, элементарные частицы и античастицы. Подобные аналогии склоняют к мысли, что 4-векторы энергии и импульса, обнаруживаемые нами во Вселенной, должны иметь в качестве компенсирующих дополнений если и не индивидуально противоположные 4-векторы, то некую совокупную равнодействующую компенсацию, направленную в **нижнюю** внутреннюю область

$$w < -L - \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4.74)$$

изотропного гиперконуса (4.18) с вершиной в точке $S$ сингулярности.

Очевидно, что "уравновесить", полярно компенсировать процесс проявления Вселенной, совершающийся в верхней внутренней области (4.19′), мог бы не менее масштабный процесс проявления мировых линий в нижней полости (4.74). Такой процесс можно рассматривать как формирование расширяющейся Вселенной, являющейся двойником и антиподом наблюдаемой нами Вселенной. Дадим этому предполагаемому двойнику название **Антивселенная.** На рис. 4.5, представляющем сечение четырёхмерного мира Минковского псевдоевклидовой плоскостью, проходящей через точку $S$ сингулярности Вселенной и мировую линию $SO$ нашей Галактики, мировые линии Антивселенной могут находиться только внутри нижнего сектора.

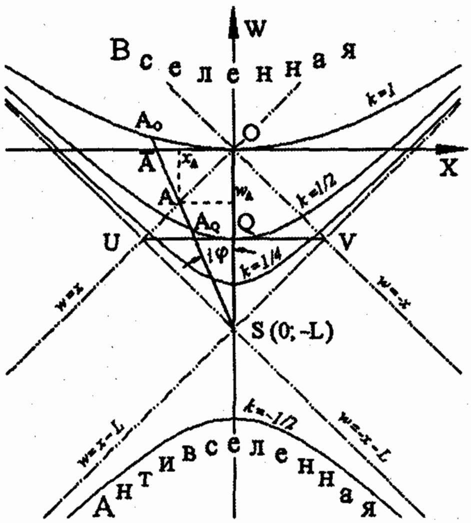


Рис. 4.5

По существу тех соображений, которые приводят к гипотезе об Антивселенной, для неё направления в будущее противоположны направлениям в будущее в нашей Вселенной, но это не означает, что она проявляется в прошлое. Понятия прошлого и будущего имеют физический смысл в связи с процессом проявления мировых линий. К области прошлого принадлежат уже проявленные части мировых линий, а в области будущего мировые линии ещё не сформировались. Связь между Вселенной и Антивселенной по изотропным, т. е. с помощью электромагнитных сигналов в принципе невозможна, потому что ни одна изотропная, проходящая через точки верхней внутренней области (4.19′) нашей Вселенной не проникает в нижнюю внутреннюю область (4.74) Антивселенной, и обратно, изотропные, пересекающие нижнюю внутреннюю область (4.74) Антивселенной, не проникают в нашу Вселенную. Это совершенно ясно видно на плоском сечении, изображённом на рис. 4.5. Для связи с Антивселенной не будут пригодны научно гипотетические и даже фантастические способы мгновенной передачи информации не по изотропным линиям. Ведь здесь потребовалось бы преодолевать не те (пространственно подобные) расстояния, которые отсчитываются в направлениях, псевдоортогональных к мировым линиям, а те (времени подобные), что отсчитываются вдоль мировых линий. При этом пришлось бы не только проникать в прошлое одной Вселенной, но, минуя состояние сингулярности, "догонять и перегонять" проявляющий процесс в противоположной Вселенной. И так как мировых линий нет в состоянии сингулярности Вселенной, то никакая мировая линия в одном из экземпляров Вселенной не может быть продолжением мировой линии из другого экземпляра. Для каждого экземпляра Вселенной состояние $S$ сингулярности служит точкой Начала.

Впрочем, и это представление нуждается в корректировке. Точка $S$ сингулярности выделяется в качестве исходного пункта формирования обеих Вселенных именно тем, что она является вершиной Первичного Изотропного гиперконуса (4.18), выступающего в роли геометрической и физической границы, Края Света, для обоих экземпляров Вселенной. И поскольку теории, имеющиеся в распоряжении науки, применимы лишь к состояниям Вселенной, близким к сингулярности, но неприменимы к самому состоянию сингулярности, позволительно пока высказать предположение о том, что именно Первичный Изотропный гиперконус, а не только точка $S$ его вершины, взятая изолировано, служит зародышем обеих Вселенных и областью существования первичных фотонов, положивших начало образованию элементарных частиц в эпохи, ближайшие к сингулярности.

Дальние перспективы процесса расширения Вселенной ещё не выяснены в науке. Но логически очевидно, что придётся выбирать один из трёх вариантов: 1) расширение будет продолжаться неограниченно; 2) расширение на каком-то этапе остановится и Вселенная перейдёт в вечное состояние стационарности; 3) расширение сменится сжатием. Два первых варианта ведут по существу к необратимой гибели Вселенной. В случае бесконечно продолжающегося расширения небесные тела будут рассеиваться в бесконечном пространстве и взаимодействие между ними будет исчезать вместе со стремлением к нулю средней плотности вещества и энергии. Со вторым вариантом могла бы согласиться классическая наука, рассматривавшая Вселенную именно в стационарном состоянии. Но нам теперь, в отличие от классической науки, понятно, что наблюдаемое расширение Вселенной является следствием и отражением мирового проявляющего процесса, воспринимаемого в виде процесса течения времени. Готовы ли мы согласиться с остановкой течения времени? В третьем варианте видится наилучшее согласие с принципами сохранения, ибо всё, что проявляется в фазе расширения, будет скомпенсировано исчезновением в фазе сжатия, завершающей цикл процессом стирания, расформирования, укорачивания мировых линий, возвращающим Вселенную и проявленную её материю к исходному состоянию сингулярности.

В таком понимании сжатие Вселенной должно означать возвратный ход времени, "свёртывание" и "считывание" в ходе свёртывания всей информации, накопленной в фазе проявляющего расширения. В фазе сжатия Вселенной проявляющий фронт превратится в фронт стирания, расформирования мировых линий, проходящий последовательно в обратном порядке, в сторону уменьшения коэффициента $\gamma$, фронты абсолютной одновременности (4.16)

$$w = -L + \sqrt{x^2+y^2+z^2+(\gamma L)^2} ,$$

что может привести в пределе (при $\gamma = 0$) к вырождению этих гиперсфер (4.16) в верхнюю часть (4.19)

$$w = -L + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Первичного Изотропного гиперконуса с вершиной *S*. Аналогичным образом фронты абсолютной одновременности в Антивселенной, имеющие уравнения

$$w = -L - \sqrt{x^2+y^2+z^2+(\gamma L)^2} , \qquad (4.75)$$

выродятся при $\gamma = 0$ в нижнюю часть

$$w = -L - \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (4.76)$$

Первичного изотропного гиперконуса (4.18) с вершиной в *точке S сингулярности* Вселенной, хотя сохранив свои геометрические параметры, последний, возможно, будет иметь иное физическое содержание: **не зародыш** Вселенной (в обоих её экземплярах), а **плод**, завершающий цикл эволюции Вселенной, вмещающий в себя всё богатство информации, накопленной в цикле.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Сазанов А.Н., Сазанов А.А. Следы сходятся в космосе. На суше и на море. М.: Мысль, 1969, с. 521-538.
2. Лесков Л.В. Космическое будущее человечества. М., 1996. Приложение 3-96(5) к вестнику "Аномалия". М.: ИТАР–ТАСС.
3. Шкловский И.С. О возможной уникальности разумной жизни во Вселенной. Вопросы философии, 1976, № 9, с. 80 – 93.
4. Энгельс Ф. Людвиг Фейербах и конец классической немецкой философии. ( К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., изд. 2, т. 21).
5. Книга Еноха. Историко-критическое исследование, русский перевод и объяснение апокрифической книги Еноха. Сочинение священника Александра Смирнова. Казань, Типография Императорского университета, 1888.
6. Тендряков В.Ф. Покушение на миражи. М. Художественная литература, 1987.
7. Вернадский В.И. Несколько слов о ноосфере. Успехи биологии. М., 1944. Цитировано по книге «Русский космизм». М.: Педагогика-пресс, 1993, с. 304-311.
8. Шарден П.Т. Феномен человека. М.: Наука, 1987.
9. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. М.: 1994, с. 36.
10. Маркс К. Тезисы о Фейербахе. (К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., изд. 2, т. 42, с. 266).
11. Маркс К. К критике политической экономии. Предисловие. (К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., изд. 2, т. 13, с. 7).
12. Маркс К. К критике гегелевской философии права. Введение. (К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., изд. 2, т. 1, с. 422).
13. Лукреций Кар. О природе вещей. Книга 1.
14. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел. Собрание научных трудов, т. I. М.: Наука, 1965, с. 10.
15. Антология мировой философии, т.1, части 1, 2. М.: Мысль,1969.
16. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989.
17. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. М.: Мир, 1964.
18. Галилей Г. Избранные труды в 2 томах, т. 2. М.: Наука, 1964.
19. Путилов К.А. Курс физики, т. I. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1954.
20. Галилей Г. Диалог о двух главнейших системах мира птолемеевой и коперниковой. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1948.
21. Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. Собрание научных трудов, т. IV. М.: Наука, 1967.
22. Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987.
23. Лаплас П.С. Опыт философии теории вероятностей. М.: 1908, с. 9.

24. Ленин В.И. Материализм и эмпириокритицизм. Соч., изд. 5, том 18.
25. Короленко В.Г. Собр. соч. в 10 томах, том 2, с. 373-388. М.: гос. изд-во Художественной литературы, 1954.
26. Глинка Н.Л. Общая химия. М.– Л.: Госхимиздат, 1954, с. 110.
27. Энгельс Ф. Диалектика природы. ( К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., изд. 2, т. 20).
28. Шоке Г. Геометрия. М.: Мир, 1970.
29. Штекли А.Э. Галилей. («Жизнь замечательных людей», серия биографий). М.: Молодая гвардия, 1972.
30. Кант И. Всеобщая естественная история и теория неба. М.: Чоро, т. 1, 1994.
31. Энгельс Ф. Введение к английскому изданию «Развития социализма от утопии к науке». (К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., изд. 2, т. 22, с. 311).
32. Герцен А.И. Избранные философские произведения. М.: Госполитиздат, 1948, т. 1, с. 292.
33. Гольбах П.А. Система природы, или о законах мира физического и мира духовного. М.: 1940, с. 12, 18.
34. Воронцов-Вельяминов Б.А. Лаплас. М.: Наука, 1985.
35. Лаплас П.С. Изложение системы мира. Л.: Наука, 1982.
36. Boltzmann L. Populäre Schriften. Leipzig, 1905, s. 435.
37. Томилин А.Н. Занимательно о космологии. М.: Молодая гвардия, 1971.
38. Кудрявцев П.С., Конфедератов И.Я. История физики и техники. М.: Просвещение, 1965, с. 403.
39. Кудрявцев П.С. Курс истории физики. М.: Просвещение, 1974.
40. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматгиз, 1962.
41. Сазанов А.А. Четырёхмерный мир Минковского. М.: Наука, 1988.
42. Sazánov A.A. El universo tetradimensional de Minkowski. M.: Mir, 1990.
43. Минковский Г. Пространство и время. Принцип относительности. Сборник работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973.
44. Пайс А. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. М.: Наука, 1989.
45. Сойер У.У. Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972, с. 8, 54.
46. Энгельс Ф. Анти-Дюринг. ( К. Маркс и Ф. Энгельс, соч., изд. 2,т. 20).
47. Барсуков А.Н. Алгебра, ч. 1. М.: Учпедгиз, 1958, с. 50.
48. Вигнер Ю.П. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // УФН (Успехи физических наук). – 1968. – Т. 94, вып. 3.
49. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
50. Сазанов А.А. Четырёхмерная модель мира по Минковскому. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
51. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.
52. Ходаковский Н.И. Спираль времени. М.: А и Ф – Принт, 2001, с. 288.

53. Грин Б.Р. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
54. Эйнштейн А. О принципе относительности и его следствиях. Собрание научных трудов, т. I. М.: Наука, 1965, с. 74.
55. Эйнштейн А., Инфельд Л. Эволюция физики. Собрание научных трудов, т. 4. М.: Наука, 1967, с. 477.
56. Яворский Б.М., Пинский А.А. Основы Физики. Т. I. М.: Наука, 1981.
57. Фейнман Р.Ф. Фейнмановские лекции по физике. Выпуск 1. М.: Мир, 1965, с. 209-210; 6-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2009.
58. Эйнштейн А. Зависит ли инерция тела от содержащейся в нём энергии? Собрание научных трудов, т. I. М.: Наука, 1965, с. 36-38.
59. Храмов Ю.А. Физики, биографический справочник. М.: Наука, 1983.
60. Долгов А.Д., Зельдович Я.Б., Сажин М.В. Космология ранней Вселенной. М.: МГУ, 1988, с. 8.
61. Космология: теории и наблюдения. М.: Мир, 1978.
62. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.
63. Новиков И.Д. Как взорвалась Вселенная. М.: Наука, 1988.
64. Гиндилис Л.М. Антропный принцип. \\ Глобальный эволюционизм. М.: Институт философии РАН, 1994, с. 65-93.
65. Грищук Л.П., Зельдович Я.Б. Обзорная статья «Космология» в Маленькой энциклопедии «Физика Космоса». М.: Советская энциклопедия, 1986.
66. Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.

# ОГЛАВЛЕНИЕ КНИГИ 2

# ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Эта книга продолжает серию «Relata Refero» (дословный перевод — рассказываю рассказанное).

Под этим грифом издательство предоставляет трибуну авторам, чтобы высказать публично новые идеи в науке, обосновать новую точку зрения, донести до общества новую интерпретацию известных экспериментальных данных, etc.

В споре разных точек зрения только решение Великого судьи — Времени — может стать решающим и окончательным. Сам же процесс поиска Истины хорошо характеризуется известным высказыванием Аристотеля, вынесенным на обложку настоящей серии: авторитет учителя не должен довлеть над учеником и препятствовать поиску новых путей.

Мы надеемся, что публикуемые в этой серии тексты внесут, несмотря на свое отклонение от установившихся канонов, свой вклад в познание Истины.

## Об авторе

**Анатолий Анатольевич САЗАНОВ**

Родился 3 августа 1936 г. в городе Богучар Воронежской области. Сильнейшее воспитательное влияние на него оказал отец, Анатолий Николаевич Сазанов, который, вернувшись с Великой Отечественной войны, увлек сына любовью к астрономии и развивал в нем интерес к устройству мироздания. В школьные годы А. А. Сазанов занимался в астрономических кружках Московского планетария, которые вел Феликс Юрьевич Зигель. После окончания Московского авиационного института с 1959 по 1979 гг. работал в Институте земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн (ИЗМИРАН), где в лаборатории солнечной активности, руководимой известным астрофизиком Геннадием Михайловичем Никольским, защитил кандидатскую диссертацию по внезатменным наблюдениям солнечной короны. С 1979 г. по настоящее время работает в Московской академии тонкой химической технологии им. М. В. Ломоносова (МИТХТ) на кафедре высшей и прикладной математики в должности доцента. Последние три десятилетия занимается разработкой проблем модели мира Минковского. Книга А. А. Сазанова «Четырехмерный мир Минковского» вышла в 1988 г. в издательстве «Наука» и в 1990 г. в дополненном виде в издательстве «Мир» (на испанском языке). В 2008 г. в издательстве URSS вышла книга под названием «Четырехмерная модель мира по Минковскому».



7162 ID 97521

9 785397 009737

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ

Тел./факс: 7 (499

Тел./факс: 7 (499

E-mail: ...@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru

интернет-магазин OZON.ru

67797501