

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Г.В. Носов

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 621.3.01(076.5)

ББК 31.2Я73

Н845

Носов Г.В.

Н845 Постоянное электромагнитное поле: учебное пособие / Г.В. Носов; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 88 с.

В пособии рассматриваются основные уравнения и методы расчета постоянного электромагнитного поля на примере электростатического поля, электрического поля и магнитного поля постоянных токов. Приводятся примеры решения задач и домашнее задание с расчетом по программе *Mathcad* постоянного электромагнитного поля двухпроводной линии, расположенной вблизи проводящей плоской ферромагнитной поверхности.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 621.3.01(076.5)

ББК 31.2Я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор
заведующий кафедрой теоретических основ электротехники
ТУСУРа

В.М. Дмитриев

Кандидат технических наук, доцент
кафедры теоретических основ электротехники ТУСУРа

Т.В. Ганджа

© ГОУ ВПО «Национальный исследовательский
Томский политехнический университет», 2011

© Носов Г.В., 2011

© Обложка. Издательство Томского
политехнического университета, 2011

Введение

Электромагнитное поле является особым видом материи. Всякая электрически заряженная частица окружена электромагнитным полем, составляющим с ней единое целое. Но электромагнитное поле может существовать и в свободном, отдельном от заряженных частиц состоянии в виде движущихся со скоростью, близкой к *скорости света* $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с, *электромагнитных волн*.

Электромагнитное поле характеризуется непрерывным распределением в пространстве и вместе с тем оно обнаруживает дискретную структуру в виде *квантов* электромагнитного поля, например, *фотонов*. Электромагнитное поле является носителем определенного количества энергии, которая способна преобразовываться в другие виды энергии – химическую, тепловую, механическую и т. п.

Электромагнитное поле, являясь носителем определенного количества энергии, обладает также и определенной соответствующей этой энергии массой, которая может быть определена из общей связи между полной энергией W и полной массой m : $W = mc^2$. Однако плотность массы ρ (кг/м³) используемых электромагнитных полей весьма мала. Так при магнитной индукции $B=1$ Тл и электрической напряженности $E=10^8$ В/м объемная плотность энергии электромагнитного поля в вакууме, равная сумме объемных плотностей электрического и магнитного полей, имеет значение:

$$\frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = 4,42 \cdot 10^5 \text{ Дж/м}^3.$$

Соответственно, объемная плотность массы электромагнитного поля при этом равна:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{W}{V \cdot c^2} \approx 4,91 \cdot 10^{-12} \text{ кг/м}^3,$$

т. е. представляет собой весьма малую величину.

Наличие массы электромагнитного поля имеет принципиальное значение. В частности, располагая значением массы поля, можно подсчитать давление света на поверхность тела, на которую он падает. Давление света было экспериментально установлено и количественно измерено в опытах П. Н. Лебедева, подтвердивших выводы теории электромагнитного поля.

Ничтожная плотность массы используемых на практике электромагнитных полей дает основание обычно не интересоваться этой характеристикой поля и обращать внимание в основном на энергетическую сторону рассматриваемых явлений.

Электромагнитное поле характеризуется особыми электромагнитными свойствами, не рассматриваемыми в механике, а именно, способностью оказывать силовое воздействие на заряженные частицы, которое зависит от их скорости.

Электрический ток создает *магнитное поле* как составную часть электромагнитного поля. Различают токи проводимости, смещения и переноса. *Ток проводимости* пропорционален напряженности электрического поля E и представляет собой движение свободных элементарных частиц, обладающих электрическим зарядом. *Ток смещения* пропорционален скорости изменения во времени напряженности электрического поля E и в диэлектрике представляет собой смещение электронных орбит и ядер атомов. *Ток переноса* определяется скоростью движущихся свободных электрически заряженных частиц или тел, зависящей от электрического напряжения вдоль пути, пройденного этими частицами или телами. Таким образом, физически можно различать лишь два вида электрического тока: движение заряженных частиц и тел, ток смещения в вакууме.

В пространстве, окружающим неподвижные частицы и тела с неизменными электрическими зарядами существует *электрическое (электростатическое) поле*. В пространстве, окружающим неподвижные частицы и тела с изменяющимися во времени электрическими зарядами существует электрическое и магнитное поле. В пространстве, окружающим электрические токи, существует как электрическое, так и магнитное поле. Во всех случаях эти поля определяют собой две стороны единого электромагнитного поля.

Изучение электромагнитных полей в электротехнике обусловлено потребностью определения запасаемой в поле энергии и действующих механических сил, необходимостью отыскания электрической напряженности для оценки прочности изоляции и потребностью расчета таких параметров электрических и магнитных цепей, как сопротивление, индуктивность, проводимость, емкость, ЭДС, напряжение, ток, магнитный поток. Эти величины и параметры могут быть во многих случаях найдены из расчета *постоянных во времени электромагнитных полей*, которые создаются неизменными во времени и неподвижными в пространстве электрическими зарядами и токами.

Методы расчета постоянного электромагнитного поля в диэлектрике можно использовать в *ближней зоне излучения волн* переменного электромагнитного поля, где расстояние от источника излучения много меньше длины волны $\lambda \approx c/f$. Источниками заметного излучения волн являются изменяющиеся во времени с частотой $f > 10^5$ Гц электрические заряды и токи.

1. Уравнения электромагнитного поля

Электромагнитное поле (ЭМП) – это вид материи, характеризующийся совокупностью взаимосвязанных и взаимно обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей. ЭМП характеризуется следующими векторными величинами:

\bar{E} , В/м – напряженность электрического поля;

\bar{D} , Кл/м² – электрическая индукция;

\bar{P} , Кл/м² – поляризованность;

\bar{H} , А/м – напряженность магнитного поля;

\bar{B} , Тл – магнитная индукция.

Вектора ЭМП связаны между собой следующим образом:

$$\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}; \quad \bar{P} = (\varepsilon_a - \varepsilon_0) \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H},$$

где $\varepsilon_a = \varepsilon_r \varepsilon_0$, Ф/м – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды;

$\varepsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12}$, Ф/м – электрическая постоянная;

$\varepsilon_r \geq 1$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды;

$\mu_a = \mu_r \mu_0$, Гн/м – абсолютная магнитная проницаемость среды;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, Гн/м – магнитная постоянная;

$\mu_r \geq 1$ – относительная магнитная проницаемость среды.

Для воздуха имеем $\varepsilon_r \approx 1$ и $\mu_r \approx 1$. Величины $\bar{E}, \bar{D}, \bar{P}, \varepsilon_a$ характеризуют электрическое поле, а \bar{H}, \bar{B}, μ_a – магнитное поле.

ЭМП характеризуется следующими основными уравнениями Максвелла (1873г. – «Трактат об электричестве и магнетизме»).

1. Первое уравнение Максвелла:

а) в дифференциальной форме

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t},$$

где $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$, А/м² – вектор плотности тока проводимости;

γ , См/м – удельная проводимость среды;

б) в интегральной форме (закон полного тока)

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum_k (\pm i_k),$$

где i_k – токи внутри контура l , причем знак “+” ставится, если направление тока и обхода контура удовлетворяют правилу правоугового винта (“буравчика”).

2. Второе уравнение Максвелла:

а) в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t};$$

б) в интегральной форме (закон электромагнитной индукции)

$$e = \oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где $e, \text{В}$ – электродвижущая сила (ЭДС) в контуре l ;

$\Phi = \int_s \bar{B} \cdot d\bar{S}$, Вб – магнитный поток, охватываемый контуром l .

3. Принцип непрерывности магнитного потока Φ :

а) в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0;$$

б) в интегральной форме

$$\oint_s \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0.$$

4. Теорема Гаусса:

а) в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho,$$

$\rho, \text{Кл/м}^3$ – объемная плотность свободных зарядов;

б) в интегральной форме

$$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} = \sum_k (\pm q_k),$$

где $q_k, \text{Кл}$ – заряды внутри поверхности площадью S .

Ротор – это векторная величина, характеризующая вихри ЭМП (рис. 1.1):

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{l}}{\Delta S}.$$

В прямоугольной системе координат при напряженности

$$\bar{H} = H_x \cdot \bar{1}_x + H_y \cdot \bar{1}_y + H_z \cdot \bar{1}_z$$

и единичных векторах $\bar{1}_x, \bar{1}_y, \bar{1}_z$ ротор записывается так:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{1}_x +$$

$$+ \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{1}_z$$

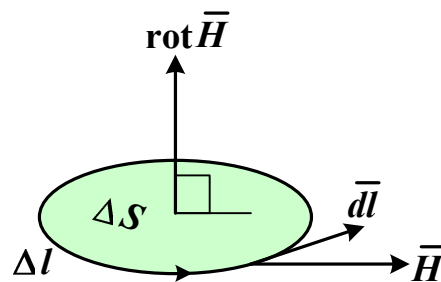


Рис. 1.1

Дивергенция – это скалярная величина, характеризующая истоки ЭМП (рис. 1.2):

$$\operatorname{div} \bar{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{D} \cdot \bar{dS}}{\Delta V} .$$

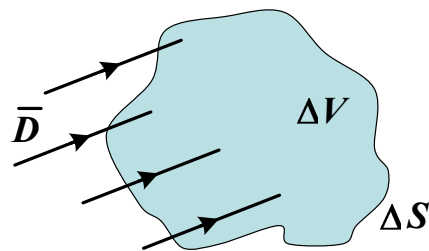


Рис. 1.2

В прямоугольной системе координат при векторе электрической индукции

$$\bar{D} = D_x \cdot \bar{1}_x + D_y \cdot \bar{1}_y + D_z \cdot \bar{1}_z$$

дивергенция записывается так:

$$\operatorname{div} \bar{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} .$$

Теорема Умова-Пойнтинга как баланс мощностей выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля:

$$P_{\text{И}} = P_{\text{T}} + P_{\text{ЭМ}} + P_{\text{П}} = \\ = \int_V \gamma E^2 \cdot dV + \frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t} + \oint_S \overline{\Pi} \cdot \overline{dS}.$$

Мощность источников $P_{\text{И}}$ в объеме V , ограниченного замкнутой поверхностью S , равна сумме мощностей в том же объеме V : мощности P_{T} тепловых потерь; мощности $P_{\text{ЭМ}}$ изменения энергии электромагнитного поля; мощности $P_{\text{П}}$, выходящей (входящей) через поверхность S , которая равна потоку вектора Пойнтинга $\overline{\Pi}$ через эту поверхность. Направление вектора Пойнтинга соответствует направлению передачи энергии. *Вектор Пойнтинга* $\overline{\Pi}$ как мощность потока энергии на единицу площади (Вт/м^2), перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы напряженностей \overline{E} , \overline{H} и образует с ними правовинтовую систему: \overline{E} вращается к \overline{H} по кратчайшему пути (рис. 1.3). При этом модуль вектора Пойнтинга равен

$$\Pi = E \cdot H \cdot \sin \alpha . \quad (1.1)$$

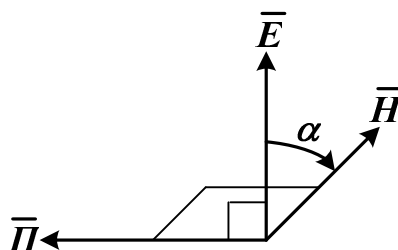


Рис. 1.3

Задачи расчета и анализа электромагнитных полей:

1. Расчет для электрических схем замещения параметров элементов R (Ом), G ($C_{\text{м}}=1/\text{Ом}$), C (Ф), L (Гн).
2. Определение электрической напряженности \overline{E} для оценки электрической прочности изоляции.
3. Расчет энергии, запасаемой в электромагнитном поле.
4. Расчет сил, действующих в электромагнитном поле.

Далее рассмотрим частные случаи постоянного электромагнитного поля: электростатическое, электрическое и магнитное поле.

2. Основы электростатики

Все вещества состоят из атомов и молекул. Важнейшими структурными элементами атомов являются элементарные частицы материи. Рассмотрим основные свойства двух из них: протонов и электронов.

Протоны – частицы, обладающие положительным электрическим зарядом. Они входят в состав атомного ядра, сообщая ему положительный заряд.

Электроны – мельчайшие отрицательно заряженные частицы, которые с огромной скоростью вращаются вокруг ядра по замкнутым орбитам. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-20}$ Кл. Это элементарный, т.е. наименьший, отрицательный электрический заряд. Число электронов в атомах различных химических элементов неодинаково. Так, например, атом водорода имеет один электрон, который вращается вокруг ядра по одной орбите, а натрия – 11 электронов, вращающихся по трем орбитам: на первой, ближней к ядру – 2, на второй – 8 и на третьей – 1.

В атомах различных химических веществ, находящихся в обычном состоянии, существует электрическое равновесие: общий отрицательный заряд электронов равен положительному заряду ядра. В этом случае атомы, а значит, и все вещество, состоящее из этих атомов, электрически нейтральны, т.е. суммарный заряд q тела, образованного этим веществом, равен нулю. Если атом теряет один или несколько электронов, то равновесие электрических зарядов нарушается и атом превращается в положительный ион. Если же атом получает лишние электроны, то он заряжается отрицательно, превращаясь в отрицательный ион. Процесс превращения нейтрального атома в положительный или отрицательный ион называется *ионизацией*.

Тело называют электрически заряженным, если в нем преобладают положительные или отрицательные заряды. Избыток тех или других зарядов в рассматриваемом теле возникает в результате передачи заряженных частиц от одного тела другому или их перемещением внутри тела из одной его области в другую область. Такая *электризация* тел может быть осуществлена трением или в результате других физических и химических процессов. Электрически заряженное тело характеризуется суммарным положительным или отрицательным зарядом q , который измеряется в кулонах (Кл).

Электрически заряженные тела (частицы) с зарядами q_1 и q_2 взаимодействуют друг с другом с силой \vec{F} , которая является векторной величиной и измеряется в ньютонах (Н). При разноименных зарядах тела

притягиваются друг к другу (рис. 2.1, а), а при одноименных – отталкиваются (рис. 2.1, б).

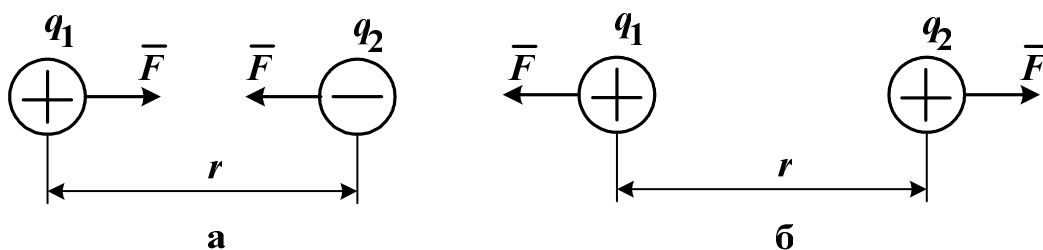


Рис. 2.1

Заряженные тела называются *точечными*, если их линейные размеры малы по сравнению с расстоянием r между телами. Сила их взаимодействия F зависит от величины зарядов q_1 и q_2 , расстояния r между ними и среды, в которой находятся электрические заряды.

Связь между этими величинами была сформулирована французским ученым Кулоном в 1775 году: *величина силы взаимодействия двух неподвижных точечных заряженных тел прямо пропорциональна произведению зарядов этих тел, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и зависит от среды.*

Закон Кулона выражается следующей формулой:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_a r^2}, \quad (2.1)$$

где ϵ_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, которая учитывает влияние среды на величину силы.

Из формулы (2.1) следует, что для разноименных зарядов q_1 и q_2 величина силы F получается отрицательной, что указывает на притяжение точечных тел, а для одноименных зарядов F положительна, что свидетельствует об отталкивании тел.

Различные вещества имеют разную абсолютную диэлектрическую проницаемость ϵ_a . Абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума ϵ_0 называется *электрической постоянной*. Её размерность выражается в фарадах на метр (Ф/м). Опытным путем установлено, что

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \approx 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Величина, показывающая, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества ϵ_a больше электрической постоянной ϵ_0 , называется *относительной диэлектрической проницаемостью* этого вещества ϵ_r , которая не имеет размерности. Таким образом, $\epsilon_a = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$.

Для большинства диэлектриков ϵ_r относительно мало зависит от электрических условий и температуры, а поэтому считается значением постоянным. В табл. 2.1 приведены значения ϵ_r для некоторых веществ (диэлектриков).

Таблица 2.1

Диэлектрик	ϵ_r	Диэлектрик	ϵ_r
Воздух	1	Миканит	5,2
Трансформаторное масло	2,2	Фарфор	5,8
Резина	2,7	Мрамор	8,3
Бумага парафиниро- ванная	4,3	Стекло	6–10

Электростатическое поле создается неподвижными и неизменными электрическими зарядами. Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля и проявляется механическими силами, которые испытывают неподвижные заряженные тела, вносимые в это поле. Если в некоторое электростатическое поле вносить точечное тело с весьма малым пробным положительным зарядом $+q$, не искажающим исследуемое поле, то в каждой точке поля на это тело будет действовать определенная по значению и направлению механическая сила \vec{F} . Эта сила характеризует напряженность электростатического поля \vec{E} , которая равна отношению силы \vec{F} , действующей на неподвижное положительно заряженное пробное тело, помещенное в данную точку поля, к величине заряда q этого тела. Напряженность является векторной величиной, модуль которой рассчитывается как

$$E = \frac{F}{q}, \quad (2.2)$$

причем размерность напряженности вольт на метр (В/м), т.к.

$$Н=Дж/м=А·В·с/м \text{ и } Кл=А·с, \text{ т.е. } Н/Кл=В/м.$$

Используя формулы (2.1) и (2.2) можно определить величину напряженности электростатического поля, создаваемого уединенным точечным телом с зарядом q_1 в некоторой точке А (с пробным зарядом q_2), отстоящей от этого тела на расстоянии r_1 :

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a r_1^2}. \quad (2.3)$$

Аналогично можно определить величину напряженности электростатического поля, создаваемое другим уединенным точечным телом с зарядом q_2 в той же точке А, отстоящей от этого тела на расстоянии r_2 :

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a r_2^2}. \quad (2.4)$$

Направления векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в точке А определяются знаками зарядов q_1 и q_2 соответственно: при положительном заряде тела вектор напряженности направлен от тела вдоль прямой, соединяющей заряд и точку А, а при отрицательном заряде тела вектор напряженности направлен к телу по прямой, соединяющей заряд и точку А.

Вектор напряженности \vec{E} в точке А результирующего электростатического поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2 , находится как геометрическая сумма векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 (рис. 2.2).

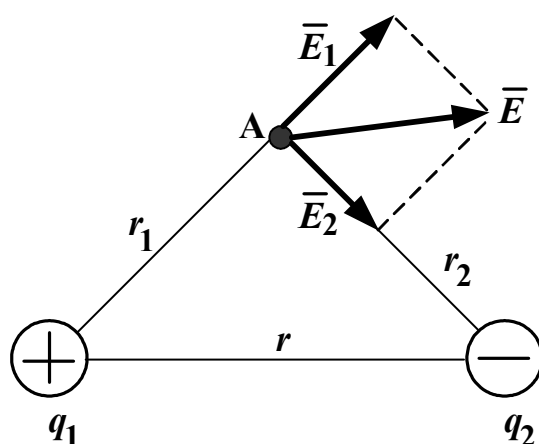


Рис. 2.2

Модуль вектора напряженности E должен быть меньше пробивной напряженности $E_{\text{пр}}$, при которой наступает пробой диэлектрика и диэлектрик теряет свои изолирующие свойства и становится проводником. Значения пробивной напряженности $E_{\text{пр}}$ для некоторых диэлектриков приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Диэлектрик	$E_{\text{пр}}$, кВ/мм	Диэлектрик	$E_{\text{пр}}$, кВ/мм
Воздух	3	Миканит	15–20
Мрамор	3–4	Резина	15–20
Трансформаторное масло	5–15	Полистирол	20–30
Бумага парафини- рованная	10–25	Полиэтилен	50
Фарфор	15–20	Слюда	80–200

Важной характеристикой электростатического поля является *потенциал φ численно равный работе, которая может быть совершена силами поля при перемещении положительного единичного заряда q из данной точки поля A в точку, потенциал которой принят равным нулю:*

$$\varphi = \frac{\int_A^0 F \cdot dr}{q}. \quad (2.5)$$

Потенциал является скалярной величиной и измеряется в вольтах (Дж/Кл=В). Потенциал бесконечно удаленной точки или потенциал поверхности «земли» обычно принимается равным нулю. Потенциал φ может принимать положительные и отрицательные значения. Положительное значение потенциала в точке A означает положительную работу сил поля при перемещении частицы с зарядом q . Отрицательное значение потенциала в точке A свидетельствует о том, что силы поля будут препятствовать движению частицы с зарядом q из данной точки A в точку, потенциал которой принят равным нулю. При этом работа сил отрицательна и возможна только за счет внешнего источника.

Используя формулы (2.1–2.5) можно рассчитать потенциалы электростатического поля, создаваемые по отдельности точечными уединенными телами с зарядами q_1 и q_2 в точке A (рис. 2.2):

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_a r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_a r_2}.$$

Потенциал φ в точке A результирующего электростатического поля, создаваемого зарядами q_1 и q_2 , находится как алгебраическая сумма потенциалов φ_1 и φ_2 , рассчитанных с учетом знаков зарядов, т.е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Разность потенциалов двух точек поля называется *электрическим напряжением U , которое равно работе, затрачиваемой на перемещение единичного заряда из одной точки (A) поля в другую точку (B):*

$$U = \varphi_A - \varphi_B, \text{ В.}$$

Графически картина электростатического поля изображается с помощью силовых и эквипотенциальных линий, которые взаимно перпендикулярны. *Силовая линия* (линия напряженности) – это линия в каждой точке, которой вектор напряженности \vec{E} направлен по касательной. Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Силовые линии проводят с определенной плотностью, т.е. так, чтобы число силовых линий, проходящих через единицу поверхности, перпендикулярной силовым линиям, было равно или пропорционально значению напряженности поля в данном месте.

Однородное электростатическое поле имеет во всех точках одинаковые векторы напряженности. Силовые линии однородного поля параллельны и расположены с одинаковой плотностью. Эквипотенциальная линия в каждой точке имеет одинаковое значение потенциала, причем разность потенциалов ($\Delta\varphi$) соседних эквипотенциальных линий должна быть постоянной.

На рис. 2.3 приведена картина электростатического поля двух разноименно заряженных точечных тел.

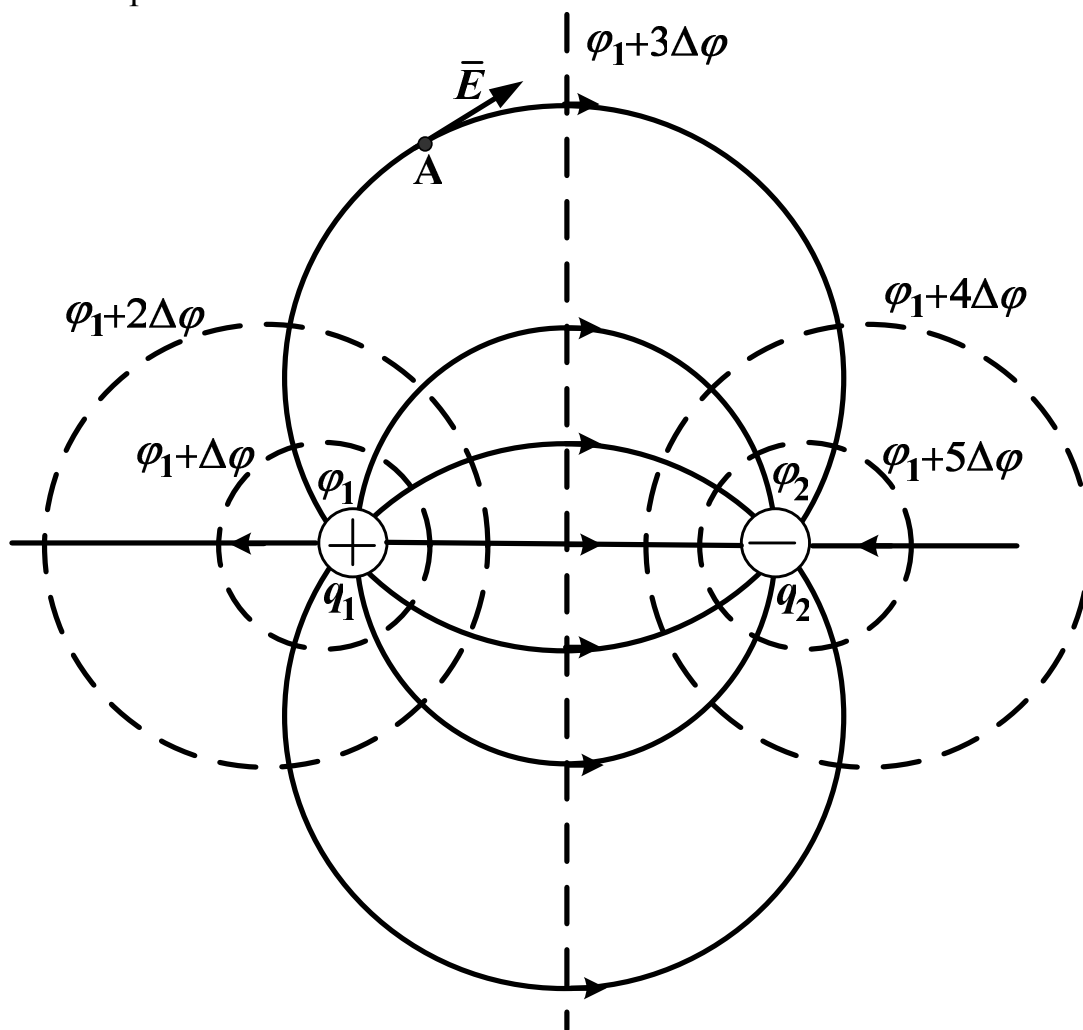


Рис. 2.3. Картина электростатического поля двух разноименно заряженных точечных тел

Интегральными величинами электростатического поля являются:

а) энергия

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\epsilon_a \cdot E^2}{2} dV, \text{ Дж}$$

причем для поля, создаваемого системой тел с зарядами q_k и потенциалами φ_k , имеем

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (q_k \cdot \varphi_k) ;$$

б) сила по координате x , действующая на заряженное тело

$$F_x = \pm \frac{dW_{\text{э}}}{dx} , \text{ Н}$$

причем знак «+» ставится при постоянных потенциалах тел φ_k , а знак «-» при постоянных зарядах тел q_k ;

в) емкость между двумя телами с зарядами $+q$ и $-q$ и потенциалами φ_1 и φ_2 соответственно

$$C = \frac{|q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|} , \text{ Ф}$$

причем

$$W_{\text{э}} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{C(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2} .$$

Для электростатического поля справедливы следующие уравнения:

$$\text{rot} \bar{E} = 0; \oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0;$$

$$\text{div} \bar{D} = \rho; \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{S} = \sum_k (\pm q_k); \quad (2.6)$$

$$\bar{E} = -\text{grad} \varphi; \nabla^2 \varphi = 0; \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} .$$

В прямоугольной системе координат имеем:

$$\bar{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \bar{1}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \bar{1}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \bar{1}_z ; \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} . \quad (2.8)$$

При решении уравнений (2.6–2.8) для определений постоянных интегрирования используются следующие граничные условия.

1. Электростатическое поле внутри проводника отсутствует (рис. 2.4).

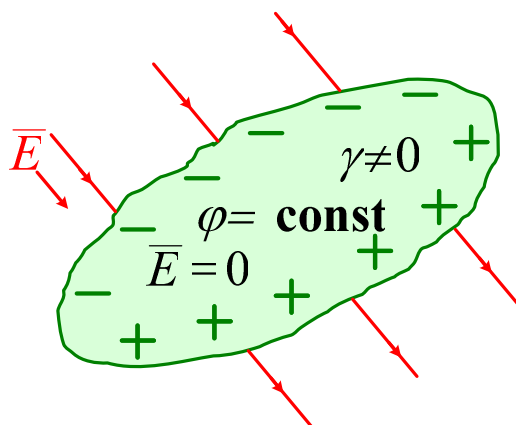


Рис. 2.4

2. На границе раздела проводящего тела и диэлектрика вектора \vec{D} и \vec{E} перпендикулярны к поверхности проводящего тела (рис. 2.5).

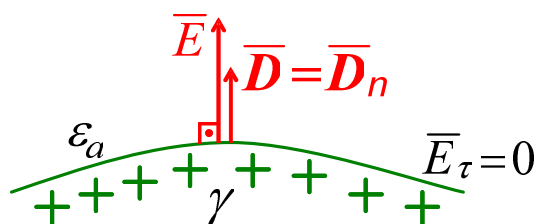


Рис. 2.5

Плотность свободных зарядов на поверхности проводящего тела равна нормальной составляющей вектора электрической индукции: $\sigma_{\text{своб}} = D_n = D$.

3. На границе раздела двух диэлектриков равны касательные составляющие напряженности (рис. 2.6): $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$.

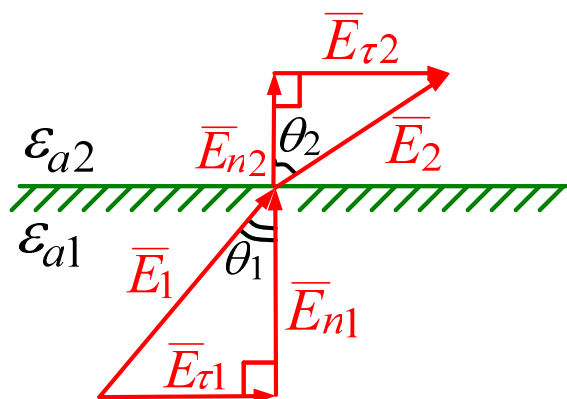


Рис. 2.6

4. На границе раздела двух диэлектриков при отсутствии *свободных зарядов* равны нормальные составляющие электрической индукции (рис. 2.7): $D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{\text{своб}}$.

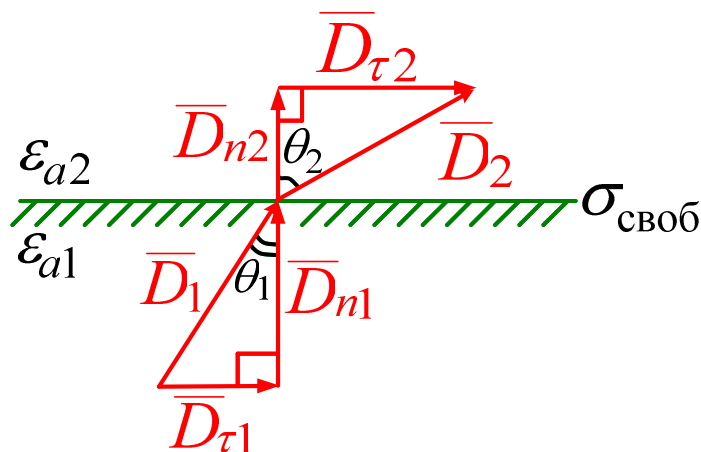


Рис. 2.7

Для углов входа θ_1 и выхода θ_2 векторов при $\sigma_{\text{своб}}=0$ выполняется равенство

$$\frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_2} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}.$$

Если $\sigma_{\text{своб}} = 0$ и $D_{n1} = D_{n2} = D_n$, тогда поверхностная плотность *связанных зарядов* на границе двух диэлектриков будет равна разности нормальных составляющих векторов поляризованности: $\sigma_{\text{связ}} = P_{n1} - P_{n2}$. В результате при

$$P_{n1} = (\epsilon_{a1} - \epsilon_0) D_n / \epsilon_{a1}; \quad P_{n2} = (\epsilon_{a2} - \epsilon_0) D_n / \epsilon_{a2}$$

получаем:

$$\sigma_{\text{связ}} = \frac{\epsilon_0 \cdot (\epsilon_{a1} - \epsilon_{a2})}{\epsilon_{a1} \cdot \epsilon_{a2}} \cdot D_n, \text{ Кл/м}^2.$$

Если $\epsilon_{a1} > \epsilon_{a2}$, то $\sigma_{\text{связ}} > 0$, иначе $\sigma_{\text{связ}} < 0$.

5. На границе раздела двух сред (проводник-диэлектрик, диэлектрик-диэлектрик) равны потенциалы: $\phi_1 = \phi_2$.

3. Электростатическое поле двухпроводной линии с учетом влияния проводящей плоской поверхности

Рассмотрим прямолинейную бесконечно длинную и весьма тонкую уединенную заряженную ось. Будем считать, что ось имеет линейную плотность заряда $+\tau$ (Кл/м) и расположена в однородной среде с $\epsilon_a = \text{const}$. Для расчета поля используем *теорему Гаусса* и охватим ось

цилиндрической поверхностью радиуса r с центром на этой оси (рис. 3.1).

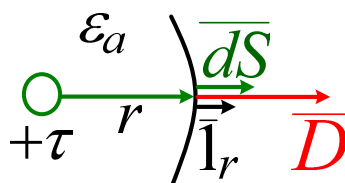


Рис. 3.1

В силу симметрии вектор \vec{D} будет перпендикулярен этой поверхности и его модуль будет постоянен, тогда

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot \oint_S dS = D \cdot 2\pi r l = \tau l.$$

Таким образом

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}; E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}; \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \cdot \ln(r) + A_1, \quad (3.1)$$

где A_1 – постоянная интегрирования.

При комплексном радиусе в прямоугольной системе координат

$$\underline{r} = x + jy = re^{j\alpha}$$

из условия Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

находим функцию потока напряженности

$$\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \cdot \alpha + A_3, \quad (3.2)$$

где A_3 – постоянная интегрирования.

Далее рассмотрим поле двухпроводной линии с заряженными параллельными друг другу цилиндрическими проводами 1 и 2, расположенными параллельно проводящей плоской поверхности (назовем как поверхность “земли”). Провода расположены в однородной среде (диэлектрике) с $\epsilon_a = const$ и имеют линейные плотности зарядов τ_1, τ_2 и потенциалы φ_1, φ_2 . Если провода бесконечно длинные и их радиус R много меньше высот h_1, h_2 расположения проводов над “землей” и много меньше расстояние между проводами d , т.е. $R \ll h_{1,2}$ и $R \ll d$, то поле каждого провода приближенно можно считать полем заряженной оси. Для выполнения граничного условия на поверхности “земли” ($\sigma_{своб} = D_n = D$) с потенциалом $\varphi = 0$ применим метод зеркальных изображений: поместим

зеркально поверхности “земли” фиктивные провода (оси) 3 и 4 с зарядами противоположного знака $-\tau_1$ и $-\tau_2$ (рис. 3.2).

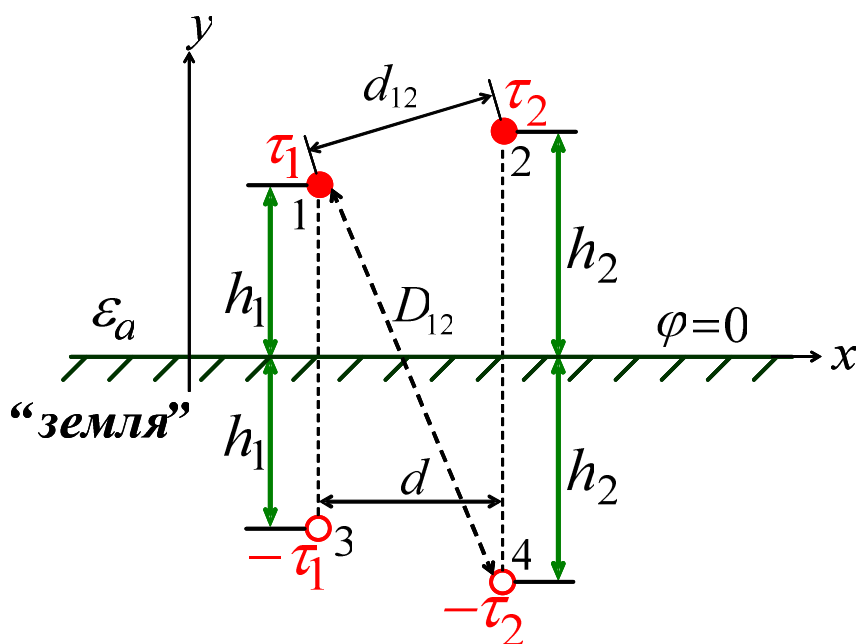


Рис. 3.2

Для расчета поля над проводящей плоскостью (в диэлектрике) используем метод наложения, тогда с учетом (3.1) и (3.2) можно получить следующие соотношения.

1. Первая группа формул Максвелла:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_{11} \cdot \tau_1 + \alpha_{12} \cdot \tau_2 \\ \varphi_2 = \alpha_{21} \cdot \tau_1 + \alpha_{22} \cdot \tau_2 \end{cases}, \quad (3.3)$$

где *потенциальные коэффициенты* (м/Ф)

– собственные

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{2h_1}{R}\right); \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{2h_2}{R}\right);$$

– взаимные

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{D_{12}}{d_{12}}\right),$$

причем

$$d_{12} = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2};$$

$$D_{12} = \sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2}.$$

Собственные и взаимные потенциальные коэффициенты положительны.

2. Вторая группа формул Максвелла:

$$\begin{cases} \tau_1 = \beta_{11} \cdot \varphi_1 + \beta_{12} \cdot \varphi_2 \\ \tau_2 = \beta_{21} \cdot \varphi_1 + \beta_{22} \cdot \varphi_2 \end{cases}, \quad (3.4)$$

где *емкостные коэффициенты* (Ф/м)

– собственные

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}; \quad \beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2};$$

– взаимные

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}.$$

Собственные емкостные коэффициенты положительны, а взаимные – отрицательны.

3. Третья группа формул Максвелла:

$$\begin{cases} \tau_1 = C_{11} \cdot \varphi_1 + C_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \tau_2 = C_{21} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22} \cdot \varphi_2 \end{cases}, \quad (3.5)$$

где *частичные емкости* (Ф/м)

– собственные

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12}; \quad C_{22} = \beta_{22} + \beta_{21};$$

– взаимные

$$C_{12} = C_{21} = -\beta_{12}.$$

Собственные и взаимные частичные емкости положительны. В результате согласно рис. 3.3 *емкость линии* на единицу длины составит (Ф/м)

$$C_0 = C_{12} + \frac{C_{11} \cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}}. \quad (3.6)$$

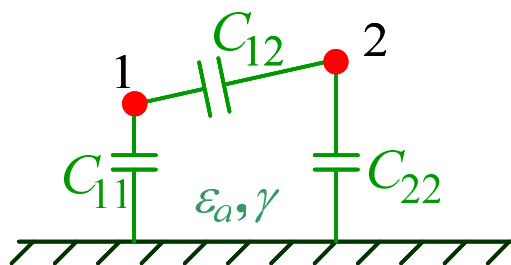


Рис. 3.3

Энергия электростатического поля на единицу длины линии будет равна (Дж/м)

$$W_{\text{Э}} = \frac{1}{2} \cdot (\tau_1 \varphi_1 + \tau_2 \varphi_2). \quad (3.7)$$

4. По методу наложения с учетом формул (3.1) и (3.2) получаем для точки N с координатами x, y :

потенциал

$$\varphi = \sum_k \varphi_k = \sum_k \frac{(\mp \tau_{1,2})}{2\pi\epsilon_a} \cdot \ln(r_k); \quad (3.8)$$

функцию потока напряженности

$$\psi = \sum_k \psi_k = M + \sum_k \frac{(\mp \tau_{1,2})}{2\pi\epsilon_a} \cdot \alpha_k; \quad (3.9)$$

вектор напряженности

$$\bar{E} = \sum_k \bar{E}_k; \quad E_k = \frac{|\tau_{1,2}|}{2\pi\epsilon_a \cdot r_k} \quad (3.10)$$

при комплексных радиусах от проводов $k=1, 2, 3, 4$ до точки N

$$\underline{r}_k = (x - x_k) + j(y \mp y_k) = r_k e^{j\alpha_k}, \quad (3.11)$$

где знак “-” для проводов 1, 2 с зарядами τ_1, τ_2 соответственно, когда $k=1, 2$;

знак “+” для фиктивных проводов 3, 4 с зарядами $-\tau_1, -\tau_2$ соответственно, когда $k=3, 4$;

x_k, y_k – координаты проводов $k=1, 2, 3, 4$, причем $x_3=x_1; y_3=-y_1=-h_1$ и $x_4=x_2; y_4=-y_2=-h_2$;

M – постоянная интегрирования.

При определении вектора напряженности \bar{E} по (3.10) необходимо в одном масштабе в точке N построить вектора \bar{E}_k от каждого провода и их зеркальных изображений с учетом знака зарядов, согласно рис. 2.2, и, затем, вектора \bar{E}_k нужно геометрически суммировать.

Изменяя координаты $x>0$ и $y>0$ точки N , можно рассчитать по (3.8) линии равного потенциала φ и по (3.9) линии равной функции потока ψ , которые пересекаются под прямым углом и образуют картину электростатического поля над проводящей плоскостью («земля»).

На рис. 3.4 приведена картина электростатического поля при потенциалах проводов $\varphi_1 = -\varphi_2 = 1000$ В, полученная при помощи программы *Mathcad*.

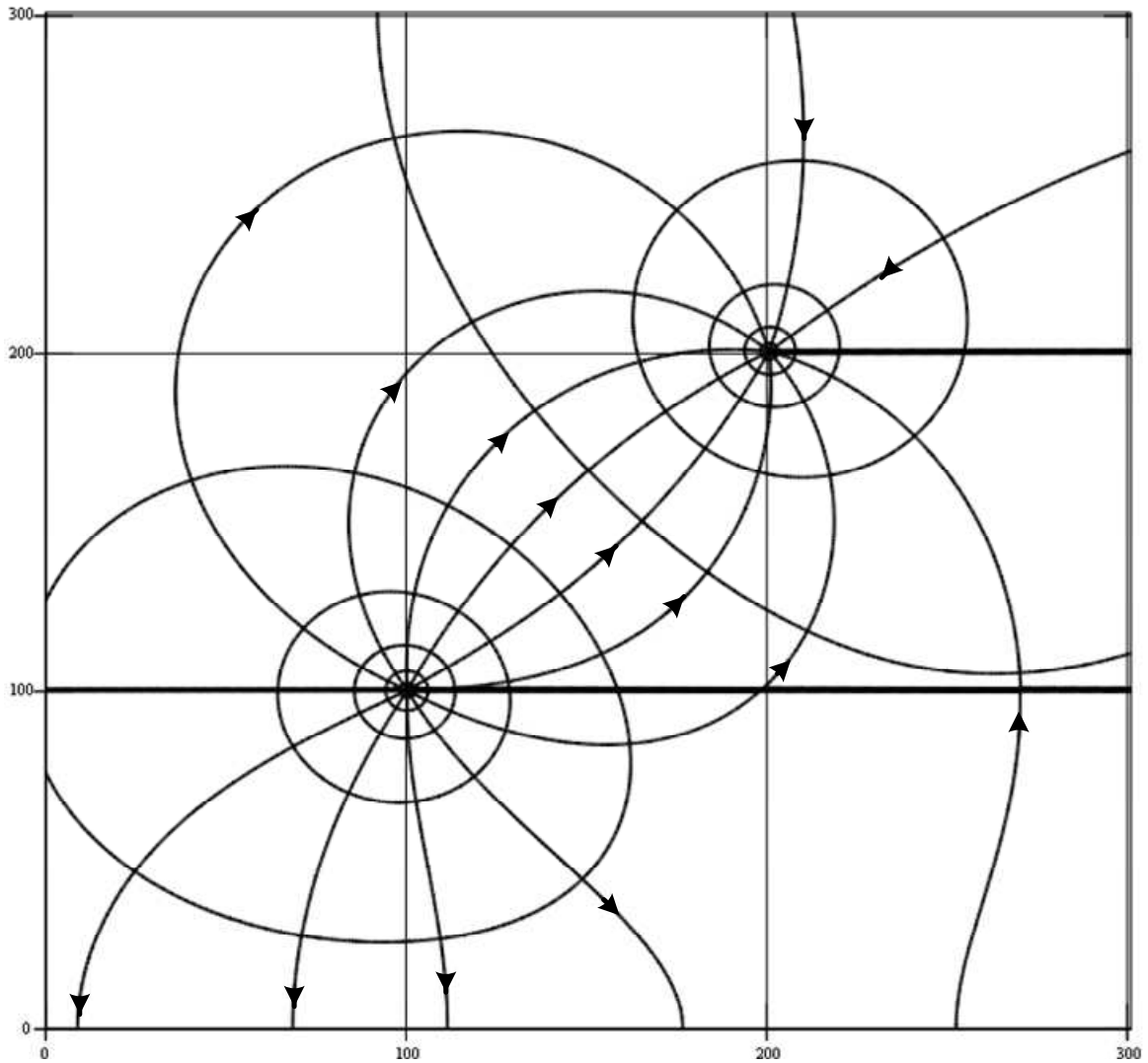


Рис. 3.4. Пример картины электростатического поля двухпроводной линии вблизи плоскости “земли”

По картине поля напряженность в точке N приближенно определяется так (рис. 3.5)

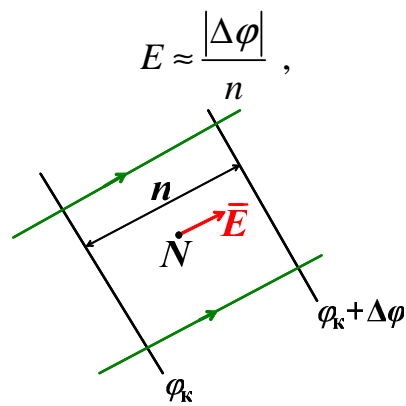


Рис. 3.5

т.е. модуль разности потенциалов между соседними линиями равного потенциала делится на расстояние между ними, причем вектор напряженности направлен согласно направлению силовых линий и соответствует приближенно найденной по (3.10) величине.

А. Примеры решения задач по электростатике

Задача А.1. Определить модуль вектора напряженности

$$\vec{E} = 7x \cdot \vec{1}_x + 5z \cdot \vec{1}_y + cy \cdot \vec{1}_z, \text{ (В/м)}$$

в точке с координатами $x=2$ (м), $y=3$ (м), $z=4$ (м).

Решение. Из уравнения электростатического поля в прямоугольной системе координат

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{1}_x + \\ &+ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{1}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{1}_z = 0 \end{aligned}$$

находим коэффициент $c=5$ (В/м²). Далее рассчитываем проекции вектора напряженности в заданной точке с координатами $x=2$ (м), $y=3$ (м), $z=4$ (м):

$$E_x = 7x = 7 \cdot 2 = 14 \text{ (В/м)}; E_y = 5z = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (В/м)}; E_z = cy = 5 \cdot 3 = 15 \text{ (В/м)}.$$

В результате искомый модуль вектора напряженности составит:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{14^2 + 20^2 + 15^2} = 28,653 \text{ (В/м)}.$$

Задача А.2. Определить объемную плотность зарядов ρ (мкКл/м³) при потенциале:

$$\varphi = (3 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot y^2 - 6 \cdot 10^{-6} \cdot z^2) / \epsilon_a, \text{ В.}$$

Решение. Из уравнения Пуассона в прямоугольной системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$$

получаем

$$\frac{-2 \cdot 10^{-6}}{\epsilon_a} = -\frac{\rho}{\epsilon_a},$$

тогда искомая объемная плотность зарядов составит:

$$\rho = 2 \cdot 10^{-6} = 2 \text{ (мкКл/м}^3\text{)}.$$

Задача А.3. На границе раздела двух диэлектриков с ϵ_{a1} и ϵ_{a2} при поверхностной плотности свободных зарядов $\sigma_{\text{своб}} = 11,6 \cdot \epsilon_0$ (Кл/м²) задан модуль вектора электрической индукции $D_1 = 150 \cdot \epsilon_0$ (Кл/м²) и углы $\theta_1 = 60^\circ$ и $\theta_2 = 30^\circ$ (рис. 2.7). Определить отношение D_2/ϵ_0 (В/м).

Решение. Из граничного условия

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma_{\text{своб}}$$

находим модуль вектора электрической индукции в диэлектрике с проницаемостью ϵ_{a2} :

$$D_2 = \frac{D_1 \cos(\theta_1) + \sigma_{\text{своб}}}{\cos(\theta_2)} \approx 100 \cdot \epsilon_0 \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

В результате искомое отношение составит: $D_2/\epsilon_0 \approx 100$ (В/м).

Задача А.4. На границе раздела двух диэлектриков с $\epsilon_{a1} = 3\epsilon_0$ и $\epsilon_{a2} = 2\epsilon_0$ при поверхностных плотностях свободных $\sigma_{\text{своб}} = 0$ (Кл/м²) и связанных зарядов $\sigma_{\text{связ}}$ (Кл/м²) задан в диэлектрике с ϵ_{a1} модуль нормальной составляющей вектора поляризованности $P_{n1} = 100 \cdot \epsilon_0$ (Кл/м²). Определить на границе для связанных зарядов отношение $\sigma_{\text{связ}}/\epsilon_0$.

Решение. На границе в диэлектрике с ϵ_{a1} находим нормальную составляющую вектора электрической индукции

$$D_{n1} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a1} - \epsilon_0} \cdot P_{n1} = 150 \cdot \epsilon_0 \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

Затем на границе в диэлектрике с ϵ_{a2} при $D_{n1} = D_{n2}$ рассчитываем модуль нормальной составляющей вектора поляризованности:

$$P_{n2} = \frac{\epsilon_{a2} - \epsilon_0}{\epsilon_{a2}} \cdot D_{n2} = 75 \cdot \epsilon_0 \text{ (Кл/м}^2\text{)}.$$

В результате поверхностная плотность связанных зарядов на границе двух диэлектриков составит:

$$\sigma_{\text{связ}} = P_{n1} - P_{n2} = 25 \cdot \epsilon_0 \text{ (Кл/м}^2\text{)},$$

тогда $\sigma_{\text{связ}}/\epsilon_0 = 25$.

Задача А.5. Провод с $\tau = 124,27\pi \epsilon_0$ (Кл/м) при $h = 2$ (м) расположен в воздухе над проводящей плоскостью (рис. А.1). Определить потенциал φ в точке n с координатами $x = 1$ (м), $y = 1$ (м).

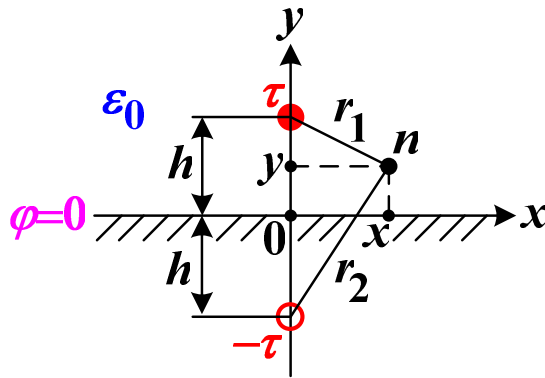


Рис. А.1

Решение. По методам зеркальных изображений и наложения искомого потенциал в точке n с координатами $x=1$ (м), $y=1$ (м) составит:

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + (h+y)^2}}{\sqrt{x^2 + (h-y)^2}}\right) = 50 \text{ (В)}.$$

Задача А.6. Двухпроводная линия с разноименно заряженными проводами расположена в воздухе (рис. А.2) и имеет параметры: $R=0,01$ (м); $d=2$ (м); $u = \varphi_1 - \varphi_2 = 30$ (кВ). Определить силу притяжения проводов F_0 (мН/м).

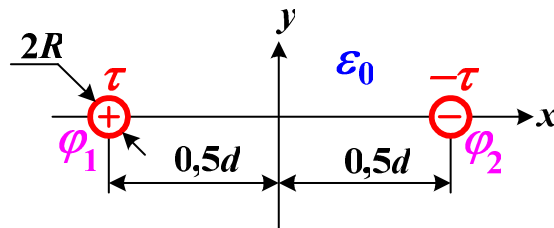


Рис. А.2

Решение. Находим емкость линии на единицу длины [5]:

$$C_0 \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{R}\right)} = 5,25 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)}.$$

Далее по заданному напряжению между проводами $u=30 \cdot 10^3$ (В) рассчитываем линейную плотность зарядов проводов:

$$\tau = C_0 \cdot u = 5,25 \cdot 10^{-12} \cdot 30 \cdot 10^3 = 1,575 \cdot 10^{-7} \text{ (Кл/м)}.$$

В результате искомая сила притяжения проводов на единицу длины линии составит:

$$F_0 = -\frac{\partial}{\partial d} \left(\frac{\tau^2}{2C_0} \right) = -\frac{\tau^2}{2\pi\epsilon_0 d} = -2,23 \cdot 10^{-4} = -0,223 \text{ (мН/м)},$$

причем знак минус у числового значения силы означает притяжение проводов к друг другу.

Задача А.7. Двухпроводная линия с радиусом проводов $R=0,01$ (м) расположена в воздухе над проводящей плоскостью (рис. 3.2) при $h_1=2$ (м); $h_2=3$ (м); $d=1$ (м). Определить емкость линии на единицу длины C_0 (пФ/м).

Решение. Рассчитываем геометрические размеры

$$d_{12} = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2} = 1,414 \text{ (м)}; D_{12} = \sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2} = 5,1 \text{ (м)}$$

и потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_1}{R}\right) = 1,077 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)}; \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_2}{R}\right) = 1,15 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{12}}{d_{12}}\right) = 2,305 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)}.$$

Далее определяем емкостные коэффициенты

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = 9,701 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = 9,086 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = -1,945 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)}$$

и частичные емкости:

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} = 7,756 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)}; C_{22} = \beta_{22} + \beta_{21} = 7,142 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)};$$

$$C_{12} = C_{21} = -\beta_{12} = 1,945 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)}.$$

В результате искомая емкость линии на единицу длины составит:

$$C_0 = C_{12} + \frac{C_{11} \cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = 5,663 \cdot 10^{-12} = 5,663 \text{ (пФ/м)}.$$

Задача А.8. Двухжильный кабель имеет параметры: $a=0,02$ (м); $b=0,01$ (м); $R=0,005$ (м); $\tau_1=2$ (мкКл/м); $\varphi_1=5$ (кВ); $\epsilon_a=2\epsilon_0$ (рис. А.3).

Определить энергию электростатического поля кабеля на единицу длины W_0 (мДж/м).

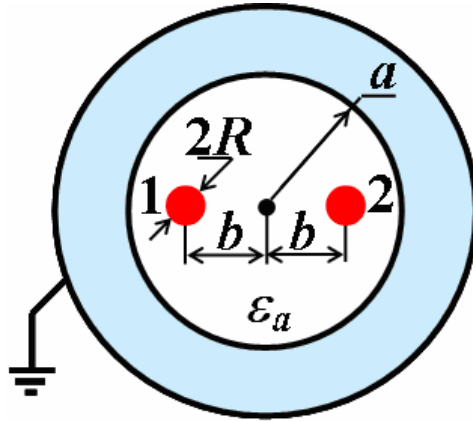


Рис. А.3

Решение. Рассчитываем потенциальные коэффициенты [5]:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(\frac{a^2 - b^2}{bR}\right) = 1,61 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{2b^2}\right) = 8,235 \cdot 10^9 \text{ (м/Ф)}.$$

Далее по первой группе формул Максвелла (3.3) определяем линейную плотность зарядов 2-ой жилы кабеля

$$\tau_2 = \frac{\varphi_1 - \alpha_{11}\tau_1}{\alpha_{12}} = -3,304 \cdot 10^{-6} \text{ (Кл/м)}$$

и находим потенциал этой жилы

$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 = -3,673 \cdot 10^4 \text{ (В)}.$$

В результате энергия электростатического поля кабеля на единицу длины составит:

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot (\tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2) = 0,066 = 66 \text{ (мДж/м)}.$$

Задача А.9. Трехпроводная линия (рис. А.4) с радиусом проводов $R=0,01$ (м) расположена в воздухе над проводящей плоскостью (“земля”) при $h_1=6$ (м); $h_2=8$ (м); $h_3=7$ (м); $d_1=3$ (м); $d_2=2,5$ (м). Известны потенциалы проводов: $\varphi_1=100$ (кВ); $\varphi_2=200$ (кВ); $\varphi_3=-300$ (кВ). Определить линейные плотности зарядов проводов τ_1 , τ_2 , τ_3 (мкКл/м).

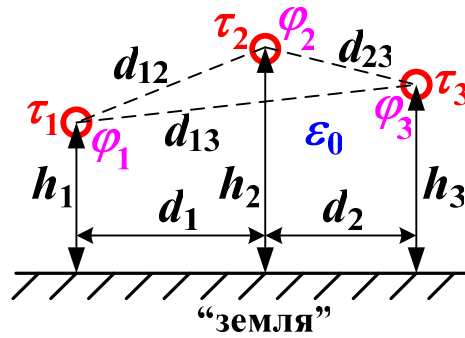


Рис. А.4

Решение. Рассчитываем геометрические размеры

$$d_{12} = \sqrt{d_1^2 + (h_1 - h_2)^2} = 3,6 \text{ (м)}; D_{12} = \sqrt{d_1^2 + (h_1 + h_2)^2} = 14,3 \text{ (м)};$$

$$d_{13} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + (h_1 - h_3)^2} = 5,6 \text{ (м)}; D_{13} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + (h_1 + h_3)^2} = 14,1 \text{ (м)};$$

$$d_{23} = \sqrt{d_2^2 + (h_2 - h_3)^2} = 2,7 \text{ (м)}; D_{23} = \sqrt{d_2^2 + (h_2 + h_3)^2} = 15,2 \text{ (м)}$$

и потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_1}{R}\right) = 1,274 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_2}{R}\right) = 1,326 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_3}{R}\right) = 1,302 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{12}}{d_{12}}\right) = 2,478 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{13}}{d_{13}}\right) = 1,665 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{23}}{d_{23}}\right) = 3,111 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)}.$$

Далее вычисляем определитель первой группы формул Максвелла

$$\Delta = \alpha_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}) - \alpha_{21}(\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{13}) + \alpha_{31}(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}) = 1,985 \cdot 10^{33} \text{ (м}^3\text{/Ф}^3\text{)}$$

и определяем емкостные коэффициенты:

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2}{\Delta} = 8,208 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{22} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2}{\Delta} = 8,217 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{33} = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\Delta} = 8,201 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{\alpha_{31}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{33}}{\Delta} = -1,364 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{13} = \beta_{31} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}}{\Delta} = -7,234 \cdot 10^{-13} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{23} = \beta_{32} = \frac{\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{32}\alpha_{11}}{\Delta} = -1,789 \cdot 10^{-12} \text{ (Ф/м)}.$$

Затем по второй группе формул Максвелла (3.4) находим искомые линейные плотности зарядов проводов:

$$\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 + \beta_{13}\varphi_3 = 7,649 \cdot 10^{-7} = 0,7649 \text{ (мкКл/м)};$$

$$\tau_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 + \beta_{23}\varphi_3 = 2,044 \cdot 10^{-6} = 2,044 \text{ (мкКл/м)};$$

$$\tau_3 = \beta_{31}\varphi_1 + \beta_{32}\varphi_2 + \beta_{33}\varphi_3 = -2,891 \cdot 10^{-6} = -2,891 \text{ (мкКл/м)}.$$

Задача А.10. Трехжильный кабель имеет параметры: $a=0,02$ (м); $b=0,01$ (м); $R=0,005$ (м); $\tau_1=2$ (мкКл/м); $\tau_2=4$ (мкКл/м); $\tau_3=-4$ (мкКл/м); $\epsilon_a=3\epsilon_0$ (рис. А.5). Определить энергию электростатического поля кабеля на единицу длины W_0 (мДж/м).

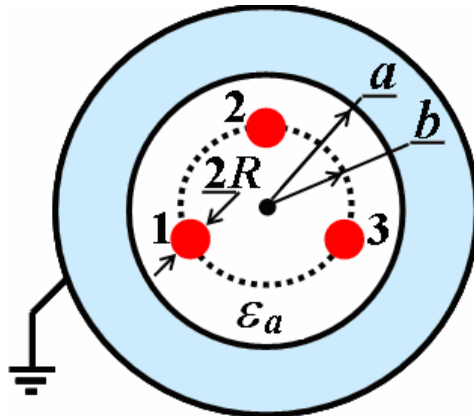


Рис. А.5

Решение. Рассчитываем потенциальные коэффициенты [5]:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \left(\frac{a^2 - b^2}{bR} \right) = 1,074 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a} \ln \left[1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} + \frac{(a^2 - b^2)^2}{3b^4} \right] = 1,166 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)},$$

причем $\alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{12}$.

Далее по первой группе формул Максвелла (3.3) определяем потенциалы жил кабеля:

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 = 2,147 \cdot 10^4 \text{ (В)};$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + \alpha_{23}\tau_3 = 1,962 \cdot 10^4 \text{ (В)};$$

$$\varphi_3 = \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2 + \alpha_{33}\tau_3 = 2,701 \cdot 10^4 \text{ (В)}.$$

В результате энергия электростатического поля кабеля на единицу длины составит:

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot (\tau_1\varphi_1 + \tau_2\varphi_2 + \tau_3\varphi_3) = 6,694 \cdot 10^{-3} = 6,694 \text{ (мДж/м)}.$$

Задача А.11. Разноименно заряженные параллельные цилиндры расположены в воздухе и имеют размеры (рис. А.6): $R_1=0,1$ (м); $R_2=0,3$ (м); $D=0,5$ (м). При заданном напряжении между цилиндрами $u = \varphi_1 - \varphi_2 = 20$ (кВ) определить на единицу длины линейную плотность зарядов τ (мкКл/м), емкость C_0 (пФ/м) и энергию электростатического поля W_0 (мДж/м).

Решение. Рассчитываем геометрические параметры [5]:

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot D} = 0,17 \text{ (м)}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot D} = 0,33 \text{ (м)};$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2} = 0,137 \text{ (м)}.$$

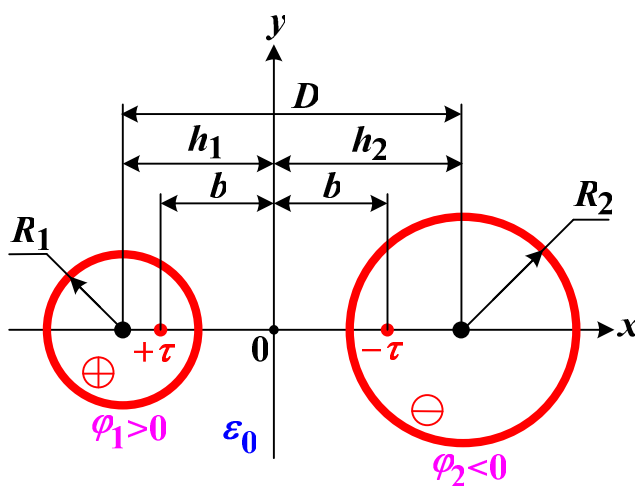


Рис. А.6

Далее находим электрическую емкость цилиндров на единицу длины

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \left[\frac{(h_1 + b) \cdot (h_2 + b)}{R_1 \cdot R_2} \right]} = 3,551 \cdot 10^{-11} = 35,51 \text{ (пФ/м)},$$

линейную плотность зарядов

$$\tau = C_0 \cdot u = 0,71 \cdot 10^{-6} = 0,71 \text{ (мкА/м)}$$

и энергию электростатического поля

$$W_0 = \frac{C_0 \cdot u^2}{2} = \frac{\tau \cdot u}{2} = 7,1 \cdot 10^{-3} = 7,1 \text{ (мДж/м)}.$$

Задача А.12. Разноименно заряженные параллельные цилиндры расположены в воздухе и имеют размеры (рис. А.7): $R_1=0,1$ (м); $R_2=0,3$ (м); $D=0,1$ (м). При заданном потенциале меньшего цилиндра $\varphi_1=10$ (кВ) определить на единицу длины линейную плотность зарядов τ (мкКл/м), емкость C_0 (пФ/м), напряжение между цилиндрами $u = \varphi_1 - \varphi_2$ (кВ) и энергию электростатического поля W_0 (мДж/м).

Решение. Рассчитываем геометрические параметры [5]:

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot D} = 0,35 \text{ (м)}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot D} = 0,45 \text{ (м)};$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2} = 0,335 \text{ (м)}.$$

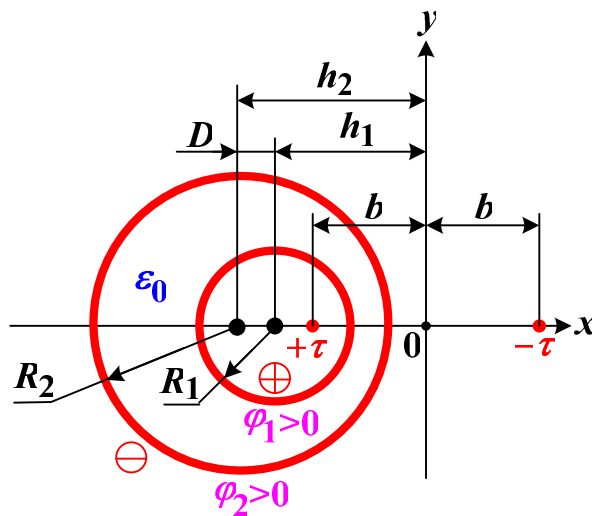


Рис. А.7

Далее определяем линейную плотность зарядов

$$\tau = \frac{2\pi\epsilon_0\varphi_1}{\ln\left(\frac{h_1 + b}{R_1}\right)} = 0,289 \cdot 10^{-6} = 0,289 \text{ (мкА/м)},$$

электрическую емкость цилиндров на единицу длины

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left[\frac{(h_1 + b) \cdot (h_2 - b)}{R_1 \cdot R_2}\right]} = 5,78 \cdot 10^{-11} = 57,8 \text{ (пФ/м)},$$

напряжение между цилиндрами

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{C_0} = 5000 = 5 \text{ (кВ)}$$

и энергию электростатического поля

$$W_0 = \frac{C_0 \cdot u^2}{2} = \frac{\tau \cdot u}{2} = 0,723 \cdot 10^{-3} = 0,723 \text{ (мДж/м)}.$$

Задача А.13. Металлический заряженный цилиндр расположен в воздухе над проводящей плоскостью (рис. А.8) при $R=0,1$ (м) и $h=0,2$ (м), причем линейная плотность зарядов цилиндра $\tau=5$ (мкКл/м). Определить на единицу длины энергию электростатического поля W_0 (Дж/м), силу притяжения цилиндра к плоскости F_0 (Н/м) и максимальную напряженность E_m (кВ/мм).

Решение. Рассчитываем расстояние от плоскости до электрической оси цилиндра [5]:

$$b = \sqrt{h^2 - R^2} = 0,173 \text{ (м)}.$$

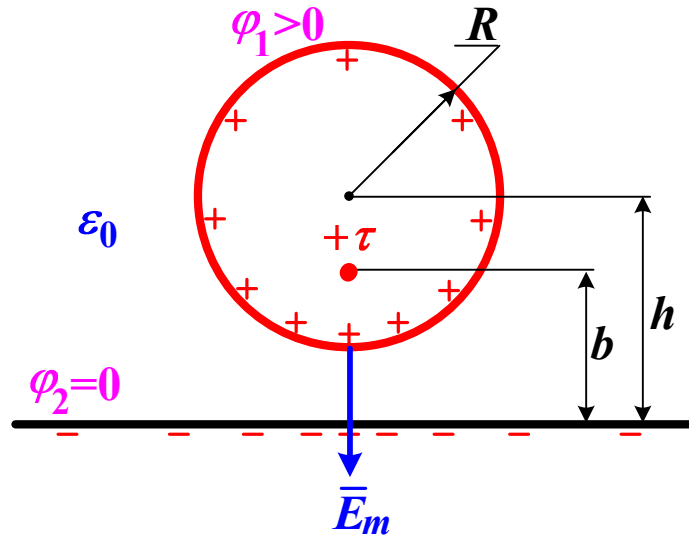


Рис. А.8

Далее определяем электрическую емкость цилиндра и плоскости

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{h+b}{R}\right)} = 4,224 \cdot 10^{-11} \text{ (Ф/м)}$$

и напряжение между цилиндром и плоскостью

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{h+b}{R}\right) = 1,184 \cdot 10^5 \text{ (В)}.$$

В результате находим искомую энергию

$$W_0 = \frac{C_0 \cdot u^2}{2} = \frac{\tau^2}{2C_0} = 0,296 \text{ (Дж/м)},$$

силу притяжения цилиндра к плоскости

$$F_0 = -\frac{\partial W_0}{\partial h} = -\frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0(h+b)} = -0,602 \text{ (Н/м)}$$

и максимальную напряженность

$$E_m = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sqrt{\frac{h+R}{h-R}} = 1,557 \cdot 10^6 = 1,557 \text{ (кВ/мм)}.$$

Задача А.14. Коаксиальный кабель (рис. А.9) имеет параметры: $\epsilon_a = 2,3 \cdot \epsilon_0$; $R_1 = 0,01$ (м); $R_2 = 0,015$ (м). При заданном приложенном напряжении $u = \varphi_1 - \varphi_2 = 12$ (кВ) определить на единицу длины кабеля линейную плотность зарядов τ (мкКл/м), энергию электростатического поля W_0 (мДж/м) и максимальную напряженность E_m (кВ/мм).

Решение. Определяем емкость кабеля на единицу длины [5]:

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln(R_2/R_1)} = 3,156 \cdot 10^{-10} \text{ (Ф/м)}.$$

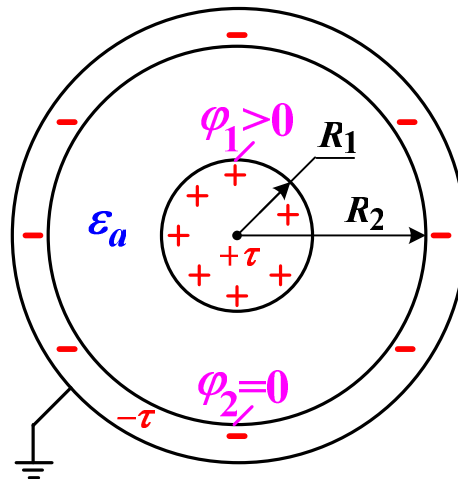


Рис. А.9

Далее находим искомую линейную плотность зарядов

$$\tau = C_0 \cdot u = 3,787 \cdot 10^{-6} = 3,787 \text{ (мкКл/м)},$$

энергию электростатического поля

$$W_0 = \frac{C_0 \cdot u^2}{2} = \frac{\tau^2}{2C_0} = 22,721 \cdot 10^{-3} = 22,721 \text{ (мДж/м)}$$

и максимальную напряженность

$$E_m = \frac{u}{R_1 \cdot \ln(R_2 / R_1)} = 2,96 \cdot 10^6 = 2,96 \text{ (кВ/мм)}.$$

4. Уравнения электрического поля постоянного тока в проводящей среде

Электрическое поле постоянного тока как частный случай электромагнитного поля будем рассматривать для тока проводимости в однородных и изотропных проводящих средах. В этих средах удельная проводимость γ (1/Ом·м) постоянна, например, при 20° С:

для меди $\gamma \approx 5,8 \cdot 10^7$ (1/Ом·м); для воды $\gamma \approx 0,1$ (1/Ом·м);

для грунта $\gamma \approx 0,01$ (1/Ом·м); для воздуха $\gamma \approx 10^{-9} \div 10^{-10}$ (1/Ом·м);

для полиэтилена $\gamma \approx 10^{-14}$ (1/Ом·м).

Электрический ток *проводимости* – это упорядоченное движение свободных зарядов под действием электрического поля, характеризующегося напряженностью \bar{E} (В/м). Электрический ток проводимости – это скорость прохождения свободных зарядов сквозь заданную поверхность:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right) = \frac{dq}{dt}, \text{ А.}$$

Ток – величина скалярная. Если значение тока не зависит от времени, то такой ток $i=I$ называется постоянным. При этом заряд, проходящий через заданную поверхность равен:

$$q = q_0 + I \cdot t, \text{ Кл.}$$

Плотностью тока называют векторную величину $\bar{\delta}$, численно равную

$$\delta = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta i}{\Delta S} \right) = \frac{di}{dS}, \text{ А/м}^2$$

причем $\bar{\delta} = \delta \cdot \bar{1}_n$, где $\bar{1}_n$ – единичный вектор, перпендикулярный площадке ΔS и совпадающий с направлением движения зарядов, образующий ток Δi (рис. 4.1).

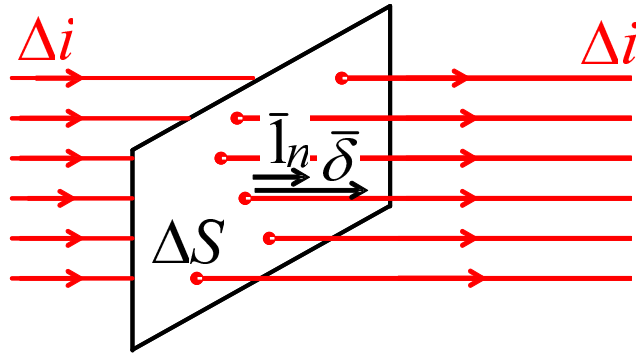


Рис. 4.1

Таким образом, ток I через некоторую поверхность S равен потоку вектора плотности тока через эту же поверхность:

$$i = \int_S \bar{\delta} \cdot d\bar{S}.$$

Для тока проводимости справедливы следующие законы.

1. Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E},$$

причем вектора \bar{E} и $\bar{\delta}$ совпадают по направлению.

2. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$dP = \gamma E^2,$$

где dP – мощность тепловых потерь в объеме dV (Вт/м³).

3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме для постоянного тока:

$$\text{div } \bar{\delta} = 0,$$

т.е. постоянный ток непрерывен и линии вектора $\bar{\delta}$ замкнуты, тогда

$$\oint_S \bar{\delta} \cdot d\bar{S} = 0.$$

Ограничимся рассмотрением электрического поля постоянного тока в областях, где нет *сторонних сил* (т.е. ЭДС). Такое поле аналогично электростатическому полю при отсутствии объемных зарядов ($\rho=0$), так как

$$\text{div } \bar{D} = 0.$$

Поэтому для определения потенциала φ при напряженности

$$\bar{E} = \bar{\delta} / \gamma$$

можно использовать уравнения:

$$\bar{E} = -\text{grad } \varphi; \nabla^2 \varphi = 0.$$

При этом граничные условия для электрического поля постоянного тока при отсутствии сторонних сил (ЭДС) будут следующими.

1. На границе двух разных проводников равны нормальные составляющие векторов плотности тока (рис. 4.2): $\delta_{n1} = \delta_{n2}$.

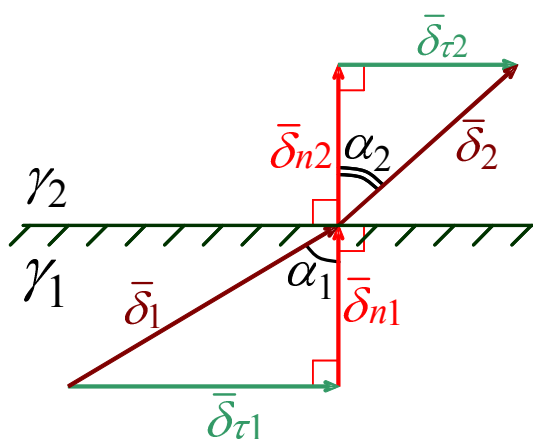


Рис. 4.2

2. На границе двух разных проводников равны касательные составляющие векторов напряженности (рис. 4.3): $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$.

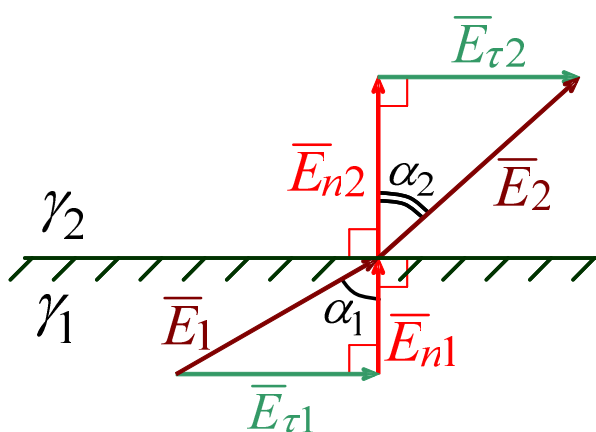


Рис. 4.3

3. Для углов входа (α_1) и выхода (α_2) векторов плотности тока и напряженности на границе выполняется условие:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Задачами расчета электрического поля постоянного тока являются определение сопротивлений проводников, вычисление проводимости токов утечки через изоляцию и расчет сопротивления и шагового напряжения заземления.

5. Расчет токов утечки через изоляцию линий

Будем считать ток утечки I_y через изоляцию линий постоянным во времени, а изоляцию неидеальной с удельной проводимостью γ и диэлектрической проницаемостью ϵ_a . Рассмотрим линию в виде коаксиального кабеля, по которой проходит ток I при напряжении U (рис. 5.1).

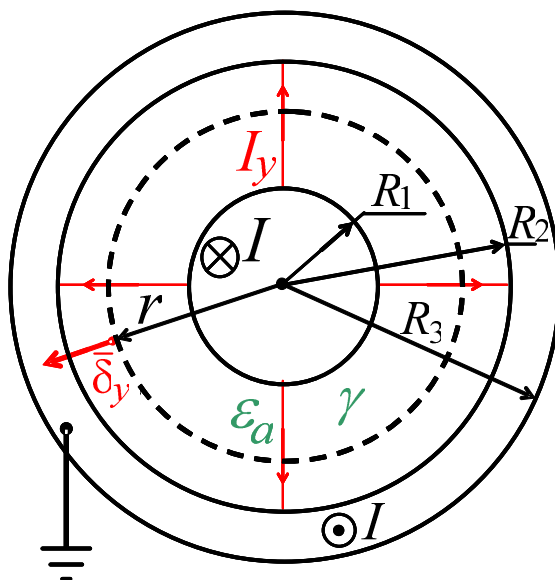


Рис. 5.1

Примем потенциал центральной жилы равным $\varphi_1 = U$, а внешней – $\varphi_2 = 0$. Охватим центральную жилу цилиндрической поверхностью S радиуса r и длиной l , тогда в силу симметрии можно определить ток утечки:

$$I_y = \int_S \bar{\delta}_y \cdot d\bar{S} = \delta_y \cdot 2\pi r l,$$

тогда находим плотность этого тока

$$\delta_y = \frac{I_y}{2\pi r l}$$

и напряженность электрического поля

$$E = \frac{\delta_y}{\gamma} = \frac{I_y}{2\pi \gamma r l}.$$

Далее, используя уравнение

$$\bar{E} = E \cdot \bar{1}_r = -\text{grad } \varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \cdot \bar{1}_r,$$

находим потенциал

$$\varphi = -\int E dr + A = -\frac{I_y}{2\pi\gamma l} \cdot \ln r + A .$$

Так как $\varphi = \varphi_2 = 0$ при $r=R_2$, тогда постоянная интегрирования

$$A = \frac{I_y}{2\pi\gamma l} \cdot \ln(R_2) .$$

В результате

$$\varphi = \frac{I_y}{2\pi\gamma l} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{r}\right)$$

и при $r=R_1$ получаем

$$\varphi = \varphi_1 = U = \frac{I_y}{2\pi\gamma l} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) .$$

Таким образом, *проводимость изоляции* току утечки на единицу длины такой линии составит

$$G_0 = \frac{I_y}{U \cdot l} = \frac{2\pi\gamma}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} , \text{ См/м.}$$

Если сравнить G_0 с формулой для емкости этой линии

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} , \text{ Ф/м}$$

то можно сделать вывод о том, что в известной формуле для C_0 замена ϵ_a на γ дает формулу для G_0 .

В результате для двухпроводной линии вблизи проводящей плоской поверхности (рис. 5.2) с учетом (3.6) при $R \ll d$ и $R \ll h_{1,2}$ имеем

$$G_0 = \frac{\gamma}{\epsilon_a} C_0 = \frac{2\pi\gamma}{\ln\left(\frac{2h_1}{R}\right) + \ln\left(\frac{2h_2}{R}\right) - 2\ln\left(\frac{D_{12}}{d_{12}}\right)} , \quad (5.1)$$

где D_{12} – расстояние от провода 1 до зеркального изображения провода 2 (рис. 3.2).

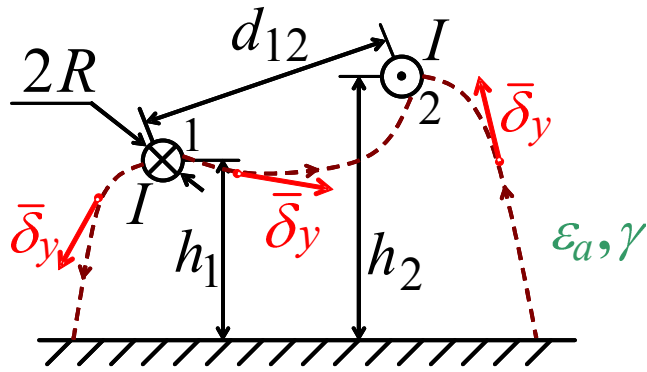


Рис. 5.2

При этом (рис. 5.3):

$$G_0 = \frac{\gamma C_0}{\epsilon_a} = G_{12} + \frac{G_{11} \cdot G_{22}}{G_{11} + G_{22}}, \quad (5.2)$$

где $G_{km} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \cdot C_{km}$ – собственные ($k = m$) и взаимные ($k \neq m$) проводимости изоляции проводов линии.

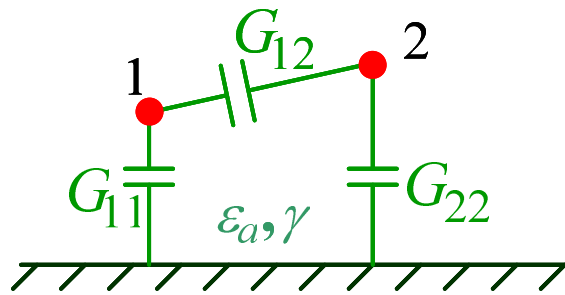


Рис. 5.3

Токи утечки с проводов линии можно определить так

$$\begin{cases} I_{y1} = G_{11} \cdot \varphi_1 + G_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \\ I_{y2} = G_{21} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) + G_{22} \cdot \varphi_2 \end{cases}, \quad (5.3)$$

причем $G_{12} = G_{21}$ и на основании аналогии с электростатическим полем имеем

$$\begin{cases} I_{y1} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \cdot \tau_1 \\ I_{y2} = \frac{\gamma}{\epsilon_a} \cdot \tau_2 \end{cases}, \quad (5.4)$$

где τ_1 и τ_2 – линейные плотности зарядов проводов 1 и 2.

Мощность активных потерь от токов утечки (Вт/м) можно определить двумя методами:

$$\begin{cases} P_{y1} = G_{12} \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + G_{11} \cdot \varphi_1^2 + G_{22} \cdot \varphi_2^2 \\ P_{y2} = I_{y1} \cdot \varphi_1 + I_{y2} \cdot \varphi_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

Равенство этих мощностей ($P_{y1}=P_{y2}$) и равенство токов утечки, найденных по формулам (5.3) и (5.4), используется для проверки правильности расчетов.

При этом сопротивление цилиндрических проводов радиуса R двухпроводной линии постоянному току определится так

$$R_0 = \frac{2}{\gamma_a \pi R^2}, \text{ Ом/м} \quad (5.6)$$

где γ_a , 1/Ом·м – удельная проводимость материала проводов.

Б. Примеры решения задач по электрическому полю постоянного тока

Задача Б.1. При векторе напряженности

$$\vec{E} = 3x \cdot \vec{1}_x - 2y \cdot \vec{1}_y + cz \cdot \vec{1}_z, \text{ (В/м)}$$

определить модуль вектора плотности тока δ (А/мм²) в точке с координатами $x=0,2$ (м), $y=0,2$ (м), $z=0,2$ (м) при заданной удельной проводимости среды $\gamma=15 \cdot 10^6$ (1/Ом·м).

Решение. Для определения коэффициента c вектора напряженности используем законы Ома и Кирхгофа в дифференциальной форме

$$\text{div } \vec{\delta} = \text{div}(\gamma \vec{E}) = \gamma \cdot \text{div}(\vec{E}) = 0,$$

т. е. в прямоугольной системе координат получаем

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 3 - 2 + c = 0,$$

тогда $c = -1$ (В/м²).

Далее записываем вектор плотности тока

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} = 45 \cdot 10^6 x \cdot \vec{1}_x - 30 \cdot 10^6 y \cdot \vec{1}_y - 15 \cdot 10^6 z \cdot \vec{1}_z, \text{ (А/мм}^2\text{)}$$

и в точке с координатами $x=0,2$ (м), $y=0,2$ (м), $z=0,2$ (м) находим искомый модуль этого вектора

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} = \\ &= \sqrt{(45 \cdot 10^6 \cdot 0,2)^2 + (30 \cdot 10^6 \cdot 0,2)^2 + (15 \cdot 10^6 \cdot 0,2)^2} = \\ &= 11,225 \cdot 10^6 = 11,225 \text{ (А/мм}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Задача Б.2. При заданном векторе плотности тока

$$\vec{\delta} = 4x \cdot \vec{1}_x + 3y \cdot \vec{1}_y - 7z \cdot \vec{1}_z, \text{ (А/мм}^2\text{)}$$

определить значение потенциала φ (В) вида $\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2$ в точке с координатами $x=3$ (м), $y=2$ (м), $z=1$ (м) при известной удельной проводимости среды $\gamma=10 \cdot 10^6$ (1/Ом·м).

Решение. Переведем заданный вектор плотности тока $\vec{\delta}$ в (А/м²) и по закону Ома в дифференциальной форме запишем вектор напряженности:

$$\vec{E} = \frac{\vec{\delta} \cdot 10^6}{\gamma} = 0,4x \cdot \vec{1}_x + 0,3y \cdot \vec{1}_y - 0,7z \cdot \vec{1}_z, \text{ (В/м)}.$$

Далее на основании уравнения

$$\vec{E} = -\text{grad}(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{1}_x - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{1}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{1}_z$$

находим составляющие потенциала:

$$Ax^2 = -\int E_x \cdot dx = -\int 0,4x \cdot dx = -0,2x^2, \text{ (В);}$$

$$By^2 = -\int E_y \cdot dy = -\int 0,3y \cdot dy = -0,15y^2, \text{ (В);}$$

$$Cz^2 = -\int E_z \cdot dz = -\int (-0,7z) \cdot dz = 0,35z^2, \text{ (В)}.$$

В результате зависимость для потенциала будет следующей

$$\varphi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 = -0,2x^2 - 0,15y^2 + 0,35z^2, \text{ (В)}$$

тогда искомое значение потенциала в точке с координатами $x=3$ (м), $y=2$ (м), $z=1$ (м) составит:

$$\varphi = -0,2 \cdot (3)^2 - 0,15 \cdot (2)^2 + 0,35 \cdot (1)^2 = -2,05 \text{ (В)}.$$

Задача Б.3. На границе раздела двух проводников (рис. 4.2) с удельными проводимостями γ_1 и γ_2 заданы модули векторов плотности тока $\delta_1=20$ (А/мм²); $\delta_2=30,41$ (А/мм²) и угол $\alpha_1=30^\circ$. Определить для удельных проводимостей отношение γ_2/γ_1 .

Решение. Из равенства нормальных составляющих плотностей тока на границе раздела двух проводников $\delta_{n1} = \delta_{n2}$ или

$$\delta_1 \cos(\alpha_1) = \delta_2 \cos(\alpha_2)$$

находим угол выхода вектора плотности тока в проводнике с γ_2 :

$$\alpha_2 = \arccos \left[\frac{\delta_1 \cos(\alpha_1)}{\delta_2} \right] = 55,28^\circ.$$

Далее из уравнения

$$\frac{\text{tg}(\alpha_1)}{\text{tg}(\alpha_2)} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{Б.1}$$

определяем искомое отношение:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1)} = 2,5.$$

Задача Б.4. На границе раздела двух проводников (рис. 4.3) с удельными проводимостями $\gamma_1=3\gamma_0$ и $\gamma_2=\gamma_0$ заданы модуль вектора напряженности $E_1=11,547$ (В/м) и угол $\alpha_1=60^\circ$. Определить модуль вектора напряженности E_2 (В/м) в проводнике с удельной проводимостью $\gamma_2=\gamma_0$.
Решение. Из уравнения (Б.1) находим угол выхода вектора напряженности в проводнике с γ_2 :

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \left[\frac{\gamma_2 \operatorname{tg}(\alpha_1)}{\gamma_1} \right] = 30^\circ.$$

Далее из равенства касательных составляющих напряженностей на границе раздела двух проводников $E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$ или

$$E_1 \sin(\alpha_1) = E_2 \sin(\alpha_2)$$

определяем искомый модуль вектора напряженности:

$$E_2 = \frac{E_1 \sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = 20 \text{ (В/м)}.$$

Задача Б.5. Двухпроводная линия (рис. 3.2) расположена в воздухе с $\gamma=10^{-10}$ (1/Ом·м) параллельно поверхности “земли” и имеет радиус проводов $R=0,01$ (м) и размеры: $h_1=5$ (м); $h_2=7$ (м); $d=2$ (м). Токи утечки в воздухе с проводов линии: $I_{y1} = -I_{y2}=0,5595$ (мкА/м). Определить напряжение между проводами линии $u = \varphi_1 - \varphi_2$ (кВ).

Решение. Рассчитываем геометрические размеры

$$d_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 - h_2)^2} = 2,83 \text{ (м)}; \quad D_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2} = 12,17 \text{ (м)}.$$

и потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_1}{R}\right) = 1,242 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_2}{R}\right) = 1,302 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{12}}{d_{12}}\right) = 2,622 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)}.$$

Далее согласно (5.4) определяем линейные плотности зарядов проводов

$$\tau_1 = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \cdot I_{y1} = 4,954 \cdot 10^{-8} \text{ (Кл/м)}; \quad \tau_2 = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \cdot I_{y2} = -4,954 \cdot 10^{-8} \text{ (Кл/м)}$$

и по первой группе формул Максвелла находим потенциалы проводов:

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 = 4852 \text{ (В)};$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 = -5152 \text{ (В)}.$$

В результате искомое напряжение между проводами линии составит:

$$u = \varphi_1 - \varphi_2 = 10004 \approx 10 \text{ (кВ)}.$$

Задача Б.6. Двухжильный кабель (рис. А.3) имеет изоляцию с $\varepsilon_a=2,3\varepsilon_0$ и $\gamma=10^{-11}$ (1/Ом·м), а также радиус жил $R=0,0015$ (м) и размеры: $a=0,009$ (м); $b=0,0045$ (м). Потенциалы жил: $\varphi_1=-\varphi_2=3$ (кВ). Определить токи утечки в изоляции с первой и второй жил кабеля I_{y1}, I_{y2} (мкА/м).

Решение. Рассчитываем потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln\left(\frac{a^2 - b^2}{bR}\right) = 1,717 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_a} \ln\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{2b^2}\right) = 7,161 \cdot 10^9 \text{ (м/Ф)}.$$

Далее находим емкостные коэффициенты:

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = 7,049 \cdot 10^{-11} \text{ (Ф/м)};$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} = -2,94 \cdot 10^{-11} \text{ (Ф/м)}.$$

Затем по второй группе формул Максвелла (3.4) определяем линейные плотности зарядов жил кабеля:

$$\tau_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2 = 2,997 \cdot 10^{-7} \text{ (Кл/м)};$$

$$\tau_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2 = -2,997 \cdot 10^{-7} \text{ (Кл/м)}.$$

В результате согласно (5.4) искомые токи утечки с первой и второй жил кабеля составят:

$$I_{y1} = \frac{\gamma}{\varepsilon_a} \cdot \tau_1 = 1,472 \cdot 10^{-7} = 0,1472 \text{ (мкА)};$$

$$I_{y2} = \frac{\gamma}{\varepsilon_a} \cdot \tau_2 = -1,472 \cdot 10^{-7} = -0,1472 \text{ (мкА)},$$

причем знак плюс у числового значения тока I_{y1} означает, что этот ток направлен с первой жилы, а знак минус у числового значения тока I_{y2} свидетельствует о том, что ток I_{y2} направлен во вторую жилу кабеля.

Задача Б.7. Трехпроводная линия расположена в воздухе (рис. А.4) с удельной проводимостью $\gamma=10^{-10}$ (1/Ом·м) параллельно поверхности “земли” и имеет радиус проводов $R=0,01$ (м) и размеры: $h_1=5$ (м); $h_2=5$ (м); $h_3=5$ (м); $d_1=d_2=2$ (м). Линейные плотности зарядов проводов: $\tau_1=-2$ $\tau_2=-2$ $\tau_3=2 \cdot 10^{-6}$ (Кл/м). Определить суммарную мощность активных потерь в воздухе от токов утечки P_y (Вт/м).

Решение. Рассчитываем геометрические размеры

$$d_{12} = \sqrt{d_1^2 + (h_1 - h_2)^2} = 2 \text{ (м)}; D_{12} = \sqrt{d_1^2 + (h_1 + h_2)^2} = 10,2 \text{ (м)};$$

$$d_{13} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + (h_1 - h_3)^2} = 4 \text{ (м)}; D_{13} = \sqrt{(d_1 + d_2)^2 + (h_1 + h_3)^2} = 10,77 \text{ (м)};$$

$$d_{23} = \sqrt{d_2^2 + (h_2 - h_3)^2} = 2 \text{ (м)}; D_{23} = \sqrt{d_2^2 + (h_2 + h_3)^2} = 10,2 \text{ (м)}$$

и потенциальные коэффициенты:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_1}{R}\right) = 1,242 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_2}{R}\right) = 1,242 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2h_3}{R}\right) = 1,242 \cdot 10^{11} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{12}}{d_{12}}\right) = 2,928 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{13}}{d_{13}}\right) = 1,78 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)};$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{D_{23}}{d_{23}}\right) = 2,928 \cdot 10^{10} \text{ (м/Ф)}.$$

Далее по первой группе формул Максвелла (3.3) определяем потенциалы проводов линии:

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2 + \alpha_{13}\tau_3 = 2,013 \cdot 10^4 \text{ (В)};$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}\tau_1 + \alpha_{22}\tau_2 + \alpha_{23}\tau_3 = -9,489 \cdot 10^3 \text{ (В)};$$

$$\varphi_3 = \alpha_{31}\tau_1 + \alpha_{32}\tau_2 + \alpha_{33}\tau_3 = -1,178 \cdot 10^4 \text{ (В)}.$$

В результате при токах утечки (5.4) с проводов линии

$$I_{y1} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \cdot \tau_1 = 2,259 \cdot 10^{-6} = 2,259 \text{ (мкА/м)};$$

$$I_{y2} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \cdot \tau_2 = -1,129 \cdot 10^{-6} = -1,129 \text{ (мкА/м)};$$

$$I_{y3} = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \cdot \tau_3 = -1,129 \cdot 10^{-6} = -1,129 \text{ (мкА/м)}$$

согласно (5.5) искомая суммарная мощность активных потерь в воздухе от этих токов составит:

$$P_y = I_{y1} \cdot \varphi_1 + I_{y2} \cdot \varphi_2 + I_{y3} \cdot \varphi_3 = 0,069 \text{ (Вт/м)}.$$

Задача Б.8. Разноименно заряженные цилиндры (рис. А.6) расположены в воздухе с $\gamma=10^{-10}$ (1/Ом·м) и имеют размеры: $R_1=0,2$ (м); $R_2=0,3$ (м); $D=0,6$ (м). Суммарная мощность активных потерь в воздухе: $P_y=0,5$ (Вт/м).

Определить напряжение между цилиндрами $u = \varphi_1 - \varphi_2$ (кВ), ток утечки I_y (мкА/м) и линейную плотность зарядов на малом цилиндре τ (мкКл/м).

Решение. Рассчитываем геометрические параметры [5]:

$$h_1 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot D} = 0,258 \text{ (м)}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot D} = 0,342 \text{ (м)};$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2} = 0,164 \text{ (м)}.$$

Далее, используя известную формулу для емкости цилиндров C_0 , определяем проводимость для тока утечки:

$$G_0 = \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \cdot C_0 = \frac{2\pi\gamma}{\ln \left[\frac{(h_1 + b) \cdot (h_2 + b)}{R_1 \cdot R_2} \right]} = 4,957 \cdot 10^{-10} \text{ (1/Ом}\cdot\text{м)}.$$

В результате находим искомое напряжение

$$u = \sqrt{\frac{P_y}{G_0}} = 3,176 \cdot 10^4 = 31,76 \text{ (кВ)},$$

ток утечки

$$I_y = u \cdot G_0 = 1,574 \cdot 10^{-5} = 15,74 \text{ (мкА/м)}$$

и линейную плотность зарядов

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \cdot I_y = 1,394 \cdot 10^{-6} \text{ (мкКл/м)}.$$

Задача Б.9. Разноименно заряженные цилиндры расположены в воздухе и имеют размеры (рис. А.7): $R_1=0,1$ (м); $R_2=0,5$ (м); $D=0,3$ (м). При напряжении между цилиндрами $u = \varphi_1 - \varphi_2=20$ (кВ) известен ток утечки $I_y=20$ (мкА/м). Определить удельную проводимость воздуха γ (1/Ом·м).

Решение. Рассчитываем геометрические параметры [5]:

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2 \cdot D} = 0,25 \text{ (м)}; \quad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2 \cdot D} = 0,55 \text{ (м)};$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2} = 0,229 \text{ (м)}.$$

Далее определяем проводимость току утечки

$$G_0 = \frac{2\pi\gamma}{\ln \left[\frac{(h_1 + b) \cdot (h_2 - b)}{R_1 \cdot R_2} \right]} = \frac{I_y}{u} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ (1/Ом}\cdot\text{м)}$$

и искомую удельную проводимость воздуха

$$\gamma = \frac{G_0}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{(h_1 + b) \cdot (h_2 - b)}{R_1 \cdot R_2} \right] = 1,788 \cdot 10^{-10} \text{ (1/Ом}\cdot\text{м)}.$$

Задача Б.10. Металлический заряженный цилиндр расположен в воздухе с $\gamma=10^{-10}$ (1/Ом·м) над проводящей плоскостью (рис. А.8) при $R=0,1$ (м) и $h=0,12$ (м), причем напряжение между цилиндром и плоскостью $u = \varphi_1 - \varphi_2 = 50$ (кВ). Определить мощность активных потерь в воздухе на единицу длины цилиндра P_y (Вт/м).

Решение. Рассчитываем расстояние от плоскости до электрической оси цилиндра [5]:

$$b = \sqrt{h^2 - R^2} = 0,066 \text{ (м)}.$$

Далее находим проводимость току утечки

$$G_0 = \frac{2\pi\gamma}{\ln\left(\frac{h+b}{R}\right)} = 1,01 \cdot 10^{-9} \text{ (1/Ом}\cdot\text{м)}$$

и искомую мощность активных потерь в воздухе на единицу длины цилиндра

$$P_y = u^2 \cdot G_0 = 2,524 \text{ (Вт/м)}.$$

Задача Б.11. Коаксиальный кабель (рис. А.9) имеет параметры изоляции: $\gamma=10^{-12}$ (1/Ом·м); мощность активных потерь $P_y=1,5$ (мВт/м); напряжение $u = \varphi_1 - \varphi_2 = 10$ (кВ). Определить для радиусов изоляции отношение R_2/R_1 .

Решение. Определяем проводимость изоляции кабеля току утечки:

$$G_0 = \frac{2\pi\gamma}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{P_y}{u^2} = 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ (1/Ом}\cdot\text{м)},$$

тогда искомое отношение составит

$$\frac{R_2}{R_1} = \exp\left(\frac{2\pi\gamma}{G_0}\right) = 1,52.$$

Задача Б.12. Для полусферического заземлителя (рис. Б.1), расположенного в грунте с $\gamma=0,01$ (1/Ом·м), известен радиус $R_0=2,5$ (м) и напряжение $U_0=500$ (кВ). Определить ток I_0 (кА), мощность активных потерь в грунте P_y (МВт) и шаговое напряжение U (кВ) на расстоянии $r=10$ (м) от заземлителя при шаге $l=0,7$ (м).

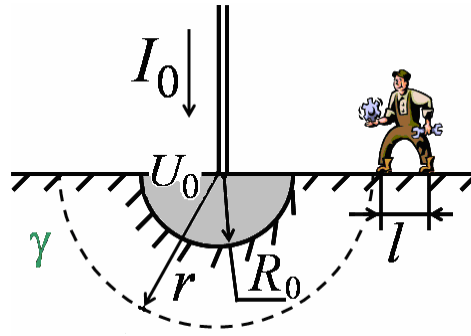


Рис. Б.1

Решение. Проводим расчет сопротивления заземления [5]

$$R_z = \frac{1}{2\pi\gamma R_0} = 6,366 \text{ (Ом)}.$$

В результате определяем искомый ток

$$I_0 = \frac{U_0}{R_z} = 78540 = 78,54 \text{ (кА)},$$

мощность активных потерь в грунте

$$P_y = U_0 \cdot I_0 = 3,927 \cdot 10^{10} = 39270 \text{ (МВт)}$$

и шаговое напряжение

$$U = U_0 \frac{R_0}{r} \left[1 - \frac{1}{(1+l/r)} \right] = 8178 = 8,178 \text{ (кВ)}.$$

6. Уравнения магнитного поля постоянного тока

Магнитное поле постоянного тока не изменяется во времени, создается постоянными электрическими токами (движущимися зарядами) и является частным случаем электромагнитного поля. Ограничимся рассмотрением магнитного поля в *однородных средах*, где абсолютная магнитная проницаемость μ_a постоянна.

Магнитное поле характеризуется величинами:

\vec{H} , А/м – вектор магнитной напряженности;

$\vec{B} = \mu_a \cdot \vec{H}$, Тл – вектор магнитной индукции;

$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}$, Вб – магнитный поток;

\vec{A} , Вб/м – векторный магнитный потенциал;

φ_M , А – скалярный магнитный потенциал;

$\vec{\delta}$, А/м² – вектор плотности тока.

Магнитное поле может быть обнаружено силовым воздействием на постоянный магнит или проводник с постоянным током I . Согласно закону Ампера сила \overline{dF} (рис. 6.1), действующая на элемент проводника длиной \overline{dl} с током I , помещенный во внешнее магнитное поле с индукцией \overline{B} , будет равна

$$\overline{dF} = I \cdot [\overline{dl} \cdot \overline{B}], \text{ Н}$$

причем

$$dF = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin \alpha.$$

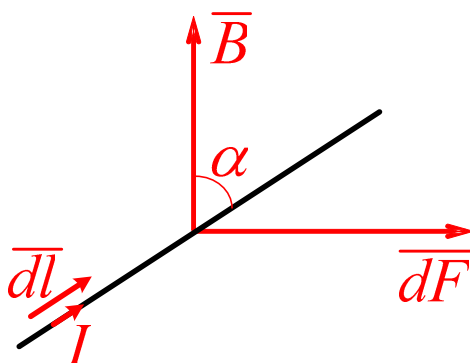


Рис. 6.1

Полная сила \overline{F} , действующая на проводник длиной l с током I , составит

$$\overline{F} = I \oint_l [\overline{dl} \cdot \overline{B}], \text{ Н.}$$

Если проводник прямолинейный, а индукция \overline{B} на оси проводника постоянна и перпендикулярна направлению тока I , то модуль вектора силы может быть рассчитан следующим образом

$$F = I \cdot l \cdot B. \quad (6.1)$$

Направление силы \overline{F} определяется *правилом левой руки*: индукция \overline{B} входит в ладонь, четыре пальца направлены по току I , тогда большой палец укажет направление силы \overline{F} .

Магнитное поле постоянного тока характеризуется следующими законами и уравнениями.

1. Закон (*принцип*) непрерывности магнитного потока:

а) в интегральной форме

$$\oint_s \overline{B} \cdot \overline{dS} = 0,$$

т.е. поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю;

б) в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0 \text{ или } \operatorname{div} \bar{H} = 0, \quad (6.2)$$

т.е. линии векторов \bar{B} и \bar{H} всегда замкнуты, не имеют начала и конца, связаны с направлением токов *правилом правого ходоного винта* (“буравчика”), когда поступательное движение винта совпадает с направлением тока, причем ток “ \otimes ” направлен от нас, а ток “ \odot ” – к нам (рис. 6.2).

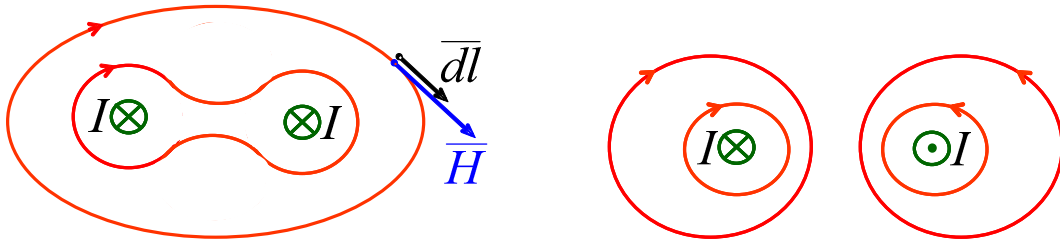


Рис. 6.2

2. Закон полного тока:

а) в интегральной форме

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \oint_l H dl \cos \alpha = I_{\text{полн}}, \quad (6.3)$$

т.е. линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль любого замкнутого контура равен *полному току* $I_{\text{полн}}$, охватываемому этим контуром, причем для рис. 6.3 имеем

$$I_{\text{полн}} = \sum \pm I_k = -I_1 + I_2 + I_3 ;$$

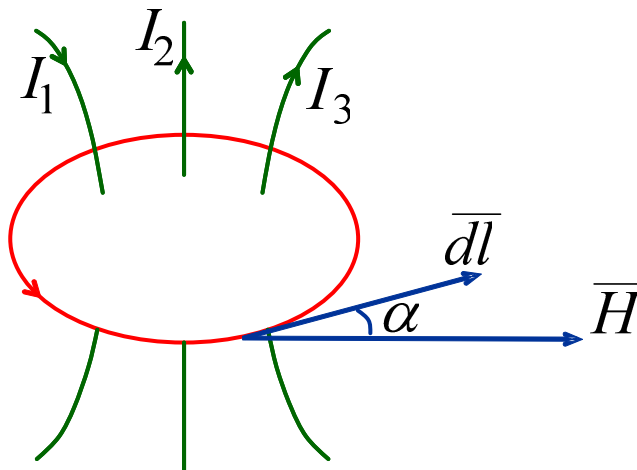


Рис. 6.3

б) в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta}, \quad (6.4)$$

т.е. во всех точках пространства, где вектор плотности тока $\bar{\delta} \neq 0$ магнитное поле является *вихревым*.

3. Для расчета магнитного поля используется *векторный потенциал* \bar{A} , удовлетворяющий условиям

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}, \quad \text{div } \bar{A} = 0 \quad (6.5)$$

и уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_a \bar{\delta}.$$

В прямоугольной системе координат при

$$\bar{A} = A_x \cdot \bar{1}_x + A_y \cdot \bar{1}_y + A_z \cdot \bar{1}_z; \quad \bar{\delta} = \delta_x \cdot \bar{1}_x + \delta_y \cdot \bar{1}_y + \delta_z \cdot \bar{1}_z$$

получаем три уравнения Пуассона для скалярных величин

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu_a \delta_x; \\ \nabla^2 A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu_a \delta_y; \\ \nabla^2 A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu_a \delta_z. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Векторный магнитный потенциал применяется для расчета магнитного потока

$$\Phi = \oint_l \bar{A} \cdot d\bar{l},$$

энергии магнитного поля в объеме $V \geq V_\delta$ (объем V_δ занимает плотность тока $\bar{\delta}$)

$$W_M = \oint_V \frac{\bar{A} \cdot \bar{\delta}}{2} dV, \text{ Дж}$$

и для построения линий индукции *плоскопараллельного* магнитного поля, для которых $A = \text{const}$.

4. Для точек пространства, где $\bar{\delta} = 0$ и $\text{rot } \bar{H} = 0$ магнитное поле является *безвихревым* и может рассматриваться как *потенциальное* магнитное поле. Каждая точка такого поля имеет *скалярный магнитный потенциал* φ_M , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_M = 0, \quad (6.7)$$

причем вектор магнитной напряженности связан со скалярным магнитным потенциалом так

$$\bar{H} = -\text{grad } \varphi_M. \quad (6.8)$$

При этом магнитное напряжение между точками 1 и 2

$$U_{M12} = \varphi_{M1} - \varphi_{M2} = \int_1^2 \overline{H} \cdot \overline{dl}, \text{ А}$$

не зависит от пути интегрирования напряженности магнитного поля (если не охватываем ток).

Скалярный магнитный потенциал φ_M , применяется для определения \overline{H} , U_{M12} и построения линий равного скалярного магнитного потенциала, для которых $\varphi_M = const$. Эти линии перпендикулярны линиям индукции (напряженности) и образуют картину магнитного поля в областях не занятых током, где $\overline{\delta} = 0$ (рис. 6.4).

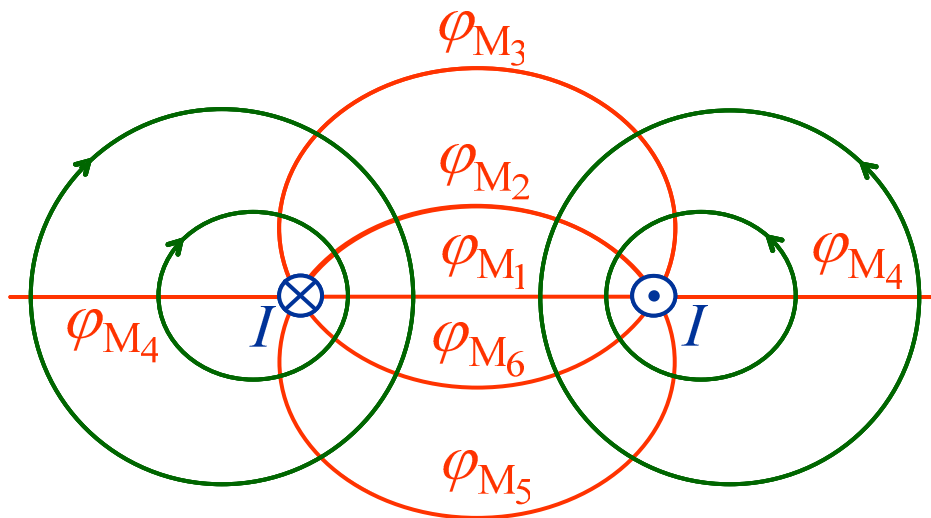


Рис. 6.4. Картина магнитного поля двухпроводной линии

5. Интегральными характеристиками магнитного поля являются:

а) энергия магнитного поля

$$\begin{aligned} W_M &= \int_V \frac{\overline{B} \cdot \overline{H}}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \\ &= \int_V \frac{B^2}{2\mu_a} dV = \int_V \frac{\overline{\delta} \cdot \overline{A}}{2} dV \end{aligned} \quad , \text{ Дж};$$

б) собственная индуктивность контура с током I и числом витков w

$$L = \frac{w\Phi}{I} = \frac{2W_M}{I^2}, \text{ Гн};$$

в) взаимная индуктивность между контурами с числом витков w_1 и w_2 и токами I_1 и I_2

$$M = M_{21} = M_{12} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{I_2}, \text{ Гн}$$

где Φ_{12} и Φ_{21} – взаимные магнитные потоки, создаваемые токами I_2 и I_1 соответственно;

г) *потокосцепление* контура с током I_1 и числом витков w_1

$$\Psi_1 = w_1 \cdot \Phi = w_1 \cdot (\Phi_1 \pm \Phi_{12}) = L_1 \cdot I_1 \pm M_{12} \cdot I_2, \text{ Вб}$$

где знак «+» при согласном включении контуров I_1, w_1 и I_2, w_2 ;

знак «-» при встречном включении контуров I_1, w_1 и I_2, w_2 ;

д) *сила* по координате x , действующая на проводник с током в магнитном поле

$$F_x = \pm \frac{dW_M}{dx}, \text{ Н}$$

где знак «+» при постоянных токах, а знак «-» при постоянных потокосцеплениях.

6. При отсутствии ферромагнитных сред отрезок провода длиной l с током I в некоторой точке N создает согласно закону *Био-Савара-Лапласа* индукцию магнитного поля (рис. 6.5)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{l} \cdot \vec{r}_r]}{r^2}.$$

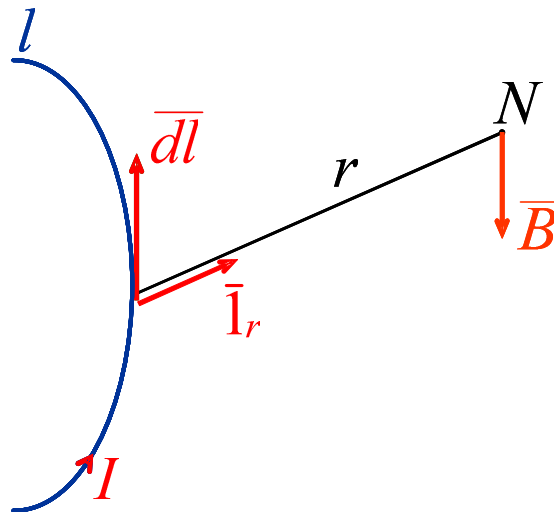


Рис. 6.5

При решении уравнений (6.2–6.8) для определений постоянных интегрирования используются следующие условия на границе раздела сред с разными магнитными проницаемостями μ_{a1} и μ_{a2} при возможной линейной поверхностной плотности тока η (А/м) на границе.

1. На границе равны нормальные составляющие векторов магнитной индукции (рис. 6.6): $B_{n1} = B_{n2}$.

2. На границе разность касательных составляющих векторов магнитной напряженности равна линейной поверхностной плотности тока (рис. 6.7): $H_{\tau1} - H_{\tau2} = \eta$.

3. На границе равны касательные составляющие векторного потенциала: $A_{\tau1} = A_{\tau2}$.

4. На границе при равенстве нулю линейной поверхностной плотности тока ($\eta = 0$) равны скалярные потенциалы ($\varphi_{M1} = \varphi_{M2}$) и для углов входа и выхода векторов выполняется равенство:

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}.$$

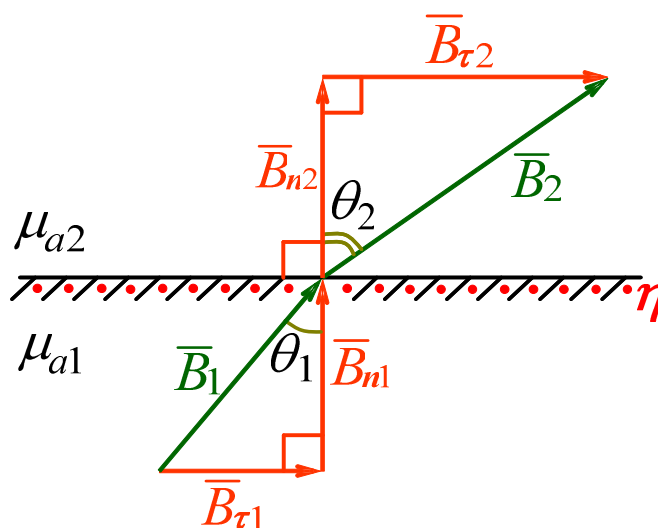


Рис. 6.6

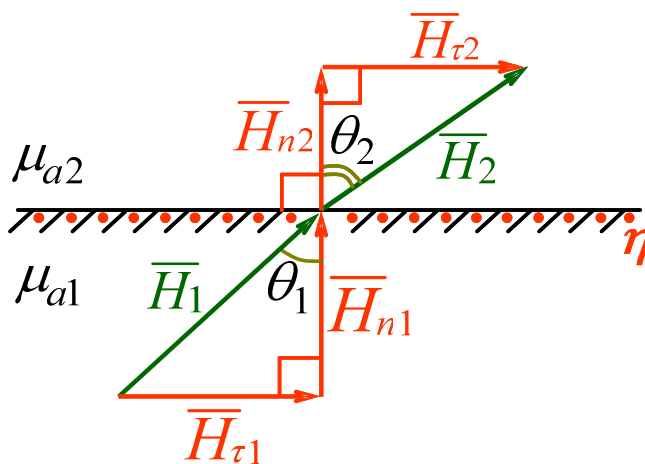


Рис. 6.7

Основными задачами расчета магнитного поля является определение сил, индуктивностей, энергии и магнитных потоков.

7. Магнитное поле постоянного тока двухпроводной линии с учетом влияния ферромагнитной плоской поверхности

Рассмотрим цилиндрический бесконечно длинный уединенный провод радиуса R с постоянным током I , расположенный в воздухе. По закону полного тока в интегральной форме (6.2) найдем магнитную напряженность в воздухе вне провода на расстоянии $r > R$ от оси провода

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (7.1)$$

причем вектор \vec{H} будет направлен перпендикулярно радиусу r согласно правилу правоугового винта (рис. 7.1).

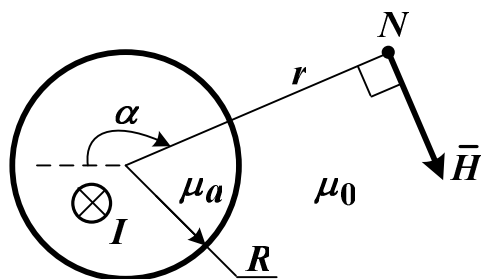


Рис. 7.1

Из уравнения (6.5) с учетом (7.1) определим векторный потенциал в точке N

$$A = -\int (\mu_0 H) dr + C_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C_1, \quad (7.2)$$

который направлен по току I и C_1 является постоянной интегрирования.

Из уравнений (6.7) и (6.8) с учетом (7.1) находим скалярный магнитный потенциал в точке N

$$\varphi_M = -\frac{I}{2\pi} \cdot \alpha + C_2, \quad (7.3)$$

причем отсчет угла α связано с направлением тока I правилом правоугового винта (C_2 – постоянная интегрирования).

Если провод с током I расположен в воздухе вблизи ферромагнитной (стальной) плоской поверхности (рис. 7.2), то для расчета магнитного поля используется *метод зеркальных изображений*. При этом для расчета магнитного поля в воздухе (точка N верхней полуплоскости

рис. 7.2) зеркально проводу с током I помещается фиктивный провод (рис. 7.3) с током

$$I_1 = \frac{\mu_{a2} - \mu_{a1}}{\mu_{a2} + \mu_{a1}} \cdot I = \frac{\mu_{ст} - \mu_0}{\mu_{ст} + \mu_0} \cdot I . \quad (7.4)$$

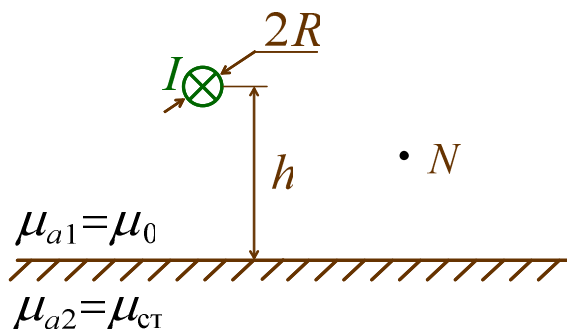


Рис. 7.2

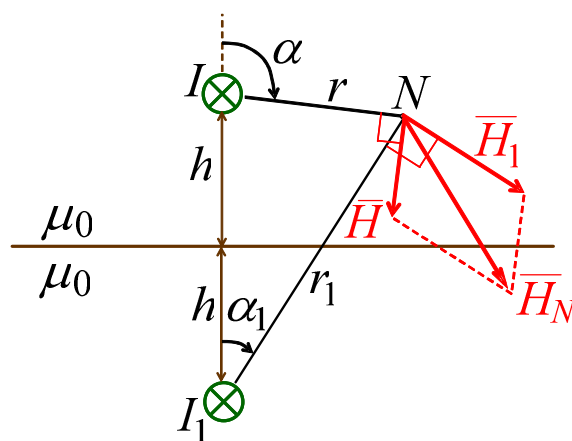


Рис. 7.3

Расчет магнитного поля в воздухе ведется методом наложения с использованием формул (7.1–7.3).

Далее рассмотрим магнитное поле двухпроводной линии с параллельными друг другу цилиндрическими проводами 1 и 2 с током I , расположенными в воздухе параллельно ферромагнитной (стальной) плоской поверхности (рис. 7.4).

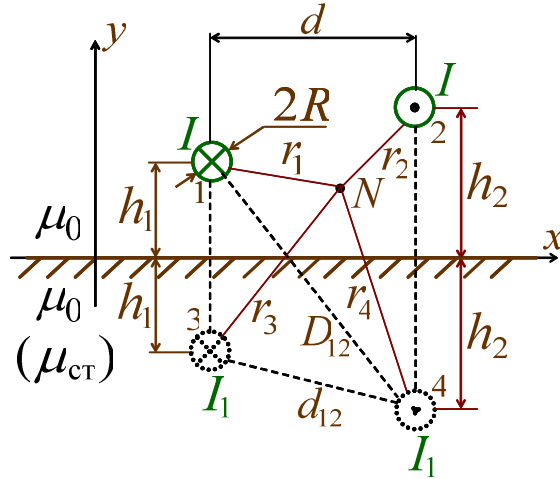


Рис. 7.4

Воспользуемся методом зеркальных изображений и методом наложения, тогда в точке N (верхняя полуплоскость, воздух) на основании (7.1–7.4) имеем (ток “от нас” – отрицательный, а “к нам” – положительный):

а) напряженность

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1}; H_2 = \frac{I}{2\pi r_2}; H_3 = \frac{I_1}{2\pi r_3}; H_4 = \frac{I_1}{2\pi r_4};$$

$$\bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_3 + \bar{H}_4; \quad (7.5)$$

б) векторный потенциал

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = -\frac{\mu_0(-I)}{2\pi} \ln r_1 +$$

$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r_2 - \frac{\mu_0(-I_1)}{2\pi} \ln r_3 - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln r_4 + C_1; \quad (7.6)$$

в) скалярный потенциал

$$\varphi_M = -\frac{I}{2\pi}(-\beta_1) - \frac{I}{2\pi}(\beta_2) -$$

$$-\frac{I_1}{2\pi}(-\beta_3) - \frac{I_1}{2\pi}(\beta_4) + C_2; \quad (7.7)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования;

$\beta_{1,2,3,4}$ и $r_{1,2,3,4}$ – аргументы в радианах и модули следующих комплексных радиусов

$$\underline{r}_1 = (x - x_1) + j(y - y_1) = r_1 e^{j\beta_1};$$

$$\underline{r}_2 = (x - x_2) + j(y - y_2) = r_2 e^{j\beta_2};$$

$$\underline{r}_3 = (x - x_1) + j(y + y_1) = r_3 e^{j\beta_3}; \quad (7.8)$$

$$\underline{r}_4 = (x - x_2) + j(y + y_2) = r_4 e^{j\beta_4};$$

причем x_1, x_2 и $y_1=h_1, y_2=h_2$ – координаты проводов 1, 2.

При определении вектора напряженности \vec{H} по (7.5) необходимо в одном масштабе в точке N построить вектора \vec{H}_k от каждого провода и их зеркальных изображений с учетом направлений токов, согласно рис. 7.3, и, затем, вектора \vec{H}_k нужно геометрически суммировать.

Изменяя координаты $x>0$ и $y>0$ точки N , можно рассчитать по (7.6) линии равного векторного потенциала и по (7.7) линии равного скалярного потенциала, которые пересекаются под прямым углом и образуют картину магнитного поля в воздухе над ферромагнитной плоскостью. На рис. 7.5 приведен пример картины магнитного поля, полученный при помощи программы *Mathcad*, когда принята $C_2=0$.

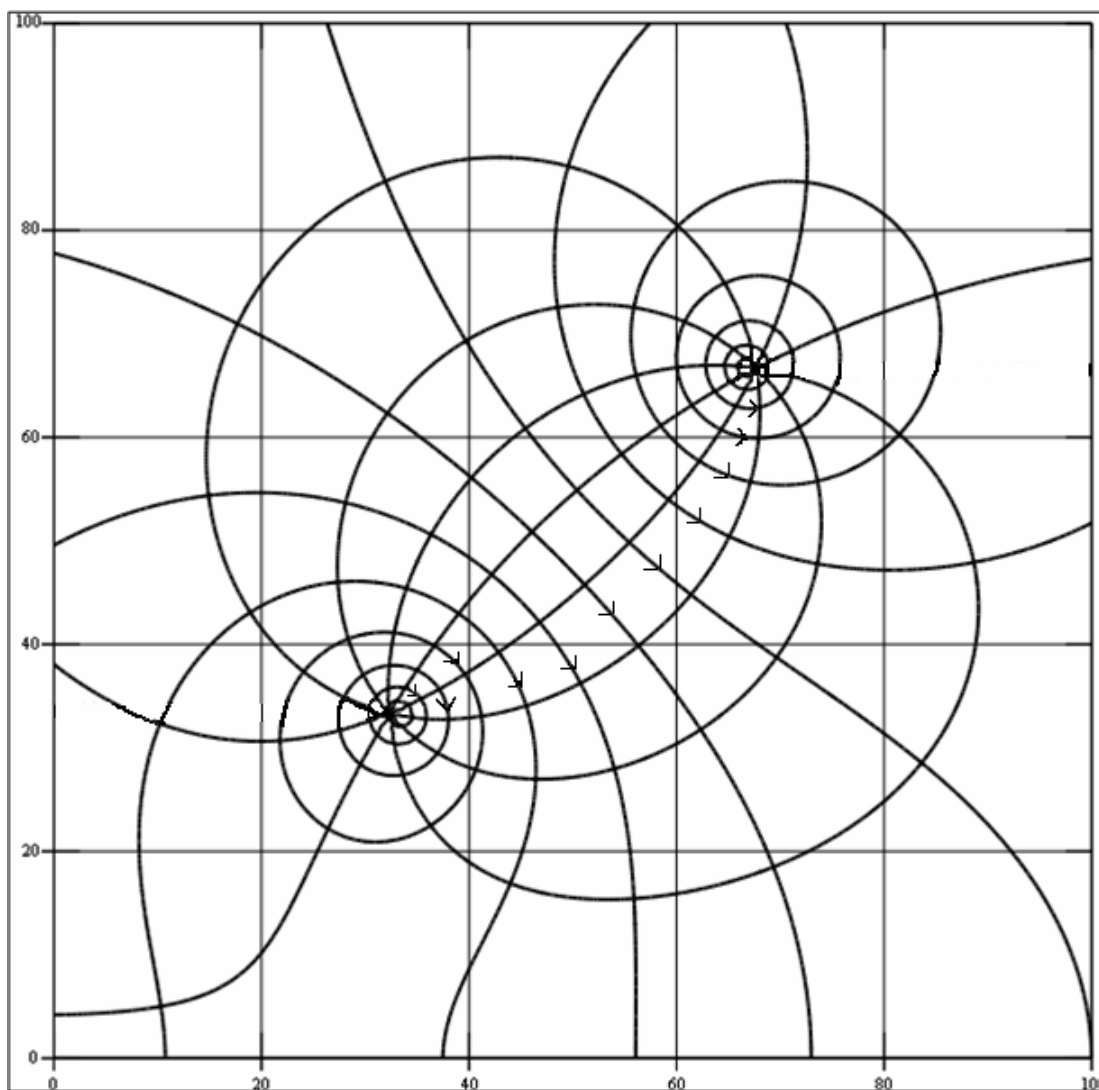


Рис. 7.5. Пример картины магнитного поля двухпроводной линии вблизи ферромагнитной плоской поверхности

По картине магнитного поля напряженность в точке N приближенно определяется так (рис. 7.6)

$$H \approx \frac{|\Delta\varphi|}{m} = \frac{|\varphi_{M1} - \varphi_{M2}|}{m},$$

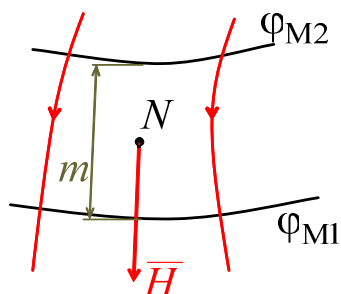


Рис. 7.6

т.е. модуль разности потенциалов между соседними линиями равного потенциала делится на расстояние между ними, причем вектор напряженности направлен согласно направлению силовых линий и соответствует приближенно найденной по (7.5) величине.

Индуктивность линии L_0 (Гн/м) определяется внутренней индуктивностью проводов 1, 2 и суммарным магнитным потоком Φ , проходящим между этими проводами:

$$L_0 = \frac{2L_{\text{внутр}}}{l} + \frac{\Phi}{I \cdot l} \approx \frac{\mu_a}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d_{12} - R}{R}\right) + \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{(\mu_{\text{ст}} - \mu_0)}{(\mu_{\text{ст}} + \mu_0)} \cdot \ln\left(\frac{D_{12}^2}{4h_1h_2}\right), \quad (7.9)$$

где μ_a и $\mu_{\text{ст}}$ – абсолютные магнитные проницаемости материала проводов и стали соответственно, причем

$$d = |x_1 - x_2|; \quad d_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 - h_2)^2}; \quad D_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2}.$$

Ферромагнитная поверхность усиливает магнитное поле в воздухе и увеличивает индуктивность линии (7.9), причем энергия магнитного поля с учетом (7.9) составит

$$W_M = \frac{L_0 I^2}{2}, \quad \text{Дж/м.} \quad (7.10)$$

Для определения направления и величины силы \bar{F} (Н/м), действующей на провод 2 с током I , необходимо воспользоваться законом Ампера (6.1), предварительно вычислив суммарную индукцию \bar{B} на оси провода 2 от токов проводов 1, 3, 4.

В. Примеры решения задач по магнитному полю постоянного тока

Задача В.1. В среде с постоянной магнитной проницаемостью μ_a при векторе напряженности

$$\vec{H} = H_x \cdot \vec{1}_x + H_y \cdot \vec{1}_y + H_z \cdot \vec{1}_z = ax^2 \cdot \vec{1}_x - 3xy \cdot \vec{1}_y + 5xz \cdot \vec{1}_z, \text{ (A/м)}$$

найти коэффициент a и в точке с координатами $x=1$ (м), $y=2$ (м), $z=3$ (м) определить модуль вектора плотности тока δ (А/м²).

Решение. Для определения коэффициента a вектора напряженности используем закон непрерывности магнитного потока в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div}(\mu_a \vec{H}) = \mu_a \cdot \operatorname{div}(\vec{H}) = 0,$$

т. е. в прямоугольной системе координат получаем

$$\operatorname{div}(\vec{H}) = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 2ax - 3x + 5x = 0,$$

тогда искомым коэффициентом составит: $a = -1$ (А/м²).

На основании закона полного тока в дифференциальной форме (6.4)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta} = \delta_x \cdot \vec{1}_x + \delta_y \cdot \vec{1}_y + \delta_z \cdot \vec{1}_z, \text{ (А/м}^2\text{)}$$

находим составляющие вектора плотности тока в точке с координатами $x=1$ (м), $y=2$ (м), $z=3$ (м):

$$\delta_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 - 5z = -5z = -5 \cdot 2 = -10 \text{ (А/м}^2\text{)};$$

$$\delta_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -3y - 0 = -3y = -3 \cdot 3 = -9 \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

В результате искомым модуль вектора плотности тока будет равен:

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} = \sqrt{0^2 + (-10)^2 + (-9)^2} = 13,454 \text{ (А/м}^2\text{)}.$$

Задача В.2. Для безвихревого магнитного поля при заданном скалярном магнитном потенциале

$$\varphi_M = 3x - 4y + 2z, \text{ (А)}$$

найти модуль вектора напряженности H (А/м).

Решение. Вектор напряженности найдем из уравнения

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\operatorname{grad}(\varphi_M) = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial x} \cdot \vec{1}_x - \frac{\partial \varphi_M}{\partial y} \cdot \vec{1}_y - \frac{\partial \varphi_M}{\partial z} \cdot \vec{1}_z =, \\ &= -3 \cdot \vec{1}_x + 4 \cdot \vec{1}_y - 2 \cdot \vec{1}_z, \text{ (А/м)}. \end{aligned}$$

В результате искомым модуль вектора напряженности будет равен:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-2)^2} = 5,385 \text{ (А/м)}.$$

Задача В.3. При заданном векторном магнитном потенциале

$$\bar{A} = -\mu_a x^2 \cdot \bar{1}_x + 4\mu_a xy \cdot \bar{1}_y + c\mu_a xz \cdot \bar{1}_z, \text{ (Вб/м)}$$

найти коэффициент c и определить вектора индукции \bar{B} и плотности тока $\bar{\delta}$.

Решение. Из уравнения (6.5)

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -2\mu_a x + 4\mu_a x + c\mu_a x = 0$$

находим коэффициент $c = -2 \text{ (А/м}^2\text{)}$.

Далее из уравнения

$$\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cdot \bar{1}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cdot \bar{1}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cdot \bar{1}_z$$

определяем искомый вектор магнитной индукции:

$$\bar{B} = 0 \cdot \bar{1}_x + 2\mu_a z \cdot \bar{1}_y + 4\mu_a y \cdot \bar{1}_z, \text{ (Тл)}$$

Проекция вектора плотности тока рассчитаем из скалярных уравнений Пуассона (6.6):

$$\delta_x = -\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) = 2 \text{ (А/м}^2\text{)};$$

$$\delta_y = -\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) = 0;$$

$$\delta_z = -\frac{1}{\mu_a} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) = 0.$$

В результате искомый вектор плотности тока составит:

$$\bar{\delta} = \delta_x \cdot \bar{1}_x + \delta_y \cdot \bar{1}_y + \delta_z \cdot \bar{1}_z = 2 \cdot \bar{1}_x + 0 \cdot \bar{1}_y + 0 \cdot \bar{1}_z, \text{ (А/м}^2\text{)}$$

Задача В.4. На границе раздела двух сред (рис. 6.6) с $\mu_{a1} = \mu_0$ и $\mu_{a2} = 5\mu_0$ при линейной поверхностной плотности тока $\eta = 75 \text{ (А/м)}$ заданы в среде с μ_{a1} модуль вектора индукции $B_1 = 153,58 \cdot \mu_0 \text{ (Тл)}$ и угол $\theta_1 = 60^\circ$. Определить в среде с μ_{a2} модуль вектора индукции B_2 .

Решение. Находим касательные составляющие напряженностей:

$$H_{\tau 1} = \frac{B_1 \sin \theta_1}{\mu_{a1}} = 133 \text{ (А/м)}; H_{\tau 2} = H_{\tau 1} - \eta = 58 \text{ (А/м)}$$

Из равенства на границе нормальных составляющих индукции

$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 = \frac{\mu_{a2} H_{\tau 2}}{\sin \theta_2}$$

определяем угол:

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{\mu_{a2} H_{\tau 2}}{B_1 \cos \theta_1}\right) = 75,17^\circ.$$

В результате искомый модуль вектора индукции составит:

$$B_2 = \frac{B_1 \cos \theta_1}{\cos \theta_2} = 300 \cdot \mu_0 \text{ (Тл)}.$$

Задача В.5. На границе раздела двух сред (рис. В.1) с $\mu_{a1}=\mu_0$ и $\mu_{a2}=5\mu_0$ при линейной поверхностной плотности тока $\eta=0$ (А/м) задан скалярный магнитный потенциал в среде с μ_{a1} :

$$\varphi_{M1} = -300x - 400y + 100, \text{ (А)}.$$

Определить в среде с μ_{a2} модуль вектора напряженности H_2 (А/м).

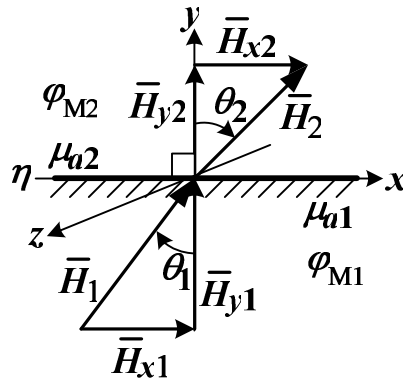


Рис. В.1

Решение. В среде с μ_{a1} находим составляющие вектора напряженности:

$$H_{x1} = -\frac{\partial \varphi_{M1}}{\partial x} = 300 \text{ (А/м)}; H_{y1} = -\frac{\partial \varphi_{M1}}{\partial y} = 400 \text{ (А/м)}.$$

Из равенства на границе касательных составляющих напряженности при $\eta=0$ (А/м) и равенства нормальных составляющих индукции определяем составляющие вектора напряженности в среде с μ_{a2} :

$$H_{x2} = H_{x1} = 300 \text{ (А/м)}; H_{y2} = \frac{\mu_{a1} H_{y1}}{\mu_{a2}} = 80 \text{ (А/м)}.$$

В результате искомый модуль вектора напряженности составит:

$$H_2 = \sqrt{H_{x2}^2 + H_{y2}^2} = 310,48 \text{ (А/м)}.$$

Задача В.6. На границе раздела двух сред (рис. В.2) с $\mu_{a1}=\mu_0$ и $\mu_{a2}=5\mu_0$ при линейной поверхностной плотности тока $\eta=0,3/\mu_0$ (А/м) задан векторный магнитный потенциал в среде с μ_{a1} :

$$\vec{A}_1 = 0 \cdot \vec{1}_x + 0 \cdot \vec{1}_y + (-0,4x + 0,3y) \cdot \vec{1}_z \text{ (Вб/м)}.$$

Определить в среде с μ_{a2} модуль вектора индукции B_2 (Тл).

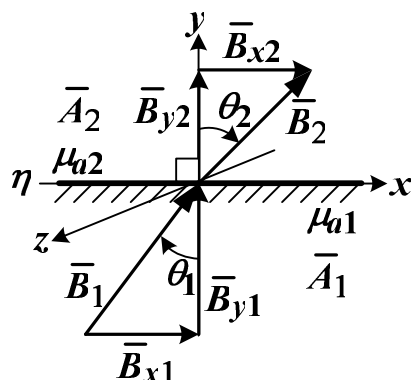


Рис. В.2

Решение. В среде с μ_{a1} находим составляющие вектора индукции:

$$B_{x1} = \frac{\partial A_{z1}}{\partial y} = 0,3 \text{ (Тл)}; \quad B_{y1} = -\frac{\partial A_{z1}}{\partial x} = 0,4 \text{ (Тл)}.$$

Далее определяем составляющие вектора индукции в среде с μ_{a2} :

$$B_{y2} = B_{y1} = 0,4 \text{ (Тл)}; \quad B_{x2} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}} \cdot B_{x1} - \mu_{a2} \cdot \eta = 0.$$

В результате искомый модуль вектора индукции составит:

$$B_2 = \sqrt{B_{x2}^2 + B_{y2}^2} = 0,4 \text{ (Тл)}.$$

Задача В.7. Двухпроводная линия расположена в воздухе (рис. В.3) и имеет параметры: $I=200$ (А); $d=2$ (м). Определить вне проводов в точке N с координатами $x=0,5$ (м), $y=0,5$ (м) модуль вектора напряженности H (А/м), значения векторного A (мкВб/м) и скалярного потенциалов φ_M (А).

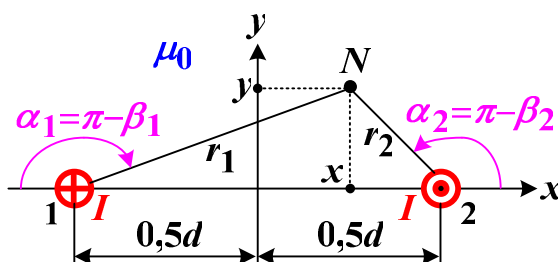


Рис. В.3

Решение. Рассчитываем геометрические параметры точки N :

$$r_1 = \sqrt{(0,5d + x)^2 + y^2} = 1,581 \text{ (м)}; \quad r_2 = \sqrt{(0,5d - x)^2 + y^2} = 0,707 \text{ (м)};$$

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{y}{r_1}\right) = 18,435^\circ; \beta_2 = \arcsin\left(\frac{y}{r_2}\right) = 45^\circ;$$

$$\alpha_1 = \pi - \beta_1 = 161,565^\circ; \alpha_2 = \pi - \beta_2 = 135^\circ.$$

Далее на основании метода наложения и формул (7.1–7.3) определяем в точке N :

– составляющие вектора напряженности

$$H_1 = \frac{I}{2\pi r_1} = 20,132 \text{ (А/м)}; H_2 = \frac{I}{2\pi r_2} = 45,016 \text{ (А/м)};$$

$$H_x = H_1 \sin \beta_1 - H_2 \sin \beta_2 = -25,465 \text{ (А/м)};$$

$$H_y = -H_1 \cos \beta_1 - H_2 \cos \beta_2 = -50,93 \text{ (А/м)},$$

тогда искомый модуль вектора напряженности составит

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = 56,941 \text{ (А/м)};$$

– искомое значение векторного потенциала

$$A = A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 3,219 \cdot 10^{-5} = 32,19 \text{ (мкВб/м)};$$

– искомое значение скалярного потенциала

(углы α_1 и α_2 – в радианах)

$$\varphi_M = -\frac{I}{2\pi} \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{I}{2} = -64,758 \text{ (А)}.$$

Задача В.8. Трехпроводная линия с радиусом $R=0,01$ (м) медных проводов расположена в воздухе (рис. В.4) и имеет параметры: $I_1=300$ (А); $I_2=100$ (А); $I_3=I_1+I_2=400$ (А); $d=4$ (м). Определить силу F_x (мН/м), действующую на провод 3 с током I_3 , а также рассчитать энергию магнитного поля на единицу длины линии W_0 (Дж/м).

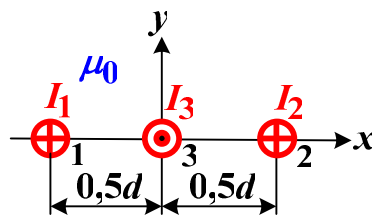


Рис. В.4

Решение. Используя закон полного тока, метод наложения и правило правоходового винта рассчитываем:

– составляющие вектора напряженности на оси провода 3 от токов I_1 и I_2 соответственно

$$H_{y1} = -\frac{I_1}{2\pi \cdot (0,5d)} = -23,873 \text{ (А/м)}; H_{y2} = \frac{I_2}{2\pi \cdot (0,5d)} = 7,958 \text{ (А/м)};$$

– величину результирующего вектора на оси провода 3

$$H = H_y = H_{y1} + H_{y2} = -15,925 \text{ (А/м)}.$$

Далее по правилу левой руки и закону Ампера (6.1) находим искомую силу, действующую на провод 3 с током I_3 :

$$F_x = -\mu_0 \cdot I_3 \cdot H_y = 8 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ (мН/м)}.$$

Вычисляем расстояния между проводами

$$d_{12} = 0,5d + 0,5d = 4 \text{ (м)}; d_{13} = d_{23} = 0,5d = 2 \text{ (м)},$$

тогда, считая трехпроводную линию при $I_3 = I_1 + I_2$ как две двухпроводные линии, рассчитываем:

– индуктивность двухпроводной линии с проводами 1 и 3

$$L_{13} = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d_{13} - R}{R}\right) = 2,217 \cdot 10^{-6} \text{ (Гн/м)};$$

– индуктивность двухпроводной линии с проводами 2 и 3

$$L_{23} = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d_{23} - R}{R}\right) = 2,217 \cdot 10^{-6} \text{ (Гн/м)};$$

– взаимную индуктивность двух двухпроводных линий

$$M \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left[\frac{(d_{13} - R) \cdot d_{23}}{R \cdot d_{12}}\right] = 0,92 \cdot 10^{-6} \text{ (Гн/м)}.$$

В результате искомая энергия магнитного поля на единицу длины трехпроводной линии составит:

$$W_0 = \frac{L_{13} \cdot I_1^2}{2} + \frac{L_{23} \cdot I_2^2}{2} + M \cdot I_1 \cdot I_2 = 0,138 \text{ (Дж/м)}.$$

Задача В.9. Провод с током $I = 300$ (А) расположен параллельно границе раздела двух сред (рис. В.5) с $\mu_{a1} = 5\mu_0$ и $\mu_{a2} = 10\mu_0$ при $h = 0,1$ (м). Определить силу F_y (мН/м), действующую на провод с током I , а также в точке N с координатами $x_1 = 0,05$ (м), $y_1 = 0,05$ (м) и в точке D с координатами $x_2 = 0,1$ (м), $y_2 = -0,05$ (м) найти векторный и скалярный потенциалы, рассчитать модули векторов индукции.

Решение. Используем метод зеркальных изображений и рассчитываем фиктивный ток в среде с μ_{a2} (рис. 7.3):

$$I_1 = \frac{\mu_{a2} - \mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} \cdot I = 100 \text{ (А)}.$$

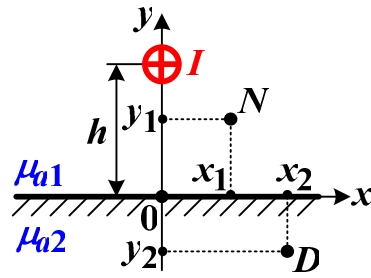


Рис. В.5

Далее по закону полного тока находим напряженность на оси провода с током I от тока I_1 :

$$H_1 = H_{x1} = \frac{I_1}{2\pi \cdot (2h)} = 79,577 \text{ (А/м)}.$$

В результате по закону Ампера искомая сила, действующая на провод с током I , составит:

$$F_y = -\mu_{a1} \cdot I \cdot H_{x1} = -0,15 = -150 \text{ (мН/м)}.$$

Рассчитываем геометрические параметры точки N :

$$r = \sqrt{x_1^2 + (h - y_1)^2} = 0,071 \text{ (м)}; \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + (h + y_1)^2} = 0,158 \text{ (м)};$$

$$\alpha = 180^\circ + \arctg\left(\frac{x_1}{y_1 - h}\right) = 135^\circ; \quad \alpha_1 = \arctg\left(\frac{x_1}{y_1 + h}\right) = 18,435^\circ.$$

Далее по методам наложения и зеркальных изображений в точке N находим:

– искомый векторный потенциал

$$A_N = \frac{\mu_{a1} I}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{h}{r}\right) + \frac{\mu_{a1} I_1}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{h}{r_1}\right) = 5,816 \cdot 10^{-5} = 58,16 \text{ (мкВб/м)};$$

– искомый скалярный потенциал (углы α и α_1 – в радианах)

$$\varphi_{MN} = -\frac{I}{2\pi} \cdot \alpha - \frac{I_1}{2\pi} \cdot \alpha_1 = -117,62 \text{ (А)};$$

– составляющие вектора индукции

$$B = \frac{\mu_{a1} I}{2\pi r} = 4,243 \cdot 10^{-3} \text{ (Тл)}; \quad B_1 = \frac{\mu_{a1} I_1}{2\pi r_1} = 6,325 \cdot 10^{-4} \text{ (Тл)};$$

$$B_{xN} = -B \sin(\pi - \alpha) + B_1 \sin \alpha_1 = -2,8 \cdot 10^{-3} \text{ (Тл)};$$

$$B_{yN} = -B \cos(\pi - \alpha) - B_1 \cos \alpha_1 = -3,6 \cdot 10^{-3} \text{ (Тл)},$$

тогда искомый модуль вектора индукции составит

$$B_N = \sqrt{B_{xN}^2 + B_{yN}^2} = 4,561 \cdot 10^{-3} = 4,561 \text{ (мТл)}.$$

Определяем по методу зеркальных изображений фиктивный ток в среде с μ_{a1} :

$$I_2 = \frac{2\mu_{a1}}{\mu_{a1} + \mu_{a2}} \cdot I = 200 \text{ (А)}.$$

Рассчитываем геометрические параметры точки D :

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + (h - y_2)^2} = 0,18 \text{ (м)};$$

$$\beta_2 = \arctg\left(\frac{x_2}{h - y_2}\right) = 33,69^\circ; \alpha_2 = \pi - \beta_2 = 146,31^\circ.$$

Затем по методам наложения и зеркальных изображений в точке D находим:

– искомый векторный потенциал

$$A_D = \frac{\mu_{a2} I_2}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{h}{r_2}\right) = -2,357 \cdot 10^{-4} = -0,237 \text{ (мкВб/м)};$$

– искомый скалярный потенциал

$$\varphi_{MD} = -\frac{I_2}{2\pi} \cdot \alpha_2 = -81,283 \text{ (А)};$$

– искомый модуль вектора индукции

$$B_D = \frac{\mu_{a2} I_2}{2\pi r_2} = 2,219 \cdot 10^{-3} = 2,219 \text{ (мТл)}.$$

Задача В.10. Двухпроводная линия с алюминиевыми проводами расположена в воздухе ($\mu_{a1} = \mu_0$) параллельно ферромагнитной плоскости (рис. 7.4) с $\mu_{a2} = 100\mu_0$ и имеет параметры: $I = 10$ (А); $d = 0,05$ (м); $h_1 = 0,05$ (м); $h_2 = 0,025$ (м); $R = 0,002$ (м). Определить энергию магнитного поля линии W_0 (мкДж/м).

Решение. Рассчитываем геометрические размеры:

$$d_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 - h_2)^2} = 0,056 \text{ (м)}; D_{12} = \sqrt{d^2 + (h_1 + h_2)^2} = 0,09 \text{ (м)}.$$

По формуле (7.9) вычисляем индуктивность линии на единицу длины:

$$L_0 \approx \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_{a1}}{\pi} \ln\left(\frac{d_{12} - R}{R}\right) + \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{(\mu_{a2} - \mu_{a1})}{(\mu_{a2} + \mu_{a1})} \cdot \ln\left(\frac{D_{12}^2}{4h_1 h_2}\right) = 1,513 \cdot 10^{-6} \text{ (Гн/м)}.$$

В результате искомая энергия магнитного поля линии составит:

$$W_0 = \frac{L_0 \cdot I^2}{2} = 7,564 \cdot 10^{-5} = 75,64 \text{ (мкДж/м)}.$$

Задача В.11. Коаксиальный многожильный кабель (рис. В.6) и медными жилами имеет параметры: $I = 100$ (А); $R_0 = R_1/m$ (м); $R_1 = 0,006$ (м); $R_2 = 0,012$ (м); m – число жил. Определить индуктивность

L_0 (мкГн/м) и энергию магнитного поля кабеля W_0 (мкДж/м) при числе жил $m=1$ и $m=4$.

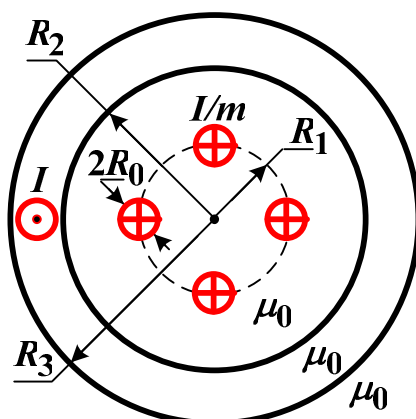


Рис. В.6

Решение. Для обеспечения одинаковой плотности тока во внешней оболочке и в центральных жилах необходимо иметь у них одинаковую площадь сечения, тогда

$$R_3 = \sqrt{mR_0^2 + R_2^2}.$$

Индуктивность кабеля на единицу длины рассчитывается так [5]:

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_3^4}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) + \frac{1}{m} \ln\left(\frac{R_1}{mR_0}\right) - \frac{R_3^2}{2(R_3^2 - R_2^2)} - \frac{(m-1)}{4m} \right],$$

тогда с учетом формулы для энергии

$$W_0 = \frac{L_0 \cdot I^2}{2}$$

получаем искомые значения:

– для числа жил $m=1$

$$R_3 = 0,013 \text{ (м)}; L_0 = 1,965 \cdot 10^{-7} = 0,1965 \text{ (мкГн/м)};$$

$$W_0 = 9,824 \cdot 10^{-4} = 982,4 \text{ (мкДж/м)};$$

– для числа жил $m=4$

$$R_3 = 0,01237 \text{ (м)}; L_0 = 1,532 \cdot 10^{-7} = 0,1532 \text{ (мкГн/м)};$$

$$W_0 = 7,659 \cdot 10^{-4} = 765,9 \text{ (мкДж/м)}.$$

8. Домашнее задание. Расчет постоянного электромагнитного поля двухпроводной линии вблизи проводящей стальной плоской поверхности

Двухпроводная линия с радиусом алюминиевых проводов R расположена в воздухе ($\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_{a1} = \mu_0$, $\gamma = 10^{-9}$ 1/Ом·м) параллельно проводящей стальной (ферромагнитной) плоской поверхности (“сталь”), как показано на рис. 8.1. Координаты проводов, их постоянные потенциалы и ток заданы в таблицах 8.1–8.3. Известны магнитная проницаемость проводов $\mu_a = \mu_0$ при удельной проводимости $\gamma_a \approx 3,2 \cdot 10^7$ 1/Ом·м и магнитная проницаемость стальной поверхности – $\mu_{ст}$ (табл. 8.1). Ток I провода 1 (“ \otimes ”) направлен “от нас”, а ток I провода 2 (“ \odot ”) направлен “к нам”.

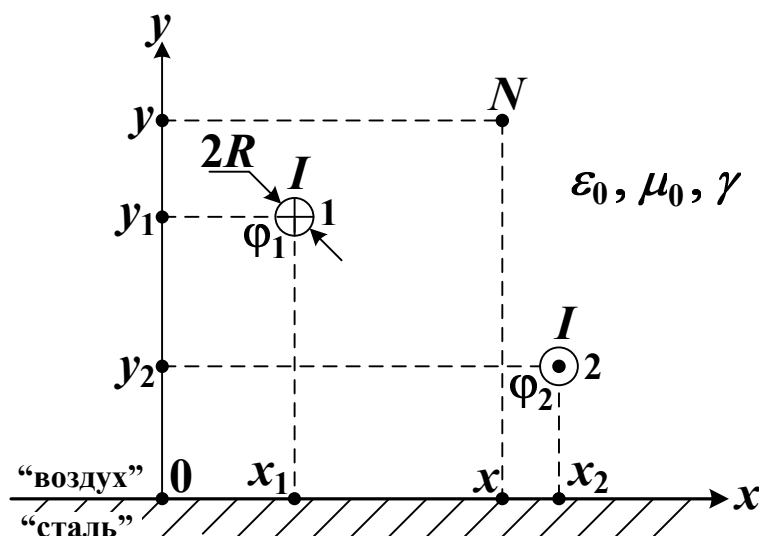


Рис. 8.1

При бесконечно длинных проводах линии для плоскопараллельного электромагнитного поля в воздухе необходимо выполнить следующее.

1. Для электростатического поля:
 - а) определить потенциальные α_{km} и емкостные коэффициенты β_{km} , частичные емкости C_{km} , линейные плотности зарядов проводов τ_1 , τ_2 ;
 - б) рассчитать емкость линии C_0 (Ф/м), энергию поля $W_Э$ (Дж/м) и для точки N с координатами x , y (табл. 8.2) определить потенциал φ и вектор напряженности \vec{E} ;

- в) рассчитать и построить картину плоскопараллельного электростатического поля линии.
2. Для электрического поля рассчитать сопротивление проводов линии R_0 (Ом/м), проводимость изоляции линии G_0 (См/м), двумя методами определить токи утечки $I_{y1,2}$ (А/м) с проводов линии и мощность активных потерь P_y (Вт/м) от этих токов.
3. Для магнитного поля:
- а) рассчитать индуктивность линии L_0 (Гн/м), энергию поля W_M (Дж/м) и силу \bar{F} (Н/м), действующую на провод 2 с током I ;
 - б) для точки N определить вектор напряженности \bar{H} ;
 - в) рассчитать и построить картину плоскопараллельного магнитного поля линии.
4. Для электромагнитного поля линии, используя найденные в п. 1,б и 3,б напряженности \bar{E} и \bar{H} , в точке N определить величину и направление вектора Пойнтинга \bar{P} (Вт/м²).
5. Используя найденные удельные (первичные) параметры линии R_0 , L_0 , G_0 и C_0 , рассчитать при угловой частоте $\omega = 0$ (1/с) вторичные параметры линии постоянного тока:
- а) волновое сопротивление $Z_B = \sqrt{R_0/G_0}$ (Ом);
 - б) постоянную распространения $\Gamma = \sqrt{R_0 G_0}$ (1/м);
 - в) скорость распространения волн для линии без потерь $V = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ (м/с).
6. Проанализировать влияние проводящей стальной плоской поверхности на параметры линии R_0 , L_0 , G_0 , C_0 и сформулировать выводы по результатам расчета.

Таблица 8.1

Первая цифра номера задания	Потенциалы проводов линии		Магнитная проницаемость стали
	φ_1	φ_2	$\mu_{ст}$
	В	В	Гн/м
1	1000	-1000	$2\mu_0$
2	2000	-1000	$4\mu_0$
3	1000	-2000	$6\mu_0$
4	3000	-1000	$8\mu_0$
5	1000	-1250	$10\mu_0$
6	2000	-3000	$12\mu_0$
7	5000	-2000	$14\mu_0$
8	3000	-5000	$16\mu_0$
9	2000	-1500	$18\mu_0$
0	1500	-2000	$20\mu_0$

Таблица 8.2

Вторая цифра номера задания	Ток в проводах линии	Радиус проводов линии	Координаты точки N	
	I	R	x	y
	А	м	м	м
1	1000	0,028	3	3
2	900	0,026	3	1
3	800	0,024	3	2,5
4	700	0,022	3,5	3,5
5	600	0,02	3,5	1,5
6	500	0,018	3,5	2,5
7	400	0,016	2,5	1,5
8	300	0,014	2,5	3,5
9	200	0,012	2,5	2,5
0	100	0,01	1,5	2,5

Таблица 8.3

Третья цифра номера задания	Координаты проводов			
	x_1	y_1	x_2	y_2
	м	м	м	м
1	2	2	4	2
2	2	2	4	4
3	2	4	4	2
4	2	2	3	4
5	2	4	3	2
6	2	2	4	3
7	2	3	4	2
8	2	2	2	4
9	2	4	2	2
0	2	2	3	2

9. Пример расчета постоянного электромагнитного поля двухпроводной линии вблизи проводящей стальной плоской поверхности

Приведем пример числового расчета по программе *Mathcad* с пояснениями и указанием используемых формул.

Исходные данные:

$$\begin{aligned}
 \phi 1 &:= 500 & \epsilon 0 &:= 8.8542 \cdot 10^{-12} & x 1 &:= 2 & y 1 &:= 4 \\
 \phi 2 &:= -2500 & \mu 0 &:= 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} & x 2 &:= 2 & y 2 &:= 2 & R &:= 0.02 \\
 I &:= 1200 & \gamma &:= 10^{-9} & x n &:= 2 & y n &:= 3 \\
 & & \gamma a &:= 3.2 \cdot 10^7 & \mu a &:= \mu 0 & \mu ct &:= 5 \cdot \mu 0
 \end{aligned}$$

Где $\phi 1, \phi 2$ – постоянные потенциалы проводов; I – постоянный ток в проводах линии; $x 1, y 1$ и $x 2, y 2$ – координаты проводов; $x n, y n$ – координаты точки N ; γ – удельная проводимость воздуха; $\gamma a, \mu a$ – удельная проводимость и абсолютная магнитная проницаемость алюминиевых проводов; μct – абсолютная магнитная проницаемость стальной поверхности.

Расположение проводов и точки N (на всех рисунках масштабы по осям x и y должны быть одинаковыми):

$$y_m := 2 + \max(y1, y2) \quad x_m := 2 + \max(x1, x2) \quad x_m = 4 \quad y_m = 6$$

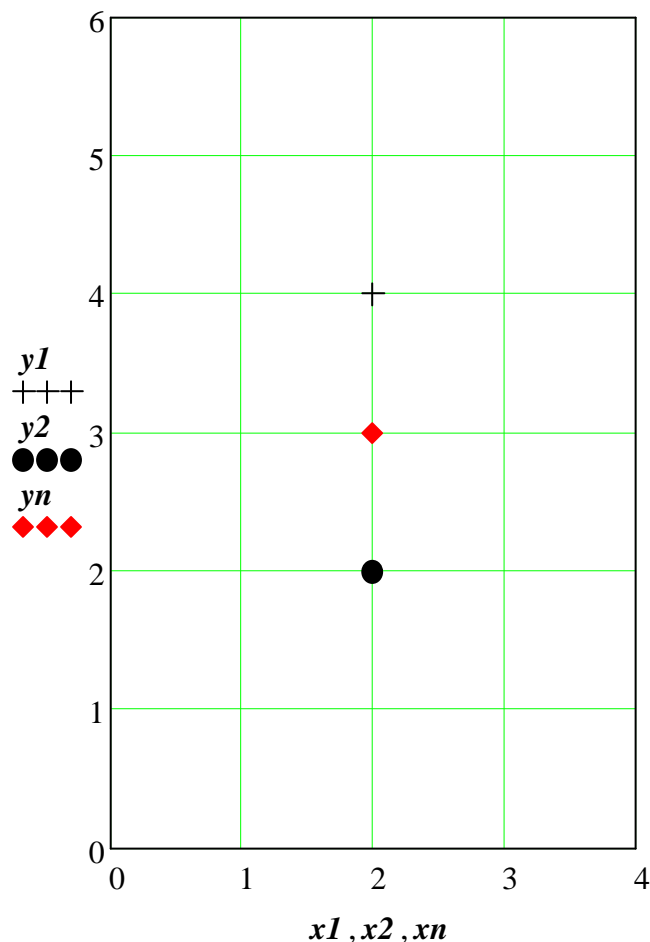


Рис. 9.1

1. Для электростатического поля:

потенциальные коэффициенты α_{km} (3.3)

$$d12 := \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2} \quad D12 := \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 + y2)^2}$$

$$\alpha11 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot y1}{R}\right) \quad \alpha22 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot y2}{R}\right)$$

$$\alpha12 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0} \cdot \ln\left(\frac{D12}{d12}\right) \quad \alpha21 := \alpha12$$

$$\alpha_{11} = 1.077 \times 10^{11} \quad \alpha_{12} = 1.975 \times 10^{10}$$

$$\alpha_{21} = 1.975 \times 10^{10} \quad \alpha_{22} = 9.524 \times 10^{10}$$

емкостные коэффициенты (3.4)

$$\Delta := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$d\Delta := \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$$

$$\beta_{11} := \frac{\alpha_{22}}{d\Delta} \quad \beta_{22} := \frac{\alpha_{11}}{d\Delta} \quad \beta_{12} := \frac{-\alpha_{21}}{d\Delta} \quad \beta_{21} := \beta_{12}$$

$$\beta_{11} = 9.652 \times 10^{-12} \quad \beta_{12} = -2.001 \times 10^{-12}$$

$$\beta_{21} = -2.001 \times 10^{-12} \quad \beta_{22} = 1.092 \times 10^{-11}$$

частичные емкости (3.5)

$$C_{11} := \beta_{11} + \beta_{12} \quad C_{22} := \beta_{22} + \beta_{21} \quad C_{12} := -\beta_{12} \quad C_{21} := C_{12}$$

$$C_{11} = 7.651 \times 10^{-12} \quad C_{12} = 2.001 \times 10^{-12}$$

$$C_{21} = 2.001 \times 10^{-12} \quad C_{22} = 8.914 \times 10^{-12}$$

линейные плотности зарядов проводов (3.4)

$$\tau_1 := \beta_{11} \cdot \phi_1 + \beta_{12} \cdot \phi_2 \quad \tau_2 := \beta_{21} \cdot \phi_1 + \beta_{22} \cdot \phi_2$$

$$\tau_1 = 9.83 \times 10^{-9} \quad \tau_2 = -2.829 \times 10^{-8}$$

емкость линии (3.6)

$$C_0 := C_{12} + \frac{C_{11} \cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}} \quad C_0 = 6.118 \times 10^{-12}$$

энергия электростатического поля (3.7)

$$We := 0.5 \cdot (\tau 1 \cdot \phi 1 + \tau 2 \cdot \phi 2) \quad We = 3.782 \times 10^{-5}$$

модули радиусов для точки N (3.11)

$$n := 301 \quad k := 0, 1.. n \quad j := k \quad hx := xm \cdot n^{-1} \quad hy := ym \cdot n^{-1}$$

$$r1n := hx + \sqrt{(xn - x1)^2 + (yn - y1)^2}$$

$$r2n := hx + \sqrt{(xn - x2)^2 + (yn - y2)^2}$$

$$r3n := hx + \sqrt{(xn - x1)^2 + (yn + y1)^2}$$

$$r4n := hx + \sqrt{(xn - x2)^2 + (yn + y2)^2}$$

потенциал в точке N (3.8)

$$\phi n := \frac{\tau 1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot \ln \left(\frac{r3n}{r1n} \right) + \frac{\tau 2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot \ln \left(\frac{r4n}{r2n} \right) \quad \phi n = -471.187$$

комплексные радиусы для точки N (3.11)

$$i := \sqrt{-1} \quad R1n := (xn - x1) + (yn - y1) \cdot i$$

$$R2n := (xn - x2) + (yn - y2) \cdot i$$

$$R3n := (xn - x1) + (yn + y1) \cdot i$$

$$R4n := (xn - x2) + (yn + y2) \cdot i$$

проекции векторов напряженности на ось x (рис. 8.1) в точке N

$$Ex1 := \frac{\tau 1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0 \cdot |R1n|} \cdot \cos(\arg(R1n))$$

$$Ex2 := \frac{\tau 2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0 \cdot |R2n|} \cdot \cos(\arg(R2n))$$

$$Ex3 := \frac{-\tau1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0 \cdot |R3n|} \cdot \cos(\arg(R3n))$$

$$Ex4 := \frac{-\tau2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0 \cdot |R4n|} \cdot \cos(\arg(R4n))$$

$$Exn := Ex1 + Ex2 + Ex3 + Ex4 \qquad Exn = -1.563 \times 10^{-14}$$

проекции векторов напряженности на ось y (рис. 8.1) в точке N

$$Ey1 := \frac{\tau1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0 \cdot |R1n|} \cdot \sin(\arg(R1n))$$

$$Ey2 := \frac{\tau2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0 \cdot |R2n|} \cdot \sin(\arg(R2n))$$

$$Ey3 := \frac{-\tau1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0 \cdot |R3n|} \cdot \sin(\arg(R3n))$$

$$Ey4 := \frac{-\tau2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon0 \cdot |R4n|} \cdot \sin(\arg(R4n))$$

$$Eyn := Ey1 + Ey2 + Ey3 + Ey4 \qquad Eyn = -608.718$$

вектор напряженности в точке N (3.10)

$$En := \sqrt{Exn^2 + Eyn^2} \qquad En = 608.718$$

для картины поля расчет линий равного потенциала (3.8)

$$x_k := hx \cdot k \qquad y_j := hy \cdot j \qquad r1_{k,j} := hx + \sqrt{(x_k - x1)^2 + (y_j - y1)^2}$$

$$r2_{k,j} := hx + \sqrt{(x_k - x2)^2 + (y_j - y2)^2}$$

$$r3_{k,j} := hx + \sqrt{(x_k - x1)^2 + (y_j + y1)^2}$$

$$r4_{k,j} := hx + \sqrt{(x_k - x2)^2 + (y_j + y2)^2}$$

$$\phi_{k,j} := \frac{\tau 1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot \ln \left(\frac{r3_{k,j}}{r1_{k,j}} \right) + \frac{\tau 2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot \ln \left(\frac{r4_{k,j}}{r2_{k,j}} \right)$$

для картины поля расчет линий равной функции потока (3.9)

$$R1_{k,j} := (x_k - x1) + (y_j - y1) \cdot i \quad R2_{k,j} := (x_k - x2) + (y_j - y2) \cdot i$$

$$R3_{k,j} := (x_k - x1) + (y_j + y1) \cdot i \quad R4_{k,j} := (x_k - x2) + (y_j + y2) \cdot i$$

$$\begin{aligned} \psi_{k,j} := & -\frac{\tau 1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot (\arg(R1_{k,j})) + \frac{\tau 1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot (\arg(R3_{k,j})) \dots \\ & + \frac{-\tau 2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot (\arg(R2_{k,j})) + \frac{\tau 2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon 0} \cdot (\arg(R4_{k,j})) \end{aligned}$$

Где постоянная $M=0$ и число линий функции потока подобрано для визуальной непрерывности этих линий, причем стрелки на линиях напряженности (функции потока) проставлены вручную от положительно заряженного провода 1 к отрицательно заряженному проводу 2 (рис. 9.2).

2. Для электрического поля:

сопротивление проводов линии (5.6)

$$R0 := \frac{2}{\gamma \cdot \pi \cdot R^2} \quad R0 = 4.974 \times 10^{-5}$$

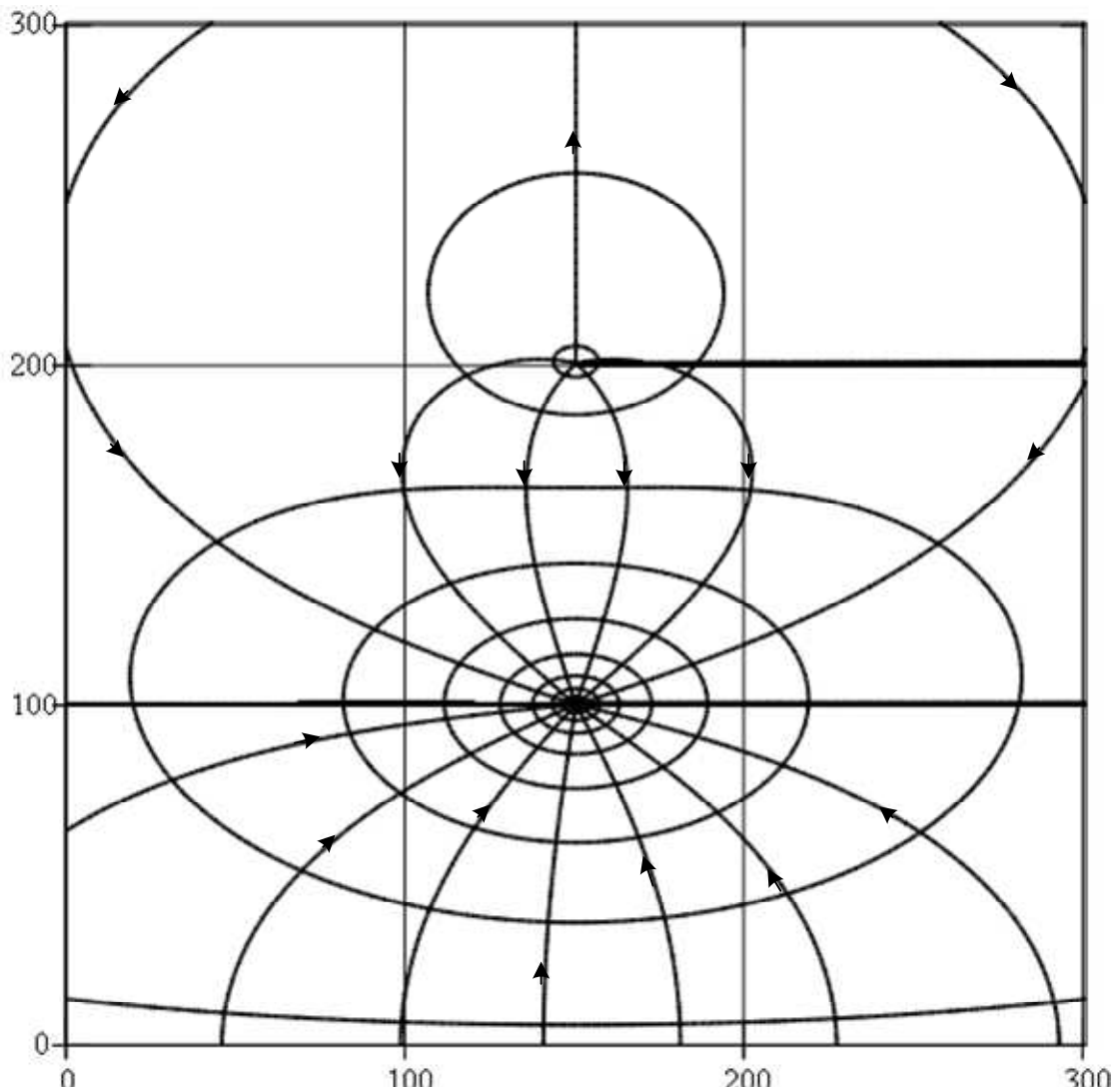
проводимости токов утечки (5.2)

$$G11 := \frac{\gamma}{\epsilon 0} \cdot C11 \quad G12 := \frac{\gamma}{\epsilon 0} \cdot C12 \quad G22 := \frac{\gamma}{\epsilon 0} \cdot C22 \quad G21 := G12$$

$$G11 = 8.641 \times 10^{-10} \quad G12 = 2.26 \times 10^{-10}$$

$$G21 = 2.26 \times 10^{-10} \quad G22 = 1.007 \times 10^{-9}$$

$$G0 := \frac{\gamma}{\epsilon 0} \cdot C0 \quad G0 = 6.91 \times 10^{-10}$$



ϕ, ψ

Рис. 9.2. Картина электростатического поля

токи утечки (5.3, 5.4)

$$I_{y1} := G_{11} \cdot \phi_1 + G_{12} \cdot (\phi_1 - \phi_2)$$

$$I_{y1} = 1.11 \times 10^{-6}$$

$$I_{y2} := G_{21} \cdot (\phi_2 - \phi_1) + G_{22} \cdot \phi_2$$

$$I_{y2} = -3.195 \times 10^{-6}$$

$$I_{y11} := \frac{\gamma}{\epsilon_0} \cdot \tau_1$$

$$I_{y11} = 1.11 \times 10^{-6}$$

$$I_{y22} := \frac{\gamma}{\epsilon_0} \cdot \tau_2$$

$$I_{y22} = -3.195 \times 10^{-6}$$

мощность активных потерь от токов утечки (5.5)

$$Py1 := G12 \cdot (\phi1 - \phi2)^2 + G11 \cdot \phi1^2 + G22 \cdot \phi2^2 \quad Py1 = 8.542 \times 10^{-3}$$

$$Py2 := Iy1 \cdot \phi1 + Iy2 \cdot \phi2 \quad Py2 = 8.542 \times 10^{-3}$$

3. Для магнитного поля:

зеркальное изображение тока линии (7.4)

$$I_{\text{www}} := \frac{\mu_{ct} - \mu_0}{\mu_{ct} + \mu_0} \cdot I \quad I = 800$$

индуктивности линии (7.9)

$$h1 := y1 \quad h2 := y2$$

$$L0pr := \frac{\mu_a \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \quad L01 := \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d12 - R}{R}\right)$$

$$L02 := \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\mu_{ct} - \mu_0}{\mu_{ct} + \mu_0} \cdot \ln\left(\frac{D12^2}{4 \cdot h1 \cdot h2}\right)$$

$$L0pr = 1.257 \times 10^{-13} \quad L01 = 1.838 \times 10^{-6} \quad L02 = 1.57 \times 10^{-8}$$

$$L0 := L0pr + L01 + L02 \quad L0 = 1.854 \times 10^{-6}$$

энергия магнитного поля (7.10)

$$Wm := 0.5 \cdot L0 \cdot I^2 \quad Wm = 1.335$$

комплексные радиусы для расчета силы на оси 2 провода

$$r12f := hx + (x2 - x1) + (y2 - y1) \cdot i$$

$$r32f := hx + (x2 - x1) + (y2 + y1) \cdot i$$

$$r42f := hx - (x2 - x2) + (y2 + y2) \cdot i$$

проекции векторов напряженности на оси 2 провода

$$Hx12f := \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot |r12f|} \cdot \sin(\arg(r12f))$$

$$H_{x32f} := \frac{II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{32f}|} \cdot \sin(\arg(r_{32f}))$$

$$H_{x42f} := \frac{-II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{42f}|} \cdot \sin(\arg(r_{42f}))$$

$$H_{x2f} := H_{x12f} + H_{x32f} + H_{x42f} \quad H_{x2f} = -106.099$$

$$H_{y12f} := \frac{-I}{2 \cdot \pi \cdot |r_{12f}|} \cdot \cos(\arg(r_{12f}))$$

$$H_{y32f} := \frac{-II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{32f}|} \cdot \cos(\arg(r_{32f}))$$

$$H_{y42f} := \frac{-II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{42f}|} \cdot \cos(\arg(r_{42f}))$$

$$H_{y2f} := H_{y12f} + H_{y32f} + H_{y42f} \quad H_{y2f} = -0.787$$

результатирующая напряженность на оси 2 провода

$$H_{2f} := \sqrt{H_{x2f}^2 + H_{y2f}^2} \quad H_{2f} = 106.102$$

сила, действующая на провод 2 (6.1)

$$F_x := -\mu_0 \cdot H_{y2f} \cdot I \quad F_x = 1.187 \times 10^{-3}$$

$$F_y := \mu_0 \cdot H_{x2f} \cdot I \quad F_y = -0.16$$

$$F_2 := \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad F_2 = 0.16$$

векторы силы и напряженности на оси 2 провода

$$F_{22} := F_x + i \cdot F_y \quad H_f := H_{x2f} + i \cdot H_{y2f} \quad z_2 := x_2 + i \cdot y_2$$

$$F_{222} := \begin{pmatrix} z_2 \\ 100 \cdot F_{22} + z_2 \end{pmatrix} \quad H_{ff} := \begin{pmatrix} z_2 \\ H_f + z_2 \end{pmatrix}$$

Вектор силы \bar{F} на оси 2 провода направлен согласно правилу левой руки, причем стрелки на векторах силы \bar{F} и напряженности $\bar{H}f$ на оси провода 2, обозначения этих векторов, номера проводов 1, 2 и буква N проставлены вручную (рис. 9.3).

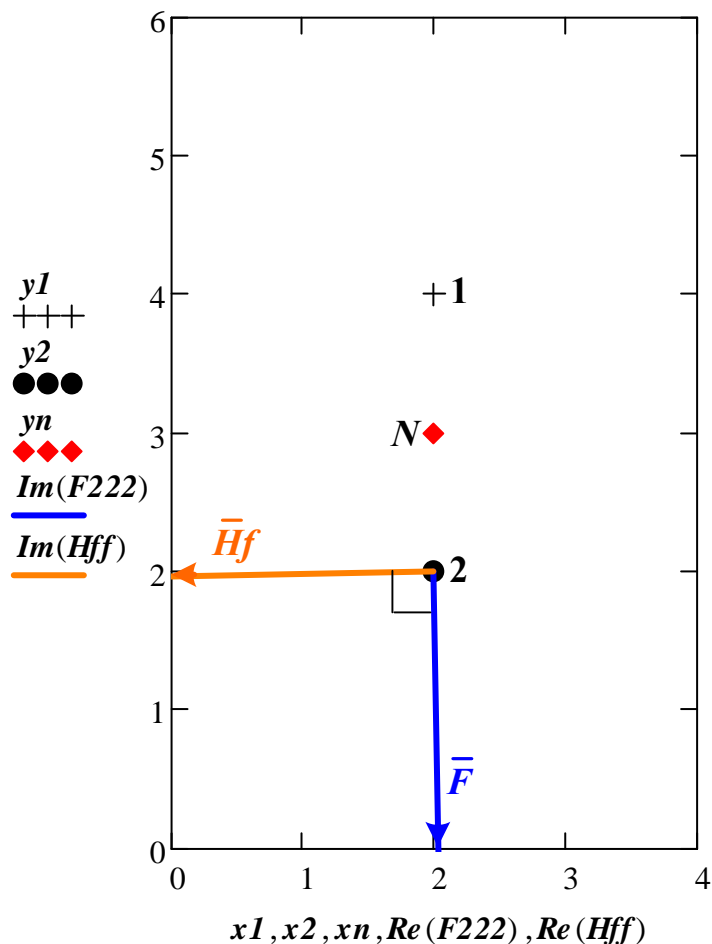


Рис. 9.3. Векторы силы и напряженности на оси провода 2

комплексные радиусы для точки N (7.8)

$$r_{11n} := hx + (xn - x1) + (yn - y1) \cdot i$$

$$r_{22n} := hx - (xn - x2) + (yn - y2) \cdot i$$

$$r_{33n} := hx + (xn - x1) + (yn + y1) \cdot i$$

$$r_{44n} := hx - (xn - x2) + (yn + y2) \cdot i$$

проекция векторов напряженности на ось x в точке N

$$H_{x11} := \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot |r_{11n}|} \cdot \sin(\arg(r_{11n}))$$

$$H_{x22} := \frac{-I}{2 \cdot \pi \cdot |r_{22n}|} \cdot \sin(\arg(r_{22n}))$$

$$H_{x33} := \frac{II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{33n}|} \cdot \sin(\arg(r_{33n}))$$

$$H_{x44} := \frac{-II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{44n}|} \cdot \sin(\arg(r_{44n}))$$

$$H_{xn} := H_{x11} + H_{x22} + H_{x33} + H_{x44} \qquad H_{xn} = -389.18$$

проекция векторов напряженности на ось y в точке N

$$H_{y11} := \frac{-I}{2 \cdot \pi \cdot |r_{11n}|} \cdot \cos(\arg(r_{11n}))$$

$$H_{y22} := \frac{-I}{2 \cdot \pi \cdot |r_{22n}|} \cdot \cos(\arg(r_{22n}))$$

$$H_{y33} := \frac{-II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{33n}|} \cdot \cos(\arg(r_{33n}))$$

$$H_{y44} := \frac{-II}{2 \cdot \pi \cdot |r_{44n}|} \cdot \cos(\arg(r_{44n}))$$

$$H_{yn} := H_{y11} + H_{y22} + H_{y33} + H_{y44} \qquad H_{yn} = -5.177$$

вектор напряженности в точке N (7.5)

$$H_n := \sqrt{H_{xn}^2 + H_{yn}^2} \qquad H_n = 389.214$$

для картины поля расчет линий равного векторного магнитного потенциала (7.6)

$$A_{k,j} := \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(R1_{k,j}) \dots \\ + \frac{-\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(R2_{k,j}) + \frac{\mu_0 \cdot I1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(R3_{k,j}) + \frac{-\mu_0 \cdot I1}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(R4_{k,j})$$

для картины поля расчет линий равного скалярного магнитного потенциала (7.7, 7.8)

$$\phi_{m_{k,j}} := -\frac{I}{2 \cdot \pi} \cdot (-\arg(R1_{k,j})) + \frac{-I}{2 \cdot \pi} \cdot (\arg(R2_{k,j})) \dots \\ + \frac{-I1}{2 \cdot \pi} \cdot (-\arg(R3_{k,j})) + \frac{-I1}{2 \cdot \pi} \cdot (\arg(R4_{k,j}))$$

Где постоянные $C_{1,2}=0$ и число линий равного скалярного потенциала подобрано для визуальной непрерывности этих линий, причем стрелки на линиях равного векторного магнитного потенциала представлены вручную согласно правилу правоходового винта (рис. 9.4).

4. Для электромагнитного поля:

для точки N вектор Пойнтинга (1.1)

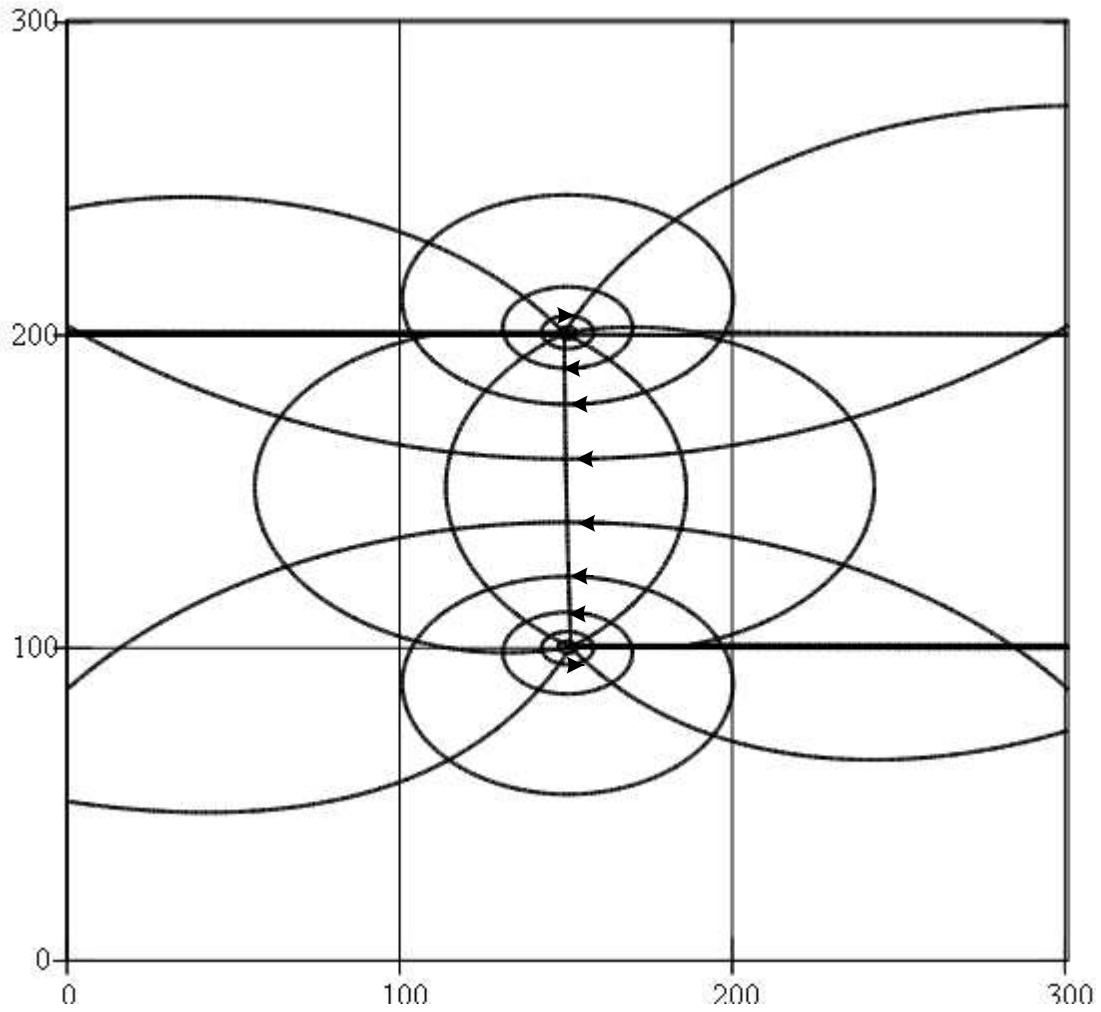
$$en := E_{xn} + i \cdot E_{yn} \quad hn := H_{xn} + i \cdot H_{yn} \quad zn := x_n + i \cdot y_n$$

$$\alpha_e := \arg(en) \quad \alpha_e \cdot \text{deg}^{-1} = -90$$

$$\alpha_h := \arg(hn) \quad \alpha_h \cdot \text{deg}^{-1} = -179.238$$

$$\alpha := \text{if}(|\alpha_e - \alpha_h| \leq \pi, |\alpha_e - \alpha_h|, 2 \cdot \pi - |\alpha_e - \alpha_h|)$$

$$\frac{\alpha}{\text{deg}} = 89.238 \quad \Pi := E_n \cdot H_n \cdot \sin(\alpha) \quad \Pi = 2.369 \times 10^5$$



$A, \phi m$

Рис. 9.4. Картина магнитного поля

векторы напряженности в точке N

$$E_{nn} := \begin{pmatrix} zn \\ en + zn \end{pmatrix}$$

$$H_{nn} := \begin{pmatrix} zn \\ hn + zn \end{pmatrix}$$

Вектор Пойнтинга $\overline{\Pi}$ в точке N согласно правилу правоходового винта при вращении по кратчайшему пути вектора \overline{E} к вектору \overline{H} направлен “от нас”, причем стрелки на векторах напряженности, обозначение этих векторов, номера проводов 1 и 2, буква N и угол α представлены вручную (рис. 9.5).

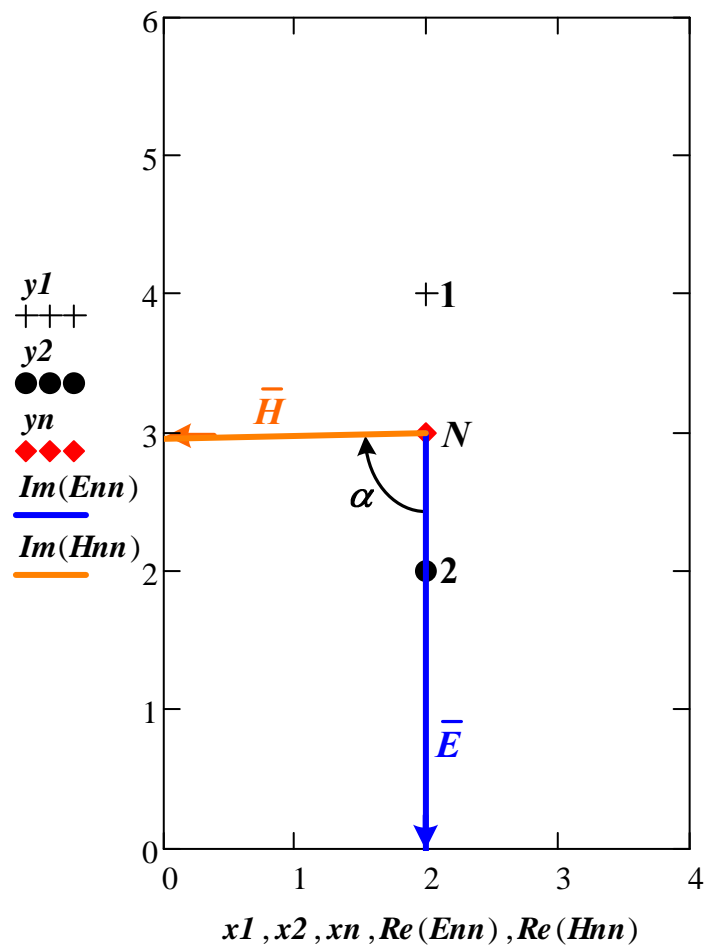


Рис. 9.5. Векторы напряженности в точке N

5. Параметры линии постоянного тока:

первичные параметры

$$R0 = 4.974 \times 10^{-5}$$

$$L0 = 1.854 \times 10^{-6}$$

$$G0 = 6.91 \times 10^{-10}$$

$$C0 = 6.118 \times 10^{-12}$$

$$\frac{R0}{L0} = 26.83$$

$$\frac{G0}{C0} = 112.941$$

вторичные параметры при $\omega=0$

$$ZB := \sqrt{\frac{R0}{G0}} \quad ZB = 268.28$$

$$\Gamma := \sqrt{R0 \cdot G0} \quad \Gamma = 1.854 \times 10^{-7}$$

$$V := \frac{1}{\sqrt{L0 \cdot C0}} \quad V = 2.969 \times 10^8$$

6. Анализ влияния проводящей стальной плоской поверхности на параметры линии R_0 , L_0 , G_0 , C_0 и выводы по результатам расчета.

Список литературы

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Том 3. – СПб.: Питер, 2003. – 377 с.
2. Татур Т.А. Основы теории электромагнитного поля. Справочное пособие. – М.: Высшая школа, 1989. – 271 с.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высшая школа, 1985. – 263 с.
4. Теоретические основы электротехники. Части 2 и 3 / под ред. Г.И. Атабекова. – М.: Энергия, 1979. – 432 с.
5. Теоретические основы электротехники. Том 2 / под ред. П.А. Ионкина. – М.: Высшая школа, 1976. – 383 с.
6. Дьяконов В.П. Mathcad 8/2000: специальный справочник. – СПб.: Питер, 2000. – 592 с.

Содержание

Введение	3
1. Уравнения электромагнитного поля	5
2. Основы электростатики	9
3. Электростатическое поле двухпроводной линии с учетом влияния проводящей плоской поверхности	17
А. Примеры решения задач по электростатике	23
4. Уравнения электрического поля постоянного тока в проводящей среде	34
5. Расчет токов утечки через изоляцию линий	37
Б. Примеры решения задач по электрическому полю постоянного тока	40
6. Уравнения магнитного поля постоянного тока	47
7. Магнитное поле постоянного тока двухпроводной линии с учетом влияния ферромагнитной плоской поверхности	54
В. Примеры решения задач по магнитному полю постоянного тока	58
8. Домашнее задание. Расчет постоянного электромагнитного поля двухпроводной линии вблизи проводящей стальной плоской поверхности	68
9. Пример расчета постоянного электромагнитного поля двухпроводной линии вблизи проводящей стальной плоской поверхности	71
Список литературы	86

Учебное издание

НОСОВ Геннадий Васильевич

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор *кандидат технических наук,
доцент Г.В. Носов*
Дизайн обложки *Г.В. Носов*


**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати 05.11.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 10,87. Уч.-изд. л. 9,84.
Заказ . Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru