ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра оптики и спектроскопии

В.В. Ивахник

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Издательство «Универс-групп»
2005

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 531
ББК 22.21
И 17

Ивахник В.В.

И 17 Основы механики материальной точки. Самара: Изд-во «Универс-групп», 2005. 88 с.

ISBN 5-467-00048-9

Учебное пособие по курсу общей физики «Основы механики материальной точки» предназначено для студентов нефизических специальностей университета. В основу пособия положен курс лекций, читаемых автором в последние годы студентам первого курса химического факультета. Основное внимание в пособие уделено рассмотрению принципиальных вопросов механики материальной точки.

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 5-467-00048-9

Введение

Предмет физики

Мир, в котором мы живем, представляет собой совокупность материальных тел, находящихся в постоянном взаимодействии и непрерывном движении. Перед наукой стоит задача изучить и раскрыть закономерности и связи между различными процессами, явлениями.

«Физика» в переводе с греческого природа. И первоначально физика включала всю совокупность знаний человечества о природе. Однако дальнейшее накопление знаний привило к их дифференциации. Появились такие науки как химия, биология, геология и т. д.

Физика – это наука о наиболее простых, общих свойствах материи. Она является в значительной степени фундаментом всех естественных наук. Так физика является основой для химии, объясняя природу периодичности химических свойств, механизм возникновения межатомных и межмолекулярных взаимодействий. В основе современной электротехники лежат физические закономерности взаимодействия электрических зарядов и полей.

В зависимости от объекта исследования физика делится на механику, термодинамику (молекулярную физику), учение об электричестве, оптику, атомную и ядерную физику.

Механика как раздел физики

Механика – это раздел физики, изучающий простейшую (механическую) форму движения материи, которая состоит в перемещении тел или их частей друг относительно друга. В таком определении уже дано понятие механической формы движения материи – это перемещение тел или их частей друг относительно друга. Таким образом, говоря о движении, всегда подразумеваем, что одно тело перемещается относительно другого. Другими словами движение всегда относительно.

Если движение тела относительно, то для его описания необходимо (рис.1):

1. условиться относительно какого тела или группы тел будет отсчитываться перемещение данного тела, т.е. ввести тело отсчета, 2. для определения положения тела в пространстве с телом отсчета необходимо связать некую систему координат. Мы живем в трехмерном пространстве, поэтому положение точки описывается тремя числами. Если взять декартову систему координат, то три числа – это проекции радиус-

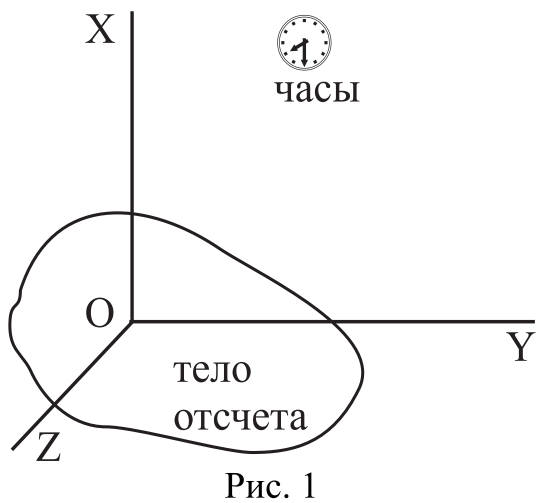

Рис. 1

вектора $\bar{r}$ на оси координат x, y, z, 3. для описания движения нужно отсчитывать время, т. е. взять часы.

Таким образом, для описания любого движения необходимо выбрать систему отсчета: это тело отсчета, связанная с ним система координат, и часы, отсчитывающие время.

Модели, используемые в механике

Физика, как и другие науки, работает исключительно с моделями. Модель тела (процесса) в отличие от реального тела (процесса), сохраняя основные свойства, абстрагируется от второстепенных свойств.

1. Материальная точка – это геометрическая точка, обладающая массой. В природе нет непротяженных тел, однако в тех случаях, когда размерами тела можно пренебречь, его можно рассматривать как материальную точку. Вопрос о том, можно ли конкретное тело рассматривать как материальную точку или нет, зависит не от размеров тела, а от условий задачи. Одно и то же тело в одних условиях можно рассматривать как материальную точку, в других условиях как – протяженное тело.

2. Система материальных точек.

3. Абсолютно твердое тело – это тело, протяженными размерами которого пренебречь нельзя, но составные части его не совершают перемещений друг относительно друга.

4. Упруго деформируемое тело – это тело, расстояние между отдельными частями которого меняется. Однако изменения эти происходят по закону Гука.

5.….

Перечислены несколько моделей, которые рассматриваются в механике. Во всех этих моделях в качестве исходного понятия выступает понятие материальной точки.

Механика подразделяется и по методам и исследования:

1. *кинематика* – раздел механики, в котором движение описывается без выяснения причин этого движения,

2. *динамика* – раздел механики, в котором движение описывается в зависимости от причины движения.

Тема 1
Основы кинематики материальной точки. Радиус-вектор (траектория), скорость, ускорение. Прямолинейное движение. Движение по окружности

1.1. Радиус-вектор (траектория), скорость, ускорение

В качестве объекта исследования выступает тело, протяженными размерами которого можно пренебречь – материальная точка.

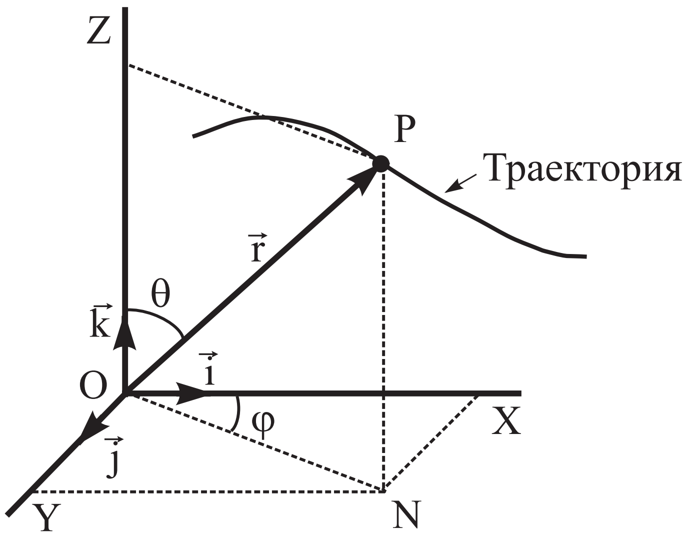

Рис. 1.1.

Первой кинематической характеристикой движения является **радиус-вектор** $\vec{r}$ – вектор, проведенный из начала системы координат к материальной точке (рис.1.1). Если использовать декартову систему координат, то

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - единичные вектора, направленные вдоль осей X, Y, Z, x, y, z – проекции радиус-вектора на эти оси (декартовы координаты точки).

Абсолютной величиной вектора или его модулем называется скаляр, равный длине отрезка, изображающего этот вектор. Пользуясь теоремой Пифагора, получим модуль радиус-вектора

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если использовать сферическую систему координат, то положение материальной точки в пространстве можно определить следующими тремя величинами: расстоянием от начала системы координат до материальной точки – r, углом $\theta = \angle ZOP$ между прямыми *OZ* и *OP*, углом $\varphi = \angle XON$ между полуплоскостями *ZOX* и *ZOP*. Декартовы и сферические координаты связаны соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta.$$

Определить, как движется материальная точка – это найти зависимость радиус-вектора от времени $\vec{r}(t)$ или найти зависимость от времени декартовых (или иных) координат

$$\vec{r}(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t). \qquad (1.1)$$

Уравнения, описывающие изменение декартовых (или иных) координат во времени, получили название кинематических уравнений.

Пример

$$\begin{cases} x = at^2, \\ y = b\cos t, \\ z = \gamma t. \end{cases}$$

Здесь a, b, γ – постоянные коэффициенты.

Точки пространства, через которые пройдет движущаяся материальная точка, образуют ***траекторию.*** Форма траектории зависит от выбора системы отсчета. Понятие траектории имеет относительный смысл.

Пример. Тело падает в вагоне, движущемся относительно поверхности Земли с постоянной скоростью. Относительно вагона траектория тела – прямая линия. Относительно Земли тело движется по кривой (без учета сопротивления воздуха эта кривая – парабола).

Как, зная кинематические уравнения, найти траекторию?

В одном из кинематических уравнений выразим время как функцию координаты (например $t(z)$) и подставим в оставшиеся два уравнения

$$x = x(t(z)) = x(z),$$

$$y = y(t(z)) = y(z).$$

Получили два уравнения, задающие две поверхности. Пересечение этих поверхностей и будет траектория.

Пример

$$\begin{cases} x(t) = at^2 + bt + c, \\ y(t) = mt, \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

Движение материальной точки происходит в плоскости *XOY*. Выразив время из второго уравнения ($t = \dfrac{y}{m}$) и подставив в первое уравнение, получим $x = a\left(\dfrac{y}{m}\right)^2 + b\left(\dfrac{y}{m}\right) + c$. Это уравнение параболы. Таким образом, в плоскости *XOY* материальная точка движется по параболе.

Пример

$$\begin{cases} x(t) = a\cos\omega t, \\ y(t) = a\sin\omega t, \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

Вновь движение материальной точки происходит в плоскости XOY. Возведем в квадрат первое и второе уравнения, а затем, сложив правые и левые части уравнений, получим

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение окружности. Таким образом, в плоскости XOY материальная точка движется по окружности.

При изучении движения тела важно знать не только по какой траектории это тело движется, но и как быстро оно по этой траектории движется. Поэтому следующей кинематической характеристикой движения материальной точки является скорость.

Скорость *(мгновенная скорость) – это физическая величина, характеризующая быстроту изменения радиус-вектора во времени*

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.2)$$

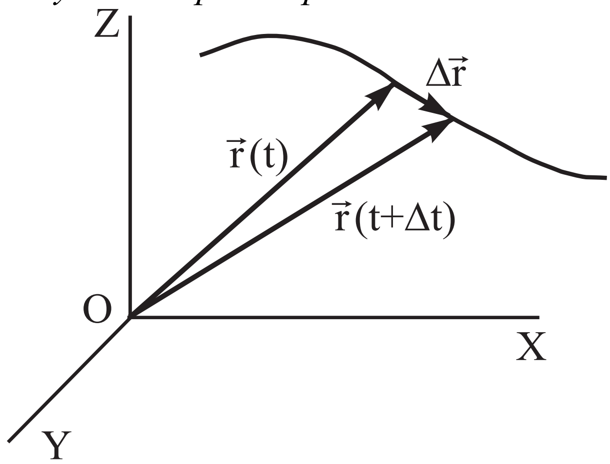

Рис. 1.2.

Пусть даны кинематические уравнения движения, т.е. известна траектория движения материальной точки. Положения точки в моменты времени t и $t + \Delta t$ описываются радиус-векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t + \Delta t)$ (рис.1.2). Найдем разность

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

При $\Delta t \to 0$ изменение радиус-вектора $(\Delta \vec{r})$ стремится занять положение по касательной к траектории в данной точке. Таким образом, скорость всегда направлена по касательной к траектории в данной точке.

Запишем выражение для скорости в декартовой системе координат в виде

$$\vec{\upsilon} = \vec{i}\upsilon_x + \vec{j}\upsilon_y + \vec{k}\upsilon_z = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}.$$

Знать, как быстро меняется во времени радиус-вектор – это знать

$$\begin{cases} \upsilon_x(t) = \dfrac{dx}{dt}, \\ \upsilon_y(t) = \dfrac{dy}{dt}, \\ \upsilon_z(t) = \dfrac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Третьей кинематической характеристикой является ускорение. Если скорость характеризует быстроту изменения радиус-вектора, то ускорение характеризует быстроту изменения скорости. Таким образом, ***ускорение*** – *это физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости во времени*

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (1.3)$$

Запишем выражение для ускорения в декартовой системе координат

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z = \vec{i}\frac{d\upsilon_x}{dt} + \vec{j}\frac{d\upsilon_y}{dt} + \vec{k}\frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Знать, как быстро меняется во времени скорость, – это знать

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y(t) = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z(t) = \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

Через интересующую нас точку траектории проведем окружность, имеющую с траекторией общую касательную в этой точке, т.е. на данном участке кривой наиболее точно приближающуюся к ней (рис. 1.3). Эта окружность называется касательной, а ее радиус R – радиусом кривизны в данной точке траектории. Вектор ускорения всегда направлен внутрь этой окружности. Если движение происходит с увеличением ускорения, то угол между векторами скорости и ускорения острый. Если движение происходит с уменьшением ускорения, то угол между векторами скорости и ускорения тупой. Если движение происходит с неизменной по величине скоростью, то ускорение направлено по нормали к траектории.

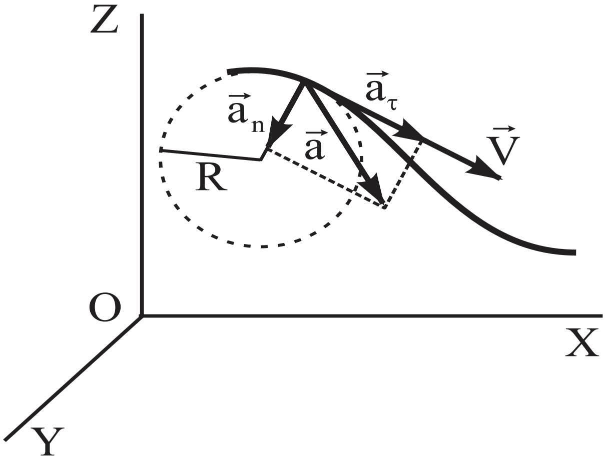

Рис. 1.3.

Принято раскладывать вектор ускорения на две части

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \qquad (1.4)$$

Вектор $\vec{a}_n$ направлен по нормали (нормальное ускорение), а вектор $\vec{a}_\tau$ по касательной (тангенциальное ускорение) к траектории в рассматриваемой точке.

Можно показать, что

$$|\vec{a}_\tau| = a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta|\vec{\upsilon}|}{\Delta t} = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt}, \tag{1.5}$$

где $|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$. Величина вектора a_τ характеризует изменение скорости по величине.

Вектор $\vec{a}_n$ характеризует изменение скорости по направлению. В произвольной точке траектории нормальное ускорение связано простой формулой с величиной скорости и радиусом кривизны в этой точке

$$|\vec{a}_n| = a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{1.6}$$

Нормальное ускорение часто называют также центростремительным ускорением.

Еще одно понятие, используемое в кинематике, – путь. *Путь между двумя точками траектории – это расстояние по траектории, взятое между этими точками.*

Для характеристики движения материальной точки ввели три кинематические характеристики $\vec{r}(t)$, $\vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a}(t)$. Причем, зная, как меняется со временем $\vec{r}(t)$, можно однозначно найти, как меняются остальные кинематические величины $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{a}(t)$:

$$\vec{r}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

И наоборот, зная, как меняется со временем $\vec{a}(t)$, можно однозначно найти, как меняются кинематические величины $\vec{r}(t)$ и $\vec{\upsilon}(t)$:

$$\vec{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}(t) = \int \vec{a}(t)dt + \vec{\upsilon}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \int \vec{\upsilon}(t)dt + \vec{r}_0.$$

Здесь $\vec{r}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$ – постоянные вектора, определяемые из начальных условий.

Начальные условия – это значения радиус-вектора и скорости в какой-то определенный момент времени

$$\begin{cases} \vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0, \\ \vec{\upsilon}(t = t_0) = \vec{\upsilon}_0. \end{cases}$$

В качестве определенного момента времени, как правило, берется момент времени $t_0 = 0$.

1.2. Прямолинейное движение

Рассмотрим частный случай криволинейного движения – прямолинейное движение, т.е. движение осуществляется по прямой линии. Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы материальная точка двигалась вдоль оси X. Уравнения, описывающие движение, имеют вид

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}, \\ \upsilon_y = 0, \\ \upsilon_z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y = 0, \\ a_z = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Равенство нулю y-ой и z -ой координат показывает, что в этих направлениях движение не происходит.

Рассмотрим несколько простейших видов прямолинейного движения.

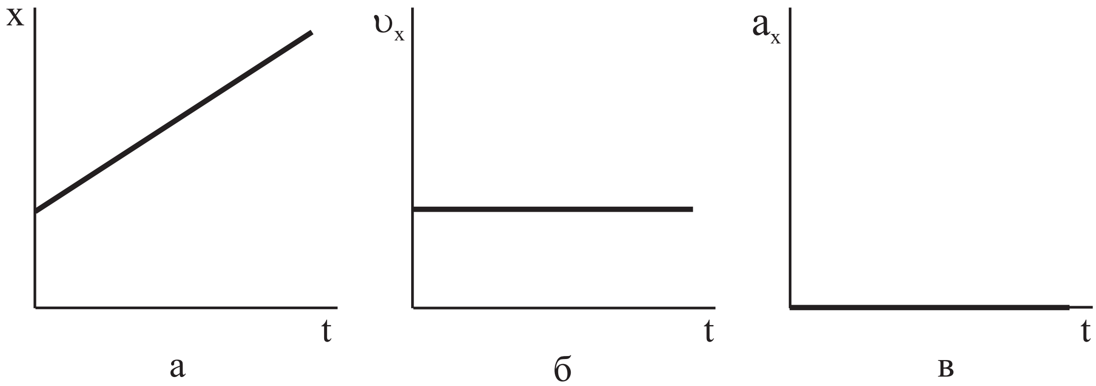

Рис. 1.4.

1. Равномерное прямолинейное движение. Движение тела называется равномерным, если тело движется с постоянной скоростью

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 = const\,. \tag{1.8}$$

Тогда изменение во времени пути и ускорения есть

$$x(t) = \upsilon_0 t + x_0\,, \qquad a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 0\,.$$

На рис.1.4 для равномерного движения приведены графики зависимости от времени пути, скорости и ускорения.

2. Равноускоренное прямолинейное движение. Движение называется равноускоренным, если тело движется с постоянным ускорением

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = a_0 = const\,. \tag{1.8}$$

Скорость и путь, пройденный телом, меняются во времени следующим образом

$$\upsilon_x = a_0 t + \upsilon_0\,, \qquad x = \frac{a_0}{2}t^2 + \upsilon_0 t + x_0\,.$$

На рис.1.5 для равноускоренного движения при начальных условиях $\upsilon_0 = 0$, $x_0 = 0$ приведены графики зависимости от времени пути, скорости и ускорения.

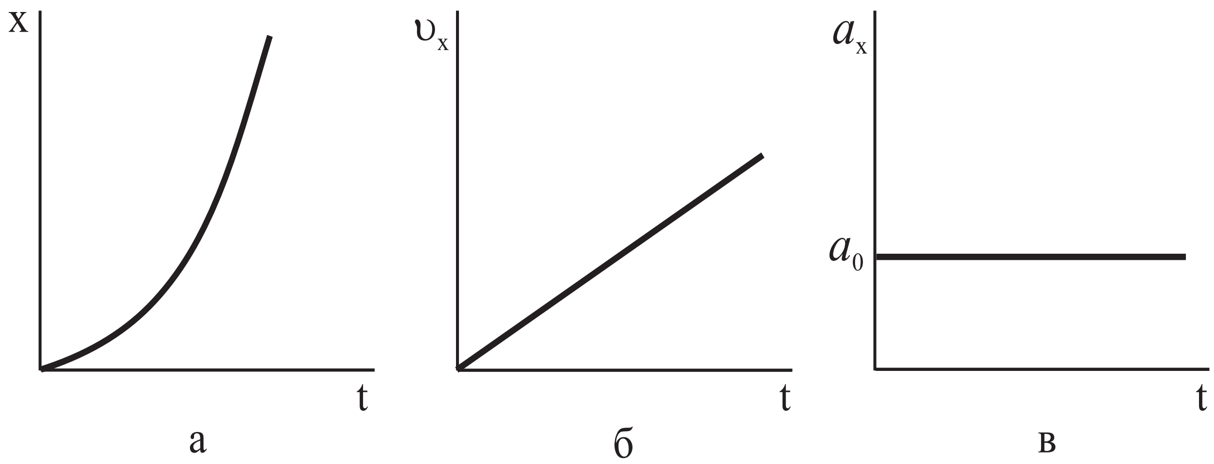

Рис. 1.5

Пример равноускоренного движения – свободное падение тел. Экспериментально установлено, что вблизи поверхности Земли любое свободное тело падает по направлению к центру Земли с ускорением $g = 9.8 м/с^2$. Это ускорение, получившее название ускорение свободного падения, не зависит ни от массы тела, ни от состава, ни от начальной скорости тела.

Пусть в результате наблюдений нам удалась найти зависимость скорости от времени. Изобразим эту зависимость графически (рис.1.6). Промежуток времени $[t_1, t_n]$ разобьем на конечное число маленьких промежутков времени Δt_j. Малость промежутка времени определяется условием, что внутри него движение тела можно считать равномерным со скоростью υ_j. Тогда графически путь, пройденный материальной точкой за время Δt_j, есть площадь прямоугольника с основанием Δt_j и высотой υ_j

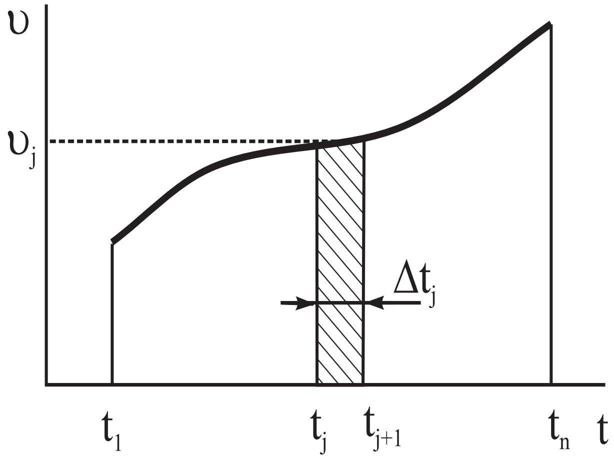

Рис. 1.6.

$$\Delta x_j = \upsilon_j \Delta t_j .$$

Путь, пройденный материальной точкой за время $t_n - t_1$, равен площади фигуры, ограниченной осью $\upsilon_x = 0$, кривой $\upsilon_x = \upsilon(t)$ и двумя прямыми $t = t_1$ и $t = t_n$:

$$x(t_n) - x(t_1) = \sum_{j=1}^{n} \upsilon_j \Delta t_j \Rightarrow \int_{t_1}^{t_n} \upsilon(t) dt .$$

Введем понятие средней скорости. **Средняя скорость** – это физическая величина, равная отношению пути, пройденного телом за время от t_1 до t_n, к этому времени

$$\bar{\upsilon} = \langle \upsilon \rangle = \frac{\text{путь}}{\text{время}} = \frac{x_2 - x_1}{t_n - t_1}.$$

Здесь $x_2 = x(t_n)$, $x_1 = x(t_1)$. Средняя скорость на промежутке времени $[t_1, t_n]$ связана с зависимостью мгновенной скорости от времени соотношением

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{t_n - t_1} \int_{t_1}^{t_n} \upsilon(t) dt. \tag{1.9}$$

Пример. Автомобиль проезжает 10 км со скоростью 20 км/ч и еще 10 км со скоростью 60 км/ч. Чему равна средняя скорость?

$$\bar{\upsilon} = \frac{20км}{\dfrac{10км}{20км/ч} + \dfrac{10км}{60км/ч}} = \frac{20км}{\dfrac{2}{3}ч} = 30км/ч.$$

Не случайно более подробно остановились на прямолинейном движении. Любое криволинейное движение можно рассматривать как сумму трех независимых прямолинейных движений

1.3. Движение по окружности

Рассматривая движение материальной точки, мы ввели ряд кинематических характеристик: $\vec{r}$ (траектория), скорость, ускорение.

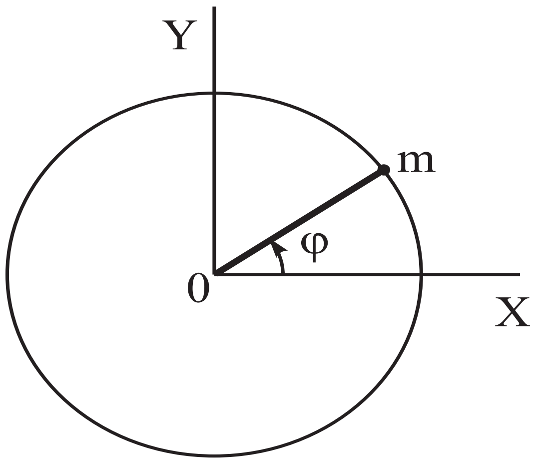

Рис. 1.7.

Для описания вращательного движения введем новые кинематические величины.

Рассмотрим плоское движение материальной точки по окружности (рис. 1.7). Начало системы координат совместим с центром окружности. Положение точки на окружности будем характеризовать углом поворота φ, отсчитываемым от прямой OX до прямой, проходящей через материальную точку и начало координат.

Изменение угла поворота со временем

$$\varphi = \varphi(t)$$

зависит от характера вращательного движения тела и носит название *уравнения вращательного движения*.

Введем понятие угловой скорости. ***Угловая скорость*** *– это физическая величина, характеризующая быстроту изменения во времени угла поворота*

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.10}$$

Аналогично введем понятие ***углового ускорения***, *которое характеризует быстроту изменения во времени угловой скорости*

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.11)$$

Найдем связь между скоростью, ускорением и угловой скоростью, угловым ускорением. По величине мгновенная скорость есть

$$|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}. \qquad (1.12)$$

Из рис.1.8 следует, что

$$|\Delta\vec{r}| = r \cdot \Delta\varphi. \qquad (1.13)$$

Подставив (1.13) в (1.12), получим

$$|\vec{\upsilon}| = r\omega. \qquad (1.14)$$

Из определения углового ускорения и (1.14) следует

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}|\vec{\upsilon}|\right) = \frac{1}{r}\frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} = \frac{1}{r}|\vec{a}_\tau|. \qquad (1.15)$$

С учетом (1.14) и (1.15) нормальная и тангенциальная составляющие ускорения связаны с угловой скоростью и угловым ускорением соотношением

$$|\vec{a}_\tau| = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt} = r\varepsilon, \qquad (1.16)$$

$$|\vec{a}_n| = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r. \qquad (1.17)$$

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

В дальнейшем, чтобы не путаться, будем называть $\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$ линейной скоростью и ускорением, соответственно.

До сих пор, говоря об угловой скорости и ускорении, считали эти величины скалярными. Однако в механике они вводятся как векторные физические величины. Данные выше определения угловой скорости и ускорения касаются определения величины (длины) этих векторов. Теперь определим их направление. Прежде всего считаем, что вектор $\vec{\omega}$ параллелен оси вращения.

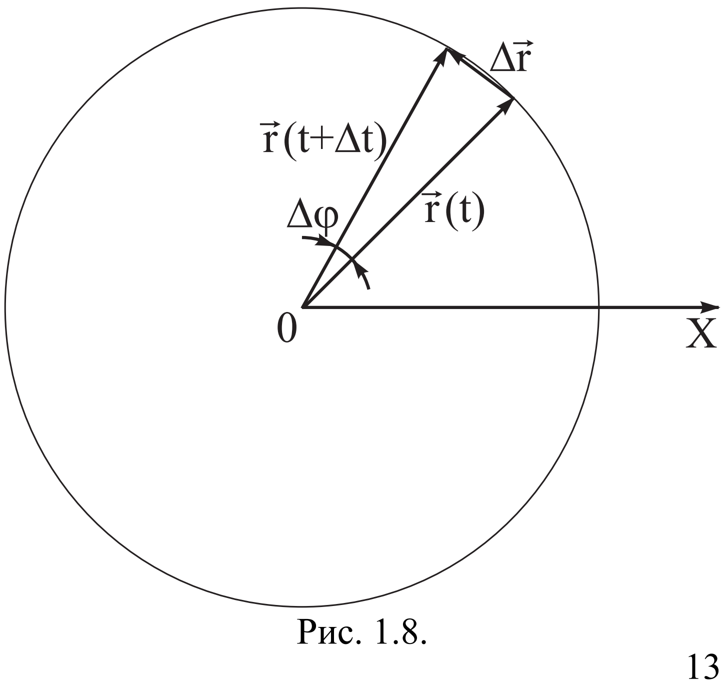

Рис. 1.8.

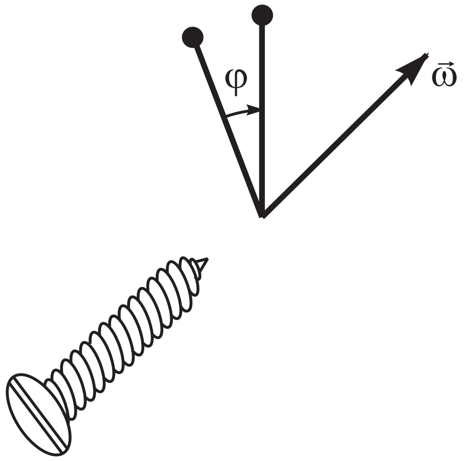

Рис. 1.9.

Направление вектора угловой скорости будем определять согласно правилу правого винта. Согласно этому правилу направление отрезка должно быть таким, чтобы, глядя вдоль него, мы видели поворот совершающимся по часовой стрелке (вращая головку правого винта по часовой стрелке, вызовем его перемещение от себя (рис.1.9)).

Направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора $\vec{\omega}$, если угловая скорость увеличивается. При уменьшении угловой скорости направление вектора $\vec{\varepsilon}$ противоположно направлению вектора $\vec{\omega}$. В векторном виде связь между угловой скоростью и угловым ускорением запишется в виде

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Покажем, что между линейной и угловой скоростями существует простая связь вида

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right]. \qquad (1.18)$$

Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный к вращающейся точки из начала системы координат, расположенной на оси вращения.

Замечание. Векторное произведение векторов $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ – это вектор, равный по величине произведению длин отдельных векторов на синус угла между ними

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$$

и направленный перпендикулярно плоскости, в которой расположены вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Однако такая плоскость имеет два направления. Чтобы выбрать направление вектора используют *правило правой руки* (рис.1.10). Пальцы правой руки направим вдоль первого вектора, так, чтобы они сгибались в направлении от первого вектора ко второму по наименьшему углу. При этом большой палец указывает направление векторного произведения.

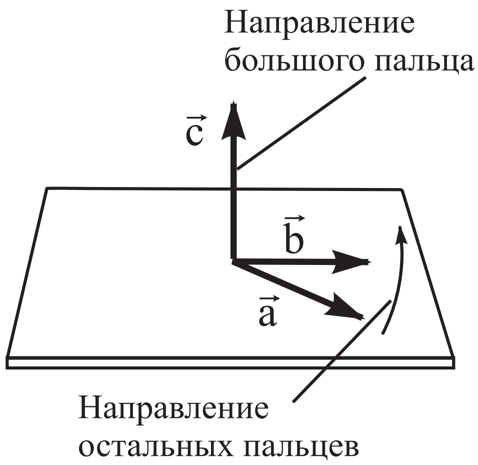

Рис. 1.10.

Распишем радиус-вектор в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_z + \vec{R}, \qquad (1.19)$$

где $\vec{r}_z$ и $\vec{R}$ проекции радиус-вектора на ось вращения и на плоскость вращения (рис.1.11).

Подставив (1.19) в (1.18) получим

$$\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]=\left[\vec{\omega}\vec{r}_z\right]+\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]=\left[\vec{\omega}\vec{R}\right]. \qquad (1.20)$$

Угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$ равен 90^0, поэтому

$$\left|\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right|=\omega R=\left|\vec{\upsilon}\right|.$$

Таким образом, показали, что по величине векторное произведение $\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$ равно длине вектора скорости $\left|\vec{\upsilon}\right|$. Можно показать, что и направление $\vec{\upsilon}$ совпадает с направлением $\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]$.

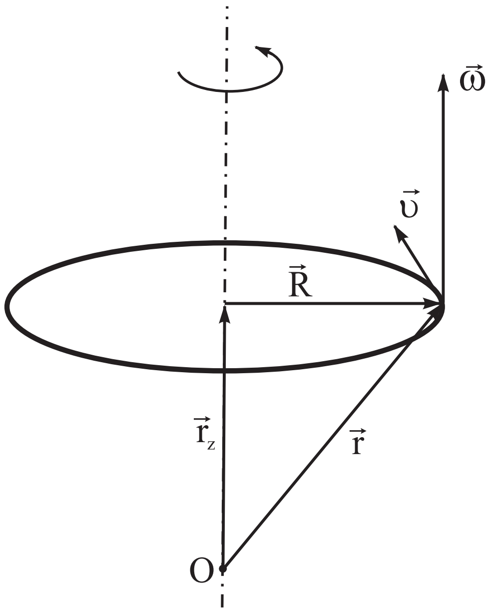

Рис. 1.11.

Тема 2
Основы динамики материальной точки. Сила, масса, импульс. Законы Ньютона. Движение тела под действием силы тяжести. Вес тела

2.1. Сила, масса, импульс

К числу основных понятий динамики материальной точки относятся: сила, масса, импульс. Остановимся на них подробнее.

Сила – это важнейшее, первичное понятие в механике Ньютона. Механика Ньютона – это силовая механика. Позже была построена бессиловая механика, в которой в качестве исходного понятия выступала потенциальная энергия.

Сила – это физическое понятие, характеризующее взаимодействие тел. Не всякое взаимодействие может быть сведено к силе.

Сила – это физическая величина, характеризующая взаимодействие, которое приводит к деформации или ускорению тела.

Все известные нам к настоящему времени силы можно разделить на четыре типа: 1) гравитационные, 2) электромагнитные, 3) ядерные, 4) слабые.

1). Гравитационные силы действуют между телами, обладающими массой. Они были открыты Ньютоном при изучении движения небесных тел. Между любыми двумя материальными точками действует гравитационная сила равная по величине

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.1}$$

где $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \left(\text{н} \cdot \text{м}^2\right)\big/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы материальных точек, r – расстояние между ними. При записи выражения для гравитационной силы пользовались понятием массы, хотя пока еще не дали определение, что это такое. Можно показать, что аналогичное выражение для силы наблюдается при взаимодействии материальной точки с однородным шаром или при взаимодействии двух однородных шаров. В этом случае под расстоянием надо понимать расстояние между центрами тел.

2). Электромагнитные силы – это силы, действующие на заряды и токи, и их источниками являются заряды и токи. Например, между двумя точечными электрическими зарядами q_1 и q_2, расположенными на расстоянии r друг от друга, действует сила Кулона, равная по величине

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{2.2}$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц измерения. Это частный простейший вид электромагнитных сил.

Взаимодействия между атомами, молекулярные силы и силы, удерживающие электроны около атомного ядра, – все это силы электромагнитного происхождения.

Поскольку межмолекулярные силы являются силами электрического происхождения, то такое же происхождение имеют поверхностные силы, а также любые силы сцепления между телами. К электромагнитным силам сводятся и силы трения.

Силы упругости, проявляющиеся, например, при сжатии металлической пружины, являются результатом проявления межатомных и межмолекулярных взаимодействий. Поэтому и они также имеют электромагнитную природу.

3). Ядерные силы – силы, действующие между частицами, входящими в состав ядра. Между протонами, протоном и нейтроном, нейтронами. Они имеют малый радиус действия (не проявляются на расстояниях свыше 10^{-14} м). Именно ядерные силы скрепляют ядро, несмотря на сильное электростатическое отталкивание между протонами.

4). Слабые силы (или силы «слабого» взаимодействия). Они обнаруживаются в процессах превращения элементарных частиц с участием нейтрино. Как и ядерные, слабые силы являются короткодействующими, т.е. не проявляются на расстояниях свыше 10^{-14} м.

Следующей важнейшей динамической характеристикой является масса. Если понятие силы было введено еще задолго до Ньютона (им широко пользовались еще во времена Архимеда, были разработаны методы измерения силы, единицы измерения силы. Все считали эту характеристику важнейшей в механике), то масса была впервые введена Ньютоном в ранг основных динамических величин.

Что такое масса? Первое начальное определение массы, данное Ньютоном, гласило: масса – это мера количества вещества. Это определение подчеркивало, что масса не связана с качественной стороной вещества (его составом), а больше связана с количественной стороной. Позже от такого понимания массы пришлось отказаться. Масса – сложное понятие, которое трудно свести к более простому, в частности, к мере количества вещества.

К настоящему времени выработалось следующее определение массы.

Масса – это физическая величина, характеризующая меру инертности тела, меру гравитационного взаимодействия и связанная с энергией тела и количеством вещества.

Поясним данное определение.

1. Из второго закона Ньютона, о котором будем говорить ниже, следует, что масса является коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением

$$m = \frac{F}{a},$$

и с этой точки зрения она выступает как мера инертности тела, т.е. его способности двигаться с ускорением.

2. Масса входит в закон всемирного тяготения (закон, действующий между любыми материальными телами), и с этой точки зрения масса выступает как мера гравитационного взаимодействия.
3. Между массой и энергией существует неразрывная связь

$$E = mc^2,$$

где c – скорость света. Так, масса связана с энергией тела.

Обсудим следующий вопрос. Будет ли гравитационная масса тела (т.е. масса, характеризующая меру гравитационного взаимодействия) совпадать, например, с инертной массой? Специальные опыты показали равенство инертной и гравитационной масс (с точностью 10^{-12}). На принципе равенства инертной и гравитационной масс построена вся современная физика.

Третьей важнейшей динамической величиной является импульс тела. Ньютон, как и массу, вводит это понятие в ранг основных величин. Что такое импульс тела или количество движения?

Импульс тела – это физическая величина, равная произведению массы на вектор скорости

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Обратимся к истории. Во времена Ньютона масса считалась величиной постоянной. Если это так, то введенное понятие импульса не дает ничего нового. Тем не менее, Ньютон вводит $\vec{p}$ в ранг основных динамических характеристик. После создания специальной теории относительности выяснилось, что масса зависит от скорости тела:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Здесь m_0 – масса покоящегося тела (масса покоя). Таким образом, импульс тела нельзя представить как простое произведение вектора скорости на некий постоянный множитель

$$\vec{p} = m(\upsilon)\vec{\upsilon}.$$

Теперь после введения основных кинематических и динамических характеристик можно приступить к установлению законов, которым подчиняется движущееся тело.

2.2. Законы Ньютона

До Ньютона было известно большое число экспериментально открытых законов, например, закон Архимеда, закон Гука и т.д. Заслуга Ньютона заключается в том, что он установил три фундаментальных закона механики и доказал, что с их помощью можно решить любую задачу по механике, вывести все остальные известные законы.

Сначала дадим краткую формулировку трех законов Ньютона, а затем обсудим смысл и значение этих законов.

Первый закон Ньютона. *Если результирующая суммы сил, действующих на тело, равна нулю, то оно пребывает в состоянии покоя или прямолинейного и равномерного движения.* Т.е. если $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, то $\vec{a} = 0$.

Второй закон Ньютона. *Скорость изменения импульса тела во времени равна результирующей силе, действующей на тело:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{2.3}$$

Третий закон Ньютона. *При взаимодействии двух тел сила, действующая на первое тело со стороны второго, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей на второе тело со стороны первого:*

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B. \tag{2.4}$$

1. Вернемся к первому закону Ньютона. Впервые он был установлен Галилеем. В отличие от Галилея Ньютон сумел понять, что в механике этот закон носит фундаментальный характер. Поэтому этот закон и получил название первого закона Ньютона.

Закон справедлив только для материальной точки, ибо только она не может вращаться. Первый закон утверждает, что если $\vec{F} = 0$, то $\vec{a} = 0$. Это утверждение можно рассматривать как частный случай второго закона. Почему же, тем не менее, Ньютон выделил этот закон в качестве особого закона? По двум причинам. Во-первых, в науке до Ньютона господствовала точка зрения, восходящая к учению Аристотеля. Основное положение системы Аристотеля состоит в утверждении, что в отсутствии внешних сил все тела должны приходить в состояния покоя. Т.е. по Аристотелю, чтобы тело двигалось равномерно, мы обязательно должны приложить какую-либо силу. Таким образом, смысл I закона Ньютона – надо навсегда покончить с механикой Аристотеля, она неверна. Во-вторых, из первого закона следует важный физический принцип: существование так называемых инерциальных систем отсчета. Смысл первого закона состоит в том, что если на тело не действуют внешние силы, то существует система отсчета, в которой оно покоится. Но если в одной системе тело покоится, то существует множество других систем отсчета, в которых тело движется с постоянной скоростью.

Системы отсчета, в которых при условии равенства нулю результирующей суммы сил, действующих на тело, оно пребывает в состоянии покоя или прямолинейного и равномерного движения, называются инерциальными. Существование инерциальных систем является нетривиальным следствием закона. Именно потому Ньютон выделил его в качестве особого закона.

2. Второй закон Ньютона устанавливает связь между результирующей силой, действующей на тело, и скоростью изменения его импульса. Очевидно, второй закон Ньютона справедлив при условии, что наблюдатель находится в инерциальной системе отсчета. Именно относительно этой системы отсчета и рассматривается движение тела. Если теперь уберем воздействие, то тело будет двигаться равномерно или покоиться.

Заметим. Ньютон считал массу тела величиной постоянной, поэтому, казалось бы, можно записать второй закон в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}, \tag{2.5}$$

а не в виде (2.3). Тем не менее, запись второго закона Ньютона в виде (2.3) имеет большую общность. Закон Ньютона в виде $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ справедлив не только в случае постоянной, но и для переменной массы, которая зависит от скорости.

Из всех трех законов Ньютона второй является самым важным, его часто называют основным законом механики, а уравнение (2.5) – основным уравнением движения. Закон обобщающий и подтвержденный тысячами опытов. Закон устанавливает связь между причиной изменения движения – силой и следствием – ускорением (при условии постоянства массы). Зная выражение для силы $\vec{F}$, можем говорить о том, как происходит движение,

$$\vec{F} \to \vec{a} \to \vec{\upsilon} \to \vec{r} \text{ (траектория).}$$

Можно поставить и обратную задачу. Зная, как движется тело, (т.е. $\vec{r}(t) \to \vec{\upsilon}(t) \to \vec{a}(t)$), найти $\vec{F}$ – результирующую силу, которая действует на тело, а значит судить о воздействии других тел на исследуемое тело.

Решать прямые задачи, как правило, более трудно, однако, они более важные. Трудность заключается в определении результирующей силы, ее вида.

3. Третий закон Ньютона. Пусть имеется система, состоящая только из двух тел A и B. В такой системе могут действовать лишь две силы: $\vec{F}_A$ – сила, действующая на тело A со стороны тела B, и сила $\vec{F}_B$ – сила, действующая на тело B со стороны тела A. По своей природе эти силы могут быть, например, гравитационными, электромагнитными и т.д. Если силу

$\vec{F}_A$ назвать действующей силой, то сила $\vec{F}_B$ носит название противодействующей. И наоборот.

Третий закон Ньютона утверждает, что при взаимодействии двух тел сила действия равна по величине и направлена в противоположную сторону силе противодействия. Силы действия и противодействия направлены по одной прямой и имеют одну природу.

Заметим, что силы, входящие в третий закон Ньютона, приложены к **разным** телам. Например, на закрепленной нити висит шарик. Шарик действует на нить с силой $\vec{F}_1$, но и нить действует на шарик с силой $\vec{F}_2$. Из третьего закона Ньютона $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Третий закон был сформулирован Ньютоном для того, чтобы показать, что сила – это результат взаимодействия хотя бы двух тел.

После того, как установлены (постулированы) основные законы, которым подчиняется движение материальной точки, можно приступить к решению конкретных задач механики, т.е. изучать движение тел под действием тех или иных сил. Для этого надо, используя второй закон Ньютона и конкретное выражение результирующей силы, искать кинематические характеристики движения.

Знакомясь с понятием силы, отмечали, что по типу взаимодействия все силы делятся на четыре типа. На практике нас интересует конкретное выражение силы. Опыт говорит, что, в основном, существующие в природе взаимодействия могут быть охарактеризованы силами, которые зависят от положения материальной точки $\vec{r}$ (на которую эти силы действуют), от быстроты изменения этого положения $\vec{\upsilon}$, времени t, т.е.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t).$$

Для механики не важна природа сил, главное – их вид.

С точки зрения формальной зависимости силы от $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$, t можно выделить несколько основных групп сил.

1. Постоянная сила: $\vec{F} = const$.

Примеры: а) сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, б) сила, действующая на заряженную частицу (q) в плоском конденсаторе $\vec{F} = q\vec{E}$ ($\vec{E}$ – напряженность электрического поля), сила трения покоя $\left|\vec{F}_{\text{тр}}\right| = \mu N$ (N – величина силы реакции опоры).

2. Сила, возрастающая с увеличением расстояния между взаимодействующими телами:

$$\vec{F} = \alpha_1 \vec{r},$$

$$\vec{F} = \alpha_2 r\vec{r},$$

$$\vec{F} = \alpha_3 r^2 \vec{r},$$

Примеры. Сила, пропорциональная расстоянию, – это упругая сила. Эта сила направлена в сторону, противоположную смещению тела из положения равновесия

$$\vec{F} = -k\vec{r}\ .$$

Здесь k – коэффициент упругости.

Такой же вид имеет сила, действующая на заряд q, помещенный внутрь однородно заряженного шара радиусом r_0, зарядом q_1 при смещение заряда на расстояние $\vec{r}$ от центра шара

$$\vec{F} = -\frac{q \cdot q_1}{r_0^3}\vec{r}\ .$$

При больших деформациях тела сила упругости начинает зависеть от членов $\alpha_2 \cdot r \cdot \vec{r}$ и т.д.

3. Сила, уменьшающаяся с увеличением расстояния между взаимодействующими телами:

$\vec{F} = \dfrac{A_1}{r^3}\vec{r}$ – такой вид имеет кулоновская и гравитационная силы,

$\vec{F} = \dfrac{A_2}{r^8}\vec{r}$ – силы, действующие между атомами в газах. Они позволяют вывести уравнение Ван-дер-Ваальса.

4. Существуют силы, зависящие от скорости движения $\vec{\upsilon}$.

Наиболее важные случаи:

$\vec{F} = \beta_1\vec{\upsilon}$ – такой вид имеют силы трения при небольших скоростях,

$\vec{F} = \beta_2\upsilon\vec{\upsilon}$ – такой вид имеет сила трения при больших скоростях движения.

5. Силы, зависящие от времени.

Примерами таких сил являются, например, силы взрыва.

Чаще всего на тело действует не одна, а несколько сил, поэтому результирующая сила очень сложно зависит от $\vec{r},\ \vec{\upsilon},\ t$.

Например, колебание шарика, расположенного на пружине, под действием внешней периодической силы. Шарик помещен в вязкую жидкость. Тогда выражение для результирующей силы есть

$$\vec{F} = m\vec{g} - m'\vec{g} - k\vec{x} - k_1\vec{\upsilon} + \vec{F}_0\cos\omega t\,. \qquad (2.6)$$

Здесь первое слагаемое – сила тяжести, второе – сила Архимеда (m' – масса жидкости, вытесненной шариком), третье – упругая сила, четвертое – сила трения, пятое – внешняя периодическая сила.

2.3. Движение тела под действием силы тяжести. Вес тела

На любое тело вблизи поверхности Земли действует постоянная сила прямо пропорциональная массе тела, получившая название силы тяжести. Выражение для силы тяжести непосредственно вытекает из закона всемирного тяготения. Представим Землю в виде однородного шара радиусом

$R_з$ и массой $M_з$ (рис.2.1). Любое тело, расположенное на поверхности Земли, можно считать точечным телом. Из закона всемирного тяготения следует, что сила, действующая на тело массой m вблизи поверхности Земли, равна по величине

$$F = \gamma \frac{M_з m}{R_з^2}. \qquad (2.7)$$

и направлена по прямой, соединяющей тело с центром Земли.

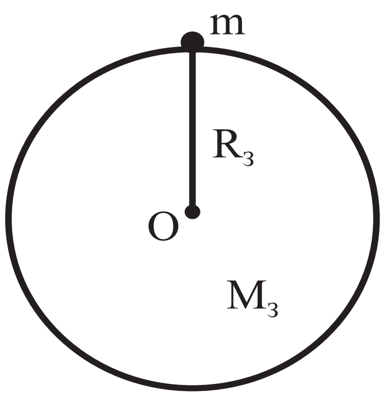

Рис. 2.1.

Введем ускорение свободного падения как комбинацию величин

$$g = \gamma \frac{M_з}{R_з^2}. \qquad (2.8)$$

Учитывая, что $M_з = 5.98 \cdot 10^{24}$кг и $R_з = 6.38 \cdot 10^{6}$м получаем для ускорения свободного падения хорошо известное из школы значение $g = 9.8$ м$/$с^2 .

Выражение для силы, действующей на тело вблизи поверхности Земли, можно записать следующим образом

$$\vec{F} = m\vec{g}. \qquad (2.9)$$

Второй закон Ньютона запишется в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{g}. \qquad (2.10)$$

Решение задачи о движении тела под действием силы тяжести начинаем с выбора системы координат. Поместим тело массой m в начало системы координат. Оси системы координат разместим так, чтобы направление действия силы тяжести было коллинеарно с осью Y (рис. 2.2). Пусть в начальный момент времени $(t = 0)$ вектор скорости лежит в плоскости YOX. Тогда начальные условия имеют вид

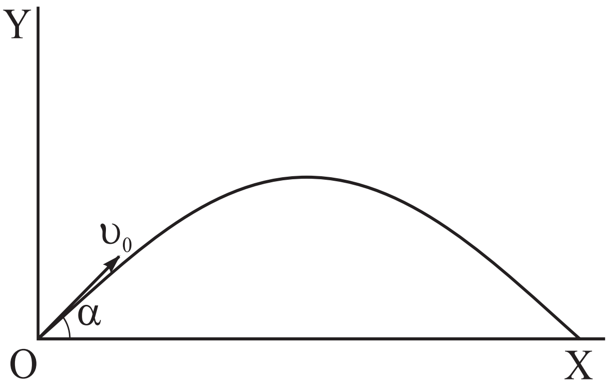

Рис. 2.2.

$$\begin{cases} x(t=0) = 0, \\ y(t=0) = 0, \\ z(t=0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \upsilon_x(t=0) = \upsilon_0 \cos\alpha, \\ \upsilon_y(t=0) = \upsilon_0 \sin\alpha, \\ \upsilon_z(t=0) = 0. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Здесь υ_0 – величина начальной скорость тела, α – угол между вектором начальной скорости и осью X. Векторное уравнение (2.10), учитывая что $F_y = -mg$, $F_x = F_z = 0$, разложим на три скалярных уравнения.

$$
\begin{cases}
m\dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 0, \\
m\dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -mg, \\
m\dfrac{d\upsilon_z}{dt} = 0.
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

Решая уравнения, получим

$$
\frac{d\upsilon_x}{dt} = 0 \Rightarrow \upsilon_x = c_1, \quad \frac{dx}{dt} = c_1 \quad \Rightarrow \quad x = c_1 t + c_1',
$$

$$
\frac{d\upsilon_z}{dt} = 0 \Rightarrow \upsilon_z = c_2, \quad \frac{dz}{dt} = c_2 \Rightarrow \quad z = c_2 t + c_2'.
$$

Из условия равенства ускорения a_x и a_z нулю следует, что вдоль осей X и Z тело или движется равномерно, или покоится.

По оси Y тело движется с постоянным ускорением

$$
\frac{d\upsilon_y}{dt} = -g \Rightarrow \upsilon_y = -gt + c_3, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_3'.
$$

Используя начальные условия, найдем постоянные c_j и c_j'.

Вдоль оси X

$$
\left.
\begin{aligned}
\upsilon_x(t=0) = \upsilon_0 \cos\alpha = c_1 \\
x(t=0) = 0 = c_1'
\end{aligned}
\right\}
\quad x = t \cdot \upsilon_0 \cos\alpha, \quad \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha.
$$

Вдоль оси Z

$$
\left.
\begin{aligned}
\upsilon_z(t=0) = 0 = c_2 \\
z(t=0) = 0 = c_2
\end{aligned}
\right\}
\quad z = 0.
$$

По оси Z тело не движется, т.е. имеем случай плоского движения.

Вдоль оси Y

$$
\left.
\begin{aligned}
\upsilon_y(t=0) = \upsilon_0 \sin\alpha = c_3 \\
y(t=0) = 0 = c_3'
\end{aligned}
\right\}
\quad y = -g\frac{t^2}{2} + \upsilon_0 \sin\alpha\, t.
$$

Получили три кинематических уравнения движения. Найдем траекторию движения. Для этого выразим время через координату x

$$
t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha}
$$

и подставим в кинематическое уравнение для координаты y

$$
y = -g\frac{x^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} + \upsilon_0 \sin\alpha \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + tg\alpha \cdot x.
$$

Таким образом, нашли, что под действием силы тяжести тело будет двигаться в плоскости YOX по параболе. Координаты вершины параболы запишутся в виде

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\upsilon_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha, \\ y_0 = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}\sin^2\alpha\,. \end{cases}$$

Знание координаты вершины параболы позволяет определить максимальную высоту ($y_{\max} = y_0$) и дальность полета ($x_{\max} = 2x_0$)

С понятием силы тяжести непосредственно связано еще одно понятие – вес тела.

Вес тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес.

Из третьего закона Ньютона следует, что сила, с которой тело действует на опору, равна по величине силе, с которой опора действует на тело. Таким образом, нахождение веса тела сводится к определению силы реакции опоры.

Пример. Как меняется вес тела, расположенного на наклонной плоскости, при увеличении угла наклона?

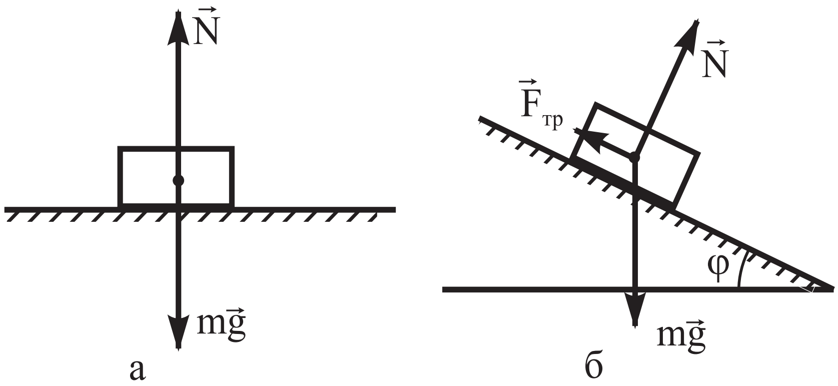

Рис. 2.3.

На неподвижное тело, расположенное на горизонтальной плоскости, действуют две силы: сила тяжести и сила реакции опоры ($\vec{N}$) (рис.2.3.а). Причем сумма этих сил равна нулю

$$m\vec{g} + \vec{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = -m\vec{g}\,.$$

Вес тела равен

$$\vec{P} = -\vec{N} = m\vec{g}\,.$$

На неподвижное тело, расположенное на наклонной плоскости, действуют три силы: сила тяжести, сила трения ($\vec{F}_{тр}$) и сила реакции опоры (рис. 2.3.б)

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0\,.$$

Найдем проекцию записанного уравнения на направление перпендикулярное наклонной плоскости

$$N - mg\cos\varphi = 0\,.$$

Здесь φ – угол наклона поверхности.

Вес тела в зависимости от угла наклона плоскости меняется по закону

$$\left|\vec{P}\right| = mg\cos\varphi\,.$$

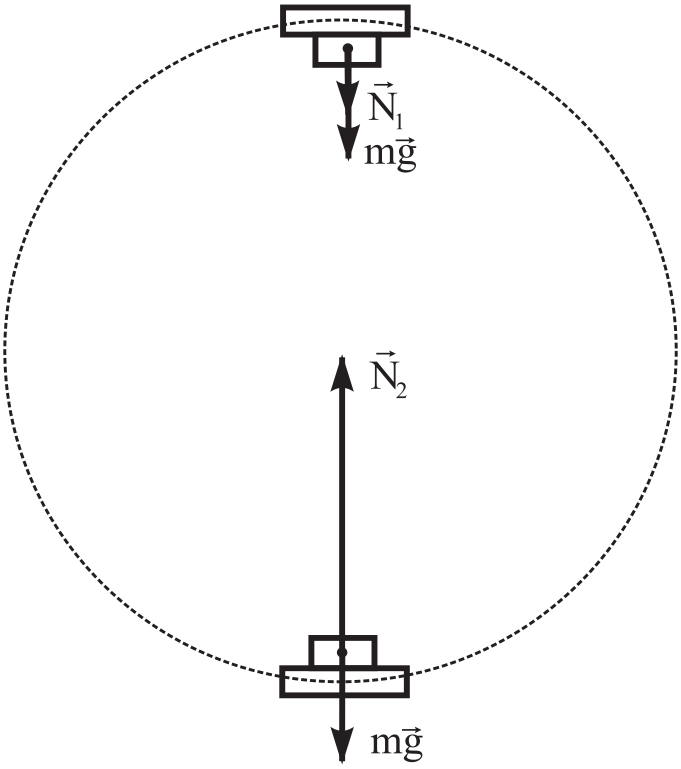

Рис. 2.4.

Пример. Летчик массой 70 кг находится в самолете, который описывает «мертвую петлю» радиусом 400 м (рис.2.4). Скорость самолета – 80 м/с. Чему равен вес летчика в верхней и нижней точках петли?

И в верхней и в нижней точках «мертвой петли» на летчика действуют две силы: сила тяжести и сила реакции опоры.

В верхней точке «мертвой петли» направление силы реакции опоры ($\vec{N}_1$) совпадает с направлением силы тяжести и с направлением центростремительного ускорения. Для этой точки из второго закона Ньютона имеем

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = mg + N_1.$$

Вес тела в верхней точке «мертвой петли» равен

$$\left|\vec{P}_1\right| = N_1 = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\right).$$

В нижней точке «мертвой петли» направление силы реакции опоры ($\vec{N}_2$) противоположно направлению силы тяжести и совпадает с направлением центростремительного ускорения. Для этой точки из второго закона Ньютона имеем

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = -mg + N_2.$$

Вес тела в нижней точке «мертвой петли» равен

$$\left|\vec{P}_2\right| = N_2 = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} + g\right).$$

Подставив значения для массы и скорости, имеем

$$\left|\vec{P}_{1,2}\right| = 70\left(\frac{64\cdot 10^2}{400} \pm 9.8\right)\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} = 1020\ \text{Н} \pm 686\ \text{Н}.$$

Тема 3
Закон сохранения импульса. Центр масс. Реактивное движение

3.1. Закон сохранения импульса

Из первого закона Ньютона следует, что в случае $\sum_{j=1}^{m}\vec{F}_j = 0$ тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, т.е. $\vec{\upsilon} = const$ или равна нулю. Если масса материальной точки постоянна, то при условии равенства нулю результирующей силы материальная точка движется так, что ее импульс остается постоянным.

Рассмотрим теперь систему материальных точек. Все они движутся по своим траекториям. **Будем называть систему замкнутой, если на нее не действуют внешние силы.** Введем понятие полного импульса системы $\vec{P}$, как сумму импульсов отдельных материальных точек

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{n}\vec{p}_j\,, \tag{3.1}$$

где n – число материальных точек.

Из второго и третьего законов Ньютона следует, что **для замкнутой системы полный импульс остается постоянным во времени.** Докажем это положение для замкнутой системы, состоящей из трех материальных точек (рис.3.1).

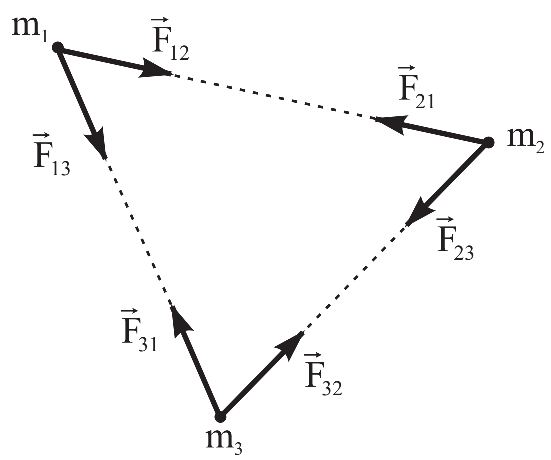

Рис. 3.1.

Запишем уравнения движения по отдельности для каждой из точек:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}, \\ \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}, \\ \dfrac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Сложим уравнения

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{d\vec{p}_j}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{3}\vec{p}_j = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}\,. \tag{3.3}$$

Из третьего закона Ньютона следует

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},\ \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31},\ \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}\,.$$

Тогда выражение (3.3) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3}\vec{p}_j\right)=\frac{d\vec{P}}{dt}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{P}(t)=const\,. \qquad (3.4)$$

Аналогично можно показать справедливость закона сохранения полного импульса для замкнутой системы, состоящей из n материальных точек.

Для незамкнутой системы скорость изменения ее полного импульса равна результирующей внешних сил, действующих на систему.

Докажем это, вновь исходя из второго и третьего законов Ньютона для незамкнутой системы, состоящей из двух материальных точек (рис.3.2). Вновь запишем уравнения движения по отдельности для каждой из точек

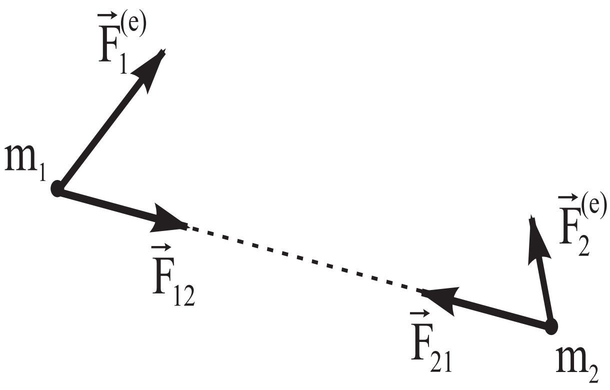

Рис. 3.2.

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_1^{(e)},\\[2mm] \dfrac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{21}+\vec{F}_2^{(e)}.\end{cases} \qquad (3.5)$$

Складывая уравнения, получим

$$\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{dt}=\vec{F}_{12}+\vec{F}_1^{(e)}+\vec{F}_{21}+\vec{F}_2^{(e)}.$$

Или

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}\,, \qquad (3.6)$$

где $\vec{F}=\sum_{i=1}^{2}\vec{F}_i^{(e)}$ - сумма внешних сил.

Аналогично можно показать справедливость приведенного выше утверждения для незамкнутой системы, состоящей из n материальных точек.

Из (3.6) следует, что, если результирующая сила внешних сил равна нулю ($\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}=0$), то закон сохранения полного импульса выполняется и для незамкнутой системы материальных точек.

Рассмотрим случай, когда сумма внешних сил не равна нулю, но существует направление (например, направление вдоль оси X) для которого $(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)})_x=0$. Тогда из (3.6) следует

$$\frac{dP_x}{dt}=0 \qquad \Rightarrow \qquad P_x(t)=const\,.$$

Таким образом, хотя полный импульс системы не сохраняется, сохраняется проекция импульса на направление X.

Использование второго закона Ньютона позволяет, зная выражение для силы $\vec{F}$, найти кинематические характеристики движения. Однако определить $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t)$ часто бывает очень трудно.

Закон сохранения импульса позволяет решать некоторые задачи без привлечения выражения для сил, действующих на тела.

В качестве примера использования закона сохранения импульса рассмотрим упругий удар двух шаров.

На неподвижный шар массы m_2 налетает шар массы m_1, движущийся со скоростью υ_0 (рис.3.3). После удара шар массы m_1 начинает двигаться со скоростью $\vec{\upsilon}_1$ в противоположном направлении. Определить скорость, с которой после удара будет двигаться шар массы m_2.

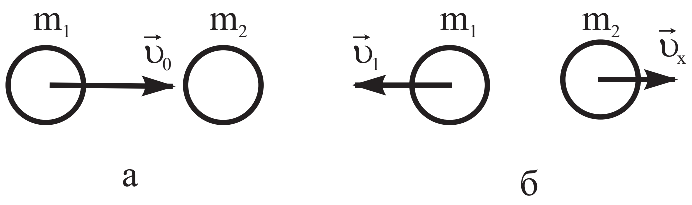

Рис. 3.3.

До удара (момент времени t_1) полный импульс системы есть

$$\vec{P}(t_1) = m_1\vec{\upsilon}_0 + 0.$$

После удара (момент времени t_2) полный импульс системы есть

$$\vec{P}(t_2) = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_x.$$

Используя закон сохранения импульса, запишем

$$m_1\vec{\upsilon}_0 + 0 = m_2\vec{\upsilon}_1 + m_1\vec{\upsilon}_x.$$

Из этого выражения найдем скорость, с которой шар массы m_2 будет двигаться после удара

$$\vec{\upsilon}_x = \frac{m_1(\vec{\upsilon}_0 - \vec{\upsilon}_1)}{m_2}.$$

Действие закона сохранения полного импульса или проекции импульса на выделенное направление мы постоянно наблюдаем в повседневной жизни. Если лодка пристает носом к берегу, а пассажир находится на корме, то когда пассажир начнет идти по лодке со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, лодка со скорость $\vec{\upsilon}_2$ будет отплывать от берега.

В современной физике закон сохранения полного импульса считается более универсальным, чем третий закон Ньютона. Покажем, как из закона сохранения полного импульса получается третий закон Ньютона. Рассмотрим замкнутую систему из двух материальных точек. Для такой системы имеем

$$\vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) = const.$$

Продифференцировав по времени правую и левую части записанного выше уравнения, получим

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}=0\,.$$

Учитывая, что изменение импульса равно силе, имеем

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_{12} \qquad \frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{21} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}\,.$$

3.2. Центр масс

Для системы материальных точек вводится понятие центра масс.

Пусть положение материальной точки m_j описывает радиус-вектор $\vec{r}_j$. Тогда радиус-вектор, определяющий положение центра масс системы из n материальных точек, определяется следующим выражением

$$\vec{r}_{ц.м.}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j\vec{r}_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} m_j}\,. \tag{3.7}$$

Рассмотрим незамкнутую систему материальных точек.

При условии, что масса материальных точек неизменна, уравнение (3.6) с учетом понятия центра масс примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\frac{d\vec{r}_j}{dt}\right)=\vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\vec{r}_j\right)=\vec{F} \quad \Rightarrow \quad M\frac{d^2\vec{r}_{ц.м.}}{dt^2}=\vec{F}\,. \tag{3.8}$$

Здесь $M=\sum\limits_{j=1}^{n} m_j$ – масса системы материальных точек.

Из (3.8) следует, что движение центра масс полностью определяется суммой внешних сил, действующих на систему материальных точек. Если сумма внешних сил равна нулю, то центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно.

3.3. Реактивное движение

Реактивное движение происходит за счет выброса части массы тела в определенном направление. Рассмотрим реактивное движение ракеты или снаряда.

В ракете или реактивном снаряде происходит постепенное сгорание топлива и истечение горячих газов назад через соответствующие отверстия. Рассматривая ракету и вытекающие из нее газы как единую механическую систему, можно применить к ней закон сохранения импульса. Так как вытекающие газы обладают импульсом, направленным назад, то основная часть ракеты будет двигаться вперед.

Рассмотрим ракету, движущуюся относительно поверхности Земли. Возьмем две системы координат. Одна связана с поверхностью Земли, другая – с движущейся ракетой (рис.3.4).

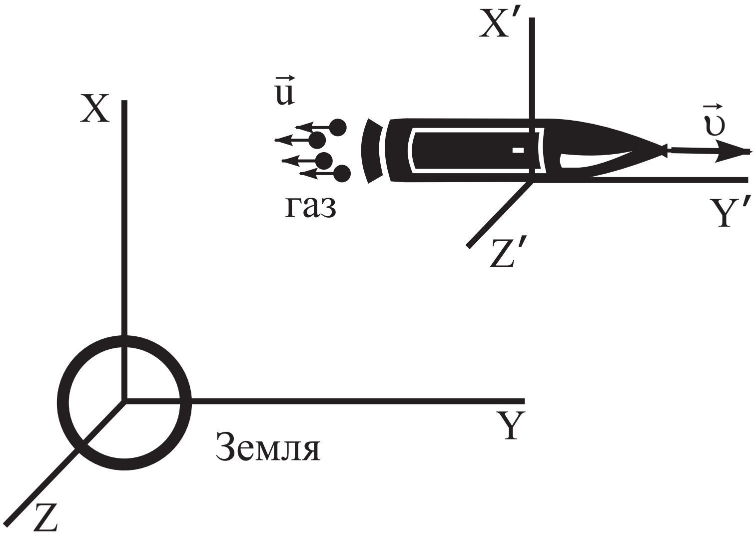

Рис. 3.4.

Пусть в момент времени t масса ракеты вместе с горючим равна m и ракета движется относительно поверхности Земли со скоростью $\vec{\upsilon}$. В момент времени $t_1 = t + \Delta t$ ракета имеет массу m_1 и движется относительно поверхности Земли со скоростью $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon} + \Delta\vec{\upsilon}$. Здесь $\Delta\vec{\upsilon}$ – изменение скорости ракеты за время Δt. Пусть скорость истечения газов относительно ракеты – $\vec{u}$ и направлена в сторону противоположную скорости ракеты. Скорость истечения газов относительно поверхности Земли в момент времени t_1 есть $\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}$.

Импульс ракеты в момент времени t равен

$$\vec{P}(t) = m\vec{\upsilon}. \tag{3.9}$$

Импульс ракеты и вытекающих из нее газов в момент времени t_1 равен

$$\vec{P}(t_1) = m_1\vec{\upsilon}_1 + (m - m_1)\left(\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}\right). \tag{3.10}$$

Ракета и вытекающие газы образуют замкнутую систему, к которой применим закон сохранения полного импульса

$$m\vec{\upsilon} = m_1\vec{\upsilon}_1 + (m - m_1)\left(\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}\right). \tag{3.11}$$

После раскрытия скобок уравнение (3.11) примет вид

$$-\Delta\vec{\upsilon}\cdot m = \vec{u}\cdot\Delta m.$$

Здесь $\Delta m = m_1 - m$. Разделив правую и левую части уравнения на Δt, при условии что $\Delta t \to 0$, получим

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt}. \tag{3.12}$$

Газы, вытекая из сопла ракеты, действуют на нее с некоторой силой, которая называется реактивной силой тяги

$$\vec{F}_{\text{рт}} = -\vec{u}\cdot\mu\ , \tag{3.13}$$

где $\mu = \dfrac{dm}{dt}$ – временной (ежесекундный) расход топлива. Реактивная сила направлена противоположно направлению истечения газов.

Уравнение, описывающее движение ракеты, получено при условии, что на нее не действует внешняя сила. При наличии внешней силы $\vec{F}^{(e)}$, действующей на тело, масса которого изменяется во времени, уравнение, описывающее такое движение, примет вид

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}^{(e)} - \vec{u}\,\frac{dm}{dt}\,. \tag{3.14}$$

Уравнение (3.14) получило название уравнения Мещерского.

Тема 4
Работа. Мощность. Кинетическая и потенциальная энергии. Связь потенциальной энергии с силой. Закон сохранения энергии для материальной точки. Закон сохранения энергии для замкнутой консервативной системы материальных точек. Закон сохранения энергии для незамкнутой консервативной системы материальных точек

4.1. Работа

Определение понятия работы в физике – это обобщение житейской работы, величина которой зависит от мышечных усилий и расстояния.

Рассмотрим движение тела вдоль оси X под действием постоянной силы $\vec{F}$, направление действия которой составляет с направлением движения угол φ (рис.4.1). Пусть за время t тело переместилось на расстояние x. Тогда вектор перемещения есть $\vec{x}$.

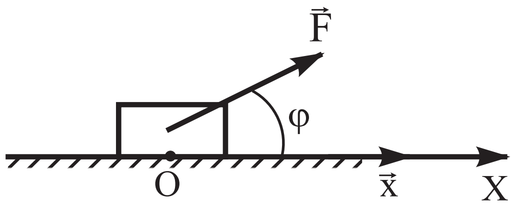

Рис. 4.1.

Работа, совершаемая силой, – это физическая величина равная скалярному произведению силы на вектор перемещения

$$A = \vec{F} \cdot \vec{x} = F \cdot x \cdot \cos\varphi. \tag{4.1}$$

В зависимости от угла между силой и направлением перемещения работа может быть как положительной, так и отрицательной.

Обобщим понятие работы на случай движения тела по криволинейной траектории. Пусть тело движется по некой криволинейной траектории (рис.4.2). На него действует сила, величина и направление которой в общем случае зависит от положения тела. Тело, двигаясь по криволинейной траектории, проходит путь от точки 1 до точки 2. Разобьем весь путь на n – ое число маленьких участков: $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, ..., $\Delta\vec{r}_n$. «Малость» разбиения на участки определяется двумя требованиями: а) можно считать участки прямо-

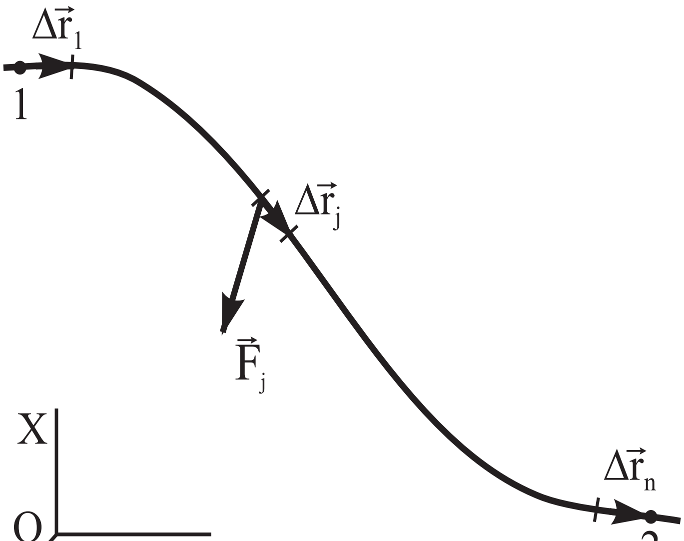

Рис. 4.2.

линейными, б) можно считать, что сила, действующая на участке, постоянна. Вектор перемещения тела на j – ом участке есть $\Delta\vec{r}_j$, а сила, действующая на тело на этом участке $\vec{F}_j$. Тогда работу, совершаемую силой на криволинейной траектории от точки 1 до точки 2, можно представить в виде суммы работ, совершаемых на маленьких участках $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, ..., $\Delta\vec{r}_n$,

$$A = \vec{F}_1\Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2\Delta\vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_n\Delta\vec{r}_n = \sum_{j=1}^{n}\vec{F}_j\Delta\vec{r}_j . \tag{4.2}$$

В пределе при $\Delta\vec{r}_j \to 0$ выражение для работы примет вид

$$A = \lim_{\Delta\vec{r}\to 0}\sum_{j=1}^{n}\vec{F}_j\Delta\vec{r}_j = \int\limits_{1(L)}^{2}\vec{F}d\vec{r} . \tag{4.3}$$

Буква L подчеркивает, что интегрирование должно вестись по определенной траектории движения.

Величина равная скалярному произведению силы на изменение радиус-вектора называется *элементарной работой*

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{r} . \tag{4.4}$$

Работу, совершаемую силой на криволинейной траектории от точки 1 до точки 2, можно представить в виде суммы элементарных работ.

Заметим, что в общем случае δA означает не полный дифференциал от функции A, а малую работу, совершаемую силой $\vec{F}$ на малом участке траектории $d\vec{r}$.

Разложим силу, действующую на тело, на две составляющие направленную по касательной к траектории ($\vec{F}_\tau$) и направленную нормально к ней ($\vec{F}_n$)

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n . \tag{4.5}$$

Тогда выражение для работы можно записать в виде

$$A = \int\limits_{1(L)}^{2}\vec{F}_\tau d\vec{r} + \int\limits_{1(L)}^{2}\vec{F}_n d\vec{r} . \tag{4.6}$$

Из определения работы следует, что работа, совершаемая нормальной составляющей силы равна нулю

$$\int\limits_{1(L)}^{2}\vec{F}_n d\vec{r} = 0 . \tag{4.7}$$

Выражение для работы примет вид

$$A = \int\limits_{1(L)}^{2}\vec{F}_\tau d\vec{r} = \int\limits_{1(L)}^{2}F_\tau dr . \tag{4.8}$$

Таким образом, если, например, тело движется под действием силы или группы сил по окружности с постоянной по величине скоростью, то работа, совершаемая этими силами, равна нулю. Также равна нулю работа силы реакции опоры.

4.2. Мощность

Работа, совершаемая силой в единицу времени, носит название средней или истинной мощности

$$< N >= \frac{A}{t}.$$

Если сила, действующая на тело, постоянна и тело движется с постоянной скоростью ($\vec{\upsilon} = const$), тогда

$$< N >= \frac{A}{t} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{x}}{t} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (4.9)$$

Обобщением понятия средней мощности является мгновенная мощность.

Мгновенная мощность определяется как скорость изменения работы во времени

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (4.10)$$

Если известно изменение во времени мгновенной мощности, то средняя мощность за время t есть

$$< N >= \frac{1}{t}\int_0^t N\left(t_1\right) dt_1.$$

4.3. Кинетическая и потенциальная энергии. Связь потенциальной энергии с силой

Обратимся ко второму закону Ньютона. В случае постоянной массы имеем

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}.$$

Умножим правую и левую части уравнения скалярно на вектор $d\vec{r}$

$$m\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot d\vec{r}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \qquad (4.11)$$

Уравнение (4.11) можно переписать в виде

$$m\left(d\vec{\upsilon} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \delta A \quad \Rightarrow \quad m\left(d\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}\right) = \delta A. \qquad (4.12)$$

Скалярное произведение векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon} = \left|\vec{\upsilon}\right| \cdot \left|d\vec{\upsilon}\right| \cos\beta = \left|\vec{\upsilon}\right| \cdot d\left|\vec{\upsilon}\right| = \upsilon \cdot d\upsilon. \qquad (4.13)$$

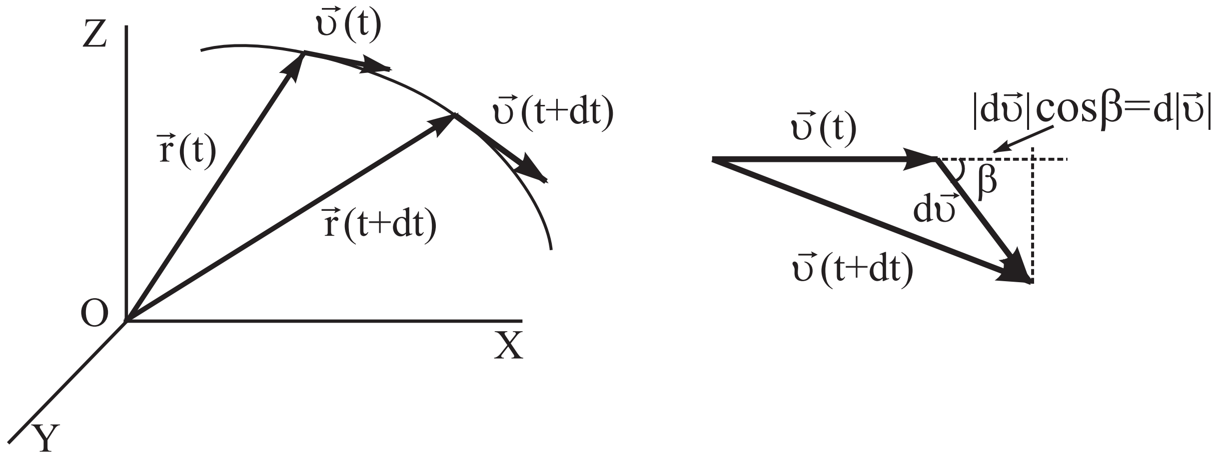

Рис. 4.3.

Здесь $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$, $d\upsilon = d|\vec{\upsilon}|$, β – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $d\vec{\upsilon}$. При записи (4.13) учитывали, что $|d\vec{\upsilon}|\cos\beta$ есть бесконечно малое приращение скорости вдоль направления вектора скорости и поэтому равна изменению этого вектора $d\upsilon$ (рис.4.3).

С учетом (4.13) уравнение (4.12) примет вид

$$d\frac{m\upsilon^2}{2} = \delta A. \tag{4.14}$$

Введем понятие кинетической энергии материальной точки.

Физическая величина, равная половине произведения массы материальной точки на квадрат скорости, получила название кинетической энергии материальной точки

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Из определения $E_к$ следует, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости материальной точки.

Изменение кинетической энергии равно элементарной работе

$$dE_к = \delta A.$$

Пусть тело перемещается по некоторой траектории (L) из точки 1 в точку 2. Возьмем от правой и левой частей уравнения (4.14) интеграл по траектории от первой до второй точки

$$\int_{1(L)}^{2} dE_к = \int_{1(L)}^{2} \delta A. \tag{4.15}$$

Слева в уравнении (4.15) стоит интеграл от полного дифференциала $\int_{1(L)}^{2} dE_к = E_{к2} - E_{к1}$, а справа – работа сил, действующих на тело, при его перемещении из точки 1 в точку 2

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = A. \tag{4.16}$$

Уравнение (4.16) показывает, что работа, совершаемая силой, действующей на материальную точку, затрачивается на изменение его кинетической энергии. Если работа положительна, то кинетическая энергия возрастает. Если работа отрицательна (действие сил направлено против движения и тормозит его), то кинетическая энергия тела убывает.

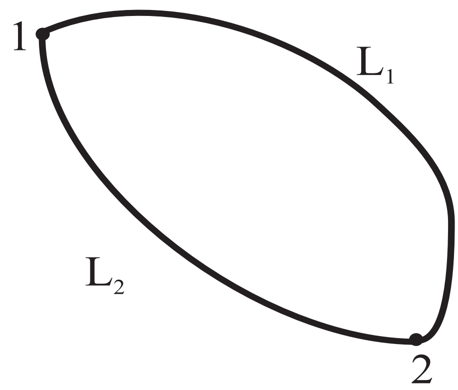

Рис. 4.4.

В общем случае, чтобы найти работу необходимо знать: 1) траекторию, по которой движется тело. 2) как на этой траектории меняется величина и направление силы. Это часто не просто сделать. Возникает вопрос, нельзя ли найти обходной путь для нахождения работы, не используя выражение (4.3)? Оказывается, такой путь существует.

С точки зрения совершаемой работы, все силы, существующие в природе, можно разбить на две группы:

1. консервативные или потенциальные $(\vec{F}_к)$,
2. неконсервативные или непотенциальные $(\vec{F}_н)$.

Сила называется консервативной, если работа, совершаемая этой силой, не зависит от траектории, по которой тело перемещается из произвольной точки 1 в точку 2, т.е.

$$\int\limits_{1(L_1)}^{2} \vec{F}_к d\vec{r} = \int\limits_{1(L_2)}^{2} \vec{F}_к d\vec{r} \,. \tag{4.17}$$

Здесь L_1 и L_2 различные траектории от точки 1 до точки 2 (рис.4.4). Работа зависит от положения начальной и конечной точек.

Если условие (4.17) не выполняется, сила называется неконсервативной.

Еще одно определение консервативной силы следующее. *Сила называется консервативной, если работа, совершаемая этой силой по любой замкнутой траектории равна нулю.* Действительно из (4.17) следует

$$\int\limits_{1(L_1)}^{2} \vec{F}_к d\vec{r} - \int\limits_{1(L_2)}^{2} \vec{F}_к d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{1(L_1)}^{2} \vec{F}_к d\vec{r} + \int\limits_{2(L_2)}^{1} \vec{F}_к d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{F}_к d\vec{r} = 0 \,. \tag{4.18}$$

Для того чтобы условие (4.17) выполнялось необходимо, чтобы под интегралом стоял полный дифференциал от некоторой функции, т.е.

$$\int\limits_{1(L)}^{2} \vec{F}_к d\vec{r} = -\int\limits_{1}^{2} dE_n = E_{n1} - E_{n2} \,. \tag{4.19}$$

Знак минус в выражении (4.19) общепринятый. Для непотенциальных сил такое уравнение написать нельзя. Функция E_n называется потенциальной функцией или потенциальной энергией, E_{n1} и E_{n2} – значения потенциальной энергии в 1 и 2 точках.

Работа, совершаемая потенциальной силой, равна разности потенциальных энергий в начальной и конечной точках

$$A = E_{n1} - E_{n2}. \tag{4.20}$$

Если сила потенциальная, то элементарная работа δA равна изменению потенциальной энергии со знаком минус

$$\vec{F}_к d\vec{r} = -dE_n\left(x, y, z\right). \tag{4.21}$$

Или в декартовой системе координат

$$F_{кx}dx + F_{ку}dy + F_{кz}dz = -\left(\frac{\partial E_n}{\partial x}dx + \frac{\partial E_n}{\partial y}dy + \frac{\partial E_n}{\partial z}dz\right). \tag{4.22}$$

Здесь $\frac{\partial E_n}{\partial x}, \frac{\partial E_n}{\partial y}, \frac{\partial E_n}{\partial z}$ – частные производные от потенциальной энергии.

Из (4.22) следует, что $F_{кx} = -\frac{\partial E_n}{\partial x}$, $F_{ку} = -\frac{\partial E_n}{\partial y}$, $F_{кz} = -\frac{\partial E_n}{\partial z}$.

Силу $\vec{F}$ можно записать следующим образом

$$\vec{F}_к = F_{кx}\vec{i} + F_{ку}\vec{j} + F_{кz}\vec{k} = -\frac{\partial E_n}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_n}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_n}{\partial z}\vec{k}.$$

Или, вынося E_n, получим

$$\vec{F}_к = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)E_n = -gradE_n. \tag{4.23}$$

Сила называется консервативной (или потенциальной), если ее можно представить в виде градиента от некоторой скалярной функции

$$\vec{F}_к = -gradE_n.$$

Это еще одно определение потенциальной силы, эквивалентное предыдущим.

Рассмотрим примеры потенциальных сил.

1. Сила тяжести: $\vec{F} = m\vec{g}$.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Y была направлена в сторону, противоположную силе тяжести. Тогда $F_x = F_z = 0,\ F_y = -mg$.

Если сила потенциальная, существует функция E_n такая, что

$$\begin{cases} -mg = -\dfrac{\partial E_n}{\partial y} \\ 0 = -\dfrac{\partial E_n}{\partial x}, \\ 0 = -\dfrac{\partial E_n}{\partial z}. \end{cases} \tag{4.24}$$

Из (4.24) следует, что E_n не зависит от координат x и z, а зависит только от координаты y

$$-mg = -\frac{dE_n}{dy} \quad \Rightarrow \quad dE_n = mgdy \quad \Rightarrow \quad E_n = mgy + C.$$

На опыте измеряют не потенциальную энергию, а разность потенциальных энергий. Будем считать, что $E_n\left(y=0\right)=0$. Тогда $C=0$ и выражение для потенциальной энергии есть

$$E_n = mgy.$$

2. Сила всемирного тяготения, сила Кулона: $\vec{F} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$, $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$. В общем виде эти силы можно записать как $\vec{F} = \frac{A_1}{r^3}\vec{r}$, где A_1 – постоянный коэффициент, зависящий от вида рассматриваемой силы. Существует функция $E_n = -\frac{A_1}{r} + C$ такая, что $\frac{A_1}{r^3}\vec{r} = -grad\left(-\frac{A_1}{r}\right)$. Постоянная C определяется из условия $E_n(r=\infty)=0$ и равна нулю.

3. Упругая сила: $\vec{F} = -k\vec{x}$. Здесь $\vec{x}$ смещение точки от положения равновесия, k – коэффициент упругости. Существует функция $E_n = \frac{kx^2}{2} + C$ такая, что $-k\vec{x} = -grad\left(\frac{kx^2}{2}\right)$. Постоянная C определяется из условия $E_n(x=0)=0$ и равна нулю.

4. Примером непотенциальной силы является сила трения, действующая на движущееся по горизонтальной плоскости со скоростью $\vec{\upsilon}$ тело: $\vec{F}_{\text{тр}} = -\mu mg\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon}$. Здесь μ – коэффициент трения. Если бы эта сила была потенциальной, то при движении тела по замкнутой траектории $1 \to 2 \to 1$ работа, совершаемая силой, была бы равна 0. Пусть тело движется по прямолинейной траектории вначале от точки 1 к точке 2. А затем возвращается от точки 2 к точке 1. Работа, совершаемая силой трения на участке $1 \to 2$ и $2 \to 1$, соответственно, будет

$$A_{1\to 2} = -\mu mgl,$$

$$A_{2\to 1} = \mu mg\left(-l\right) = -\mu mgl.$$

Здесь l – расстояние от точки 1 до точки 2. Работа силы по замкнутой траектории $1 \to 2 \to 1$ есть

$$A_{1\to 2} + A_{2\to 1} = -2\mu mgl \neq 0.$$

Это доказывает, что сила трения есть непотенциальная сила.

4.4. Закон сохранения энергии для материальной точки

Вновь обратимся ко II закону Ньютона. Мы показали, что работа, совершаемая внешними силами, затрачивается на изменение кинетической энергии тела

$$\int_1^2 dE_к = \int_{1(L)}^2 \delta A.$$

Запишем работу как сумму двух работ: работу, совершаемую потенциальными силами, и работу, совершаемую непотенциальными силами.

$$\int_1^2 dE_к = \int_{1(L)}^2 \left(\vec{F}_к d\vec{r}\right) + \int_{1(L)}^2 \left(\vec{F}_н d\vec{r}\right). \qquad (4.25)$$

Здесь $\vec{F}_к$ и $\vec{F}_н$ – результирующие потенциальных и непотенциальных сил, действующих на тело. Уравнение (4.25) перепишем в виде

$$\int_1^2 dE_к = -\int_1^2 dE_п + \int_{1(L)}^2 \vec{F}_н d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 d\left(E_к + E_п\right) = \int_{1(L)}^2 \left(\vec{F}_н d\vec{r}\right). \qquad (4.26)$$

Физическая величина, равная сумме потенциальной и кинетической энергий, получила название полная механическая энергия

$$E_к + E_п = E.$$

Уравнение (4.26) показывает, что изменение полной механической энергии происходит за счет работы, совершаемой непотенциальными силами

$$E_2 - E_1 = \int_{1(L)}^2 \vec{F}_н d\vec{r}. \qquad (4.27)$$

Если на тело не действуют непотенциальные силы или их работа равна 0, то при движении полная механическая энергия тела будет оставаться постоянной

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad E\left(t_1\right) = E\left(t_2\right).$$

В этом и заключается закон сохранения полной механической энергии.

При движении тела происходит непрерывное превращение кинетической энергии в потенциальную энергию и обратно в эквивалентных количествах, так что полная механическая энергия тела остается неизменной.

4.5. Закон сохранения энергии для замкнутой консервативной системы материальных точек

Пусть имеется система N материальных точек. Предположим, что 1) она замкнутая, т.е. на нее не действуют внешние силы, 2) внутренние силы являются потенциальными или консервативными. Такая система материальных точек называется *замкнутой консервативной системой*.

Для простоты возьмем систему, состоящую из трех материальных точек.

Полной механической энергией системы материальных точек назовем величину, равную сумме кинетических энергий отдельных материальных точек и потенциальных энергий их взаимодействий.

Для первой материальной точки можно записать

$$dE_{к1} = \left(\vec{F}_{12}\, d\vec{r}_1\right) + \left(\vec{F}_{13}, d\vec{r}_1\right).$$

Аналогично для второй и третьей материальных точек запишем

$$dE_{к2} = \left(\vec{F}_{21}\, d\vec{r}_2\right) + \left(\vec{F}_{23}, d\vec{r}_2\right),$$

$$dE_{к3} = \left(\vec{F}_{31}\, d\vec{r}_3\right) + \left(\vec{F}_{32}, d\vec{r}_3\right).$$

Сложив три уравнения, получим

$$d\left(E_{к1} + E_{к2} + E_{к3}\right) = \delta A. \qquad (4.28)$$

Работа внутренних сил с учетом третьего закона Ньютона равна

$$\delta A = (\vec{F}_{12}, d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) + (\vec{F}_{13}, d(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)) + (\vec{F}_{23}, d(\vec{r}_2 - \vec{r}_3)) \quad \Rightarrow$$

$$\delta A = (\vec{F}_{12}\, d\vec{r}_{12}) + (\vec{F}_{13}\, d\vec{r}_{13}) + (\vec{F}_{23}\, d\vec{r}_{23}).$$

Здесь $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, $\vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3$, $\vec{r}_{23} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3$. Если внутренние силы потенциальные, то

$$\begin{aligned}(\vec{F}_{12}\, d\vec{r}_{12}) &= -dE_{п12},\\ (\vec{F}_{13}\, d\vec{r}_{13}) &= -dE_{п13},\\ (\vec{F}_{23}\, d\vec{r}_{23}) &= -dE_{п23}.\end{aligned} \qquad (4.29)$$

Подставив (4.29) в (4.28), получим

$$d\left(E_{к1} + E_{к2} + E_{к3} + E_{п12} + E_{п13} + E_{п23}\right) = 0. \qquad (4.30)$$

Из (4.30) следует, что

$$\sum_{j=1}^{3} E_{кj} + \sum_{\substack{j=1,\\ j<i}}^{3} E_{пji} = const. \qquad (4.31)$$

Аналогичный результат получили для системы n материальных точек.

Таким образом, **полная механическая энергия замкнутой консервативной системы материальных точек, равная сумме кинетических энергий отдельных материальных точек и потенциальных энергий их взаимодействий, есть величина постоянная**.

$$E = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j \upsilon_j^2}{2} + \sum_{\substack{j=1,\\ j<i}}^{N} E_{пji} = const. \qquad (4.32)$$

4.6. Закон сохранения энергии для незамкнутой консервативной системы материальных точек

Рассмотрим незамкнутую систему из N материальных точек. Пусть система является консервативной, т.е. внутренние силы потенциальные. На каждую материальную точку действуют как внутренние, так и внешние силы. Тогда для каждой из материальных точек системы можем записать

$$dE_{\kappa j} = \delta A_j + \delta A_j^{(e)}, \tag{4.33}$$

где δA_j - элементарная работа внутренних сил и $\delta A_j^{(e)}$ - элементарная работа результирующих внешних сил, действующих на j-ую материальную точку.

Просуммируем правые и левые части уравнения (4.33)

$$d\left(\sum_{j=1}^{N} E_{\kappa j}\right) = \sum_{j=1}^{N} \delta A_j + \sum_{j=1}^{N} \delta A_j^{(e)}.$$

Поскольку система консервативна, то, как было показано выше, сумма элементарных работ внутренних сил равна

$$\sum_{j=1}^{N} \delta A_j = -\sum_{\substack{j=1,\\ i<j}}^{N} dE_{nji}.$$

Если внешние силы также являются потенциальными, т.е. $\delta A_j^{(e)} = -dE_{nj}^{(e)}$, то

$$d\left(\sum_{j=1}^{N} E_{\kappa j} + \sum_{\substack{j=1,\\ j<i}}^{N} E_{nji} + \sum_{j=1}^{N} E_{nj}^{(e)}\right) = 0. \tag{4.34}$$

Из (4.34) следует, что

$$\sum_{j=1}^{N} E_{\kappa j} + \sum_{\substack{j=1,\\ j<i}}^{N} E_{nji} + \sum_{j=1}^{N} E_{nj}^{(e)} = const. \tag{4.35}$$

Таким образом, если на консервативную систему материальных точек действуют внешние потенциальные силы, то изменение состояния системы происходит с сохранением полной ее механической энергии. Однако теперь под полной механической энергией понимаем сумму кинетических энергий отдельных материальных точек, сумму потенциальных энергий их взаимодействий и сумму потенциальных энергий взаимодействия системы с внешними телами.

В частном случае замкнутой консервативной системы из (4.35) вытекает условие (4.32).

Тема 5
Момент импульса, момент силы. Изменение момента импульса. Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

5.1. Момент импульса, момент силы

Пусть нам дана некоторая векторная физическая величина $\vec{A}$. Это может быть, например, сила, скорость, ускорение и т.д. Вектор характеризуется: 1) точкой приложения, 2) направлением, 3) длиной. Например, радиус-вектор: 1) точка приложения – начало системы координат, 2) направление – по прямой, соединяющей начало координат и рассматриваемую точку, 3) длина – расстояние от начала системы координат до точки.

Момент вектора $\vec{A}$ относительно начала координат определяется векторным произведением радиус-вектора на вектор $\vec{A}$

$$\vec{M}_A = \left[\vec{r}\ \vec{A}\right] = \vec{r} \times \vec{A}. \qquad (5.1)$$

Таким образом, *момент импульса материальной точки – это физическая величина, численно равная векторному произведению радиус-вектора на вектор импульса* (рис. 5.1)

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\ \vec{p}\right]. \qquad (5.2)$$

Момент силы – это физическая величина, численно равная векторному произведению радиус-вектора на вектор силы

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\ \vec{F}\right]. \qquad (5.3)$$

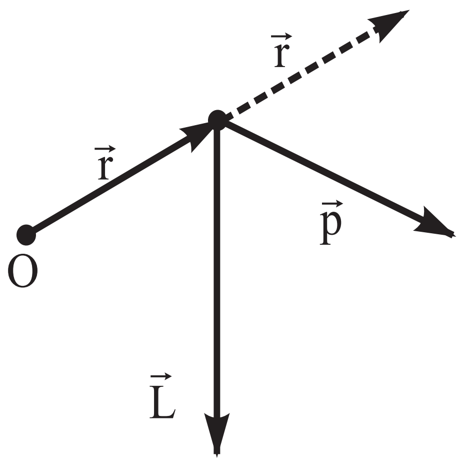

Рис. 5.1.

При нахождении векторного произведения радиус-вектор из начала системы координат переносится в место расположения материальной точки.

5.2. Изменение момента импульса

Вновь обратимся ко второму закону Ньютона в виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}. \qquad (5.5)$$

Умножим правую и левую части уравнения (5.5) векторно на радиус-вектор $\vec{r}$:

$$m\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right] = \left[\vec{r}\vec{F}\right]. \qquad (5.6)$$

Правая часть в (5.6) – момент силы. Для определения левой части в выражении (5.6) рассмотрим производную от выражения $[\vec{r}\,\vec{\upsilon}]$:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{\upsilon}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{\upsilon}\right] + \left[\vec{r}\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon}\vec{\upsilon}] + \left[\vec{r}\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right].$$

Векторное произведение вектора на самого себя равно нулю. Таким образом, получим

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{\upsilon}] = \left[\vec{r}\,\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right]. \tag{5.7}$$

Используя это соотношение, выражение (5.6) перепишем следующим образом

$$m\frac{d}{dt}[\vec{r}\,\vec{\upsilon}] = [\vec{r}\vec{F}]$$

или

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}. \tag{5.8}$$

Из второго закона Ньютона, получили: *изменение во времени момента импульса материальной точки равно моменту результирующей силы, действующей на точку.* Уравнение (5.8) называется уравнением моментов.

Из полученного уравнения следует, что если момент результирующей силы равен нулю, материальная точка будет двигаться с неизменным во времени моментом импульса, т.е.

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}(t_1) = L(t_2),$$

где t_1 и t_2 – произвольные "моменты" времени.

Момент силы может быть равен нулю в двух случаях:

1) результирующая сила, действующая на материальную точку, равна нулю. Из условия $\vec{F} = 0$ следует, что *при равномерном прямолинейном движении материальной точки момент импульса остается величиной постоянной.*

2) при движении результирующая сила направлена вдоль или против направления радиус-вектора, т.е. $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{r}$ или $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{r}$.

Силы, направление действия которых на материальную точку параллельно или антипараллельно радиус-вектору, проведенному в эту точку, получили название центральных.

Второй случай наблюдается, например, при рассмотрении движения точки под действием кулоновских сил или сил всемирного тяготения. Действительно, пусть имеются две точки с массами m_1 и m_2. Причем масса первой точки намного больше массы второй точки.

Свяжем с точкой m_1 начало системы координат. Сила, действующая на точку m_2 со стороны точки m_1

$$\vec{F} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} \Rightarrow \vec{M} = \left[\vec{F}\,\vec{r}\right] = 0. \tag{5.9}$$

Таким образом, под действием силы всемирного тяготения точка m_2 будет двигаться относительно точки m_1 с неизменным моментом импульса.

Заметим. Движение планет нашей системы вокруг Солнца происходит под действием силы всемирного тяготения, поэтому можно утверждать, что планеты движутся относительно Солнца с неизменным моментом импульса.

Если *на материальную точку действует центральная сила любого происхождения, то момент импульса материальной точки будет сохраняться.*

Отметим, что сила является центральной лишь для определенной системы отсчета. Для другой системы отсчета эта сила уже может быть не центральной. Например, возьмем ту же силу. Если начало системы координат мы поместим в точку нахождения тела с массой m_1, то сила, действующая на точку m_2, будет центральной. Поместим начало системы координат в точку, расположенную не на прямой, соединяющей точки m_1 и m_2. В этом случае сила, действующая на тело m_2 со стороны m_1, уже не будет центральной. А раз сила не центральная, то в новой системе отсчета момент импульса тела не будет сохраняться.

5.3. Закон сохранения момента импульса системы материальных точек

Рассмотрим систему материальных точек. Момент импульса системы материальных точек определим как сумму моментов отдельных материальных точек

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^{n} \vec{L}_j . \tag{5.10}$$

Вновь для простоты рассмотрим систему из трех материальных точек (рис.5.2). Для каждой из них можно записать

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{M}_1 ,$$

$$\frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{M}_2 ,$$

$$\frac{d\vec{L}_3}{dt} = \vec{M}_3 .$$

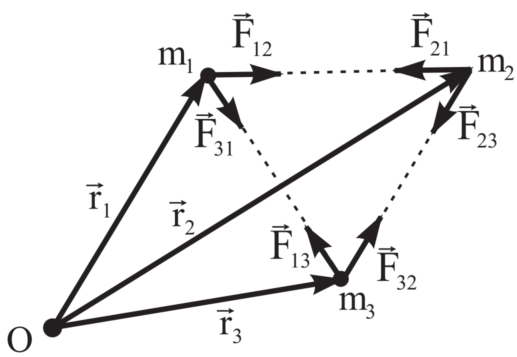

Рис. 5.2.

Здесь $\vec{L}_j$ и $\vec{M}_j$ – моменты импульса и силы, действующей на j-ую материальную точку.

Сложив, соответственно, правые и левые части уравнений, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{3}\vec{L}_j = \sum_{j=1}^{3}\vec{M}_j\,. \qquad (5.11)$$

Предположим, система материальных точек замкнутая, т.е. на нее не действуют извне другие тела. Распишем выражение для суммы моментов сил

$$\sum_{j=1}^{3}\vec{M}_j = \vec{M}_1+\vec{M}_2+\vec{M}_3 = \left[\vec{r}_1\;\vec{F}_1\right]+\left[\vec{r}_2\;\vec{F}_2\right]+\left[\vec{r}_3\;\vec{F}_3\right]. \qquad (5.12)$$

Здесь $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ – результирующие силы, действующие на первую, вторую и третью точки, соответственно

$$\vec{F}_1=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13},\ \vec{F}_2=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23},\ \vec{F}_3=\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}\,. \qquad (5.13)$$

С учетом (5.13) выражение для суммы моментов сил примет вид

$$\sum_{j=1}^{3}\vec{M}_j = \left[\vec{r}_1\;\vec{F}_{12}\right]+\left[\vec{r}_1\;\vec{F}_{13}\right]+\left[\vec{r}_2\;\vec{F}_{21}\right]+\left[\vec{r}_2\;\vec{F}_{23}\right]+\left[\vec{r}_3\;\vec{F}_{31}\right]+\left[\vec{r}_3\;\vec{F}_{32}\right].$$

Рассмотрим сумму $\left[\vec{r}_1\;\vec{F}_{12}\right]+\left[\vec{r}_2\;\vec{F}_{21}\right]$. Из третьего закона Ньютона следует, что $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$. Тогда

$$\left[\vec{r}_1\vec{F}_{12}\right]+\left[\vec{r}_2\vec{F}_{21}\right]=\left[(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\vec{F}_{12}\right]=0\,. \qquad (5.14)$$

Равенство нулю записанного выше выражения вытекает из условия, что вектор $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ антипараллелен вектору $\vec{F}_{12}$, поэтому синус угла между ними равен нулю.

Аналогично можно показать, что

$$\left[\vec{r}_1\;\vec{F}_{13}\right]+\left[\vec{r}_3\;\vec{F}_{31}\right]=0 \text{ и } \left[\vec{r}_2\;\vec{F}_{23}\right]+\left[\vec{r}_3\;\vec{F}_{32}\right]=0\,. \qquad (5.15)$$

Таким образом, получаем, что сумма моментов всех сил в замкнутой системе равна нулю. Тогда из (5.11) имеем

$$\frac{d}{dt}\vec{L}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{L}=const,\ \text{т.е.}\quad \vec{L}(t_1)=\vec{L}(t_2)\,. \qquad (5.16)$$

Показали, что для замкнутой системы из трех материальных точек момент импульса системы есть величина постоянная, не зависящая от времени.

Аналогичный вывод можно сделать для замкнутой системы из n материальных точек.

Таким образом, ***в замкнутой системе материальных точек момент импульса системы есть величина постоянная.***

Замечание. Момент импульса материальной точки, а значит и системы материальных точек, зависит от выбора системы отсчета. Совершая переход от одной системы отсчета к другой, мы меняем величину момента импульса (меняется $\vec{r}_j$). Однако, если система замкнутая, в новой системе отсчета новое значение момента импульса системы, по-прежнему, есть величина постоянная, не зависящая от времени. Это утверждение вытекает из факта, что система материальных точек, замкнутая в одной системе отсчета, остается замкнутой и при переходе к другой системе отсчета.

Можно показать, *что если система материальных точек незамкнутая, то изменение момента импульса такой системы равно результирующему моменту внешних сил, действующих на систему*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)},$$

Здесь $\vec{M}^{(e)} = \sum_{j=1}^{n} \vec{M}_j^{(e)}$. $\vec{M}_j^{(e)} = \left[\vec{r}_j\ \vec{F}_j^{(e)}\right]$, $\vec{F}_j^{(e)}$ – сумма внешних сил, действующих на j – ую материальную точку.

Тема 6
Преобразование Галилея. Принцип относительности Галилея. Постулаты специальной теории относительности. Преобразование Лоренца. Сокращение длины. Замедление времени. Формулы преобразования скоростей

6.1. Преобразование Галилея

Рассматривая движение материального тела, всегда понимаем, что оно относительно, т.е. совершается относительно выбранных тел отсчета. Связав с этими телами отсчета систему координат и часы, начинаем рассматривать изменение положения тела (материальной точки) в пространстве.

Одно и то же явление можно рассматривать с точки зрения различных систем отсчета. Например, движение лодки по реке можно изучать, находясь на берегу или плывя на пароходе.

Естественно, возникают вопросы: 1) как связаны между собой кинематические характеристики движения для различных систем отсчета? 2) меняются или не меняются, а если меняются, то как законы динамики, их вид при переходе от одной системы отсчета к другой?

Ограничимся рассмотрением систем отсчета, которые движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Речь идет о совокупности инерциальных систем отсчета.

Пусть имеем две инерциальные системы отсчета O и O'. Положение материальной точки в первой системе отсчета описываем с помощью системы координат XYZ, а во второй системы отсчета с помощью системы координат $X'Y'Z'$. Координатную систему второй системы отсчета расположим так, чтобы X и X' совпадали, $Y \parallel Y'$, и $Z \parallel Z'$ (рис.6.1). Пусть вторая система отсчета движется относительно первой со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ в на-

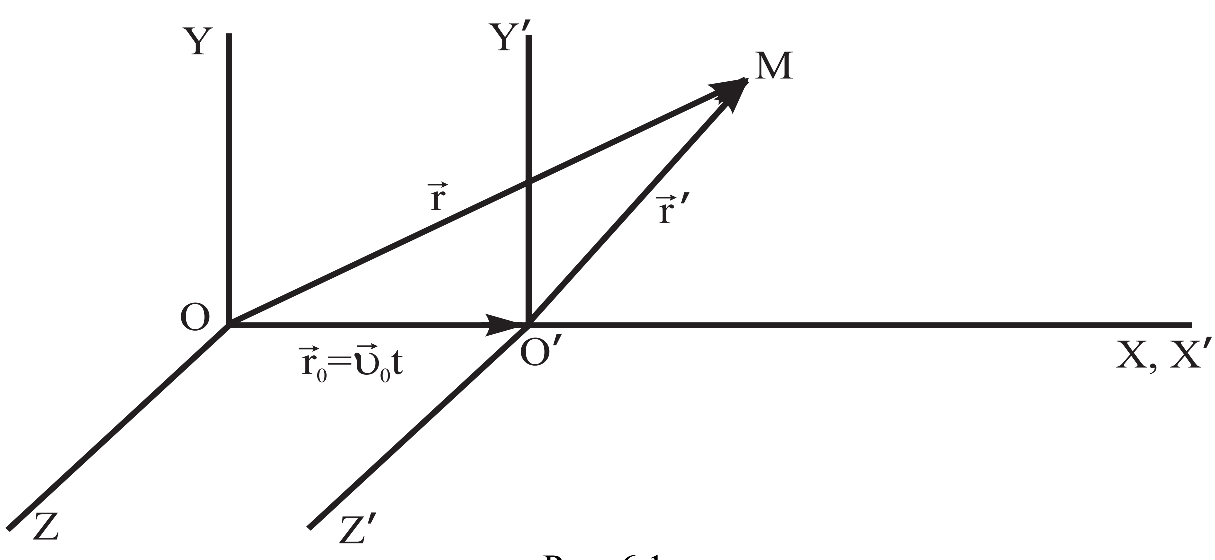

Рис. 6.1.

правлении оси X. Причем в начальный момент времени $t=0$ обе координатные системы совпадали. Возьмем произвольную точку M. Из рис.6.1 непосредственно видно, что координаты точки M во второй системе отсчета выражаются через координаты этой же точки в первой системе отсчета по формулам

$$\begin{cases} x' = x - \upsilon_0 t, \\ y' = y, \\ z' = z. \end{cases} \tag{6.1}$$

А как преобразуется время при переходе от одной системы отсчета к другой? Здравый смысл подсказывает, что в обеих системах отсчета время течет одинаково. Поэтому к трем записанным равенствам нужно добавить еще одно

$$t = t'. \tag{6.2}$$

В векторном виде преобразование координат и времени можно записать следующим образом

$$\begin{cases} \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{\upsilon}_0 t, \\ t' = t. \end{cases} \tag{6.3}$$

Аналогичный вид преобразование имеет в случае произвольной ориентации системы координат O' относительно системы координат O.

Преобразование координат и времени (6.3) называется ***преобразованием Галилея***. Продифференцировав правую и левую части первого уравнения, найдем

$$\vec{\upsilon}\,' = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0. \tag{6.4}$$

Скорость тела в системах отсчета XYZ и $X'Y'Z'$ различна. Однако ускорения одинаковы. Для доказательства этого еще раз продифференцируем выражение (6.4)

$$\frac{d\vec{\upsilon}\,'}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}\,' = \vec{a}. \tag{6.5}$$

Величины, изменяющиеся при переходе от одной системы отсчета к другой, называются относительными. Таким образом, координаты и скорость материальной точки являются относительными величинами.

На первый из поставленных вопросов дали ответ – нашли, как меняются кинематические характеристики движения при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Попытаемся дать ответ на второй вопрос: меняется или нет вид законов динамики при переходе от одной системы отсчета к другой.

6.2. Принцип относительности Галилея

Система отсчета необходима, потому что без нее нельзя рассматривать движение. Однако ее выбор в достаточной мере произволен. Поскольку система отсчета представляет собой лишь вспомогательное средство, законы физики, существующие объективно, не должны зависеть от конкретного выбора системы отсчета. Впервые это отчетливо понял Галилей. Он заметил, что если одно и то же явление рассматривать с точки зрения двух систем отсчета O и O', движущихся относительно друг друга прямолинейно и равномерно, то это явление будет протекать с точки зрения этих систем отсчета одинаковым образом.

Что мы понимаем, говоря «одинаковым образом»? Пусть имеются две системы отсчета: одна, связанная с поверхностью Земли, другая – с равномерно и прямолинейно плывущим пароходом. Необходимо рассмотреть, как движется лодка, в одной и другой системах отсчета.

Основным законом механики является II закон Ньютона. Запишем его для первой и второй систем отсчета.

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}\,, \tag{6.6}$$

$$m'\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt'}=\vec{F}'\,. \tag{6.7}$$

Первое уравнение описывает движение материальной точки в системе отсчета O, второе – в системе отсчета O'.

Мы показали, что ускорения одинаковы в различных инерциальных системах отсчета. Считаем, что масса не зависит от выбора системы отсчета. Таким образом, левые части уравнений (6.6) и (6.7) совпадают.

Но что происходит с силами при переходе от одной системы к другой? Допустим, нас интересует взаимодействие между двумя телами. Из опыта следует, что, в общем случае, сила зависит от расстояния между взаимодействующими телами, их относительной скорости и времени

$$F=F\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2,t\right),\quad F'=F'\left(\vec{r}_1\,'-\vec{r}_2\,',\vec{\upsilon}_1\,'-\vec{\upsilon}_2\,',t'\right). \tag{6.8}$$

Но преобразование Галилея не меняет ни одну из этих величин. Действительно, используя (6.3) запишем

$$\vec{r}_1\,'=\vec{r}_1-\vec{\upsilon}_0t,\quad \vec{r}_2\,'=\vec{r}_2-\vec{\upsilon}_0t\,. \tag{6.9}$$

Тогда расстояние между взаимодействующими телами есть

$$\vec{r}_{12}=\vec{r}_1-\vec{r}_2=\vec{r}_1\,'-\vec{r}_2\,'=\vec{r}_{12}\,'. \tag{6.10}$$

То же самое можно показать и для относительной скорости

$$\vec{\upsilon}_{12}=\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2=\vec{\upsilon}_1\,'-\vec{\upsilon}_2\,'=\vec{\upsilon}_{12}\,'. \tag{6.11}$$

Отсюда ясно, что силы не меняют своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой

$$\vec{F}'\left(\vec{r}_{12}\,',\vec{\upsilon}_{12}\,',t'\right)=\vec{F}\left(\vec{r}_{12},\vec{\upsilon}_{12},t\right). \tag{6.12}$$

Конкретный пример: $\vec{F} = G\dfrac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$ - сила всемирного тяготения. При переходе к новой инерциальной системе отсчета получим следующее выражение для силы

$$\vec{F}' = G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{\upsilon}_0 t - \vec{r}_2 + \vec{\upsilon}_0 t\right|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{\upsilon}_0 t - \vec{r}_2 + \vec{\upsilon}_0 t\right) = G\frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \vec{F}. \quad (6.13)$$

Оба уравнения (6.6) и (6.7) отличаются штрихами, но по существу тождественны: перейдя от одной системы отсчета к другой, мы заменим $\vec{r}, \vec{\upsilon}, t$ на $\vec{r}', \vec{\upsilon}', t'$. В новых переменных уравнение Ньютона описывает движение материальной точки в новой инерциальной системе отсчета.

Неизменность основного уравнения механики является следствием того, что ***все механические явления протекают одинаково во всех системах отсчета, равномерно и прямолинейно движущихся друг относительно друга.*** В этом и заключается смысл принципа относительности Галилея.

Принцип относительности был сформулирован для механических явлений. Естественно, возникает желание распространить его на все физические явления, т.е. показать, что все законы физики должны быть одинаковыми для всех наблюдателей, движущихся с постоянной скоростью относительно друг друга независимо от величины и направления скорости. В частности, на оптические явления. Однако оказалось, что уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные (оптические) явления, не остаются неизменными при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой с использованием преобразования Галилея.

В чем здесь дело? Не верны уравнения, описывающие распространение света? Опыт говорит о том, что они правильно описывают распространение света. Может быть неверен принцип относительности? Да нет, хороший принцип. Используя его и преобразования Галилея, показали неизменность основного закона механики.

Если принцип относительности является основополагающим в физике, то из факта зависимости системы уравнений Максвелла от системы отсчета вытекает: или они не верны, или не верно преобразование Галилея, которым мы пользуемся, совершая переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Однако, если не верно преобразование Галилея, то не верна механика Ньютона. Ведь мы показали неизменность основного закона механики при преобразовании Галилея. Перед физиками открылись три возможности:

1. Принцип относительности распространяется только на механику и не имеет отношения к электродинамике (оптике).

2. Принцип относительности имеет универсальный характер, но система уравнений Максвелла не удовлетворяет этому принципу, и от нее нужно отказаться.
3. Принцип относительности справедлив для всех явлений природы, и система уравнений Максвелла правильна. Тогда переход к другой инерциальной системе отсчета должен описываться уже не с помощью преобразования Галилея. В этом случае нужно менять механику.

Выбор между этими возможностями должен был сделать опыт. И он его сделал.

В 80-х годах девятнадцатого века были выполнены опыты Майкельсона-Морли, результаты которых свидетельствовали о независимости скорости распространения света от источника или наблюдателя. Эти результаты невозможно объяснить, используя преобразования Галилея.

Преобразование координат Галилея не верно. Лучше сказать, преобразование Галилея не верно для оптических явлений, т.е. уравнения Максвелла верны, а вот преобразования Галилея не выполняются. Если принцип относительности всеобщий, нужно найти новые преобразования, а значит и построить новую механику. Но отсюда вытекает, как отмечалось выше, при условии всеобщности принципа относительности, что «не верна» и механика Ньютона.

6.3. Постулаты специальной теории относительности. Преобразование Лоренца

В 1905 году А. Эйнштейном была опубликована теория, получившая название специальной теории относительности, которая существенным образом изменила наши представления о свойствах пространства и времени.

При ее формулировке А.Эйнштейн опирался на два постулата:

1. *Все физические явления в инерциальных системах отсчета при одинаковых начальных условиях протекают одинаково*. Этот постулат является распространением принципа относительности Галилея на все явления природы.
2. *Скорость света в пустоте во всех инерциальных системах отсчета одинакова, причем одинакова по всем направлениям и не зависит ни от скорости источника, ни от скорости наблюдателя*.

Пусть имеются две инерциальные системы отсчета O и O'. Система отсчета O' движется относительно O со скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Как и при рассмотрении преобразований Галилея, будем считать, что оси координат X и X' совпадают, а оси $Y \parallel Y'$, и $Z \parallel Z'$ (рис.6.1).

Рассмотрим некоторое событие A с точки зрения этих двух инерциальных систем отсчета. Под событием будем понимать положение тела в некоторой точке пространства в определенный момент времени. В системе отсчета O событие A будем характеризовать координатами x, y, z и моментом времени t; в системе O', соответственно, x', y', z' и t'. Событие A может быть заключено, например, во взрыве или загорании лампочки и т.д.

Перед нами стоит задача, найти, как связано событие в системах отсчета O и O', т.е. как связаны x, y, z, t и x', y', z', t'.

Исходя из постулатов Эйнштейна, можно показать, что событие в системе отсчета O' связано с событием в системе отсчета O соотношением вида

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\upsilon_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{6.14}$$

Соответственно событие в системе отсчета O связано с событием в системе отсчета O' соотношением

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{\upsilon_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{6.15}$$

Преобразования (6.14) и (6.15), связывающие событие A в двух инерциальных системах отсчета, получили название **преобразования Лоренца.**

Отметим, что при скорости υ_0 стремящейся к нулю преобразование Лоренца переходит в преобразование Галилея. Таким образом, преобразование Галилея есть предельный случай преобразования Лоренца при $\upsilon_0 \to 0$.

Из преобразования Лоренца следует, что в инерциальной системе отсчета O' время события A (t') связано не только с временем события A в системе отсчета O, но и с положением события A в этой системе отсчета. Иными словами, время «превращается» в пространство и наоборот.

Рассмотрим несколько интересных следствий, вытекающих из преобразования Лоренца.

6.4. Сокращение длины

Предположим у нас есть линейка, покоящаяся относительно системы отсчета O', причем в этой системе концы линейки закреплены в точках x_1' и x_2'. Таким образом, длина линейки в системе O' будет

$$l_{\text{пок.}} = x_2' - x_1'. \tag{6.16}$$

Для того чтобы найти длину линейки относительно системы отсчета O, воспользуемся преобразованием Лоренца

$$x_2' = \frac{x_2 - \upsilon_0 t_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}, \quad x_1' = \frac{x_1 - \upsilon_0 t_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \tag{6.17}$$

Подставив (6.17) в (6.16), получим

$$x_2' - x_1' = \frac{\left(x_2 - x_1\right) - \upsilon_0\left(t_2 - t_1\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \tag{6.18}$$

Как мы производим измерение длины движущегося объекта? Для этого необходимо отметить положение концов объекта (линейки) в один и тот же момент времени, т.е. измерить x_2 и x_1 при $t_2 = t_1$. С учетом сказанного выражение (6.18) примет вид

$$x_2' - x_1' = \left(x_2 - x_1\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad l_{\text{пок}}\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}} = l_{\text{движ}}. \tag{6.19}$$

Здесь $l_{\text{движ.}} = x_2 - x_1$. Таким образом, длина линейки в движущейся системе отсчета равна умноженной на $\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}$ длине этой же линейки в системе отсчета, относительно которой она покоится.

Мы обнаружили, что длина физического тела (линейки) относительна, т.е. различна в разных системах отсчета. Наибольшую длину линейка имеет в той системе, где она покоится.

Что значит сокращение длины линейки? Ясно, что никакого реального сокращения длины не может произойти. Это следует из основного принципа, положенного в основу специальной теории относительности – принципа равноправия всех инерциальных систем отсчета. Поэтому не может быть и речи о возникновении каких-либо напряжений и деформаций, ведущих к сокращению линейки. «Укорочение» линейки происходит исключительно в силу различных способов измерения длины в двух системах отсчета.

Вспомним, как мы измеряли длину. Для этого мы в определенный момент времени t фиксируем положение концов движущейся линейки x_1 и x_2. Пусть событие A заключается в том, что в системе отсчета O мы в момент времени t фиксируем положение первого конца линейки x_1, а событие B, соответственно, в момент времени t фиксируем положение второго конца линейки x_2.

Используя преобразования Лоренца, время событий A и B в движущейся системе отсчета O' есть

$$t_1' = \frac{t - \frac{\upsilon_0}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t - \frac{\upsilon_0}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \qquad (6.20)$$

Здесь t_1' - время фиксации положения первого конца линейки x_1' в системе отсчета O', t_2' - время фиксации положения второго конца линейки x_2' в системе O'. Разность времен фиксации положений первого и второго концов линейки равна

$$t_1' - t_2' = \frac{\frac{\upsilon_0}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \qquad (6.21)$$

С точки зрения системы отсчета O' мы не одновременно фиксируем положение концов линейки x_1' и x_2'. Один конец раньше, другой – позже. Отсюда и возникает изменение длины линейки при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

6.5. Замедление времени

Вновь рассмотрим две инерциальные системы отсчета O и O'. Возьмем в системе отсчета O' некоторую точку с координатой x' (о координатах y' и z' не говорим, поскольку при переходе к системе отсчета O они преобразуются в y и z). Допустим, в этой точке произошли два события в моменты времени t_1' и t_2'. Промежуток времени между событиями в системе отсчета O'

$$t_2' - t_1' = T_{\text{пок}}. \qquad (6.22)$$

Однако, если в системе отсчета O' события происходят в одной точке пространства, то для системы O это уже не так. Согласно преобразованию

Лоренца в системе отсчета O первое событие произойдет в точке $x_1 = \frac{x' + \upsilon_0 t_1'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}$, а второе в точке $x_2 = \frac{x' + \upsilon_0 t_2'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}$.

И, следовательно,

$$x_2 - x_1 = \frac{\upsilon_0 \left(t_2' - t_1'\right)}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} \neq 0. \tag{6.23}$$

Таким образом, несмотря на то, что события в системе отсчета O' происходят в одной точке, те же события в системе отсчета O уже не одноместны.

Определим промежуток времени между рассматриваемыми событиями в системе отсчета O. Опять воспользовавшись преобразованием Лоренца, найдем

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{\upsilon_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{\upsilon_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \tag{6.24}$$

Используя (6.24) найдем

$$t_2 - t_1 = T_{\text{движ}} = \frac{\left(t_2' - t_1'\right)}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \tag{6.25}$$

Или

$$T_{\text{движ}} = T_{\text{пок}} \Big/ \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}. \tag{6.26}$$

Промежутки времени между одной и той же парой событий в различных инерциальных системах отсчета оказываются различными. Наименьшую длительность между событиями мы обнаруживаем в той системе отсчета, в которой эти события происходят в одной и той же точке. Физической причиной замедления времени являются совершенно различные способы его сравнения в O' и O. В первом случае измеряем промежуток времени в одной точке, во втором – в различных точках.

Очевидно, все слышали или читали, что космические путешественники будут стареть не так быстро как их собратья на Земле. Нет ли здесь какого парадокса (в литературе этот вопрос получил название парадокса близнецов)?

Рассмотрим две системы отсчета: одна связана с Землей, другая – с космическим кораблем. На Земле остался близнец A, близнец B путешествует на космическом корабле по замкнутому маршруту к звезде Арктур и обратно со скоростью $\upsilon_0 = 0{,}99c$. Для наблюдателя на Земле расстояние до Арктура $L = 40$ световых лет. Спрашивается, каким будет возраст близнецов, когда близнец B закончит путешествие и вернется на Землю, если до начала путешествия им было по 20 лет?

С точки зрения близнеца A время, через которое корабль с близнецом B вернется на Землю, есть

$$T = \frac{2L}{\upsilon_0} = \frac{80c\,лет}{0{,}99c} = 80{,}8\,лет.$$

Возраст близнеца A к моменту возвращения корабля будет

$$20 + 80{,}8 = 100{,}8\,лет.$$

С точки зрения близнеца B, находящегося в космическом корабле, время его путешествия в $\sqrt{1-\frac{\upsilon_0^2}{c^2}}$ раз короче; ведь близнец A считает, что часы на космическом корабле идут в $\sqrt{1-0{,}99^2} = 0{,}14$ раз медленнее. Поэтому для близнеца B время космического путешествия будет

$$80{,}8 \cdot 0{,}14 = 11{,}4 \text{ года.}$$

Возраст близнеца B к моменту возвращения космического корабля

$$20 + 11{,}4 = 31{,}4 \text{ года.}$$

Однако мы сталкиваемся с кажущимся парадоксом, когда космический путешественник, глядя на Землю, замечает отставание земных часов по сравнению с его собственными. Тогда, казалось бы, проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, мы получили бы результат, согласно которому после возвращения близнеца B близнец A будет его моложе. Что противоречит предшествующим рассуждениям.

Разве из соображений симметрии не ясно, что возраст близнецов должен быть одинаков в конце путешествия? Т.е. на первый взгляд кажется, что теория Эйнштейна приводит к противоречию. Противоречие устраняется, если заметить, что проблеме присуща внутренняя асимметрия. Близнец на Земле остается всегда в одной и той же инерциальной системе отсчета, тогда как космонавт, поворачивая обратно к Земле, меняет ее.

Парадокс близнецов (называемый еще парадоксом часов) имеет долгую историю. Теперь почти всех физиков устраивает приведенная здесь интерпретация космического путешествия. Однако существует еще ряд физиков, философов, математиков, которые считают, что близнецы к концу путешествия постареют одинаково.

6.6. Формулы преобразования скоростей

Рассмотрим движение материальной точки с точки зрения двух систем O и O'. Скорости определим обычным образом.

В системе отсчета O

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ или } \upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

В системе отсчета O'

$$\vec{\upsilon}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \text{ или } \upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad \upsilon'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad \upsilon'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Используя преобразования Лоренца (6.14), найдем связь между изменением координат и времени для различных инерциальных систем отсчета

$$dx' = \frac{dx - \upsilon_0 dt}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \frac{dt - \frac{\upsilon_0}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}. \tag{6.27}$$

Исходя из определения скорости и преобразования (6.27), найдем связь между скоростями материальной точки для различных инерциальных систем отсчета

$$\upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \upsilon_0 dt}{dt' \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}} = \frac{dx - \upsilon_0 dt}{dt - \frac{\upsilon_0}{c^2} dx} = \frac{\upsilon_x - \upsilon_0}{1 - \frac{\upsilon_0}{c^2} \upsilon_x}. \tag{6.28}$$

Аналогично рассмотрим компоненты скорости на оси $Y(Y')$ и $Z(Z')$

$$\upsilon'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}{dt - \frac{\upsilon_0}{c^2} dx} = \frac{\upsilon_y \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon_0}{c^2} \upsilon_x}, \tag{6.29}$$

$$\upsilon'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\upsilon_z \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon_0}{c^2} \upsilon_x}. \tag{6.30}$$

Получили формулы релятивистского преобразования скоростей; их называют иногда формулами сложения скоростей. Отметим, что компоненты скорости по осям Y' и Z' зависят не только от υ_y и υ_z, но и от компоненты скорости υ_x. Неравноправность оси X по сравнению с осями Y и Z связана с тем, что по ней направлено движение инерциальных систем отсчета.

Учитывая, что системы O движется относительно системы O' со скоростью $-\upsilon_0$, запишем формулы обратного преобразования

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0}{c^2} \upsilon'_x}, \quad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon_0}{c^2} \upsilon'_x}, \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{\upsilon_0}{c^2} \upsilon'_x}. \tag{6.31}$$

Пусть в системе отсчета O' движение осуществляется вдоль оси X' со скоростью c, т.е. $\upsilon'_x = c$, $\upsilon'_y = 0$, $\upsilon'_z = 0$. Используя преобразование скоростей (6.31), найдем, что

$$\upsilon_y = \upsilon_z = 0, \quad \upsilon_x = \frac{c + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0}{c}} = c. \tag{6.32}$$

Этот результат соответствует второму постулату Эйнштейна: скорость света в вакууме во всех инерциальных системах отсчета одинакова.

Пусть в системе отсчета O' материальная точка движется вдоль оси Y': $\upsilon'_z = 0$, $\upsilon'_x = 0$, $\upsilon'_y \neq 0$. Тогда в системе отсчета O проекции вектора скорости на оси координат есть $\upsilon_z = 0$, $\upsilon_x = \upsilon_0$, $\upsilon_y = \upsilon'_y\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}$. Направление скорости, с которой движется материальная точка, определяется выражением

$$tg\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = tg\alpha_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon_0^2}{c^2}}, \tag{6.33}$$

где $tg\alpha_0 = \frac{\upsilon'_y}{\upsilon_0}$. По сравнению с преобразованием Галилея при преобразовании Лоренца угол α, определяющий направление скорости, уменьшается (рис.6.2).

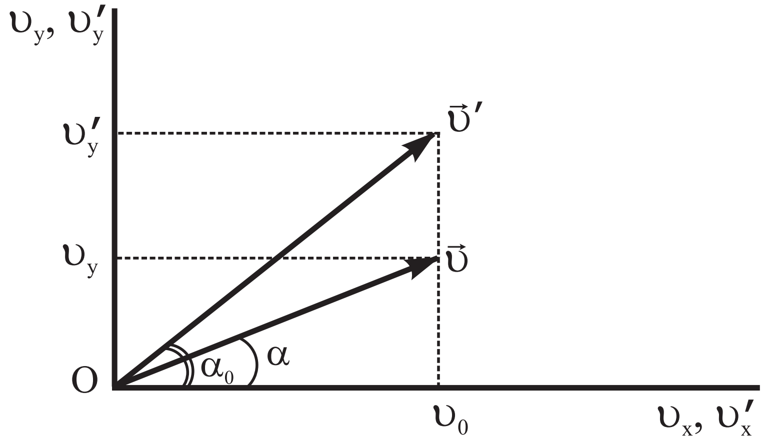

Рис. 6.2.

Тема 7
Основы релятивистской динамики. Понятие энергии в релятивистской механике

7.1. Основы релятивистской динамики

Любая физическая теория строится по схеме: 1) вводится определенный набор физических величин, 2) постулируются законы, устанавливающие связь между этими величинами, 3) рассматриваются следствия, вытекающие из этих законов. По такой схеме, в частности, строилась механика Ньютона, такую же схему надо применить при построении механики Эйнштейна (релятивистской механики). Кроме того, при малых скоростях $\frac{\upsilon_0}{c} \ll 1$ новая релятивистская механика должна переходить в механику Ньютона (ведь в этом случае преобразования Лоренца совпадают с преобразованиями Галилея).

Основным законом классической механики является второй закон Ньютона (или уравнение движения)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ и $m = const$.

Естественно, что перед Эйнштейном встала задача найти релятивистское уравнение движения, т.е. установить закон, связывающий кинематические характеристики движения с причиной, вызвавшей движение (силой).

Прежде всего, Эйнштейн переопределяет понятие импульса. В релятивистской механике под импульсом мы понимаем физическую величину, численно равную

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = m(\upsilon)\vec{\upsilon}. \tag{7.1}$$

Величина $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ называется релятивистской массой или просто массой. Величина m_0 называется массой покоя.

Такое выражение для импульса материальной точки (частицы) вытекает из требования выполнения закона сохранения импульса для замкнутой системы материальных точек при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Поясним сказанное. В механике Ньютона скорости материальной точки в различных инерциальных системах отсчета связаны соотношением

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 .$$

Таким образом, если в инерциальной системе отсчета O

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j = \text{const},$$

то и в инерциальной системе отсчета O'

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{p}'_j = \sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j - \vec{\upsilon}_0 \sum_{j=1}^{n} m_j = \text{const}.$$

Для того чтобы закон сохранения импульса оставался неизменным (выполнялся) при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой с учетом преобразования Лоренца, и потребовалось переопределение понятия импульса.

После этого Эйнштейн постулирует основной закон релятивистской механики в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} . \tag{7.2}$$

Скорость изменения импульса материальной точки равна результирующей силе, действующей на эту точку. Формально основные законы релятивистской и нерелятивистской механик имеют одинаковый вид. Поразному определены импульсы.

Из релятивистского уравнения движения следует несовпадение направлений силы и ускорения. Продифференцировав левую часть уравнения (7.2), получим

$$\frac{m_0}{\left(1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} + \frac{m_0}{\left(1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{\vec{\upsilon}\upsilon}{c^2} \frac{d\upsilon}{dt} = \vec{F} . \tag{7.3}$$

Направление первого слагаемого левой части уравнения (7.3) совпадает с направлением ускорения, а второго – с направлением скорости. Таким образом, направление силы и ускорения не совпадают.

Из определения массы следует, что она становится все больше по мере того, как скорость движущегося тела приближается к скорости света. При $\upsilon = c$ масса становится бесконечно большой. Отсюда следует, что с помощью сил невозможно заставить двигаться тело со скоростью, превышающей скорость света: его инерциальная масса растет до бесконечности. А рост массы приводит к возрастанию сопротивления тела изменению скорости и, таким образом, не позволяет его скорости приближаться к скорости света.

Для характеристики движения в релятивистской механике, как и в нерелятивистской, вводятся понятия: энергия, работа, момент количества движения, момент силы и т.д.

7.2. Понятие энергии в релятивистской механике

Теперь вместо нерелятивистского уравнения движения необходимо исходить из релятивистского уравнения.

Умножим обе части уравнения движения (7.2) скалярно на вектор $\vec{\upsilon}$

$$\vec{\upsilon}\cdot\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\vec{\upsilon}\cdot\vec{F}\,. \tag{7.4}$$

Распишем более подробно левую часть уравнения (7.4)

$$\vec{\upsilon}\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right\}=m_0\vec{\upsilon}\left\{\frac{1}{2}\frac{\vec{\upsilon}}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)+\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right\}=$$

$$=\frac{m_0}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\left\{\frac{1}{2}\upsilon^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)c^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\right\}=$$

$$=\frac{m_0}{2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left\{\upsilon^2+\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)c^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right). \tag{7.5}$$

С учетом (7.5) уравнение (7.4) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right\}=\left(\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt}\right). \tag{7.6}$$

«Умножив» обе части уравнения (7.6) на dt, получим

$$d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\left(\vec{F}\,d\vec{r}\right). \tag{7.7}$$

Из (7.7) следует, что работа затрачивается на изменение величины $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$. Эта величина получила название собственной энергии тела

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = mc^2 . \tag{7.8}$$

В том случае, когда тело покоится $\vec{\upsilon} = 0$, оно обладает энергией

$$E_0 = m_0 c^2 , \tag{7.9}$$

которая называется энергией покоя.

Если силы, действующие на материальную точку, потенциальные (консервативные), то

$$\delta A = \left(\vec{F}\, d\vec{r}\right) = -dE_\text{п} .$$

Подставив это значение в уравнение (7.7), связывающее работу и изменение собственной энергии, найдем

$$d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + E_n\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + E_n = const . \tag{7.10}$$

Сумму собственной энергии и потенциальной энергии называют полной энергией материальной точки.

При малых скоростях движения $\frac{\upsilon}{c} \ll 1$, выражение для собственной энергии (7.8) можно записать в виде

$$\frac{c^2 m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{\upsilon^2}{c^2} = m_0 c^2 + \frac{m_0 \upsilon^2}{2} . \tag{7.11}$$

Таким образом, в результате того, что тело приобретает скорость, к его энергии покоя $m_0 c^2$ прибавляется кинетическая энергия, и эта сумма представляет собственную энергию движущегося тела. Поэтому кинетическую энергию тела, движущегося с произвольной скоростью, в релятивистской механике определяют как

$$E_к = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right) . \tag{7.12}$$

При малых скоростях это выражение переходит в классическое выражение для кинетической энергии

$$E_к = \frac{m_0 \upsilon^2}{2}.$$

Между импульсом и собственной энергией в релятивистской механике существует тесная связь. Рассмотрим

$$\frac{E^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

и

$$p^2 + m_0^2 c^2 = \frac{m_0^2 \upsilon^2}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} + m_0^2 c^2 = \frac{m_0^2}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \left(\upsilon^2 + c^2 - \upsilon^2 \right) = \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}},$$

т.е.

$$E^2 = c^2 \left(p^2 + m_0^2 c^2 \right).$$

Если материальная точка движется с сохранением импульса

$$p = \text{const},$$

то и энергия точки также сохраняется и наоборот.

Замечание. При построении нерелятивистской динамики Ньютон постулировал три закона. Первый – утверждает существование инерциальных систем отсчета. Второй – устанавливает основное уравнение движения. И, наконец, третий – устанавливает связь между силой действия и противодействия.

При построении релятивистской механики Эйнштейн основное внимание уделяет определению релятивистского уравнения движения и вытекающим из него следствиям.

Однако, прежде чем формулировать релятивистское уравнение движения, А. Эйнштейн вводит два постулата, которые описывают свойства пространства и времени, и в которых с самого начала предполагается, что рассмотрение физических явлений, в том числе и механических, будет происходить в инерциальных системах отсчета. Причем А. Эйнштейн вслед за Ньютоном понимает под инерциальными системами отсчета системы, в которых тело движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела. Таким образом, с самого начала постулируется существование инерциальных систем отсчета.

Наконец, в релятивистской механике надо решить вопрос о связи между действием первого тела на второе и второго на первое, т.е. установить закон, аналогичный третьему закону Ньютона в нерелятивистской механике.

Закон равенства действия и противодействия в виде

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

в физике выполняется не всегда. В настоящее время релятивистская механика используется для описания движения космических тел и движения элементарных частиц. И здесь закон равенства действия и противодействия в простейшей форме обычно не выполняется. Так если два заряда q_1 и q_2 движутся со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, то сила, действующая на заряд q_1 со стороны q_2, не равна силе, действующей на заряд q_2 со стороны q_1,

$$\vec{F}_{12} \neq \vec{F}_{21},$$

т.е. третий закон Ньютона не выполняется.

Третий закон Ньютона можно сформулировать как требование сохранения суммы импульсов взаимодействующих тел, если нет никаких внешних сил. Это закон сохранения импульса.

Тема 8
Движение в неинерциальных системах отсчета. Неинерциальные системы, движущиеся поступательно прямолинейно относительно инерциальных систем. Неинерциальные системы, совершающие вращательное движение относительно инерциальных систем

Инерциальные системы отсчета – это системы отсчета, в которых тело движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их результирующее действие равно нулю.

Иными словами под *инерциальными системами отсчета мы понимаем системы отсчета, движение тел в которых подчиняется законам Ньютона*.

Различные инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга с постоянной по величине и направлению скоростью, т.е. инерциальные системы движутся друг относительно друга без ускорения.

В природе существует большое число систем, движущихся относительно инерциальных систем отсчета с ускорением. В качестве примера рассмотрим взлет самолета. При взлете самолет движется с ускорением относительно системы отсчета, связанной с поверхностью Земли. Если система отсчета, связанная с поверхностью Земли, инерциальная, то система отсчета, связанная с самолетом является неинерциальной.

Часто нам необходимо знать, по каким законам происходит движение тел в неинерциальных системах отсчета. Например, что происходит с телами при взлете ракеты и т.д.

Очевидно, что второй закон Ньютона не применим для неинерциальных систем отсчета. Тем не менее, предлагается для описания движения в неинерциальных системах отсчета пользоваться вторым законом Ньютона, но несколько изменив его. Для того чтобы понять, как нужно изменить основное уравнение, описывающее движение материальной точки, остановимся более подробно на двух типах неинерциальных систем:

1. неинерциальные системы не вращающиеся, движущиеся поступательно прямолинейно относительно инерциальных систем.
2. неинерциальные системы, которые не движутся поступательно относительно инерциальных систем, а совершают вращательное движение.

8.1 Неинерциальные системы, движущиеся поступательно прямолинейно относительно инерциальных систем

Пусть имеется инерциальная система отсчета O (XYZ) и движущаяся относительно нее поступательно прямолинейно неинерциальная система отсчета O' ($X'Y'Z'$). Пусть $\vec{r}_0$ - радиус-вектор, описывающий положение начала координат неинерциальной системы отсчета в инерциальной, $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ - радиус-векторы, описывающие положение материальной точки в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, соответственно. Используя правило сложения векторов, запишем

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0.$$

Будем считать, что в обеих системах отсчета время течет одинаково, т.е.

$$t = t'.$$

Скорости движения материальной точки в инерциальной и неинерциальной системах связаны соотношением

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0.$$

Ускорения тела в инерциальной и неинерциальной системах связаны соотношением

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0. \tag{8.1}$$

В инерциальной системе движение описывается с помощью второго закона Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m\vec{a} = \vec{F}. \tag{8.2}$$

Подставив (8.1) в (8.2), получим

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0.$$

Заметим. Переход от инерциальной системы отсчета к неинерциальной системе отсчета, движущейся относительно инерциальной системы отсчета, поступательно и прямолинейно не приводит к изменению выражения для силы, т.е. $\vec{F} = \vec{F}'$. Действительно, если речь идет о взаимодействии двух тел, то сила, действующая на первое тело со стороны второго $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2,\, \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2,\, t\right)$, при переходе к неинерциальной системе отсчета не меняется $\vec{F}' = \vec{F}'\left(\vec{r}_1' - \vec{r}_2',\, \vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2',\, t'\right)$.

Введем понятие силы инерции

$$\vec{F}_{\text{ин.}} = -m\vec{a}_0 = -m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2}. \tag{8.3}$$

При движении тела в неинерциальной системе отсчета, движущейся относительно инерциальной системы отсчета поступательно и прямолинейно, *сила инерции равна произведению массы тела на ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета, взятому со знаком минус.*

Тогда уравнение движения тела в неинерциальной системе отсчета имеет вид

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F}' + \vec{F}_{\text{ин.}}. \qquad (8.4)$$

После введения силы инерции уравнение движения в неинерциальной системе отсчета формально совпадает с уравнением движения в инерциальной системе отсчета.

Таким образом, для описания движения тела в неинерциальной системе можно пользоваться основным уравнением движения для инерциальных систем отсчета, но с добавлением еще силы инерции.

Что такое силы инерции? Реальны они или нет?

По сравнению с гравитационными, электромагнитными, ядерными, слабыми силами силы инерции не связаны с взаимодействием тел. Напомним, что понятие силы было введено в механику как понятие, характеризующее меру взаимодействия тел. Силы инерции обусловлены не взаимодействием, а свойствами системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления. В этом смысле их можно назвать фиктивными силами.

К силам инерции нельзя применить третий закон Ньютона.

Силы инерции реальны. При рассмотрении физических явлений в неинерциальных системах отсчета можно указать конкретные физические последствия этих сил. Например, в вагоне поезда результат действия сил инерции может привести к увечьям пассажиров, т.е. к весьма реальному результату.

Хорошо известно увеличение веса космонавта, находящегося в ракете, взлетающей с поверхности Земли (рис.8.1). Вес тела – это сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес. На Земле вес тела

$$\vec{P} = m\vec{g}\,.$$

В ракете, взлетающей с поверхности Земли с ускорением $\vec{a}_0$, на тело наряду с силой тяжести действует сила инерции, направление которой совпадает с направлением силы тяжести, поэтому вес тела в ракете равен

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}_0 \quad \Rightarrow \quad P = m(g + a_0)\,. \qquad (8.5)$$

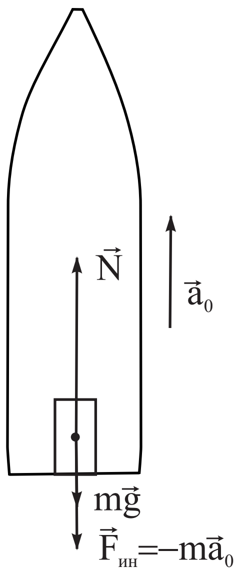

Рис. 8.1.

Обобщим понятие силы инерции. Вычтя из правой и левой частей уравнения (8.4) правую и левую части уравнения (8.2), получим

$$\vec{F}_{\text{ин.}} = m\left(\vec{a}' - \vec{a}\right). \qquad (8.6)$$

Из (8.6) следует, что *сила инерции – это физическая величина, численно равная произведению массы на разность ускорений тела в неинерциальной и инерциальной системах отсчета*. Такое определение силы инерции можно распространить на любую неинерциальную систему отсчета.

8.2. Неинерциальные системы, совершающие вращательное движение относительно инерциальных систем.

Рассмотрим движение материальной точки в неинерциальной системе отсчета, которая не движется поступательно, а вращается с угловой скоростью (частотой) ω относительно некоторой оси (рис.8.2).

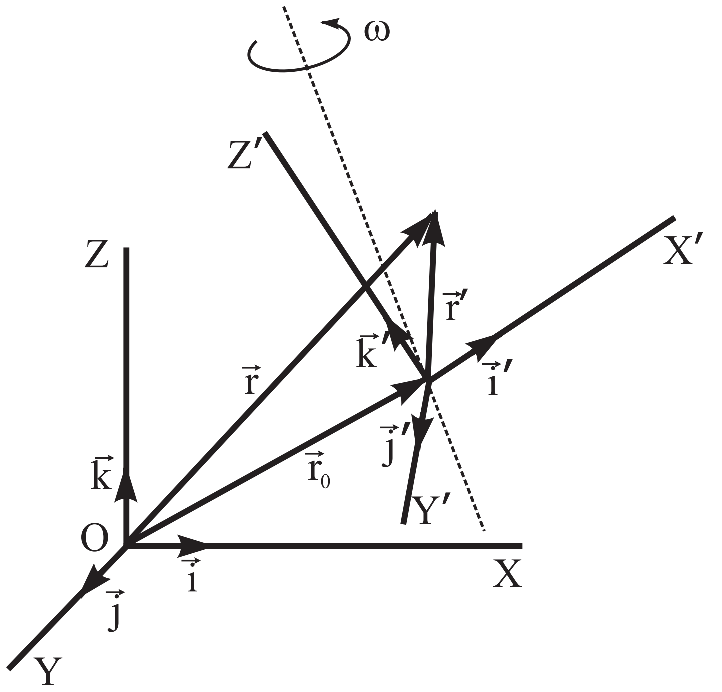

Рис. 8.2.

Используя декартовые координаты, связь между радиус-векторами в инерциальной и неинерциальной системах отсчета представим в виде

$$\vec{i}x(t)+\vec{j}y(t)+\vec{k}z(t)=\vec{i}'(t)x'(t)+\vec{j}'(t)y'(t)+\vec{k}'(t)z'(t)+\vec{i}x_0+\vec{j}y_0+\vec{k}z_0. \quad (8.7)$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ - единичные вектора в инерциальной и неинерциальной системах отсчета соответственно.

Найдем, как связаны скорости материальной точки в инерциальной и неинерциальной системах отсчета

$$\vec{\upsilon}=\vec{i}\,\frac{dx}{dt}+\vec{j}\,\frac{dy}{dt}+\vec{k}\,\frac{dz}{dt}=\left(\vec{i}'\frac{dx'}{dt}+\vec{j}'\frac{dy'}{dt}+\vec{k}'\frac{dz'}{dt}\right)+\left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}'+\left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right). \quad (8.8)$$

Вспомним, что такое $\frac{d\vec{i}'}{dt}$. Рассматривая движение тела по окружности, показали, что $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\upsilon}=[\vec{\omega}\vec{r}\,]$. При вращении материальной точки ради-

Или

ус-вектор $\vec{r}$ меняется по направлению, но не меняется по величине. Тогда аналогично можно записать

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{i}'}{dt} = \left[\vec{\omega}\vec{i}'\right], \\ \dfrac{d\vec{j}'}{dt} = \left[\vec{\omega}\,\vec{j}'\right], \\ \dfrac{d\vec{k}'}{dt} = \left[\vec{\omega}\vec{k}'\right]. \end{cases} \tag{8.9}$$

Используя (8.9), получим

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \left[\vec{\omega}, x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right] = \left[\vec{\omega}\ \vec{r}'\right]. \tag{8.10}$$

Подставив (8.10) в (8.8), получим соотношение, связывающее скорости в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, в виде

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \left[\vec{\omega}\,\vec{r}'\right]. \tag{8.11}$$

Найдем связь между ускорениями материальной точки в инерциальной и неинерциальной системах отсчета. Для этого возьмем производную от правой и левой частей уравнения (8.11)

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\left(\vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\frac{dz'}{dt}\right) + \left[\vec{\omega}, \vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z'\right]\right\} = \\ &\left(\vec{i}'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}'\frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k}'\frac{d^2z'}{dt^2}\right) + \left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\frac{dx'}{dt} + \frac{d\vec{j}'}{dt}\frac{dy'}{dt} + \frac{d\vec{k}'}{dt}\frac{dz'}{dt}\right) + \\ &\left[\frac{d\omega}{dt}, \vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z'\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{i}'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}'\frac{dz'}{dt}\right] + \\ &\left[\vec{\omega}, x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{i}'}{dt}\right]. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Рассмотрим слагаемые, входящие в правую часть выражения (8.12):

1) $\dfrac{d\vec{i}'}{dt}\dfrac{dx'}{dt} + \dfrac{d\vec{j}'}{dt}\dfrac{dy'}{dt} + \dfrac{d\vec{k}'}{dt}\dfrac{dz'}{dt} = \left[\vec{\omega}\,\vec{i}'\right]\dfrac{dx'}{dt} + \left[\vec{\omega}\,\vec{j}'\right]\dfrac{dy'}{dt} + \left[\vec{\omega}\,\vec{k}'\right]\dfrac{dz'}{dt} = \left[\vec{\omega}\,\vec{\upsilon}'\right]$,

2) $\left[\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z'\right] = \left[\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}'\right]$,

3) $\left[\vec{\omega}, \vec{i}'\dfrac{dx'}{dt} + \vec{j}'\dfrac{dy'}{dt} + \vec{k}'\dfrac{dz'}{dt}\right] = \left[\vec{\omega}\,\vec{\upsilon}'\right]$,

4) $\left[\vec{\omega}, x'\dfrac{d\vec{i}'}{dt} + y'\dfrac{d\vec{j}'}{dt} + z'\dfrac{d\vec{k}'}{dt}\right] = \left[\vec{\omega}, x'\left[\vec{\omega}\,\vec{i}'\right] + y'\left[\vec{\omega}\,\vec{j}'\right] + z'\left[\vec{\omega}\,\vec{k}'\right]\right] = \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\,\vec{r}'\right]\right]$.

Тогда выражение (8.12) примет вид

$$\vec{a} = \vec{a}' + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\ \vec{r}'\right] + 2\left[\vec{\omega}\ \ \vec{\upsilon}'\right] + \left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\ \ \vec{r}'\right]\right]. \qquad (8.13)$$

Из определения силы инерции (8.6) следует, что на материальную точку во вращающейся неинерциальной системе отсчета будут дополнительно действовать еще три силы.

1. $\vec{F}_{\text{ин.1}} = -m\left[\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}'\right]$. Наличие этой силы обусловлено неравномерностью вращения неинерциальной системы отсчета, т.е. $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Если неинерциальная система отсчета вращается с постоянной частотой, то $\vec{F}_{\text{ин.1}} = 0$.

2. $\vec{F}_{\text{ин.2}} = -m\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\,\vec{r}'\right]\right]$. Вспомним, что $\left[\vec{\omega}\,\vec{r}'\right] = \left[\vec{\omega}\,\vec{R}\right]$. Здесь $\vec{R}$ - проекция радиус-вектора $\vec{r}'$ на плоскость вращения (см.1.20). Тогда

$$\vec{F}_{\text{ин.2}} = -m\left[\vec{\omega}\left[\vec{\omega}\,\vec{R}\right]\right] = -\left[\vec{\omega}\left(\vec{\omega}\,\vec{R}\right) - \vec{R}\left(\vec{\omega}\,\vec{\omega}\right)\right]m = m\omega^2\vec{R}. \qquad (8.14)$$

Силу $\vec{F}_{\text{ин.2}}$ называют центробежной силой инерции. Наличие этой силы демонстрирует простой опыт (рис.8.3). Имеем диск. От центра диска к его краю по радиусу выбита канавка, в которой лежит шарик. Шарик пружиной связан с центром диска. Если рассмотрим положение шарика в случае $\vec{\omega} = 0$ и $\vec{\omega} \neq 0$, то оказывается, что $R_1 < R_2$. Сила натяжения пружины равна $m\omega^2 R$.

3. $\vec{F}_{\text{ин.3}} = -2m\left[\vec{\omega}\,\vec{\upsilon}'\right]$. В механике эта сила инерции получила название силы Кориолиса. Сила Кориолиса проявляется лишь, если тело движется относительно неинерциальной системы отсчета. Если $\upsilon' = 0$, то $\vec{F}_{\text{ин.3}} = 0$. Появление кориолисовой силы можно обнаружить на следующем примере (рис.8.4). Возьмем диск, который может вращаться вокруг вертикальной оси. Прочертим на нем радиальную прямую. Запустим в направлении от центра диска (точка *O*) к краю (точка *A*) шарик со скоростью $\vec{\upsilon}'$. Если диск не вращается, шарик будет катиться по радиальной прямой OA. Если диск

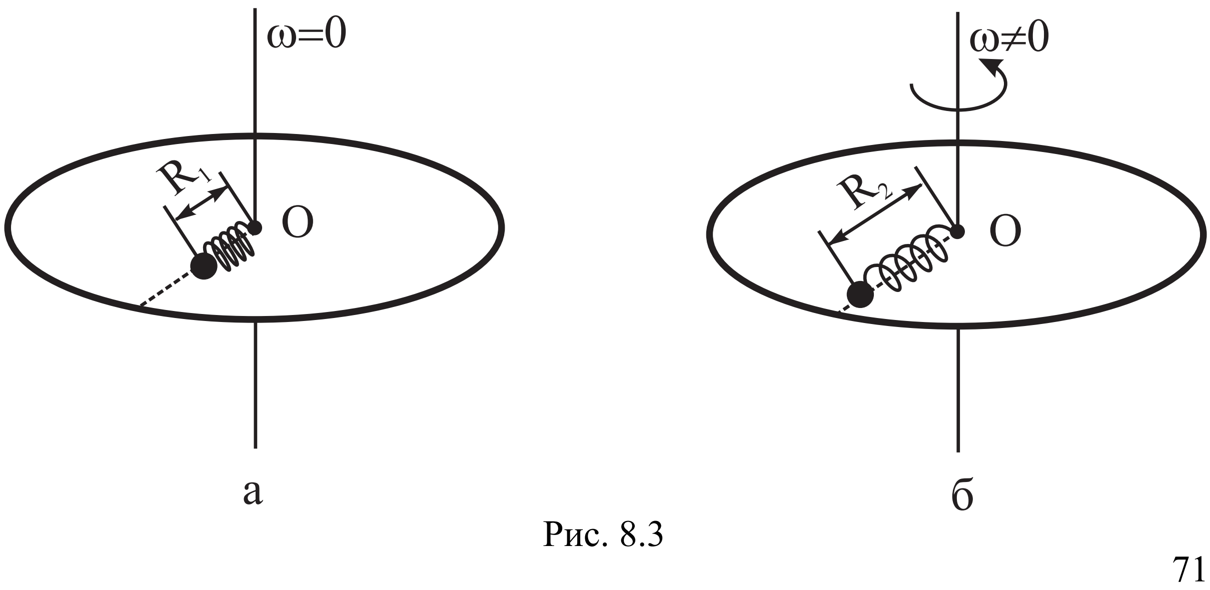

Рис. 8.3

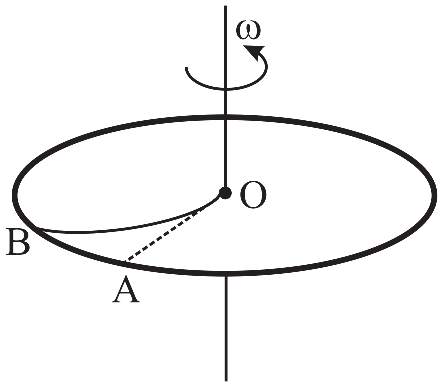

Рис. 8.4

привести во вращение, то шарик будет катиться по изображенной кривой OB. Т.е. по отношению к вращающейся системе отсчета шарик ведет себя так, как если бы на него действовала сила, перпендикулярная скорости $\vec{\upsilon}'$.

Тема 9
Колебательные движения материальной точки. Свободные гармонические колебания: движение шарика под действием упругой силы, математический маятник, затухающие колебания. Вынужденные колебания материальной точки

Периодическое явление (процесс) – это явление (процесс), при котором изменение какой-то величины, например, f повторяется в том же самом виде через совершенно определенное время – период (T):

$$f\left(t\right)=f\left(t+T\right).$$

Часто в повседневной жизни мы встречаем непериодические явления, которые похожи на периодические явления: движение шарика под действием упругой силы, движение незакрепленного конца линейки и т.д. Эти явления не будут периодическими. Физические величины, описывающие движение будут постепенно убывать по величине.

Такие явления называют общим термином – колебания, а периодические колебания представляют частный случай колебаний вообще.

Колебательными движениями (колебаниями) называются такие виды движения, которые обладают той или иной степенью повторяемости.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему внешних тел различают свободные или собственные колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными или собственными называются колебания, которые происходят в системе, которую вывели из состояния равновесия, а затем предоставили самой себе.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания как и вынужденные колебания сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием.

При *параметрическом* колебании за счет внешних сил происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы. Например, длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Простейшим колебанием является *гармоническое колебание, т.е. колебание, при котором физическая величина, описывающая это колебание, изменяется со временем по закону синуса или косинуса*

$$f(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

В дальнейшем более подробно остановимся на свободных и вынужденных колебаниях.

9.1. Свободные гармонические колебания

9.1.1. Движение шарика под действием упругой силы

Пусть имеется материальная точка, на которую действует сила

$$\vec{F} = -k\vec{r}.$$

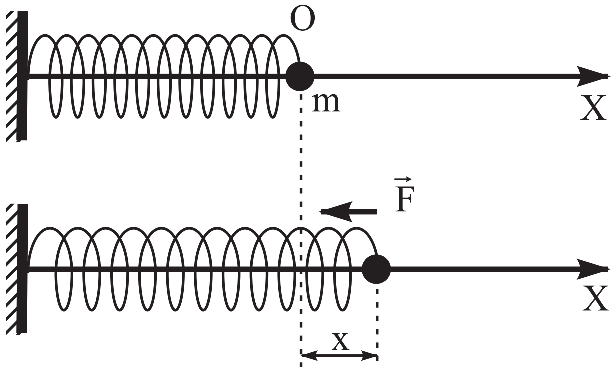

Рис. 9.1.

Например, рассмотрим шарик, соединенный пружиной со стенкой (рис.9.1). Начало системы координат расположим в точке равновесия. При отклонении шарика из положения равновесия на него действует упругая сила, стремящаяся возвратить шарик в положение равновесия. Если направить ось координат X вдоль направления движения шарика, то упругая сила есть

$$\vec{F} = -k\vec{x}.$$

С учетом выражения для силы основное уравнение движения примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{9.1}$$

Величина $\frac{k}{m}$ – является положительная величина, поэтому ее можем обозначить, как $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Параметр ω_0 назовем собственной частотой. Тогда уравнение, описывающее движение материальной точки, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \tag{9.2}$$

Решением такого уравнения является функция

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{9.3}$$

где A и φ_0 – некие произвольные параметры, которые определяются из начальных условий, т.е. из знания $x(t=0)$ и $\upsilon(t=0)$.

Величина A называется амплитудой колебания. Амплитуда – это наибольшее отклонение тела (материальной точки) от положения равновесия.

Величина $\omega_0 t + \varphi_0$ называется фазой колебания. В момент времени $t = 0$ фаза колебания равна φ_0, поэтому эту величину называют начальной фазой.

Для доказательства, что функция (9.3) является решением уравнения (9.2) найдем вторую производную от координаты x

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \text{(скорость)}$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \text{(ускорение).} \qquad (9.4)$$

Подставив (9.4) и (9.3) в уравнение (9.2), получим

$$(-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)) + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \equiv 0. \qquad (9.5)$$

Из (9.5) следует, что функция (9.3) действительно является решением уравнения (9.2).

Найдем, как период колебаний связан с величиной ω_0. Из определения периодической функции следует

$$\cos\left[\omega_0\left(T + t\right) + \varphi\right] = \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right). \qquad (9.6)$$

Для выполнения (9.6) необходимо чтобы

$$\omega_0\left(t + T\right) = \omega_0 t + 2\pi.$$

Тогда период колебаний связан с собственной частотой следующим образом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (9.7)$$

Число колебаний в единицу времени называется частотой

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Из связи периода с величиной ω_0 следует, что

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \text{ или } \omega_0 = 2\pi\nu,$$

т.е. величина ω_0 дает число колебаний за 2π секунд. Ее также называют круговой или циклической частотой.

Найдем амплитуду и начальную фазу колебаний. Пусть, например, начальные условия имеют вид

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0, \\ \upsilon(t=0) = 0. \end{cases} \qquad (9.8)$$

Используя (9.8), получим

$$\begin{cases} A\cos\varphi_0 = x_0, \\ -A\omega_0 \sin\varphi_0 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = x_0, \\ \varphi_0 = 0. \end{cases} \qquad (9.9)$$

С учетом (9.9) функция, описывающая колебательное движение, есть

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t.$$

Найдем, чему равна кинетическая и потенциальная энергии колеблющейся точки

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2} x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{k}{2} x_0^2 \sin^2(\omega_0 t), \qquad (9.10)$$

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} x_0^2 \cos^2(\omega_0 t). \qquad (9.11)$$

Полная энергия свободных гармонических колебаний есть

$$E = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t\right) + \frac{kx_0^2}{2}\sin^2\left(\omega_0 t\right) = \frac{kx_0^2}{2}. \qquad (9.12)$$

Изобразим графически, как со временем происходит изменение потенциальной и кинетической энергий (рис.9.2). Максимум потенциальной энергии соответствует минимуму кинетической и наоборот.

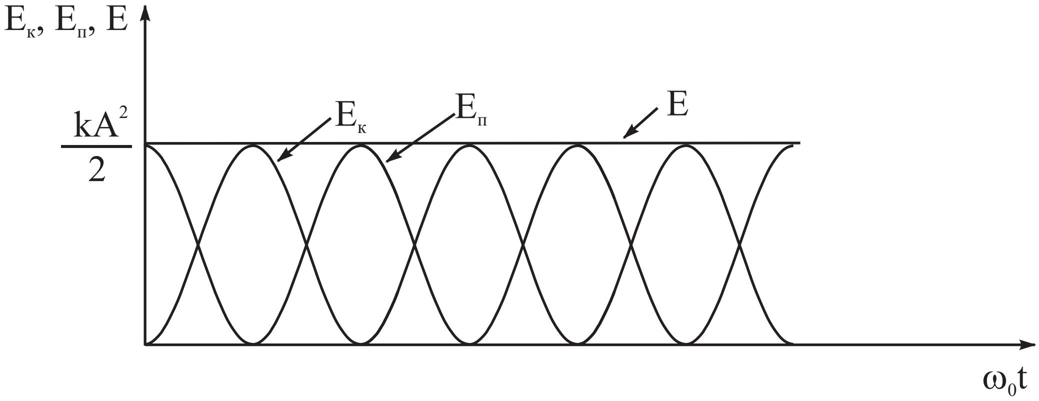

Рис. 9.2.

В качестве примера собственного гармонического колебания мы рассмотрели движение материальной точки под действием упругой силы. Рассмотрим еще один пример колебаний подобного типа, широко распространенный в практике, – колебание математического маятника.

9.1.2. Математический маятник

Математическим маятником называют систему, состоящую из материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити. Рассмотрим, как будет происходить движение математического маятника, после того как мы, отклонив его от положения равновесия, отпустим (рис.9.3). Начало системы координат расположим в точке подвеса математического маятника (*O*). Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом φ, образованным нитью с вертикалью. Для нахождения временной зависимости угла φ воспользуемся уравнением для моментов

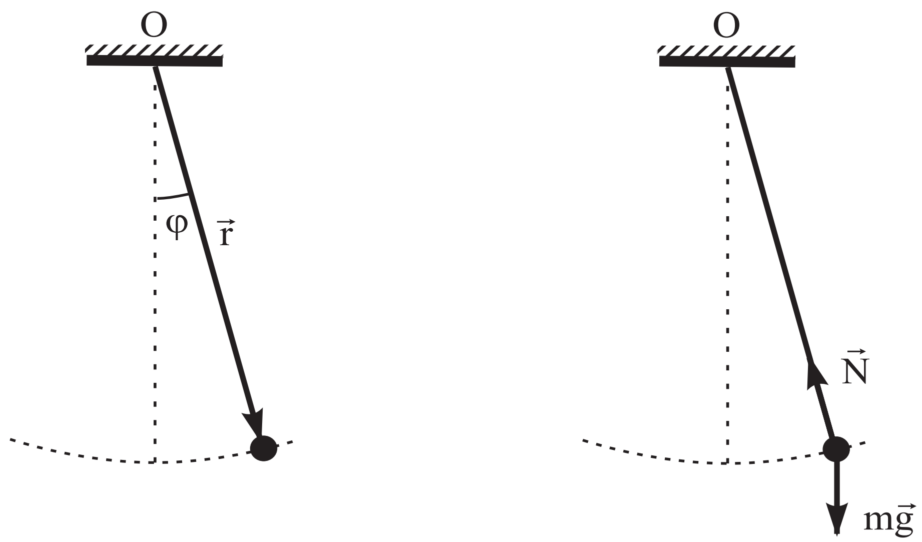

Рис. 9.3.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\,. \qquad (9.13)$$

Здесь $\vec{M}$ – результирующий момент всех сил, действующих на материальную точку. На материальную точку действует сила тяжести и сила натяжения нити. Тогда результирующий момент сил есть

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\ m\vec{g}\right] + \left[\vec{r}\ \vec{N}\right]. \qquad (9.14)$$

Вектора $\vec{r}$ и $\vec{N}$ антипараллельны, поэтому $\left[\vec{r}\vec{N}\right] = 0$. Модуль момента силы тяжести равен

$$\left|\vec{M}\right| = lmg\sin\varphi\,. \qquad (9.15)$$

Здесь $l = \left|\vec{r}\right|$ – длина нити.

При движение по окружности момент импульса можно записать в виде

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\vec{p}\right] = m\left[\vec{r}\vec{\upsilon}\right] = m\left[\vec{r}\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right] = m\{\vec{\omega}(\vec{r}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega})\}\,.$$

Вектора $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$ взаимно ортогональны, поэтому скалярное произведение $\left(\vec{r}\vec{\omega}\right) = 0$. Таким образом

$$\vec{L} = ml^2\vec{\omega}\,. \qquad (9.16)$$

С учетом (9.14) и (9.16) уравнение (9.13) примет вид

$$ml^2\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left[\vec{r}\quad m\vec{g}\right]. \qquad (9.17)$$

Найдем проекцию уравнения (9.17) на ось вращения

$$ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\,. \qquad (9.18)$$

Знак минус в правой части выражения (9.18) объясняется следующим образом. С ростом угла φ движение замедляется, т.е. угловое ускорение

$\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ уменьшается. Это может быть только в том случае, если в правой части (9.18) стоит слагаемое со знаком минус.

Ограничимся рассмотрением малых колебаний, т.е. колебаний, для которых $\sin\varphi \approx \varphi$. Введем обозначение $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, тогда уравнение (9.18) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0\,. \tag{9.19}$$

Формально уравнения (9.19) и (9.2) совпадают при замене φ на x. Решением уравнения (9.19) является функция

$$\varphi(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Таким образом, мы показали, что при малых отклонениях от положения равновесия угловое отклонение математического маятника изменяется по гармоническому закону с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{9.20}$$

9.1.3. Затухающие колебания

Вновь рассмотрим систему, состоящую из шарика, который с помощью пружины прикреплен к стенке. В общем случае на шарик, выведенный из положения равновесия, наряду с упругой силой будет действовать сила трения. Шарик движется в воздухе, который препятствует этому движению. Сила трения связана со скоростью движения шарика выражением

$$\vec{F}_{тр} = -a\vec{\upsilon} = -a\frac{d\vec{x}}{dt}, \qquad a > 0. \tag{9.21}$$

С учетом (9.21) основное уравнение движения примет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt}\,. \tag{9.22}$$

Обозначим $\frac{a}{m} = 2\gamma$. Тогда уравнение (9.22) можно переписать следующим образом

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{9.23}$$

Непосредственной подстановкой можно показать, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{9.24}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Величины A и φ_0, как и при рассмотрении незатухающих колебаний, определяются из начальных условий. Записанное решение получено при условии $\gamma^2 < \omega_0^2$.

Сравнивая затухающие колебания с незатухающими гармоническими, видим, что «период» колебаний увеличивается

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} > T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \qquad (9.25)$$

Изобразим зависимость от времени отклонения точки от положения равновесия при затухающем колебании (рис.9.4). Штриховой линией обозначены графики зависимости $\pm Ae^{-\gamma t}$. Из графиков видно, что с течением времени уменьшается отклонение точки от положения равновесия.

Величину γ, характеризующую вязкость среды, называют коэффици-

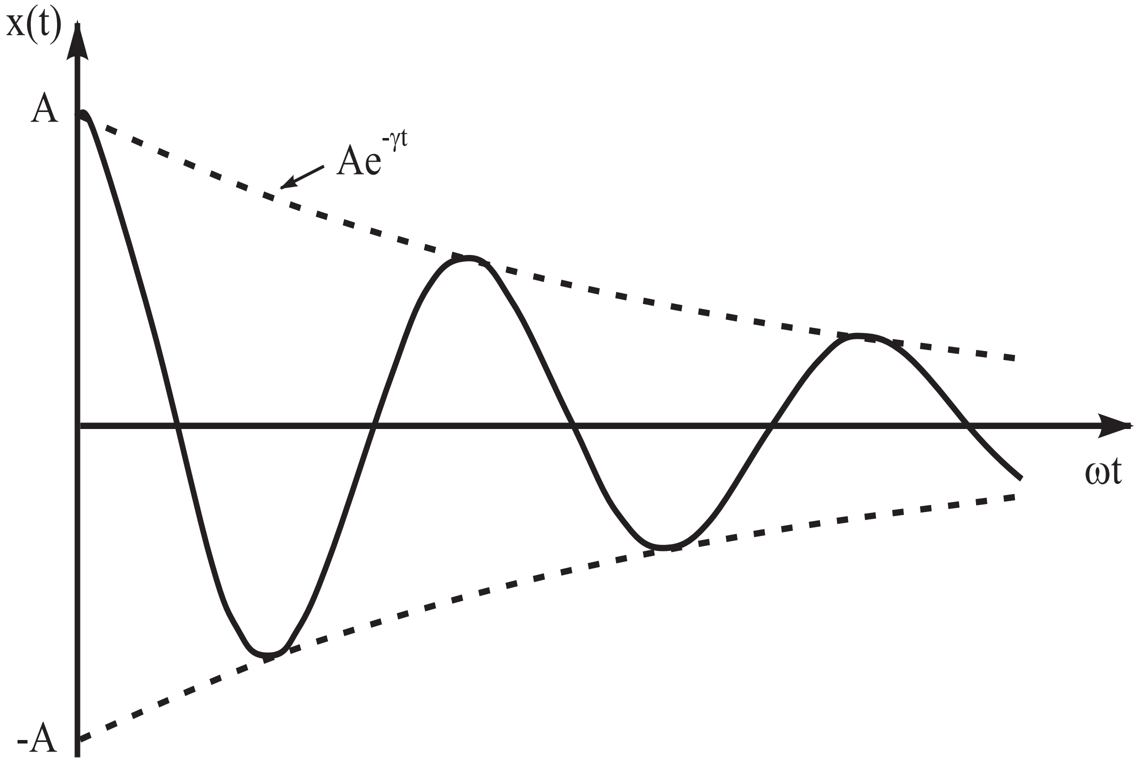

Рис. 9.4.

ентом затухания. Вместо γ для характеристики затухания удобно ввести другую величину.

Сравним отклонения точки от положения равновесия в моменты времени t и $t + T$

$$\frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)}{Ae^{-\gamma(t+T)}\cos(\omega(t+T) + \varphi_0)} = e^{\gamma T}. \qquad (9.26)$$

Взяв логарифм от правой и левой частей (9.26), получим

$$\ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \gamma T = \delta.$$

Величина δ называется *логарифмическим декрементом* затухания.

Сравним отклонение точки от положения равновесия в моменты времени t и $t+NT$, где N – целое число. Тогда

$$\frac{x(t)}{x(t+NT)} = e^{\gamma TN} = e^{\delta N}. \tag{9.27}$$

Приравняем показатель экспоненты единице

$$\delta N_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{1}{\delta}. \tag{9.28}$$

При числе периодов $N_0 = \frac{1}{\delta}$ отклонение точки от положения равновесия в момент времени t отличается от отклонения в момент времени $t+N_0T$ в e раз. Таким образом, физический смысл логарифмического декремента затухания состоит в том, что его обратная величина показывает через сколько периодов отклонение точки от положения равновесия будет отличаться в e раз.

Что можно сказать об энергии колеблющейся точки?

Из второго закона Ньютона следует, что

$$dE_{\text{к}} = (\vec{F}d\vec{r}) + (\vec{F}_{\text{тр}}d\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad dE_{\text{к}} = -dE_{\text{п}} + (\vec{F}_{\text{тр}}d\vec{r}) \quad \Rightarrow$$
$$d(E_{\text{к}} + E_{\text{п}}) = (\vec{F}_{\text{тр}}d\vec{r}). \tag{9.29}$$

Сила трения не является потенциальной силой, поэтому колебания материальной точки будут происходить с изменением полной ее энергии. Причем поскольку работа сил трения $\delta A_{\text{тр.}} < 0$, то движение материальной точки происходит с уменьшением ее полной энергии.

$$\left[E_{\text{к}}(t_2) + E_{\text{п}}(t_2)\right] - \left[E_{\text{к}}(t_1) + E_{\text{п}}(t_1)\right] < 0, \qquad t_2 > t_1. \tag{9.30}$$

9.2. Вынужденные колебания материальной точки

Вновь рассмотрим шарик, соединенный через пружину со стенкой. Пусть на шарик наряду с силами упругости и трения действует вынуждающая сила, изменяющаяся во времени по гармоническому закону

$$\vec{F}_{в} = \vec{F}_0 \sin\omega t.$$

Здесь ω – частота вынуждающей силы.

Используя второй закон Ньютона, запишем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - a\frac{dx}{dt} + F_0 \sin\omega t, \tag{9.31}$$

При записи (11.31), предполагаем, что сила $\vec{F}_{в}$ направлена вдоль оси x. Введем обозначение $\frac{F_0}{m} = f_0$. Тогда уравнение (9.31) перепишется следующим образом

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin\omega t. \tag{9.32}$$

Опыт говорит, что колебание будет происходить с частотой вынуждающей силы, поэтому решение уравнения будем искать в виде

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha). \tag{9.33}$$

В отличие от свободных колебаний величина амплитуды A и начальной фазы α при вынужденных колебаниях определяется не из начальных условий, а зависит от амплитуды и фазы вынуждающей силы. Подставив выражения для скорости $\frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$ и ускорения $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$ колеблющейся точки в уравнение (9.32), получим

$$-A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) + 2\gamma A\omega\cos(\omega t + \alpha) + \omega_0^2 A\sin(\omega t + \alpha) = f_0\sin\omega t.$$

Или

$$\begin{gathered}(\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha)\left[A\omega_0^2 - A\omega^2\right] + \\ 2\gamma A\omega(\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha) = f_0\sin\omega t.\end{gathered} \tag{9.34}$$

В (9.34) сгруппируем слагаемые с множителями $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$

$$\begin{gathered}A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\alpha + 2\gamma\omega\cos\alpha\right]\cos\omega t + \\ \left\{A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\alpha - 2\gamma\omega\sin\alpha\right] - f_0\right\}\sin\omega t = 0.\end{gathered} \tag{9.35}$$

Мы получили уравнение вида

$$c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t = 0, \tag{9.36}$$

где $c_1 = A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\alpha + 2\gamma\omega\cos\alpha\right]$, $c_2 = A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\alpha - 2\gamma\omega\sin\alpha\right] - f_0$.

Для того чтобы такое уравнение выполнялось для любого момента времени, необходимо, чтобы

$$c_1 = 0,$$
$$c_2 = 0.$$

Таким образом, уравнение (9.36) распадается на систему двух связанных уравнений вида

$$\begin{cases} A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\alpha + 2\gamma\omega\cos\alpha\right] = 0, \\ A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\alpha - 2\gamma\omega\sin\alpha\right] = f_0. \end{cases} \tag{9.37}$$

Из первого уравнения найдем

$$tg\alpha = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{9.38}$$

Для нахождения амплитуды A возведем оба уравнения системы (9.37) в квадрат

$$+\begin{array}{l}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 A^2\sin^2\alpha+2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A^2\sin\alpha\cdot 2\gamma\omega\cos\alpha+4\gamma^2\omega^2A^2\cos^2\alpha=0\ ,\\ \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 A^2\cos^2\alpha-2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A^2\cos\alpha\cdot 2\gamma\omega\sin\alpha+4\gamma^2\omega^2A^2\sin^2\alpha=f_0^2\ .\end{array}$$

Сложив их, получим

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 A^2+4\gamma^2\omega^2A^2=f_0^2 \qquad \Rightarrow$$

$$A=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\ . \tag{9.39}$$

С учетом (9.38) и (9.39) выражение, описывающее изменение во времени положения материальной точки при действии на нее вынуждающей силы, есть

$$x(t)=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2}}\sin\left(\omega t-arctg\left[\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]\right). \tag{9.40}$$

Амплитуда колеблющейся точки зависит от амплитуды вынуждающей силы, от частоты собственных колебаний без учета силы трения ω_0, вязкости среды γ и частоты вынуждающей силы. На рис.9.5 приведен характерный график зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы. Из графика видно, что при определенной для данной системы частоте вынуждающей силы амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебания с максимальной амплитудой называются резонансными, а само явление «раскачки» колебаний до максимальной амплитуды называется резонансом.

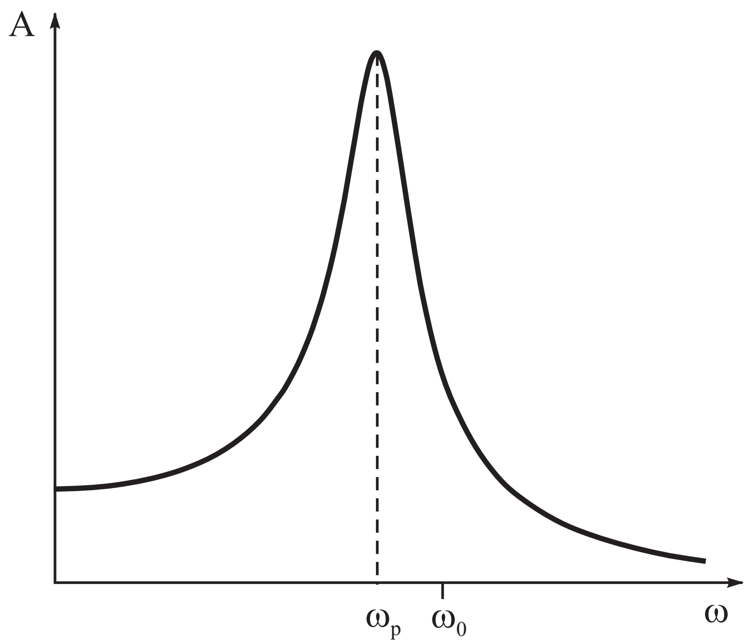

Рис. 9.5.

Максимальное значение амплитуда будет иметь, когда знаменатель выражения $A(\omega)$ имеет минимальное значение.

Введем функцию

$$g(\omega)=\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\ .$$

Найдем частоту (ω_p), при которой эта функции принимает минимальное значение

$$\frac{dg}{d\omega}=0 \quad \Rightarrow \qquad \omega_p\left[\left(\omega_0^2-\omega_p^2\right)-2\gamma^2\right]=0 \qquad \Rightarrow$$
$$\omega_p=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}. \tag{9.41}$$

Резонансное значение амплитуды будет

$$A_p=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_p^2-\omega_0^2\right)^2+4\gamma^2\omega_p^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^4+4\gamma^2\left(\omega_0^2-2\gamma^2\right)}}=\frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}. \tag{9.42}$$

Видим, что как резонансная частота, так и резонансная амплитуда сильно зависят от величины силы трения (параметра γ). С уменьшением силы трения происходит сдвиг резонансной частоты к собственной частоте.

В науке и технике явление резонанса играет как положительную, так и отрицательную роль. Оно очень полезно в акустике, радиотехнике. В механике, как правило, стремятся при конструировании механических изделий исключить возможность наступления резонанса.

Рассмотрим, что происходит с энергией при вынужденных колебаниях материальной точки. Вновь исходим из уравнения для энергии

$$d(E_{\text{к}}+E_{\text{п}})=\delta A_{\text{тр}}+\delta A_{\text{в}}. \tag{9.43}$$

Здесь $\delta A_{\text{в}}$ – элементарная работа вынуждающей силы.

Найдем сумму кинетической и потенциальной энергий упругой силы

$$E=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}A^2\omega^2\cos^2\left(\omega t+\alpha\right)+\frac{k}{2}A^2\sin^2(\omega t+\alpha). \tag{9.44}$$

Прежде всего, из выражения (9.44) следует, что полная энергия зависит от времени. Если рассмотреть временной интервал от t до $t+T$, то в этом промежутке происходит изменение E во времени. Однако,

$$E\left(t\right)=E\left(t+T\right),$$

т.е.

$$\int\limits_t^{t+T}\left(\delta A_{тр.}+\delta A_{в.}\right)=0.$$

Таким образом, уменьшение энергии колеблющейся системы за счет работы сил трения за период компенсируется возрастанием энергии за счет работы вынуждающей силы.

Приложение
Законы Кеплера

Первый закон Кеплера. Каждая планета движется по эллиптической орбите, причем Солнце располагается в одном из фокусов эллипса.

Второй закон Кеплера. Прямая, соединяющая Солнце с планетой, описывает равные площади за равные промежутки времени.

Третий закон Кеплера. Кубы больших полуосей любых двух планетарных орбит относятся друг к другу как квадраты периодов обращения этих орбит. Для круговых орбит

$$\frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \qquad (П.1)$$

Замечание. Эллипс есть геометрическое место точек (M), сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусы эллипса) имеет одно и то же значение (рис.П.1)

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

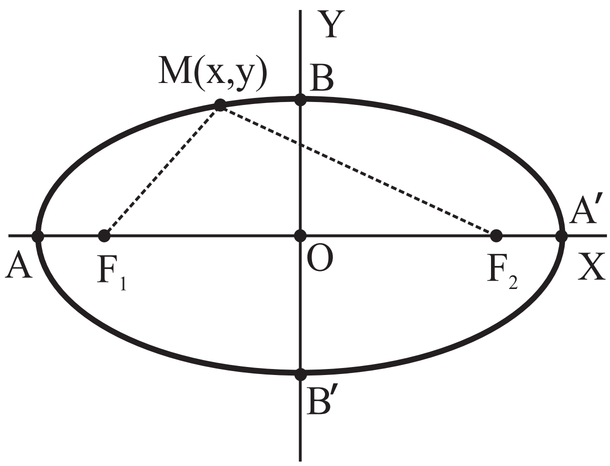

Рис.П.1

Отрезок $AA' = 2a$ - наибольшее расстояние между двумя точками эллипса – называется большой осью эллипса. Отрезок $BB' = 2b$ - наименьшее расстояние между двумя точками эллипса – называется малой осью эллипса.

Примем прямую F_1F_2 за ось абсцисс, а середину отрезка F_1F_2 точку O за начало системы координат. Пусть точка M имеет координаты x и y. Уравнение эллипса можно записать следующим образом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (П.2)$$

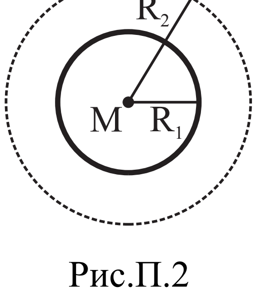

Рис.П.2

Окружность можно рассматривать как частный случай эллипса.

Используя законы Ньютона и выражение для гравитационной силы, получим законы Кеплера.

Начнем с третьего закона Кеплера.

Пусть есть две планеты, которые движутся вокруг Солнца по круговым орбитам с радиусами R_1 и R_2, периодами T_1 и T_2 (рис.П.2). Условию движения почти по круговым орбитам удовлетворяют все планеты Солнечной системы за исключением Плутона.

При движении тела по окружности центростремительное ускорение связано со скоростью движения и радиусом окружности выражением

$$a = \frac{\upsilon^2}{R}$$

Скорость можно представить как отношение пути, пройденным телом (длина окружности), к времени (период)

$$\upsilon = \frac{2\pi R}{T}. \qquad (П.3)$$

Тогда ускорение тела можно записать следующим образом

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \qquad (П.5)$$

Из второго закона Ньютона $ma = \gamma \frac{mM}{R^2}$ (m – масса планеты, М – масса Солнца) получим

$$M = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma T^2} \qquad (П.6)$$

Полученное выражение справедливо при рассмотрении движения любой планеты, т.е.

$$\frac{4\pi^2 R_1^3}{\gamma T_1^2} = \frac{4\pi^2 R_2^3}{\gamma T_2^2} \qquad (П.7)$$

Или

$$\frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \qquad (П.8)$$

Доказательство второго закона Кеплера вытекает из закона сохранения момента импульса.

Пусть начало системы координат совпадает с положением Солнца. Тогда из закона сохранения импульса следует (рис.П.3)

$$L = mr\upsilon \sin\varphi = const. \qquad (П.9)$$

Тогда

$$\frac{L}{2m} = \frac{1}{2} r\upsilon_\perp = const_1, \qquad (П.10)$$

где $\upsilon_\perp = \upsilon \sin\varphi$ - перпендикулярная радиус-вектору составляющая скорости.

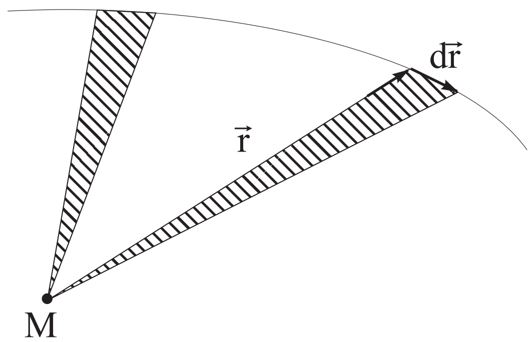

Рис.П.3

Распишем ее подробнее

$$\upsilon_\perp = \left| \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_\perp \right| = \frac{|d\vec{r}_\perp|}{dt}.$$

Подставив полученное выражение в выражение для момента импульса, получим

$$\frac{1}{2}r\left|d\vec{r}_{\perp}\right| = const_1 dt\,. \tag{П.11}$$

Левая часть полученного выражения есть площадь фигуры заметанной радиус- вектором за время dt. Таким образом, если промежутки времени равные, то и площади будут равны. Второй закон Кеплера доказан.

Доказательство первого закона Кеплера достаточно громоздко, поэтому останавливаться на его выводе не будем.

Содержание

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет В.И. Никонов

Подписано в печать 04.05.05
Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 5,5. Уч.-изд. л. 4,8. Тираж 100 экз. Заказ № 273
Издательство «Универс-групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1

Отпечатано ООО «Универс-групп»