

М. М. МИРОШНИКОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПТИКО- ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание третье,
исправленное и дополненное



ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2010

ББК 22.34я73

М 64

Мирошников М. М.

М 64 Теоретические основы оптико-электронных приборов: Учебное пособие. 3-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2010. — 704 с.: ил. (+ вклейка, 16 с.) — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1036-1

В учебном пособии последовательно изложены теоретические основы пассивных оптико-электронных приборов, т. е. приборов, воспринимающих либо собственное излучение объектов и фонов, либо отраженное ими излучение естественных источников. Основными разделами книги являются теория сканирования, теория растровой модуляции света, теория выделения оптического сигнала на фоне случайных помех. Рассмотрены вопросы восприятия и анализа изображений. Отдельный раздел посвящен тепловидению и иконике. Материалы книги основаны на собственных многолетних исследованиях автора в ГОИ им. С. И. Вавилова.

Учебное пособие предназначено для студентов технических вузов.

ББК 22.34я73

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

*Охраняется законом РФ об авторском праве.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
запрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.*

© Издательство «Лань», 2010
© М. М. Мирошников, 2010
© Издательство «Лань»,
художественное оформление, 2010

Предисловие к третьему изданию

В начале XXI века оптика, обогащенная новейшими достижениями электроники, является одним из главных звеньев информатики, определяющей научно-технический прогресс современного человечества. Это связано с рядом уникальных свойств оптического излучения — света (в широком смысле), включающего значительный (до 20 октав) диапазон электромагнитных волн, примыкающих к видимому свету — ультрафиолетовую и инфракрасную области спектра, т. е. диапазон от рентгеновских лучей до миллиметровых радиоволн.

Уникальные свойства оптического излучения связаны, прежде всего, с чрезвычайно малой длиной волны света, для измерения которой была даже введена особая единица — Ангстрем, равная 10^{-4} мкм (0,1 нм). Это определяет высокую точность измерений и технологических процессов, осуществляемых с помощью света. Современная нанотехнология электроники — элементной базы информатики — нуждается в применении оптических систем для формирования микроизображений и их контроля.

Наряду с возможностью обеспечить высокое разрешение, оптическое излучение характеризуется особыми свойствами носителя информации — фотона, который, в отличие от электрона (носителя информации в электрических цепях), является незаряженной частицей. Это позволяет, в частности, использовать новые технологии наноконструирования и нанодиагностики и создавать квантово-размерные структуры для реализации фотон-фотонных сверхбыстродействующих коммутаторов, имеющих фактор качества (отношение скорости переключения к рассеиваемой при этом энергии) в 10 миллионов раз выше, чем у лучших электронных коммутаторов.

Наконец, необходимо отметить, что оптические сигналы могут быть легко реализованы в форме изображений, обладающих рекордными информационными свойствами. В последние годы работы в области науки об изображениях приобрели большие масштабы и оформились в виде научного направления — иконики, составляющего существенный раздел информатики. Письменность, появившаяся после изображений, с помощью которых еще первобытный человек обменивался информацией, имеет свою теоретическую надстройку — лингвистику. Соответствующей надстройкой по отношению к изображениям является иконика. Она зародилась в ходе развития оптики и фотографии и решительно заявила о себе в наше время, когда стал обычным единый подход к различным процессам с выделением в качестве объекта изучения общего для них существенного звена. В кибернетике, например, таким звеном является управление, а в иконике — изображение, понимаемое как форма передачи или хранения содержащейся в нём информации научного, технического и эстетического содержания. Принципиальным является то обстоятельство, что компьютеры открыли новую возможность виртуальной реконструкции

и реставрации изображений окружающего мира, обычно создаваемых реальными оптическими системами. Это направление получило название «компьютерной оптики».

Оптика — одна из древнейших наук — всегда была тесно связана с техникой. С другой стороны, две из наиболее фундаментальных теорий современной физики — квантовая механика и теория относительности — основывались на наблюдениях и анализе оптических явлений.

На протяжении многих лет своего развития оптика понималась как наука о зрительных восприятиях (от *греч.* ὀπτός — зримый, видимый, ὀπτική — наука о зрительных восприятиях), поскольку глаз был единственным приемником (обнаружителем) света.

Современная оптика понимается как раздел физики, в котором исследуются процессы излучения света, его распространения в различных средах и взаимодействия света с веществом.

Содержание современной оптики раскрывается шестью взаимосогласованными атрибутами:

- **волновая оптика** — наука, изучающая совокупность явлений, в которых проявляется волновая (электромагнитная) природа света (геометрическая оптика — частный случай при $\lambda \rightarrow 0$);

- **физика фотонов** — наука о корпускулярных (квантовых) свойствах света, его микроструктуре;

- **иконика** — наука об изображениях, их качестве и распознавании с учетом законов зрительного восприятия, методов выделения оптических сигналов на фоне помех, цифровой обработки оптической информации, возможностей компьютерной оптики, а также техники полной записи изображений — голографии;

- **оптотехника** — наука о приборах, основанных на волновой оптике;

- **фотоника** — наука о приборах, основанных на физике фотонов;

- **оптическое материаловедение** — наука о свойствах и технологиях создания оптических сред с заранее заданными свойствами.

Открытие лазеров превратило оптические приборы в средство активного воздействия на окружающий мир и передачи на расстояние значительной энергии.

Открытие фотоэффекта и усовершенствование фотоэлектрических приемников излучения привело оптотехнику и фотонику к созданию оптико-электронных приборов, не просто вооружающих глаз человека, а обеспечивающих существенное расширение его возможностей при регистрации слабых и невидимых потоков излучения, при создании автоматических приборов и автоматизации производства.

Наряду с инфракрасной областью спектра, где принципы создания оптико-электронных приборов были положены в основу разработки тепловизоров, головок самонаведения и тепловизоров, оптико-электронные приборы широко используются в видимой и

ультрафиолетовой областях спектра для решения задач астроориентации и астронавигации беспилотных самолетов, ракет и искусственных спутников Земли. Большое распространение оптико-электронные приборы получили при проведении контрольно-измерительных операций и спектральном анализе в промышленности, а также в научных и медико-биологических исследованиях.

Главным элементом оптико-электронного прибора является приемник излучения, преобразующий свет в электрический сигнал.

Приёмник излучения определяет наличие в оптико-электронном приборе двух взаимно дополняющих комплексов: реальной оптической системы (линзы, призмы, зеркала и т. п.), преобразующей яркость объектов и окружающих их фонов (источников оптического излучения) в освещенность первичного изображения, и виртуальной оптической системы («компьютерной оптики»), преобразующей выработанный приемником излучения и усиленный электрический сигнал в сигнал управления или в удобное для восприятия человеком представление информации, например в видимое оптическое изображение, улучшенное по качеству по сравнению с первичным, создаваемым реальной оптической системой, либо содержащее признаки, обеспечивающие высокую вероятность обнаружения или распознавания интересующих наблюдателя объектов на фоне случайных помех.

Главной целью настоящей книги является последовательное изложение теоретических основ пассивных оптико-электронных приборов, воспринимающих либо собственное излучение объектов и фонов, либо отраженное ими излучение естественных источников, например Солнца.

Предполагается, что физические основы оптико-электронных приборов (физическая оптика, источники и приемники излучения, распространение света), а также основы теории оптических систем (геометрическая и волновая оптика, теория изображения) уже известны читателю.

Основными разделами книги являются: сканирование, растровая модуляция излучения, выделение оптического сигнала на фоне помех.

В части VI книги в качестве примеров практического применения оптико-электронных приборов рассмотрены относительно новые направления — **тепловидение** и **иконика**.

Изложением теории восприятия и анализа изображений дополнены также и разделы книги, существовавшие в первых ее изданиях. В некоторых случаях внесены изменения и дополнения, имеющие методический и редакционный характер.

Со времени первых изданий учебного пособия «Теория оптико-электронных приборов» прошло более 25 лет (первое издание вышло в 1977 г., второе — в 1983 г.). Жизнь подтвердила прогнозы о перспективах широкого использования оптико-электронных приборов в науке, обороне и народном хозяйстве страны. Существенное развитие получили схемы и

конструкции приборов. Особенно это было связано с совершенствованием приемников излучения: в большинстве современных приборов используются фотоприемные устройства (ФПУ) с двумерными фотоматрицами гибридного и монокристаллического исполнения.

Наличие таких фотоматриц позволяет во многих случаях отказаться от оптико-механического сканирования и растровой модуляции излучения.

Существенно усовершенствованы методы расчета и конструирования систем выделения оптического сигнала на фоне помех, методы анализа и обработки изображений, распознавание образов и т. д.

К сожалению, в нашей стране очень мало издается книг, посвященных оптико-электронному приборостроению, что делает актуальным новое издание учебного пособия «Теория оптико-электронных приборов», позволяющего без каких-либо дополнений и изменений дать возможность не только понять историю создания и принципы работы ранее разработанной аппаратуры и глубже изучить новые разработки, но и применить последовательно излагаемые в настоящей книге теоретические основы оптико-электронных приборов в практике повседневной работы.

В «Списке литературы» под номерами после № 167 приведен «Дополнительный список литературы», содержащий ссылки на статьи и книги, излагающие последние достижения оптико-электронного приборостроения.

Автор выражает глубокую благодарность Издательству «Лань» и кафедре «Оптико-электронных приборов и систем» СПбГУ ИТМО (зав. кафедрой проф. В. В. Коротаев) за инициативу и помощь в подготовке этого издания.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИНЦИПЫ РАБОТЫ, ЭЛЕМЕНТЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Любые окружающие нас тела являются источниками оптического излучения. В оптических сигналах содержится информация о размерах, форме, положении и энергетическом состоянии тел. Эта информация может использоваться различным образом, однако во всех случаях в процессе ее использования происходит преобразование оптического излучения в другие виды энергии.

Оптико-электронными называют приборы, с помощью которых сведения о размерах, форме, положении и энергетическом состоянии тела, содержащиеся в потоке излучения, извлекаются путем его специальной обработки и преобразования в электрический сигнал, который также обрабатывается с целью выделения из шумов и последующей регистрации.

Информация об излучающем теле после преобразования содержится в параметрах электрического сигнала: амплитуде, частоте, фазе, длительности импульса и др., которые и регистрируются в приборе.

В зависимости от решаемой задачи некоторые тела являются объектами наблюдения (целями), а некоторые — фонами, причем одно и то же тело может быть иногда объектом, а иногда — фоном. Так, звезды являются объектами наблюдения при астроориентации и элементами фона при наблюдении за искусственными спутниками Земли. Своеобразным фоном являются организованные помехи.

Объект наблюдения и окружающий его фон образуют поле излучения, характеристики которого изменяются в пространстве и во времени. Наличие изменяющегося фона является первой причиной, препятствующей наблюдению. Вторая причина состоит в том, что, несмотря на принципиальную возможность усиления сколь угодно малых электрических сигналов, практически все же оказывается невозможным различить сравнительно слабые сигналы из-за хаотических флуктуаций или шумов.

Оптико-электронные приборы могут классифицироваться по следующим признакам: области спектра, способу использования информации, решаемой задаче, типу источника облучения, ширине полосы длин волн, в которой прибор обладает заданной чувствительностью, и т. д.

В зависимости от используемой области спектра оптико-электронные приборы подразделяются на приборы, работающие в ультрафиолетовой (1—380 нм), видимой (380—780 нм) и инфракрасной областях спектра (780 нм — 1 мм).

Способ использования информации определяет, является ли оптико-электронный прибор автоматическим (работающим по программе и самонастраивающимся), т. е. принимающим решение без участия человека, или индикационным, обеспечивающим выдачу информации в виде, пригодном для принятия решения человеком.

Исходя из решаемой задачи, оптико-электронные приборы делятся на пеленгационные, определяющие положение цели (в том числе и автоматические пеленгаторы — головки самонаведения), дальномерные, определяющие дальность до цели (в том числе и неконтактные оптические взрыватели), и телевизионные, определяющие форму

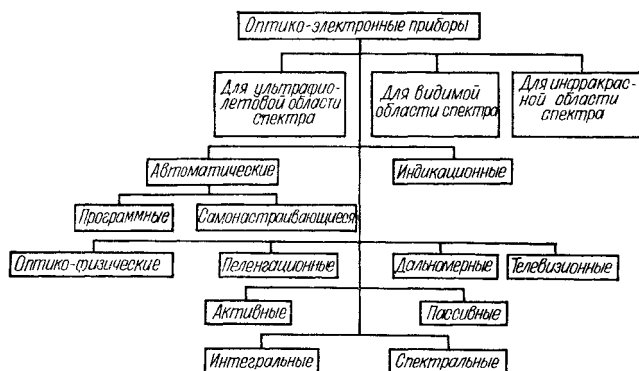


Рис. 1. Классификация оптико-электронных приборов

предмета (в том числе и тепловизионные, работающие в инфракрасной области спектра). Кроме того, большой класс приборов, предназначенных для определения фотометрических характеристик излучения, оптических свойств тел и сред, поляризации излучения и т. д., можно назвать оптико-физическими.

Используемый источник облучения цели определяет, к какому из двух больших классов относится оптико-электронный прибор: пассивным, воспринимающим либо собственное излучение объектов и фонов, либо отраженное ими излучение естественных источников, например Солнца, или активным, в которых для облучения цели используется искусственный источник, часть излучения которого отражается целью обратно по направлению к прибору и воспринимается им.

Ширина полосы длин волн, где прибор обладает заданной чувствительностью, позволяет подразделить оптико-электронные приборы на спектральные (спектрометры) и интегральные (радиометры).

Классификация оптико-электронных приборов по различным признакам приведена на рис. 1.

§ 2. ОБОБЩЕННАЯ СХЕМА ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА

На рис. 2 приведена обобщенная схема оптико-электронного прибора. Схема содержит лишь основные элементы, оказывающие существенное влияние на работу прибора.

Оптическое излучение объекта наблюдения (цели) и фона, в том числе и организованной помехи, проходит через промежуточную среду (атмосфера или другая среда, ослабляющая излучение) и улавливается оптической системой прибора, направляющей его на приемник излучения. Последний вырабатывает электрический сигнал, который усиливается и преобразуется желаемым образом в зависимости от назначения прибора.

Одной из главных задач, решаемых в тракте любого оптико-электронного прибора, является *выделение сигнала из шума*. Причем, если источником сигнала является только излучение объекта наблюдения (цели), то источниками шума могут быть излучение фона,

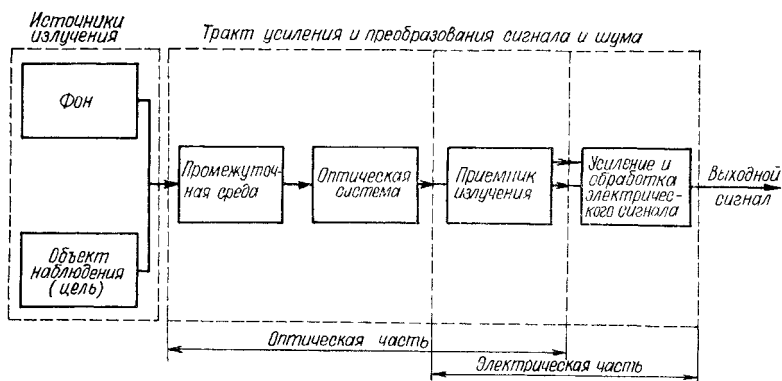


Рис. 2. Обобщенная схема работы оптико-электронного прибора

собственное излучение промежуточной среды и оптической системы, шумы приемника излучения и усилителя, а также случайные флуктуации параметров всех элементов схемы.

В зависимости от назначения схема каждого реального прибора в большей или меньшей степени соответствует приведенной обобщенной схеме. Кроме того, функции отдельных элементов могут совпадать, например усиление и обработка сигнала для выделения его из шума осуществляется не только в электрической схеме оптико-электронного прибора, но и в его оптической системе. В оптико-электронных приборах, предназначенных для регистрации, обработки и воспроизведения изображения, выходной сигнал поступает в видеоконтрольное устройство (ВКУ), осуществляющее преобразование его в пространственное распределение яркости на экране электронно-лучевой трубки (ЭЛТ) или другой системы отображения.

Путь прохождения сигнала и шума от источника излучения до выходного устройства называют *трактом усиления и преобразования сигнала и шума*. Он имеет оптическую и электрическую части, которые объединяются основным элементом оптико-электронного прибора — приемником излучения.

§ 3. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ЭЛЕМЕНТАХ ОБОБЩЕННОЙ СХЕМЫ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА

Источники излучения и промежуточная среда

В зависимости от задач, решаемых конкретной оптико-электронной системой, источник излучения может являться *объектом наблюдения (целью) или фоном*.

Если иметь в виду физическую природу излучения источника, то следует прежде всего различать *собственное и отраженное излучение*.

Однако наиболее часто классифицируют источники излучения по таким признакам, которые позволяют отнести их к одной из двух

больших групп — *естественным и искусственным* источникам излучения. Классификация источников излучения по этим признакам приведена на рис. 3.

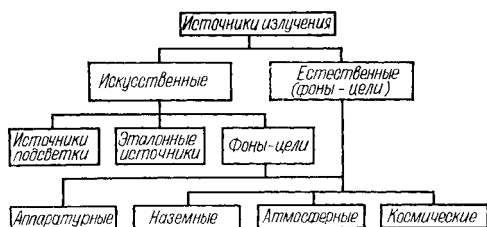


Рис. 3. Классификация источников излучения

К искусственным источникам излучения, используемым в активных системах (источники подсветки), относятся лампы накаливания, газоразрядные и дуговые лампы, пиротехнические источники излучения и оптические квантовые генераторы (лазеры).

Эталонными источниками излучения наиболее часто являются модели абсолютно черного тела, в качестве которых могут использоваться либо специально обработанные поверхности и покрытия, либо полые излучатели. Функции эталонных источников выполняют также различные лампы и оптические квантовые генераторы, применяемые при калибровке приборов и имитации излучения фонов и целей.

К наземным естественным и искусственным источникам излучения можно отнести деревья, кусты, камни, землю, воду, песок, здания, транспортные средства, людей, животных и т. д. В атмосфере Земли существуют такие источники излучения, как атмосферные газы, пары воды, облака, пыль, полярные сияния, двигатели и обшивка самолетов, ракеты и др. Космическими источниками излучения являются Солнце, Луна, планеты, звезды, туманности, искусственные спутники Земли (ИСЗ), ракеты, космическая пыль и пр.

Отдельные детали и узлы аппаратуры могут излучать значительное количество энергии, воспринимаемой приемником. К ним относятся элементы объектива — линзы и зеркала, а также защитные окна и обтекатели. Эти источники излучения называются аппаратурными.

Между источниками излучения и прибором всегда существует некоторая среда, в которой происходит ослабление энергии за счет поглощения и рассеяния. Большой частью поглощающей и рассеиваю-

щей средой является земная атмосфера, в которой происходит поглощение излучения молекулами воды, углекислого газа и озона, а рассеяние связано с наличием скопления молекул атмосферных газов, частиц пыли и капелек воды.

Оптическая система

Поток излучения от его источников (цели и фона) после прохождения через ослабляющую среду воспринимается *оптической системой* оптико-электронного прибора, которая состоит из различного рода комбинаций защитных стекол, линз, зеркал, призм, диафрагм, щелей, фильтров, решеток и выполняет две главные функции.

Первая функция состоит в том, чтобы собрать возможно больший поток приходящего излучения и с минимальными потерями направить его на приемник.

Вторая функция оптической системы заключается в оптической фильтрации приходящего сигнала с целью увеличения отношения величины сигнала к шуму фона. Различают два вида оптической фильтрации — спектральную и пространственную. *Спектральная фильтрация* осуществляется с помощью оптических фильтров (абсорбционных, дисперсионных, отражающих и интерференционных, т. е. оптических материалов — стекол и кристаллов, а также диэлектрических и металлических покрытий, нанесенных на оптические материалы) и имеет целью ограничить излучение, падающее на приемник, определенным интервалом длин волн. Фильтры могут ограничивать спектральный диапазон пропускания с одной стороны, «отрезая» коротковолновое или длинноволновое излучение, или с двух сторон, выделяя определенную полосу. *Пространственная фильтрация* осуществляется пространственными фильтрами — диафрагмами, щелями, растрами и служит для выделения излучения цели из излучения фона за счет отличия геометрических размеров и формы соответствующих целей от элементов фона.

Дополнительными функциями оптической системы в различных оптико-электронных приборах являются обеспечение необходимого поля обзора при заданном поле зрения, обеспечение процесса слежения за целью или получения информации о ее координатах, модуляция постоянной составляющей излучения, падающего на чувствительную площадку приемника, защита внутренней полости прибора от пыли, влаги и других вредных воздействий окружающей среды.

В процессе концентрации потока излучения на чувствительной площадке приемника неизбежно происходят его потери в обтекателе, линзах, зеркалах, элементах, осуществляющих пространственную фильтрацию, и на поверхности приемника. Эти потери связаны с поглощением энергии в оптических материалах, неполным отражением зеркал, виньетированием и другими причинами. Тем не менее в результате применения оптической системы поток излучения, падающий на приемник, в той или иной мере усиливается. Наибольшее усиление достигается для случая наблюдения удаленных мало-размерных (точечных) объектов, когда изображение объекта наблюдения полностью вписывается в размеры чувствительной площадки

приемника излучения. При этом усиление равно отношению площади входного зрачка объектива к площади чувствительной площадки приемника с учетом всех потерь в оптической системе. Общий коэффициент пропускания оптической системы редко превышает 20 %, особенно если учесть, что более 50 % излучения теряется за счет модуляции. Дополнительные потери происходят на поверхности чувствительной площадки и в объеме приемника излучения. Например, от поверхности сернистосвинцового фоторезистора отражается и, следовательно, теряется около 35 % падающего излучения, если применяется неиммерсионная оптическая система.

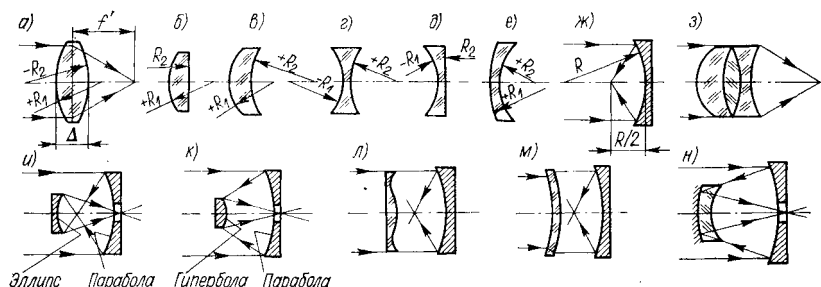


Рис. 4. Объективы: а) двояковыпуклая линза; б) плосковыпуклая линза; в) положительный мениск; г) двояковогнутая линза; д) плосковогнутая линза; е) отрицательный мениск; ж) сферическое зеркало; з) трехлинзовый суперахромат; и) телескоп Кассегрена; к) телескоп Грегори; л) система Шмидта; м) система Макскутова; н) система с зеркалом Манжена

Важнейшей частью оптической системы любого оптико-электронного прибора является *объектив* (рис. 4), который служит в первую очередь для сбора (фокусирования) энергии и образования изображения наблюдаемого объекта и всего поля излучения. Требования к качеству этого изображения определяются задачами, стоящими перед всем прибором, условиями его работы и конструктивными особенностями. При выборе конструкции объектива всегда приходится искать компромиссное решение с точки зрения улучшения пропускания, т. е. уменьшения потерь излучения, и обеспечения заданного качества изображения.

Простейшим объективом является одна линза со сферическими поверхностями. Линза характеризуется четырьмя параметрами: радиусами кривизны R_1 и R_2 , показателем преломления n и толщиной Δ . Параллельный пучок лучей, падающих на линзу от бесконечно удаленного точечного источника, фокусируется за линзой на расстоянии f' от нее. Отрезок f' , называемый задним фокусным расстоянием линзы, определяется выражением $f' = R_1 R_2 / (n - 1) (R_2 - R_1)$.

В первом приближении можно считать, что линза со сферическими поверхностями преобразует падающую на нее плоскую волну в сферическую. Однако практически даже при идеально сферических поверхностях линзы фронт волны на выходе будет иметь отклонения от

идеальной сферы, называемые аберрациями. Для улучшения сферичности волнового фронта, т. е. уменьшения аберраций, поверхностям линз придается несферическая или асферическая форма. Но и при полном уничтожении аберраций изображение точечного источника излучения, создаваемое оптической системой, представляет собой не точку, а пятно конечных размеров в связи с ограниченными размерами отверстия объектива, приводящими к дифракции падающей световой волны. Качество изображения менее совершенных систем определяется расфокусировкой, сферической аберрацией, комой, астигматизмом и т. д.

Однолинзовый объектив имеет практически все виды аберраций, из которых особенно велики хроматизм и сферическая аберрация, поэтому основным его недостатком является плохое качество изображения. Гораздо лучшего качества можно добиться, используя простые двухлинзовые объективы. Их относительное отверстие (отношение диаметра к фокусному расстоянию) обычно не превышает $1 : 3$ при угле поля зрения до 10° и диаметре входного зрачка не более 100—150 мм. Для достижения хорошего качества изображения при больших углах поля зрения применяют более сложные системы — триплеты и многолинзовые объективы, которые, однако, обладают относительно худшим пропусканием.

В качестве материала для изготовления линз и окон в тепловидении обычно используются различные оптические среды: полупроводниковые материалы кремний и германий в виде моно- и поликристаллов; поликристаллические соединения, полученные горячим прессованием, — оптическая керамика («Иртран» в США); селенид цинка (ZnSe) и сульфид цинка (ZnS), полученные путем химического осаждения из газовой фазы; а также халькогенидные стекла типа ИКС (T11173 фирмы «Тексас инструментс» в США). Особенно широко используются кремний и германий, благодаря высоким показателям преломления (4,0 для германия и 3,4 для кремния) и механической прочности.

Многие недостатки линзовых оптических систем отсутствуют у зеркальных объективов. В качестве простейшего объектива в этом случае часто используется одиночное (сферическое) зеркало. Для сферического зеркала с радиусом кривизны поверхности, равным R , приближенное значение фокусного расстояния равно $R/2$. Если вместо зеркала со сферической поверхностью применить асферическое зеркало (параболическое, гиперболическое и т. д.), можно устранить сферическую аберрацию и улучшить качество изображения. Довольно широко используются и более сложные зеркальные объективы, например двухзеркальные, включающие в себя кроме основного вогнутого зеркала с отверстием в центральной зоне контррефлектор, который может быть плоским, вогнутым или выпуклым, в том числе и по асферической поверхности. Зеркальные объективы не обеспечивают хорошего качества изображения в широком поле зрения. Наличие контррефлектора приводит к экранированию части приемной поверхности зеркального объектива. Многие достоинства линзовых и зеркальных систем объединены в зеркально-линзовых оптических

системах, в которых, наряду с достаточно хорошим пропусканием, можно достичь больших относительных отверстий и значительных углов поля зрения. К зеркально-линзовым системам относятся системы Шмидта, Максудова и другие. Применение в зеркально-линзовых системах зеркал Манжена (с внутренним отражением) позволяет значительно уменьшить сферическую aberrацию.

В оптико-электронном приборе фокусирующая оптическая система представляет собой один из элементов тракта передачи и преобразования сигнала (и элементов фона). Именно это ее свойство, влияющее на процесс обработки информации, подлежит изучению (гл. 14).

Внутренняя структура и aberrационные свойства фокусирующих оптических систем составляют предмет геометрической оптики.

Приемники излучения (определение и классификация)

Приемник излучения является основным элементом оптико-электронного прибора. По существу, само название приборов — оптико-электронные — обязано свойству приемника преобразовывать поток излучения в электрический сигнал.

Существуют различные определения приемника излучения, однако все они отражают главное свойство приемника — способность обнаруживать наличие излучения путем преобразования его в энергию других видов для последующей регистрации. В иностранной технической литературе это свойство приемника излучения находит выражение в названии — *детектор*, т. е. обнаружитель.

Таким образом, *приемник излучения* представляет собой устройство, служащее для восприятия энергии излучения и преобразования ее в энергию других видов с целью последующей регистрации результата этого преобразования, приводящей к обнаружению.

Процесс обнаружения излучения состоит из двух основных этапов: преобразования энергии оптического излучения в другой вид энергии и регистрации преобразованной энергии. Например, в термoelemente поток излучения вызывает появление электродвижущей силы, которая регистрируется обычным образом (гальванометром); в эвaпoгpaфe энергия излучения поглощается и вызывает нагрев и испарение масляной пленки, изменение толщины которой регистрируется интерференционными методами и т. д.

Приемники излучения могут классифицироваться по следующим признакам: виду энергии, в которую преобразуется излучение; характеру изменения чувствительности приемника при изменении длины волны падающего излучения; области спектра, где они наиболее чувствительны и находят наибольшее применение; рабочей температуре чувствительного слоя.

По виду энергии, в которую преобразуется излучение, приемники излучения делятся на тепловые, фотоэлектрические или фотонные, люминесцентные, фотохимические.

В *тепловых приемниках* энергия излучения преобразуется в теплоту, а регистрация преобразования сводится к измерению приращения температуры приемной площадки, нагретой вследствие облуче-

ния. Способ регистрации изменения температуры определяет конкретный тип теплового приемника излучения.

В *термоэлементе* изменение температуры приемной площадки вызывает появление электродвижущей силы в контуре, образованном двумя спаянными или сваренными проводниками из различных металлов.

В *болометре* изменение температуры вызывает изменение электрического сопротивления проводника или полупроводника.

В *оптико-акустическом* приемнике изменение температуры приемной поверхности, образующей одну из стенок газовой камеры, вызывает изменение температуры и объема газа и прогиб мембраны — второй стенки газовой камеры.

В *эвапорографе* изменение температуры вызывает изменение толщины масляной пленки.

В *диэлектрическом приемнике* изменение температуры вызывает изменение диэлектрической проницаемости диэлектрика конденсатора, имеющей сильную температурную зависимость, и соответствующее изменение емкости конденсатора регистрируется. Разновидностью диэлектрического приемника является *пироэлектрический приемник* излучения, в котором диэлектриком конденсатора служит сегнетоэлектрик, т. е. вещество, на поверхности которого появляется электрический заряд при механических деформациях.

Неравномерный нагрев конденсатора приводит к деформациям, и на обкладках конденсатора возникают заряды, которые регистрируются.

В *термиконе* изменение температуры вызывает изменение величины фотоэмиссии и т. д.

В *фотоэлектрических* (фотонных) приемниках энергия излучения преобразуется в механическую энергию электронов, испускаемых облучаемым веществом. Если электроны, освобожденные квантами излучения, покидают вещество, из атомов которого они вырваны, то явление носит название *внешнего фотоэффекта*, если же электроны остаются в веществе, то явление называется *внутренним фотоэффектом*. Влияние внутреннего фотоэффекта на характеристики вещества может быть различным в зависимости от условий, которые созданы для освобожденных электронов. Если они могут перемещаться внутри вещества в любом направлении, то вещество остается нейтральным и лишь электропроводность его изменяется. Если же в веществе создаются условия односторонней проводимости и электроны могут перемещаться лишь в одном направлении, то в веществе возникает разность потенциалов, создающая ток во внешней цепи.

Фотоэлектрические приемники излучения, в которых используется явление внешнего фотоэффекта, называются *фотоэмиссионными приемниками*. К ним относятся вакуумные и газонаполненные фотоэлементы, фотоумножители, электронно-оптические преобразователи (ЭОПы) и некоторые телевизионные передающие трубки (диссектор, иконоскоп, супериконаскоп, ортикон, суперортикон и др.)

Приемники с внутренним фотоэффектом, в которых используется явление изменения электропроводности вещества, называются *фоторезисторами или фотосопротивлениями*.

Приемники, в которых используется явление возникновения э. д. с., называются *фотогальваническими, вентильными фотоэлементами* или *фотоэлементами с запорным слоем*.

Если в качестве контактирующих веществ в вентильном фотоэлементе применяются полупроводники с различным типом проводимости, то наряду с возникновением разности потенциалов между слоями с *p*- и *n*-проводимостью при неравномерном освещении чувствительного слоя образуется разность потенциалов вдоль *p*—*n*-перехода. Эту фото-э. д. с. называют продольной или боковой, а соответствующие приемники — *фотоэлементами с продольным или боковым эффектом*.

Если к чувствительному элементу приемника излучения с запорным слоем приложить напряжение так, что оно препятствует возникновению тока во внешней цепи приемника при освещении, то изменение величины потенциального барьера под действием излучения приводит к изменению сопротивления и падению напряжения на приемнике. Этот режим работы называют *фотодиодным*. Изменение тока, проходящего через фотодиод при освещении, может усиливаться, как в обычном полупроводниковом триоде, тем же полупроводником, в котором создан запорный слой. В этом случае соответствующий комбинированный приемник излучения называется *фототриодом*. Условия односторонней проводимости и, следовательно, появления э. д. с. при освещении, можно создать в полупроводнике, помещая его в магнитное поле, ориентированное по нормали к падающему излучению. В этом случае носители тока (электроны и дырки) отклоняются магнитным полем в противоположные стороны, что приводит к возникновению в образце разности потенциалов. Описанное явление носит название *фотомагнитного эффекта*.

В *люминесцентных приемниках* излучения происходит преобразование излучения одного спектрального состава в излучение другого спектрального состава. Типичным представителем этого типа приемников является *метаскоп* — светосостав, высвечивающийся под действием ИК-излучения за счет накопленной им световой энергии при предварительном облучении ультрафиолетом, синим излучением неба или радиоактивным веществом.

В *фотохимических приемниках* энергия излучения вызывает всевозможные химические превращения. В *фотопластинке*, например, происходит фотохимическая реакция разложения галоидных солей серебра, причем металлическое серебро выделяется, образуя скрытое изображение источника излучения. В *глазу человека* под действием света в светочувствительных элементах сетчатки происходит фотохимический процесс, при котором продукты разложения вызывают раздражение зрительного нерва и световое ощущение.

В зависимости от характера изменения чувствительности приемника при изменении длины волны падающего излучения приемники излучения можно разделить на две большие группы: *неселективные*, чувствительность которых остается постоянной в определенном достаточно широком участке спектра; *селективные*, чувствительность которых зависит от длины волны падающего излучения.

К неселективным приемникам, в частности, относится большинство тепловых приемников излучения, у которых обеспечивается постоянство коэффициента поглощения приемной площадки при изменении длины волны за счет чернения — покрытия копотью, испарения металлов в вакууме и т. д.

Приемники излучения можно относить к одной из пяти больших групп для областей спектра: ультрафиолетовой (1—380 нм); видимой (380—780 нм); ближней ИК-области (780—1400 нм); средней ИК-области (1,4—6,0 мкм); далекой ИК-области (6,0—1000 мкм).

К *первой группе* относятся фотоэмульсии, некоторые фотоэмиссионные приемники, тепловые приемники и фоторезисторы.

Ко *второй группе* — фотоэмиссионные приемники, главным образом с сурьмяно-цезиевым фотокатодом, фотоэмульсии, селеновые фотогальванические приемники, фоторезисторы из сернистого и селенистого кадмия и сернистого висмута, кремниевые фотогальванические приемники (солнечные батареи) и тепловые приемники.

К *третьей группе* — фотоэмиссионные приемники с кислородно-цезиевым фотокатодом, сенсibilизированные фотоэмульсии, сернисто-галлиевые фоторезисторы и фотогальванические приемники (таллофиды), меднозакисные и сернисто-серебряные фотогальванические приемники, тепловые приемники, некоторые фосфоры, сернисто-свинцовые фоторезисторы, германиевые и кремниевые фотодиоды и фототриоды.

К *четвертой группе* — сернисто-свинцовые, теллуристо-свинцовые и селенисто-свинцовые фоторезисторы, фоторезисторы, фотодиоды и фотомагнитные приемники из сурьмянистого индия, фоторезисторы из германия, легированного золотом, и тепловые приемники.

К *пятой группе* — тепловые приемники излучения, фоторезисторы из германия, легированного цинком или ртутью, фоторезисторы на основе тройных соединений, например кадмия—ртути—теллура.

Классификация приемников излучения по тем областям спектра, где они наиболее чувствительны и находят наибольшее применение, является достаточно условной, так как многие приемники используются в различных участках спектра. В ряде случаев такая классификация представляется оправданной, удобной и не исключает определения некоторых приемников как *двух- и многодиапазонных*, если это необходимо.

В принципе возможны любые температуры чувствительного слоя приемника, однако наиболее часто для *неохлаждаемых* приемников указываются значения «комнатной» температуры 293 К или 300 К, а для приемников *охлаждаемых* называются точки кипения различных веществ, используемых для охлаждения: 194,7 К — твердой углекислоты или сухого льда; 77,4 К — жидкого азота; 27,3 К — жидкого неона; 20,5 К — жидкого водорода; 4,3 К — жидкого гелия. В последних трех случаях, когда температура ниже 30 К, приемники называют *глубокоохлаждаемыми*.

При *комнатной температуре* работает большинство тепловых приемников излучения, фотоэмиссионные приемники, фотопластинки,

фосфоры, сернисто-свинцовые фоторезисторы, фоторезисторы из сурьмянистого индия и некоторые другие приемники. При *температуре сухого льда* — фоторезисторы из сернистого свинца, а также некоторые тепловые приемники (термоэлементы и болометры). При *температуре жидкого азота* — фоторезисторы из сернистого, селенистого и теллуристого свинца, сурьмянистого индия, германия, легированного золотом, фотогальванические и фотомангнитные приемники из сурьмянистого индия, фоторезисторы на основе тройных

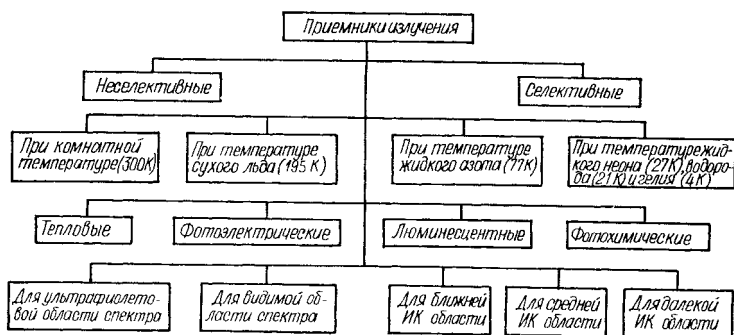


Рис. 5. Классификация приемников излучения

соединений, тепловые приемники. При *сверхнизких температурах* — фоторезисторы из германия, легированного ртутью или цинком, а также тепловые приемники — сверхпроводящие и германиевые болометры.

Классификация приемников излучения по различным признакам представлена на рис. 5.

Усилитель и другие элементы электронного тракта

Сигнал, вырабатываемый приемником излучения, обычно невелик: он составляет несколько единиц или десятков микровольт. Для того чтобы извлечь из него и использовать информацию, необходимо *усилить сигнал*. В качестве усилителей сигнала большей частью используются различного рода усилители переменного тока, так как сигнал в оптико-электронном приборе обычно модулируется механическими, оптическими или электронными средствами. В зависимости от схемы и задач, решаемых конкретным оптико-электронным прибором, форма модулированного сигнала, поступающего на вход усилителя, может быть различной. Иногда это периодический сигнал, форма которого близка к синусоидальной, однако часто встречаются и непериодические последовательности импульсов различной формы. Выходной сигнал приемника излучения обычно поступает на вход усилителя не непосредственно, а через согласующую схему, называемую *входной цепью*.

Выбор элементов входной цепи является достаточно важной задачей, решать которую приходится самому разработчику оптико-электронного прибора, в то время как усилитель сигнала может быть в большинстве случаев выбран им из готовых или по его техническому заданию разработан специалистом в области радиоэлектроники. Основные требования, предъявляемые к усилителю, относятся к следующим его параметрам и характеристикам: коэффициенту усиления, динамическому диапазону, полосе пропускания и уровню

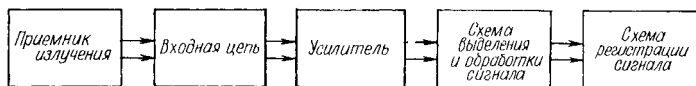


Рис. 6. Обобщенная схема электрической части тракта оптико-электронного прибора

собственного шума. Кроме того, иногда оговаривается форма частотной и фазовой характеристики усилителя, его габариты, вес и потребляемая мощность.

Обычно *усилитель сигнала* конструктивно разделяется на две части, одна из которых (*предусилитель*) монтируется в непосредственной близости от приемника излучения и служит для предварительного усиления сигнала до уровня, достаточного для последующей передачи сигнала по длинному кабелю в условиях действия окружающих нестационарных электрических и магнитных полей, а другая (*главный усилитель*) содержит необходимые элементы регулировки усиления, полосы пропускания и других параметров. Коэффициент усиления предусилителя обычно находится в пределах 10 — 10^3 , а общий коэффициент усиления может достигать 10^6 .

На выходе приемника излучения существует сигнал, несущий информацию об объекте наблюдения, и шум. Для выделения и обработки полезного сигнала из смеси сигнала и шума в усилителе и в электрических цепях, следующих за усилителем, содержатся линейные и нелинейные элементы — устройства формирования и декодирования, схемы совпадения, обратные связи и т. д., осуществляющие необходимые логические операции. В простейшем случае операция выделения сигнала из шума заключается в частотном анализе смеси сигнала и шума с помощью узкополосных электрических фильтров, а операция обработки сигнала — в его детектировании. Однако обычно требуются более сложные решения.

Для регистрации обработанного сигнала применяются различные визуальные, звуковые, фотографические, осциллографические индикаторы и автоматические системы.

Таким образом, обобщенная схема электрической части тракта оптико-электронного прибора может быть представлена в виде, изображенном на рис. 6. В каждом конкретном случае структурная схема электрической части оптико-электронного прибора может отличаться от обобщенной схемы, а функции ее отдельных элементов могут быть совмещены и видоизменены.

§ 4. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Количественную оценку свойств и эффективности применения оптико-электронного прибора в том или ином практическом случае можно произвести с помощью ряда основных характеристик.

Порогом чувствительности называют наименьший поток излучения или наименьшую освещенность, при действии которых на входной зрачок оптической системы прибора обеспечиваются заданные вероятность обнаружения цели, точность слежения за целью или точность воспроизведения изображения цели. Иногда для оптико-электронных приборов, создающих изображение в инфракрасной области спектра (тепловизоров), более удобно выражать порог чувствительности разностью температур двух абсолютно черных тел, при которой наблюдается их различие.

В свою очередь, заданным вероятности обнаружения, точности слежения и точности воспроизведения соответствуют предельные значения отношения сигнала к шуму и, следовательно, порогу чувствительности соответствует сигнал, величина которого превышает уровень шума в заданное число раз. Если поток излучения определенной величины создает сигнал, равный шуму, эту величину принято называть *эквивалентной мощностью шума* (ЭМШ).

Несмотря на кажущуюся простоту, очевидность и физическую ясность приведенного определения порога чувствительности, при более внимательном рассмотрении оно оказывается недостаточно строгим, требующим дополнительных разъяснений. В частности, возникают следующие вопросы.

Как выражать порог чувствительности, учитывая, что одно и то же количество потока излучения разного спектрального состава оказывает на оптико-электронный прибор разное действие?

Как учитывать форму сигнала и характеристики шума при расчете их отношения?

Как установить количественную связь между отношением сигнала к шуму и такими показателями качества работы прибора, как вероятность обнаружения, точность слежения и точность воспроизведения?

Ответы на эти вопросы будут рассмотрены в ходе дальнейшего изложения.

Порог чувствительности оптико-электронного прибора определяет его дальность действия при заданных условиях обнаружения, т. е. заданных характеристиках источника излучения и промежуточной среды, причем под *дальностью действия* понимают то наибольшее расстояние до излучающего объекта, при котором поток излучения от него, падающий на входной зрачок прибора, соответствует порогу чувствительности.

В последнее время термин «порог чувствительности» (пороговый поток) все чаще заменяется термином «обнаружительная способность» (detectivity), что связано с широким распространением этого термина, введенного К. Джонсом для описания свойств приемников

излучения. Обнаружительная способность обратно пропорциональна порогу чувствительности.

Поле обзора — пространственный угол с вершиной в центре входного отверстия оптической системы, в пределах которого объект наблюдения (цель) может быть обнаружен прибором. При симметричном поле обзора оно может выражаться значением линейного угла раствора соответствующего пространственного угла, однако большей частью поле обзора задается в виде произведения значений линейного угла в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (горизонтальной и вертикальной, по азимуту и углу места, азимуту и тангажу и т. п.).

Размер поля обзора оптической системы зависит от требований к прибору и может быть различным. Например, поле обзора тепловизора, предназначенного для контроля теплового режима крупной промышленной установки, составляет $30 \times 30^\circ$, в то время как тепловизор-микроскоп для исследования распределения температур микросхем может иметь поле обзора $30 \times 30'$.

Время обзора — время осмотра поля обзора может быть различным, но обычно оно находится в пределах 0,05 с — 10 мин. Иногда задается не время обзора, а число кадров, осматриваемых в единицу времени, либо обратный этому числу период обновления информации.

Поле зрения (мгновенное поле зрения) — пространственный угол с вершиной в центре входного отверстия оптической системы, в пределах которого объект наблюдения (цель) может быть обнаружен прибором в данный момент времени (при отсутствии сканирования).

Поле зрения сканирующей системы является частью поля обзора, и его размер определяется размерами диафрагмы поля и фокусного расстояния объектива. Для простой (энергетической) несканирующей системы поле зрения и поле обзора совпадают.

Разрешающая способность обычно характеризуется наименьшим углом между двумя точечными источниками излучения, которые могут быть раздельно обнаружены прибором. Разрешающая способность может также выражаться числом линий, приходящихся на единицу угла или на все поле обзора (на всю «картинку»), которые можно различить на выходном индикаторе прибора.

Точность можно охарактеризовать среднеквадратическим значением ошибки, с которой можно измерить заданный параметр (дальность, угловые координаты и т. п.) при определенных условиях наблюдения (движение, помехи и т. д.).

Существует еще большее число всевозможных характеристик работы оптико-электронного прибора, но они являются либо производными от перечисленных, либо используются достаточно редко.

§ 5. СИСТЕМЫ ОБЗОРА И АНАЛИЗА ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ (ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ)

Объект наблюдения (цель) и окружающий его фон образуют пространственное поле излучения, характеристики которого могут изменяться во времени. Для обнаружения объекта наблюдения необходимо осуществлять обзор и анализ поля излучения.

Обзор поля излучения может осуществляться либо путем одновременной регистрации потоков излучения, исходящих от каждого элемента поля обзора (несканирующие системы или системы одновременного восприятия), либо путем последовательной регистрации этих потоков за счет пространственной развертки (сканирование или последовательное восприятие).

Анализ поля излучения осуществляется как в течение, так и по окончании обзора с помощью оптических и электронных устройств или человеком и имеет цель ответить на вопросы о наличии интересующего объекта наблюдения в поле обзора и его ориентировочных

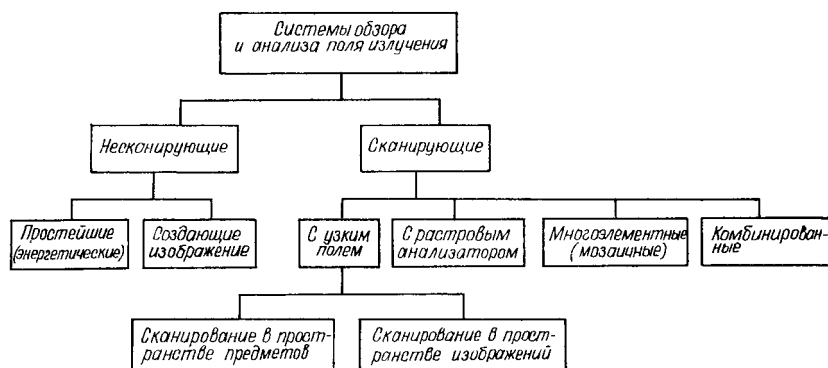


Рис. 7. Классификация систем обзора и анализа поля излучения

координатах (задачи обнаружения), о принадлежности наблюдаемого объекта к тому или иному классу объектов (задача опознавания), об энергетических характеристиках, геометрических размерах, форме и точном положении объекта наблюдения в пространстве в течение заданного времени (задачи измерения и сопровождения).

В соответствии с этим *системы обзора* могут быть разделены на следующие основные типы: несканирующие простейшего типа (энергетические); несканирующие, создающие изображение; сканирующие узким полем зрения; сканирующие с растровыми анализаторами; мозаичные или многоэлементные; комбинированные (рис. 7).

Кроме того, различают два типа сканирующих систем с узким полем зрения — *системы*, в которых *сканирование и анализ поля излучения* осуществляются в *пространстве предметов*, и *системы со сканированием в пространстве изображений*.

§ 6. НЕСКАНИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ ОБЗОРА И АНАЛИЗА ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО ТИПА (ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ)

Наиболее простым устройством для обзора поля излучения является система, состоящая из объектива и одного неподвижного приемника (рис. 8), зеркальный (а) или линзовый (б) объектив кото-

рого служит только для увеличения потока излучения, попадающего на приемник. Такие системы способны регистрировать общую величину и изменения во времени потока излучения, распространяющегося внутри поля обзора. Они отличаются от других несканирующих систем только тем, что одновременная регистрация потока излучения не сопровождается здесь анализом излучения отдельных элементов поля обзора, т. е. поле обзора ϕ и поле зрения δ совпадают.

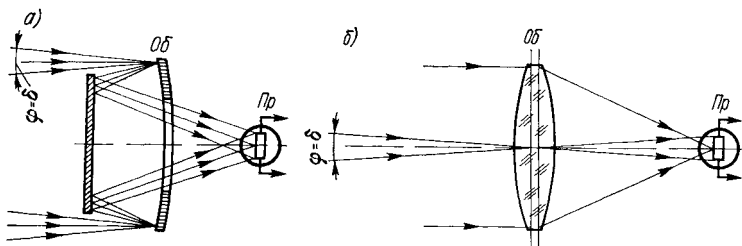


Рис. 8. Схемы систем обзора простейшего (энергетического) типа: а — зеркальные; б — линзовые

Эти системы находят применение в простейших радиометрах, радиационных пирометрах, а также в приборах сигнализации и связи.

§ 7. НЕСКАНИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ, СОЗДАЮЩИЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Более сложные несканирующие системы состоят из широкоугольного объектива, создающего изображение в интересующей наблюдателя области спектра, и приемника излучения, регистрирующего и преобразующего изображение в вид, удобный для наблюдения и последующего анализа.

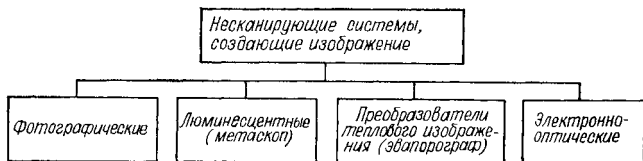


Рис. 9. Классификация несканирующих систем, создающих изображение

Классификация несканирующих систем, создающих изображение, приведена на рис. 9.

К системам обзора, создающим изображение без сканирования, естественно в первую очередь отнести системы с *фотографической пластинкой* и *электронно-оптическим преобразователем* изображения, которые чувствительны к излучению с длинами волн до 0,8 — 1,2 мкм.

За исключением сильно нагретых тел фотографируемые объекты облучаются посторонним источником и изображаются только в отраженном излучении. С помощью электронно-оптического преобразователя и фотопластинки не может быть зарегистрировано излучение слабонагретых тел.

Предел, ниже которого нагретые тела не испускают инфракрасного излучения в количестве, достаточном для воздействия на современные эмульсии, находится приблизительно при 250°C . Напомним,

что глаз человека при достаточной адаптации в полной темноте может различить тело, нагретое до температуры 420°C . Тела, имеющие более низкую температуру, совершенно невидимы.



Рис. 10. Эвапорограф модели ЭВ-84

Способностью, подобно фотопластинке, аккумулировать излучение обладает *эвапорограф* — типичный представитель преобразователей теплового изображения (рис. 10). В эвапорографе изображение наблюдаемого объекта проецируется оптической системой на тонкую мембрану, и температура в различных участках мембраны оказывается различной в соответствии с количеством поглощенной энергии. Благодаря нагреванию мембраны излучением масляная пленка, сконденсиро-

ванная на задней стороне мембраны, неравномерно испаряется. Таким образом, разность температур преобразуется в разность толщин масляной пленки. Если рассматривать мембрану в отраженном свете, то различия в толщине пленки проявляются в виде различной интерференционной окраски подобно цветам тонких масляных пленок на поверхности воды.

В преобразователе теплового изображения *Суга и Иосихара* используется конденсация на мембрану не паров жидкости, а аэрозоля, частицы которого конденсируются на участках с более низкой температурой. Для рассматривания получившегося изображения на мембрану со стороны, подвергавшейся действию аэрозоля, возгоняется цинк, который осаждается там, где аэрозоль не сконденсировался, и создает видимое изображение.

Представляет интерес *жидкокристаллический преобразователь* теплового (инфракрасного) изображения в видимое. В этом преобразователе одна сторона тонкой мембраны зачернена, а другая

покрыта тонким слоем жидкого кристалла типа холестерина. При возрастании температуры мембраны вследствие воздействия на нее ИК-лучей максимум рассеяния света жидким кристаллом смещается в коротковолновую область видимого участка спектра, что вызывает временное изменение окраски слоя.

Возможны и другие типы преобразователей теплового изображения. Все они обычно состоят из слоя, поглощающего инфракрасное излучение, несущего слоя, обеспечивающего необходимую механическую прочность, и чувствительного слоя, изменяющего свои свойства при изменении температуры. Для поглощения излучения используются слои металлической черни, например золота, или полупрозрачные слои металла.

В качестве несущего слоя применяются тонкие пленки из нитроцеллюлозы, полиэтилентерефталата или окиси алюминия. Для получения видимого изображения используется изменение оптических свойств чувствительного слоя при изменении температуры: изменение прозрачности, отражения или рассеяния излучения, фазовых или поляризационных свойств.

Люминесцентный приемник излучения (метаскоп) также может быть отнесен к несканирующим системам, создающим изображение.

Все описанные выше несканирующие системы, создающие изображение: фотографические, электронно-оптические, люминесцентные и преобразователи теплового изображения — не являются, строго говоря, оптико-электронными приборами, так как процесс преобразования излучения в электрический сигнал в них отсутствует. Однако эти системы следует рассматривать как первичные накопители информации, которая затем анализируется оптико-электронными методами. Анализирующее устройство может работать последовательно (анализ узким полем) или параллельно (мозаичный приемник) как в результате получения изображения, так и в процессе его образования. Анализу может подвергаться вся информация, содержащаяся в изображении, или только та ее часть, которая представляется полезной. Например, глаз лягушки (или его электронная модель), как известно, анализирует (посылает в мозг) сигналы только тех изображений, которые несут полезную информацию: мошку, улетающую от лягушки, глаз видит, но не беспокоит этим сигналом мозг, так как язык лягушки все равно не сможет поймать удаляющуюся мошку.

Исследования возможности опознавания изображений и параллельной обработки информации делают рассмотрение несканирующих систем, создающих изображение, необходимым разделом изучения оптико-электронных приборов.

§ 8. ОБЗОР И АНАЛИЗ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗА СЧЕТ СКАНИРОВАНИЯ

Обзор пространства в системах со сканированием узким полем осуществляется посредством вращения или качания зеркал, призм или объективов, а также движения диафрагм и щелей. При этом происходит перемещение поля зрения в пределах заданного поля

обзора по определенному закону так, что след оптической оси прибора описывает в пространстве предметов круг, циклоиду или другую фигуру. После просмотра всех точек поля обзора движение повторяется.

Системы сканирования узким полем позволяют получить большую площадь обзора при достаточно малом мгновенном угле поля зрения, что увеличивает чувствительность прибора к излучению малоразмерных удаленных источников излучения, уменьшая влияние фона. Однако при заданном времени обзора в результате сканирования узким полем получаются короткие импульсы фототока, для усиления которых необходимо широкополосное усиление.

Обычно осмотр поля обзора осуществляется по заранее заданному закону и неизменной программе, однако в принципе возможно построение систем, в которых с большей подробностью осматриваются те области поля обзора, где вероятность появления объекта велика, и с меньшей подробностью — те, где вероятность мала. Если появление объекта в той или иной точке поля обзора равновероятно, задача выбора оптимального закона сканирования значительно усложняется.

Существует мнение, что эффективность сканирования может быть повышена за счет преднамеренного введения элемента случайности в процедуру обзора (*случайный поиск*). Это мнение основано на результатах исследования зрительного аппарата человека и животных, которые показывают, что регулярный обзор пространства в природе не осуществляется. Траектория движения глаз при просмотре объекта носит случайный характер, причем наибольшая плотность сканирования соответствует тем участкам поля обзора, где сосредоточено наибольшее количество информации. Пока не ясно, каким образом можно в полной мере воспроизвести в приборе реализуемый зрительными органами животных случайный поиск.

§ 9. РАСТРОВЫЕ АНАЛИЗАТОРЫ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Сканирование большого пространства узким полем встречает серьезные препятствия, так как скорости сканирования ограничены инерционностью приемника, чувствительностью прибора и возможностями быстрого перемещения элементов оптической системы, осуществляющих сканирование.

В связи с этим приходится увеличивать мгновенный угол зрения системы, определяющий ширину сканирующего поля. Однако при этом возникают две трудности: во-первых, размеры поля зрения начинают превышать допустимые ошибки измерения угловых координат цели и точный отсчет их текущих значений, например по положению центра поля зрения прибора, становится невозможным; во-вторых, помехоустойчивость оптико-электронного прибора уменьшается, так как большее поле зрения улавливает соответственно большее излучение фона.

Указанные трудности удается в некоторой степени преодолеть, подвергая анализу изображение, создаваемое оптической системой прибора, с помощью специальных *растр*ов, называемых в разных

случаях *анализаторами, координаторами и модуляторами*. Растр размещается в картинной плоскости оптической системы и перемещается относительно изображения поля излучения, поэтому на приемник, находящийся за растром, падает модулированное излучение, причем модуляция осуществляется так, что параметры модулированного сигнала (амплитуда, частота, фаза, длительность импульса и т. д.) зависят от положения и размеров источника излучения.

Таким образом, движущийся растр позволяет решить три основные задачи: преобразует пространственное распределение излучения в функцию времени (*модуляция*); выделяет излучение объекта наблюдения (цели) из излучения фона (*селекция*); вносит в сигнал от цели определенным образом закодированную информацию о положении цели в поле зрения, т. е. определяет координаты цели в системе координат оптической системы (*измерение*).

Поскольку функции растров не ограничиваются модуляцией потока излучения, термин «модулятор» к ним, строго говоря, неприменим. В течение длительного времени их называли координаторами, однако в последние годы этот термин практически отождествляется с понятием головки самонаведения. В связи с этим в дальнейшем изложении будет использоваться термин *растровый анализатор* или *растр*.

Сигнал, вырабатываемый приемником излучения, установленным за растровым анализатором, после соответствующей обработки может быть, в частности, использован для воздействия на привод различных элементов, обеспечивающих сканирование, т. е. зеркал, линз, клиньев, либо подвижной платформы, на которой установлен прибор, с целью автоматического сопровождения объекта наблюдения при его движении в пределах поля обзора.

ЧАСТЬ I

СКАНИРОВАНИЕ

Глава 1

СЛУЧАЙНЫЙ ПОИСК

Исследование принципов случайного поиска было начато в Советском Союзе еще в 1953 г. сотрудниками Государственного оптического института им. С. И. Вавилова Н. И. Пинегиным и Н. Г. Болдыревым. Изложенные далее принципы случайного поиска имеют общий характер и лишь в конкретных примерах, выделенных в тексте, базируются на статистических материалах поиска цели глазом человека. Одна из возможных реализаций такого поиска в оптико-электронном приборе с электронным сканированием рассмотрена в работе [54].

§ 1.1. ВЕРОЯТНОСТЬ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ПОИСКЕ

Для нахождения аналитической зависимости вероятности обнаружения объекта от времени обозначим через δ мгновенное поле зрения (например, центральное поле зрения глаза), а через φ — обзриваемую площадь (в стерadianах или квадратных градусах). При поиске объекта на большой площади $\delta \ll \varphi$.

Вероятность того, что объект при случайной ориентации мгновенного поля зрения (случайно брошенном взгляде) окажется внутри области δ , равна δ/φ .

Пусть p есть вероятность обнаружения объекта внутри мгновенного поля зрения δ , зависящая от контраста и размеров наблюдаемого объекта. В этом случае вероятность обнаружения при случайной ориентации мгновенного поля зрения (случайно брошенном взгляде) можно найти как произведение вероятностей $q = p\delta/\varphi$.

Обзор поля φ можно рассматривать как серию независимых испытаний n — независимо брошенных взглядов. Следовательно, для дальнейшего необходимо воспользоваться биномиальным законом повторных испытаний.

Как известно, этот закон применяется в тех случаях, когда производится n повторных испытаний и при каждом из них вероятность события A (обнаружения цели) равна q . Вероятность того, что событие A повторится m раз, определяется биномиальным законом

$$P_n(m) = C_n^m q^m (1 - q)^{n-m},$$

где число сочетаний (соединений, различающихся друг от друга только элементами) из n по m равно

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Следовательно, можно найти

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} = n.$$

Так как n предметов можно объединить в n групп только один раз, чтобы группы отличались самими элементами, а не их порядком, то $C_n^n = 1$. Поскольку основным свойством сочетаний является равенство $C_n^m = C_n^{n-m}$, то $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0$, следовательно, $C_n^0 = 1$.

При малых значениях q биномиальный закон описывается формулой Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{(nq)^m}{m!} e^{-nq}.$$

Из биномиального закона следует, что вероятность того, что событие A не произойдет (не повторится ни разу, т. е. $m = 0$), равна

$$P_n(0) = (1 - q)^n.$$

При малых значениях q на основании формулы Пуассона найдем

$$P_n(0) = e^{-nq}.$$

Вероятность того, что событие произойдет, т. е. объект будет обнаружен сколько угодно раз, равна

$$P = 1 - P_n(0) = 1 - (1 - q)^n$$

или при малом q , когда $P_n(0) = e^{-nq}$,

$$P = 1 - e^{-nq} = 1 - e^{-np\delta/\varphi}.$$

Чтобы обнаружить цель с вероятностью P , нужно выполнить n экспериментов, т. е. затратить на это время $T = n\tau$, где τ — коэффициент пропорциональности, равный времени, затрачиваемому на один эксперимент.

Для вероятности обнаружения цели P найдем

$$P = 1 - e^{-\frac{T}{\tau} p \frac{\delta}{\varphi}} = 1 - e^{-\alpha T},$$

где $\alpha = p(\delta/\varphi)(1/\tau)$; T — время обнаружения цели с вероятностью P , $P = P_n(1) + P_n(2) + P_n(3) + \dots$

Вероятность p обнаружения объекта, находящегося внутри мгновенного поля зрения δ , зависит от контраста и размеров наблюдаемого объекта.

Для экспериментальной проверки полученного выражения в случае, когда поиск осуществляется глазом человека, белый диффузно рассеивающий свет экран размером $2,8 \times 2,4$ м рассматривался наблюдателем с расстояния 2 м через окно, которое закрывалось на время, необходимое для расположения на экране объекта — полосы тонкой диффузно рассеивающей свет глубокоматовой фотографической бумаги размером не более $30 \times 60'$, различно экспонированной, а затем отфиксированной. При этом контур объектов практически не был замечен.

Яркость экрана, освещенного двумя мощными лампами, была близка к яркости дневного неба, покрытого облаками. Измерение яркости экрана и объекта — фотографической бумаги, наложенной на экран, — производилось при помощи фотоэлектрического прибора с точностью до $\pm 1\%$.

После того как объект был наклеен на экран в неизвестном для наблюдателя месте, последний получал сигнал приготовиться к поиску. Вслед за тем окно открывалось и наблюдатель начинал поиск. В самом начале поиска наблюдатель пускал в ход секундомер, останавливая его в момент обнаружения, что позволяло регистрировать время, необходимое для обнаружения, с точностью до 0,01 с.

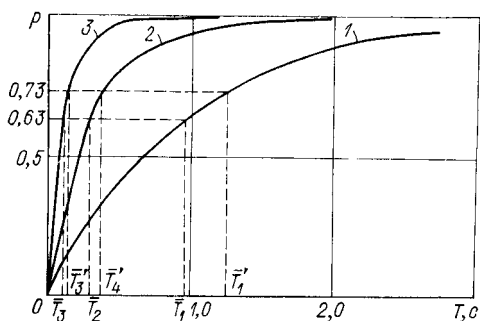


Рис. 11. Зависимость вероятности визуального обнаружения от времени обнаружения T :

1 — $K = 0,2$; $\gamma^2 = (10')^2$; $\alpha = 1,05$; 2 — $K = 0,25$; $\gamma^2 = (12')^2$; $\alpha = 3,63$; 3 — $K = 0,3$; $\gamma^2 = (14')^2$; $\alpha = 11,2$

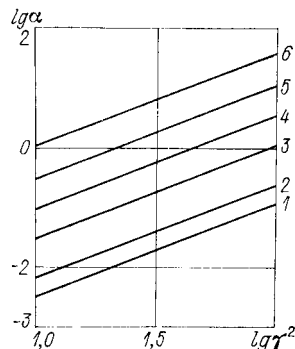


Рис. 12. Зависимость коэффициента α от площади объекта $(\gamma')^2$:

1 — $K = 0,05$; 2 — $K = 0,1$; 3 — $K = 0,2$; 4 — $K = 0,3$; 5 — $K = 0,4$; 6 — $K = 0,5$

Так как угловые размеры поля наилучшего зрения и распознавания предметов определяются центральным углублением сетчатки и составляют $1,5^\circ$, а угловые размеры экрана — $60 \times 70^\circ$, то обозреваемая площадь экрана примерно в 3000 раз превосходит поле наилучшего зрения.

Большой статистический материал (общее количество измерений составляло около 60 000) позволил найти зависимость $P = f(T)$ экспериментально (рис. 11). Эта зависимость хорошо аппроксимировалась формулой вида

$$P = 1 - e^{-\alpha T}.$$

Здесь T — время обнаружения, α — коэффициент, зависящий при прочих равных условиях от площади объекта γ^2 и его контраста $K = (L_0 - L_0)/L_0$, где L_0 — яркость экрана, L_0 — яркость объекта. Следовательно, $T = -(1/\alpha) \ln(1 - P) = -(2,3/\alpha) \lg(1 - P)$.

Полученные Н. И. Пинегиным зависимости коэффициента α от площади и контраста объекта, в свою очередь, с достаточной точностью аппроксимируются выражением $\lg \alpha = c_0 + c_1 K + c_2 \lg \gamma^2$, где $c_0 \approx -4,3$; $c_1 \approx 5,6$; $c_2 \approx 1,6$ (рис. 12, 13).

Для произвольного значения обозреваемой площади Φ (угл. мин) и ее яркости L (кд/м²) Н. П. Травниковой получено следующее выражение для коэффициента α (ОМП, 1977, № 3, с. 47): $\alpha = b K^2 (\gamma')^3 L^{0,3} / \Phi$, где среднее значение

коэффициента b , характеризующего поисковую способность наблюдателя, равно $5,8 \cdot 10^4$ (угл. мин.)⁻¹ (кд/м²)^{-0,3} с⁻¹.

В процессе исследований было выяснено, что время обнаружения не зависит от формы объекта в принятых пределах изменения его размеров от $(3')^2$ до $(20')^2$. Оно не зависит также от знака контраста для $K = (\pm 0,05) \div (\pm 0,5)$.

§ 1.2. СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПРИ СЛУЧАЙНОМ И ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ ПОИСКЕ

Среднее время обнаружения объекта может быть вычислено следующим образом.

Найдем среднее значение числа обнаружений цели при n независимых испытаниях. По определению среднее значение случайной величины

$$\bar{m} = \sum_{m=1}^n m P_n(m) = \sum_{m=1}^n m C_n^m q^m (1-q)^{n-m},$$

так как $C_n^m = (n/m) C_{n-1}^{m-1}$, то $\bar{m} = nq \sum_{m=1}^n C_{n-1}^{m-1} q^{m-1} (1-q)^{n-1-(m-1)}$.

Сумма, входящая в последнее выражение, представляет собой сумму вероятностей полной группы событий, поэтому она равна единице. Следовательно, $\bar{m} = nq$ и вероятность обнаружения может быть выражена через среднее значение числа обнаружений цели следующим образом:

$$P = 1 - e^{-nq} = 1 - e^{-\bar{m}}.$$

Соответственно среднее время обнаружения равно $\bar{T} = \tau \bar{n}$, где \bar{n} — число экспериментов, обеспечивающее среднее значение числа обнаружений \bar{m} , и так как $\bar{n} = \bar{m}/q$, то $\bar{T} = \tau (\bar{m}/q)$.

Если в среднем имеет место одно обнаружение, т. е. $\bar{m} = 1$, то $\bar{n} = 1/q = (1/p)$ (φ/δ) и $\bar{T} = \tau/q = (\tau/p)$ (φ/δ) = $1/\alpha$.

Полагая для простоты $p = 1$, найдем $\bar{n} = \varphi/\delta$; $\bar{T} = \tau (\varphi/\delta)$.

Предположим, что анализируемое поле излучения состоит из N^2 элементов, т. е. $\varphi/\delta = N^2$, тогда $\bar{n} = N^2$; $\bar{T} = \tau N^2$.

Для того чтобы обеспечить в среднем одно обнаружение цели, необходимо выполнить N^2 экспериментов. При этом вероятность обнаружения цели

$$P = 1 - e^{-\bar{m}} = 1 - e^{-1} \approx 0,63,$$

если в среднем имеет место одноразовое обнаружение. Вероятность необнаружения цели соответственно будет равна 0,37.

Так как вероятность обнаружения цели m раз из n испытаний равна

$$P_n(m) = \frac{(nq)^m}{m!} e^{-nq} = \frac{(\bar{m})^m}{m!} e^{-\bar{m}},$$

то при $\bar{m} = 1$

$$P_n(m) = 0,37/m!$$

Следовательно, для $m = 1$ $P_n(1) = 0,37$, для $m = 2$ $P_n(2) = 0,18$, для $m = 3$ $P_n(3) = 0,06$, для $m = 4$ $P_n(4) = 0,015$ и т. д.

Определенная вероятность двух и более обнаружений, когда в среднем цель обнаруживается один раз, говорит о возможности повторного осмотра ранее пройденных точек поля.

Среднее время обнаружения и его зависимость от площади и контраста объекта в процессе описанных выше экспериментальных

исследований были определены следующим образом. Вначале было подсчитано теоретическое значение среднего времени для одноразового обнаружения, когда $\bar{m} = 1$ и $\bar{T} = 1/\alpha$. Затем экспериментально было выяснено, что в условиях проведения эксперимента имели место относительно большие значения среднего времени обнаружения \bar{T}' , соответствовавшие более высокой вероятности обнаружения, равной примерно 0,73. На рис. 11 отмечены как теоретические \bar{T} , так и экспериментальные \bar{T}' значения среднего времени обнаружения. Для вероятности $P = 0,73$ время обнаружения $T' = -\ln(1 - 0,73)/\alpha = 1,31/\alpha$.

Тренировка наблюдателя не изменяла вида зависимости вероятности обнаружения от времени, а приводила лишь к параллельному смещению соответствующей кривой в сторону меньших значений времени обнаружения. Было выяснено также, что при поиске цели в пределах очень большого поля наблюдатель в процессе тренировки начинает действовать по определенной системе, мысленно разделяя все поле обзора на отдельные зоны ($20 \times 20^\circ$), внутри которых осуществляется случайный поиск, а переход от зоны к зоне происходит упорядоченно по строкам или столбцам. Среднее время обнаружения в этом случае уменьшается примерно в 1,5 раза. Однако этот вопрос требует дополнительных исследований, равно как и более точной, чем это делалось в описанных опытах, регистрации истинной траектории движения центра поля зрения глаза.

В случае детерминированного времени поиска цели произведение τN^2 (τ — время анализа одного элемента, N^2 — общее число анализируемых элементов) соответствует максимальному значению времени обзора. Среднее значение времени обзора можно найти, полагая, что в среднем цель находится в центре поля обзора, и для ее обнаружения нужно проанализировать $N^2/2$ элементов, т. е. затратить время $\bar{T} = \tau N^2/2$ вместо τN^2 при случайном поиске. Таким образом, в случае стационарной поисковой ситуации детерминированный поиск оптимальнее случайного.

Однако в более общем случае поисковая ситуация нестационарна, т. е. цель может появиться в определенной точке поля сразу же после того, как эта точка была проанализирована поисковой системой. При детерминированном поиске повторный контроль произойдет лишь после того, как все элементы поля обзора просмотрены, т. е. через время τN^2 . При случайном поиске существует вероятность обнаружения цели более чем один раз, примерно равная вероятности одного обнаружения. Действительно, при $\bar{m} = 1$ $P_n(m) = 0,37/m!$ и

$$P_n(1) = 0,37. \text{ Так как } P_n(0) = 0,37, \text{ то } \sum_{m=2}^{m=n} P_n(m) \approx P_n(1).$$

Следует также заметить, что при случайном поиске вероятность одного обнаружения уменьшается медленнее, чем время обнаружения, так как $P = 1 - e^{-\alpha T}$. Пусть, например, $\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$, тогда при $T = 1 \text{ с}$ $P = 0,63$, а при $T = 0,5 \text{ с}$ $P = 0,39$.

Глава 2

ТРАЕКТОРИИ СКАНИРОВАНИЯ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ПОИСКЕ (ТИПЫ РАЗВЕРТОК)

В оптико-электронных приборах используются различные *траектории сканирования*. Вид конкретной траектории определяет прежде всего форму контролируемой области поля обзора (форму растра).

Круглая форма поля образуется осесимметричными траекториями, которые создаются за счет двух составляющих сканирования. Одной из них является вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Второй может быть как вращательное, так и колебательное движение.

Прямоугольная форма поля создается обычно двумя колебательными перемещениями, хотя в некоторых случаях используется сочетание вращательного и поступательного движения.

Осесимметричные траектории сканирования могут быть разделены на ряд классов в зависимости от типа слагающих движений и соотношения между их скоростями. При этом обычно различают *спиральную* и *розеточную* траектории сканирования.

§ 2.1. ТРАЕКТОРИИ СКАНИРОВАНИЯ ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ СКАНИРУЮЩЕГО ПОЛЯ

Если имеет место колебательно-вращательное движение сканирующего поля, то спиральная траектория (архимедова спираль) образуется в том случае, когда за время одного колебания вдоль некоторой оси Oy последняя совершает несколько оборотов вокруг неподвижной точки O (рис. 14).

Спиральная траектория характеризуется шагом спирали a , который зависит от угловой скорости вращения сканирующего поля ω и линейной скорости V перемещения поля в процессе его колебания вдоль оси Oy

$$a = 2\pi V/\omega$$

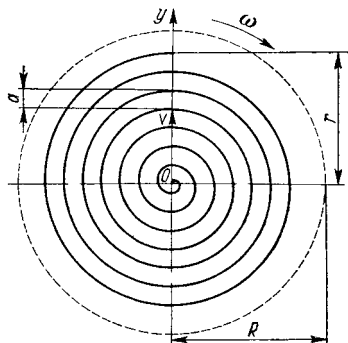


Рис. 14. Спиральная траектория сканирования при колебательно-вращательном движении сканирующего поля

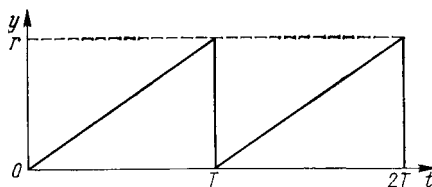


Рис. 15. График, иллюстрирующий закон движения сканирующего поля вдоль оси для спиральной траектории

При этом предполагается, что колебание сканирующего поля происходит по линейному закону, а время обратного хода равно нулю (рис. 15), т. е.

$$V = r/T,$$

где r — амплитуда колебательного движения; T — время полного колебания (период).

Практически всегда имеют место потери времени, обусловленные обратным ходом развертки. В телевизионных системах они составляют 3—8 % от времени обзора, в системах с оптико-механическим сканированием потери могут достигать 30 % и более.

Для осмотра поля обзора без пропусков размер элемента разложения (мгновенного поля зрения) должен быть равен шагу спирали,

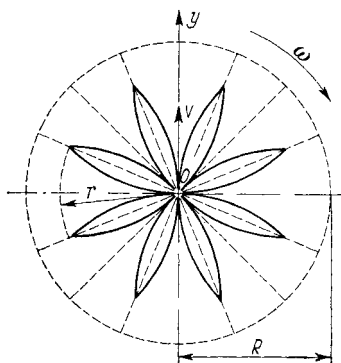


Рис. 16. Розеточная траектория сканирования при колебательно-вращательном движении сканирующего поля

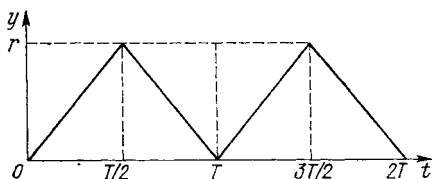


Рис. 17. График, иллюстрирующий закон движения сканирующего поля вдоль оси для розеточной траектории

который можно выразить через полное число витков спирали (число строк) z и амплитуду колебательного движения r

$$a = r/z.$$

Следовательно, число элементов, укладываемых на витке спирали, соответствующем радиусу ρ (число элементов в строке), примерно равно

$$N_c = 2\pi\rho/a = 2\pi(\rho/r)z.$$

Если поле обзора осматривается F_k раз в секунду, то время осмотра каждой спирали (каждой строки) составляет

$$T_c = 1/F_c = 2\pi/\omega = T_k/z = 1/(F_k z),$$

где частота строк $F_c = \omega/(2\pi)$, а время осмотра поля обзора (время кадра) $T_k = 1/F_k$.

Следовательно, число элементов, осматриваемых в единицу времени,

$$n = N_c/T_c = 2\pi F_k(\rho/r)z^2,$$

а время осмотра одного элемента

$$\tau = 1/n = 1/[2\pi F_k(\rho/r)z^2].$$

Полученное значение времени τ зависит от радиуса осматриваемой кольцевой зоны поля обзора ρ , что необходимо учитывать при выборе характеристик электронного тракта прибора, в частности, полосы пропускания усилителя, которая, как известно, пропорциональна числу элементов, осматриваемых в единицу времени (обратно пропорциональна минимальной длительности импульса),

$$\Delta f \approx n = 1/\tau.$$

Очевидно, что значение полосы пропускания, определенное для крайнего витка спирали ($\rho/r = 1$), является избыточным для всех

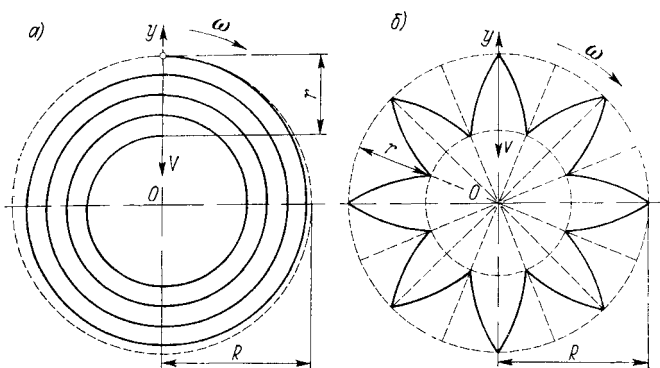


Рис. 18. Траектории сканирования при колебательно-вращательном движении сканирующего поля для $r < R$: а — спиральная; б — розеточная

остальных витков. Это связано с различной линейной скоростью движения сканирующего поля в разных точках пространства обзора при спиральной развертке.

Если при колебательно-вращательном движении сканирующего поля за время одного оборота совершается несколько колебаний, то создается розеточная траектория (рис. 16).

Розеточная траектория характеризуется числом лепестков N , которое определяется угловой скоростью вращения ω , линейной скоростью V и амплитудой r колебательного движения:

$$N = (2\pi V/\omega) [1/(2r)],$$

где $V = r/(0,5T) = 2r/T$.

Колебательное движение предполагается происходящим по закону, представленному на рис. 17.

В зависимости от соотношения между амплитудой колебательного движения r и радиусом поля обзора R , а также от направления и момента начала сканирующего колебания характер заполнения поля линиями сканирования изменяется.

Например, если колебательный процесс происходит по направлению от периферии к центру и амплитуда колебания меньше радиуса

поля обзора, то спиральная и розеточная траектории при колебательно-вращательном движении имеют вид, представленный на рис. 18.

§ 2.2. ТРАЕКТОРИИ СКАНИРОВАНИЯ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ СКАНИРУЮЩЕГО ПОЛЯ

При вращательно-вращательном движении, когда сканирующее поле вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг некоторой оси O_1 (относительное движение), которая, в свою очередь, вращается с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси O (переносное движение), вид траектории определяется соотношением скоростей ω_1 и ω_2 .

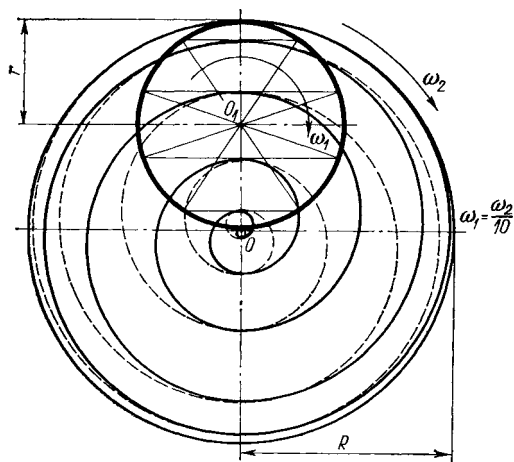


Рис. 19. Спиральная траектория сканирования при вращательно-вращательном движении сканирующего поля для $2r = R$

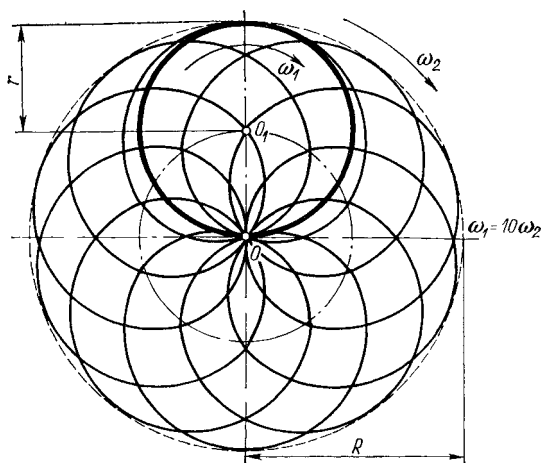


Рис. 20. Розеточная траектория сканирования при вращательно-вращательном движении сканирующего поля для $2r = R$

Если $\omega_1 < \omega_2$, имеет место спиральная траектория (рис. 19), при $\omega_1 > \omega_2$ — розеточная траектория (рис. 20).

В зависимости от соотношения радиуса относительного движения r и радиуса поля обзора R характер заполнения поля линиями сканирования изменяется. Если $2r = R$, сканируется вся круглая зона поля, если $2r < R$, сканируются только периферийные кольцевые области.

Построение спиральной и розеточной траекторий в этом последнем случае приведено на рис. 21 и 22.

Рис. 21. Спиральная траектория сканирования при вращательно-вращательном движении сканирующего поля для $2r < R$

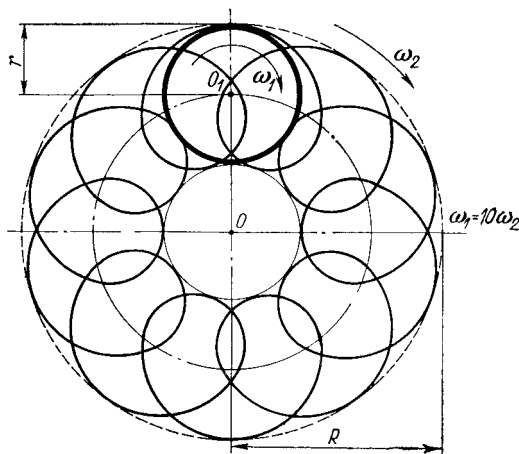
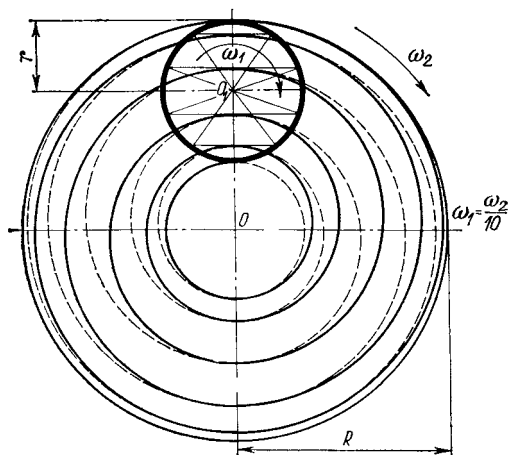


Рис. 22. Розеточная траектория сканирования при вращательно-вращательном движении сканирующего поля для $2r < R$

§ 2.3. ТРАЕКТОРИИ СКАНИРОВАНИЯ ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ СКАНИРУЮЩЕГО ПОЛЯ В ДВУХ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ, ТРАЕКТОРИЯ СКАНИРОВАНИЯ «ГУСЕНИЦА» И СЛЕДЯЩАЯ РАЗВЕРТКА

Колебательные перемещения сканирующего поля в двух взаимно перпендикулярных направлениях позволяют осуществить так называемую построчную или прогрессивную траекторию сканирования (рис. 23).

В этом случае в процессе развертки сканирующее поле перемещается слева направо в горизонтальном направлении и одновременно смещается вниз на ширину строки. Пройдя одну строку, сканирующее поле быстро возвращается влево, после чего вновь начинает перемещаться вправо, но уже вдоль следующей строки. Процесс этот продолжается до тех пор, пока сканирующее поле не пройдет последнюю строку кадра, затем оно возвращается в исходное положение — в верхний левый угол кадра (поля обзора).

Рис. 23. Построчная или прогрессивная траектория сканирования

Для получения равномерного движения сканирующего поля вдоль строки или кадра и быстрого перемещения его в исходное положение необходимо обеспечить пилообразный закон движения (рис. 24), причем перемещение слева направо называется прямым ходом строчной развертки (в течение времени $t_{пр}$), а быстрое возвра-

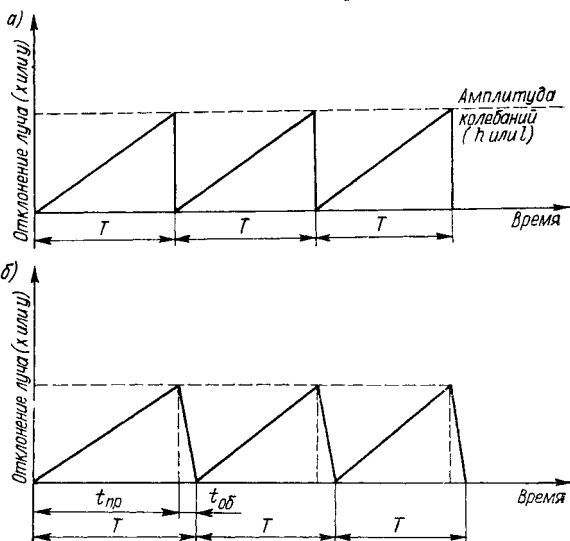


Рис. 24. График, иллюстрирующий закон движения сканирующего поля для строчной траектории сканирования: а — идеальный; б — реальный

жение в исходное положение — обратным ходом строчной развертки (в течение времени $t_{об}$). Аналогично говорят о прямом и обратном ходе развертки по кадру.

Частота колебаний, осуществляющих кадровую развертку (смещение по вертикали), должна соответствовать заданной частоте смены кадров $F_k = 1/T_k$, а частота колебаний, осуществляющих строчную развертку (смещение по горизонтали), — частоте строк $F_c = 1/T_c$, которая в z раз больше частоты кадров (z — число строк, которое укладывается в поле обзора).

Время возвращения мгновенного поля зрения в исходное положение должно быть минимальным, так как в течение этого времени полезные сигналы обычно не формируются. Однако в ряде случаев применяется синусоидальная развертка (рис. 25), при которой в качестве рабочего перемещения могут использоваться как прямой, так и обратный ход строчной развертки. Синусоидальная развертка образуется за счет колебательного движения вдоль некоторой прямой по синусоидальному закону и движения этой прямой в перпендикулярном направлении (по кадру) с постоянной скоростью V . Недостатком синусоидальной развертки является непостоянство скорости сканирования, которая возрастает в центральной части раstra. Иногда для развертки используют центральные участки синусоиды.

Для того чтобы построчная развертка осуществлялась без пропусков и наложений строк, в простейшем случае необходимо иметь размер элемента разложения, равный расстоянию между строками. Если при этом z — число строк в кадре, h — высота кадра, l — ширина, то могут быть получены следующие приближенные соотношения:

размер элемента разложения $a = h/z$;
число элементов в строке $N_c = l/a = (l/h)z = pz$, где $p = l/h$;
число элементов в кадре $N_k = N_c z = pz^2$;
число элементов, сканируемых в единицу времени, $n = F_k N_k = F_k pz^2$.

При визуальной индикации цели, находящейся в поле обзора, наименьшее значение частоты кадров F_k определяется допустимой частотой мелькания изображения. Критическая частота мельканий, при которой оператор воспринимает изображение как слитное, зависит от яркости изображения и для современных приемных телевизионных трубок составляет 48—50 Гц. Если при этом $p = 4/3$, а $z = 625$, то $n = 50 \cdot 625^2 \cdot 4/3 = 26 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$.

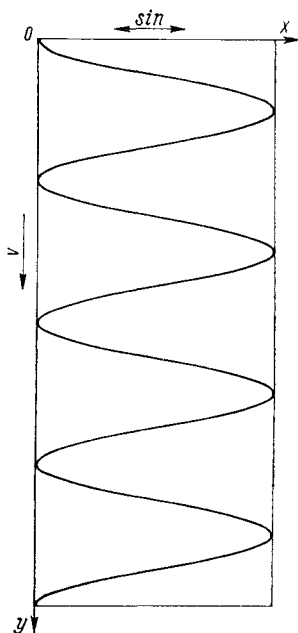


Рис. 25 Синусоидальная траектория сканирования

Для уменьшения кажущейся частоты мельканий изображения без увеличения числа элементов, сканируемых в единицу времени, может применяться *чересстрочная развертка*. В этом случае поле обзора сканируется так, что полный осмотр его осуществляется за два цикла сканирования: каждый цикл содержит либо нечетные, либо четные строки раstra. Благодаря инерционности зрения и наличию послесвечения экрана индикатора, наблюдатель видит эти поля слитно, так как межстрочное мерцание менее заметно, чем межкадровое.

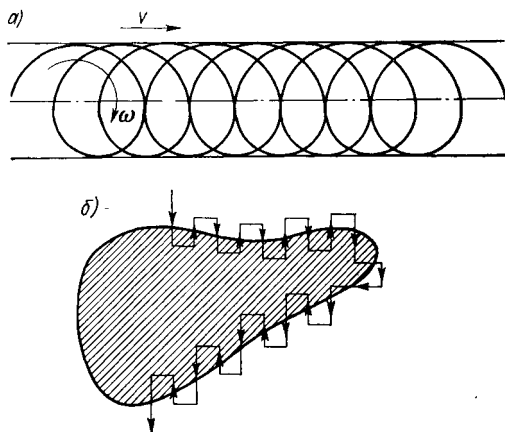


Рис. 26. Некоторые специальные траектории сканирования: а — гусеница; б — следящая развертка

Частота кадров и требуемая полоса частот, пропорциональная числу элементов, сканируемых в единицу времени, при чересстрочной развертке снижается в два раза, однако и время наблюдения полного кадра удваивается. При чересстрочной развертке повышаются требования к ее стабильности и возникает большая опасность пропуска цели, особенно движущейся.

Из числа других, менее распространенных траекторий сканирования, следует упомянуть так называемую *гусеницу* — траекторию, образованную за счет сочетания

вращательного движения с колебательным или линейным перемещением (рис. 26, а). Большой интерес представляет также *следящая развертка*, при которой мгновенное поле зрения непрерывно или дискретно перемещается вдоль контура объекта наблюдения (рис. 26, б).

Глава 3 СПОСОБЫ СКАНИРОВАНИЯ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ПОИСКЕ (ТИПЫ СКАНИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ)

При регулярном поиске сканирующее поле движется по заранее заданному закону. Выше были рассмотрены наиболее часто встречающиеся законы движения безотносительно к способу, который обеспечивает перемещение поля в пространстве. Между тем изменить направление ориентации мгновенного поля зрения оптико-электронного прибора в пространстве можно различными путями и в зависимости от используемого способа сканирования определяется тот или иной тип сканирующего прибора.

Обычно различают приборы со сканированием электронным лучом, со сканированием световым лучом, с оптико-механическим сканированием.

§ 3.1. СКАНИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫМ ЛУЧОМ

Основные принципы. Системы мгновенного действия и системы с накоплением

Сканирование электронным лучом осуществляется в телевизионных передающих трубках (иконоскоп, супериконоскоп, ортикон, суперортикон, диссектор, видикон и др.).

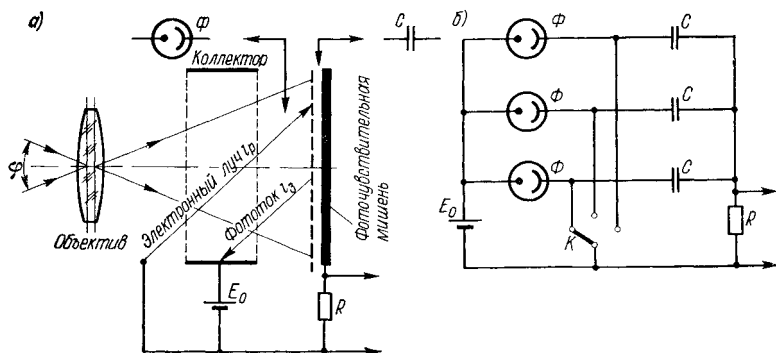


Рис. 27. Схемы передающей телевизионной трубки с накоплением: а — принципиальная; б — эквивалентная

Большинство современных передающих трубок являются фотоэлектрическими приемниками излучения с внешним фотоэффектом, обладающими достаточной чувствительностью в видимой и ближней инфракрасной области спектра до длины волны 1,2 мкм.

Однако в ряде случаев (видикон, статикон, эндикон, плюмбикон и др.) в качестве фотокатода в передающих трубках используется фоторезистор, т. е. явление внутреннего фотоэффекта. Максимальное значение длины волны, до которой удается обеспечить заметную чувствительность трубок с фоторезисторами при комнатной температуре, лежит в области 2—2,5 мкм, что позволяет наблюдать объекты, собственная температура которых не ниже 150 °С. Основная трудность создания трубки, способной обнаруживать слабонагретые объекты, состоит в том, что для удержания заряда на фотослое его удельное сопротивление должно быть велико (10^{10} — 10^{11} Ом·см), а полупроводник с большим удельным сопротивлением (большой энергией связи носителей) не имеет фоточувствительности в длинноволновой области спектра, где энергия кванта весьма мала.

Наибольшее распространение в автоматических оптико-электронных приборах получили диссектор и видикон.

Диссектор и видикон — принципиально разные чувствительные элементы: первый относится к *системам мгновенного действия*, а второй — к *системам с накоплением*.

В системах мгновенного действия энергия излучения каждой точки поля преобразуется в сигнал только в течение времени прохождения через нее сканирующего луча. Это время существенно меньше времени обзора всего поля, следовательно, в процессе преобразования не используется возможность накопления энергии.

В системах с накоплением осуществляется суммирование энергии, излучаемой данной точкой поля обзора в течение всего времени обзора, что позволяет повысить их чувствительность по сравнению с системами мгновенного действия. Во всех современных передающих телевизионных трубках, кроме диссектора и трубки с бегущим лучом, реализуется принцип накопления, суть которого можно рассмотреть, пользуясь рис. 27, на примере простейшей трубки типа *икonoskop*.

Фотокатод телевизионной трубки (мишень) представим в виде большого количества отдельных, изолированных друг от друга фотоэлементов Φ , соединенных последовательно с источником э. д. с. E_0 и RC цепью, где R — сопротивление нагрузки; C — распределенная емкость фотокатода. Под действием излучения одной из точек поля обзора ϕ происходит заряд конденсатора C фототоком i_3 в течение времени T — периода работы ключа K , замыкание которого обеспечивает разряд конденсатора в течение времени τ . Ключ K является эквивалентом сканирующей мишень пучка электронов — электронного луча. Так как время обзора T примерно соответствует суммарному времени нахождения сканирующего луча на всех N элементах разложения

$$T = N\tau,$$

где $N = pz^2$, то, имея в виду, что ток i_3 создает на обкладках конденсатора заряд $q = i_3 T$, а ток i_p за время τ определяется этим зарядом $i_p = q/\tau$, можно найти отношение силы разрядного тока к силе тока заряда

$$i_p/i_3 = T/\tau = N = pz^2 \gg 1.$$

Равный этому отношению выигрыш в величине сигнала обычно полностью реализовать не удастся, а выигрыш в отношении сигнала к шуму даже теоретически равен только \sqrt{N} , так как при увеличении силы тока сигнала в N раз среднеквадратическое значение дробового шума возрастает в \sqrt{N} раз. Системы с накоплением относительно сложны в эксплуатации, требуют стабилизации источников питания и боятся сильных засветок. В связи с этим, несмотря на меньшую чувствительность, в приборах широко используются также и системы мгновенного действия.

Диссектор

Принцип работы передающей трубки мгновенного действия — диссектора — заключается в следующем (рис. 28). Полупрозрачный фотокатод I , на который проецируется изображение светящегося

объекта, испускает внутрь трубки фотоэлектроны в количестве, пропорциональном его освещенности. Образовавшееся электронное изображение переносится с фотокатода к электронному умножителю 3 с помощью магнитного и электрического поля. Магнитное поле создается пропусканием постоянного тока по длинной фокусирующей катушке 5, а электрическое ускоряющее поле — приданием возрастающих положительных потенциалов кольцам 2, расположенным между фотокатодом и электронным умножителем. В данный момент времени в отверстие электронного умножителя проходят электроны

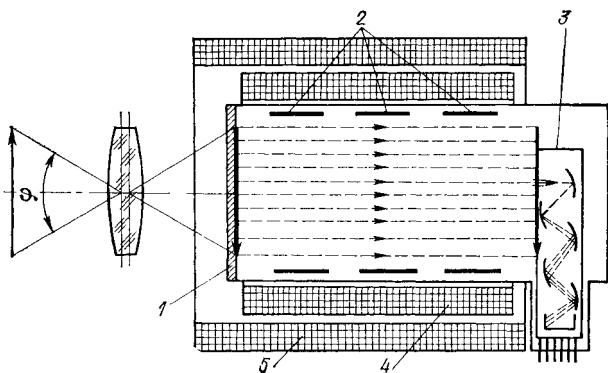


Рис. 28. Передающая телевизионная трубка мгновенного действия — диссектор

только от одного элемента изображения. Эти электроны вводятся в первый каскад электронного умножителя и после многократного усиления попадают на его анод. В анодной цепи включено сопротивление нагрузки, на котором создается напряжение сигнала, пропорциональное числу электронов, попадающих на анод.

Для последовательного получения сигналов от всех элементов изображения производится развертка с помощью магнитной системы 4, содержащей две пары отклоняющих катушек. В процессе развертки в неподвижное отверстие электронного умножителя последовательно попадают электронные потоки от всех элементов передаваемого изображения.

Наиболее распространенные в нашей стране диссекторы типа ЛИ-605-I с многощелочным фотокатодом и типа ЛИ-605-II с кислородно-серебряно-цезиевым фотокатодом имеют следующие основные характеристики. Область спектральной чувствительности диссектора типа ЛИ-605-I составляет 0,3—0,75 мкм с максимумом около 0,5 мкм; типа ЛИ-605-II — 0,5—1,1 мкм с максимумом на 0,8 мкм; диапазон рабочих освещенностей — 10—1000 лк; минимальная интегральная чувствительность фотокатода — 80 мкА/лм; плотность темнового тока при комнатной температуре 10^{-15} А/см². Размер диссецирующего отверстия диссектора ЛИ-605-I составляет 100 мкм, ЛИ-605-II — 200 мкм, рабочий размер (диаметр) чувствительной площадки фотокатода 25 мм, максимальный диаметр трубки 55 мм, длина (без выводов) 170 мм, масса 120 г. Для управления диссекторами используется отклоняющая система ФОС-120, имеющая силу тока фокусирующей катушки 0,15 А,

силу тока отклоняющих катушек (обеспечивающего сканирование всего фотокатода) 45 мА, омическое сопротивление и индуктивность каждой катушки 65 Ом и 58 мГн соответственно.

Видикон

Передающая телевизионная трубка с накоплением — видикон — устроена следующим образом (рис. 29).

На внутреннюю торцевую поверхность цилиндрического стеклянного баллона нанесена полупрозрачная металлическая пленка — сигнальная пластина 1. На нее нанесен тонкий слой полупроводника 2. Электронный прожектор состоит из катода 6, управляющего

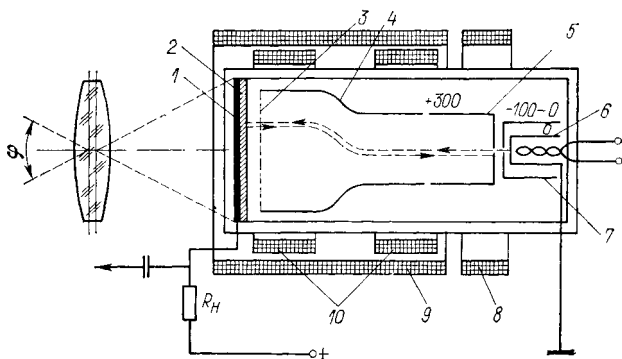


Рис. 29. Передающая телевизионная трубка с накоплением — видикон

электрода 7 и анода 5. Фокусировка луча осуществляется электродом 4, фокусирующей 9 и корректирующей 8 катушками. Для отклонения луча служат катушки 10. Нормальное падение электронов на фотослой по всей его поверхности обеспечивается сеткой 3, которая создает однородное тормозящее поле перед слоем и одновременно препятствует образованию ионного пятна.

Изображение передаваемого объекта проецируется объективом через прозрачную сигнальную пластину на полупроводниковый слой, который с обратной стороны коммутируется пучком электронов. Электронный пучок, перемещаясь по полупроводниковой мишени, оставляет на ней электроны, приводя потенциал данного элемента мишени к потенциалу катода (нулевому). За время, пока электронный пучок находится на других элементах мишени (время кадра T), потенциал рассматриваемого элемента повышается, стремясь достигнуть потенциала сигнальной пластины (20—40 В). Чем больше сопротивление полупроводника в данной точке, т. е. чем меньше ее освещенность, тем меньше успевает измениться потенциал за время отсутствия электронного пучка, следовательно, тем меньше потребуются электронов для компенсации изменения

заряда. Напротив, в освещенных участках мишени, сопротивление которых мало, за время отсутствия электронного пучка (за время развертки одного кадра изображения) напряжения на сигнальной пластине и на коммутируемой стороне мишени успевают в большей степени сравняться друг с другом и коммутируемая сторона мишени зарядится положительно. В момент коммутации ее потенциал вновь приводится к потенциалу катода, что требует большого числа электронов, т. е. большой силы тока. Этот ток, протекая через сопротивление нагрузки, создает сигналы изображения.

Наиболее чувствительными в инфракрасной области спектра являются ИК-видиконы с охлаждаемой мишенью, называемые иногда *инфраконами*. В качестве фотомишени в инфраконах используются различные полупроводниковые материалы. В частности, может применяться монокристаллический кремний *p*-типа, легированный бором и цинком. При температуре жидкого азота 77 К такая мишень имеет чувствительность к излучению абсолютно черного тела с температурой 130 К около 1 мкВт/мм². Спектральная область чувствительности мишени 0,65—4 мкм. Разработаны также мишени из поликристаллического оксисульфида свинца, арсенида индия и монокристаллического германия. Спектральная характеристика мишени из оксисульфида свинца на кремниевой подложке имеет два максимума (0,9 и 1,7 мкм). При охлаждении мишени до температуры 77 К возможно воспроизведение изображения объектов с собственной температурой 400 К при чувствительности к перепаду температур 2 К.

В качестве фотомишени в ИК-видиконах в последние годы начали использовать пироэлектрические материалы, обладающие свойством изменять свою электрическую поляризацию при изменении температуры. Такая телевизионная трубка получила название *пировидикона*. Одним из первых материалов, применявшихся в пировидиконах, был триглицинсульфат (ТГС). Монокристалл ТГС вначале электрически поляризуется под действием приложенного постоянного электрического поля. Лицевая поверхность кристалла (со стороны объектива прибора) покрыта тонким слоем золота, потенциал которого поддерживается постоянным. Падающее инфракрасное излучение создает на лицевой поверхности температурную картину и вызывает изменение поляризации в кристалле, в результате чего возникает соответствующим образом распределенная разность потенциалов между проводящей лицевой и непроводящей тыльной поверхностями. Тыльная поверхность сканируется электронным лучом; электроны вносят заряд, компенсирующий разность потенциалов. В результате ток электронного луча в функции положения луча является аналогом температурной картины, которая может, следовательно, воспроизводиться любым электронно-лучевым индикатором. Перед каждым новым кадром однородная температура чувствительного слоя должна быть восстановлена, для чего используется механическая заслонка, обеспечивающая восстановление исходной температуры кристалла ТГС в промежутке между кадрами. Пировидикон имеет разрешающую способность 10⁴ элемент/см², чувствительность к перепаду комнатной температуры около 1 К при частоте кадров 10 Гц. По крупным деталям объекта чувствительность к перепаду температур достигает 0,3—0,5 К.

Наряду с ИК-видиконами, в которых вакуумная трубка является неотъемлемым элементом устройства, для обнаружения и воспроизведения изображения в инфракрасной области спектра начали использовать *безвакуумные твердотельные сканирующие приемники излучения*. Это матричные системы, чувствительный к излучению слой которых состоит из элементарных фототранзисторов, фотодиодов, фоторезисторов и т. д. Доступ к определенному элементу для считывания сигналов осуществляется, например, подачей импульса в линию, присоединенную к затворам МОП-транзисторов (по строке), и в линию, соединяющую строки фототранзисторов (по столбцу). МОП-транзисторы находятся на одной подложке с фототранзисторами и их переключение обеспечивает последовательный опрос сигналов, вырабатываемых фоточувствительными элементами. В другом случае сканирование осуществляется путем переноса заряда в приборах с зарядовой связью (ПЗС). Чувствительность безвакуумных твердотельных сканирующих приемников излучения пока хуже, чем у ИК-видиконов, однако они могут быть созданы для работы в более

длинноволновой области спектра, а кроме того, обладают характерными для всех чисто твердотельных устройств достоинствами, а именно: малыми габаритными размерами и массой, низкими используемыми напряжениями и потребляемой мощностью, высокой надежностью, долговечностью.

§ 3.2. СКАНИРОВАНИЕ СВЕТОВЫМ ЛУЧОМ

По принципу действия к системам с электронным сканированием близки устройства со сканированием световым лучом. Примером такого устройства является термоэлектронный преобразователь изображения — *термикон*.

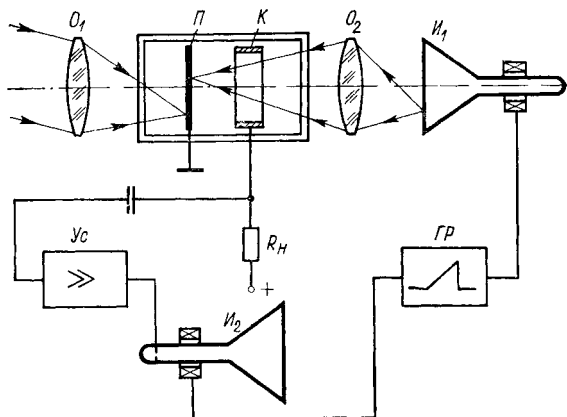


Рис. 30. Принципиальная схема термоэлектронного преобразователя изображения (термикона)

Типовая схема для получения изображения с помощью термикона имеет вид, представленный на рис. 30.

Приемная поверхность Π термикона состоит из очень тонкой пленки, покрытой с одной стороны слоем, поглощающим ИК-излучение, направляемое на него объективом O_1 , а с другой стороны — специальным фотоэлектрическим слоем. Фотослой приготовлен из материала, имеющего фотоэлектрическую эффективность, зависящую от температуры. Объективом O_2 на фотослой проецируется изображение яркого светящегося пятна, движущегося по экрану электронно-лучевой трубки I_1 по заданному закону, определяемому силой тока, поступающего в отклоняющие катушки индикатора от генератора развертки $ГР$. В зависимости от положения светящегося пятна на фотослое и распределения температуры по поверхности Π количество эмиттируемых электронов и фототок в цепи кольцевого коллектора K изменяются на 2—3 % на каждый градус изменения температуры. Изменение фототока усиливается усилителем $Ус$, выходной сигнал которого воздействует на модулирующий электрод индикатора I_2 . В отклоняющие катушки индикатора по-

ступает сигнал от генератора $ГР$, общего для индикаторов $И_1$ и $И_2$. Таким образом на экране индикатора $И_2$ может быть получено изображение невидимого глазом предмета, излучающего ИК-лучи.

Максимальная разрешающая способность термикона ограничивается теплопроводностью вдоль поверхности Π и зависит от величины температурных перепадов, которые желательно зарегистрировать. При $\Delta T = 1^\circ$ максимальное разрешение оказывается равным 50 линиям на всю картинку.

§ 3.3. ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКОЕ СКАНИРОВАНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, КЛАССИФИКАЦИЯ, ПРИБОРЫ СО СКАНИРОВАНИЕМ ЗА СЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ВСЕЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ПРИБОРЫ, СКАНИРУЮЩИЕ ЗА СЧЕТ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

В оптико-механических сканирующих устройствах процесс сканирования осуществляется за счет изменения направления оптической оси прибора. При этом общее поле обзора последовательно анализируется мгновенным полем зрения оптической системы (рис. 31).

Сканирование может производиться за счет движения всей оптической системы прибора или ее элементов — зеркал, призм, клиньев, линз и диафрагм. Оптико-механические системы, в которых сканирование осуществляется диафрагмой (щелью), движущейся в фокальной плоскости, иногда называют *экранирующими*. К устройствам этого типа относится, в частности, широко известный диск Нипкова, использовавшийся в системах механического телевидения. Своеобразные методы сканирования используются в системах с волоконной оптикой.

Сканирование может осуществляться, кроме того, путем изменения коэффициента преломления и других оптических свойств материалов, входящих в схему.

Классификация оптико-механических сканирующих устройств приведена на рис. 32.

Сканирование за счет движения всей системы осуществляется прежде всего в тех случаях, когда возможно использовать перемещение платформы, на которую устанавливается прибор. Это имеет место, в частности, при установке радиометров или приборов, предназначенных для обзора поверхности Земли, на самолет или искусственный спутник (рис. 33). В этом случае осуществляется сканирование вдоль строки на местности с линейной скоростью, соответствующей скорости движения платформы. Линейные

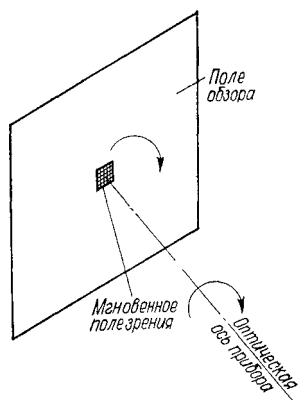


Рис. 31. Оптико-механическое сканирование за счет изменения направления оптической оси прибора

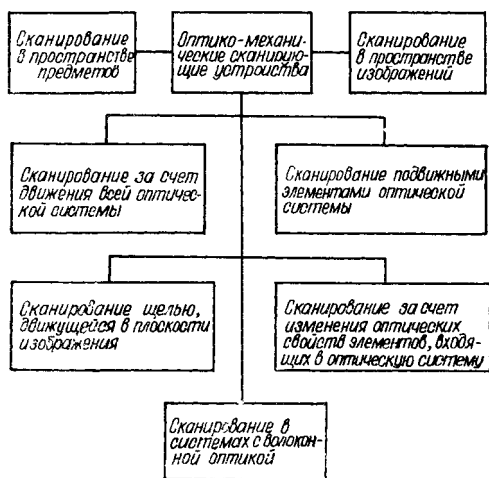


Рис. 32. Классификация оптико-механических сканирующих устройств

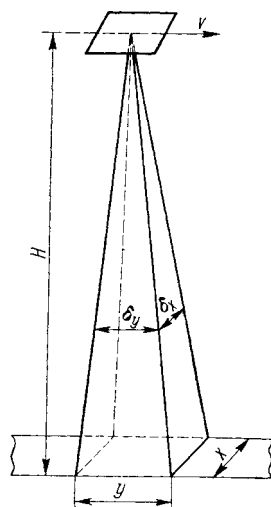


Рис. 33. Однострочное сканирование с движущейся платформой

размеры мгновенного поля зрения на поверхности Земли для одного элемента в этом случае составляют:

$$x = \delta_x H; y = \delta_y H.$$

Для обзора более широкой полосы на местности обычно используется дополнительное сканирующее движение оптической оси поперек направления полета.

Сканирование за счет прецессии гироскопа реализуется в некоторых системах автоматического сопровождения. В этих системах объектив, приемник излучения и усилитель фототока выполняются в виде единого вращающегося узла, являющегося одновременно ротором гироскопа. Как известно, при воздействии на трехстепенный гироскоп внешнего возмущающего момента, вектор которого не совпадает с осью вращения ротора, возникает гироскопический момент, и под его влиянием гироскоп начинает прецессировать в направлении совмещения вектора \vec{H} кинетического момента гироскопа с вектором \vec{M} внешнего мо-

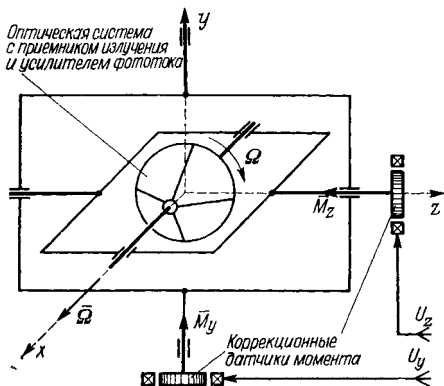


Рис. 34. Сканирование за счет прецессии гироскопа

ента. Как известно, при воздействии на трехстепенный гироскоп внешнего возмущающего момента, вектор которого не совпадает с осью вращения ротора, возникает гироскопический момент, и под его влиянием гироскоп начинает прецессировать в направлении совмещения вектора \vec{H} кинетического момента гироскопа с вектором \vec{M} внешнего мо-

мента. Прецессия происходит с угловой скоростью

$$\omega_{\text{пр}} = M \sin \beta / H.$$

Здесь β — угол между векторами \vec{M} и \vec{H} , $\vec{H} = J\vec{\Omega}$, где $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения гироскопа; J — полярный момент инерции ротора.

Прецессионное движение гироскопа в первом приближении может рассматриваться как движение без инерции. Оно появляется при приложении внешнего момента и прекращается при его исчезновении. Это свойство трехстепенного гироскопа используется при обзоре и автоматическом сопровождении. Внешний момент \vec{M} или его составляющие \vec{M}_x и \vec{M}_y создаются в этом случае коррекционными датчиками момента, связанными с осями вращения рамок гироскопа (рис. 34). В режиме обзора на эти датчики подаются переменные напряжения, форма которых обеспечивает получение необходимой траектории сканирования. В режиме автоматического сопровождения на датчики моментов поступают сигналы рассогласования, пропорциональные составляющим угла между оптической осью прибора и направлением на цель. Прецессия гироскопа прекращается в этом случае лишь после того, как оптическая ось оказывается направленной на цель.

Глава 4

СКАНИРОВАНИЕ ЗЕРКАЛАМИ

В рассматриваемом случае на пути потока излучения, идущего от объекта, устанавливается зеркало, плоскость которого изменяет свое положение в пространстве, осуществляя тем самым требуемую развертку изображения.

Зеркало размещается либо до объектива, либо за ним в зависимости от того, используется сканирование в пространстве предметов или в пространстве изображений.

§ 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Сканирование в пространстве предметов и изображений

При сканировании в пространстве предметов (рис. 35) необходимое поле обзора обеспечивается за счет поворотов сканирующего зеркала, в то время как объектив может быть узкопольным и качество создаваемого им изображения должно быть достаточно высоким лишь в пределах мгновенного поля зрения.

При сканировании в пространстве изображений (рис. 36) используется широкоугольный объектив, обеспечивающий высокое качество изображения по всему полю обзора. В этом случае зеркало устанавливается за объективом и в процессе сканирования последовательно направляет излучение отдельных элементов изображения на приемник.

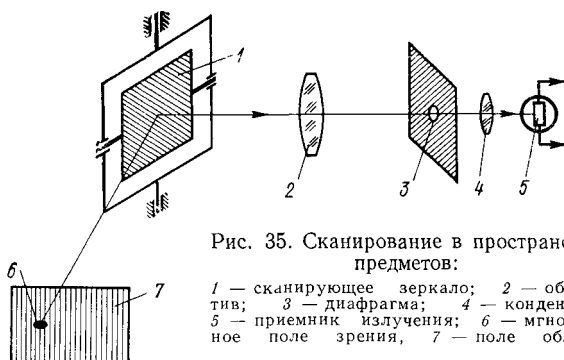


Рис. 35. Сканирование в пространстве предметов:

1 — сканирующее зеркало; 2 — объектив; 3 — диафрагма; 4 — конденсор, 5 — приемник излучения; 6 — мгновенное поле зрения, 7 — поле обзора

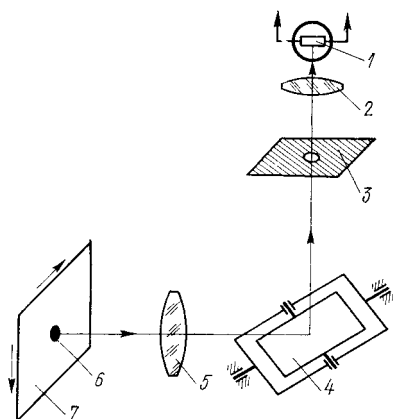


Рис. 36. Сканирование в пространстве изображений:

1 — приемник излучения; 2 — конденсор, 3 — диафрагма; 4 — сканирующее зеркало, 5 — объектив, 6 — мгновенное поле зрения, 7 — поле обзора

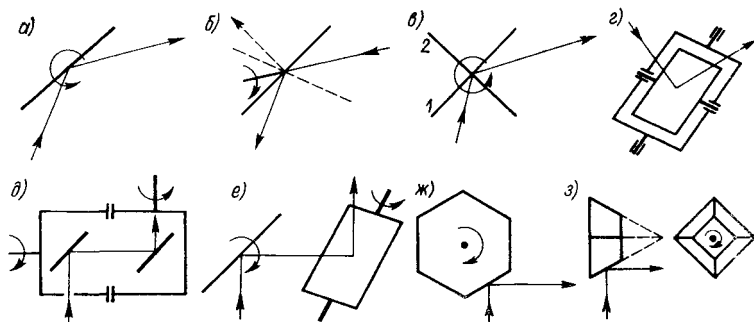


Рис. 37. Типы сканирующих зеркал: а — вращающееся двустороннее (двугранное) зеркало; б — зеркало, вращающееся вокруг оси, перпендикулярной к нему; в — «крест» из зеркал 1 и 2, г — зеркало, качающееся в двух плоскостях; д — система из двух вращающихся зеркал; е — два зеркала, вращающихся или качающихся вокруг взаимно перпендикулярных осей; ж — вращающаяся зеркальная N -гранная пирамида

Наряду с простым зеркалом в сканирующей системе может использоваться система зеркал, зеркальные призмы, пирамида и т. д. (рис. 37).

Изменение положения зеркала, качающегося в двух плоскостях (рис. 37, з), может осуществляться посредством разнообразных электромеханических и электромагнитных устройств. Для выполнения построчного сканирования такое зеркало должно иметь два колебательных движения относительно взаимно перпендикулярных осей. Пространственное перемещение зеркала может осуществляться, например, с помощью кулачковых механизмов. Профиль кулачка выбирается таким образом, чтобы время прямого и обратного движения сканирующего поля было существенно различным, при этом развертка изображения производится только во время прямого хода луча, составляющего 0,6—0,9 от времени полного колебания, а во время обратного хода зеркало должно вернуться в свое исходное положение.

В процессе сканирования мгновенное поле зрения прибора движется в плоскости расположения объекта наблюдения по некоторой траектории, образуя растр, форма которого определяется не только желаемым законом сканирования, но и конструкцией сканирующей системы. В результате несоответствия формы раstra некоторой идеальной форме, определяемой законом сканирования, возникают искажения, требующие либо учета и сведения к минимуму, за счет ограничения углов поля обзора, выбора наиболее рациональной оптической схемы и т. д., либо разработки специальных методов автоматической компенсации.

Траектория сканирования плоским зеркалом

Траектория движения сканирующего поля, образованная в плоскости объекта при построчном сканировании с помощью качающегося зеркала, зависит от способа его закрепления и в наиболее простом случае может быть найдена следующим образом.

Пусть плоское зеркало расположено под углом γ к оптической оси объектива, причем начальное значение угла установки $\gamma = \gamma_0 = 45^\circ$ (рис. 38). Сканирование вдоль строк осуществляется за счет поворота зеркала вокруг вертикальной оси NN на угол $\pm\beta$. Сканирование по кадру осуществляется путем поворота зеркала вокруг оси MM в пределах угла $\pm\Delta\gamma = \gamma - 45^\circ$.

Перемещение сканирующего поля в плоскости объекта характеризуется координатами x и y , которые связаны с углами отклонения зеркала следующими соотношениями:

$$x = L_0 \operatorname{tg} \beta; \quad y = L \operatorname{tg} \alpha = (L_0 / \cos \beta) \operatorname{tg} \alpha,$$

где $\alpha = 2\Delta\gamma$ — угол поворота сканирующего поля.

Следовательно, при $\alpha = 0$ и $y = 0$ для любого β , т. е. средняя строка раstra, образованного сканирующим полем, будет прямой. Если же $\alpha \neq 0$, то координата y зависит от угла β и сканирующее

поле будет двигаться в плоскости объекта не по прямой, а по изогнутой линии.

Количественной характеристикой отклонения раstra от прямоугольного может быть наибольшее относительное изменение размеров раstra, соответствующее краю поля обзора ($\alpha = \alpha_{\max}$),

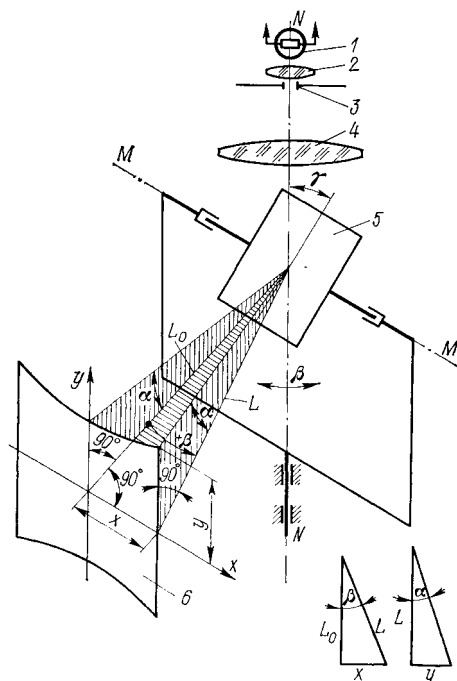


Рис. 38. Траектория сканирования (форма раstra) при построчном сканировании плоским зеркалом:

1 — приемник излучения; 2 — конденсор; 3 — диафрагма поля; 4 — объектив; 5 — сканирующее зеркало; 6 — плоскость расположения объекта

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{y_0} &= \frac{y_{\max} - y_0}{y_0} = \\ &= \frac{(L_0/\cos \beta_{\max}) \operatorname{tg} \alpha_{\max} - (L_0/\cos 0) \operatorname{tg} \alpha_{\max}}{(L_0/\cos 0) \operatorname{tg} \alpha_{\max}} = \\ &= \frac{1}{\cos \beta_{\max}} - 1. \end{aligned}$$

Для малого β_{\max} $\cos \beta_{\max} \approx 1 - \beta_{\max}^2/2$, т. е. $\Delta y/y_0 \approx \beta_{\max}^2/2$.

При повороте зеркала вокруг осей с постоянной скоростью сканирующий луч будет двигаться с переменной скоростью. Действительно, пренебрегая зависимостью y от β , найдем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} = \\ &= \dot{\beta} \frac{dx}{d\beta} = \dot{\beta} L_0 \frac{1}{\cos^2 \beta}; \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \\ &= \dot{\alpha} \frac{dy}{d\alpha} = \dot{\alpha} L_0 \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Относительное изменение скорости сканирующего луча при его перемещении от середины к краям поля обзора равно:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_{\beta=\beta_{\max}} - \dot{x}_{\beta=0}}{\dot{x}_{\beta=0}} &= \frac{\Delta \dot{x}}{\dot{x}_0} = \frac{1}{\cos^2 \beta_{\max}}; \\ \frac{\dot{y}_{\alpha=\alpha_{\max}} - \dot{y}_{\alpha=0}}{\dot{y}_{\alpha=0}} &= \frac{\Delta \dot{y}}{\dot{y}_0} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_{\max}}. \end{aligned}$$

При $\alpha_{\max} = 5^\circ$; $\beta_{\max} = 10^\circ$ имеем: $\Delta y/y_0 = 1/\cos \beta_{\max} - 1 = 1/\cos 10^\circ - 1 \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$; $\Delta \dot{x}/\dot{x}_0 = 1/\cos^2 10^\circ \approx 3 \cdot 10^{-2}$; $\Delta \dot{y}/\dot{y}_0 = 1/\cos^2 5^\circ \approx 1 \cdot 10^{-2}$.

Если в системе записи изображения расстояние между строками и скорость движения записывающего луча постоянны, то изображение

ние объекта будет геометрически искажено. Однако при небольших полях обзора и рассмотренном способе качания зеркала искажения будут небольшими (относительное изменение размеров раstra не превышает 1—3 %).

Несколько бóльшие искажения возникают при ином способе крепления сканирующего зеркала, который, тем не менее, находит применение в силу присущей ему жесткости конструкции (рис. 39). В этом случае сканирующее зеркало жестко крепится на оси NA под углом 45° . Сканирование вдоль строки (на рис. 39 по горизонтали) обеспечивается поворотом зеркала вокруг этой оси на угол $\pm\varphi$, а отклонение сканирующего луча по кадру (по вертикали) осуществляется за счет поворота сканирующего зеркала на угол $\pm\gamma$ вместе с осью, на которой оно закреплено, вокруг оси MM , проходящей через точку A пересечения оси NA с плоскостью зеркала.

Соответствующие расчеты и эксперименты, выполненные Г. М. Овчаренко, показывают, что форма раstra, прочерчиваемого в плоскости объекта сканирующим полем, в такой системе близка к трапеции. Искривления строк в верхней и нижней частях раstra примерно одинаковы. Их можно оценить

коэффициентами $(h_{a\max} - h_{вср})/h_{вср}$ и $(h_{и\max} - h_{и\text{ср}})/h_{и\text{ср}}$, зависящими от углов φ и γ . При $\gamma = \pm 2,5^\circ$ и $\varphi = \pm 10^\circ$ (поле обзора $10 \times 20^\circ$) искривление строк составляет около 3 %.

Угловой размер каждой строки изменяется по полю и для тех же значений углов обзора степень его изменения, характеризуемая коэффициентами $(b_{\max} - b_{ср})/b_{ср}$ и $(b_{ср} - b_{\min})/b_{ср}$, составляет примерно 5 %.

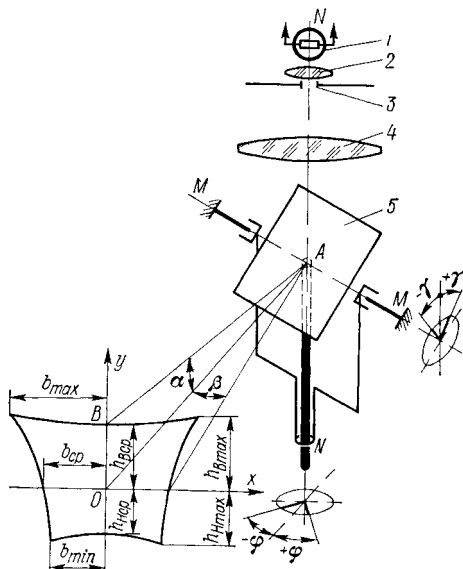


Рис. 39. Траектория сканирования (форма раstra) при построчном сканировании плоским зеркалом, жестко закрепленным на оси: 1 — приемник излучения, 2 — конденсор, 3 — диафрагма поля, 4 — объектив, 5 — сканирующее зеркало

Примеры сканирующих устройств — тепловизоры «Рубин», «Филин» и камера Барнса

Сканирование зеркалом осуществлено в тепловизоре «Рубин» (СССР) — приборе, предназначенном для наблюдения малых перепадов температуры при решении медицинских и промышленных задач. Обзор поля $20 \times 10^\circ$ осуществляется тепловизором «Рубин»

в течение 1 мин мгновенным полем зрения, равным $7'$. Минимальная разность температур, обнаруживаемая прибором, составляет $0,05^\circ$ на фоне комнатной температуры. Изображение регистрируется на электрохимической бумаге. В качестве приемника излучения используется фотосопротивление из антимонида индия, охлаждаемое жидким азотом. Внешний вид двух модификаций тепловизора «Рубин» представлен на рис. 40 и 41 (см. вклейку).

Сканирование зеркалом, приводимым в движение кулачками строчной и кадровой развертки, использовано в тепловизоре фирмы «Барнс инжиниринг компани» (США), известном также под названием

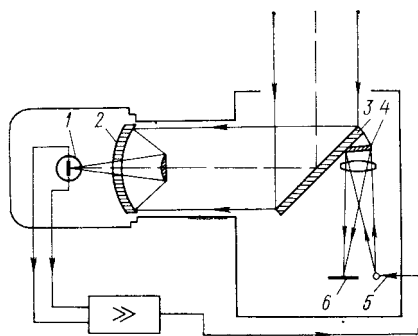


Рис. 42. Принципиальная схема сканирования и записи изображения в камере Барнса

камеры Барнса, в тепловизоре «Филин» (СССР), тепловизоре «Инфра—Ай» (Япония) и др. Камера Барнса в одной из первых модификаций обеспечивает обзор поля $20 \times 10^\circ$ за время 4 мин мгновенным полем зрения $3,5'$. Минимальная разность температур, обнаруживаемая тепловизором, равна $0,08^\circ$. Приемник излучения — неохлаждаемый болометр; запись изображения осуществляется на фотоматериале.

Форма раstra в этом случае близка к трапецидальной. Степень отличия раstra от прямоугольного для поля обзора $20 \times 10^\circ$ достигает 20 %.

Однако искажения изображения температурного поля в камере Барнса не происходит благодаря наличию жесткой синхронизации сканирующего и записывающего лучей, при которой записывающий луч в системе регистрации изображения перемещается по тому же закону, что и сканирующий луч. В камере Барнса (рис. 42) сканирующее зеркало 3, совершающее пространственное движение от кулачкового привода, направляет излучение от объекта через зеркальный объектив 2 на полупроводниковый болометр 1, который вырабатывает электрический сигнал, управляющий яркостью лампы тлеющего разряда 5. С обратной стороны сканирующего зеркала расположено второе зеркало 4, которое отражает излучение лампы 5 на фотопластинку 6. Вследствие этого положение изображения лампы на фотопластинке строго соответствует положению сканирующего луча в плоскости предметов, а степень почернения пластинки, определяемая яркостью лампы, зависит от величины сигнала, вырабатываемого болометром, т. е. от яркости объекта.

В ряде случаев не представляется возможным осуществить жесткую синхронизацию записывающего и сканирующего лучей. Это имеет место, например, при воспроизведении изображения на экране электронно-лучевой трубки, где развертка осуществляется генера-

тором пилообразного напряжения, синхронизируемого датчиками опорных сигналов, связанными со сканирующим зеркалом. Как уже отмечалось выше, поскольку при этом в системе записи расстояние между строками постоянно, то изображение объекта будет геометрически искажено. В случае особой надобности эти искажения могут быть скорректированы таким выбором профилей кулачков механизма сканирования, чтобы скорость движения визирного луча была постоянна.

Следует отметить, что точность профиля кулачков механизма сканирования должна быть очень высокой. Зададимся, например, условием, обеспечивающим изменение скорости движения визирного луча от одного элемента разложения к другому не более чем на $\pm 10\%$, и пусть при этом приращение радиуса кулачка составляет 15 мм на всю строку. Если в строке содержится 200 элементов разложения, то приращение радиуса кулачка на один элемент разложения составит 0,075 мм. Следовательно, для выполнения поставленного условия приращения радиуса кулачка на один элемент разложения должны отличаться от расчетных не более чем на $\pm 0,0075$ мм. Поскольку на равномерность движения визирного луча влияют и другие детали конструкции (подшипники за счет люфта и т. д.), точность, с которой необходимо изготовить кулачок, должна быть еще повышена.

§ 4.2. СКАНИРОВАНИЕ МНОГОГРАННЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЗЕРКАЛАМИ В ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЕ ДЛЯ КАРТОГРАФИРОВАНИЯ И ОБЗОРА МЕСТНОСТИ

Принцип действия аппаратуры

В оптико-электронной аппаратуре, предназначенной для *картографирования и обзора местности* с самолета (рис. 43), одним из основных элементов является многогранное зеркало, которое вращается вокруг оси *ОО*, совпадающей с направлением полета. Вращающееся зеркало осуществляет сканирование земной поверхности поперек направления полета. Собственное движение самолета обеспечивает сканирование вдоль направления полета. Излучение от элементов земной поверхности отбрасывается плоскими зеркалами (на рис. 44 отдельными гранями зеркала *З*) на вогнутое зеркало — объектив *Об*, проецирующий изображение элемента местности на чувствительную площадку приемника излучения *Пр*. При вращении многогранного зеркала визируются различные участки местности и поток излучения, падающий на приемник, изменяется. Это изменение преобразуется в переменный электрический сигнал, который пропорционален разности излучений двух соседних участков местности.

Сигнал усиливается усилителем *Ус* и управляет яркостью луча индикатора — электронно-лучевой трубки *И*, в то время как развертка вдоль горизонтальных строк производится синхронно с вращением зеркала (например, генератором пилообразного напряжения *ГС*, возбуждаемого индукционным датчиком *ИД* — генератором

импульсов синхронизации строк), а перемещение строк по вертикали осуществляется согласованно со скоростью и высотой полета самолета генератором кадровой развертки ГК.

Вследствие этого на экране индикатора возникает карта участка местности, на которой более сильно излучающие участки местности представляются светлыми пятнами. Эта карта может фотографироваться с экрана индикатора на киноленту, записываться на электрохимическую бумагу или магнитную ленту либо по радиоканалу передаваться на землю.

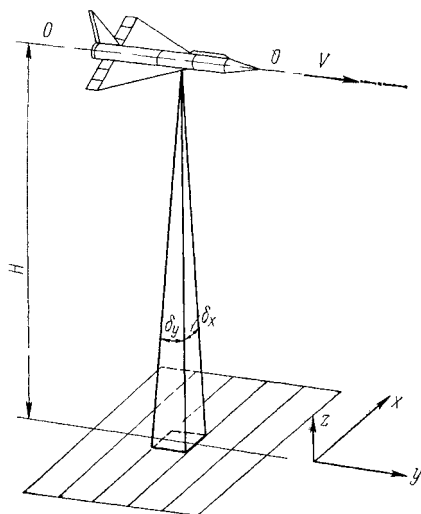


Рис. 43. Схема сканирования для картографирования и обзора местности с самолета

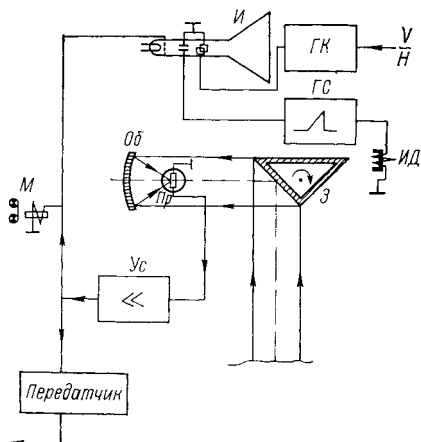


Рис. 44. Принципиальная схема аппаратуры для картографирования и обзора местности с самолета

Внешний вид ИК-аппаратуры для картографирования и обзора местности с самолета представлен на рис. 45а (см. вклейку). На рис. 46 приведены примеры полученных с помощью такой аппаратуры тепловых фотографий.

В качестве сканирующего зеркала в аппаратуре для картографирования и обзора местности с самолета может использоваться вращающаяся N -гранная призма (рис. 47) или усеченная N -гранная пирамида (рис. 48). В первом случае ось вращения сканирующего зеркала перпендикулярна, а во втором — параллельна оптической оси объектива. Искажение формы раstra при сканировании многогранными зеркалами рассмотрено в § 4.5 (см. рис. 71 и 72).

Приемник излучения может быть многоэлементным и располагаться так, что проекция линейного ряда из M чувствительных элементов приемника на Землю ориентируется в направлении полета. В этом случае одновременно «осматривается» M строк поля обзора. При использовании *многоэлементного приемника* схема электрон-

ного тракта оптико-электронного прибора усложняется (рис. 49). Электрический сигнал, вырабатываемый каждым элементом приемника $Пр$, усиливается до значения, превышающего уровень собственных шумов последующих элементов схемы. Это усиление осу-

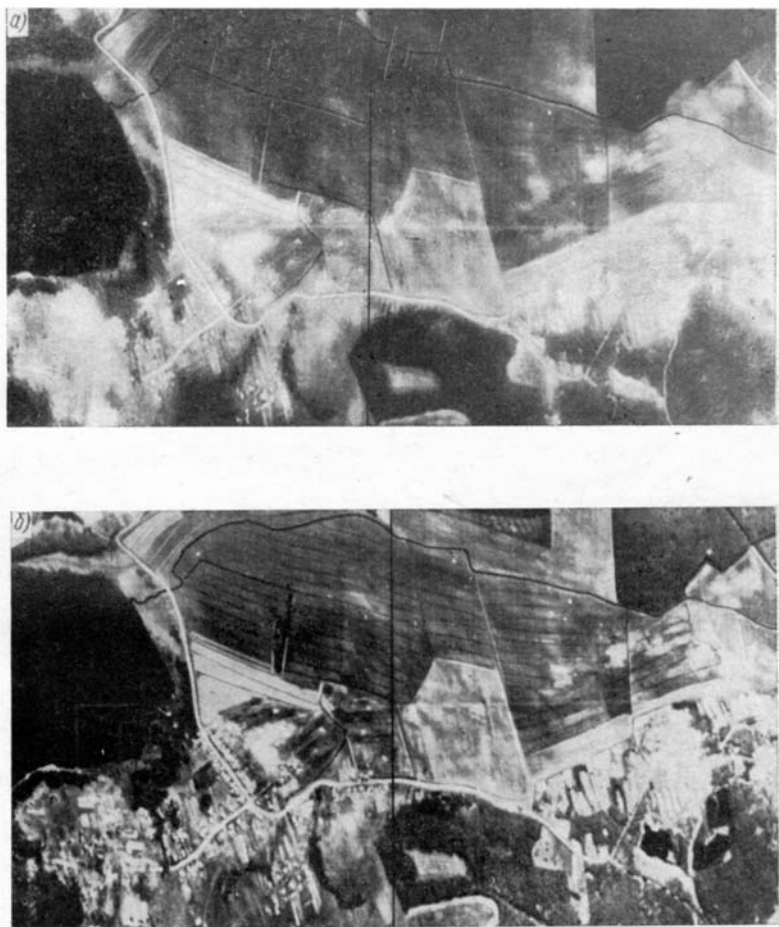


Рис. 46. Тепловые фотографии a — в спектральном диапазоне 3—5 мкм, $б$ — в спектральном диапазоне 8—14 мкм

ществляется предусилителями $ПУ$ (число предусилителей равно M). Выходные сигналы предусилителей поступают на общий усилитель $Ус$ через скоростной коммутатор $К$, представляющий собой набор ключей ($K_1, K_2, K_3, \dots, K_M$), подключающих предусилители к усилителю в определенной последовательности, задаваемой распределителем P . Последний работает таким образом, что

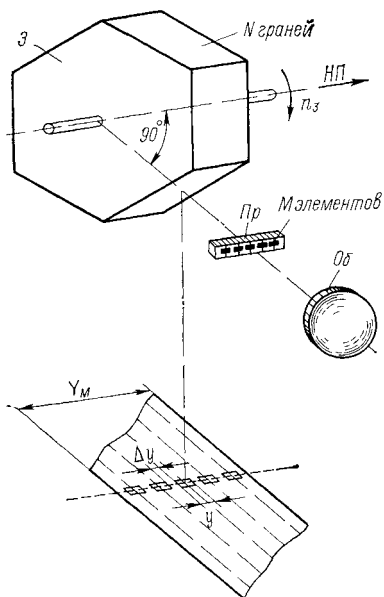


Рис. 47. Сканирующее зеркало в виде многогранной призмы:

Об — объектив; Пр — приемник из M элементов; $З$ — зеркало с N гранями; $НП$ — направление полета

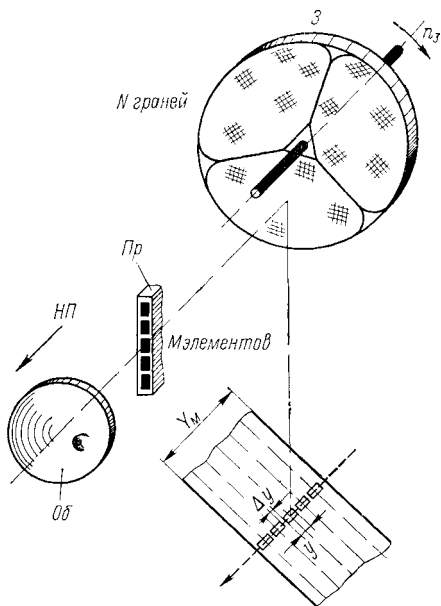


Рис. 48. Сканирующее зеркало в виде многогранной усеченной пирамиды:

Об — объектив; Пр — приемник из M элементов; $З$ — зеркало с N гранями; $НП$ — направление полета

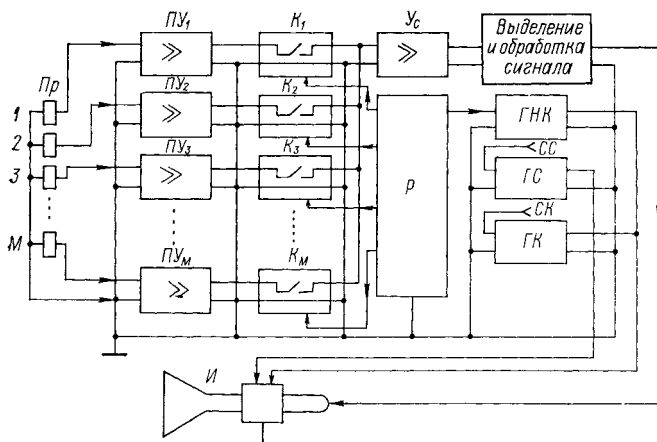


Рис. 49. Структурная схема электронного тракта оптико-электронного прибора с многоэлементным приемником:

1, 2, 3, ..., M — чувствительные элементы приемника излучения

все M элементов приемника излучения (M предусилителей) коммутируются за время, меньшее времени поворота сканирующего зеркала на угол, соответствующий элементу разложения δ_x . Полученный сигнал после усиления и обработки используется для регистрации, например для модуляции яркости луча электронно-лучевого индикатора I .

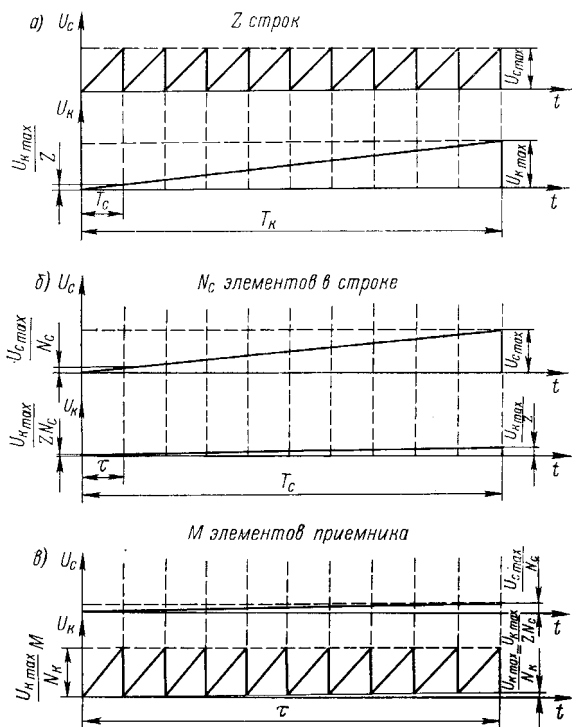


Рис. 50. Идеализированная форма сигналов строчной (а), кадровой (б) и надкадровой (в) разверток в схеме с многоэлементным приемником

Развертка луча индикатора по строкам осуществляется от генератора строчной развертки $ГС$, синхронизируемого датчиком синхронизации строк $СС$, связанного со сканирующим зеркалом. За время прохождения лучом электронно-лучевого индикатора одного элемента разложения по строке луч отклоняется по кадру на M элементов разложения. Это осуществляется генератором надкадровой развертки $ГНК$, синхронизируемым распределителем P . Таким образом, в результате надкадровой и строчной разверток на экране индикатора образуется растр, состоящий из M строк. Благодаря наличию генератора кадровой развертки $ГК$ этот растр движется по кадру со скоростью, соответствующей отношению V/H .

Форма сигналов строчной, кадровой и надкадровой разверток показана на рис. 50. На этом рисунке введены следующие обозначения: U_c — сигналы строчной развертки; U_k — сигналы кадровой развертки; T_k — время кадра; T_c — время строки; τ — время сканирования одного элемента разложения. Предполагается, что надкадровая развертка обеспечивает опрос всех M элементов приемника за время τ .

Поле обзора и угловой размер строки

Если перед объективом прибора установлено вращающееся со скоростью n_z , мин^{-1} N -гранное зеркало, то угол сканирования (угловой размер строки) может быть найден следующим образом.

Когда зеркало поворачивается на угол γ , сканирующий луч отклоняется на угол φ , причем в общем случае $\varphi = p\gamma$.

Если сканирование осуществляется многогранной призмой, т. е. ось вращения зеркала перпендикулярна к оптической оси объектива, то $p = 2$ и при повороте зеркала на угол γ луч отклонится на угол 2γ , т. е. $\varphi_{\text{пр}} = 2\gamma$.

Если же ось вращения зеркала параллельна оси объектива (сканирование многогранной усеченной пирамидой), то $p = 1$ и $\varphi_{\text{пр}} = \gamma$.

Следовательно, при повороте зеркала на угол $\gamma_{\text{гр}}$, равный углу между перпендикулярами к соседним граням, луч отклонится на угол $\varphi_{\text{max}} = p\gamma_{\text{гр}}$.

Очевидно, что угол φ_{max} не может быть реализован практически, так как для этого размеры зеркала должны быть бесконечно большими. Лишь в пределах ограниченного угла поворота зеркала не наступает уменьшения падающего на приемник потока излучения вследствие виньетирования, т. е. сохраняется полный действующий диаметр объектива.

Таким образом, угловой размер строки (угол поля обзора по строке) составляет некоторую часть угла φ_{max} , т. е.

$$\varphi_c = \eta \varphi_{\text{max}} = \eta p \gamma_{\text{гр}},$$

где η — коэффициент использования зеркала.

Значение коэффициента η зависит от конструкции сканирующего устройства и режима работы электрической схемы прибора, которая может быть «открыта» для прохождения сигнала лишь в течение небольшого отрезка времени T_c по сравнению со временем поворота зеркала на угол $\gamma_{\text{гр}}$. Угол, на который повернется зеркало за время T_c , определяет угловой размер строки. Так как $\gamma_{\text{гр}} = 2\pi/N$, то

$$\varphi_c = \eta p \gamma_{\text{гр}} = \eta 2\pi / (N/p) = \eta 360^\circ / (N/p).$$

Обычно значение коэффициента использования зеркала находится в пределах $\eta = 0,2 \div 0,75$. Для $\eta = 0,75$ и $\varphi_c = 90^\circ$ имеем $N/p = 3$, т. е. можно применять трехгранную пирамиду ($p = 1$) или шестигранную призму ($p = 2$).

Основные соотношения, определяющие параметры сканирующей аппаратуры, могут быть получены из условия отсутствия пропусков при сканировании.

Один элемент приемника излучения, имеющий угловой размер вдоль направления полета (по кадру) δ_y , образует при сканировании на поверхности Земли полосу, ширина которой в центре поля обзора равна $y = \delta_y H$. Ширина полосы, сканируемой M элементами, угловые расстояния между которыми равны $\delta_{\Delta y}$ (рис. 51), будет

$$Y_M = (\delta_y + \delta_{\Delta y}) HM = \delta_{y+\Delta y} HM,$$

где $\delta_{y+\Delta y} = \delta_y + \delta_{\Delta y}$.

Время, в течение которого эта полоса сканируется одной гранью зеркала (период строки),

$$T_c = \varphi_{\max}/\omega = \varphi_c/(\eta\omega).$$

Здесь ω — угловая скорость вращения сканирующего луча, $\omega = p\omega_3 = p2\pi f_3 = p2\pi n_3/60$, где ω_3 — угловая скорость вращения зеркала. Отсюда

$$T_c = \varphi_c/(\eta\omega) = (60/n_3) [\varphi_c/(2\pi)] [1/(\eta p)].$$

Так как $\varphi_c = \eta 2\pi/(N/p)$, следовательно, $T_c = (60/n_3) (1/N)$.

Расстояние, пролетаемое самолетом за время T_c ,

$$Y_c = VT_c = (60/n_3) (V/N).$$

Линейный размер пропуска $\Delta = Y_c - Y_M = (60/n_3) (V/N) - \delta_{y+\Delta y} HM$.

Линейный размер пропуска за один оборот N -гранного зеркала

$$\Delta_1 = N\Delta = (60/n_3) V - \delta_{y+\Delta y} HMN.$$

Так как за один оборот зеркала сканируется полоса шириной

$$B = \delta_{y+\Delta y} HMN,$$

то относительный размер пропуска (относительное число потерянных строк)

$$q = \Delta_1/B = (60/n_3) (V/H) (1/\delta_{y+\Delta y} MN) - 1.$$

Условие отсутствия пропусков $\Delta \leq 0$, т. е. $(60/n_3) (V/N) \leq \delta_{y+\Delta y} HM$, откуда

$$n_3 \geq (V/H) (60/\delta_{y+\Delta y} NM).$$

Время, в течение которого «точечный» объект визируется одним элементом приемника (время сканирования одного элемента,

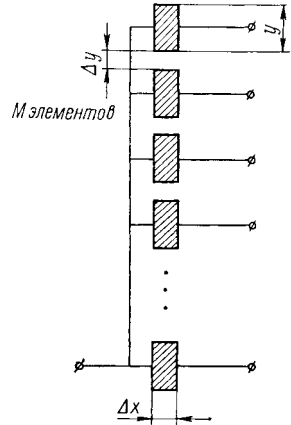


Рис. 51. Схема расположения чувствительных площадок приемника излучения (размеры приведены к плоскости предметов, т. е. к поверхности Земли)

определяющее минимальную длительность импульса τ), равно

$$\tau = \delta_x / \omega = [\delta_x / (2\pi p)] (60/n_3),$$

откуда

$$n_3 = [\delta_x / (2\pi p)] (60/\tau).$$

Сравнивая уравнения для n_3 , найдем

$$\delta = \sqrt{\delta_x \delta_{y+\Delta y}} = \sqrt{\frac{2\pi}{(N/p)} \frac{\tau}{M} \frac{V}{H}}$$

или

$$\tau = \frac{N}{p} \frac{M}{2\pi} \frac{\delta^2}{(V/H)},$$

где $\delta = \delta_x \delta_{y+\Delta y}$ — среднее геометрическое мгновенное поле зрения оптической системы.

В случае картографирования с малых высот примем $V = 300$ м/с; $H = 300$ м. Если $\tau = 20 \cdot 10^{-6}$ с; $N/p = 3$, то $\delta = 6,5 \cdot 10^{-3} / \sqrt{M}$.

При $M = 1$ $\delta = 6,5 \cdot 10^{-3} \approx 22'$. Если $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ ($y = 1$ м), то необходимо иметь приемник с числом элементов $M = 5$.

В случае картографирования с больших высот примем $V = 1000$ м/с; $H = 30\,000$ м. При тех же условиях имеем $\delta = 1,2 \times 10^{-3} / \sqrt{M}$. При $M = 1$ $\delta = 1,2 \cdot 10^{-3} \approx 4'$.

Скорость вращения сканирующего зеркала в первом случае (при $M = 1$ и $\delta = 6,5 \cdot 10^{-3}$) равна

$$n_3 = \frac{V}{H} \frac{60}{\delta M N} = 1 \frac{60}{6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 1} = 3100 \text{ мин}^{-1},$$

а при $M = 5$ и $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$

$$n_3 = 1 \frac{60}{3 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 5} = 1350 \text{ мин}^{-1}.$$

Во втором случае

$$n_3 = \frac{1}{60} \frac{60}{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 1} \approx 600 \text{ мин}^{-1}.$$

Поле обзора в обоих случаях при $\eta = 0,75$ равно

$$\varphi = \eta 360 / (N/p) = 0,75 \cdot 360 / 3 = 90^\circ.$$

Быстродействие коммутатора

В процессе сканирования поля обзора приемник излучения вырабатывает электрический сигнал, форма которого соответствует закону распределения яркости объектов наблюдения и фонов в направлении сканирования. При использовании многоэлементного приемника информация о распределении яркости, содержащаяся в сигнале, вырабатываемая каждым его элементом, передается к индикатору не непрерывно, а лишь в те моменты времени, когда происходит замыкание соответствующего ключа коммутатора. Очевидно, что это замыкание должно происходить достаточно часто, чтобы не

допустить потери информации о быстрых изменениях сигнала, но не чаще, чем это необходимо, во избежание передачи избыточной информации.

Замена непрерывного сигнала совокупностью дискретных значений, эквивалентных ему по информационному содержанию (*дискретизация сигнала*), основывается на *теореме отсчетов* (теорема акад. В. А. Котельникова), которая может быть сформулирована следующим образом: если функция $S(t)$ не содержит частот выше f_m , то она полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга на $1/(2f_m)$ (рис. 52).

Теорема В. А. Котельникова базируется на том, что функция не может существенно изменить своего значения за время, меньшее, чем половина периода наивысшей частоты, т. е. за время $1/(2f_m)$.

Значение функции $S(t)$ в моменты времени, отстоящие друг от друга на $1/(2f_m)$, называют выборками сигнала. Если длительность сигнала $S(t)$ конечна и равна T , а полоса частот, соответствующих этому сигналу, по-прежнему ограничена частотой f_m (ограничение полосы частот в спектре сигнала соответствует наличию его значений за пределами времени T до ∞ , но эти значения могут быть весьма малы), то число выборок, которое необходимо для полного задания сигнала, равно $N = T/\Delta t + 1$, где $\Delta t = 0,5f_m$, а единица появилась в связи с необходимостью задания сигнала не только в момент его появления ($t = 0$), но и исчезновения ($t = T$).

Следовательно,

$$N = 2f_m T + 1,$$

если $T/\Delta t = 2f_m T \gg 1$, то $N = 2f_m T$.

Наивысшая возможная частота в спектре сигнала, вырабатываемого каждым элементом приемника излучения, определяется формой и длительностью импульса, получаемого при наличии в поле зрения точечной цели. Известно, что при грубых оценках принято считать, что произведение длительности сигнала на ширину его спектра близко к единице $\tau f_m = 1$, или, более точно, $\tau f_m = k_n$, где k_n — коэффициент формы импульса, т. е. $f_m = k_n/\tau$.

Коэффициент формы импульса k_n имеет различные значения в зависимости от принятых математических определений τ и f_m , выбор которых зависит от решаемой прибором задачи. Так, если τ определить как интервал, вне которого функция, представляющая импульс, равна нулю, а f_m — полоса частот до первого перехода спектра импульса через нуль, то коэффициент формы импульса оказывается равным

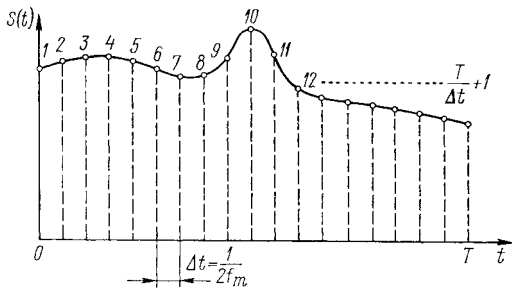


Рис. 52. Дискретизация сигнала

для импульсов: прямоугольного $k_{и.пр} = 1$; треугольного $k_{и.тр} = 2$; косинусоидального $k_{и.кос} = 1,5$.

Если τ и f_m определить как промежуток времени и ширину спектра, в которых сосредоточена подавляющая часть (90 %) энергии, то коэффициент формы импульса будет равен для импульсов: прямоугольного $k_{и.пр} = 0,73$; треугольного $k_{и.тр} = 0,46$; косинусоидального $k_{и.кос} = 0,43$; склокольного ($e^{-\beta^2 t^2}$) $k_{и.кол} = 0,22$; экспоненциального ($e^{-\beta t}$) $k_{и.экс} = 1,13$.

Следовательно, интервал времени между выборками сигнала, поступающего на выход каждого предусилителя в схеме с многоэлементным приемником, должен быть равен

$$\Delta t = 1/(2f_m) = \tau/(2k_{и}) \approx \tau/2,$$

т. е. за время τ необходимо дважды «опросить» все элементы приемника излучения, а не один раз, как это предполагалось ранее (см. рис. 50).

§ 4.3. КОЭФФИЦИЕНТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ГАБАРИТНЫЕ РАЗМЕРЫ МНОГОГРАННОГО СКАНИРУЮЩЕГО ЗЕРКАЛА

При разработке сканирующих систем с многогранными зеркалами прежде всего возникает вопрос об определении минимальных габаритных размеров оптической головки прибора, обеспечивающих заданные значения диаметра входного зрачка объектива d и угла поля обзора φ . Основным габаритным размером оптической головки, подлежащим определению, является диаметр D окружности, в которую вписывается сечение многогранного зеркала.

Рассмотрим соответствующие соотношения для зеркальных призм и пирамиды.

Сканирующая призма

Сечение вращающейся зеркальной призмы представляет собой многоугольник, габаритные размеры которого вполне характеризуются диаметром описанной окружности, а положение — углом между нормалью к рабочей грани и горизонтальной осью.

На рис. 53 изображена в качестве примера шестигранная призма, имеющая диаметр описанной окружности D и расположенная так, что угол между нормалью к грани AB и горизонтальной осью равен $45^\circ + \beta$.

Угловой размер грани зеркала определяется центральным углом $\gamma_{гр} = 2\pi/N = 360^\circ/N$, где N — число граней.

При этом линейный размер грани

$$\Delta = AB = 2AO \sin (\gamma_{гр}/2) = D \sin (\gamma_{гр}/2).$$

Обычно предполагается, что взаимное расположение грани зеркала AB и оптической оси объектива (входного зрачка ab) должно обеспечивать наблюдение объектов вдоль вертикальной оси, т. е. под углом ($45^\circ - \beta$) к перпендикуляру, опущенному из центра вращения зеркала O на его грань AB . В процессе вращения зеркала осуществляется симметричное сканирование поля обзора относительно вертикали, причем размер грани AB должен обеспечивать отсут-

ствие виньетирования в пределах угла поля обзора φ . Так как угловой размер строки $\varphi_c = \varphi$ связан с соответствующим углом поворота зеркала γ_c соотношением $\varphi_c = p\gamma_c$, причем для призмы $p = p_{\text{пр}} = 2$, то в рассматриваемом случае $\varphi_c = 2\gamma_c$.

В то же время $\gamma_c = \eta\gamma_{\text{гр}}$, где η — коэффициент использования зеркала, следовательно,

$$\varphi_c = 2\eta\gamma_{\text{гр}} = 2\eta(360^\circ/N) = (720^\circ/N)\eta; \eta = \varphi_c N/720^\circ.$$

В ходе дальнейших расчетов необходимо найти зависимость $D = f(\beta, d, \varphi, \eta)$ и по минимуму полученной функции вычислить значение оптимального угла установки β . Имея это в виду, найдем связь диаметра описанной окружности D с диаметром входного зрачка d .

Для этого построим три положения (рис. 54) рабочей грани сканирующего зеркала: A_0B_0 — среднее положение, соответствующее приему излучения объектов, находящихся непосредственно под прибором; $A_{\text{н}}B_{\text{н}}$ и $A_{\text{к}}B_{\text{к}}$ — крайние положения, соответствующие приему излучения объектов, находящихся в крайних точках поля обзора с координатами $\pm\varphi/2$ и соответствующих началу и концу строки.

Заметим, что хорда $A_{\text{н}}B_{\text{к}}$ параллельна среднему положению грани зеркала A_0B_0 и угол $A_{\text{к}}B_{\text{к}}A_{\text{н}}$ равен $\varphi/4$, как вписанный угол, измеряемый половиной дуги $A_{\text{к}}A_{\text{н}}$ ($\varphi/2$), на которую он опирается. Построим далее ось OO_2O_4 , перпендикулярную хорде $A_{\text{н}}B_{\text{к}}$, и из точки O_2 проведем два луча: местную вертикаль O_2O_3 и луч O_2O_5 , соответствующий направлению потока излучения, отраженного от грани зеркала (находящейся в среднем положении) и падающего в объектив. Так как угол падения равен углу отражения, следовательно, $\angle O_4O_2O_3 = \angle O_4O_2O_5 = 45^\circ - \beta$.

В большинстве встречающихся на практике случаев диаметр отраженного от вращающегося зеркала светового пучка не должен превышать проекции хорды $A_{\text{н}}B_{\text{к}}$ на прямую, перпендикулярную направлению отражения, т. е. $B_{\text{к}}B'_{\text{к}}$, так как точки $A_{\text{н}}$ и $B_{\text{к}}$ соответствуют крайним положениям отражающей грани зеркала и, следовательно, в процессе сканирования не происходит виньетирования светового пучка (исключения из этого правила будут рассмотрены ниже). В свою очередь, диаметр светового пучка примерно равен диаметру входного зрачка объектива, так как расхождение

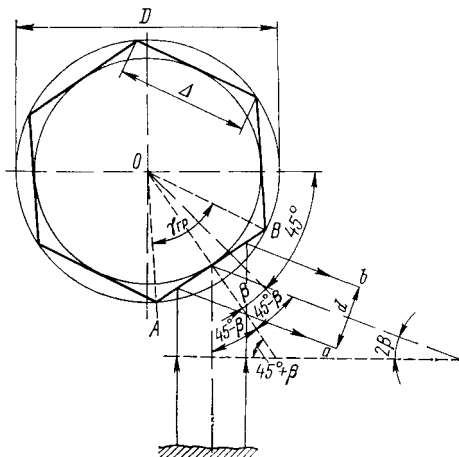


Рис. 53. Относительное расположение сканирующей призмы и входного зрачка объектива

лучей, определяемое мгновенным полем зрения прибора, можно либо совсем не учитывать, либо диаметром входного зрачка считать некоторую эффективную величину, равную $d + l\delta$, где d — диаметр входного зрачка объектива; δ — мгновенное поле зрения; l — расстояние от входного зрачка до сканирующего зеркала. Минимальное

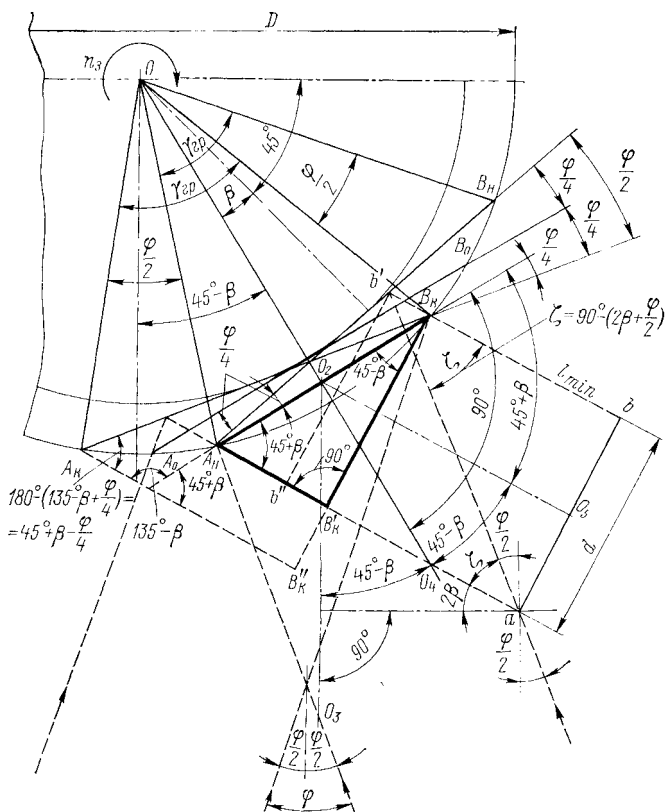


Рис. 54. Габаритные размеры сканирующей системы с многогранной зеркальной призмой

значение расстояния от входного зрачка до сканирующего зеркала l_{\min} удобно определять в виде отрезка прямой bB_K между плоскостью входного зрачка и окружностью, описанной вокруг сканирующего зеркала. Это расстояние должно быть таким, чтобы не происходило ограничения падающего на сканирующее зеркало пучка лучей оправой объектива. Так как крайний луч пересекает сечение светового пучка, отраженного зеркалом к объективу, в точке a , то положение плоскости входного зрачка должно соответствовать ab .

Учитывая сделанные замечания, найдем связь между максимальным диаметром входного зрачка d и диаметром описанной вокруг сканирующего зеркала окружности D .

Опустим из точки B_K на прямую aA_H перпендикуляр $B_K B'_K$ и рассмотрим треугольник $\triangle A_H B_K B'_K$. В этом треугольнике

$$\angle B_K A_H B'_K = 90^\circ - (45^\circ - \beta) = 45^\circ + \beta,$$

следовательно,

$$d = B_K B'_K = B_K A_H \sin(45^\circ + \beta),$$

но

$$B_K A_H = 2O_2 B_K = 2OB_K \sin(\angle O_2 O B_K),$$

где
$$\angle O_2 O B_K = \frac{\angle A_H O B_K}{2} = \frac{(\angle A_K O B_K - \angle A_K O A_H)}{2} = \frac{\gamma_{rp} - \varphi/2}{2};$$

$$2OB_K = 2(D/2) = D,$$

т. е.

$$B_K A_H = D \sin[(\gamma_{rp} - \varphi/2)/2];$$

$$d = B_K A_H \sin(45^\circ + \beta) = D \sin(\gamma_{rp}/2 - \varphi/4) \sin(45^\circ + \beta),$$

откуда

$$D = \frac{d}{\sin(45^\circ + \beta) \sin(\gamma_{rp}/2 - \varphi/4)}.$$

Обозначим $\lambda = D/d$, тогда

$$\lambda = \frac{1}{\sin(45^\circ + \beta) \sin(\gamma_{rp}/2 - \varphi/4)}.$$

В полученное выражение можно ввести коэффициент использования грани зеркала

$$\eta = \varphi/\varphi_{\max} = \varphi/(p\gamma_{rp}) = \varphi/(2\gamma_{rp}) = \varphi N/720^\circ,$$

откуда $\varphi = 2\gamma_{rp}\eta$. Тогда получим

$$\lambda = \frac{1}{\sin(45^\circ + \beta) \sin(\gamma_{rp}/2 - 2\eta\gamma_{rp}/4)} = \frac{1}{\sin(45^\circ + \beta) \sin[(\gamma_{rp}/2)(1 - \eta)]}.$$

Так как $\gamma_{rp} = 360^\circ/N$, то окончательно найдем

$$\lambda = \frac{D}{d} = \frac{1}{\sin(45^\circ + \beta) \sin[(180^\circ/N)(1 - \eta)]}.$$

Полученное выражение для удобства дальнейшего пользования можно представить в виде произведения $\lambda = \lambda_K k_\lambda$, где $\lambda_K = 1/\sin(45^\circ + \beta)$; $k_\lambda = 1/\sin[(180^\circ/N)(1 - \eta)]$.

Соответствующие зависимости представлены на рис. 55 и 56 в виде графиков. Их анализ позволяет сделать следующие выводы относительно зависимости габаритных размеров сканирующего зеркала (диаметра D) от коэффициента использования грани η , поля обзора φ , числа граней сканирующего зеркала N и угла установки β .

1. Габаритные размеры сканирующего зеркала растут при увеличении числа граней, поля обзора и коэффициента использования грани. Коэффициент использования грани, равный единице, может быть получен только при бесконечно больших размерах сканирующего зеркала.

2. При заданном коэффициенте использования грани η , т. е. заданных значениях произведения φN и поля обзора φ (числа граней N), габаритные размеры сканирующего зеркала зависят от выбора угла установки β : они минимальны при $\beta = +45^\circ$ и увеличиваются при любых других значениях угла установки.

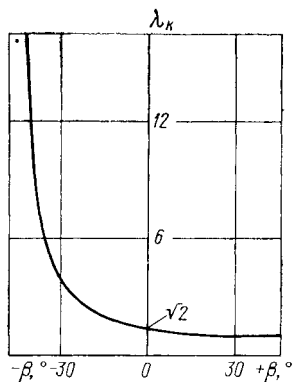


Рис. 55. Зависимость коэффициента λ_k от угла β

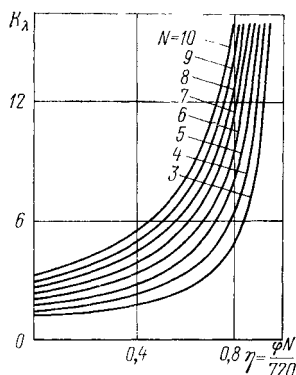


Рис. 56. Зависимость коэффициента k_λ от коэффициента $\eta = \varphi N/720^\circ$

Зависимость $\lambda = f(\beta, \varphi, N)$ может быть легко найдена как произведение $\lambda_k k_\lambda$. При анализе этой зависимости следует обратить внимание на то, что при некоторых сочетаниях значений N и φ величина λ оказывается равной ∞ . Это имеет место, в частности, при $N = 6$; $\varphi = 120^\circ$ и $N = 8$; $\varphi = 90^\circ$. Можно легко объяснить такую зависимость, если учесть, что указанные сочетания значений N и φ соответствуют случаю, когда коэффициент использования равен единице.

Необходимо также иметь в виду, что анализ выражения для $\lambda = D/d$ еще не позволяет принять окончательное решение об оптимальном диапазоне углов β , так как для этого необходимы сведения не только о габаритных размерах сканирующего зеркала, но и об общих габаритных размерах оптической головки, определяемых, в частности, значением минимального допустимого расстояния от входного зрачка оптической системы до сканирующего зеркала. Это расстояние можно найти, пользуясь рис. 54, откуда следует:

$$l_{\min} = bB_k = aB'_k = aA_n - A_n B'_k; \quad aA_n = ab'' + b''A_n.$$

Из $\triangle A_n b' b''$ можно найти $b''A_n = b'b'' \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta + \varphi/4) = d \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta + \varphi/4)$. Из $\triangle b'' b' a$ получим $ab'' = b'b'' \operatorname{ctg} \zeta = d \operatorname{tg}(2\beta + \varphi/2)$.

Следовательно,

$$aA_H = ab'' + b''A_H = d \left[\operatorname{tg}(2\beta + \varphi/2) + \operatorname{ctg} \frac{90^\circ + 2\beta + \varphi/2}{2} \right].$$

Обозначим $q = 2\beta + \varphi/2$ и, имея в виду, что

$$\operatorname{ctg} \frac{90^\circ + q}{2} = \frac{1 + \cos(90^\circ + q)}{\sin(90^\circ + q)} = \frac{1 - \sin q}{\cos q},$$

найдем

$$\frac{aA_H}{d} = \frac{\sin q}{\cos q} + \frac{1 - \sin q}{\cos q} = \frac{1}{\cos q} = \frac{1}{\cos(2\beta + \varphi/2)}.$$

Далее определим

$$l_{\min} = bB_K = aA_H - A_H B'_K,$$

но из $\triangle A_H B_K B'_K$ следует

$$A_H B'_K = B_K B'_K \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta) = d \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta),$$

т. е.

$$l_{\min} = aA_H - A_H B'_K = \frac{d}{\cos(2\beta + \varphi/2)} - d \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta)$$

или, если обозначить $\chi = l_{\min}/d$, то

$$\chi = \frac{l_{\min}}{d} = \frac{1}{\cos(2\beta + \varphi/2)} - \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta).$$

Графики зависимости коэффициента χ от угла β для различных значений φ представлены на рис. 57. Значения углов β , при которых $\chi = 0$ (β_0) и $\chi = \infty$ (β_∞), приведены ниже:

φ . . .	120°	90°	60°	45°	30°	20°	10°	5°
β_0 . . .	$-8^\circ 39'$	$-5^\circ 26'$	$-2^\circ 44'$	$-1^\circ 39'$	$-45'$	$-24'$	$-6'$	$-2'$
β_∞ . . .	15°	$22^\circ 30'$	30°	$33^\circ 45'$	$37^\circ 30'$	40°	$42^\circ 30'$	$43^\circ 45'$

Анализ этих графиков показывает, что для отрицательных значений угла β , превышающих по абсолютной величине значение, примерно равное 10° , объектив может быть расположен в непосредственной близости от сканирующего зеркала, так как $l_{\min} \leq 0$. По мере увеличения положительных значений угла β значение коэффициента χ возрастает с разной скоростью в зависимости от заданного значения угла φ (чем φ больше, тем быстрее).

На основании совместного рассмотрения коэффициентов λ и χ можно прийти к выводу, что при выборе углов установки зеркала β следует искать компромиссное решение, поскольку область углов β , соответствующих минимальным габаритным размерам сканирующего

зеркала (вблизи $+45^\circ$), не совпадает с областью углов, соответствующих минимальному удалению объектива.

В некоторых случаях при вычислении диаметра описанной окружности следует учитывать, что виньетирование светового пучка, отраженного от сканирующего зеркала, происходит не симметрично при поворотах грани зеркала в обе стороны относительно среднего положения, а односторонне за счет поворота зеркала от одного крайнего положения к другому. Итак, максимально допустимый диаметр

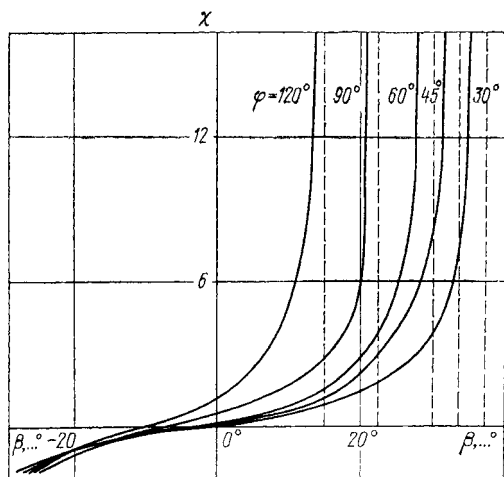


Рис. 57. Зависимость коэффициента χ от углов β и φ

светового пучка определяется не проекцией хорды $A_n B_k$ на прямую, перпендикулярную направлению отражения, а аналогичной проекцией грани $A_k B_k$ (см. рис. 54).

Соответствующие случаи приведены на рис. 58 и 59, из которых следует, что если диаметр светового пучка, определенный по ранее рассмотренному правилу (проекция хорды $A_n B_k$), равен d , то действительно допустимое значение диаметра светового пучка (проекция грани $A_k B_k$) равно d_1 , причем $d_1 < d$.

Расчет диаметра d_1 может быть выполнен на основании рассмотрения

схемы сканирования, приведенной на рис. 54. Продолжая перпендикуляр к направлению отраженного светового пучка $B_k B'_k$ до пересечения с лучом, отраженным от крайней точки A_k грани зеркала $A_k B_k$, в точке B''_k , из $\triangle A_k B_k B''_k$ можно найти:

$$d_1 = B_k B''_k = A_k B_k \sin(45^\circ + \beta - \varphi/4) = D \sin \frac{\gamma_{rp}}{2} \sin \left(45^\circ + \beta - \frac{\varphi}{4} \right)$$

или, если обозначить $\lambda_1 = D/d_1$, то

$$\lambda_1 = D/d_1 = 1 / [\sin(\gamma_{rp}/2) \sin(45^\circ + \beta - \varphi/4)],$$

так как $\varphi = 2\gamma_{rp}\eta$, то

$$\lambda_1 = 1 / [\sin(\gamma_{rp}/2) \sin(45^\circ + \beta - \eta\gamma_{rp}/2)],$$

или

$$\lambda_1 = 1 / [\sin(180^\circ/N) \sin(45^\circ + \beta - \eta 180^\circ/N)].$$

При определении габаритных размеров сканирующей системы следует использовать то уравнение (для λ или λ_1), которое дает меньшее значение диаметра входного зрачка (большее значение коэффициентов λ или λ_1).

Для лучшей ориентации при проведении соответствующих расчетов введем коэффициент

$$\xi = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\sin(180^\circ/N) \sin(45^\circ + \beta - \eta 180^\circ/N)}{\sin(45^\circ + \beta) \sin(180^\circ/N) (1 - \eta)},$$

который в результате тригонометрических преобразований можно представить в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\operatorname{ctg}(\eta 180^\circ/N) - \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta)}{\operatorname{ctg}(\eta 180^\circ/N) - \operatorname{ctg}(180^\circ/N)} = \\ &= \frac{1 - [\operatorname{tg}(\eta 180^\circ/N) / \operatorname{tg}(45^\circ + \beta)]}{1 - [\operatorname{tg}(\eta 180^\circ/N) / \operatorname{tg}(180^\circ/N)]}. \end{aligned}$$

Если $\xi > 1$, т. е. если коэффициент λ определяет большие габариты сканирующего зеркала при заданном диаметре входного зрачка, то для расчета диаметра описанной окружности D следует пользоваться коэффициентом λ и графиками, представленными на рис. 55 и 56.

Если $\xi < 1$, полученное значение диаметра описанной окружности необходимо увеличить, разделив его на коэффициент ξ , т. е. воспользоваться следующими соотношениями:

$$D = \lambda_1 d; \quad \lambda_1 = \lambda / \xi;$$

$$D = \lambda d / \xi.$$

Значения коэффициента ξ для призмы с числом граней от 3 до 10 даны на рис. 60. Для каждого значения N здесь приведены две кривые, отвечающие значениям коэффициента использования 0,1 и 0,9. Кривые для промежуточных значений коэффициента использования лежат между этими кривыми.

Для дальнейшего упрощения расчетов обозначим через β_1 то значение β , при котором $\xi = 1$, т. е. $\lambda = \lambda_1$. Найти его можно из условия

$$\frac{\operatorname{ctg}(180^\circ/N) \eta - \operatorname{ctg}(45^\circ + \beta_1)}{\operatorname{ctg}(180^\circ/N) \eta - \operatorname{ctg}(180^\circ/N)} = 1,$$

откуда $\beta_1 = 180^\circ/N - 45^\circ$.

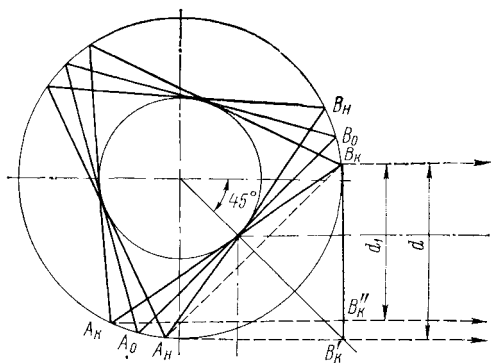


Рис. 58. Виньетирование светового пучка при сканировании трехгранной призмой

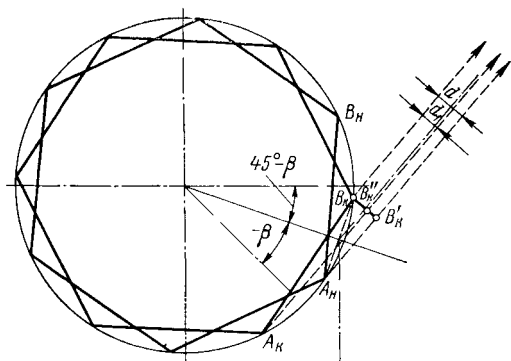


Рис. 59. Виньетирование светового пучка при сканировании шестигранной призмой

Кривая зависимости $\beta_1 = f(N)$, представленная на рис. 61, делит область возможных значений углов β на две части: $\beta > \beta_1$, что имеет место при $\xi > 1$ и $\beta < \beta_1$ для $\xi < 1$. Как производить расчет при $\xi > 1$ и $\xi < 1$, было рассмотрено выше.

Например, пусть необходимо определить диаметр описанной окружности D для трехгранной призмы при угле установки $\beta = 0$.

Так как на основании рис. 61 для $N = 3$ $\beta_1 = +15^\circ$, то в рассматри-

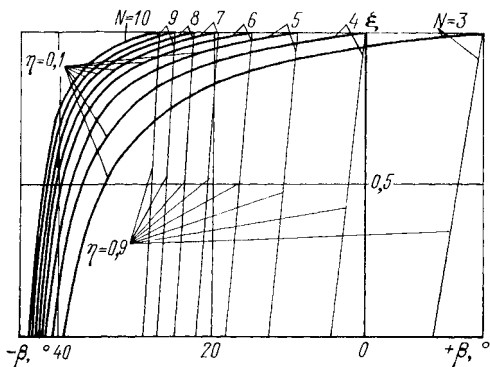


Рис. 60. Зависимость коэффициента ξ от угла β , числа граней зеркала N и коэффициента использования грани η

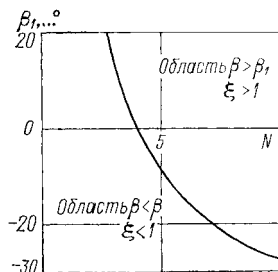


Рис. 61. Зависимость угла β_1 от числа граней N

ваемом случае $\beta < \beta_1$, следовательно, $\xi < 1$. Поэтому, найдя значение λ из графиков (см. рис. 55 и 56), следует определить отношение диаметра описанной окружности D к диаметру входного зрачка d как $D/d = \lambda/\xi$.

Сканирующая пирамида

Коэффициент использования зеркальной грани сканирующей пирамиды определяется соотношениями, совпадающими с приведенными выше,

$$\eta = \varphi_c / \varphi_{c_{\max}} = \varphi_c / (p \gamma_{\text{гр}}) = (\varphi_c / 360^\circ) (N/p)$$

и для пирамиды $p = p_{\text{пир}} = 1$ $\eta = \varphi_c N / 360^\circ$.

Увеличению коэффициента использования грани до значений, близких к единице, препятствует рост габаритных размеров сканирующей пирамиды, которые можно, как и для призмы, задать диаметром описанной окружности D .

Для выполнения расчетов, которые позволяют установить связь между габаритными размерами сканирующего зеркала и такими характеристиками прибора, как диаметр входного зрачка d , поле обзора $\varphi = \varphi_c$, число N и коэффициент использования η граней зеркала, рассмотрим проекцию граней зеркальной пирамиды на плоскость входного зрачка объектива.

Проекция зеркальной пирамиды на плоскость входного зрачка объектива представлена на рис. 62 для случая трехгранной пира-

миды. Результаты приводимых ниже расчетов применимы для пирамиды с любым числом граней.

Очевидно, что угол обзора φ_c , реализуемый в процессе сканирования, должен соответствовать такому углу поворота сканирующего зеркала γ_c , в пределах которого входной зрачок объектива полностью размещается, не выходя за границы проекции сканирующей грани зеркала, т. е. когда зрачок не виньетируется этой гранью. Следовательно, угловой размер грани $\gamma_{гр}$ должен быть равен сумме

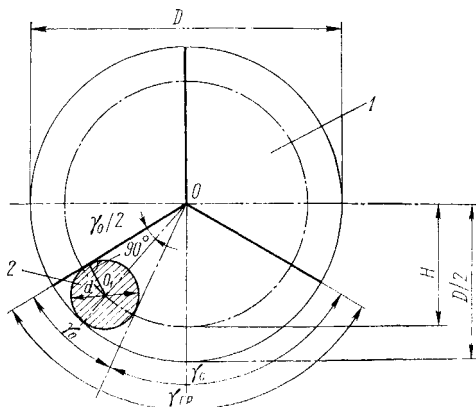


Рис. 62. Проекция зеркальной пирамиды на плоскость входного зрачка объектива:
1 — трехгранная пирамида; 2 — входной зрачок

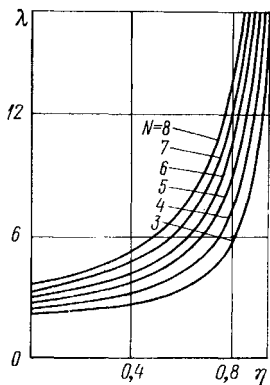


Рис. 63. Зависимость λ от коэффициента использования η для различных значений N

угловых размеров входного зрачка объектива γ_0 и строки (поля обзора) γ_c : $\gamma_{гр} = \gamma_0 + \gamma_c$.

Угловой размер входного зрачка объектива определяется выражением

$$\sin (\gamma_0/2) = (d/2)/H ,$$

где $H = D/2 - d/2$. Тогда $\sin (\gamma_0/2) = 1/(D/d - 1)$, т. е.

$$D/d = 1 + \operatorname{cosec} (\gamma_0/2).$$

Поскольку $\gamma_0 = \gamma_{гр} - \gamma_c$, а $\gamma_{гр} = 360^\circ/N$; $\gamma_c = \varphi_c$, то, обозначая $\lambda = D/d$, найдем

$$\lambda = D/d = 1 + \operatorname{cosec} (180^\circ/N - \varphi_c/2).$$

Так как при заданных φ_c , $\gamma_{гр}$ и N коэффициент использования грани $\eta = \varphi_c N/360^\circ = \varphi_c/\gamma_{гр}$, то

$$\begin{aligned} \lambda = D/d = 1 + \operatorname{cosec} (\varphi_c/2) [(1 - \eta)/\eta] &= 1 + \\ + \operatorname{cosec} (180^\circ/N) (1 - \eta); \quad \varphi_c &= (360^\circ/N) \eta. \end{aligned}$$

Графики зависимости λ от η для различных значений N приведены на рис. 63. Они позволяют выбрать габаритные размеры сканирующей зеркальной пирамиды.

Иногда представляет интерес сравнить габаритные размеры сканирующих призмы и пирамиды.

Для зеркальной призмы

$$\lambda_{\text{пр}} = \frac{1}{\sin(45^\circ + \beta)} \frac{1}{\sin(180^\circ/N_{\text{пр}})(1 - \eta)} = \\ = \frac{1}{\sin(45^\circ + \beta)} \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{N_{\text{пр}}} (1 - \eta);$$

для зеркальной пирамиды

$$\lambda_{\text{пир}} = 1 + \operatorname{cosec}(180^\circ/N_{\text{пир}})(1 - \eta),$$

причем

$$N_{\text{пир}} = (360^\circ/\varphi_c) \eta; \quad N_{\text{пр}} = (720^\circ/\varphi_c) \eta,$$

т. е. при равных углах обзора и коэффициентах использования $N_{\text{пир}} = N_{\text{пр}}/2$.

Следовательно, обозначая $\kappa = \lambda_{\text{пир}}/\lambda_{\text{пр}}$, найдем

$$\kappa = \frac{\lambda_{\text{пир}}}{\lambda_{\text{пр}}} = \sin(45^\circ + \beta) \times \\ \times \left[\sin \frac{180^\circ}{N_{\text{пр}}} (1 - \eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \cos(180^\circ/N_{\text{пр}})(1 - \eta)} \right].$$

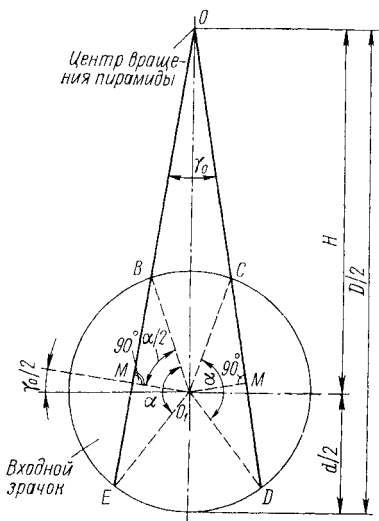


Рис. 64. Схема виньетирования входного зрачка сканирующей пирамидой ограниченных размеров

Размеры сканирующей пирамиды можно уменьшить, если допустить некоторое виньетирование входного зрачка на краях поля обзора.

Соответствующая схема представлена на рис. 64, из которой следует

$$\sin(\gamma_0/2) = h/H.$$

Здесь $h = O_1M = (d/2) \cos(\alpha/2)$, где α — центральный угол, следовательно,

$$\sin(\gamma_0/2) = [d/(2H)] \cos(\alpha/2).$$

Так как $H = D/2 - d/2$, то

$$\sin(\gamma_0/2) = \cos(\alpha/2)/(D/d - 1),$$

но $\gamma_0 = \gamma_{\text{гр}} - \gamma_c = \gamma_{\text{гр}}(1 - \gamma_c/\gamma_{\text{гр}}) = (360^\circ/N)(1 - \eta)$, следовательно,

$$\lambda = D/d = 1 + \cos(\alpha/2) \operatorname{cosec}(180^\circ/N)(1 - \eta);$$

$$\varphi_c = (360^\circ/N) \eta.$$

Очевидно, что при отсутствии виньетирования $\alpha = 0$;

$$\sin(\gamma_0/2) = d/(2H); \quad \lambda_0 = 1 + \operatorname{cosec}(180^\circ/N)(1 - \eta).$$

Относительное уменьшение габаритных размеров можно выразить отношением

$$q = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{1 + \sin(180^\circ/N)(1 - \eta)}$$

или

$$Q = \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - q = \frac{\sin(180^\circ/N)(1 - \eta) + \cos(\alpha/2)}{\sin[(180^\circ/N)(1 - \eta)] + 1}.$$

Виньетирование зададим отношением ξ площадей двух сегментов, ограниченных хордами BE и CD (см. рис. 64), к площади круга диаметром d .

Площадь каждого сегмента равна $q, \%$
 $S_c = \frac{(d/2)^2}{2} \left(\frac{\pi\alpha}{180^\circ} - \sin\alpha \right)$, а площадь
 круга $S_k = \pi (d/2)^2$. Следовательно, $4,0$

$$\xi = 2S_c/S_k = \alpha/180^\circ - \sin\alpha/\pi.$$

В большинстве практических случаев можно пользоваться разложением $\sin\alpha = \alpha - \alpha^3/3! + \alpha^5/5!$, поэтому $2,0$

$$\xi = \frac{\alpha^3}{6\pi} \left(1 - \frac{\alpha^2}{20} \right) \approx \frac{\alpha^3}{6\pi};$$

$$\alpha = \sqrt[3]{6\pi\xi} \approx \sqrt[3]{20\xi}.$$

Если, например, $\xi = 0,2$, то $\alpha = \sqrt[3]{20 \cdot 0,2} = \sqrt[3]{4} \approx 1,6 \approx 90^\circ$.

Точный расчет угла α при $\xi = 0,2$ можно выполнить, пользуясь таблицами, содержащими зависимость центрального угла α от площади сегмента для окружности радиусом 1. В этом случае площадь сегмента равна

$$S_c(r=1) = S_c^1 = (\pi/2) [\alpha/180^\circ - (\sin\alpha)/\pi] = (\pi/2)\xi,$$

т. е. при $\xi = 0,2$ $S_c^1 = (\pi/2) 0,2 = 0,314$, и по таблицам находим $\alpha = 93^\circ$.

Следовательно, по приближенной формуле $\cos(\alpha/2) \approx \cos 45^\circ = 0,7$, а по точной формуле $\cos(\alpha/2) \approx \cos 46,5^\circ = 0,688$. Пользуясь полученным значением $\cos(\alpha/2)$, при $N = 3$ и $\eta = 0,6$ ($\varphi_c = 72^\circ$) найдем, что без виньетирования

$$\lambda_0 = 1 + \frac{1}{\sin(180^\circ/N)(1 - \eta)} = 1 + \frac{1}{\sin 60^\circ \cdot 0,4} = 3,5,$$

а при наличии 20 % виньетирования

$$\lambda = 1 + \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(180^\circ/N)(1 - \eta)} = 1 + \frac{0,7}{\sin 60^\circ \cdot 0,4} = 2,75.$$

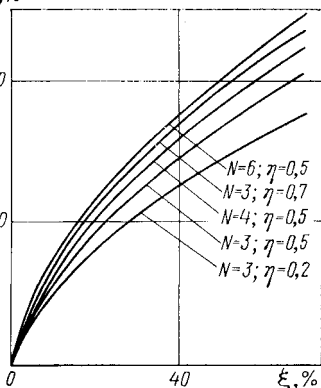


Рис. 65. Зависимость относительного уменьшения габаритных размеров сканирующей пирамиды q от коэффициента виньетирования входного луча ξ для различных значений N и η

Относительное уменьшение габаритных размеров

$$q = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{1 + \sin(180^\circ/N)(1 - \eta)} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \sin 60^\circ \cdot 0,4} = 0,21$$

или $Q = \lambda/\lambda_0 = 1 - q = 0,79$.

Зависимость коэффициента q от ξ представлена на рис. 65.

§ 4.4. ДВУХКАНАЛЬНЫЕ СХЕМЫ СКАНИРОВАНИЯ

Существенное повышение коэффициента использования зеркальной грани сканирующего зеркала может быть получено при использовании двухканальных схем сканирования, предложенных Е. Я. Кариженским.

В двухканальных схемах сканирования с многогранными призмами применяются укрепленные на одной оси две призмы, повернутые одна относительно другой на угол $\gamma_{гр}/2$ (рис. 66). Два оптических канала I , II , включающие объективы $Об_1$, $Об_2$ и приемники $Пр_1$, $Пр_2$, работают с каждой призмой, образуя половину заданного поля обзора. Сигналы от приемников каждого канала поступают на общий усилитель $Ус$ через переключатель каналов $ПК$, связанный со сканирующим зеркалом. Одновременно происходит коммутация генератора строчной развертки $ГСР$. Так как размер граней каждого из сканирующих зеркал $З$ выбирается из расчета отсутствия виньетирования при угле сканирования, в два раза меньшем заданного, то и габариты зеркал получаются примерно в два раза меньше.

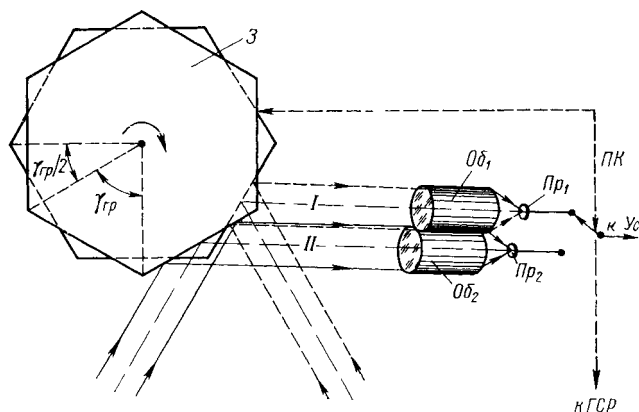


Рис. 66. Двухканальная схема сканирования с многогранными призмами

В двухканальных схемах сканирования с многогранной пирамидой используется одно сканирующее зеркало $З$ — многогранная зеркальная пирамида (рис. 67), грань которой последовательно работает на два оптических канала I и II , включающих объективы $Об_1$, $Об_2$ и приемники $Пр_1$, $Пр_2$. Сигналы от приемников

каждого канала поступают на общий усилитель УС через переключатель каналов ПК. Так как угловой размер проекции входного зрачка объектива каждого канала на сканирующее зеркало может быть выбран равным $\gamma_{гр}/2$, то общий угол обзора в этом случае соответствует угловому размеру грани $\varphi_c = \gamma_{гр}$, т. е. $\eta = 1$.

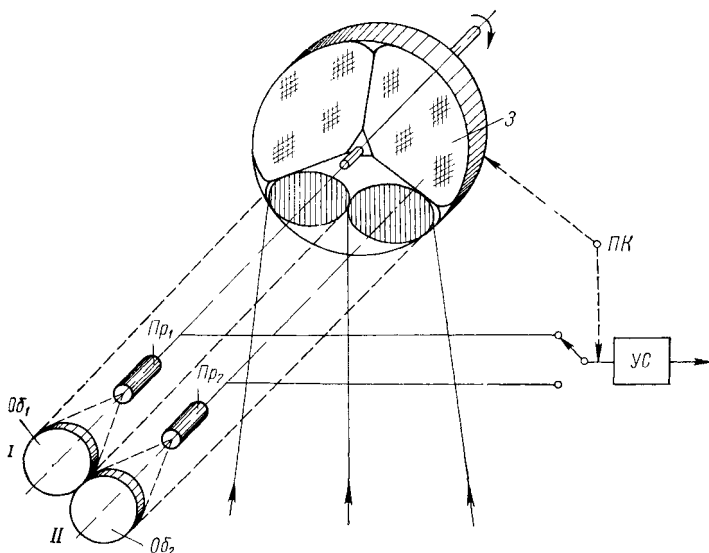


Рис. 67. Двухканальная схема сканирования с многогранной пирамидой

В ряде практических случаев большая сложность двухканальных систем полностью окупается меньшими габаритными размерами сканирующего зеркала либо большим углом обзора, который в этом случае удастся реализовать.

§ 4.5. ТРАЕКТОРИЯ СКАНИРОВАНИЯ МНОГОГРАННЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЗЕРКАЛАМИ

Рассмотрим форму строки, прочерчиваемой мгновенным полем зрения в плоскости предметов, удаленной от сканирующего зеркала на расстояние H , если сканирование осуществляется *вращающейся призмой* узким полем с угловыми размерами δ_x и δ_y (рис. 68). В этом случае плоскость чувствительной площадки приемника излучения в процессе сканирования остается всегда перпендикулярной оптической оси объектива, т. е. при угле визирования $\varphi/2$ она располагается по отношению к плоскости предметов под углом $\varphi/2$.

В центре поля обзора имеем:

$$a_{x_0} = H\delta_x; \quad a_{y_0} = H\delta_y.$$

При отклонении сканирующего луча на угол $\varphi/2$ происходит искажение формы линейного поля зрения, так что его размеры оказываются равными:

$$a_y = ed = bc = H \delta_y \sec(\varphi/2);$$

$$a_x = ab = bc/\cos(\varphi/2) = [H/\cos^2(\varphi/2)] \delta_x = H \delta_x \sec^2(\varphi/2).$$

Координата центра линейного поля зрения (половины ширины полосы сканирования) будет

$$B/2 = H \tan(\varphi/2).$$

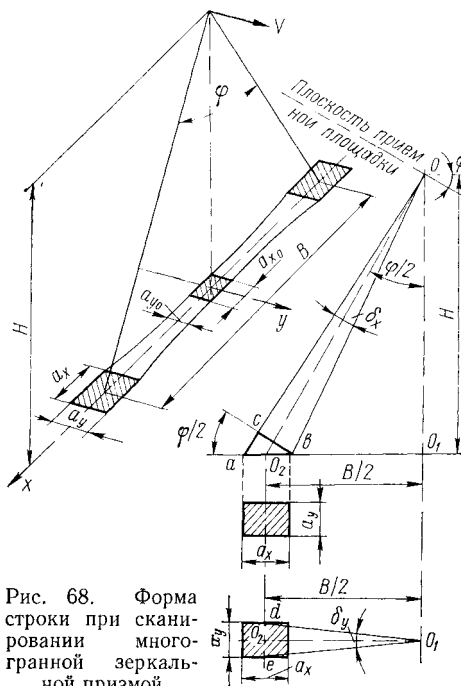


Рис. 68. Форма строки при сканировании многогранной зеркальной призмой

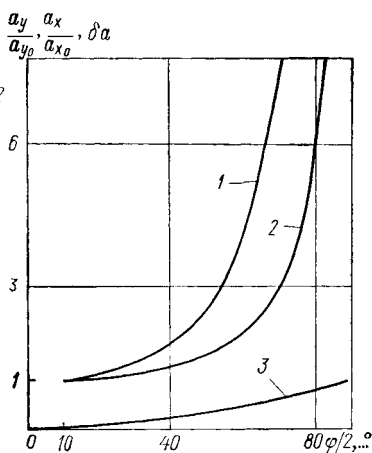


Рис. 69. Зависимость размеров мгновенного поля зрения от угла обзора при сканировании многогранной зеркальной призмой:

$$1 - a_x/a_{x0} = \sec^2(\varphi/2), \quad 2 - a_y/a_{y0} = \sec(\varphi/2), \quad 3 - \delta a = 1 - a_{y0}/a_y = 1 - \cos(\varphi/2)$$

Полученные соотношения, определяющие зависимость размеров линейного поля зрения a_x и a_y и ширины полосы сканирования B от угла обзора, позволяют сделать следующие выводы.

1. Линейное разрешение (размеры линейного поля зрения) в плоскости расположения объектов ухудшается с увеличением угла обзора, причем ухудшение вдоль оси y (по кадру) происходит по закону $\sec(\varphi/2)$, а вдоль оси x (по строке) — по закону $\sec^2(\varphi/2)$. Соответствующие зависимости $a_y/a_{y0} = \sec(\varphi/2)$ и $a_x/a_{x0} = \sec^2(\varphi/2)$ приведены на рис. 69.

2. Увеличение размеров линейного поля зрения с увеличением угла обзора приводит к наложению строк, за счет которого один и тот же объект сканируется дважды: двумя следующими друг за другом строками (1-я и 2-я строки на рис. 70). Наложение строк приводит к искажению изображения регистрируемого объекта, так

что один объект, попадающий в зону наложения, будет изображаться в двух строках на экране индикаторного устройства. Следовательно, его изображение практически не будет отличаться от изображения двух объектов, находящихся вне зоны наложения, но в пределах двух соседних строк сканирования. Количественно величину наложения можно выразить шириной крестообразно заштрихованной зоны Δa на рис. 70.

На краю поля обзора в соответствии с обозначениями, принятыми на рис. 70, имеем

$$\Delta a = be + bc + cd + de = 2bc + cd =$$

$$= 2(bd - cd) + cd = 2bd - cd,$$

но $cd = a_{y_0}$; $bd = a_y/2$, следовательно, $\Delta a = a_y - a_{y_0}$.

В относительных единицах

$$\delta a = \Delta a / a_y = 1 - a_{y_0} / a_y,$$

так как $a_{y_0} = H \delta_y$; $a_y = H \delta_y \sec(\varphi/2)$,

то

$$\delta a = 1 - \cos(\varphi/2).$$

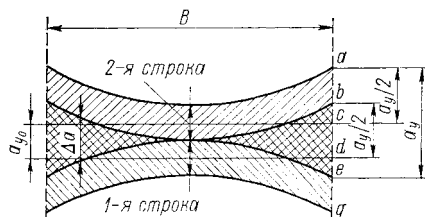


Рис. 70. Наложение строк при сканировании многогранной призмой

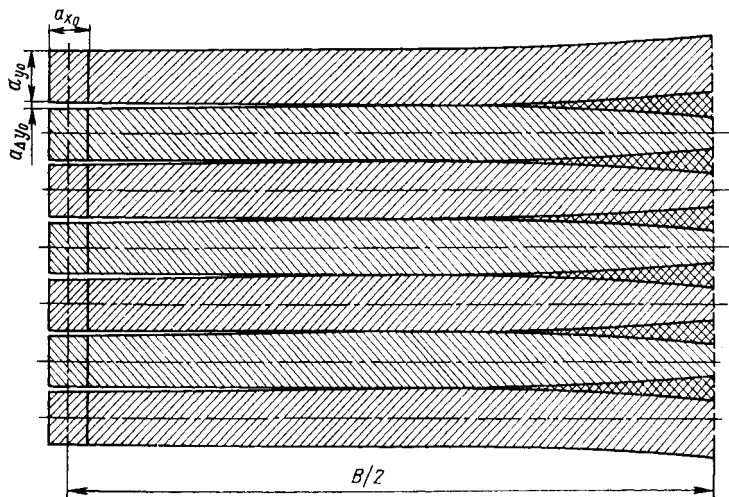


Рис. 71. Форма раstra при сканировании многогранной призмой в приборе с многоэлементным приемником излучения

Соответствующая зависимость (кривая 3) представлена на рис. 69. Форма раstra, образуемого мгновенным полем зрения в плоскости предметов при сканировании многогранной призмой в приборе с многоэлементным приемником излучения, имеет вид, изображенный на рис. 71.

При сканировании *зеркальной пирамидой* (рис. 72) отдельные строки, прочерчиваемые в плоскости расположения объектов проекцией приемной площадки, практически не искривляются, однако происходит наклон всего линейного ряда приемных площадок на

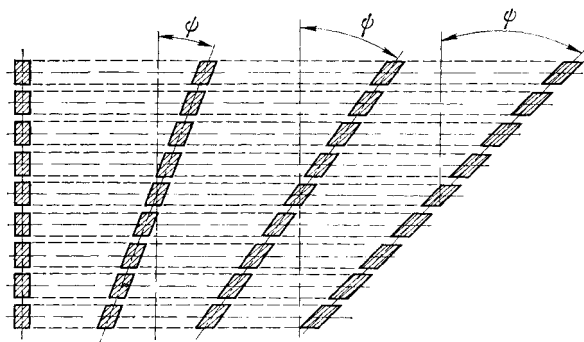


Рис. 72. Форма раstra при сканировании многогранной пирамидой в приборе с многоэлементным приемником излучения

угол ψ в направлении сканирования. Угол ψ примерно равен углу визирования $\phi/2$, несколько превышая его, например при $\phi/2 = 45^\circ$ $\psi = 54^\circ 45'$, при $\phi/2 = 60^\circ$ $\psi = 75^\circ 55'$ и т. д.

§ 4.6. ЧЕРЕССТРОЧНОЕ СКАНИРОВАНИЕ В СИСТЕМЕ С МНОГОЭЛЕМЕНТНЫМ ПРИЕМНИКОМ

Эффективность использования оптико-электронных приборов, осуществляющих обзор пространства с неподвижного основания, может быть существенно повышена за счет применения чересстрочной развертки сканирующего луча. Рассмотрим этот вопрос на примере анализа работы прибора с трехгранной сканирующей пирамидой и многоэлементным приемником излучения.

Для получения кадровой развертки, состоящей из отдельных полей, чувствительные элементы приемника излучения следует располагать на расстоянии Δy друг от друга (рис. 73), которое зависит от размеров элементов y и числа полей в кадре m .

Если общая длина ряда приемников Y определяет размер кадра, то очевидно следующее соотношение: $y + \Delta y = ym$. В результате последовательного наложения m полей весь кадр должен быть заполнен строками сканирования без пропусков.

Соответствующие углы равны:

$$\delta_y + \delta_{\Delta y} = m\delta_y; \quad \delta_{\Delta y} = \delta_y(m - 1).$$

Сканирующее зеркало, которым может быть трехгранная пирамида (рис. 73), выполнено так, что его грани имеют разные углы наклона по отношению к оси вращения, выбор которых осуществляется из следующего расчета для граней: первой $45^\circ - \delta_y/2$; второй 45° ; третьей $45^\circ + \delta_y/2$.

В этом случае каждая следующая грань зеркала вызывает смещение всего линейного ряда приемных площадок на угол δ_y по

кадру, а вращение сканирующего зеркала обеспечивает развертку по строкам. Следовательно, полный оборот сканирующего зеркала соответствует одному кадру разложения, т. е. число полей в кадре равно числу граней зеркала $m = N$.

В процессе развертки строк одной гранью зеркала образуется поле кадра. В промежутки между строками одного поля благодаря разному наклону граней укладываются строки остальных полей, образуя целый кадр.

Обозначим время сканирования одного поля кадра через T_{Π} , тогда время обзора кадра в общем случае будет равно $T_K = T_{\Pi} m$.

За один оборот зеркала, имеющего N граней, осуществляется сканирование N полей. Следовательно, время одного оборота зеркала равно

$T_1 = 1/n_3 = T_{\Pi} N/m$; частота вращения зеркала соответственно будет

$$n_3 = 1/(T_{\Pi} N) = m/(NT_K).$$

Необходимое число элементов приемника излучения при чересстрочной развертке $M_{\text{ч}}$ можно определить исходя из заданного углового размера высоты кадра φ_K по формуле $M_{\text{ч}} = \varphi_K/(\delta_y + \delta_{\Delta y}) = \varphi_K/(\delta_y m)$.

Нетрудно прийти к выводу о преимуществах схемы с чересстрочной разверткой, так как по сравнению с обычными схемами число элементов приемника в ней может быть меньше в m раз, поскольку при построочной развертке число элементов равно

$$M_{\Pi} = \varphi_K/(\delta_y + \delta_{\Delta y}),$$

где Δy — величина технологического зазора между чувствительными элементами, примерно равного $(0,2 \div 0,4) y$, т. е. $\delta_{\Delta y} \ll \delta_y$ и $M_{\Pi} \approx \varphi_K/\delta_y$, следовательно,

$$M_{\Pi}/M_{\text{ч}} = m.$$

Схема с чересстрочной разверткой позволяет уменьшить полосу частот коммутационно-усилительного тракта (общего усилителя).

Рассмотрим выражения, определяющие полосу пропускания усилителя каждого канала и полосу пропускания общего усилителя.

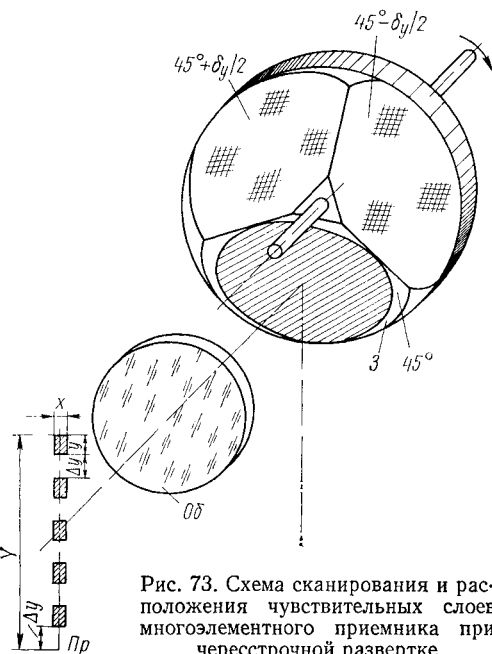


Рис. 73. Схема сканирования и расположения чувствительных слоев многоэлементного приемника при чересстрочной развертке

Нижнюю граничную частоту полосы пропускания усилителя каждого канала определяет число полей кадра, сканируемых в единицу времени,

$$f_n \leq 1/T_n,$$

где T_n — время обзора одного поля кадра, соответствующее максимально возможному значению углового размера строки $\varphi_{c \max}$.

Так как коэффициент использования зеркальной грани равен $\eta = \varphi_c / \varphi_{c \max} = T_c / T_n$, где T_c — длительность строки, то

$$f_n \leq 1/T_n = \eta / T_c.$$

Верхняя граничная частота полосы пропускания каждого канала усиления определяется минимальной длительностью импульса τ_{\min}

$$f_v = k_n / \tau_{\min},$$

где k_n — коэффициент формы импульса сигнала. Так как время одного оборота зеркала равно $1/n_3$, а мгновенное поле зрения занимает $\delta_x / (2\pi p)$ оборота, то минимальная длительность импульса равна

$$\tau_{\min} = \frac{1}{n_3} \frac{\delta_x}{2\pi p},$$

следовательно,

$$f_v = k_n \frac{2\pi p}{\delta_x} n_3.$$

Учитывая, что $\varphi_c = \eta 2\pi / (N/p)$, найдем

$$f_v = (k_n / \eta) (\varphi_c / \delta_x) n_3 N.$$

Полученные выражения для f_n и f_v справедливы как при строчном, так и чересстрочном сканировании, поскольку частота смены полей кадра $1/T_n$ определяется свойствами экрана индикатора и инерционностью глаза, а скорость вращения сканирующего зеркала n_3 зависит только от T_n и N .

Следовательно, полоса частот усилителей отдельных каналов прибора $\Delta f = f_v - f_n$ не зависит от выбора сравниваемых схем сканирования.

Определим теперь верхнюю граничную частоту общего канала усилительного тракта. Известно, что в соответствии с теоремой Котельникова при дискретизации сигнала соответствующие выборки должны следовать с частотой $2f_v$. Очевидно, что для опроса каждого канала с этой частотой необходимо обеспечить опрос M каналов с частотой $2f_v M$, т. е. верхняя частота полосы пропускания общего усилителя должна быть $F_v = 2f_v M$.

Принимая во внимание полученные выше выражения для f_v , M_π и n_3 , можно найти

$$F_v = \frac{2}{T_n} \frac{k_n}{m\eta} z_K,$$

где $z_K = \varphi_c \varphi_K / (\delta_x \delta_y)$ — общее число элементов разложения в кадре. Нижняя граничная частота по-прежнему равна $F_n \leq 1/T_n$.

Следовательно, *полоса частот общего усилителя* будет

$$\Delta F = F_{\text{в}} - F_{\text{н}} \approx F_{\text{в}} = 2f_{\text{в}}M.$$

Сканирование в сочетании с использованием многоэлементных приемников излучения находит широкое применение в современных тепловизионных приборах. В частности, на этой основе в ГОИ им. С. И. Вавилова был разработан и с успехом использован на практике уникальный тепловизионный космический телескоп с бериллиевым зеркалом диаметром 1 м (рис. 45б и 45в на цветной вклейке). Его назначение и описание можно найти в [167, 176, 178] дополнительного списка литературы.

§ 4.7. СКАНИРОВАНИЕ ЗЕРКАЛОМ, ВРАЩАЮЩИМСЯ ВОКРУГ ОСИ, НЕПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К НЕМУ

Сканирование зеркалом, вращающимся вокруг оси, перпендикулярной к нему, позволяет создать в плоскости расположения объектов наблюдения траектории сканирования в виде окружности и спирали (при неподвижном основании), либо траекторию сканирования типа «гусеница» (при поступательном перемещении основания).

Рассмотрим основные соотношения, характеризующие этот метод сканирования, прежде всего имея в виду сканирование по образующей прямого кругового конуса, дающее в плоскости наблюдения траекторию сканирования в виде окружности (рис. 74).

Если круглая полевая диафрагма имеет угловой размер δ , то линейное поле зрения в плоскости предметов представляет собой эллипс, одна из осей которого равна

$$a_x = L \operatorname{tg} \delta,$$

где $L = H/\cos(\gamma/2)$ — наклонная дальность. Следовательно,

$$a_x = H \operatorname{tg} \delta / \cos(\gamma/2) \approx H \delta \sec(\gamma/2).$$

Вторая ось эллипса равна

$$a_y = a_x / \cos(\gamma/2) \approx H \delta \sec^2(\gamma/2).$$

Если рабочая зона сканирования ограничена углом θ , то ширина захвата

$$B = 2H \operatorname{tg}(\gamma/2) \sin(\theta/2),$$

или в угловой мере

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{B}{2L} = \frac{2H \operatorname{tg}(\gamma/2) \sin(\theta/2)}{2H} \cos \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\theta}{2}.$$

При поступательном движении основания, на котором установлен прибор, со скоростью V на высоте H в плоскости наблюдения имеет место траектория сканирования типа «гусеница».

Для выполнения условия отсутствия пропусков в центре поля обзора скорость вращения сканирующего зеркала n_3 должна быть такой, чтобы за время одного оборота прибор переместился на расстояние y , не превышающее одного элемента разложения a_y , т. е.

$$y = a_y / \xi_0,$$

где ξ_0 — коэффициент наложения строк в центре поля.

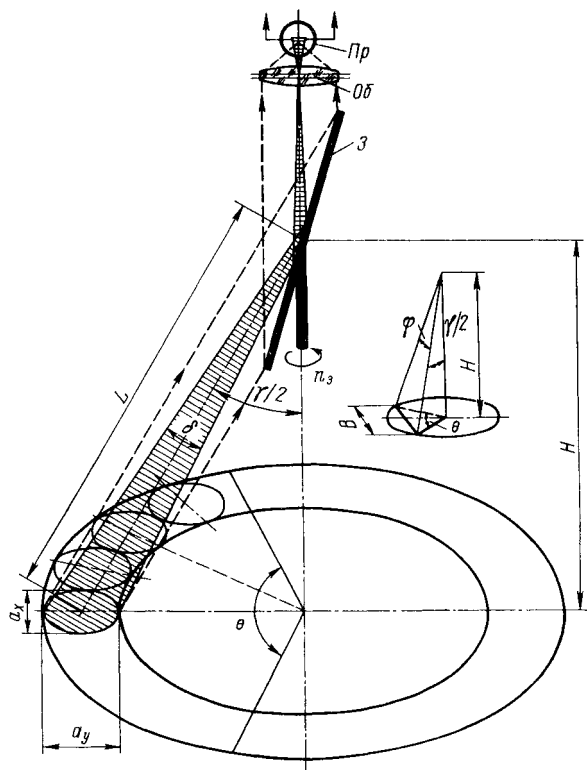


Рис. 74. Схема сканирования зеркалом, вращающимся вокруг оси, перпендикулярной к нему

Следовательно, необходимо выполнить условие

$$60/n_3 = y/V,$$

где n_3 — скорость вращения сканирующего зеркала, мин^{-1} , $n_3 = 60V/y = 60\xi_0 V/a_y = 60\xi_0 V \cos^2(\gamma/2)/(H\delta)$; V — скорость движения основания прибора, м/с. Если записывающий луч в индикаторном устройстве, вращаясь синхронно со сканирующим лучом со скоростью n_3 , описывает окружность радиусом R' , которая перемещается со скоростью V' , то для обеспечения подобия формы объекта и его изображения необходимо соблюдать условие

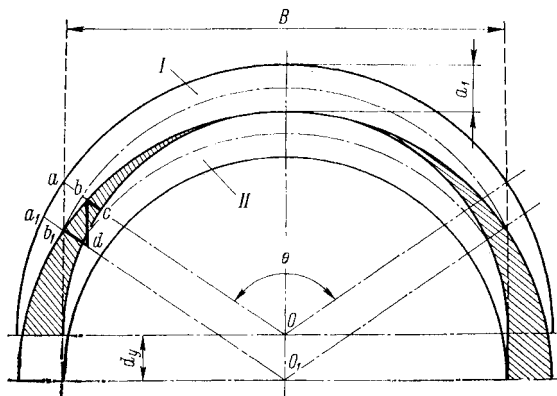
$$R/R' = V/V',$$

где $R = H \operatorname{tg} (\gamma/2)$ — радиус сканирования в плоскости предметов. Так как $V' = y' n_3/60$, где y' — шаг развертки на экране индикатора, то

$$n_3 = \frac{60R'}{y' \operatorname{tg} (\gamma/2)} \frac{V}{H}.$$

Сравнивая два выражения для n_3 , можно найти требуемый коэффициент наложения строк сканирования в центре поля (наложе-

Рис. 75. Наложение строк *I* и *II* при сканировании плоским зеркалом, вращающимся вокруг оси, перпендикулярной к нему



ние строк записи на экране индикатора недопустимо, так как в местах наложения строк вдвое увеличивается экспозиция)

$$\xi_0 = \frac{R'}{H \operatorname{tg} (\gamma/2)} \frac{a_y}{y'} = \frac{R'}{H \operatorname{tg} (\gamma/2)} \frac{H\delta}{\cos^2 (\gamma/2) y'} = \frac{2R'\delta}{y' \sin \gamma}.$$

Например, если нужно обеспечить $\xi_0 = 1$, то $2R'/y' = \sin \gamma/\delta$, а при $\gamma = 90^\circ$ можно найти $y'/\delta = 2R'$. Если $2R' = 100$ мм, а $\delta = 10^{-3}$, то $y' = 0,1$ мм.

Даже в том случае, когда наложение строк в центре поля обзора отсутствует, на краях поля в связи с криволинейностью строк развертки имеет место наложение строк, рассчитать величину которого можно, пользуясь рис. 75.

Если характеризовать наложение строк шириной заштрихованного промежутка $\Delta a = bc$, то можно найти $\Delta a = bc = Ob - Oc$, но $Oc = Oa - ac$, в свою очередь:

$$Oa = R = H \operatorname{tg} (\gamma/2);$$

$$ac - a_y = H\delta \sec^2 (\gamma/2),$$

следовательно,

$$Oc = H \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - H\delta \sec^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{H}{2} \sec^2 \frac{\gamma}{2} (\sin \gamma - 2\delta).$$

Далее,

$$Ob = O_1d = O_1b_1 - b_1d,$$

но $O_1b_1 = R = H \operatorname{tg} (\gamma/2)$, а b_1d можно найти из $\triangle bb_1d$, заменяя в нем дугу bb_1 соответствующей хордой:

$$b_1d = bd \cos (\angle bdb_1).$$

Так как $\angle bdb_1 = \theta/2$, а

$$bd = OO_1 = a_y = H \delta \sec^2 (\gamma/2),$$

то

$$\begin{aligned} b_1d &= a_y \cos (\theta/2) = H \delta \sec^2 (\gamma/2) \cos (\theta/2); \\ Ob &= O_1b_1 - b_1d = H \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - H \delta \sec^2 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \\ &= \frac{H}{2} \sec^2 \frac{\gamma}{2} \left(\sin \gamma - 2\delta \cos \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta a &= bc = Ob - Oc = \frac{H}{2} \sec^2 \frac{\gamma}{2} \left[\sin \gamma - 2\delta \cos \frac{\theta}{2} - \sin \gamma + 2\delta \right] = \\ &= H \delta \sec^2 \frac{\gamma}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) = a_y \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right); \\ \delta a &= \Delta a / a_y = 1 - \cos (\theta/2). \end{aligned}$$

Так как

$$\cos (\theta/2) = \sqrt{1 - \sin^2 (\theta/2)} = \sqrt{1 - \sin^2 (\varphi/2) / \sin^2 (\gamma/2)},$$

то

$$\delta a = 1 - \sqrt{1 - [\sin (\varphi/2) / \sin (\gamma/2)]^2}.$$

Если сопоставить полученное выражение для круговой развертки (δa_K) с соответствующим выражением для строчной развертки (δa_c), осуществляемой с помощью многогранной призмы, то можно найти, что при одинаковом перекрытии строк справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1 - \cos (\varphi_c/2) &= 1 - \sqrt{1 - \sin^2 (\varphi_K/2) / \sin^2 (\gamma/2)}; \\ \cos (\varphi_c/2) &= \sqrt{1 - \sin^2 (\varphi_c/2)} = \sqrt{1 - \sin^2 (\varphi_K/2) / \sin^2 (\gamma/2)}; \\ \sin (\varphi_c/2) &= \sin (\varphi_K/2) / \sin (\gamma/2); \\ \varphi_K &\approx \varphi_c \sin (\gamma/2). \end{aligned}$$

Следовательно, при круговой развертке заданное искажение изображения, определяемое наложением строк на краю поля, можно обеспечить в пределах меньшего поля обзора, чем при построчной развертке. Например, при $\gamma/2 = 26^\circ$ и $\varphi_c = 52^\circ$ найдем $\varphi_K = 52^\circ \sin 26^\circ = 52^\circ \cdot 0,44 \approx 23^\circ$.

Поскольку угол γ был выбран произвольно, найдем условия, его определяющие. Для этого заметим, что при совместном рассмотрении построчной и круговой разверток следует учитывать необходимость обеспечить в том и другом случае одинаковую линейную ширину поля обзора в плоскости наблюдения, которая для построчной развертки будет

$$B_c = 2H \operatorname{tg} (\varphi_c/2),$$

а для круговой —

$$B_K = 2H \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2H}{\cos (\gamma/2)} \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\theta}{2} = 2H \frac{\sin (\varphi_K/2)}{\cos (\gamma/2)}.$$

Из условия $B_c = B_k$ можно найти

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin (\varphi_k/2)}{\operatorname{tg} (\varphi_c/2)} = \frac{\sin (\varphi_k/2)}{\sin (\varphi_c/2)} \cos \frac{\varphi_c}{2}.$$

Полученное равенство позволяет найти такое значение угла γ , определяющего параметры круговой развертки, при котором круговая и построчная развертки обеспечивают одинаковую ширину поля обзора в плоскости наблюдения.

Следовательно, из условия равенства линейных полей обзора нашли, что

$$\frac{\sin (\varphi_k/2)}{\sin (\varphi_c/2)} \cos \frac{\varphi_c}{2} = \cos \frac{\gamma}{2},$$

а из условия равной величины наложения строк ранее было получено

$$\frac{\sin (\varphi_k/2)}{\sin (\varphi_c/2)} = \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Возводя в квадрат и складывая левые и правые части двух последних равенств, найдем, что

$$\frac{\sin^2 (\varphi_k/2)}{\sin^2 (\varphi_c/2)} = \frac{1}{1 + \cos^2 (\varphi_c/2)},$$

откуда

$$\varphi_k = \varphi_c / \sqrt{1 + \cos^2 (\varphi_c/2)}.$$

Следовательно, соотношение полей обзора при круговой и построчной развертках, обеспечивающее не только одинаковые искажения изображения на краях поля, но и одинаковую ширину полосы обзора в плоскости наблюдения, оказывается более благоприятным для круговой развертки, чем ранее полученное. Действительно, при $\varphi_c = 52^\circ$ $\varphi_k \approx \varphi_c/1,35 = 52^\circ/1,35 = 38^\circ$.

Кроме того, теперь можно точно определить значение угла γ из выражения

$$\sin (\gamma/2) \approx \varphi_k/\varphi_c = 1/1,35 = 0,74; \quad \gamma/2 = 48^\circ,$$

что почти вдвое превышает соответствующее значение угла γ , выбранное произвольно в предыдущем примере.

Между тем при всех расчетах необходимо учитывать, что максимальный размер сканирующего зеркала (большая ось эллипса) связан с диаметром входного зрачка объектива соотношением

$$d_3 = d_0/\sin (\gamma/4),$$

следовательно, для $\gamma/2 = 48^\circ$ $d_3/d_0 = 1/\sin 24^\circ = 2,5$, а для $\gamma/2 = 26^\circ$ $d_3/d_0 = 1/\sin 13^\circ = 4,44$.

При неподвижном основании с помощью зеркала, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной к нему, можно создать спиральную траекторию сканирования, изменяя угол наклона зеркала к оси вращения. Сканирование зеркалом, вращающимся вокруг оси, перпендикулярной к нему, имеет важное значение в тех случаях, когда необходимо в процессе сканирования сохранять постоянным угол между оптической осью прибора и плоскостью наблюдения (угол визирования).

СКАНИРОВАНИЕ ПРЕЛОМЛЯЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ: ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛАСТИНКОЙ И ПРИЗМОЙ

§ 5.1. СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ЗАКОН СКАНИРОВАНИЯ

Плоскопараллельная пластинка, установленная за объективом, изменяет ход лучей таким образом, что изображение светящейся точки отодвигается и его положение зависит от угла γ между оптической осью и нормалью N к поверхности пластинки (рис. 76). Сдвиг изображения точки в направлении, перпендикулярном к оптической оси (по оси y), определяет возможность осуществления сканирования, а перемещение изображения точки вдоль оптической оси (по оси x) вызывает расфокусировку изображения.

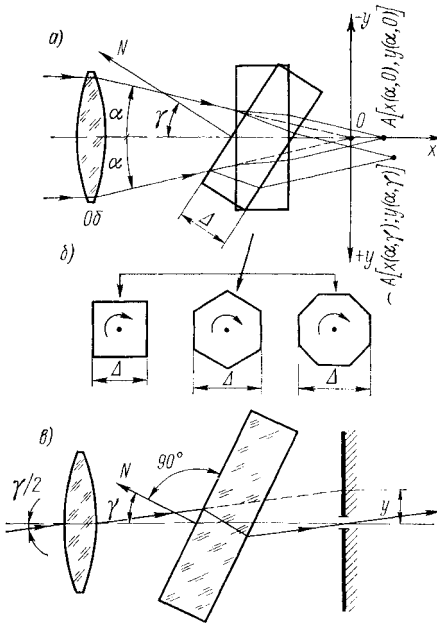


Рис. 76. Основные принципы сканирования плоскопараллельной пластинкой (призмой): а — ход лучей; б — призма, эквивалентная пластинке толщиной Δ ; в — поле обзора и поворот пластинки при неподвижном приемнике (диафрагме поля)

Практически в качестве плоскопараллельной пластинки используются четырех-, шести- или восьмигранные призмы, в процессе вращения которых в пределах каждой грани осуществляется плавное изменение угла γ , а переход от одной грани к другой соответствует повторному сканированию той же строки. Основные принципы сканирования четырехгранной призмой представлены на рис. 77, а восьмигранной — на рис. 78. Излучение точки, находящейся на оси, попадает в приемник в исходном положении, когда грани перпендикулярны оси. При вращении призмы достигается получение изображения других точек поля в плоскости диафрагмы и, следовательно, воздействие соответствующего излучения на приемник.

Основные соотношения для этого способа сканирования могут быть получены на основании рассмотрения закономерностей преломления света плоскопараллельной пластинкой (рис. 79 и 80). Положение пластинки, имеющей толщину Δ , характеризуется углом γ между горизонтальной осью и нормалью к поверхности пластинки. Падающий на пластинку луч составляет угол α с горизонталью (на рис. 79 и 80 рассмотрены два луча: I для $\alpha = 0$ и II

Основными соотношениями для этого способа сканирования могут быть получены на основании рассмотрения закономерностей преломления света плоскопараллельной пластинкой (рис. 79 и 80).

Положение пластинки, имеющей толщину Δ , характеризуется углом γ между горизонтальной осью и нормалью к поверхности пластинки. Падающий на пластинку луч составляет угол α с горизонталью (на рис. 79 и 80 рассмотрены два луча: I для $\alpha = 0$ и II

для $\alpha = +\alpha$). Угол падения луча — i , угол преломления — r (i_1, r_1 — на первой поверхности; i_2, r_2 — на второй).

При отсутствии пластинки луч, падающий под углом α , пересекается с лучом, падающим под углом $\alpha = 0$, в точке O , а при наличии пластинки — в точке A . Для выполнения дальнейших расчетов опустим из точки O перпендикуляр OC на поверхность

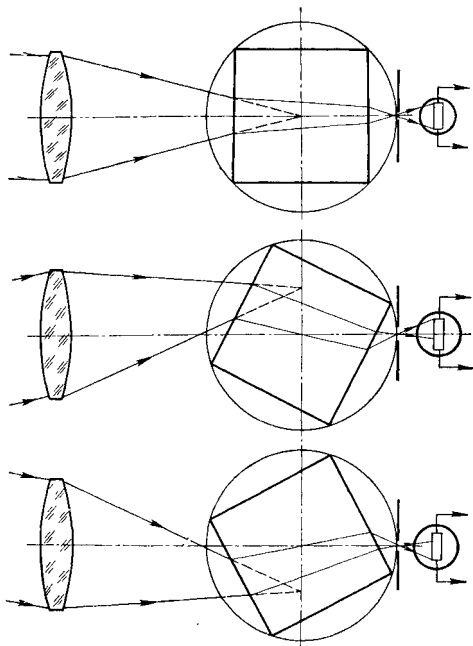


Рис. 77. Схема сканирования четырехгранной призмой (расфокусировка не показана)

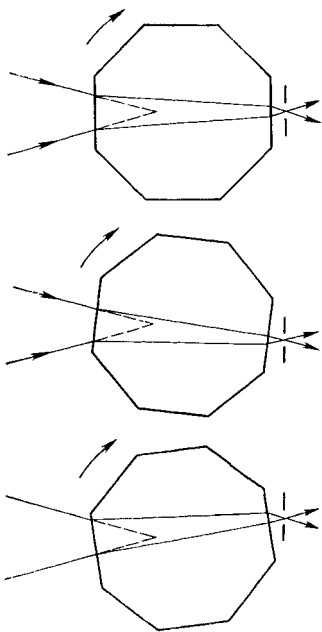


Рис. 78. Схема сканирования восьмигранной призмой (расфокусировка не показана)

пластинки, продлив его до пересечения с преломленными лучами в точках E и E_0 , и перпендикуляр OG на направление преломленного луча, падающего на пластинку под углом α к горизонтали. Обозначим: $OG = l$; $OE = s$; $ag = bd = OG = l$; $ae = OE = s$.

Законы геометрической оптики позволяют получить следующие соотношения:

$$\sin i_1 / \sin r_1 = n; \quad \sin i_2 / \sin r_2 = 1/n.$$

Так как $i_2 = r_1$, то $\sin r_2 = \sin i_1$; $r_2 = i_1$, следовательно, луч преломленный параллелен лучу падающему.

Найдем смещение l преломленного луча относительно падающего (за начало отсчета отрезка l примем точку O)

$$\begin{aligned} l = OG = bd &= ab \sin (i_1 - r_1) = \\ &= ab (\sin i_1 \cos r_1 - \sin r_1 \cos i_1). \end{aligned}$$

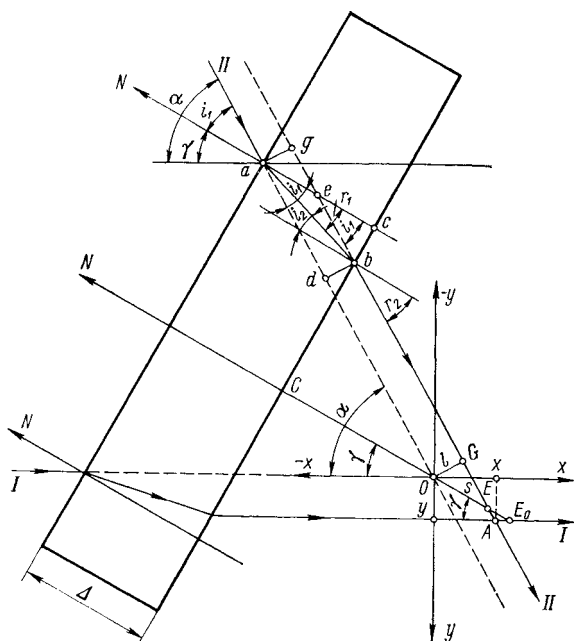


Рис. 79. Преломление света плоскопараллельной пластинкой

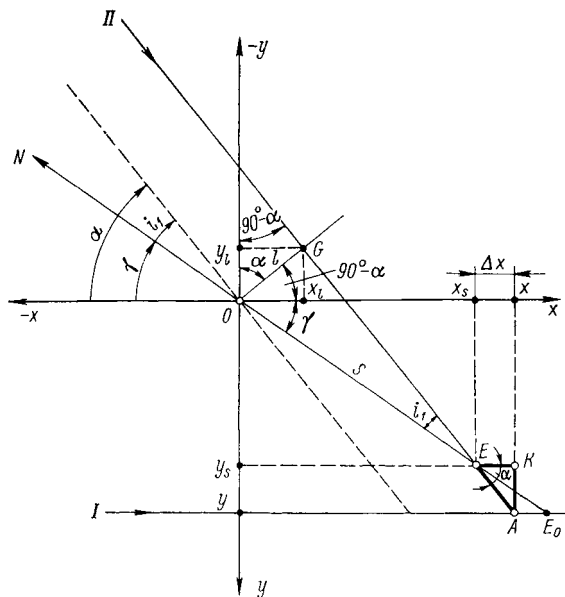


Рис. 80. Ход лучей, преломленных пластинкой

Так как

$$\cos r_1 = \sqrt{1 - \sin^2 r_1} = \sqrt{1 - \sin^2 i_1/n^2},$$

то

$$\begin{aligned} l &= ab [\sin i_1 \sqrt{1 - \sin^2 i_1/n^2} - (\sin i_1/n) \sqrt{1 - \sin^2 i_1}] = \\ &= ab (\sin i_1/n) (\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \sqrt{1 - \sin^2 i_1}). \end{aligned}$$

Поскольку

$$ab = \frac{ac}{\cos r_1} = \frac{\Delta}{\sqrt{1 - \sin^2 i_1/n^2}} = \frac{\Delta n}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}},$$

имеем

$$l = \Delta \sin i_1 \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_1}{n^2 - \sin^2 i_1}} \right),$$

но $i_1 = \alpha - \gamma$, тогда

$$l = \Delta \sin (\alpha - \gamma) \left[1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 (\alpha - \gamma)}{n^2 - \sin^2 (\alpha - \gamma)}} \right].$$

Если $\alpha = 0$, то

$$l = l_0 = -\Delta \sin \gamma \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \gamma}{n^2 - \sin^2 \gamma}} \right),$$

т. е. при положительных значениях угла γ отрезок l_0 имеет отрицательную величину, что соответствует случаю, когда преломленный луч проходит ниже падающего.

Проекции отрезка l на оси координат равны соответственно:

$$x_l = |l| \sin \alpha; \quad y_l = |l| \cos \alpha.$$

Смещение луча s вдоль перпендикуляра к поверхности пластинки можно найти из $\triangle OGE$, откуда имеем

$$\begin{aligned} s &= \frac{l}{\sin i_1} = \frac{l}{\sin (\alpha - \gamma)} = \Delta \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_1}{n^2 - \sin^2 i_1}} \right) = \\ &= \Delta \left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} \right) = \Delta \left(1 - \frac{\cos (\alpha - \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 (\alpha - \gamma)}} \right). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение для s может быть найдено другим путем. Действительно, из рис. 79 имеем:

$$s = OE = ae = ac - ce; \quad ac = \Delta; \quad ce = cb \operatorname{ctg} i_1; \quad cb = ac \operatorname{tg} r_1 = \Delta \operatorname{tg} r_1,$$

тогда $s = \Delta (1 - \operatorname{tg} r_1 / \operatorname{tg} i_1)$.

Так как $\sin i_1 / \sin r_1 = n$, можно найти

$$\begin{aligned} s &= \Delta \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_1}{n^2 - \sin^2 i_1}} \right) = \Delta \left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}} \right) = \\ &= \Delta \left(1 - \frac{\cos (\alpha - \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 (\alpha - \gamma)}} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, при изменении угла падения луча на пластинку i_1 , которое может быть связано либо с поворотом пластинки на угол γ , либо с изменением угла α , точка пересечения преломленного луча с перпендикуляром к поверхности пластинки, опущенным из точки E_0 , в которой происходит пересечение лучей при отсутствии

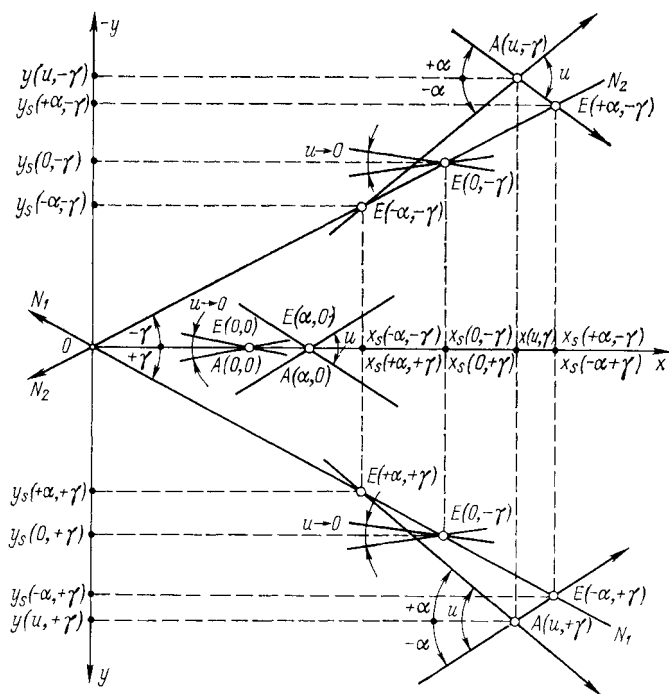


Рис. 81. Поле точек пересечения лучей, преломленных пластинкой, для двух положений нормали к ее поверхности N_1 и N_2

пластинки, перемещается, занимая последовательно положения в промежутке между точкой O и точкой E_0 . Проекции s на оси координат равны $x_s = s \cos \gamma$; $y_s = s \sin \gamma$.

При осуществлении сканирования плоскопараллельной пластинкой (призмой), установленной в сходящемся пучке света за объективом, формирование изображения точки производится лучами, образующими друг с другом угол $u = 2|\alpha|$. Координаты точки пересечения таких лучей после преломления их пластинкой, расположенной под углом γ , зависят от углов u и γ .

Найдем координаты $x(u, \gamma)$ и $y(u, \gamma)$ точки $A(u, \gamma)$ пересечения лучей, образующих с горизонталью углы $\pm\alpha$ и между собой угол $u = 2|\alpha|$, после преломления их пластинкой, перпендикуляр к которой составляет угол γ с горизонтальной осью. При этом будем иметь в виду следующие обозначения (см. рис. 79—81):

O — точка пересечения лучей при отсутствии пластинки (изображение точки на оси, создаваемое идеальным объективом при отсутствии пластинки), совпадающая с началом координат;

$E(\alpha, \gamma)$ — точка пересечения луча, образующего угол α с горизонталью, после преломления его пластинкой, расположенной под углом γ , с перпендикуляром к поверхности пластинки, опущенным на нее из начала координат — точки O ;

$s(\alpha, \gamma)$ — расстояние от начала координат до точки пересечения преломленных лучей, падающих под углом α , с перпендикуляром к пластинке, опущенным на нее из начала координат — точки O ;

$x_s(\alpha, \gamma)$; $y_s(\alpha, \gamma)$ — координаты точки пересечения преломненных лучей с перпендикуляром к поверхности пластинки;

$l(\alpha, \gamma)$ — смещение преломленного луча относительно падающего, отсчитанное вдоль перпендикуляра к этим лучам. Если преломленный луч проходит выше падающего, то $l > 0$, если ниже — $l < 0$;

$x_l(\alpha, \gamma)$; $y_l(\alpha, \gamma)$ — координаты точки пересечения перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление преломленного луча, с этим лучом.

С учетом этих обозначений и ранее полученных формул определим расстояния от начала координат до точек пересечения лучей, образующих с горизонталью угол $\pm \alpha$, с перпендикуляром к пластинке [точки $E(+\alpha, \gamma)$ и $E(-\alpha, \gamma)$]:

$$s(+\alpha, \gamma) = s_+ = \Delta \left[1 - \frac{\cos(|\alpha| - \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(|\alpha| - \gamma)}} \right];$$

$$s(-\alpha, \gamma) = s_- = \Delta \left[1 - \frac{\cos(|\alpha| + \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(|\alpha| + \gamma)}} \right].$$

Найдем разность $s_+ - s_-$, учитывая, что $|\alpha| = u/2$

$$\Delta s(u, \gamma) = s_+ - s_- = \Delta \left[\frac{\cos(u/2 + \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 + \gamma)}} - \frac{\cos(u/2 - \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 - \gamma)}} \right].$$

Полагая $n^2 \gg \sin^2(u/2 \pm \gamma)$, можно найти

$$\Delta s(u, \gamma) = \frac{\Delta}{n} \left[\cos\left(\frac{u}{2} + \gamma\right) - \cos\left(\frac{u}{2} - \gamma\right) \right] = -\frac{2\Delta}{n} \sin \frac{u}{2} \sin \gamma.$$

Следовательно, для $\gamma > 0$ $\Delta s < 0$, т. е. $OE(+\alpha, +\gamma) < OE(-\alpha, +\gamma)$; для $\gamma < 0$ $\Delta s > 0$, т. е. $OE(+\alpha, +\gamma) > OE(-\alpha, +\gamma)$. На рис. 81 изображено поле точек пересечения лучей, преломленных пластинкой.

Кроме того, для параксиальных лучей, когда $\alpha \rightarrow 0$ и $u \rightarrow 0$, имеем:

$$s(0, \gamma) = \Delta [1 - \cos \gamma / \sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}]; \quad \Delta s(0, \gamma) = 0.$$

Если $n^2 \gg \sin^2 \gamma$, то $s(0, \gamma) = \Delta (1 - \cos \gamma / n)$. Так как для $\gamma = 0$

$$s(u, 0) = s(+\alpha, 0) = s(-\alpha, 0) = \Delta \left[1 - \frac{\cos(u/2)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2)}} \right],$$

а для параксиальных лучей $s(0, 0) = \Delta(1 - 1/n)$, то

$$s(0, \gamma) - s(0, 0) = (\Delta/n)(1 - \cos \gamma) > 0,$$

следовательно, $OE(0, \gamma) > OE(0, 0)$, что видно из рис. 81.

Поле точек пересечения лучей, преломленных пластинкой, относительно оси Ox (рис. 81) имеет симметрию, поэтому упростим обозначения и выполним расчет соответствующих координат на основании рис. 82.

Определим, что

$$x = x_s + \Delta x; \quad y = y_s + \Delta y,$$

где

$$x_s = OE_+ \cos \gamma = s_+ \cos \gamma; \quad y_s = OE_+ \sin \gamma = s_+ \sin \gamma;$$

$$\Delta x = AE_+ \cos \alpha; \quad \Delta y = AE_+ \sin \alpha.$$

Из $\triangle AE_+E_-$ имеем

$$\frac{AE_+}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{E_+E_-}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{E_+E_-}{\sin 2\alpha},$$

но $E_+E_- = OE_- - OE_+ = s_- - s_+ = \Delta s$, т. е.

$$AE_+ = [\sin(\alpha + \gamma)/\sin 2\alpha] \Delta s.$$

Тогда

$$\Delta x = [\sin(\alpha + \gamma)/(2 \sin \alpha)] \Delta s;$$

$$\Delta y = [\sin(\alpha + \gamma)/(2 \cos \alpha)] \Delta s.$$

Следовательно,

$$x = x_s + \Delta x = s_+ \cos \gamma + [\sin(\alpha + \gamma)/(2 \sin \alpha)] \Delta s;$$

$$y = y_s + \Delta y = s_+ \sin \gamma + [\sin(\alpha + \gamma)/(2 \cos \alpha)] \Delta s.$$

Подставляя значения s , Δs и преобразуя, найдем:

$$\frac{x}{\Delta} = \cos \gamma - \frac{1}{4 \sin(u/2)} \left[\frac{\sin^2(u/2 + \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 + \gamma)}} + \frac{\sin^2(u/2 - \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 - \gamma)}} \right];$$

$$\frac{y}{\Delta} = \sin \gamma - \frac{1}{4 \cos(u/2)} \left[\frac{\sin^2(u/2 + \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 + \gamma)}} - \frac{\sin^2(u/2 - \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 - \gamma)}} \right].$$

Для параксиальных лучей имеем

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{\Delta} &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\Delta} \right) = \cos \gamma - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{4 \sin(u/2)} \times \\ &\times \left[\frac{\sin^2(u/2 + \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 + \gamma)}} + \frac{\sin^2(u/2 - \gamma)}{\sqrt{n^2 - \sin^2(u/2 - \gamma)}} \right]. \end{aligned}$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим:

$$\frac{x_0}{\Delta} = \cos \gamma - \frac{n^2 \cos 2\gamma + \sin^4 \gamma}{(n^2 - \sin^2 \gamma)^{3/2}};$$

$$\frac{y_0}{\Delta} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{y}{\Delta} \right) = \sin \gamma \left(1 - \frac{\cos \gamma}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \gamma}} \right).$$

Нетрудно убедиться, что $x_0 = dy_0/d\gamma$, и если зависимость координаты y_0 от угла поворота пластинки линейна, то для небольших значений углов α $x_0 = \text{const}$ и в процессе сканирования расфокусировки не возникает.

Полученные формулы показывают, что координаты изображения излучающей точки x, y зависят от угла поворота пластинки γ , ее толщины Δ , показателя преломления n , а также от угла раствора лучей, падающих на пластинку. Последнее обстоятельство говорит о том, что гомоцентрический пучок лучей, образующий на входной грани пластинки различные углы падения, после выхода из пластинки становится негомоцентрическим.

По этим формулам были выполнены расчеты для параксиальных лучей при различных показателях преломления материала, из ко-

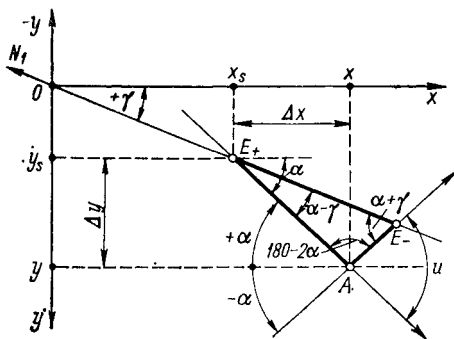


Рис. 82. Координаты точек пересечения лучей, преломленных пластинкой

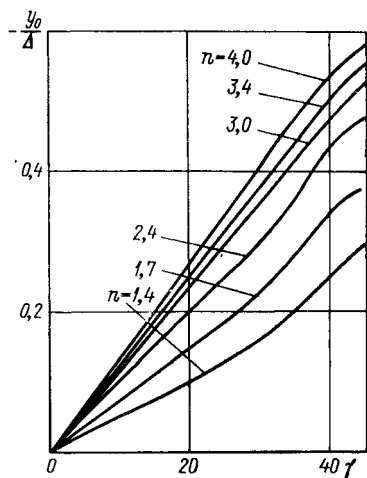


Рис. 83. Относительное смещение параксиальных лучей плоскопараллельной пластинкой

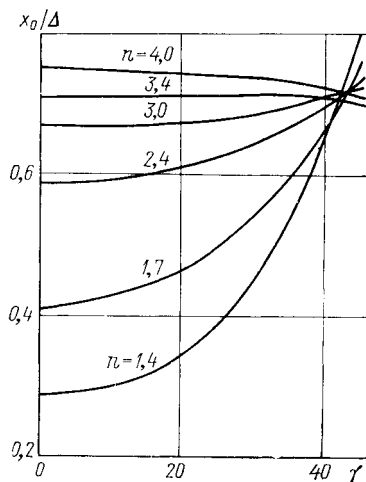


Рис. 84. Относительная расфокусировка изображения для параксиальных лучей, преломленных плоскопараллельной пластинкой

торого сделана пластинка. В частности, рассмотрены следующие материалы: флюорит CaF_2 ($n = 1,434$), бескислородное стекло ИКС-23 ($n = 2,427$), кремний Si ($n = 3,422$) и германий Ge ($n = 4,015$). Результаты расчета представлены в виде графиков на рис. 83 и 84.

Из графиков следует, что линейность сканирования улучшается с ростом показателя преломления материала. К этому нужно добавить, что при использовании в качестве материала германия хроматизм, вносимый пластинкой, пренебрежимо мал, так как дисперсия германия мала.

Основными aberrациями, вносимыми вращающейся пластинкой, являются сферическая aberrация и кома. Эти aberrации могут быть значительно уменьшены специальным расчетом сложной оптической системы, включающей помимо зеркал несколько линзовых элементов.

Т а б л и ц а 1
Зависимость aberrаций от угла поворота пластинки

Материал	Толщина Δ , мм	Диаметр кружка рассеяния, мм		
		$\gamma=0$	$\gamma=30^\circ$	$\gamma=45^\circ$
ИКС-23	34,3	0,19	1,4	2,3
Si	30,4	0,085	0,5	1,6
Ge	29,38	0,05	0,42	0,95

Зависимость некомпенсированных aberrаций от угла поворота пластинки и ее материала (по данным Н. И. Куликовской) приведена в табл. 1 (числовая апертура объектива 0,3). Если в качестве пластинки используется N -гранная призма, то при повороте ее на 360° осуществляется сканирование N строк. Одна строка сканируется при повороте призмы на угол $\gamma_{гр} = 360^\circ/N$. При этом количество энергии, приходящей в изображение заданной точки, изменяется за счет изменения потерь на отражение и поглощение, а на краю поля, когда углы призмы совпадают с осью объектива, энергия не превышает 50 % от максимального значения. Поэтому рабочий угол поворота призмы, соответствующий сканированию одной строки γ_c , всегда меньше, чем $\gamma_{гр}$, так что $\gamma_c = \eta \gamma_{гр}$, где η — коэффициент использования грани призмы. Зная γ_c и n , по графикам (рис. 83) можно найти y/Δ , т. е. при заданных размерах призмы Δ и фокусном расстоянии объектива f — поле обзора $\varphi = 2 \arctg y/f$.

§ 5.2. ПРИМЕРЫ СКАНИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ — ТЕПЛОВИЗОРЫ ФИРМЫ АГА

Сканирующая система, в которой используются законы преломления света во вращающейся призме, применена в шведских тепловизорах фирмы АГА.

Тепловизоры «АГА» нашли применение во многих областях промышленности и медицины: для проверки теплового режима электросетей, обнаружения областей перегрева в электронном оборудовании, для наружного осмотра строящихся зданий с целью проверки теплоизоляции и обнаружения мест утечки тепла, диагностики раковых и сосудистых заболеваний, определения положения плаценты при беременности и т. д. В сканирующей системе всех тепловизоров «АГА» используется многогранная вращающаяся призма из германия или кремния, установленная за объективом и изменяющая

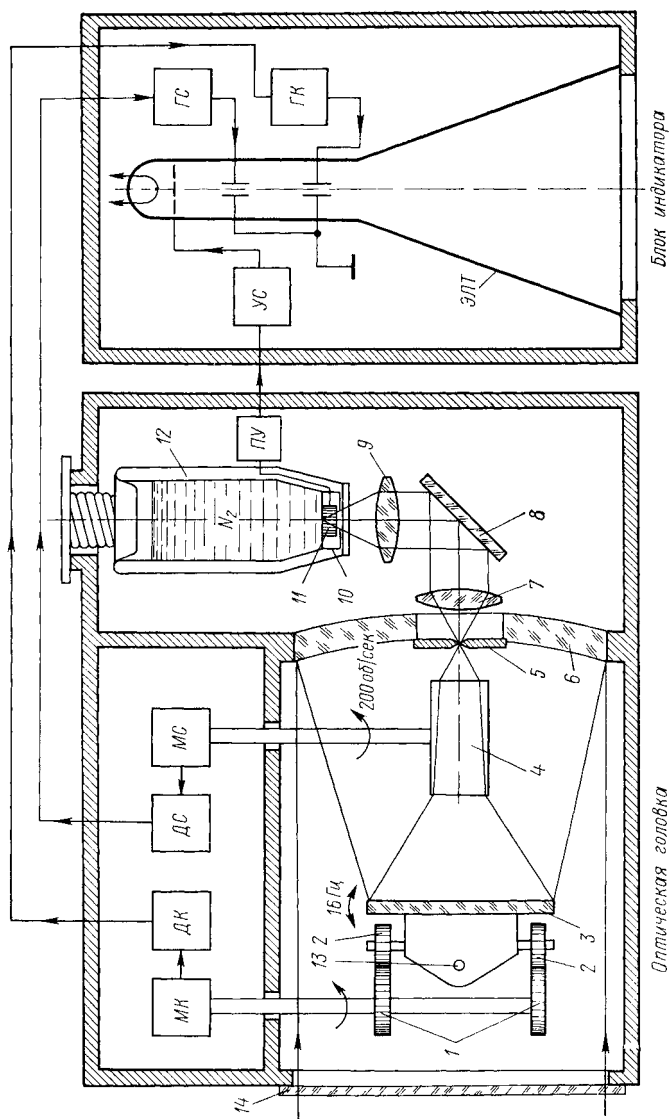


Рис. 85. Структурная схема тепловизора модели «АГА Термовижн»

в процессе вращения направление оптической оси прибора за счет смещения преломленных лучей.

Рассмотрим структурную схему одной из первых моделей тепловизора (рис. 85). В состав оптической головки прибора входят оптическая система, охлаждаемый приемник излучения, предусилитель, система синхродатчиков и электро-механические системы сканирования и фокусировки. Входное окно оптической системы, защищающее

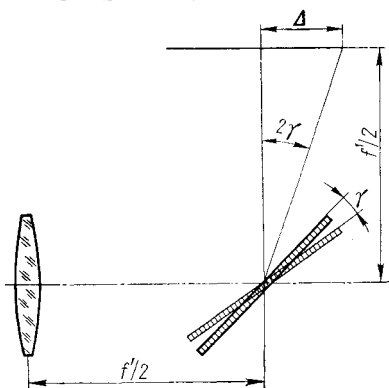


Рис. 86. Отклонение сканирующего луча при повороте плоского зеркала, установленного в сходящемся пучке

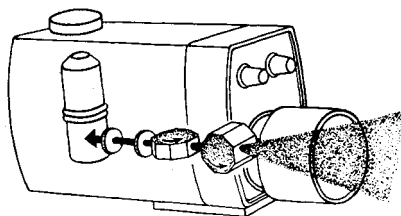


Рис. 87. Принцип сканирования двумя вращающимися призмами

ее от воздействия внешней среды, изготавливается из прозрачной к ИК-излучению синтетической пленки 14. Основной объектив оптической системы состоит из большого сферического зеркала 6 и малого плоского зеркала 3. Диаметр большого зеркала объектива



Рис. 89. Тепловая фотография груди. Симметричный «рисунок» — норма (тепловизор модели «Рубин»)



Рис. 90. Тепловая фотография груди. Левосторонняя асимметрия — рак левой молочной железы (тепловизор модели «Рубин»)

равен 195 мм, малого — 71,4 мм, фокусное расстояние большого зеркала 350 мм, размер пятна рассеяния в плоскости Гаусса — 2 мм (в кружке диаметром 1,5 мм сосредоточено 80 % энергии), размер кружка наименьшего рассеяния — 0,5 мм (плоскость кружка наименьшего рассеяния смещена относительно гауссовой плоскости на 0,5 мм).

Плоское зеркало колеблется относительно горизонтальной оси 13 (перпендикулярна к плоскости чертежа) с частотой 16 Гц, обеспечивая обзор пространства со скоростью 16 кадр./с при времени

обратного хода, составляющем 12 %. Колебательное (пилообразное) перемещение зеркала осуществляется при помощи двух противоположно действующих соосных кулачков 1, воздействующих на круглые роликовые подшипники 2, смонтированные на верхнем и нижнем концах колеблющегося плоского зеркала. Кулачки вращаются мотором кадровой развертки МК. Угол поворота плоского зеркала равен $5^\circ (\pm 2,5^\circ)$. Это обеспечивает отклонение сканирующего луча на 5° . Действительно, если колеблющееся зеркало установлено на расстоянии $f'/2$ от плоскости изображения (рис. 86), то при повороте зеркала на угол γ соответствующий луч отклоняется на 2γ , т. е. изображение смещается на величину $\Delta = (f'/2) 2\gamma = f'\gamma$, следовательно, угол отклонения сканирующего луча $\varphi = \Delta/f' = \gamma$.

В центре поля обзора кружок рассеяния оптической системы определяется сферическими aberrациями и его наименьший диаметр равен 0,5 мм. Для точек вне оси добавляются такие aberrации, как кома, кривизна поля, астигматизм и дисторсия, которые увеличивают кружок на краю поля обзора в плоскости наилучшей установки до 1,6 мм.

Сканирование в плоскости, перпендикулярной направлению сканирования плоского зеркала (по строкам), осуществляется вращением многогранной призмы 4. Обычно используется четырехгранная призма из германия или кремния, вращающаяся со скоростью 200 об/с мотором строчной развертки МС. За каждый оборот призмы сканируется четыре строки, что обеспечивает скорость обзора 1600 строк/с (так как в кадре 100 строк, то скорость обзора равна 16 кадр./с). В результате вносимых призмой дополнительных aberrаций кружок рассеяния увеличивается до 2 мм (в плоскости наилучшей резкости). Конструктивно призме придается подушкообразная форма за счет снятия восьми углов, не имеющих значения для хода лучей. Рабочие поверхности призмы просветляются окисью кремния для обеспечения максимального пропускания в спектральном диапазоне от 2,0 до 5,4 мкм. Изображение элемента поля обзора формируется оптической системой в плоскости диафрагмы 5. Излучение, проходящее сквозь отверстие диафрагмы, передается линзами 7, 9 и плоским зеркалом 8 на чувствительную площадку приемника 11, закрытого охлаждаемой диафрагмой 10, имеющей отверстие диаметром 0,5 мм. Приемник излучения представляет собой охлаждаемый жидким азотом фоторезистор на основе антимонида индия (InSb). Сопротивление его равно 50 кОм. Сосуд Дюара 12, заливаемый жидким азотом до уровня, находящегося на расстоянии 5 мм от верхней кромки, обеспечивает время, в те-



Рис. 91, а. Тепловая фотография лица (тепловизор модели «Рубин»)

чение которого происходит полное испарение азота (около 6 ч). Сигнал, вырабатываемый приемником излучения, усиливается предусилителем *ПУ*, усилителем *Ус* и воздействует на модулирующий электрод электронно-лучевой трубки ЭЛТ индикатора. Развертка луча индикатора по строкам и кадру осуществляется генераторами строчной *ГС* и кадровой *ГК* разверток, которые синхронизируются датчиками сигналов синхронизации строк *ДС* и кадров *ДК*. Последние формируют сигналы синхронизации с помощью фотодиодов, освещаемых светом, прерываемым



Рис. 92. Тепловые фотографии рук человека: *а* — получена тепловизором модели «Рубин-3» — нормальное распределение температур; *б, в* — получены тепловизором модели «АГА» при исследовании кровообращения до (*б*) и после (*в*) курения одной сигареты (температура мизинца после курения понижается на 3°C)

модулирующими дисками синхронно с вращением призмы и колебаниями плоского зеркала.

В последних моделях тепловизоров «АГА» сканирование в двух плоскостях осуществляется вращающимися вокруг взаимно перпендикулярных осей многогранными призмами, как это показано на рис. 87. На рис. 88 (см. вклейку) представлен внешний вид тепловизора «АГА-780», а на рис. 89—92 (рис. 91, б и 92, в — д, см. вклейку) приведены тепловые фотографии, полученные тепловизорами «АГА», «Рубин» и «Радуга-МТ».

Глава 6

СКАНИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ОБЪЕКТИВАМИ И ОПТИЧЕСКИМИ КЛИНЬЯМИ, ЭКРАНИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ И СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ОПТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

Наряду с рассмотренными, широко распространенными системами сканирования, используются также системы, обеспечивающие сканирование вращающимися объективами и оптическими клиньями, отверстием в непрозрачном экране, движущимся в плоскости изображения (экранирующие системы), а также системы, состоящие из элементов, оптические свойства которых изменяются.

§ 6.1. СКАНИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ОБЪЕКТИВАМИ

Принцип построчного сканирования вращающимися объективами рассмотрим по схеме, представленной на рис.93. Три объектива — сферические зеркала — размещены на вращающемся основании 2, в центре которого на неподвижном основании 1 установлен приемник излучения $Пр$. Каждый раз используется объектив, находящийся над отверстием в корпусе прибора (на рис. 93— $Об_1$). В положениях I и III объектив воспринимает излучение источников, находящихся на краях поля обзора, в положении II — в центре поля обзора. На смену объективу $Об_1$ приходит объектив $Об_2$ и т. д. Сканирование по кадру осуществляется за счет движения всей системы вдоль оси, перпендикулярной к плоскости рисунка. Коэффициент заполнения канала усиления сигналами, приходящими от источников, находящихся в поле обзора, может быть доведен до единицы.

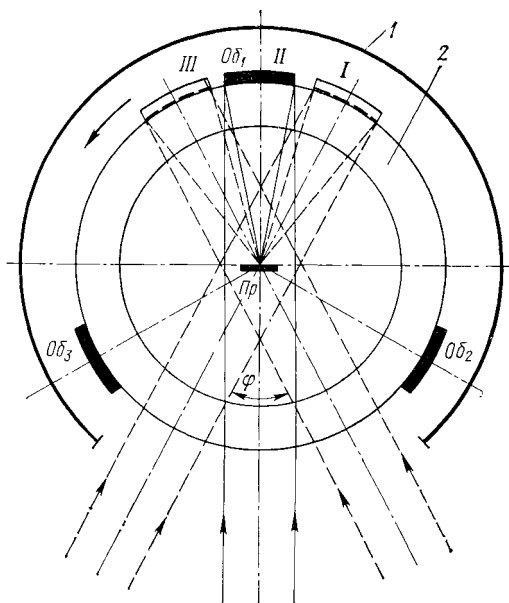


Рис. 93. Сканирование вращающимися объективами

Система с вращающимися объективами имеет следующие недостатки.

1. Приемник излучения воспринимает сигналы, приходящие не только от источников, расположенных в поле обзора, но и от всего окружающего прибор фона, так как объективы всегда направляют падающее на них излучение на приемник, независимо от того, приходит это излучение от наблюдаемых источников или корпуса прибора.

2. Излучение, приходящее от наблюдаемых источников, падает на чувствительную площадку приемника под различными углами в зависимости от положения источника в поле обзора. В связи с тем что чувствительность приемника зависит от угла падения излучения, один и тот же объект может вызывать разный сигнал при перемещении его по полю обзора.

3. Конструкция оптической головки прибора с вращающимися объективами получается достаточно сложной и громоздкой.

Форма раstra, образованного в плоскости наблюдения, при сканировании вращающимися объективами в системе с многоэлементным

приемником излучения напоминает форму раstra, создаваемого вращающейся призмой. Однако вследствие того что в данном случае плоскость приемной площадки всегда параллельна плоскости наблюдения, формулы для вычисления размеров линейного поля зрения имеют несколько иной вид.

Действительно, по-прежнему при угле визирования $\varphi/2$ можно найти:

$$a_x = H \delta_x \sec^2 \frac{\varphi}{2};$$

$$a_y = H \delta_y \sec \frac{\varphi}{2},$$

но значение мгновенного поля зрения изменяется по полю обзора (рис. 94):

$$\delta_x = \delta_{0x} \cos \frac{\varphi}{2}; \quad \delta_y = \delta_{0y}.$$

Здесь $\delta_{0x} = x/f'$; $\delta_{0y} = y/f'$, где x , y — линейные размеры чувствительной площадки приемника излучения (диафрагмы поля); f' — фокусное расстояние объектива.

Следовательно,

$$a_x = H \delta_{0x} \cos \frac{\varphi}{2} \sec^2 \frac{\varphi}{2} = H \delta_{0x} \sec \frac{\varphi}{2};$$

$$a_y = H \delta_{0y} \sec (\varphi/2).$$

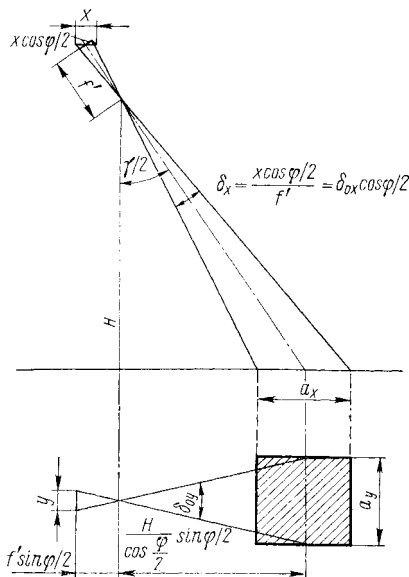


Рис. 94. Изменение мгновенного поля зрения при сканировании вращающимися объективами

С помощью вращающегося объектива можно обеспечить сканирование по спиральной и розеточной траекториям.

Рассмотрим в качестве примера такого способа сканирования принципиальное устройство самолетного тепlopеленгатора «Киль-4», разработанного в Германии во время второй мировой войны.

Тепlopеленгатор «Киль-4» предназначен для обнаружения ночью самолета по тепловому излучению двигателя. Он устанавливался на самолетах-истребителях и обеспечивал обнаружение двухмоторного бомбардировщика на дистанциях, превышающих 3 км. Поле обзора тепlopеленгатора $\varphi = 20^\circ$ сканируется мгновенным полем зрения $\delta = 1^\circ$ за 0,5 с. Принципиальная схема прибора приведена на рис. 95, а. Параболическое зеркало — объектив Об (диаметр 230 мм, фокус 150 мм, шейка каустики 1 мм) — закреплено на вращающемся со скоростью 15 с^{-1} валике, так что его главная ось составляет угол $\gamma_1 = 5^\circ$ с валиком. Валик, на котором закреплено зеркало, имеет наклон к продольной оси прибора, равный $\gamma = 5^\circ$, и вращается вокруг этой оси со скоростью 2 с^{-1} .

Сложение двух движений заставляет оптическую ось зеркала описывать в пространстве розеточную траекторию с общей точкой

пересечения на продольной оси прибора. В этой точке помещен чувствительный слой ($3 \times 3 \text{ мм}^2$) фоторезистора из сернистого свинца, закрытого фильтром и охлаждаемого до температуры -78°С твердой углекислотой (спектральный диапазон $1,5\text{--}3,5 \text{ мкм}$). При появлении цели в поле зрения прибора $\delta = (3/150) 57,3 \approx 1^\circ$ ее излучение

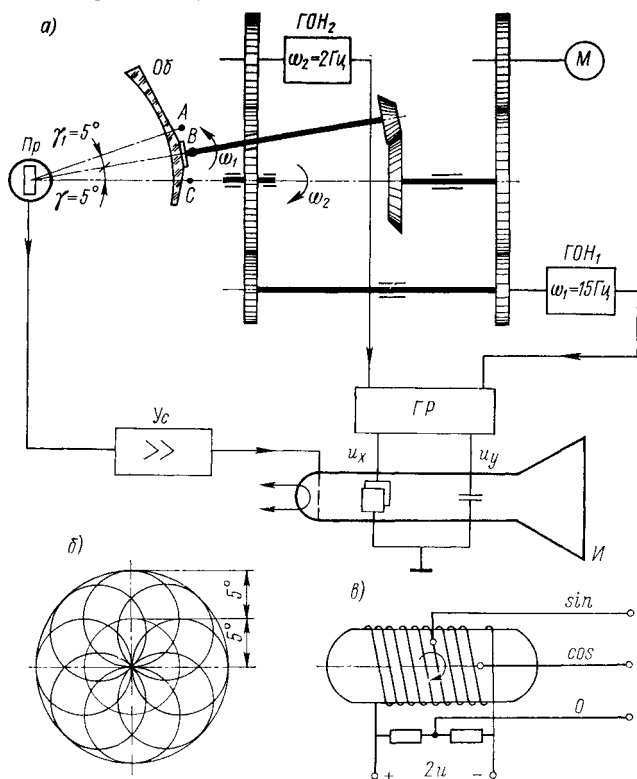


Рис. 95. Самолетный тепловизор: а — принципиальная схема; б — траектория сканирования; в — генератор опорных напряжений (синусно-косинусный потенциометр)

падает на приемник, который вырабатывает импульсы напряжения, усиленные усилителем $Ус$ и воздействующие на управляющий электрод электронно-лучевого индикатора, в результате чего на экране индикатора высвечивается точечное изображение цели (число импульсов сигнала при положении цели в центре поля обзора ~ 17 имп./с, на краю ~ 2 имп./с, длительность импульсов около $2,5 \text{ мс}$).

Электронный луч индикатора перемещается синхронно с движением оптической оси прибора благодаря сигналам генераторов опорных напряжений $ГОН_1$ и $ГОН_2$, которые представляют собой

синусно-косинусные потенциометрические датчики, вырабатывающие напряжения: $ГОН_1 — u \sin \omega_1 t$, $u \cos \omega_1 t$; $ГОН_2 — u \sin \omega_2 t$, $u \cos \omega_2 t$. Напряжения складываются в блоке генератора разверток $ГР$ и подаются на отклоняющие пластины электронно-лучевой трубки индикатора в виде:

$$u_y = u (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t); \quad u_x = (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$

Под воздействием этих напряжений луч индикатора следует за движением оптической оси прибора и положение светящейся точки на экране индикатора соответствует положению цели в поле обзора.

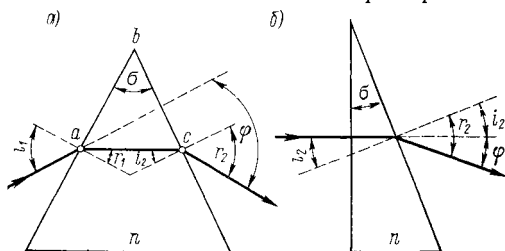


Рис. 96. Отклонение луча призмой и клином

§ 6.2. СКАНИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИМИ КЛИНЬЯМИ

Известно, что изготовленная из прозрачного материала призма с углом σ при вершине отклоняет луч света к основанию. При этом справедливо соотношение (рис. 96, а)

$$\sin i / \sin r \approx i / r = n,$$

где i — угол падения; r — угол преломления; n — показатель преломления материала, следовательно, $i_1/r_1 = n$; $i_2/r_2 = 1/n$.

Так как при преломлении на первой поверхности луч отклонится на угол $i_1 - r_1$, а на второй — на угол $r_2 - i_2$, то полный угол отклонения будет

$$\varphi = i_1 - r_1 + r_2 - i_2 = (n - 1) (r_1 + i_2).$$

Из $\triangle abc$ следует, что $\sigma + \angle bac + \angle bca = \pi$. Так как $\angle bac = \pi/2 - r_1$; $\angle bca = \pi/2 - i_2$, то $\sigma = r_1 + i_2$ и, следовательно, $\varphi = \sigma (n - 1)$. Очевидно, что аналогичное соотношение справедливо для оптического клина с углом при вершине σ (рис. 96, б).

Если клин вращать вокруг направления падающих на него лучей, то выходящий луч движется по образующей прямого кругового конуса с углом при вершине $2\varphi = 2\sigma (n - 1)$.

Если по ходу лучей, прошедших через один клин, установить точно такой же второй (рис. 97, а), то пара клиньев отклоняет луч так же, как некоторый эквивалентный клин с углом при вершине

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = 2\sigma \cos (\gamma/2),$$

где γ — угол между направлениями, характеризующими ориентацию вершины каждого клина (рис. 97, б).

Следовательно, суммарный угол отклонения лучей будет

$$\varphi_{\Sigma} = \sigma_{\text{ЭКВ}} (n - 1) = 2\sigma (n - 1) \cos (\gamma/2) = \varphi_{\text{max}} \cos (\gamma/2),$$

где $\varphi_{\text{max}} = 2\sigma (n - 1)$.

Если пару клиньев вращать в различных направлениях с одинаковой скоростью, то сканирующий луч движется вдоль биссектрисы угла γ , т. е. вдоль прямой, различным образом ориентированной на плоскости в зависимости от начальной установки клиньев. Для начальной установки, соответствующей углу 180° , когда пара клиньев эквивалентна плоскопараллельной пластинке, суммарное отклонение луча можно выразить через угол поворота каждого клина от начального положения (угол β на рис. 97, б). Так как $\gamma = 180^\circ - 2\beta$, то

$$\begin{aligned}\varphi_\Sigma &= \varphi_{\max} \cos(\gamma/2) = \\ &= \varphi_{\max} \cos(90^\circ - \beta) = \varphi_{\max} \sin \beta.\end{aligned}$$

Соответствующая зависимость представлена на рис. 98.

Отклонение ее от линейного закона выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_\Sigma &= \varphi_{\max}\beta - \varphi_{\max} \sin \beta \approx \varphi_{\max} (\beta - \beta + \beta^3/3! - \beta^5/5! + \dots) \approx \\ &\approx (\varphi_{\max} \beta^3/6) (1 - \beta^2/20).\end{aligned}$$

Для $\beta \ll 1$ $\Delta\varphi_\Sigma/\varphi_{\max} \approx \beta^3/6$.

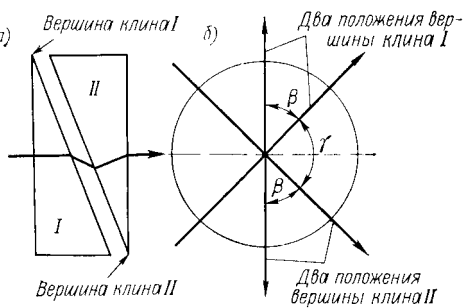


Рис. 97. Сканирование парой клиньев

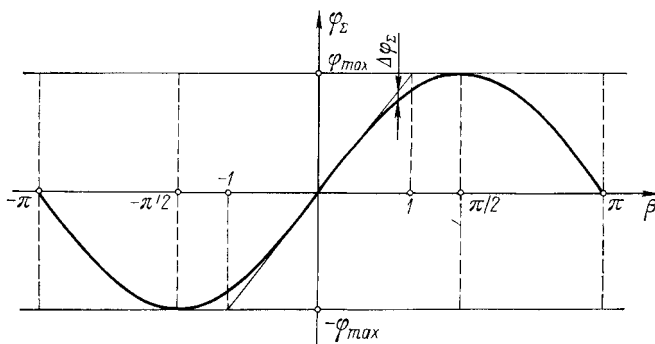


Рис. 98. Зависимость угла отклонения луча φ_Σ от угла поворота клина β

Если пару клиньев вращать в одном направлении с одинаковой скоростью, то сканирующий луч движется по окружности, угловой диаметр которой определяется начальной установкой клиньев. Если клинья вращать в одном направлении с разными скоростями, то сканирующий луч движется по спирали, шаг которой определяется разностью скоростей вращения клиньев. При определенном соотношении скоростей и направлений вращения клиньев могут быть

получены также розеточные траектории сканирования. Дополнительное совместное вращение пары клиньев позволяет получить различные характеристики заполнения поля обзора линиями сканирования. Обычно клинья устанавливают перед объективом, но иногда удается использовать их для сканирования в слабо сходящихся пучках.

Основным недостатком сканирующих систем на оптических клиньях является наличие значительных aberrаций в основном за счет хроматизма даже при небольших углах обзора. Оптическая

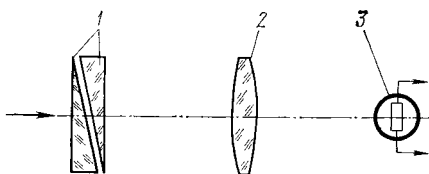


Рис. 99. Оптическая схема опто-электронного прибора со сканирующими клиньями:

1 — сканирующие клинья; 2 — объектив; 3 — приемник излучения

схема расположения сканирующих клиньев, объектива и чувствительной площадки приемника излучения приведена на рис. 99.

Одним из существенных преимуществ оптических клиньев по сравнению с другими сканирующими системами является наличие «оптической редукии» между углом поворота клина и углом отклонения оптической оси прибора. Действительно, для пары клиньев,

осуществляющих движение сканирующего луча по прямой, максимальное значение угла поворота каждого клина, при котором отклонение от линейного закона не превышает 10 %,

$$\beta = \sqrt[3]{6 \Delta\varphi_{\Sigma}/\varphi_{\max}} = \sqrt[3]{0,6} = 0,843 \approx 50^\circ.$$

Максимальный угол отклонения оптической оси при $\sigma = 7^\circ$; $n = 1,4$

$$\varphi_{\max} = 2\sigma(n - 1) = 14 \cdot 0,4 = 5,6^\circ,$$

оптическая редукиа $k = 50/5,6 = 9$, т. е. ошибка в угле отклонения оптической оси в $1'$ соответствует ошибке в угле поворота клиньев $9'$.

§ 6.3. СКАНИРОВАНИЕ ОТВЕРСТИЕМ В НЕПРОЗРАЧНОМ ЭКРАНЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ В ПЛОСКОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Наиболее простым способом, реализующим сканирование в пространстве изображений, является *сканирование отверстием* в непрозрачном экране, перемещающемся по заданному закону в плоскости изображения, создаваемого широкоугольным объективом. В процессе этого перемещения последовательно открывается доступ для излучений отдельных участков анализируемого поля на приемник, установленный за отверстием. Сигнал, вырабатываемый приемником излучения, в каждый момент пропорционален потоку излучения, проходящему в этот момент через отверстие. Следовательно, такая система сканирования является системой мгновенного действия. Поскольку излучение большей части поля не имеет доступа

к приемнику благодаря наличию непрозрачного экрана, системы сканирования подобного типа называются также *экранирующими*.

Классическим примером осуществления принципа сканирования отверстием в непрозрачном экране является система механического телевидения с диском Нипкова (рис. 100).

В плоскости изображения, создаваемого объективом *Об*, установлены диафрагма поля *ДП* и непрозрачный диск с отверстиями *Д*. Излучение, проходящее через отверстия диска, падает на приемник

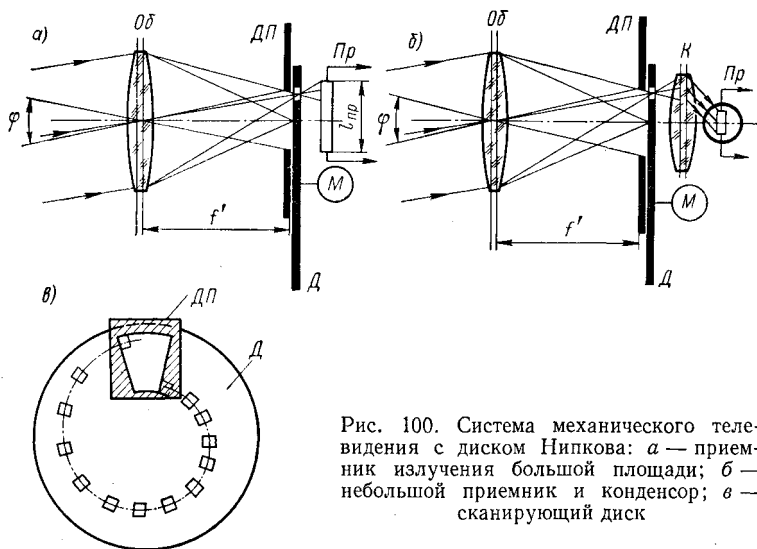


Рис. 100. Система механического телевидения с диском Нипкова: *а* — приемник излучения большой площади; *б* — небольшой приемник и конденсор; *в* — сканирующий диск

излучения *Пр* либо непосредственно (рис. 100, *а*), либо собирается на чувствительной площадке приемника с помощью конденсора *К*, проецирующего на приемник входной зрачок объектива (рис. 100, *б*).

Отверстия в диске *Д* расположены таким образом, что изображение, ограниченное диафрагмой поля *ДП*, последовательно анализируется по строкам, так что когда одно отверстие выходит за пределы окна диафрагмы, другое — входит в окно, очерчивая следующую строку (рис. 100, *в*). Расчет числа отверстий и их расположения на сканирующем диске не представляет затруднений. Большого внимания заслуживает сравнение схем, представленных на рис. 100, *а*, *б*.

Размер чувствительной площадки приемника излучения (рис. 100, *а*) определяется полем обзора, фокусным расстоянием и относительным отверстием объектива. В большинстве случаев, когда приемник излучения расположен в непосредственной близости к плоскости изображения, его размер можно найти из соотношения

$$l_{пр} \approx 2f' \operatorname{tg}(\varphi/2) \approx f' \varphi.$$

Отсюда следует, что даже при небольших полях обзора приходится использовать приемник с большим чувствительным слоем. Например, при $\varphi = 0,2$; $f' = 100$ мм имеем $l_{np} = 20$ мм. Поскольку порог чувствительности приемника излучения прямо пропорционален корню квадратному из его площади или линейному размеру l_{np} , то в системе, где используется приемник большого размера, трудно ожидать получения хороших характеристик.

Следует также иметь в виду, что чувствительность приемников излучения непостоянна по поверхности приемной площадки. Исследования распределения чувствительности показывают наличие в пределах приемной площадки отдельных зон, чувствительность которых

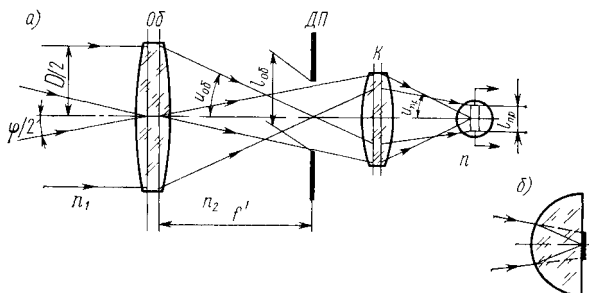


Рис. 101. Оптическая схема с конденсором (а) и иммерсионный приемник (б)

составляет 10—20 % от максимального значения. Неравномерность распределения чувствительности приемника по поверхности может вызвать нежелательные эффекты резкого изменения сигнала, вырабатываемого приемником, при различных положениях объекта наблюдения в поле обзора.

Для того чтобы избежать этого явления, в оптической системе применяют конденсор (K на рис. 100, б), проецирующий на приемник входной зрачок объектива. Применение конденсора позволяет также вынести приемник из плоскости изображения, что часто бывает желательно, например для помещения в эту плоскость анализирующего раstra.

Выбор основных параметров системы с конденсором должен осуществляться с учетом условия синусов, в соответствии с которым произведение показателя преломления среды, длины отрезка прямой, перпендикулярной оси симметрии световой трубки, и синуса угла, образуемого с этой осью каким-нибудь лучом, выходящим из точки пересечения отрезка с осью, является инвариантом. Применение условия синусов к схеме с конденсором (рис. 101) позволяет записать равенство

$$n_1 D \sin(\varphi/2) = n_2 l_{05} \sin u_{05} = n l_{np} \sin u_{np},$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления сред, где расположен источник излучения и его изображение; n — показатель преломления

среды, где расположен приемник излучения; D — диаметр входного зрачка объектива; $l_{об}$ — линейное поле обзора объектива в плоскости изображения (размер отверстия диафрагмы поля); φ — угол поля обзора; $u_{об}$ — задний апертурный угол объектива; $u_{пр}$ — апертурный угол приемника (конденсора).

Из условия синусов следует

$$l_{пр} = n_1 D \sin(\varphi/2) / (n \sin u_{пр}).$$

Если $n_1 = 1$, то $l_{пр} = D\varphi / (2n \sin u_{пр})$, так как $D = f'\ddot{O}$, где \ddot{O} — относительное отверстие объектива, то

$$l_{пр} \approx f'\varphi\ddot{O} / (2n \sin u_{пр}).$$

Очевидно, что существенное улучшение энергетических характеристик системы (уменьшение размеров приемника излучения при неизменном диаметре и относительном отверстии объектива) можно получить только при $n > 1$. В этом случае приемник излучения монтируется непосредственно на конденсорной линзе так, что между приемником и линзой существует хороший оптический контакт. Такой приемник излучения называют иммерсионным (рис. 101, б).

Улучшение энергетических характеристик системы, в которой осуществляется сканирование отверстием в непрозрачном экране, может быть достигнуто также путем некоторого изменения оптической схемы, приведенной на рис. 100, за счет включения в нее дополнительных конденсорных линз, размещенных в каждом отверстии диска (рис. 102). В этом случае каждый конденсор должен изображать на приемнике входной зрачок объектива не для всего поля обзора φ , а лишь для мгновенного поля зрения δ . Таким образом линейный размер приемника излучения может быть уменьшен в φ/δ раз. Такая система была предложена И. Е. Моричевым. Недостатком ее является большое число конденсорных линз, которые должны быть достаточно точно изготовлены и отъюстированы.

Оптическая схема подобного типа была применена в тепловизоре «Янтарь» (СССР), имеющем следующие основные характеристики: поле обзора $\varphi = 5 \times 4^\circ$, мгновенное поле зрения $\sim 5'$, частота кадров 25 кадр./с, минимальная разность температур, обнаруживаемая тепловизором, $0,2\text{—}0,3^\circ\text{C}$. В приборе используется 45 конденсорных линз, изготовленных из стекла ИКС-23. Приемник излучения — фоторезистор из антимолида индия, охлаждаемый жидким азотом, с размерами чувствительных площадок $0,6 \times 0,6 \text{ мм}^2$. Запись теплового изображения осуществляется путем фотографирования с экрана электронно-лучевой трубки. Внешний вид тепловизора представлен на рис. 103 (см. вклейку).

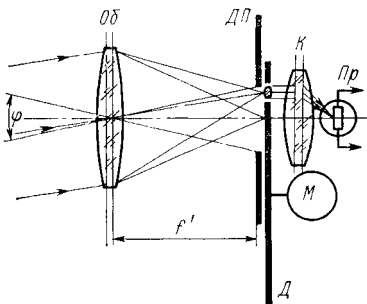
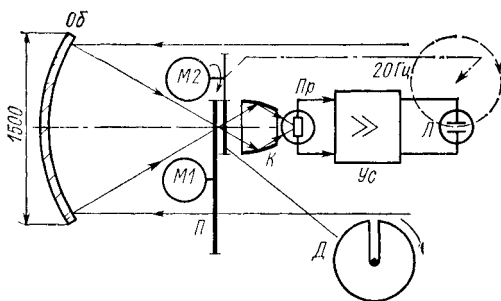


Рис. 102. Система механического телевидения с конденсорными линзами, установленными в каждом отверстии диска Нипкова

Оригинальный метод сканирования отверстием в непрозрачном экране был использован во время второй мировой войны в зенитном тепlopеленгаторе фирмы «Элак» (Германия). Принципиальная схема этого тепlopеленгатора представлена на рис. 104, а. Зеркало Об диаметром 1500 мм, имеющее фокусное расстояние 640 мм, создавало изображение точечной теплоизлучающей цели (самолета) в плоскости непрозрачной диафрагмы Д с вырезом, вращаемой мотором М2 с частотой 20 Гц. До диафрагмы был установлен прерыватель излучения Л (диск с отверстиями), осуществляющий модуляцию потока излучения от цели за счет вращения его мотором М1 с частотой 800 Гц. Излучение, прошедшее через диафрагму, собиралось конденсором К типа «зеркальная ловушка» на чувствительную площадку охлаждаемого твердой углекислотой фотоспротивления из сернистого свинца Пр. Сигнал, вырабатываемый приемником излучения, усиливался усилителем Ус, настроенным на частоту 800 Гц, имеющим полосу пропускания 200 Гц и коэффициент усиления 10^7 , и воздействовал на неоновую лампочку Л, которая была установлена перед наводчиком и вращалась синхронно с диафрагмой Д. В том случае, когда цель находилась на краю поля обзора (12°), ее изображение попадало на край диафрагмы Д, и излучение цели воздействовало на приемник в течение небольшого промежутка времени. Неоновая лампочка вспыхивала на короткое время, и наблюдатель видел небольшую светящуюся дугу, расположенную в направлении расположения цели. По мере приближения цели к центру поля обзора длина светящейся дуги увеличивалась, а когда тепlopеленгатор направлен точно на цель, неоновая лампочка горит постоянно и светящийся круг не имеет разрывов (рис. 104, б). Точность пеленгации самолета этим пеленгатором составляла $6'$, а дальность действия по тяжелому бомбардировщику достигала 20 км при ясной погоде ночью.



Положение цели	Положение изображения цели	Картина вращающейся лампочки, наблюдаемая наводчиком

Рис. 104. Сканирование щелью в зенитном тепlopеленгаторе: а — принципиальная схема; б — картина вращающейся лампочки в зависимости от положения цели

которая была установлена перед наводчиком и вращалась синхронно с диафрагмой Д. В том случае, когда цель находилась на краю поля обзора (12°), ее изображение попадало на край диафрагмы Д, и излучение цели воздействовало на приемник в течение небольшого промежутка времени. Неоновая лампочка вспыхивала на короткое время, и наблюдатель видел небольшую светящуюся дугу, расположенную в направлении расположения цели. По мере приближения цели к центру поля обзора длина светящейся дуги увеличивалась, а когда тепlopеленгатор направлен точно на цель, неоновая лампочка горит постоянно и светящийся круг не имеет разрывов (рис. 104, б). Точность пеленгации самолета этим пеленгатором составляла $6'$, а дальность действия по тяжелому бомбардировщику достигала 20 км при ясной погоде ночью.

§ 6.4. СКАНИРОВАНИЕ ПУТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ ДЕТАЛЕЙ, ВХОДЯЩИХ В ОПТИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ

Весьма перспективным и быстро развивающимся направлением разработок сканирующих систем (дефлекторов излучения) является использование эффекта изменения коэффициента преломления и других оптических свойств некоторых материалов (нитробензол, кварц, титанат стронция, ниобат лития, селенид цинка и др.) под действием акустических, электрических и магнитных полей.

Если создать в таком материале пространственное распределение коэффициента преломления, поместив его в поле, ориентированное в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то можно обеспечить отклонение луча света в заранее заданном направлении и на заданную величину. Изменение величины или фазы поля во времени обеспечивает сканирование.

Этот способ находит все большее применение в системах лазерной локации, волоконной связи и интегральной оптике, однако его использование для некогерентного излучения и больших углов сканирования затруднительно. Подробное рассмотрение принципов и систем сканирования, основанных на электро-, магнито- и акусто-оптических свойствах материалов, выходит за рамки этой книги.

ЧАСТЬ II

РАСТРОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Глава 7

ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАСТРОВ (КОДИРОВАНИЕ И ДЕКОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМАХ С РАСТРОВЫМИ АНАЛИЗАТОРАМИ)

Растровый анализатор (растр), перемещаясь относительно изображения объекта наблюдения, модулирует поток излучения так, что параметры модулированного сигнала (амплитуда, частота, фаза, длительность импульса и т. д.) зависят от положения и размеров источника излучения. Следовательно, растр вносит в сигнал закодированную информацию об объекте наблюдения, что позволяет, в частности, при декодировании определить его координаты. Это свойство растра называется измерительным.

§ 7.1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ РАСТРОВЫХ АНАЛИЗАТОРОВ

Растровые анализаторы можно классифицировать по относительному расположению оси вращения растра и оптической оси объектива прибора, по характеру зависимости амплитуды, частоты, фазы или других параметров модуляции от угла визирования источника излучения, по виду модуляции и параметрам модулированного сигнала.

Классификация по относительному расположению оси вращения растра и оптической оси объектива прибора представлена на рис. 105. По этому признаку различают растры: *концентрический (а), эксцентрический (б) и со скрещивающимися осями (в).*

Ось вращения концентрического растра совпадает с оптической осью объектива. Такой растр имеет нерабочую зону в центре, так как размеры деталей его рисунка и их линейная скорость около центра близки к нулю. Растр может устанавливаться, в частности, во внутренней обойме подшипника и приводится во вращение небольшим электрическим моторчиком посредством гибкой связи или зубчатой передачи. Он может также закрепляться неподвижно, если изображение поля излучения вращается; в этом случае удается ликвидировать нерабочую зону в центре растра. В простейшем случае растр размещается непосредственно около чувствительной площадки приемника излучения, как можно ближе к плоскости изображения. Однако такое расположение неудобно по двум причинам: во первых, оказывается, что в целях ограничения размеров приемника его также целесообразно размещать в плоскости изображения (т. е. «интересы» растра и приемника совпадают), а соответствующее конструктивное решение не всегда может быть найдено; во вторых,

при перемещении изображения малоразмерной цели в пределах поля зрения по чувствительной площадке приемника происходят резкие изменения электрического сигнала, вырабатываемого приемником, в связи с неравномерным распределением его чувствительности по площадке. Освободить фокальную плоскость для размещения раstra и обеспечить равномерное распределение потока излучения от перемещающейся в поле зрения цели по чувствительной площадке приемника можно, применив в оптической схеме конденсор, проецирующий на приемник изображение входного зрачка объектива. Поскольку относительно положение и освещенность входного зрачка практически не изменяются при движении цели в поле зрения, освещенность всех точек чувствительной площадки приемника излучения также остается неизменной.

Выше были приведены основные соотношения, основанные на условии синусов и позволяющие выбрать параметры оптической системы с конденсором.

Ось вращения эксцентрического раstra параллельна оптической оси объектива. В этом случае «мертвая» зона у раstra отсутствует. Вращение раstra и его расположение относительно плоскости изображения и приемника осуществляются исходя из тех же соображений,

что и для концентрического раstra. Растровый анализатор со скрещивающимися осями имеет ось вращения, расположенную под некоторым углом (обычно прямым) к оптической оси объектива. Такой растр большей частью состоит из системы непрозрачных полос, нанесенных на поверхность прозрачного цилиндра и обеспечивающих модуляцию лучистого потока, сфокусированного на эти полосы.

Зависимость амплитуды, частоты, фазы или других параметров модуляции от угла визирования приведена на рис. 106. Различают два вида растровых анализаторов: с *ограниченной* (рис. 106, а) и *неограниченной* (рис. 106, б) зонами линейности. Если изобразить в виде графика связь параметра модуляции Q с углом визирования α , то для растров с неограниченной зоной линейности $\delta_{\text{л}}$ соответствующая зависимость сохраняется в пределах всего поля зрения δ ,

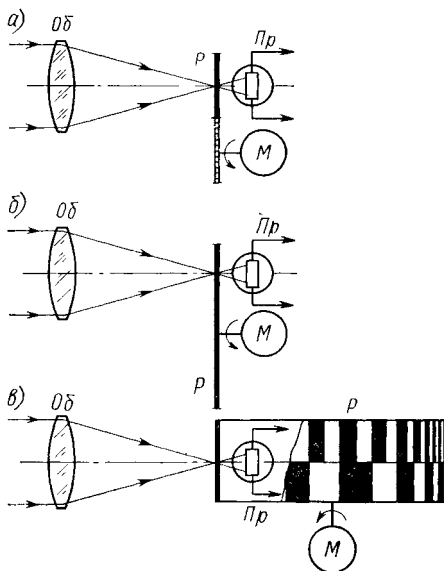


Рис. 105. Классификация растровых анализаторов по относительному расположению оси вращения раstra и оптической оси объектива: а — концентрический; б — эксцентрический; в — со скрещивающимися осями;

Об — объектив; Пр — приемник; Р — растр; М — двигатель

в то время как для растров с ограниченной зоной линейности характеристика линейна лишь в ограниченных пределах.

В общем случае термин «зона линейности» следует понимать условно, так как параметр модуляции в пределах этой зоны может быть связан с углом визирования нелинейной зависимостью. Однако

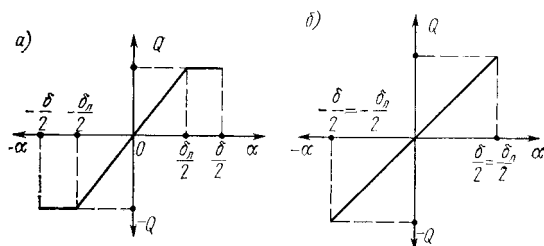


Рис. 106. Классификация растровых анализаторов по характеру зависимости параметров модуляции от угла визирования

наличие *некоторой* зависимости параметра модуляции от угла всегда соблюдается либо в пределах всего поля зрения, либо в пределах ограниченного диапазона углов. К растрам, обеспечивающим реализацию той или иной области зависимости параметра модуляции от угла визирования, в дальнейшем также будет применяться понятие ограниченной или неограниченной зоны линейности.

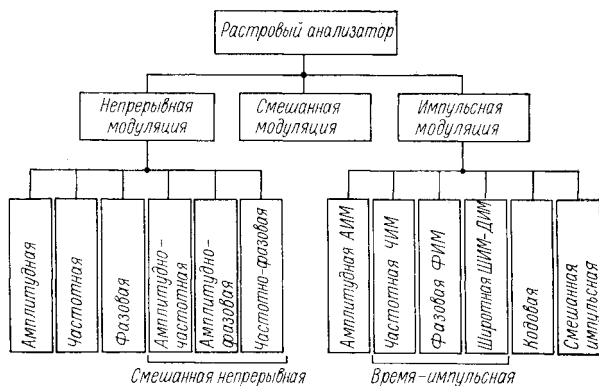


Рис. 107. Классификация растровых анализаторов по виду модуляции и параметрам модулированного сигнала

Классификация растровых анализаторов по виду модуляции и параметрам модулированного сигнала представлена на рис. 107. Различают три основных типа растровых анализаторов: с *непрерывной*, *импульсной* и *смешанной* модуляцией.

Растры с непрерывной модуляцией характеризуются тем, что излучение цели проходит через них в течение времени, составляющего примерно 50 % от периода модуляции. В этом случае приемник освещается непрерывным периодическим сигналом, амплитуда, частота или фаза первой гармоники которого зависит от угловых ко-

ординат цели. Различают амплитудную, частотную, фазовую, амплитудно-частотную, амплитудно-фазовую и частотно-фазовую непрерывную модуляцию.

Растры с импульсной модуляцией характеризуются тем, что излучение цели проходит через них на приемник в течение времени, короткого по сравнению с периодом модуляции, причем относительное положение импульса излучения во времени, его амплитуда и длительность зависят от угловых координат цели. Импульсная модуляция может быть амплитудной (АИМ), частотной (ЧИМ), фазовой (ФИМ), широтной или модуляцией по длительности (ШИМ или ДИМ), кодовой или смешанной импульсной.

Растры со смешанной модуляцией характеризуются тем, что наряду с непрерывной модуляцией излучения потока имеет место, даже при неизменных координатах цели, периодическое импульсное изменение параметров модулированного сигнала, а перемещение цели приводит к нарушению закона этого периодического изменения параметров. Например, поток излучения от цели, находящейся на оптической оси, модулируется непрерывно 50 % времени с частотой f_1 , а 50 % — с частотой f_2 . При перемещении цели относительное время модуляции с той и другой частотой изменяется и может значительно отличаться от 50 %.

§ 7.2. АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Зависимость амплитуды сигнала от угловых координат точечного источника излучения (кодирование информации о положении цели в поле зрения) можно обеспечить, поместив в фокальную плоскость

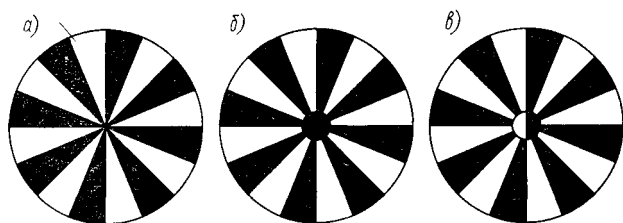


Рис. 108. Концентрический растровый анализатор — секторный растр, обеспечивающий амплитудную модуляцию: *а* — идеальный; *б* — с затемненной центральной частью; *в* — с полупрозрачной центральной частью

объектива оптико-электронного прибора концентрический растровый анализатор в виде *секторного диска* (рис. 108).

Поскольку изготовить растр с секторами, ширина которых в центре равна нулю (рис. 108, *а*), практически невозможно, концентрический растровый анализатор обычно имеет вид секторного диска с затемненной центральной частью, равной по размеру кружку рассеяния объектива (рис. 108, *б*), либо с центральной частью, выпол-

ненной в виде двух полукругов — прозрачного и непрозрачного, диаметр которых также равен диаметру кружка рассеяния (рис. 108, в).

На краю растра ширина темных и светлых секторов несколько больше диаметра кружка рассеяния. В этой области растра достигается 100-процентная модуляция потока излучения от цели и амплитуда сигнала максимальна. Если число прозрачных секторов равно N , то за один оборот диска возникает N импульсов сигнала от цели, а если растр вращается со скоростью n , с^{-1} , то частота модуляции, выраженная в герцах, равна Nn .

При смещении изображения к центру растра частота модуляции остается той же, а амплитуда сигнала уменьшается, так как глубина

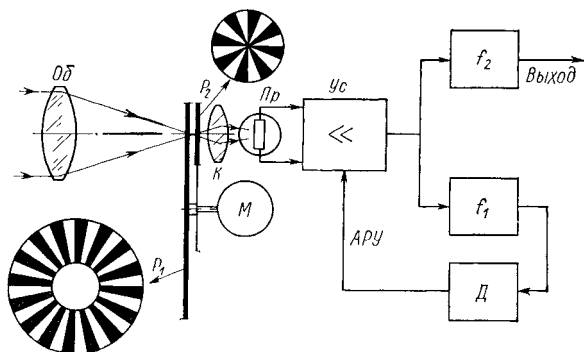


Рис. 109. Структурная схема прибора с секторным растром и системой АРУ

модуляции становится меньше 100 %. Когда изображение цели совпадает с центром растра, модуляции не происходит и сигнал отсутствует. При этом в случае использования растра с непрозрачной центральной частью исчезает не только переменная, но и постоянная составляющая сигнала, а в случае применения растра, изображенного на рис. 108, в, средний коэффициент пропускания, равный примерно 50 %, сохраняется.

Амплитуда сигнала, вырабатываемого приемником, установленным за секторным растром, зависит не только от положения изображения цели на растре, но и от величины потока излучения, падающего на входной зрачок оптической системы.

Для того чтобы избавиться от этой зависимости, можно использовать автоматическую регулировку коэффициента усиления усилителя фототока (АРУ). Для этого применяют дополнительную модуляцию потока излучения с помощью прерывателя излучения, обеспечивающего полную модуляцию потока излучения независимо от положения цели. Частота этой модуляции должна отличаться от частоты модуляции, определяемой растром. В этом случае переменный электрический сигнал, вырабатываемый приемником, содержит составляющие двух частот: амплитуда одной из них определяется только потоком излучения от цели, а второй — потоком излучения

и положением изображения цели на растре. Разделяя эти составляющие фильтрами, настроенными соответственно на частоты модуляции прерывателя и растра, и используя выходной сигнал фильтра, настроенного на частоту прерывателя, для автоматического уменьшения коэффициента усиления усилителя фототока при увеличении

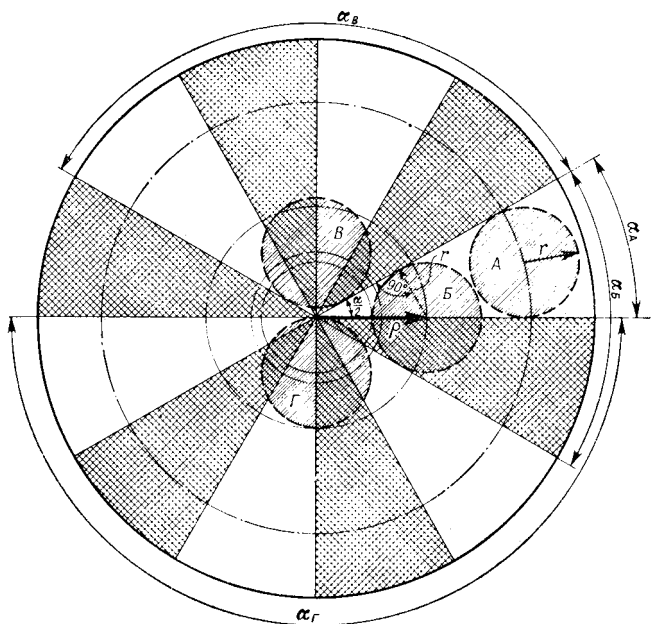


Рис. 110. Изображения точечных целей на секторном растре

сигнала, можно избавиться от зависимости сигнала на выходе второго фильтра от изменения потока излучения, создаваемого излучением цели. Структурная схема построения такой системы декодирования информации изображена на рис. 109, где введены следующие обозначения: P_1 — прерыватель излучения; P_2 — секторный растр; $Об$ — объектив; $Пр$ — приемник; $Ус$ — усилитель; f_1 — фильтр, настроенный на частоту прерывателя P_1 ; f_2 — фильтр, настроенный на частоту растра P_2 ; $Д$ — детектор, фильтр низких частот и усилитель постоянного тока; $М$ — двигатель, вращающий прерыватель излучения и растр.

Секторный растр может иметь ограниченную или неограниченную зоны линейности в зависимости от рисунка растра и диаметра кружка рассеяния оптической системы. Если диаметр кружка рассеяния равен ширине темных и светлых секторов на краю растра, то линейная зависимость амплитуды сигнала от угла рассогласования между направлением на цель и оптической осью объектива, проходящей через центр растра, сохраняется по всему полю. Если

же на краю поля зрения (на краю растра) ширина секторов больше диаметра кружка рассеяния, то линейная зависимость имеет место лишь в ограниченной части поля. Как уже указывалось, говорить о линейной зависимости амплитуды сигнала от угла рассогласования можно лишь весьма условно.

Действительно, рассмотрим более детально процесс модуляции излучения цели, когда ее изображение расположено в положениях *A—Г* на растре, рисунок которого состоит, например, из шести прозрачных и шести непрозрачных секторов (рис. 110). В положении *A* изображение цели в виде кружка рассеяния с радиусом *r* заполняет один сектор растра. При этом имеет место полная модуляция потока излучения, заключенного в изображении цели, и величина сигнала достигает максимального значения.

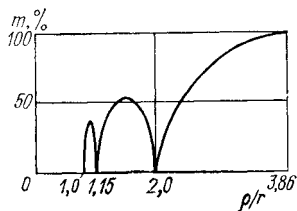


Рис. 111. Угловая характеристика секторного растра (ориентировочная форма кривой с акцентом на точки $M = 0$)

При перемещении изображения цели к центру растра глубина модуляции *m* уменьшается. Однако еще до того, как изображение цели достигнет центра растра, для некоторых значений радиуса-вектора ρ глубина модуляции резко падает.

Это происходит в тех случаях, когда изображение цели заполняет четное число секторов растра, при этом модуляция потока излучения происходит только за счет несоответствия формы изображения цели форме секторов растра. Так, в положении

Б одновременно перекрываются два сектора растра, в положении *В* — четыре и в положении *Г* — шесть секторов. Если обозначить угол, под которым изображение цели видно из центра растра, через α , то для растра с шестью непрозрачными секторами имеем:

$$\alpha_A = 360^\circ/(2N) = 360^\circ/12 = 30^\circ; \quad \alpha_B = 2\alpha_A = 60^\circ; \quad \alpha_B = 4\alpha_A = 120^\circ; \\ \alpha_G = 6\alpha_A = 180^\circ,$$

где *N* — число непрозрачных секторов растра.

Учитывая также, что $\rho = r/\sin(\alpha/2)$, можно найти примерные значения радиус-вектора, при которых имеют место максимум и минимум модуляции:

$$\rho_A/r = 1/\sin(\alpha_A/2) = 1/\sin 15^\circ = 3,86; \\ \rho_B/r = 1/\sin 30^\circ = 2; \quad \rho_B/r = 1/\sin 60^\circ = 1,15; \\ \rho_G/r = 1/\sin 90^\circ = 1.$$

Соответствующие значения отмечены на угловой характеристике растра, представленной на рис. 111.

§ 7.3. ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Зависимость частоты модулированного потока излучения от угловых координат источника излучения, т. е. кодирование информации, можно обеспечить, поместив в плоскость изображения,

создаваемого объективом оптико-электронного прибора, эксцентрический растровый анализатор в виде диска, каждый из секторов которого имеет одинаковое число прозрачных и непрозрачных полос, причем центральная полоса каждого сектора направлена по радиусу, а остальные ей параллельны (рис. 112). При вращении растра поток излучения модулируется с частотой тем большей, чем дальше от центра находится изображение цели, так как число модулирующих полос возрастает по направлению от центра к периферии диска.

Центр поля зрения (начало координат на рис. 112) можно всегда разместить так, что при перемещении изображения источника излучения вдоль оси y вверх от центра частота модуляции будет увеличиваться, а вниз — уменьшаться. При перемещении изображения источника излучения вдоль оси x частота модуляции не изменяется, так как в пределах небольшого поля зрения ось x практически совпадает со средней окружностью, которая в каждом секторе пересекает одинаковое число модулирующих полос. Таким образом, рассмотренный растр обеспечивает измерение угловой координаты цели только в одной плоскости.

Для того чтобы растр обеспечивал измерение координат цели в двух плоскостях, необходимо применять две оптические системы, размещенные относительно растра таким образом, чтобы изображения одной и той же цели были смещены относительно друг друга на 90° .

Следует обратить внимание на то, что изменение частоты модулированного сигнала при изменении положения цели фактически происходит не плавно, а дискретно, так как дискретно изменяется число модулирующих полос при перемещении изображения цели вдоль оси y . Зависимость числа модулирующих полос N от положения изображения цели представлена на рис. 113. Наличие «ступенек» на

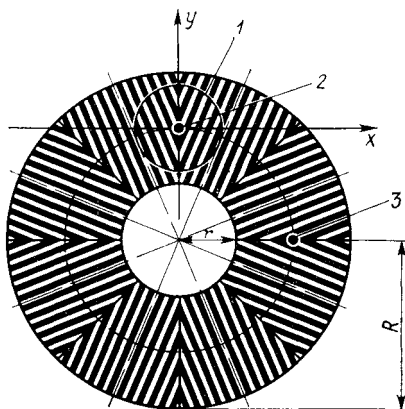


Рис. 112 Эксцентрический растровый анализатор с частотной модуляцией (восьмисекторный)

1 — пределы поля зрения, 2 — изображение источника излучения (в центре поля зрения), 3 — второе изображение источника излучения при наличии двух оптических систем (в центре поля зрения)

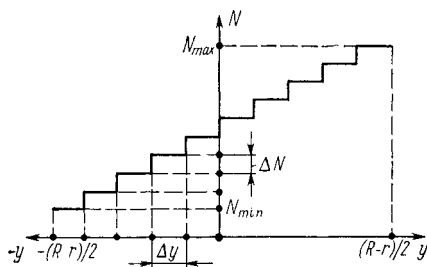


Рис. 113. Зависимость числа модулирующих полос от положения изображения источника излучения на растре, реализующем частотную модуляцию

соответствующей кривой говорит о невозможности измерения линейных координат цели с точностью, более высокой, чем Δy , а угловых — с точностью $\Delta y f'$, где f' — фокусное расстояние объектива. Для уменьшения ошибки целесообразно изменить рисунок раstra

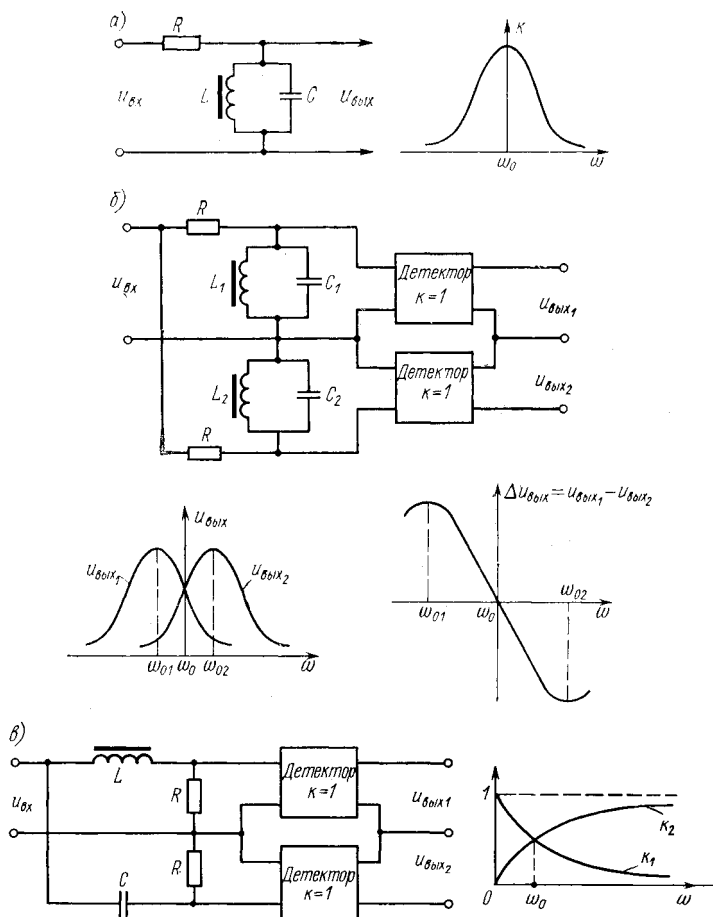


Рис. 114. Принципиальные схемы и характеристики простейших частотных детекторов: а — одиночный резонансный контур; б — два контура; в — схема с индуктивностью и емкостью

таким образом, чтобы положение модулирующих полос в отдельных спектрах не совпадало.

Для преобразования частоты модуляции потока излучения (частоты изменения фототока) в амплитуду электрического сигнала с целью декодирования применяются частотные детекторы (рис. 114). В простейшем случае частотный детектор представляет собой резонансный контур (рис. 114, а). Напряжение $U_{\text{вых}}$, снимаемое с кон-

тура, зависит от частоты ω питающего контур тока так, что на частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ имеет место максимальное значение коэффициента передачи $K = u_{\text{вых}}/u_{\text{вх}}$. Могут использоваться два контура (рис. 114, б), резонансные частоты которых ω_{01} и ω_{02} разнесены симметрично относительно средней частоты. В этом случае при изменении частоты ω питающего тока амплитуда напряжения на одном контуре $u_{\text{вых}_1}$ возрастает, а на другом $u_{\text{вых}_2}$ падает. Разность амплитуд $\Delta u_{\text{вых}} = u_{\text{вых}_1} - u_{\text{вых}_2}$ определяется величиной и знаком отклонения частоты. Вместо резонансных контуров можно использовать также схему, состоящую из двух ветвей, одна из которых представляет собой индуктивное, а другая — емкостное сопротивление (рис. 114, в). Так как коэффициент передачи напряжения схемой с индуктивностью равен

$$K_1 = u_{\text{вых}_1}/u_{\text{вх}} = 1/\sqrt{1 + \omega^2 L^2/R^2},$$

а схемой с емкостью —

$$K_2 = u_{\text{вых}_2}/u_{\text{вх}} = 1/\sqrt{1 + 1/\omega^2 R^2 C^2},$$

то при частоте $\omega_0 = 1/(LC)$ имеет место равенство $K_1 = K_2$ и в некотором интервале изменения частоты вокруг значения ω_0 выходное напряжение изменяется линейно.

§ 7.4. ФАЗОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Зависимость фазы модуляции потока излучения от угловых координат точечного источника (кодирование) можно обеспечить, например, с помощью растрового анализатора со скрещивающимися осями, выполненного в виде надетой на вращающийся барабан тонкой пленки, прозрачность которой изменяется по синусоидальному закону (рис. 115, а)

$$\tau = \tau_{\text{ср}} + 0,5(\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{min}}) \sin[2\pi l/(L/N)],$$

где $\tau_{\text{ср}} = 0,5(\tau_{\text{max}} + \tau_{\text{min}})$ — среднее пропускание; τ_{max} — максимальное пропускание; τ_{min} — минимальное пропускание; L — длина окружности барабана (пленки); N — число полных изменений прозрачности пленки раstra, укладываемых на ее длине.

Следовательно, если на поверхности пленки сформировано изображение цели, то поток излучения, проходящий через нее и падающий на приемник, а также электрический сигнал, вырабатываемый приемником, изменяются по синусоидальному закону, причем фаза сигнала зависит от положения изображения цели на пленке раstra

$$a = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где a — текущее значение переменной составляющей сигнала, вырабатываемого приемником излучения; A , ω , φ — амплитуда, круговая частота и фаза сигнала соответственно.

Если барабан раstra вращается со скоростью n , с^{-1} , то круговая частота равна $\omega = 2\pi f = 2\pi nN$, а фаза зависит от положения изображения источника излучения на пленке раstra, причем для

случая, когда начало отсчета фазы соответствует началу координат (рис. 115, а), имеем $\varphi = 2\pi l/(L/N)$.

Для того чтобы зафиксировать начало отсчета фазы, используются различные *синхроконтакты* и *генераторы опорных напряжений* (ГОНЫ), которые вырабатывают электрические сигналы, момент

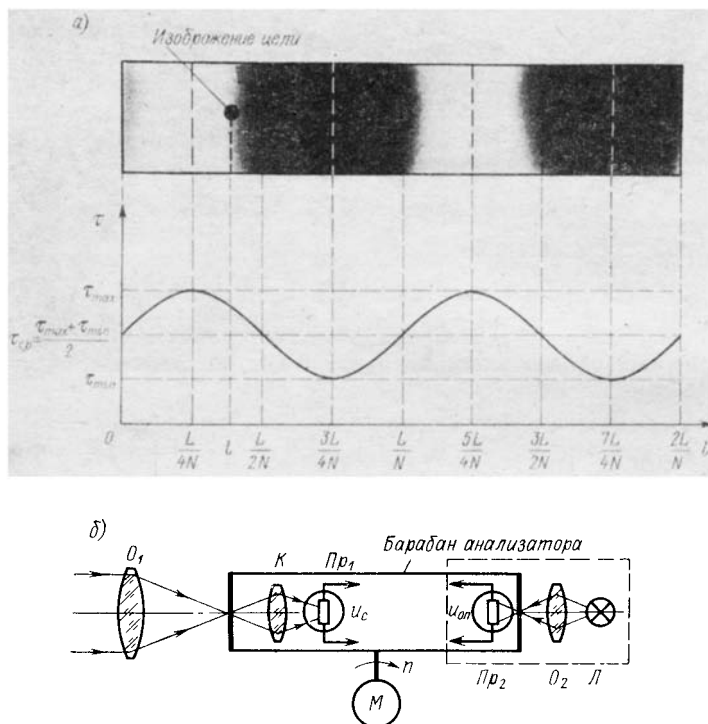


Рис. 115. Растровый анализатор со скрещивающимися осями, обеспечивающий фазовую модуляцию: а — развертка ленты анализатора и зависимость ее коэффициента пропускания τ от положения изображения источника излучения l ; б — схема использования анализатора с фазовой модуляцией

появления или фаза которых жестко связаны с положением пленки раstra и не зависят от положения изображения источника излучения.

Один из таких ГОНов на рис. 115, б обведен штриховой линией. Он состоит из опорного источника света — лампочки накаливания L , объектива O_2 и фотоприемника $Пр_2$. Свет от опорного источника фокусируется на поверхности раstra в зоне, свободной от изображения цели, модулируется пленкой раstra и воспринимается отдельным приемником, вырабатывающим сигнал, фаза которого жестко связана с положением раstra. Излучение цели фокусируется

на поверхности растра объективом O_1 , проходит через пленку растра и конденсатором K направляется на приемник $Пр_1$.

Для измерения разности фаз сигнала u_c и опорного напряжения $u_{оп}$, т. е. декодирования информации о положении цели в поле зрения, используются различные схемы *фазовых детекторов*, которые для фиксированного значения фазы называются также *синхронными детекторами*.

Принцип действия фазового детектора состоит в том, что сигнал переменного тока, подлежащий выпрямлению, поступает в нагрузку через сопротивление, которое с помощью опорного напряжения изменяется во времени синхронно с частотой изменения сигнала. В простейшем случае (схема на рис. 116) в качестве переменного сопротивления можно применить контакт K , включенный последовательно с нагрузкой R_H и управляемый генератором опорного напряжения (на схеме не показан) синхронно с частотой входного сигнала u_c . Следовательно, действие ключа состоит в том, что он попеременно то замыкает цепь на время, равное половине периода сигнала переменного тока, то размыкает цепь на такое же время. Таким образом, проводимость цепи g равна либо нулю, либо $1/R_H$ в зависимости от того, разомкнут или замкнут ключ. Временные графики, приведенные на рис. 116, позволяют понять принцип действия. На первом графике (кривая 1) представлены положения контакта K и проводимость цепи g : первую половину периода контакт замкнут (проводимость цепи $g = 1/R_H$), вторую — разомкнут (проводимость цепи $g = 0$). Кривые 2, 4, 6 показывают форму сигнала u_c , вырабатываемого приемником излучения при различных (I, II, III) положениях изображения цели на ленте анализатора (u_{cI} , u_{cII} , u_{cIII}). Кривые 3, 5, 7 показывают, как изменяется выходное

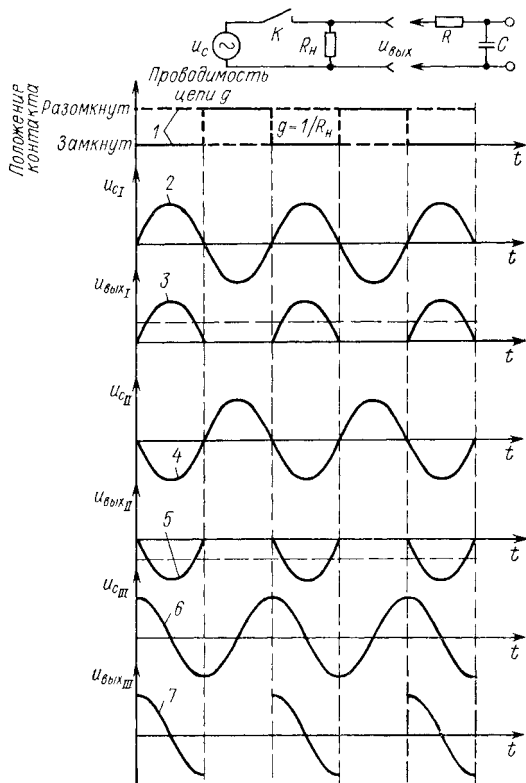


Рис. 116. Принципиальная схема и временные графики работы фазового детектора

напряжение фазового детектора $u_{\text{вых}}$ при отсутствии в схеме фильтра RC (сплошная кривая) и при наличии фильтра (штриховая линия) для тех же трех положений изображения цели — $u_{\text{выхI}}$, $u_{\text{выхII}}$, $u_{\text{выхIII}}$. Из графиков следует, что выходной сигнал фазового детектора представляет собой постоянное или пульсирующее напряжение, которое (среднее значение) зависит от соотношения между фазами входного сигнала и опорного напряжения.

Напряжение на выходе фазового детектора можно найти следующим образом. Обозначим проводимость цепи с ключом K в схеме, представленной на рис. 116, через g и примем для простоты, что она изменяется по синусоидальному закону с частотой ω_0 , тогда

$$g = g_0 (1 + \sin \omega_0 t).$$

Если на входе схемы действует напряжение

$$u_c = u_0 \sin (\omega_0 t + \varphi),$$

то сила тока в цепи равна

$$\begin{aligned} i &= u_c g = u_0 g_0 [\sin (\omega_0 t + \varphi) + \sin (\omega_0 t + \varphi) \sin \omega_0 t] = \\ &= u_0 g_0 [\sin (\omega_0 t + \varphi) - 0,5 \cos (2\omega_0 t + \varphi) + 0,5 \cos \varphi]. \end{aligned}$$

В полученном выражении первое слагаемое представляет собой исходное модулированное колебание с частотой ω_0 , второе — имеет вдвое большую частоту, а третье — есть сигнал постоянного тока, который зависит от разности фаз между входным напряжением и изменением проводимости цепи.

Если к выходным зажимам рассматриваемой схемы подключить простейший RC -фильтр, то при $\omega_0 RC \gg 1$ высокочастотными составляющими выходного сигнала можно пренебречь. Таким образом, выходное напряжение оказывается пропорциональным $\cos \varphi$

$$u_{\text{вых}} = iR_n = 0,5u_0 g_0 R_n \cos \varphi = u_{\text{вых}_0} \cos \varphi,$$

причем отношение $u_{\text{вых}_0}/u_0$ обычно называют коэффициентом передачи детектора, следовательно,

$$u_{\text{вых}} = K_{\text{до}} u_0 \cos \varphi,$$

где $K_{\text{до}} = u_{\text{вых}_0}/u_0$.

Если частота входного напряжения ω отличается от частоты изменения проводимости цепи ω_0 , то через RC -фильтр проходят только составляющие разностной частоты $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ и коэффициент передачи оказывается зависящим от расстройки $\Delta\omega$ и постоянной времени фильтра $\tau = RC$, так что

$$k_d = K_d/K_{\text{до}} = 1/\sqrt{1 + (\Delta\omega\tau)^2}.$$

Это выражение совпадает с выражением для обычной резонансной кривой, в которой роль затухания играет величина $1/\tau$. Следовательно, чем больше постоянная времени фильтра, тем острее «резонансная кривая» детектора. Так как максимальное значение коэффициента передачи достигается, когда $\Delta\omega = 0$, т. е. при синхронном режиме, *фазовый детектор* называют также *синхронным*.

При построении практических схем фазовых детекторов приходится решать ряд задач, связанных с симметрией и стабильностью отдельных ветвей и элементов схемы, так как обычно необходимо обеспечивать выполнение следующих основных условий:

выходное напряжение фазового детектора должно быть минимальным при отсутствии сигнала на входе, т. е. опорное напряжение не должно проходить через схему детектора;

зависимость выходного напряжения детектора от фазы входного сигнала не должна изменяться при замене элементов схемы, изменении питающих напряжений и внешних условий (температура, давление и т. д.);

коэффициент передачи фазового детектора должен быть максимальным;

нормальная работа фазового детектора должна обеспечиваться при небольших значениях опорного напряжения.

Указанные условия в значительной мере удовлетворяются при использовании некоторых из приводимых далее схем фазовых детекторов.

1. Схема *балансного фазового детектора* (рис. 117) состоит из двух встречно включенных обычных амплитудных детекторов, вентили которых управляются опорным напряжением через трансформатор Tr_2 . Постоянная составляющая напряжения на выходе фазового детектора при синусоидальной форме входного сигнала в этом случае примерно равна

$$u_{\text{вых}} \approx 2(2/\pi) u_c \cos \varphi = 1,3 u_c \cos \varphi,$$

где u_c — амплитуда напряжения сигнала на вторичной обмотке трансформатора; φ — разность фаз входного сигнала и опорного напряжения.

Приведенная формула справедлива при условии $u_c \ll u_{\text{оп}}$, где $u_{\text{оп}}$ — амплитуда опорного напряжения на вторичной обмотке трансформатора Tr_2 .

Схема должна быть тщательно отбалансирована, в детекторах желательно использовать полупроводниковые диоды, имеющие малое прямое и большое обратное сопротивления. При использовании радиоламп необходимо выбирать диоды с прямым сопротивлением не более 100—200 Ом (6Х2П).

2. Схема *фазового детектора с несимметричным входом* (рис. 118) в ламповом варианте включает в себя пентод в качестве катодной нагрузки двух триодов. Триоды играют роль ключей, так как благодаря большой амплитуде опорного напряжения, поступающего через ограничивающие сопротивления R_g на их сетки, лампы практически мгновенно и поочередно открываются и запираются. Пентод играет роль большого сопротивления, по сравнению с которым

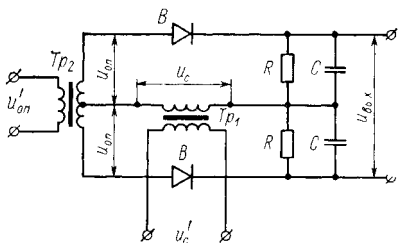


Рис. 117. Схема балансового фазового детектора

сопротивление открытого триода мало, и, следовательно, наличие разброса параметров триодов не нарушает симметрии схемы.

Входной сигнал подается на сетку пентода, усиливается им и через открытый в заданный момент триод поступает на его анодную нагрузку. Разность напряжений, снимаемых с анодных нагрузок двух триодов, является выходным сигналом детектора.

Схема с пентодом и несимметричным входом может обеспечить относительно высокую точность измерения фазы ($\sim 0,5^\circ$), но громоздка и нуждается в сложных источниках питания.

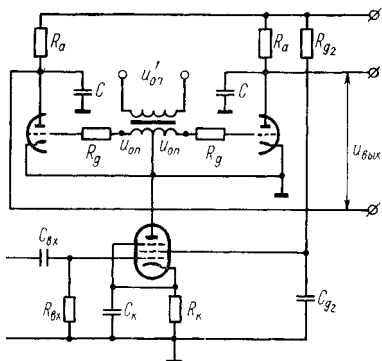


Рис. 118. Схема фазового детектора с несимметричным входом

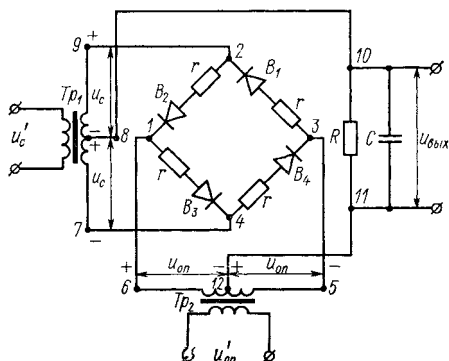


Рис. 119. Схема кольцевого фазового детектора

3. *Кольцевой фазовый детектор* (рис. 119) получил широкое распространение благодаря простоте, хорошей стабильности, высокому коэффициенту передачи и возможности заземления любой точки во входных и выходных цепях.

При отсутствии входного сигнала опорное напряжение в течение одного полупериода создает ток в цепи 6—1—4—3—5, в течение другого полупериода в цепи 5—3—2—1—6 оба эти тока (токи коммутации) замыкаются внутри кольца и не попадают в нагрузочное сопротивление, т. е. токи через сопротивление R и выходное напряжение $u_{\text{вых}}$ равны нулю.

При наличии входного сигнала в течение одного полупериода, для которого на схеме условно обозначены полярности мгновенных значений приложенных напряжений, ток коммутации замыкается через нижнюю половину кольца по цепи 6—1—4—3—5. Ток, обусловленный входным сигналом (ток сигнала), проходит по цепи 8—10—11—12—6—1—4—7 и создает на сопротивлении нагрузки падение напряжения $u_{\text{вых}}$, пропорциональное входному напряжению $u_{\text{с}}$. При этом рабочей частью вторичной обмотки трансформатора $Tr1$ является ее нижняя половина. Верхняя половина в рассматриваемый полупериод не работает, так как первый возможный путь токопрохождения через нагрузку (9—2—3—5—12—11—10—8) заперт вентилем B_1 , а второй (9—2—1—6—12—11—10—8) — встречно вклю-

ченным напряжением $u_{оп}$, которое больше u_c . Во второй полупериод переменного напряжения полярности, обозначенные на схеме, изменяются на обратные, рабочей частью вторичной обмотки трансформатора $Tr1$ становится ее верхняя половина, а направление тока через нагрузку не изменяется. Направление тока через сопротивление нагрузки изменится только при изменении фазы напряжения сигнала на 180° .

Если амплитудное значение синусоидального напряжения на половине вторичной обмотки трансформатора равно u_c , а постоянная составляющая выходного напряжения — $u_{вых0}$, то можно найти

$$u_{вых0} = K_d (2/\pi) u_c \cos \varphi,$$

где φ — сдвиг фаз между напряжением сигнала и опорным напряжением; $K_d = 2/(2 + \beta)$; $\beta = r/R$.

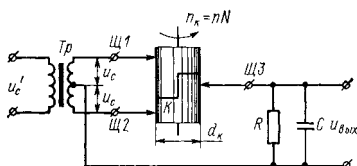


Рис. 120. Схема коллекторного фазового детектора

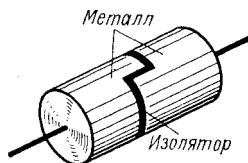


Рис. 121. Коммутатор-коллектор

Коэффициент β выбирается в зависимости от наличия резервов мощности у источников коммутирующего напряжения и напряжения сигнала. Обычно он находится в пределах от 0 до 1.

Входной трансформатор в схеме кольцевого детектора оказывается нагруженным на сопротивление

$$r_3 = R + r/2,$$

следовательно, входное сопротивление детектора

$$r_{вх} = r_3/n^2,$$

где $n = u_c/u_c'$.

Для нормальной работы схемы необходимо выбирать следующее соотношение между опорным напряжением и напряжением сигнала:

$$u_{оп} \geq u_c (4R + r)/(2R + r) \approx 2u_c.$$

Полный расчет схемы кольцевого детектора может проводиться по методике, предложенной Я. Е. Гукайло и Е. С. Марковым.

4. *Коллекторный фазовый детектор* (рис. 120) состоит из коммутирующего барабана K , связанного безлюфтовой передачей с растровым анализатором так, что его скорость вращения равна nN , c^{-1} , щеток $Щ1$ и $Щ2$, через которые к коммутатору подводится напряжение сигнала от трансформатора Tr , щетки $Щ3$, которая при вращении коммутатора поочередно подключается то к щетке $Щ1$, то к щетке $Щ2$ и снимает с них соответствующие напряжения на нагрузку детектора — фильтр RC . Переключение щетки $Щ3$ осуществляется благодаря особой конструкции коммутатора, представ-

ляющего собой разрезанный металлический цилиндр, две половинки которого соединены через изолирующую прокладку (рис. 121).

На рис. 122 коммутатор изображен в виде развертки цилиндра, а на рис. 123 представлены временные графики напряжений, действующих в схеме фазового детектора. Эти графики легко получить на основании рис. 122, полагая, что коммутирующий барабан неподвижен, а щетка Щ3 движется по траектории, показанной на развертке цилиндра штриховой линией. При этом она поочередно соединяется через соответствующую часть металлического цилиндра то со щеткой Щ1, то со щеткой Щ2. Кривая 1 показывает последовательность этих соединений в предположении, что щетка Щ3 движется справа налево от начального положения, изображенного на рис. 122. В этом случае первую четверть периода (первую четверть окружности барабана) щетка Щ3 соединена со щеткой Щ1, затем половину периода — со щеткой Щ2, затем вновь — со щеткой Щ1 и т. д. Кривые 2, 3, 5, 6 показывают изменения напряжений, приложенных к щеткам Щ1 и Щ2, для случаев I, II и III, соответствующих таким положениям изображения цели на ленте анализатора, когда фазы сигнала сдвинуты друг относительно друга на 90° .

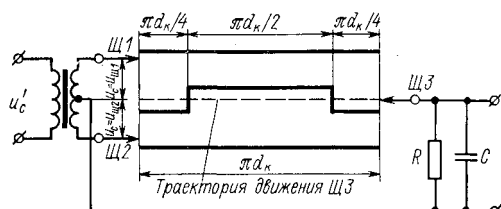


Рис. 122. Развертка коллектора

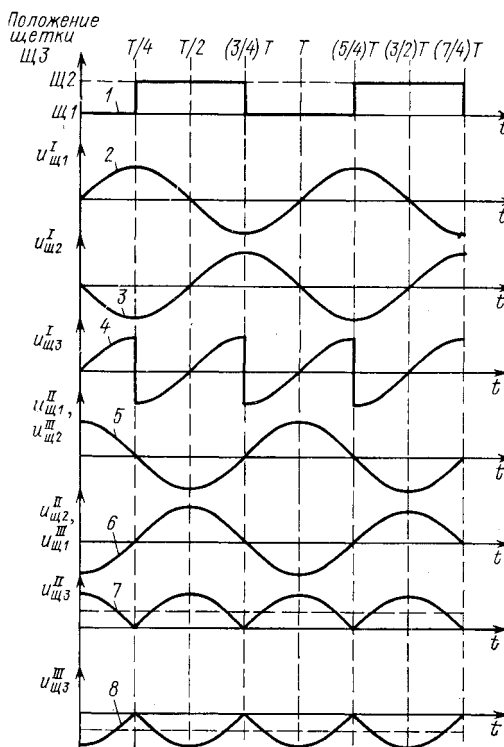


Рис. 123. Графики напряжений в схеме фазового детектора:

1—8 — номера кривых

что кривая 5 изображает изменение напряжения на щетке Щ1 в случае II и на щетке Щ2 — в случае III, а кривая 6 показывает изменение напряжения $u_{щ2}$ для случая II и $u_{щ1}$ для случая III. Кривые 4, 7 и 8

показывают форму напряжений на щетке ЩЗ, причем сплошная кривая соответствует отключенному конденсатору С, а штриховая линия — случаю, когда конденсатор включен. Из графиков следует, что в зависимости от положения изображения цели на ленте анализатора выходное напряжение коллекторного фазового детектора изменяется по значению и по знаку.

Постоянная составляющая этого напряжения определяется выражением

$$u_{\text{вых}0} \approx (2u_c/\pi) \cos \varphi,$$

где u_c — амплитуда синусоидального напряжения, действующего на щетках Щ1 и Щ2.

Точность измерения фазы различными схемами фазовых детекторов обычно составляет примерно 1° в пространстве электрических сигналов. Однако в реальном пространстве это соответствует значительно большей точности благодаря своеобразной «редукции» узлов.

Действительно, рассмотрим, например, работу устройства с фазовой модуляцией, обеспечиваемой секторным растром, перед которым установлена диафрагма поля с отверстием в виде трапеции, охватывающим ровно два сектора (рис. 124). Кроме излучения цели, формируемого объективом Об₁ в плоскости диафрагмы поля ДП и растра Р, на растр объективом Об₂ проецируется изображение неподвижного источника излучения — лампочки Л, излучение которой модулируется растром с той же частотой, что и излучение цели, но имеет постоянную фазу модуляции. Потоки излучения от цели и опорного источника проходят через растр Р, конденсоры К₁, К₂ и попадают на раздельные приемники излучения: основной Пр₁ и опорный Пр₂. Измерение положения цели осуществляется путем сравнения фазы напряжения сигнала u_c и опорного напряжения $u_{\text{оп}}$.

Полное изменение фазы напряжения сигнала на 360° соответствует значительно меньшему изменению угловых координат цели. Если, например, оптическая система выбрана таким образом, что дифрагма охватывает 15° поля зрения, а разность фаз между опорным напряжением и напряжением сигнала измеряется с ошибкой в $\Delta\varphi$, то ошибка измерения направления на цель $\Delta\alpha$ составляет

$$\Delta\alpha \approx \Delta\varphi (15^\circ/360^\circ) = \Delta\varphi/24,$$

т. е. при $\Delta\varphi = 1^\circ$ $\Delta\alpha = 0,045^\circ = 2,7'$,

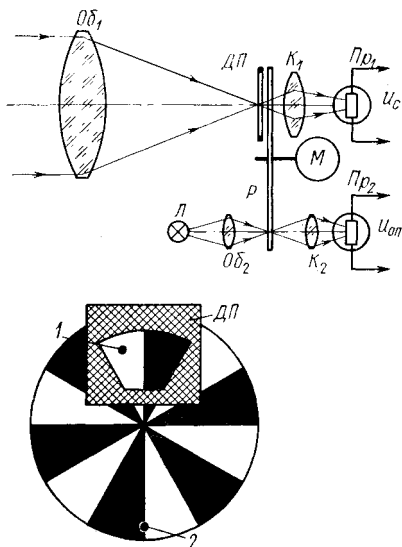


Рис. 124. Схема оптико-электронного прибора с секторным растром, обеспечивающим фазовую модуляцию:

1 — изображение цели; 2 — изображение источника опорного сигнала

Таким образом, устройства, основанные на принципе фазовой модуляции, обеспечивают очень точную информацию о положении источника излучения при относительно грубых измерениях фазового угла.

§ 7.5. АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Амплитудно-частотный растровый анализатор модулирует излучение цели так, что *изменение частоты* модулированного сигнала определяет *знак угла* рассогласования (угла между направлением на цель и оптической осью объектива прибора), а *изменение амплитуды* модулированного сигнала определяет *величину угла* рассогласования. Этим обеспечивается кодирование информации о положении цели.

Амплитудно-частотный растровый анализатор с ограниченной зоной линейности эксцентрического типа изображен на рис. 125, б. Он представляет собой металлическую или стеклянную пластину, состоящую из двух концентрических поясов, имеющих различное число прозрачных и непрозрачных модулирующих полос. Пластина помещается в плоскости изображения, создаваемого объективом так, что оптическая ось объектива проходит через линию раздела концентрических поясов раstra и определяет центр поля зрения прибора.

Если изображение цели смещено относительно центра поля зрения, то лучистый поток модулируется с той или иной частотой в зависимости от того, в каком из двух поясов раstra оно находится. Если изображение цели расположено в центре поля зрения, то одна часть изображения модулируется с одной частотой, а другая часть — с другой.

Частоты модуляции определяются скоростью вращения раstra n , с^{-1} и числом непрозрачных (или прозрачных) полос в каждом поясе N_1 и N_2 , т. е. $f_1 = N_1 n$; $f_2 = N_2 n$.

Приемник излучения Pr , установленный за растром, воспринимает модулированное излучение цели и вырабатывает электрический сигнал, частота которого зависит от того, по какую сторону от разделительной линии находится изображение цели. Этот сигнал усиливается усилителем $Ус$, на выходе которого имеются два электрических фильтра $\Phi 1$ и $\Phi 2$, настроенных на частоты модуляции, которые обеспечивают декодирование информации (рис. 125, а).

Если изображение цели находится в центре поля зрения, то напряжения на выходе фильтров u_{f_1} и u_{f_2} одинаковы (при условии равенства коэффициентов усиления схемы для сигналов с частотами модуляции f_1 и f_2). При смещении изображения цели в ту или другую сторону от центра поля зрения напряжение на выходе одного из фильтров увеличивается, а другого — уменьшается до тех пор, пока изображение цели полностью не переместится на один из поясов раstra. В этом случае напряжение на выходе одного из фильтров достигает максимума, а на выходе другого становится равным нулю.

Сигнал, поступающий с выхода каждого фильтра, обычно подвергается выпрямлению с помощью амплитудного детектора, а на-

пряжения постоянного тока $u_{д1}$ и $u_{д2}$, образующиеся на выходе детекторов Д1 и Д2, вычитаются и суммируются.

Разность напряжений $u_{вых}$ пропорциональна разности потоков излучения от цели, падающих на один и второй модулирующие пояса раstra. Она изменяется в зависимости от положения изобра-

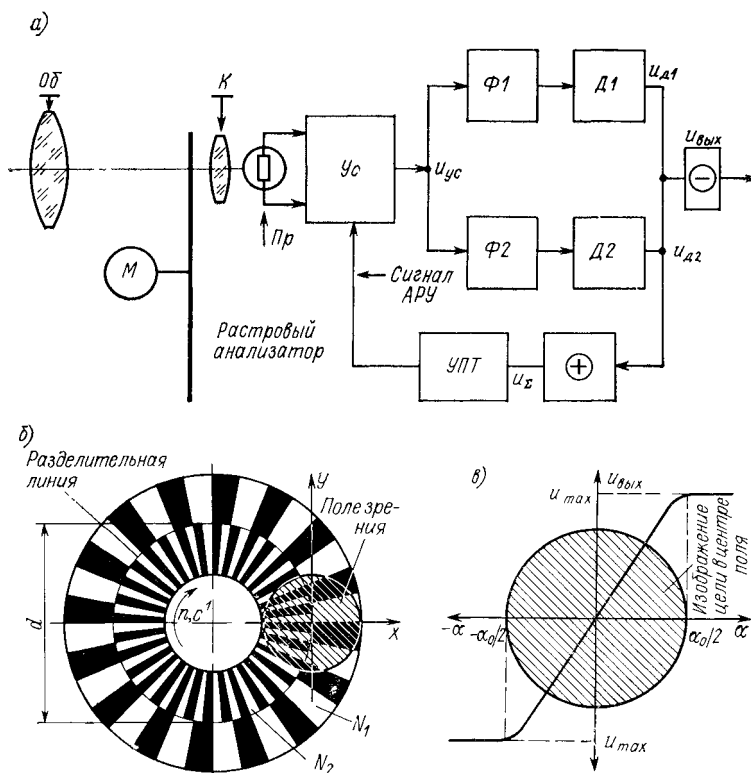


Рис. 125. Амплитудно-частотный растровый анализатор с ограниченной зоной линейности эксцентрического типа a — принципиальная схема использования раstra, b — рисунок раstra, v — угловая характеристика

жения цели, причем вблизи центра поля зрения закон изменения зависит от характера распределения энергии в изображении цели (рис. 125, v). На краях поля зрения (вне зоны линейности $\pm \alpha_0/2$) разность напряжений достигает максимального значения u_{max} .

Сумма напряжений $u_{сум}$ не зависит от положения цели, она пропорциональна общей энергии, заключенной в изображении. Это обстоятельство можно использовать для построения системы АРУ, которая позволяет сохранить характер зависимости разности напряжений от угла рассогласования при изменении потока излучения, падающего на приемник. Для формирования сигнала АРУ напряже-

ние u_x через усилитель постоянного тока УПТ вводится в цепь обратной связи основного усилителя.

При перемещении изображения цели вдоль разделительной линии растра изменения частоты модуляции потока излучения не происходит. Однако за счет кривизны линии раздела последняя совпадает с осью

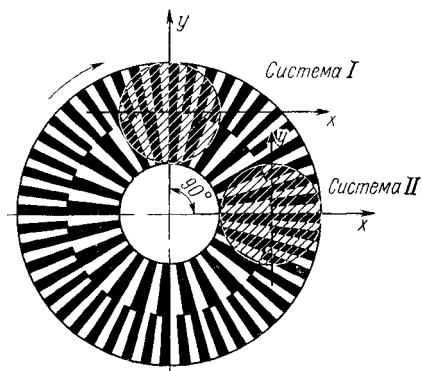


Рис. 126. Расположение полей зрения на амплитудно-частотном растре с двумя оптическими системами

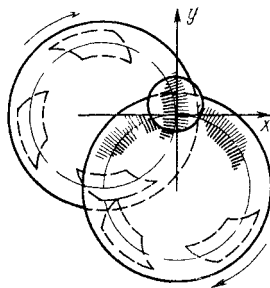


Рис. 127. Расположение амплитудно-частотных растров в системе с одним объективом

y только в центре поля зрения и, следовательно, при перемещении изображения цели: вдоль оси y имеет место ошибка в определении координат, зависящая от диаметра диска растра и размера поля зрения. Избежать этой ошибки можно двумя путями: 1) использовать растр только в схеме следящей системы;

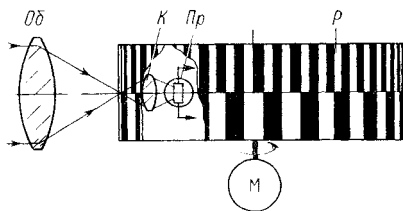


Рис. 128. Амплитудно-частотный растр со скрещивающимися осями

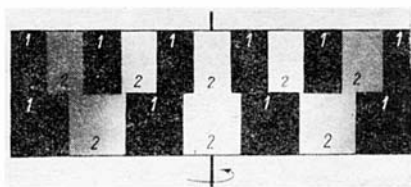


Рис. 129. Комбинированный фазовый и амплитудно-частотный растровый анализатор:

2) применить анализатор со скрещивающимися осями.

В первом случае любое отклонение изображения цели от центра поля зрения вызывает сигнал рассогласования, действующий на изображение цели так, что оно приводится в центр поля зрения, где сигнал рассогласования равен нулю. Если необходимо, чтобы растр обеспечивал реакцию на изменение составляющих угла рассогласования в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, можно

1 — непрозрачные полосы; 2 — прозрачные полосы, пропускание которых меняется по синусоидальному закону

использовать две оптические системы со своими приемниками излучения, расположенные так, что центры их полей зрения смещены вдоль средней линии раstra на 90° (рис. 126). В этом случае при смещении изображения цели по оси y возникает сигнал рассогласования в системе I, а при смещении по оси x — в системе II. Можно применить одну оптическую систему и один приемник излучения, но два раstra, расположенных так, что их средние линии пересекают центр поля зрения под углом 90° . Рисунок раstra при этом становится сложным, так как когда изображение цели пересекается модулирующими полосами одного диска, второй диск в модуляции потока излучения не должен участвовать либо число модулирующих полос в концентрических поясах обоих дисков должно быть различным, чтобы по частоте тока в цепи приемника излучения можно было судить о наличии угла рассогласования в двух плоскостях. Пример реализации подобной системы приведен на рис. 127. Такие системы по существу не являются системами с непрерывной модуляцией. Их можно скорее отнести к системам смешанного типа.

В случае применения амплитудно-частотного анализатора со скрещивающимися осями (рис. 128) разделительная линия становится прямой и ошибка в определении координат, связанная с зависимостью сигнала рассогласования в одной плоскости от перемещения изображения цели в другой плоскости, здесь отсутствует. Однако анализатор такого типа не дает сведений об изменении координат цели в двух плоскостях и его необходимо использовать совместно с анализаторами других типов, например с анализатором, дающим фазовую модуляцию (рис. 129). В этом случае пропускание прозрачных промежутков двухчастотного раstra изменяется по синусоидальному закону.

Многоступенчатый растр для амплитудно-частотной модуляции изображен на рис. 130. Он состоит из кольцевых зон, имеющих разное число прозрачных и непрозрачных полос. В данном случае частота модуляции удваивается при каждом переходе от внутренней кольцевой зоны к внешней.

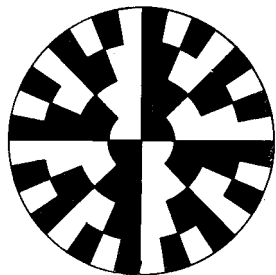


Рис. 130. Многоступенчатый растр для амплитудно-частотной модуляции

§ 7.6. ИМПУЛЬСНО-ЧАСТОТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Импульсно-частотный растровый анализатор модулирует излучение цели так, что *изменение частоты* модулированного сигнала определяет *знак угла* рассогласования, а *изменение длительности модуляции* потока излучения с той или иной частотой определяет *величину угла* рассогласования. Этим обеспечивается кодирование информации о положении цели в поле зрения.

Импульсно-частотный растровый анализатор с неограниченной зоной линейности эксцентрического типа изображен на рис. 131.

В этом растре линия раздела серий полос различной частоты представляет собой спираль Архимеда. При вращении диска с постоянной скоростью поток излучения попеременно модулируется с частотами f_1 и f_2 . Соотношение между длительностью модуляции с той или иной частотой зависит от положения изображения цели. Если изображение цели совпадает с центром рабочей части растра (точка O_1), то поток излучения модулируется частотами f_1 и f_2 равные промежутки времени. При смещении изображения цели время

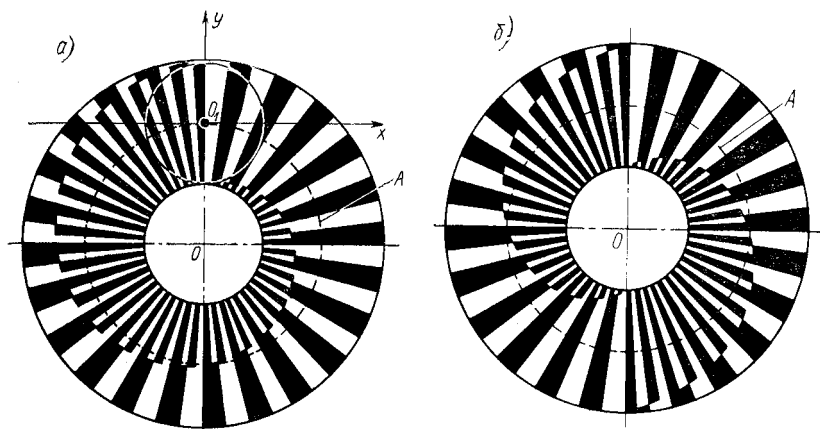


Рис. 131. Импульсно-частотный растровый анализатор с неограниченной зоной линейности: а — односекторный; б — двухсекторный (А — нейтральная окружность — траектория относительного перемещения изображений цели, находящейся в центре поля)

модуляции потока излучения различными частотами изменяется. В односекторном растре (рис. 131, а) изменение частоты происходит один раз в течение одного оборота диска, в двухсекторном растре (рис. 131, б) — два раза.

Обозначим через t_1 и t_2 промежутки времени, в течение которых осуществляется модуляция с частотами f_1 и f_2 соответственно.

Найдем зависимость коэффициента

$$\eta = (t_2 - t_1)/(t_1 + t_2),$$

называемого коэффициентом команды, от угла отклонения изображения цели вдоль оси y .

Для этого рассмотрим чертеж, представленный на рис. 132. Введем обозначения: r — радиус-вектор спирали, соответствующий углу α ; r_0 — радиус-вектор, соответствующий углу $\alpha = 2\pi$; R_0 — радиус-вектор, соответствующий углу $\alpha = 0$; ρ_y — расстояние между центром изображения цели и центром поля зрения (точкой O_1); R — расстояние между центром модулирующего диска (O) и центром поля зрения (O_1).

С учетом обозначений определим:

$$r = R_0 - (R_0 - r_0)\alpha/(2\pi); \quad R = 0,5 (r_0 + R_0); \quad \rho_y = r - \dot{R} = \\ = R_0 - (R_0 - r_0)\alpha/(2\pi) - 0,5 (R_0 + r_0) = 0,5 (R_0 - r_0) (1 - \alpha/\pi).$$

Так как при равномерном вращении диска $t_1 = k\alpha$; $t_2 = k(2\pi - \alpha)$, то

$$\eta = [-\alpha + (2\pi - \alpha)]/(\alpha + 2\pi - \alpha) = -\alpha/\pi + 1,$$

или

$$\eta = 2\rho_y/(R_0 - r_0).$$

Здесь $\rho_y = f'\varphi_y$, где f' — фокусное расстояние объек-

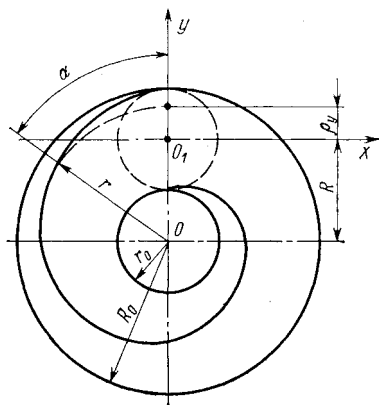


Рис. 132. Принципиальная схема одно-секторного импульсно-частотного раstra

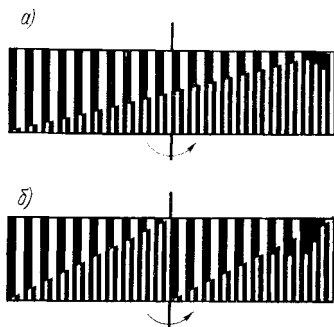


Рис. 133. Импульсно-частотный растровый анализатор в виде вращающегося барабана: а — односекторный; б — двухсекторный

тива; φ_y — угловая координата цели по оси y , следовательно,

$$\eta = 2f'\varphi_y/(R_0 - r_0),$$

т. е. коэффициент команды пропорционален угловой координате цели.

При перемещении изображения цели вдоль оси x относительная длительность модуляции изображения цели частотами f_1 и f_2 меняется незначительно, так как при большом диаметре диска ось x в пределах поля зрения практически совпадает с нейтральной окружностью.

Для полного исключения этой зависимости могут использоваться растры со скрещивающимися осями, когда модулирующие полосы нанесены на поверхности вращающегося барабана (рис. 133, а). Так же как и в предыдущем случае, частота повторения импульсов той или иной частоты модуляции может быть повышена за счет применения двухсекторного рисунка раstra (рис. 133, б).

Разделение частот модуляции осуществляется в электронном тракте прибора с помощью фильтров, настроенных на эти частоты. На выходе фильтров образуются импульсы, постоянная составляющая которых, выделяемая после детектирования, пропорциональна их длительности (рис. 134). Так осуществляется декодирование информации.

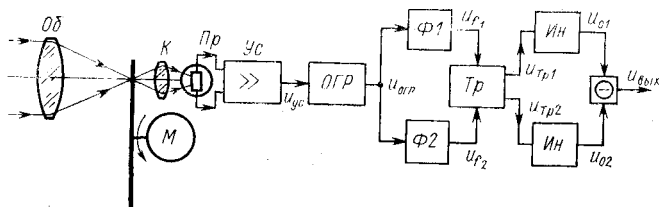


Рис. 134. Структурная схема одного канала оптико-электронного прибора с импульсно-частотным растром

Временные графики напряжений в схеме с импульсно-частотным растром представлены на рис.135. Напряжение на выходе усилителя u_{yc} содержит составляющие двух частот, которые следуют друг за другом с периодом повторения

$$T = N/n,$$

где N — число секторов раstra; n — скорость вращения раstra, c^{-1} . Длительность импульсов той или иной частоты (t_1 и t_2) зависит от положения изображения цели на растре.

На выходе усилителя обычно устанавливается ограничитель, который обеспечивает независимость величины сигнала от величины излучения цели и расстояния до нее.

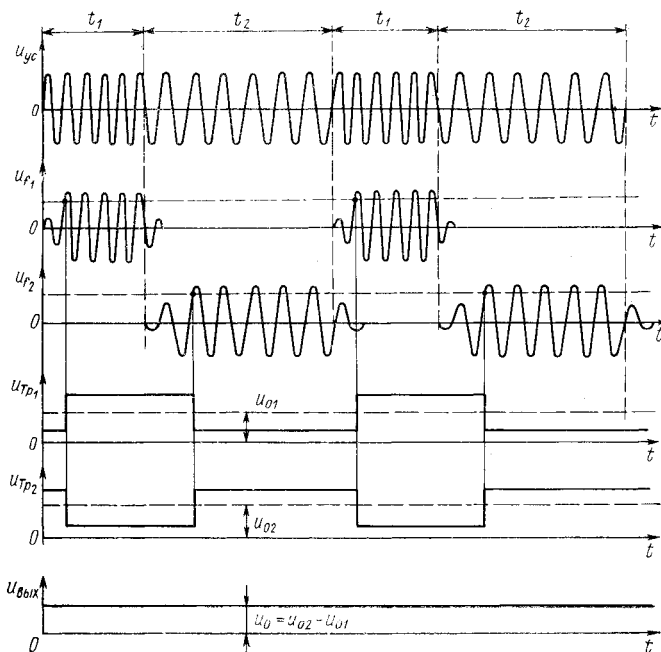


Рис. 135. Временные графики напряжений в схеме с импульсно-частотным растром

Первые гармоники сигналов частот модуляции f_1 и f_2 , содержащиеся в напряжении на выходе ограничителя, разделяются электрическими фильтрами, настроенными на эти частоты. Так как частоты модуляции обычно незначительно отличаются друг от друга ($f_2/f_1 \ll 1,5$), то избирательность фильтров должна быть достаточно высокой, а при более или менее широкой полосе пропускания фильтров это требует обеспечения формы резонансной кривой, близкой к прямоугольной, т. е. создания полосовых фильтров, что в диапазоне низких частот представляет собой сложную задачу. Обычно используются двухзвенные RC -фильтры с двойным Т-образным мостом в цепи обратной связи.

Напряжение на выходе фильтров нарастает и спадает не одновременно с появлением и исчезновением входного сигнала данной частоты, а в течение времени, обратно пропорциональным полосе пропускания фильтра, что является одной из причин ошибки в определении координат цели.

Выходные сигналы фильтров воздействуют на спусковую схему с двумя устойчивыми состояниями равновесия — триггер, который опрокидывается под действием этих сигналов, вырабатывая прямоугольные импульсы, длительность которых соответствует длительности модулированных растром сигналов ($u_{тр1}$ и $u_{тр2}$ на рис. 135). Выходные сигналы триггера интегрируются и вычитаются, образуя напряжение постоянного тока u_0 , пропорциональное разности времен t_1 и t_2 . Интегрирование сигналов триггера в простейшем случае осуществляется с помощью RC -цепей, выделяющих постоянную составляющую сигнала. Однако в ряде случаев используются более сложные нелинейные схемы, осуществляющие безынерционное интегрирование.

Одним из недостатков оптико-электронных приборов с импульсно-частотной модуляцией является наличие «ступенек» на амплитудной характеристике, которые появляются вследствие дискретности модуляции.

§ 7.7. АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Амплитудно-фазовый растровый анализатор модулирует излучение цели так, что *изменение фазы* модулированного сигнала определяет *знак угла* рассогласования, а *изменение амплитуды* сигнала — *величину угла* рассогласования. Этим обеспечивается кодирование информации о положении цели в поле зрения.

Амплитудно-фазовый растровый анализатор с неограниченной зоной линейности может быть выполнен в виде диска, пропускание которого изменяется по линейному закону вдоль диаметра (рис. 136).

Если изображение цели находится в центре диска, то модуляция излучения отсутствует. При смещении изображения от центра излучение модулируется с частотой $F = n$, где n — скорость вращения диска, c^{-1} , причем амплитуда модулированного сигнала пропорциональна радиус-вектору ρ , а фаза — полярному углу φ цели.

Мгновенное значение модулированного потока излучения для случая, когда коэффициент пропускания растра изменяется от 0 до 1, определяется выражением

$$\Phi(t) = \tau_{cp} \Phi_0 + \Delta\Phi \sin(2\pi Ft + \varphi),$$

где Φ_0 — поток излучения, падающий на растр; $\Delta\Phi = 0,5\Phi_0(\tau_{max} - \tau_{min})\rho/R$. Для $\tau_{max} = 1$; $\tau_{min} = 0$; $\tau_{cp} = 0,5(\tau_{max} + \tau_{min}) = 0,5$ имеем:

$$\Phi(t) = 0,5\Phi_0 + \Delta\Phi \sin(2\pi Ft + \varphi);$$

$$\Delta\Phi = 0,5\Phi_0\rho/R.$$

Модулированное излучение воздействует на приемник, который выраба-

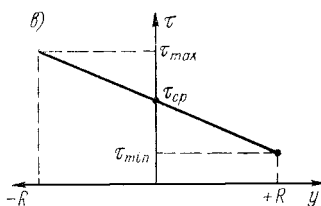
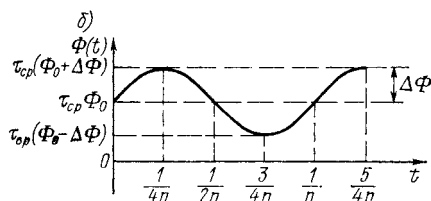
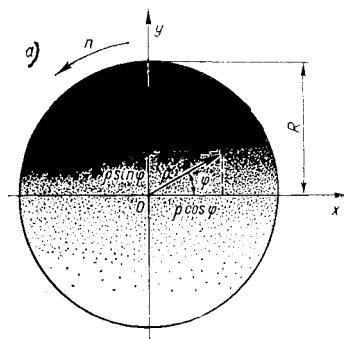


Рис. 136. Амплитудно-фазовый растровый анализатор с неограниченной зоной линейности: а — рисунок растра; б — изменение потока излучения, прошедшего через растр, во времени; в — изменение коэффициента пропускания растра вдоль оси y

тывает электрический сигнал, подвергающийся усилению и обработке в электронной схеме. Выделение составляющих сигнала, пропорциональных отклонению изображения цели от центра растра в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, т. е. преобразование

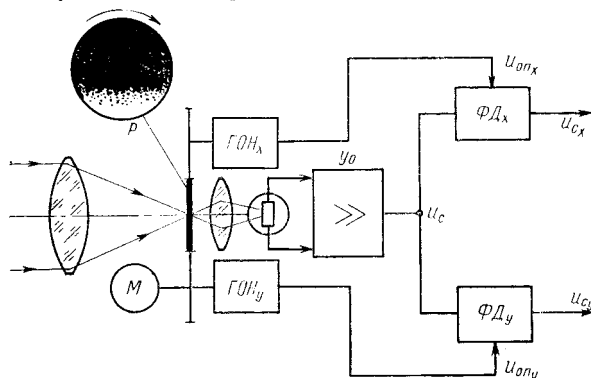


Рис. 137. Схема анализа, усиления и обработки сигнала при амплитудно-фазовой модуляции

полярных координат в декартовы (декодирование), осуществляется с помощью генератора опорных напряжений $ГОН$ и фазового детектора $ФД$. Общая схема анализа, усиления и обработки сигнала представлена на рис. 137.

Генератор опорных напряжений (например, синусно-косинусный потенциометр) вырабатывает два напряжения $u_{опx}$ и $u_{опy}$, имеющих относительный сдвиг 90° :

$$u_{опx} = u_{оп} \sin \Omega t; \quad u_{опy} = u_{оп} \cos \Omega t; \quad \Omega = 2\pi F.$$

Фазовый детектор имеет два канала, один из которых управляется опорным напряжением $u_{опx}$, а второй — $u_{опy}$. Тогда поступающее на оба канала напряжение сигнала

$$u_c = u_{c0} \sin(\Omega t + \varphi)$$

преобразуется в два напряжения:

$$u_{cx} = K_d u_{c0} \cos \varphi; \quad u_{cy} = K_d u_{c0} \sin \varphi,$$

где K_d — коэффициент передачи фазового детектора.

В свою очередь,

$$u_{c0} = S_{пр} K_{yc} \Delta \Phi,$$

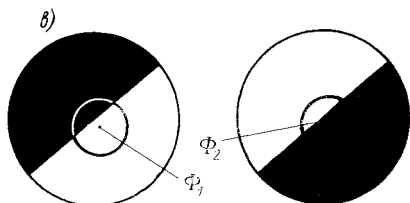
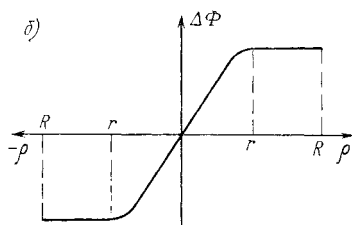


Рис. 138. Амплитудно-фазовый растр с ограниченной зоной линейности: а — рисунок растра; б — амплитудная характеристика; в — процесс возникновения переменной составляющей сигнала

где $S_{пр}$ — крутизна приемника излучения, В/Вт; K_{yc} — коэффициент усиления усилителя.

Большое распространение получил полудисковый модулятор — амплитудно-фазовый растровый анализатор с ограниченной зоной линейности, — представляющий собой концентрический секторный растр с одним прозрачным и одним непрозрачным сектором, т. е. круглую пластинку с вырезом, охватывающим угол 180° (рис. 138, а).

Излучение от цели фокусируется оптической системой прибора на растре в виде пятна конечного диаметра $2r$, который определяется aberrациями объектива и расфокусировкой. Если изображение цели находится точно в центре растра, то модуляции не происходит, так как численное значение потока излучения, проходящего в этом случае через растр и воздействующего на приемник, всегда постоянно и равно половине падающего потока. При смещении изображения от центра появляется переменная составляющая сигнала, пропорциональная разности потоков излучения, проходящих через растр в двух крайних положениях, которые он занимает по отношению к изображению в процессе вращения (рис. 138, в).

Очевидно, что форма кривой изменения амплитудной характеристики раstra в зоне линейности (рис. 138, б) определяется в данном случае зависимостью разности потоков излучения $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ от расстояния между центрами вращения раstra и пятна рассеяния.

Для преобразования полярных координат, определяющих положение изображения цели на диске раstra, в декартовы можно так же, как в предыдущем случае, использовать генератор опорных напряжений и фазовый детектор. Обычно в сочетании с рассматриваемым растром используется коллекторный фазовый детектор.

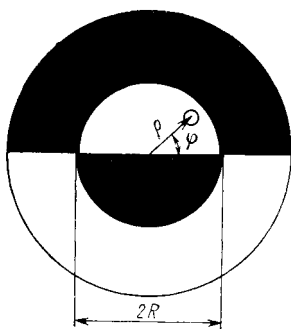


Рис. 139. Амплитудно-фазовый растр со смещенным центром амплитудной характеристики

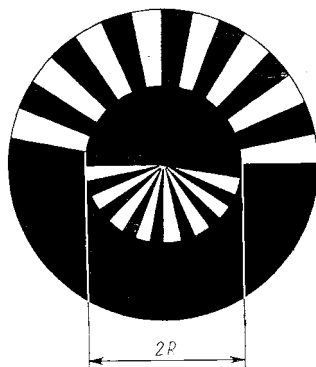


Рис. 140. Амплитудно-фазовый растр со смещенным центром амплитудной характеристики и несущей частотой

Одной из наиболее важных проблем, возникающих при использовании амплитудно-фазового раstra с ограниченной зоной линейности описанного типа, является необходимость ликвидации зависимости амплитуды модулированного сигнала от энергии излучения источника, так как при расположении изображения цели в центре раstra амплитуда модулированного сигнала равна нулю независимо от величины энергии, заключенной в изображении. Если это обстоятельство не учитывать, то крутизна амплитудной характеристики раstra в зоне линейности оказывается переменной, что может привести к ошибкам или потере устойчивости прибора, в котором используется растр.

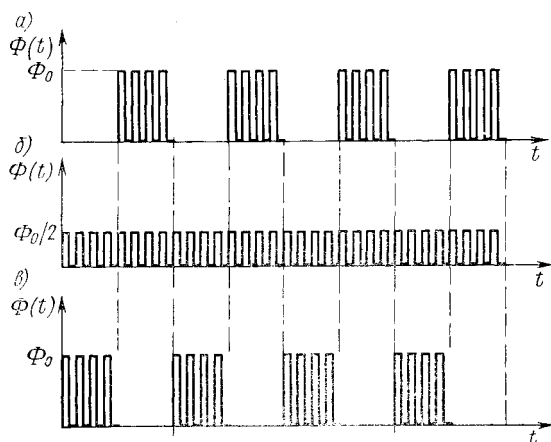
Решение указанной задачи может быть осуществлено путем введения дополнительной модуляции потока излучения прерывателем, установленным до раstra. При этом применяется обычная схема с АРУ, описанная ранее. Однако возможно и иное решение, не требующее установки дополнительного прерывателя. В этом случае вводится модуляция излучения цели с помощью колеблющейся линзы, зеркала или вращающегося клина. В результате происходит колебание изображения цели на небольшую величину относительно среднего положения. В тракте усиления возникает

дополнительный сигнал, частота которого равна частоте колебания изображения, а амплитуда зависит от энергии, заключенной в изображении. Выделение этого сигнала и использование его совместно с сигналом основной частоты для АРУ позволяет избавиться от изменения крутизны амплитудной характеристики раstra.

Модуляция излучения за счет колебания изображения называется *вобуляцией*.

Растр, обеспечивающий амплитудно-фазовую модуляцию с ограниченной зоной линейности, центр которой смещен относительно центра вращения раstra, представлен на рис. 139. Если изображение находится на расстоянии от центра, меньшем R , оно модулируется с частотой вращения раstra и имеет определенную фазу

Рис. 141. Поток излучения, модулированный растром (см. рис. 140), при различных положениях изображения цели на растре: а — $\rho < R$; б — $\rho = R$; в — $\rho > R$ (ρ — радиус-вектор изображения цели)



модуляции, зависящую от полярного угла φ . При смещении изображения вдоль радиуса за границу раздела фаза модуляции изменяется на 180° . При положении изображения цели на границе раздела часть изображения модулируется с одной фазой, а часть — с противоположной, следовательно, амплитуда сигнала изменяется и становится равной нулю, когда энергетический центр изображения совпадает с линией раздела.

Избежать уменьшения амплитуды сигнала до нуля на линии раздела можно, создавая вспомогательную несущую частоту за счет дополнительной амплитудной модуляции. Растр, реализующий этот метод, представлен на рис. 140. Если изображение цели находится на расстоянии от центра такого раstra, меньшем R , то происходит модуляция потока излучения в виде, показанном на рис. 141, а.

При смещении изображения вдоль радиуса оно попадает на границу раздела двух зон и в этой области половина изображения в течение полуоборота модулируется внутренней зоной, а другая половина в течение следующего полуоборота — внешней зоной. Вид модуляции в этом случае показан на рис. 141, б. Дальнейшее смещение изображения на внешнюю зону приводит к модуляции,

показанной на рис. 141, в. Как видно из рисунка, фаза появления группы импульсов изменилась на обратную, что используется для регистрации смещения изображения.

Очевидно, что в этом случае чем меньше размер изображения, тем меньшее смещение требуется для изменения фазы на обратную, т. е. тем точнее будет отсчет. Однако с уменьшением размера изображения зона линейности угловой характеристики постепенно исчезает и растр измеряет только знак отклонения изображения, а не его величину.

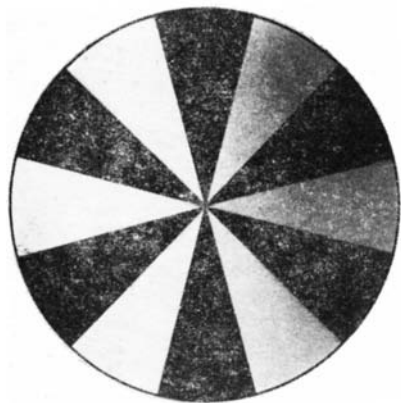


Рис. 142. Амплитудно-фазовый растровый анализатор с неограниченной зоной линейности и несущей частотой (растр Кларка)

Амплитудно-фазовый растровый анализатор с неограниченной зоной линейности может быть выполнен в виде секторного диска, пропускание прозрачных промежутков которого изменяется по линейному закону вдоль диаметра (рис. 142). Такой растр был использован Кларком в Морской исследовательской лаборатории США для ориентации ракетного спектрографа на Солнце.

Если изображение цели находится в центре диска растра Кларка, то модуляция излучения отсутствует. При смещении изображения от центра излучение модулируется с частотой

$$f = nN,$$

где n — скорость вращения диска, c^{-1} ; N — число непрозрачных (или равное ему число прозрачных) секторов.

Кроме того, благодаря изменению пропускания прозрачных секторов диска излучение дополнительно модулируется с частотой $F = n$. Форма модулированного растром Кларка излучения представлена на рис. 143, а, а форма напряжения на выходе усилителя несущей частоты — на рис. 143, б.

Мгновенное значение этого напряжения определяется выражением

$$u = u_{\max} (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t = u_{\max} \cos \omega t + 0,5mu_{\max} \cos(\omega + \Omega)t + 0,5mu_{\max} \cos(\omega - \Omega)t,$$

где $m = (u_{\max} - u_{\min})/u_{\max}$ — глубина модуляции, определяемая положением изображения цели в плоскости растра; $\omega = 2\pi f$; $\Omega = 2\pi F$.

Сигнал далее детектируется, и из него выделяется огибающая частоты F , амплитуда $u_{c \max}$ которой пропорциональна углу расогласования (радиус-вектору ρ), а фаза — полярному углу φ (рис. 143, в).

Дальнейшее декодирование и преобразование сигнала осуществляется описанным выше методом с помощью генераторов опорных напряжений и фазового детектора.

Введение несущей частоты возможно также при использовании амплитудно-фазового раstra с ограниченной зоной линейности типа полудискового модулятора. При этом наиболее простым способом является установка в прибор, кроме полудиска, дополнительного

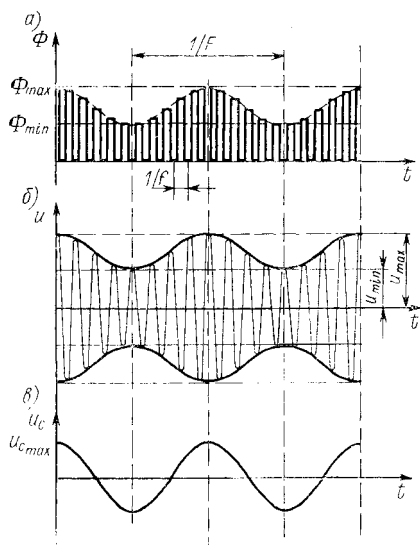


Рис. 143. Временные графики сигналов для случая модуляции излучения точечной цели растром Кларка: *а* — поток излучения; *б* — электрический сигнал на выходе усилителя несущей частоты; *в* — сигнал на выходе детектора

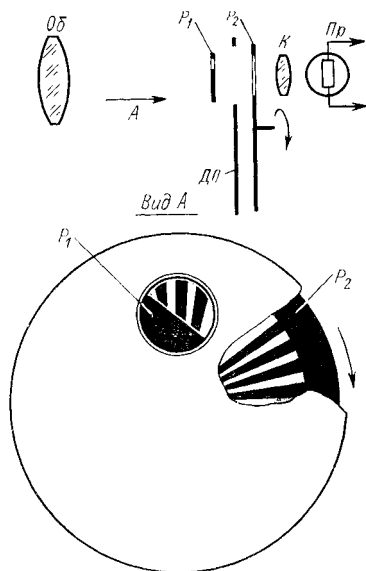


Рис. 144. Введение несущей частоты с помощью эксцентрического секторного раstra:

Об — объектив; P_1 — полудисковый растр; P_2 — секторный растр; ДП — диафрагма поля; К — конденсор; Пр — приемник излучения

секторного раstra с большим числом прозрачных и непрозрачных полос. Использование эксцентрического секторного раstra (рис. 144) приводит к большим габаритным размерам, но обеспечивает наличие сигнала при отсутствии рассогласования между положением изображения цели и оптической осью объектива. Концентрический секторный растр (рис. 145) подобно раstrу Кларка не решает этой задачи, но позволяет уменьшить размеры прибора. Однако чаще всего используется растр «восходящее солнце», состоящий из двух половин, одна из которых является непрозрачной (фазирующей), а другая выполнена в виде чередующихся прозрачных и непрозрачных секторов (рис. 146). Размер и форма непрозрачных и прозрачных секторов раstra выбираются с учетом ряда условий. Наиболее важными из них являются обеспечение линейной зависимости амплитуды сигнала от величины смещения изображения цели, синусоидальной

формы модуляции и наилучших условий селекции малоразмерной цели на фоне протяженных излучающих объектов.

Заметное улучшение работы раstra достигается при подборе прозрачности фазирующего полудиска. Если модулирующая часть диска состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных секторов, а фазирующая часть полностью непрозрачна, импульсы

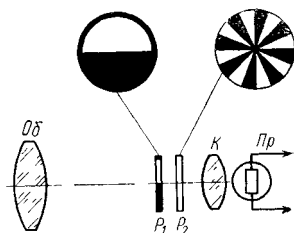


Рис. 145. Введение несущей частоты с помощью концентрического секторного раstra:

Об — объектив; P_1 и P_2 — растры, К — конденсор; Пр — приемник излучения

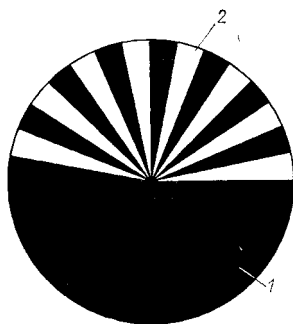


Рис. 146. Комбинированный полудисковый растр с несущей частотой (растр «восходящее солнце»):

1, 2 — фазирующая и модулирующая половины соответственно

модулированного потока излучения несимметричны относительно горизонтальной оси (рис. 147, а) и в сигнале существует составляющая частоты вращения диска. Если же обеспечить постоянство

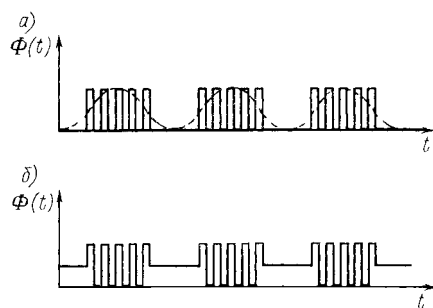


Рис. 147. Форма импульсов модулированного потока излучения для раstra с фазирующим полудиском: а — непрозрачным; б — полупрозрачным

среднего значения потока, проходящего через диск за полный его оборот, то импульсы симметричны относительно горизонтальной оси и в спектре сигнала отсутствует составляющая, соответствующая частоте вращения диска (рис. 147, б).

Растры с полупрозрачной фазирующей частью, предложенные в США Биберманом и Эсти, изображены на рис. 148. Полупрозрачная часть этих растров в среднем пропускает половину потока и не дает модуляции излучения цели, так как она представляет собой

сетку с ячейками, размер которых меньше размера изображения цели. Такое решение связано с тем, что на практике трудно изготовить полупрозрачную часть диска с равномерной плотностью. Растры с полупрозрачной фазирующей частью не модулируют фон, имеющий равномерное распределение яркости по полю зрения.

Действительно, пусть распределение яркости фона по полю зрения таково, что общий поток излучения, падающий в некоторый момент времени на модулирующую часть растра, равен Φ_1 , а на фазирующую часть — Φ_2 . Для растра с непрозрачной фазирующей частью общая величина потока излучения, прошедшего сквозь растр на

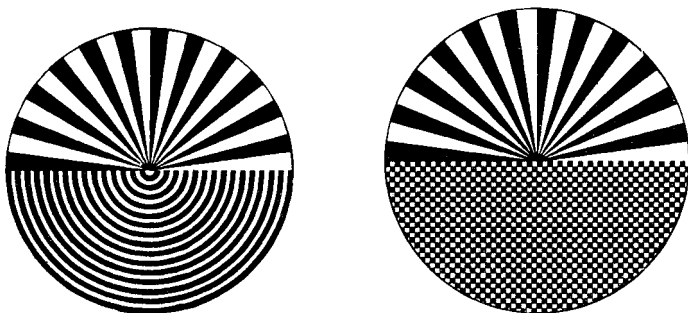


Рис. 148. Растры Бибермана и Эсти с полупрозрачными фазирующими полудисками

приемник, равна $\Phi_1/2$. Когда растр повернется на 180° , поток Φ_1 окажется закрыт полностью непрозрачной фазирующей частью и на приемник излучения будет падать поток $\Phi_2/2$. Так как $\Phi_1 \neq \Phi_2$, то имеет место модуляция с частотой вращения растра и амплитудой $(\Phi_1 - \Phi_2)/2$.

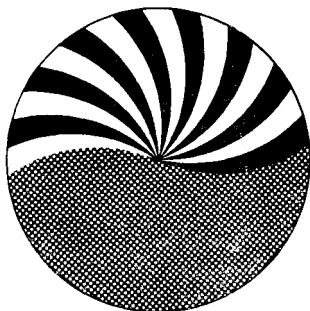


Рис. 149. Растр со спиральными секторами

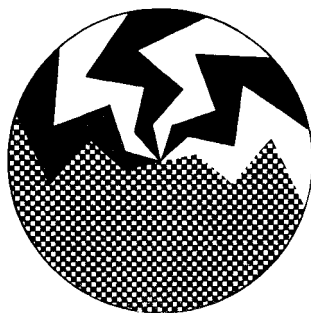


Рис. 150. Растр Дэвиса с зигзагообразными секторами

Если же фазирующая часть растра полупрозрачна, то на приемник во всех случаях падает поток $\Phi_1/2 + \Phi_2/2$ и модуляция отсутствует.

Исследования излучения различных фонов неба, в частности, показали, что вследствие непостоянства его яркости по полю зрения возникают очень большие сигналы на частоте вращения растра, имеющего непрозрачную фазирующую часть, и значительно (в 5—10 раз) меньшие, если фазирующая часть полупрозрачна. Различ-

ного рода неравномерности в распределении яркости неба, связанные, например, с наличием небольших ярко освещенных облаков, приводят к появлению в спектре сигнала высших гармоник. Однако очень резкие перепады яркости встречаются редко, и в спектре сигнала почти отсутствуют гармоники выше восьмой, поэтому частота модуляции излучения малоразмерной цели (число секторов модулирующей части растра) должна быть выбрана более высокой, чем восьмая гармоника частоты вращения ($N > 8$).

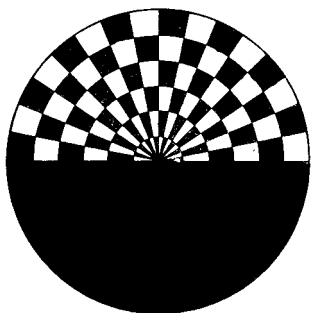


Рис. 151. Растр с модулирующей частью в виде шахматной доски

Стремление ослабить модуляцию резких границ фона типа ярко освещенных облаков и горизонта Земли привело к созданию растров, радиальная (модулирующая) часть которых выполняется в виде спиральных или зигзагообразных секторов, а также в виде чередующейся структуры типа шахматной доски. Растр со спиральными секторами (рис. 149) осуществляет модуляцию изображения точечной цели так же, как обычный радиально-секторный растр. В то же время изображение линейного градиента фона модулируется им тем меньше, чем больше отношение его длины к длине прозрачного спирального сектора. Аналогичными свойствами обладает растр с зигзагообразными секторами, называемый также растром Дэвиса (рис. 150).

Растр типа шахматной доски (рис. 151) модулирует изображение точечной цели так же, как обычный секторный диск. Однако он не модулирует протяженную деталь фона, поскольку смежные клетки дают сигналы, находящиеся в противофазе.

§ 7.8. ЧАСТОТНО-ФАЗОВАЯ МОДУЛЯЦИЯ

Частотно-фазовые растры модулируют излучение цели так, что *изменение (девиация) частоты* модулированного сигнала определяет *величину угла* рассогласования, а *изменение фазы* девиации частоты определяет *направление (знак)* рассогласования. Этим обеспечивается кодирование информации о положении цели в поле зрения.

Зависимость изменения частоты модулированного сигнала от величины угла рассогласования может быть обеспечена, в частности, за счет движения изображения цели по окружности в плоскости установки неподвижного секторного растра. Это движение (*вобуляция*) осуществляется вращающимся клином, зеркалом или линзой, смещенной относительно оси вращения. Частотная модуляция происходит при возникновении эксцентриситета между траекторией движения изображения и растром. На рис. 152 показаны концентрическая и эксцентрическая траектории движения изображения по растру, а на рис. 153 — соответствующая им модуляция потока излучения.

При положении источника излучения (цели) на оси поток модулируется с постоянной частотой, а смещение источника, вызывающее эксцентриситет траектории его изображения, приводит к частотной модуляции.

По мере увеличения угла рассогласования происходит увеличение девиации частоты, причем мгновенное значение частоты модулированного сигнала зависит от угла рассогласования — радиус-вектора цели, а фаза девиации — от полярного угла.

Если хотят избежать вобуляции изображения цели клином, зеркалом или линзой, применяют вращаю-

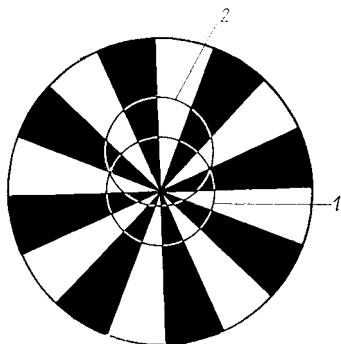


Рис. 152. Растровый анализатор для непрерывной частотно-фазовой модуляции за счет вобуляции изображения цели: 1 — траектория движения изображения цели при ее расположении на оптической оси; 2 — то же при смещении цели от оси

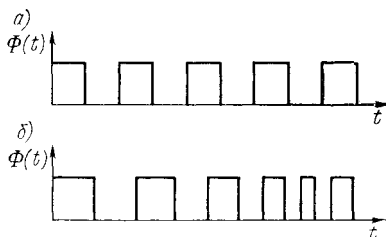


Рис. 153. Зависимость модулированного потока излучения от времени для цели, находящейся на оси (а) и вне оси (б)

щийся растр, который представлен на рис. 154. Этот растр не нашел широкого применения.

Дискретное изменение частот модуляции в зависимости от угла рассогласования достигается с помощью растра, представленного на рис. 155. В этом случае имеет место дискретное изменение числа штрихов растра при переходе от одного концентрического пояса к другому. В пределах одного концентрического пояса ширина модулирующих штрихов не остается постоянной, а изменяется по синусоидальному закону так, что непрозрачные штрихи шире на одной половине растра, чем на другой. Соответственно изменяется и ширина прозрачных промежутков между штрихами. Поэтому при модуляции потока излучения с частотой чередования штрихов растра накладывается также дополнительная модуляция, связанная с изменением длительности сигналов в зависимости от полярного угла цели. Отсчет фазы этой дополнительной модуляции, период которой равен времени одного оборота растра, позволяет определить направление (знак) рассогласования.

Поскольку во избежание потерь энергии при модуляции диаметр кружка рассеяния объектива выбирается равным минимальному размеру прозрачных штрихов, растр, представленный на рис. 155, осуществляет импульсную модуляцию, так как на приемник излучения поступает периодическая последовательность импульсов

потока излучения переменной длительности. Изменение положения цели приводит как к изменению частоты повторения импульсов (радиус-вектор цели), так и к изменению положения импульса

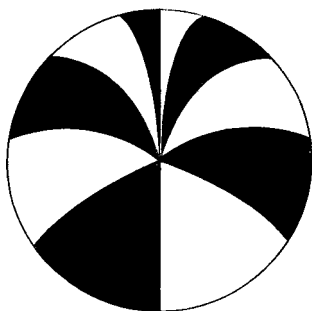


Рис. 154. Вращающийся растр для частотной модуляции

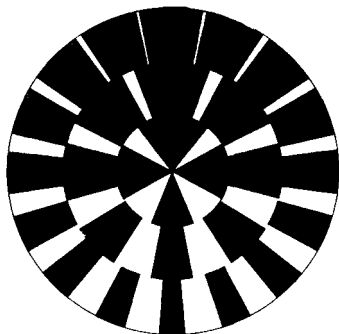


Рис. 155. Растр для смешанной частотно-временной импульсной модуляции

минимальной длительности (полярный угол цели). Таким образом, растр следует отнести к системам со смешанной частотно-временной импульсной модуляцией.

§ 7.9. ИМПУЛЬСНАЯ МОДУЛЯЦИЯ

В общем случае различают *амплитудно-импульсную* и *временную импульсную* модуляции.

Если в результате изменения координат цели импульсы излучения, падающего на приемник, изменяются по величине, сохраняя

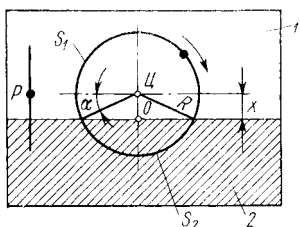


Рис. 156. Однокоординатный широтно-импульсный растр:

1, 2 — прозрачная и непрозрачная части соответственно (Ц — точка, определяющая положение изображения цели, не отклоненной вобуляцией)

при этом неизменными свою форму, длительность и положение, то такая модуляция называется *амплитудно-импульсной* (АИМ). АИМ можно осуществить, например, с помощью секторного растра, у которого все секторы, кроме одного, закрыты. В этом случае при наличии цели в поле зрения излучение, падающее на приемник, представляет собой короткие импульсы, следующие с частотой вращения растра. Амплитуда этих импульсов уменьшается по мере приближения изображения цели к центру растра, так как уменьшается доля энергии, проходящей через растр к приемнику через все более и более узкую щель. Растровые анализаторы, обеспечивающие АИМ, не получили распространения вследствие больших потерь энергии по сравнению с аналогичными системами, обеспечивающими непрерывную модуляцию.

Если в результате изменения координат цели импульсы потока излучения, падающего на приемник, сохраняя свою форму и величину, смещаются во времени на величину Δt , пропорциональную координатам, то такая модуляция называется временной импульсной или *время-импульсной модуляцией (ВИМ)*. При этом различают *фазоимпульсную модуляцию (ФИМ)*, *частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ)* и *широотно-импульсную модуляцию (ШИМ)* или *модуляцию по длительности (ДИМ)*.

В случае фазоимпульсной модуляции (ФИМ) изменение координат цели приводит к сдвигу каждого импульса от его среднего положения, которое фиксируется опорными импульсами. Если модуляция заключается в изменении частоты следования импульсов, то имеет место частотно-импульсная модуляция (ЧИМ). Наконец, при изменении длительности отдельных импульсов в серии, которое достигается смещением либо переднего, либо заднего, либо обоих фронтов импульса, реализуется модуляция по длительности (ДИМ) или так называемая широкоотно-импульсная модуляция (ШИМ). Наиболее часто встречаются ШИМ и ФИМ.

Однокоординатная широкоотно-импульсная модуляция может, в частности, осуществляться с помощью установленного перед приемником неподвижного раstra, одна половина которого прозрачна, а другая непрозрачна (рис. 156). Изображению цели придается колебательное движение с помощью колеблющегося зеркала или движение по окружности с помощью, например, оптического клина. Если изображение цели находится на оптической оси, длительность импульса составляет половину периода колебания или кругового движения. При смещении изображения на величину x длительность импульса изменяется на время

$$\Delta t = (S_1 - S_2)/V,$$

где S_1 , S_2 — путь, проходимый изображением цели, при вобуляции по прозрачной и непрозрачной частям раstra соответственно; V — линейная скорость движения изображения. Так как

$$S_1 = \pi R + 2R \arcsin(x/R); \quad S_2 = \pi R - 2R \arcsin(x/R);$$

$$V = \omega R = 2\pi nR,$$

где n — скорость вращения изображения, s^{-1} , то

$$\Delta t = (2/\pi n) \arcsin(x/R).$$

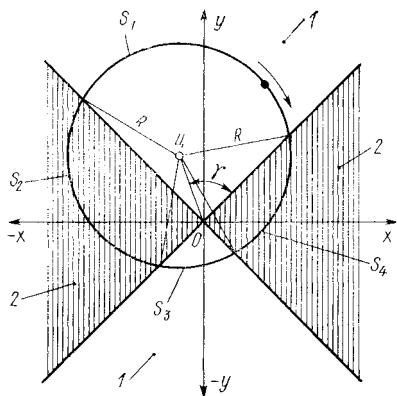


Рис. 157. Двухкоординатный широкоотно-импульсный растр:

1, 2 — прозрачная и непрозрачная части соответственно (U — точка, определяющая положение изображения цели, не отклоненного вобуляцией, $OU = d$)

Однокоординатная ШИМ может использоваться в датчиках горизонта, когда источником излучения (целью) является восходящая звезда.

Аналогичным образом может быть построен двухкоординатный широтно-импульсный растр (рис. 157). В этом случае разность времен отсутствия сигнала $|(S_2 - S_4)/V|$ должна использоваться для управления по азимуту — оси x , разность времен наличия сигнала $|(S_1 - S_3)/V|$ — для управления по высоте — оси y . При выработке сигналов ошибок по двум координатам угловое положе-

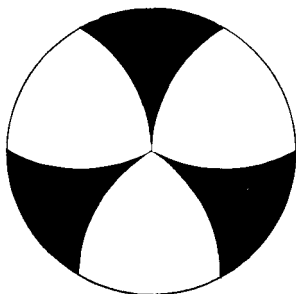


Рис. 158. Растр для широтно-импульсной модуляции

ние источника излучения определяется с помощью опорного напряжения, связанного по фазе с угловым положением оптического клина, осуществляющего вобуляцию изображения. На основании рис. 157 можно найти:

$$S_2 - S_4 = 2 \arcsin(d \sin \gamma/R) - 2 \arcsin(d \cos \gamma/R);$$

$$S_1 - S_3 = 2 \arcsin(d \sin \gamma/R) + 2 \arcsin(d \cos \gamma/R).$$

Широтно-импульсная модуляция может быть получена также с помощью вращающегося растра, который представлен на рис. 158. Когда изображение малоразмерного источника излучения находится вблизи центра, на приемник падает поток излучения в виде узких импульсов (рис. 159, а). При смещении изображения к краю растра продолжительность импульсов увеличивается (рис. 159, б).

Для того чтобы получить сведения не только о радиус-векторе, но и о полярном угле изображения цели, фигурный вырез делается в одном квадранте (рис. 160). При этом синхронно с растром P со скоростью n_p вращается квадрантный переключатель $KП$, выполняющий роль разделительного устройства. За один оборот растра переключатель попеременно подключает выход усилителя фототока к одному из четырех сегментов, соответствующих положению фигурного выреза растра в том или ином квадранте. Этим достигается распределение импульсов по двум каналам управления: канал курса (азимута) — вправо ($+x$) или влево ($-x$), канал тангажа (высоты) — вверх ($+y$) или вниз ($-y$).

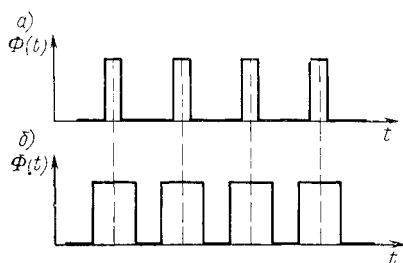


Рис. 159. Зависимость модулированного потока излучения от времени у растра для ШИМ: а — изображение цели вблизи центра; б — изображение цели на краю растра

Профиль фигурного выреза растра может обеспечить различную зависимость длительности импульса от величины угла рассогласования (радиус-вектора). Для обеспечения линейной зависимости $\alpha = \pi\rho/(2R)$ необходимо обеспечить условие $\rho = R(1 - 4\beta/\pi)$, которое легко получить из схемы, представленной на рис. 160.

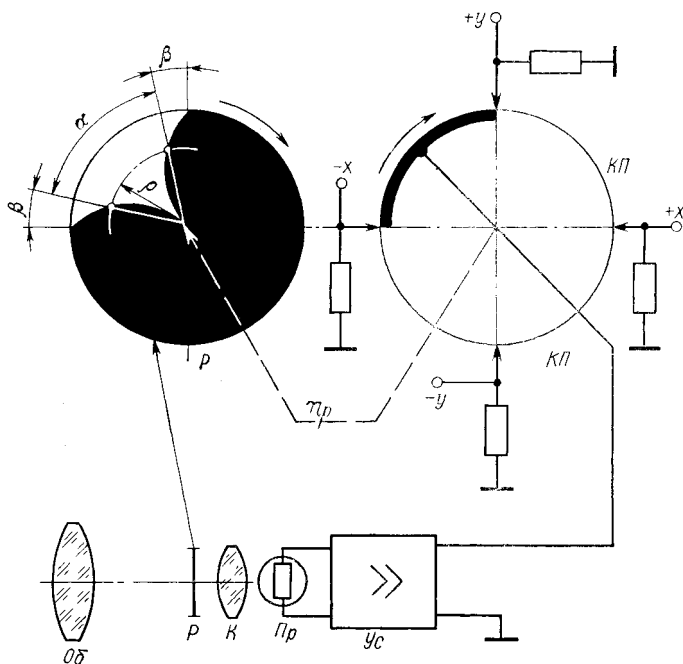


Рис. 160. Растр с фигурным вырезом в одном квадранте для ШИМ:
Р — растр; КП — квадрантный переключатель; Об — объектив; К — конденсор; Пр — приемник; Ус — усилитель фототока

Двухкоординатный фазоширотно-импульсный растр представлен на рис. 161. При каждом обороте растра вырабатывается один опорный импульс. Интервал времени между опорным импульсом и передним фронтом импульса от изображения цели пропорционален полярному углу φ . Длительность импульса является мерой радиального смещения изображения $\alpha = \text{const} \cdot \rho$. Граница между прозрачной и непрозрачной частями растра выполнена по спирали Архимеда.

В последнее время главным образом в связи с решением задач автоматической астронавигации появился новый вид импульсной модуляции, связанный с делением сигнала на дискретные уровни и получивший название импульсно-кодовой модуляции. Модулирующий растр в этом случае устроен таким образом, что поток излучения цели в зависимости от ее положения в поле зрения либо полностью задерживается, либо полностью пропускается к приемнику излучения. Соответственно сигнал принимается либо за 0, либо за 1.

Информация о положении цели, выданная в такой форме, может непосредственно вводиться в вычислительное устройство. В большинстве случаев для получения информации по двум координатам необходимы две системы с импульсно-кодовой модуляцией и взаимно перпендикулярным расположением осей.

Принципиальная схема однокоординатной импульсно-кодовой системы приведена на рис. 162. Схема работает следующим образом. С помощью вращающегося зеркала или многогранного зеркального барабана, вращающегося перед объективом, изображение точечной цели перемещается в картинной

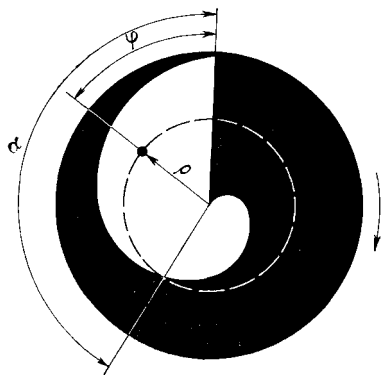


Рис. 161. Двухкоординатный фазо-широотно-импульсный растр

плоскости, где находится растрокодирующая маска с отверстиями, расположенными так, что, перемещаясь по маске, поток излучения от цели кодируется двоичным кодом или кодом Грея. Код характеризует положение цели в направлении, перпендикулярном сканированию.

Системы с импульсной модуляцией часто включают в себя различные многоэлементные приемники. Отдельные площадки приемника могут располагаться в виде симметричного креста, линейного ряда либо другим образом, а изображение цели перемещается в плоскости установки приемников по заранее заданному закону за счет сканирования. В подобных системах растры могут использоваться как прерыватели потока излучения с целью пространственной фильтрации и увеличения помехозащищенности от протяженных элементов фона. Однако в большинстве случаев при наличии многоэлементного приемника дополнительный прерыватель излучения не устанавливается, так как пространственная фильтрация осуществляется за счет уменьшения размера мгновенного поля зрения при одновременном увеличении количества элементов приемника.

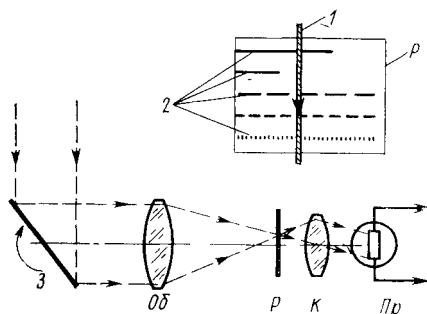


Рис. 162. Однокоординатный импульсно-кодовый растр:

1 — траектория движения изображения цели; 2 — дорожки с отверстиями на кодирующей маске; Р — растр; З — вращающееся зеркало; Об — объектив; К — конденсор; Пр — приемник

Глава 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАСТРОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В ФУНКЦИЮ ВРЕМЕНИ

Растр размещается в картинной плоскости оптической системы и, перемещаясь относительно изображения объекта наблюдения, осуществляет модуляцию потока излучения, т. е. преобразует пространственное распределение излучения в функцию времени.

§ 8.1. СТРУКТУРА И СПЕКТР МОДУЛИРОВАННОГО ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ

В общем случае оптическая система с растровым анализатором состоит из объектива $Об$, который создает изображение поля излучения в плоскости диафрагмы поля $Дп$, раstra $Р$, движущегося через диафрагму, и приемника $Пр$, воспринимающего излучение, прошедшее через диафрагму (рис. 163). Конденсор $К$ обеспечивает равномерное освещение чувствительной площадки приемника, проецируя на нее входной зрачок объектива.

При наблюдении сквозь диафрагму можно увидеть движущиеся части раstra, которые появляются с периодической последовательностью. Положение некоторой точки в плоскости диафрагмы может быть задано в прямоугольных или полярных координатах. Обозначим обобщенные координаты точки, лежащей в плоскости диафрагмы, через \bar{z} , т. е. в прямоугольных координатах $\bar{z} = (x, y)$, а в полярных координатах $\bar{z} = (\rho, \varphi)$.

Освещенность изображения в рассматриваемой точке равна $E(\bar{z}, t)$, причем зависимость от времени возникает главным образом при сканировании поля излучения. Если сканирование отсутствует, то освещенность изображения зависит от времени только в том случае, когда поле излучения изменяется за время анализа, как это имеет место при регистрации кратковременной вспышки света.

Коэффициент пропускания раstra в рассматриваемой точке равен $\tau_p(\bar{z}, t)$, т. е. он зависит от пространственной координаты \bar{z} и времени t (зависимость от времени определяется в этом случае движением раstra). Коэффициент пропускания, называемый функцией раstra, может быть представлен рядом Фурье, так как действие раstra всегда периодически.

Поток излучения, прошедший через растр в пределах площади диафрагмы поля σ , равен

$$\Phi(t) = \int_{(\sigma)} \tau_p(\bar{z}, t) E(\bar{z}, t) d\sigma,$$

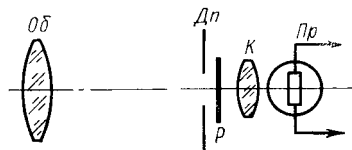


Рис. 163. Оптическая система с растровым анализатором

где $\tau_p(\bar{z}, t)$ — коэффициент пропускания раstra в точке с обобщенной координатой \bar{z} $E(\bar{z}, t)$ — освещенность диафрагмы σ , $d\sigma$ — элемент площади диафрагмы σ .

Преобразуем уравнение для $\Phi(t)$ к виду

$$\Phi(t) = \int_{(\sigma)} \tau_p(\bar{z}, t) \tau_\phi(\bar{z}) E_0(t) d\sigma = E_0(t) \int_{(\sigma)} \tau_p(\bar{z}, t) \tau_\phi(\bar{z}) d\sigma,$$

т. е. предположим, что диафрагма поля σ освещена падающим потоком равномерно, так что $E_0(t) = \text{const}$, но в плоскости диафрагмы установлен фильтр, коэффициент пропускания которого $\tau_\phi(\bar{z})$ зависит от пространственных координат рассматриваемой точки.

Если обозначить

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \tau_p(\bar{z}, t) \tau_\phi(\bar{z}) d\sigma,$$

то модулированный поток излучения

$$\Phi(t) = E_0(t) \sigma \tau(t) = \Phi_0(t) \tau(t),$$

где $\tau(t)$ — интегральный коэффициент пропускания диафрагмы и раstra; $\Phi_0(t)$ — поток излучения, падающий на диафрагму и растр.

Интегральный коэффициент пропускания может быть представлен в виде бесконечной суммы синусов и косинусов

$$\tau(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t).$$

Здесь

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tau(t) \cos k\omega_0 t dt; \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tau(t) \sin k\omega_0 t dt;$$

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tau(t) dt; \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T,$$

где f_0 — основная частота модулированного растром потока излучения; T — период модулированного растром потока излучения, определяемый пространственным периодом повторения рисунка раstra.

Если $\tau(t)$ — четная функция, т. е. законы открытия и закрытия потока излучения одинаковы и начало отсчета времени выбрано в середине периода рисунка раstra, то $B_k = 0$ и

$$\tau(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t.$$

Так как

$$\cos k\omega_0 t = 0,5(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}),$$

то

$$\tau(t) = 0,5A_0 + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}).$$

Спектр модулированного потока излучения можно вычислить с помощью прямого преобразования Фурье

$$\tilde{\Phi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) \tau(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Следовательно, подставляя значение $\Phi(t) = \Phi_0(t) \tau(t)$, найдем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) \left[0,5A_0 + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{jk2\pi f_0 t} + e^{-jk2\pi f_0 t}) \right] \times \\ &\quad \times e^{-j2\pi f t} dt = 0,5A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) e^{-j2\pi f t} dt + \\ &+ 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) e^{-j2\pi (f - kf_0) t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) e^{-j2\pi (f + kf_0) t} dt \right]. \end{aligned}$$

Входящие в полученное выражение интегралы представляют собой спектры исходного потока излучения (немодулированного

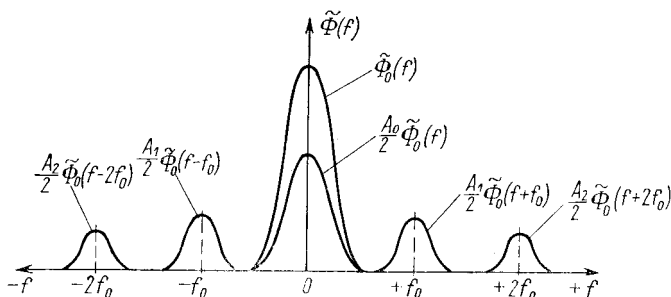


Рис. 164. Спектр Фурье модулированного потока излучения

сигнала), расположенные симметрично относительно нулевой частоты и относительно частот, сдвинутых на величины, кратные частоте модуляции:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) e^{-j2\pi f t} dt; \\ \tilde{\Phi}_0(f - kf_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) e^{-j2\pi (f - kf_0) t} dt; \\ \tilde{\Phi}_0(f + kf_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) e^{-j2\pi (f + kf_0) t} dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{\Phi}(f) = 0,5A_0\tilde{\Phi}_0(f) + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\tilde{\Phi}(f - kf_0) + \tilde{\Phi}(f + kf_0)].$$

Спектр модулированного потока излучения представлен на рис. 164. Частоты спектра модулированного потока излучения, расположенные вблизи частот $\pm kf_0$, отсутствуют в исходном спектре немодулированного сигнала, поэтому их называют иногда *псевдочастотами*.

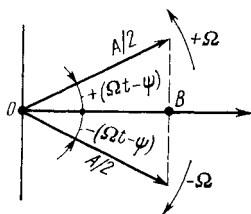


Рис. 165. Векторное представление гармонического колебания

Спектр сигнала $\tilde{\Phi}_0(f)$ может занимать полосу частот, большую, чем $f_0/2$, тогда будет иметь место наложение кривых, представленных на рис. 164, и полный спектр получится суммированием этих перекрывающихся кривых.

$\tilde{\Phi}_0(f)$ может быть комплексной функцией, что означает наличие сдвигов составляющих спектр колебаний по фазе. Это имеет место, например, когда коэффициент пропускания раstra не выражается четной функцией

$$\tau(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t).$$

Так как

$$\tilde{\Phi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t) \tau(t) e^{-j2\pi ft} dt,$$

то можно найти

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(f) = & 0,5A_0\tilde{\Phi}_0(f) + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} (A_k - jB_k)\tilde{\Phi}_0(f - kf_0) + \\ & + (A_k + jB_k)\tilde{\Phi}_0(f + kf_0). \end{aligned}$$

В этом случае суммирование вещественных и мнимых составляющих должно производиться отдельно.

Рассмотрим значение отрицательных частот в спектре. Гармоническое колебание, определяемое действительной функцией

$$S(t) = A \cos(\Omega t - \psi),$$

может быть представлено в виде суммы проекций на горизонтальную ось (рис. 165) двух векторов с амплитудами $0,5A$, вращающихся с угловой частотой Ω в противоположных направлениях.

Следовательно,

$$\begin{aligned} S(t) = & 0,5Ae^{+j(\Omega t - \psi)} + 0,5Ae^{-j(\Omega t - \psi)} = \\ = & 0,5A[e^{j(\Omega_+ t - \psi_+)} + e^{j(\Omega_- t - \psi_-)}]. \end{aligned}$$

В полученном выражении второе слагаемое можно трактовать как колебание с «отрицательной» частотой $\Omega_- = -\Omega_+$ и фазой $\psi_- = -\psi_+$.

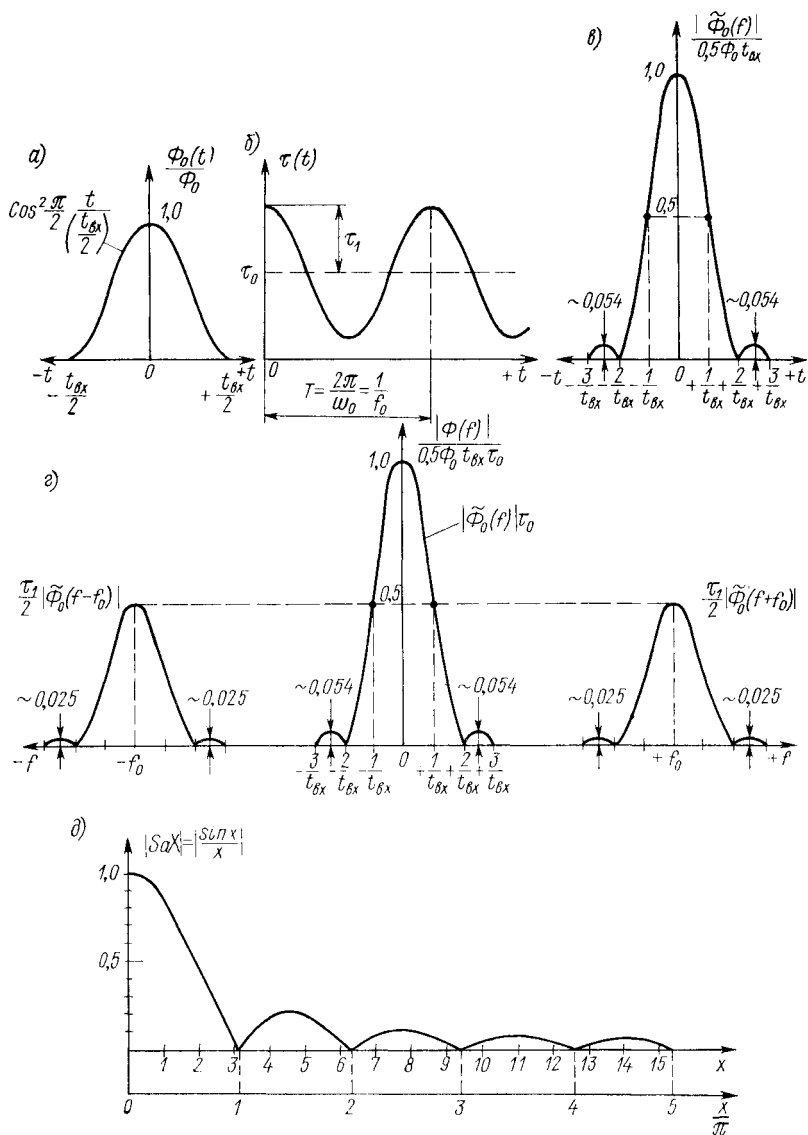


Рис. 166. Спектр Фурье модулированного потока излучения для идеального гармонического модулятора: а — форма импульса потока излучения; б — коэффициент пропускания идеального гармонического модулятора; в — спектр Фурье немодулированного потока излучения; г — спектр Фурье модулированного потока излучения; д — функция $|sax| = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ для $x > 0$

Гармонической составляющей с какой-либо физической частотой Ω соответствует пара слагаемых, одно из которых содержит отрицательную частоту

$$\begin{aligned} S(t) &= 0,5A [\cos(\Omega_+ t - \psi_+) + j \sin(\Omega_+ t - \psi_+)] + \\ &+ 0,5A [\cos(\Omega_- t - \psi_-) + j \sin(\Omega_- t - \psi_-)] = \\ &= 0,5A [\cos(\Omega_+ t - \psi_+) + j \sin(\Omega_+ t - \psi_+)] + \\ &+ 0,5A [\cos(-\Omega_+ t + \psi_+) + j \sin(-\Omega_+ t + \psi_+)] = A \cos(\Omega t - \psi). \end{aligned}$$

Таким образом, при использовании удобного для анализа выражения, включающего отрицательные частоты, всегда можно освободиться от них путем перехода в этом выражении к тригонометрической форме.

При косинусоидальной модуляции потока излучения, когда коэффициент пропускания раstra (идеального гармонического модулятора) определяется выражением (рис. 166, б)

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau \cos \omega_0 t,$$

коэффициенты разложения Фурье равны:

$$0,5A_0 = \tau_0; \quad A_1 = \tau_1.$$

Если при этом форма импульса потока излучения описывается, например, косинус-квадратной зависимостью (рис. 166, а)

$$\Phi_0(t) = \Phi_0 \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{t}{(t_{\text{BX}}/2)},$$

для которой спектр Фурье определяется выражением (рис. 166, в)

$$\tilde{\Phi}_0(f) = \Phi_0(t_{\text{BX}}/2) \left(\frac{\text{sa}(\pi f t_{\text{BX}}/2)}{1 - (f t_{\text{BX}})^2} \right),$$

где использовано обозначение $\text{sa } x = (\sin x)/x$, то модуль спектра модулированного потока излучения имеет вид, представленный на рис. 166, г.

В табл. 2 даны значения функции $\text{sa } x$, а график ее модуля для $x > 0$ представлен на рис. 166, д. Точные значения x и $\text{sa } x$ для локальных положительных и отрицательных максимумов и $\text{sa } x = 0$ в пределах изменения x от 0 до 15 равны:

x	0	3,14159	4,49341	6,28318	7,72525	9,42478	10,90412	12,56637	14,06619
x/π	0	1	1,43030	2	2,45902	3	3,47089	4	4,47741
$\text{sa } x$	1,0	0	-0,21723	0	0,12837	0	-0,09133	0	0,07091

В наиболее простом случае, когда на растр падает поток излучения постоянной величины $\Phi_0(t) = \Phi_0$, вычисление спектра Фурье обычным способом оказывается невозможным, так как функция $\Phi_0 = \text{const}$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Для вычисления спектра Фурье в этом случае, как известно, необходимо воспользоваться функцией Дирака, которую называют также дельта-функцией (δ -функцией) или единичным импульсом.

Таблица 2

Значения функции $\text{sa } x = (\sin x)/x$

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,0000	0,9983	0,9933	0,9851	0,9735	0,9589	0,9411	0,9203	0,8967	0,8704
1	0,8415	0,8102	0,7767	0,7412	0,7039	0,6650	0,6247	0,5833	0,5410	0,4981
2	0,4546	0,4111	0,3675	0,3242	0,2814	0,2394	0,1983	0,1583	0,1196	0,0825
3	0,0470	0,0134	-0,0182	-0,0478	-0,0752	-0,1002	-0,1229	-0,1437	-0,1610	-0,1764
4	-0,1892	-0,1996	-0,2075	-0,2131	-0,2163	-0,2272	-0,2160	-0,2127	-0,2075	-0,2005
5	-0,1918	-0,1815	-0,1699	-0,1570	-0,1431	-0,1283	-0,1127	-0,0966	-0,0801	-0,0634
6	-0,0466	-0,0299	-0,0134	0,0027	0,0482	0,0331	0,0472	0,0604	0,0727	0,0838
7	0,0939	0,1027	0,1102	0,1165	0,1214	0,1251	0,1274	0,1283	0,1280	0,1264
8	0,1237	0,1197	0,1147	0,1087	0,1017	0,0939	0,0854	0,0767	0,0665	0,0563
9	0,0548	0,0351	0,0242	0,0134	0,0026	-0,0079	-0,0182	-0,0280	-0,0374	-0,0462
10	-0,0544	-0,0619	-0,0686	-0,0745	-0,0796	-0,0838	-0,0871	-0,0894	-0,0908	-0,0913
11	-0,0909	-0,0896	-0,0874	-0,0844	-0,0806	-0,0761	-0,0709	-0,0651	-0,0588	-0,0519
12	-0,0447	-0,0372	-0,0294	-0,0214	-0,0134	-0,0053	0,0027	0,0105	0,0181	0,0254
13	0,0323	0,0388	0,0449	0,0503	0,0553	0,0595	0,0632	0,0661	0,0684	0,0699
14	0,0708	0,0709	0,0703	0,0690	0,0671	0,0645	0,0613	0,0575	0,0533	0,0485
15	0,0434	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Спектр $\tilde{\Phi}(f)$ при этом представляет собой набор δ -функций, сосредоточенных на частотах отдельных гармоник. Так как пользоваться таким представлением спектра неудобно, спектр модулированного потока излучения представляют совокупностью значений амплитуд (спектр амплитуд) и фаз (спектр фаз) отдельных гармоник

$$\Phi(f) \rightarrow \Phi(t) = \Phi_0 \tau(t) = 0,5\Phi_0 A_0 + \Phi_0 \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k2\pi f_0 t + B_k \sin k2\pi f_0 t].$$

Если $B_k = 0$, то

$$\Phi(f) = 0,5\Phi_0 A_0 + \Phi_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k2\pi f_0 t;$$

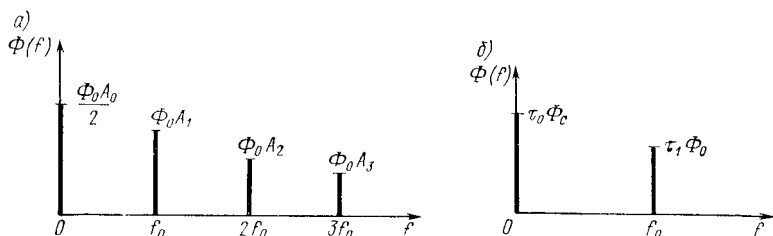


Рис. 167. Амплитудный спектр модулированного потока излучения:
а — общий случай; б — идеальный гармонический модулятор

для идеального гармонического модулятора имеем

$$\Phi(f) = \Phi_0 \tau_0 + \Phi_0 \tau_1 \cos 2\pi f_0 t.$$

Амплитудный спектр модулированного потока излучения в общем случае и для идеального гармонического модулятора представлен на рис. 167.

§ 8.2. ГАРМОНИЧЕСКАЯ МОДУЛЯЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ. ОШИБКИ МОДУЛЯЦИИ.

МОДУЛЯЦИЯ КРАТКОВРЕМЕННЫХ ИМПУЛЬСОВ (ВСПЫШЕК) ИЗЛУЧЕНИЯ

Идеальный гармонический модулятор

При прерывании потока излучения идеальным гармоническим модулятором имеет место синусоидальная или косинусоидальная модуляция, поскольку коэффициент пропускания в этом случае равен:

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin \psi; \quad \tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \cos \psi.$$

Здесь $\psi = \omega_0 t + \varphi_0$, где $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Гармоническая модуляция может осуществляться, в частности, секторным растром, вращающимся за равномерно освещенной диафрагмой поля с фигурным отверстием (рис. 168). Фигурное отверстие вырезается по размерам, рассчитанным из уравнения

$$r_{1,2} = r_0 \pm a \cos 2N\alpha,$$

где r_0 — радиус средней окружности; a — полуширина отверстия вдоль радиуса; N — число непрозрачных (или прозрачных) секторов растра; α , r_1 , r_2 — полярные координаты границ фигурного выреза.

Модуляция, близкая к гармонической, может осуществляться также растром в виде непрозрачного диска с отверстиями, размер которых равен размерам диафрагмы поля или сечения светового пучка в плоскости расположения растра, а непрозрачные промежутки между отверстиями равны по размерам отверстиям. Благодаря тому, что усилитель фототока, используемый в оптико-электронных приборах с модуляцией излучения, обычно рассчитан на выделение лишь относительно узкой полосы частот, расположенных вокруг основной частоты модуляции, можно считать, что и в этом случае имеет место гармоническая модуляция, а потери энергии, связанные с появлением высших гармоник, невелики.

Однако при изготовлении растра возможны ошибки, вызывающие периодическое смещение его отверстий относительно диафрагмы (сечения светового пучка в месте расположения растра) в двух направлениях — вдоль радиуса и вдоль окружности, на которой расположены отверстия. В общем случае эти ошибки носят случайный характер, а их наличие вызывает появление в спектре модулированного сигнала составляющих, расположенных в непосредственной близости от частоты модуляции и, следовательно, проходящих даже сквозь узкополосный усилитель.

Ошибки изготовления растра-модулятора излучения

Предположим, что растр представляет собой непрозрачный диск с круглыми отверстиями, совпадающими по размеру и форме с диафрагмой поля (рис. 169). Если отверстия изготовлены идеально, т. е. располагаются на одинаковом угловом расстоянии φ_T друг от друга и на одинаковом удалении R_0 от центра вращения O , то

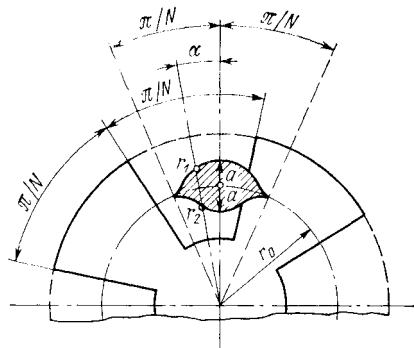


Рис. 168. Секторный растр для гармонической модуляции

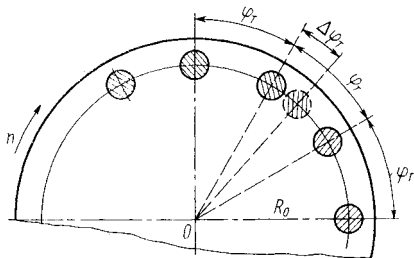


Рис. 169. Растр-модулятор (прерыватель) излучения в виде диска с отверстиями

при постоянной скорости вращения растра период модуляции будет оставаться постоянным за время одного оборота и равным

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = N\varphi_T/\omega_0 = \varphi_T/(\omega_0/N) = \varphi_T/\Omega_0.$$

Здесь N — число отверстий; φ_T — угловое расстояние между центрами соседних отверстий растра; $\Omega_0 = \omega_0/N = 2\pi n_p$ — угловая скорость вращения растра; $\omega_0 = 2\pi f_0$ — угловая частота модуляции, где n_p — частота вращения, с^{-1} ; f_0 — частота модуляции, Гц.

В этом случае на приемник излучения поступает периодическая последовательность импульсов потока излучения, причем амплитуда k -й гармоники их дискретного спектра A_k равна модулю спектральной плотности одиночного импульса той же формы на частоте $f_k = kf_0$, умноженной на $2/T$ (см. § 12.5),

$$A_k = (2/T) |\tilde{\Phi}(f_k)|.$$

Если, например, импульсы излучения имеют прямоугольную форму, что соответствует случаю, когда размер диафрагмы поля очень мал по сравнению с отверстием растра, то

$$\tilde{\Phi}(f_k) = \Phi_0 t_{\text{вх}} \frac{\sin [2\pi f_k (t_{\text{вх}}/2)]}{2\pi f_k (t_{\text{вх}}/2)},$$

где Φ_0 — полный поток излучения, проходящий через отверстие диафрагмы; $t_{\text{вх}}$ — длительность импульса.

При одинаковом размере непрозрачных промежутков и отверстий растра, когда $t_{\text{вх}} = T/2$, можно найти

$$A_k = \Phi_0 |\sin k\pi/2| / (k\pi/2).$$

Отношение амплитуды ближайшей (третьей) высшей гармоники к амплитуде частоты модуляции ($k = 1$) равно $A_3/A_1 = 1/3$.

Если отверстия диафрагмы по форме и размерам совпадают с отверстиями растра, то импульс излучения может быть аппроксимирован уравнением плавной кривой. При косинус-квадратной аппроксимации, когда

$$\Phi(t) = \begin{cases} \Phi_0 \cos^2 [(\pi/2) t/(t_{\text{вх}}/2)] & \text{при } |t| \leq t_{\text{вх}}/2; \\ 0 & \text{при } |t| > t_{\text{вх}}/2, \end{cases}$$

имеем

$$\tilde{\Phi}(f_k) = \frac{\Phi_0 t_{\text{вх}}}{2} \frac{\sin [2\pi f_k (t_{\text{вх}}/2)]}{2\pi f_k (t_{\text{вх}}/2) [1 - (f_k t_{\text{вх}})^2]}.$$

Если $t_{\text{вх}} = T/2$; $f_k = kf_1 = k/T$, то амплитуда k -й гармоники периодической последовательности косинус-квадратных импульсов будет равна

$$A_k = \frac{2}{T} |\tilde{\Phi}(f_k)| = \left| \frac{\Phi_0 \sin (k\pi/2)}{2 (k\pi/2) (1 - k^2/4)} \right|.$$

Отношение амплитуды ближайшей (третьей) высшей гармоники к амплитуде частоты модуляции в этом случае равно $A_3/A_1 = 1/5$.

Если отверстие растра смещено по окружности на угол $\Delta\varphi_T$ относительно среднего отверстия (рис. 169), то это смещение при-

ведет к изменению периода модуляции на величину $\Delta T = \Delta \varphi_T / \Omega_0$, а частоты модуляции — на величину $\Delta \omega$, так что относительное изменение частоты будет равно:

$$\Delta \omega / \omega_0 = \Delta T / T_0 = \Delta \varphi_T / \varphi_T; \quad \Delta \omega = \omega_0 \Delta \varphi_T / \varphi_T.$$

Изменение частоты модуляции произойдет и в том случае, когда отверстия модулятора расположены идеально точно с шагом φ_T , а центр его вращения смещен относительно центра окружности, на которой находится диафрагма поля (сечение светового пучка).

Рассмотрим количественную связь между изменением ча-

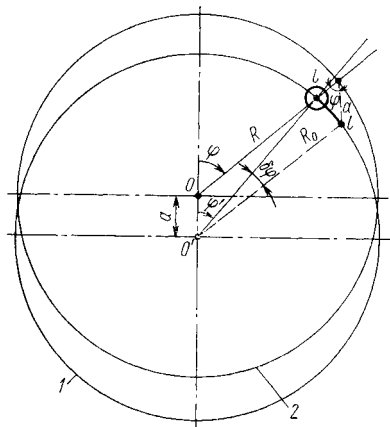


Рис. 170. Эксцентриситет раstra:

1 — окружность с центром в точке O' , на которой расположены отверстия раstra; 2 — траектория относительного движения центра диафрагмы поля (окружность с центром в точке O)

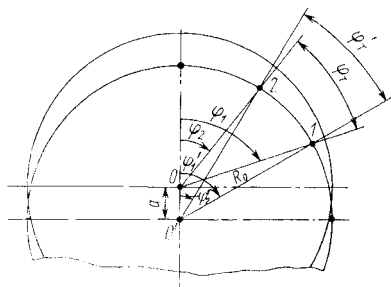


Рис. 171. Схема для оценки эксцентриситета раstra

стоты и эксцентриситетом. Пусть траектория относительного движения центра диафрагмы поля лежит на окружности с центром в точке O , а отверстия раstra расположены на окружности с центром в точке O' , находящейся на расстоянии a от точки O (рис. 170). Тогда можно найти разность полярных углов φ и φ' , характеризующих положение центра отверстия раstra относительно точек O и O' ,

$$\delta \varphi = \varphi - \varphi' = l / R_0 \approx (a \sin \varphi) / R_0.$$

Пусть в точках 1 и 2 (рис. 171) находятся центры двух соседних отверстий раstra, полярные углы которых относительно точек O и O' равны $\varphi_1, \varphi_2, \varphi'_1$ и φ'_2 соответственно.

Тогда имеем:

$$\varphi_T = \varphi_1 - \varphi_2; \quad \varphi'_T = \varphi'_1 - \varphi'_2;$$

$$\Delta \varphi_T = \varphi_T - \varphi'_T = (\varphi_1 - \varphi'_1) - (\varphi_2 - \varphi'_2) = \delta \varphi_1 - \delta \varphi_2.$$

Подставив в последнюю формулу $\delta \varphi_1 = (a / R_0) \sin \varphi_1$; $\delta \varphi_2 = (a / R_0) \sin \varphi_2$, получим

$$\Delta\varphi_T = \frac{a}{R_0} (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) = \frac{2a}{R_0} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Так как

$$\sin [(\varphi_1 - \varphi_2)/2] = \sin \varphi_T/2 \approx \varphi_T/2; (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = \varphi_{cp} \approx \Omega_0 t,$$

то

$$\Delta\varphi_T \approx \varphi_T (a/R_0) \cos \Omega_0 t; \Delta\varphi_T/\varphi_T \approx (a/R_0) \cos \Omega_0 t.$$

Следовательно, изменение частоты модуляции

$$\Delta\omega = \omega (\Delta\varphi_T/\varphi_T) = \omega_0 (a/R_0) \cos \Omega_0 t = \Delta\omega_{\max} \cos \Omega_0 t,$$

где $\Delta\omega_{\max} = \omega_0 (a/R_0)$.

Мгновенное значение частоты

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_{\max} \cos \Omega_0 t = \omega_0 (1 + m \cos \Omega_0 t),$$

где m — глубина модуляции, $m = \Delta\omega_{\max}/\omega_0 = a/R_0$; $\Delta\omega_{\max} = (a/R_0) \omega_0$.

Из выражения для $\omega(t)$ следует, что наличие эксцентриситета вызывает периодическую модуляцию частоты в пределах $\pm \Delta\omega_{\max}$ с частотой $\Omega_0 = 2\pi n_p$.

Амплитуду частотного отклонения $\Delta\omega_{\max}$ обычно называют *девиацией частоты* или просто *девиацией*

$$\omega_d = \Delta\omega_{\max} = 2\pi f_d; \omega_d = \omega_0 (a/R_0).$$

Изменение частоты модуляции и мгновенное значение частоты можно представить в виде:

$$\Delta\omega = \omega_d \cos \Omega_0 t;$$

$$\omega(t) = \omega_0 [1 + (\omega_d/\omega_0) \cos \Omega_0 t] = \omega_0 (1 + m \cos \Omega_0 t),$$

где $m = \Delta\omega_{\max}/\omega_0 = \omega_d/\omega_0$.

По своему определению круговая частота $\omega(t)$ есть производная по времени от аргумента тригонометрической функции, представляющей колебание, — полной фазы колебания ψ .

Если $\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin \psi$, то набег полной фазы за время t будет равен

$$\psi = \int_0^t \omega(t) dt = \int_0^t \omega_0 \left(1 + \frac{\omega_d}{\omega_0} \cos \Omega_0 t \right) dt = \omega_0 t + \frac{\omega_d}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t.$$

Итак, периодическая модуляция частоты в пределах $\pm \omega_d$ с частотой Ω_0 эквивалентна гармонической модуляции фазы с той же частотой в пределах угла $\beta = \omega_d/\Omega_0$.

Величину β называют *индексом угловой модуляции* (в данном случае — частотной).

Следовательно, коэффициент пропуска равен

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin(\omega_0 t + \beta \sin \Omega_0 t),$$

где $\beta = \omega_d/\Omega_0 = \Delta\omega_{\max}/\Omega_0 = a\omega_0/(R_0\Omega_0) = aN\Omega_0/(R_0\Omega_0) = (a/R_0) N$.

Когда эксцентриситет отсутствует, но имеют место случайные ошибки изготовления отверстий раstra, частота модуляции изменяется в общем случае по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_d F(t) = \omega_0 [1 + (\omega_d/\omega_0) F(t)] = \omega_0 [1 + F(t)].$$

Здесь $F(t)$ — периодическая функция времени с периодом $1/n_p$, где n_p — скорость вращения раstra.

Полная фаза колебания при этом равна

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 t + \omega_d \int_0^t F(t) dt = \omega_0 t + \frac{\omega_d}{\Omega_0} \int_0^t 2\pi n_p F(t) dt.$$

Подставив $\omega_d/\Omega_0 = \beta$ и введя обозначение

$$\gamma(t) = \int_0^t 2\pi n_p F(t) dt,$$

найдем:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \beta \gamma(t);$$

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \sin[\omega_0 t + \beta \gamma(t)].$$

При полностью непрозрачных промежутках между отверстиями раstra $\tau_1 = \tau_0$.

В свою очередь, за счет смещения отверстий раstra вдоль радиуса может иметь место зависимость коэффициента пропускания τ_0 от времени, т. е. в общем случае имеем

$$\tau(t) = \tau_0(t) \{1 + \sin[\omega_0 t + \beta \gamma(t)]\}.$$

Функцию $\tau_0(t)$ удобно представить в виде

$$\tau_0(t) = \tau_0 [1 + M \theta(t)],$$

тогда

$$\tau(t) = \tau_0 [1 + M \theta(t)] \{1 + \sin[\omega_0 t + \beta \gamma(t)]\}.$$

Если отверстия изготовлены идеально точно, но имеет место эксцентриситет, то

$$\gamma(t) = \sin \Omega_0 t;$$

$$\Delta \varphi_{T_{\max}} = \varphi_T(a/R_0) = (2\pi/N)(a/R_0);$$

$$\omega_d = nN^2 \Delta \varphi_{T_{\max}} = \omega_0 (a/R_0);$$

$$\beta = \omega_d/\Omega_0 = N(a/R_0),$$

где a — эксцентриситет; R_0 — радиус окружности центров отверстий раstra.

Для определения вида функции $\theta(\varphi)$ обратимся к рис. 172, где представлены взаимные положения одного из отверстий раstra (модулятора) и равному ему по размеру отверстию диафрагмы для частных случаев $\varphi = 0$; $\varphi = \varphi$; $\varphi = 90^\circ$; $\varphi = 180^\circ$; $\varphi = 270^\circ$. Радиус отверстий равен r , а расстояние между их центрами — ΔR_0 .

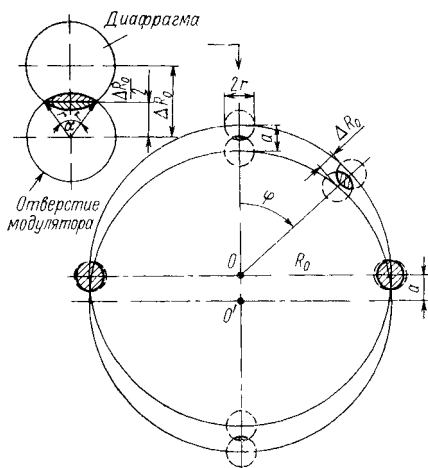


Рис. 172. Взаимное положение отверстий раstra (модулятора) и диафрагмы при эксцентриситете

Пропускание раstra характеризуется заштрихованной площадью двух сегментов, выделяемых диафрагмой поля в отверстии раstra. Так как площадь сегмента связана с центральным углом α соотношением

$$S_c = (r^2/2) (\pi\alpha/180 - \sin \alpha),$$

а полная площадь отверстия раstra равна $S_0 = \pi r^2$, то коэффициент $\xi = 2S_c/S_0$ характеризует относительное изменение коэффициента пропускания раstra от максимальной величины τ_0 до текущего значения $\tau_0(\varphi)$

$$\xi = \tau_0(\varphi)/\tau_0 = \alpha/180 - \sin \alpha/\pi.$$

Значения угла α можно найти из соотношения

$$\cos(\alpha/2) = |\Delta R_0/(2r)| = [a/(2r)] |\cos \varphi|,$$

причем модуль означает, что независимо от знака ΔR_0 учитывается общая площадь диафрагмы и отверстия раstra.

Величины α и ξ для различных φ в предположении, что $a/(2r) = 0,1$, следующие:

φ, \dots°	0	45	90	135	180	225	270	315	360
α, \dots°	168	172	180	172	168	172	180	172	168
ξ, \dots	0,93	0,92	1,0	0,95	0,93	0,95	1,0	0,95	0,93

При малом эксцентриситете угол α незначительно отличается от 180° , т. е. $\sin \alpha \approx 0$, следовательно, $\xi \approx \alpha^\circ/180$.

Обозначив $\alpha/2 = \pi/2 - \Delta$, где Δ — малая величина, найдем

$$\begin{aligned} \cos(\alpha/2) &= \cos(\pi/2 - \Delta) = \cos(\pi/2) \cos \Delta + \\ &+ \sin(\pi/2) \sin \Delta = \sin \Delta \approx \Delta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta &= \cos(\alpha/2) = [a/(2r)] |\cos \varphi|; \\ \alpha &= \pi - 2\Delta = \pi - 2[a/(2r)] |\cos \varphi|, \end{aligned}$$

или в градусах:

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= \alpha(180/\pi) = 180 \{1 - (2/\pi) [a/(2r)] |\cos \varphi|\}; \\ \xi &= \tau_0(\varphi)/\tau_0 = \alpha^\circ/180 = 1 - (2/\pi) [a/(2r)] |\cos \varphi|. \end{aligned}$$

Так как $\varphi = \Omega_0 t$, то

$$\tau_0(t) = \tau_0 \{1 - (2/\pi) [a/(2r)] |\cos \Omega_0 t|\}.$$

Возвращаясь к общему выражению для коэффициента пропускания раstra

$$\tau(t) = \tau_0(t) \{1 + \sin[\omega_0 t + \beta \gamma(t)]\},$$

где $\tau_0(t) = \tau_0 [1 + M\theta(t)]$, найдем, что в случае, когда единственной ошибкой является эксцентриситет,

$$M = (2/\pi) [a/(2r)]; \theta(t) = -|\cos \Omega_0 t|; \beta = N(a/R_0); \gamma(t) = \sin \Omega_0 t.$$

Спектр модулированного излучения
с учетом ошибок изготовления раstra

Пусть коэффициент пропускания раstra определяется выражением

$$\tau(t) = \tau_0 [1 + M\theta(t)] \{1 + \sin[\omega_0 t + \beta \gamma(t)]\},$$

тогда модулированный поток излучения $\Phi(t) = \Phi_0(t) \tau(t)$. Введем допущение $\Phi_0(t) = \Phi_0 = \text{const}$, при котором спектр функции $\Phi(t)$ полностью определится спектром функции $\tau(t)$.

Так как $\tau(t)$ есть функция периодическая, в дальнейшем будем пользоваться амплитудным спектром $\Phi(\omega)$ или $\Phi(f)$. Вычислим спектр для двух случаев: гармоническая частотная модуляция коэффициента пропускания, вызванная эксцентриситетом, гармонические частотная и амплитудная модуляции коэффициента пропускания, также вызванные эксцентриситетом.

Гармоническая частотная модуляция коэффициента пропускания характеризуется следующими значениями параметров:

$$\theta(t) = 0; \gamma(t) = \sin \Omega_0 t; \beta = N(a/R_0).$$

Следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau_0 [1 + \sin(\omega_0 t + \beta \sin \Omega_0 t)] = \\ &= \tau_0 + \tau_0 [\sin \omega_0 t \cos(\beta \sin \Omega_0 t) + \cos \omega_0 t \sin(\beta \sin \Omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Если $\beta \ll 1$, то

$$\cos(\beta \sin \Omega_0 t) \approx 1; \sin(\beta \sin \Omega_0 t) \approx \beta \sin \Omega_0 t;$$

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_0 [\sin \omega_0 t - (\beta/2) \sin(\omega_0 + \Omega_0)t - (\beta/2) \sin(\omega_0 - \Omega_0)t].$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \Phi(t) = \Phi_0 \tau(t) = \Phi_0 \tau_0 [1 + \sin \omega_0 t + \\ &+ (\beta/2) \sin(\omega_0 + \Omega_0)t - (\beta/2) \sin(\omega_0 - \Omega_0)t]. \end{aligned}$$

Спектр амплитуд модулированного потока излучения представлен на рис. 173. При малом индексе частотной модуляции (практически $\beta \leq 0,5$) амплитудный спектр модулированного потока излучения аналогичен спектру амплитудно-модулированного колебания и состоит из постоянной составляющей $\Phi_0 \tau_0$, несущей частоты — первой гармоники частоты модуляции ω_0 и двух боковых частот — верхней $\omega_0 + \Omega_0$ и нижней $\omega_0 - \Omega_0$. Ширина спектра частотно-модулированного колебания в этом случае равна $2\Omega_0$.

Отношение амплитуды боковой частоты a_1 к амплитуде частоты модуляции A_1 равно

$$a_1/A_1 = \beta/2 = (N/2)(a/R_0).$$

В данном случае при выборе отношения a_1/A_1 необходимо руководствоваться не столько соображениями о допустимой величине потерь энергии сигнала за счет боковых составляющих спектра, сколько допустимыми изменениями амплитуды сигнала основной частоты, так как полоса пропускания усилителя фототока обычно включает в себя частоты $\omega_0 \pm \Omega_0$. Изменение амплитуды сигнала

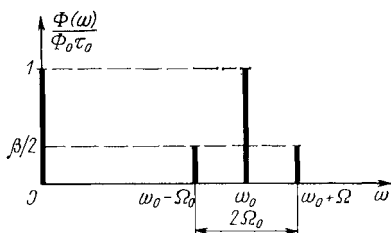


Рис. 173. Спектр амплитуд модулированного потока излучения при гармонической частотной модуляции коэффициентом модуляции с малым индексом модуляции

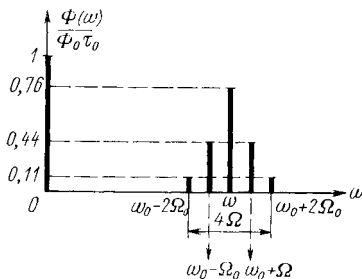


Рис. 174. Спектр амплитуд модулированного потока излучения при гармонической частотной модуляции коэффициента пропускания раstra с индексом модуляции $\beta = 1$

основной частоты обычно связывают с изменением потока излучения, воспринимаемого прибором, поэтому наличие дополнительной модуляции, возникающей, например, вследствие эксцентриситета или других ошибок изготовления раstra, является крайне нежелательной.

Пусть, в частности, поток излучения, падающий на приемник, определяется излучением абсолютно черного тела при температуре T , а изменение этого потока, вызывающее соответствующее изменение амплитуды модулированного сигнала, связано с малым изменением температуры ΔT , которое требуется зарегистрировать. Отношение изменения потока излучения к его полной величине при этом равно

$$\Delta\Phi/\Phi = 4\sigma T^3\Delta T/\sigma T^4 = 4\Delta T/T,$$

если $T = 300$ К, а $\Delta T = 0,03$ К, то $\Delta\Phi/\Phi = 4 \cdot 10^{-4}$.

Следовательно, для обнаружения такого изменения сигнала необходимо, чтобы помеха, которой в данном случае является дополнительная модуляция, не превышала значения $\Delta\Phi/\Phi$:

$$a_1/A_1 \leq \Delta\Phi/\Phi = 4 \cdot 10^{-4}; \quad \beta/2 = (N/2)(a/R_0) \leq 4 \cdot 10^{-4},$$

откуда $a/R_0 \leq 8 \cdot 10^{-4}/N$. Если $N = 10$; $R_0 = 100$ мм, то $a \leq 0,008$ мм.

Используя в усилителе фильтр, ослабляющий сигнал на частотах $\omega_0 \pm \Omega_0$ в 5 раз по сравнению с сигналом на основной частоте, можно уменьшить требования к точности изготовления раstra и

допустить эксцентриситет $a \leq 0,04$ мм. Во всяком случае, всегда необходимо стремиться к уменьшению числа отверстий раstra и увеличению его диаметра.

Если соотношение $\beta \ll 1$ не выполняется, то исходное уравнение должно быть применено в общем виде

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_0 [\sin \omega_0 t \cos(\beta \sin \Omega_0 t) + \cos \omega_0 t \sin(\beta \sin \Omega_0 t)].$$

Используя формулы теории бесселевых функций, найдем:

$$\cos(\beta \sin \Omega_0 t) = J_0(\beta) + 2 \sum_{n=2}^{\infty} J_{2n}(\beta) \cos 2n \Omega_0 t;$$

$$\sin(\beta \sin \Omega_0 t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta) \sin(2n+1) \Omega_0 t,$$

где $J_0(\beta)$ — функция Бесселя нулевого порядка; $J_{2n}(\beta)$ — функция Бесселя $2n$ -го порядка от аргумента β . Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau(t) = & \tau_0 + \tau_0 [\sin \omega_0 t J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\Omega_0 t \sin \omega_0 t + \\ & + 2J_4(\beta) \cos 4\Omega_0 t \sin \omega_0 t + \dots + \cos \omega_0 t 2J_1(\beta) \sin \Omega_0 t + \\ & + 2J_3(\beta) \sin 3\Omega_0 t \cos \omega_0 t + 2J_5(\beta) \sin 5\Omega_0 t \cos \omega_0 t + \dots] = \tau_0 + \\ & + \tau_0 J_0(\beta) \sin \omega_0 t + \tau_0 2J_1(\beta) \sin \Omega_0 t \cos \omega_0 t + \tau_0 2J_2(\beta) \cos 2\Omega_0 t \sin \omega_0 t + \\ & + \tau_0 2J_3(\beta) \sin 3\Omega_0 t \cos \omega_0 t + \tau_0 2J_4(\beta) \cos 4\Omega_0 t \sin \omega_0 t + \\ & + \tau_0 2J_5(\beta) \sin 5\Omega_0 t \cos \omega_0 t + \dots = \tau_0 + \tau_0 J_0(\beta) \sin \omega_0 t + \\ & + \tau_0 J_1(\beta) [\sin(\omega_0 + \Omega_0)t - \sin(\omega_0 - \Omega_0)t] + \\ & + \tau_0 J_2(\beta) [\sin(\omega_0 + 2\Omega_0)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_0)t] + \\ & + \tau_0 J_3(\beta) [\sin(\omega_0 + 3\Omega_0)t - \sin(\omega_0 - 3\Omega_0)t] + \\ & + \tau_0 J_4(\beta) [\sin(\omega_0 + 4\Omega_0)t + \sin(\omega_0 - 4\Omega_0)t] + \\ & + \tau_0 J_5(\beta) [\sin(\omega_0 + 5\Omega_0)t - \sin(\omega_0 - 5\Omega_0)t] + \dots \end{aligned}$$

Обобщая, найдем

$$\begin{aligned} \tau(t) = & \tau_0 [1 + J_0(\beta) \sin \omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\beta) [\sin(\omega_0 + n\Omega_0)t + \\ & + (-1)^n \sin(\omega_0 - n\Omega_0)t]. \end{aligned}$$

Таким образом, при произвольном значении индекса модуляции спектр состоит из бесконечно большого числа боковых частот, отличающихся от основной частоты на величину $n\Omega_0$, где n — любое целое число. Амплитуда n -й боковой составляющей равна $\tau_0 J_n(\beta)$ или для потока излучения

$$a_n = \tau_0 \Phi_0 J_n(\beta).$$

Соответственно амплитуда первой гармоники (частоты модуляции)

$$A_1 = \tau_0 \Phi_0 J_0(\beta).$$

Отношение амплитуды боковой частоты a_n к амплитуде частоты модуляции A_1 равно

$$a_n/A_1 = J_n(\beta)/J_0(\beta).$$

Из табл. 3 значений $J_n(\beta)$ для $\beta \leq 10$ и $n \leq 11$ следует, что при $\beta \leq 0,5$ ширина спектра практически равна $2\Omega_0$, а отношение $a_n/A_1 = a_1/A_1 \approx \beta/2$. Для $0,5 \leq \beta \leq 1$ приобретает некоторое значение

Значения $J_n(\beta)$

β	n											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.5	0.94	0.21	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.76	0.44	0.11	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	-0.4	-0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
5	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02	0.01	0.00	0.00
6	0.15	-0.28	-0.24	0.11	0.36	0.36	0.24	0.13	0.06	0.02	0.01	0.00
7	0.3	-0.004	-0.30	-0.17	0.16	0.35	0.34	0.23	0.13	0.06	0.02	0.01
8	0.17	-0.23	-0.11	-0.29	-0.10	0.18	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.02
9	-0.09	0.24	0.14	-0.18	-0.26	-0.06	0.20	0.33	0.30	0.21	0.12	0.06
10	-0.24	0.04	0.25	0.06	-0.22	-0.23	-0.01	0.22	0.32	0.29	0.21	0.12

вторая пара боковых частот, так как $a_2/A_1 = 0,145$. Следовательно, в этом случае ширина спектра равна $4\Omega_0$ (рис. 174). При $\beta = 1$ $a_1/A_1 = 0,58$, а дальнейшее увеличение индекса модуляции приводит не только к увеличению числа и амплитуды боковых составляющих, но и резко к уменьшению амплитуды основной частоты.

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. Для того чтобы избавиться от искажений гармонического сигнала, вызванных отличием формы отверстий раstra от идеальной, необходимо произвести селекцию основной частоты f_0 от частот гармоник $2f_0$, $3f_0$ и т. д. При этом имеют место потери, достигающие 20—30%.

2. Для того чтобы избавиться от влияния эксцентриситета раstra, когда он составляет величину $a \ll R_0/N$, необходима селекция сигнала на частоте ω_0 от частот $\omega_0 \pm \Omega_0$. Если коэффициент передачи электронного тракта прибора на частотах $\omega_0 \pm \Omega_0$ по отношению к частоте ω_0 равен K , то сигнал помехи по отношению к сигналу основной частоты составляет долю $K(N/2)(a/R_0)$.

3. Если ошибки изготовления раstra велики (высокий индекс модуляции), единственной мерой, позволяющей избавиться от искажений гармонического сигнала, является значительное подавление частот $\omega_0 \pm \Omega_0$, но при этом очень велики потери, особенно когда $a > R/N$, $\beta > 1$.

Гармоническая частотная и амплитудная модуляции коэффициента пропускания раstra определяются выражением

$$\tau(t) = \tau_0 [1 + M\theta(t)] \{1 + \sin[\omega_0 t + \beta\gamma(t)]\},$$

где

$$\theta(t) = -|\cos \Omega_0 t|; \quad \gamma(t) = \sin \Omega_0 t;$$

$$\beta = N(a/R_0); \quad M = (2/\pi)[a/(2r)].$$

Следовательно,

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_0 M\theta(t) + \tau_0 \sin[\omega_0 t + \beta\gamma(t)] + \tau_0 M\theta(t) \sin[\omega_0 t + \beta\gamma(t)].$$

В полученном уравнении необходимо осуществить разложение отдельных членов в ряд Фурье.

Прежде всего рассмотрим функцию

$$\theta(t) = -|\cos \Omega_0 t|.$$

Ее можно представить рядом вида (см. § 12.6)

$$\theta(t) = -\left[\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \cos 2k\Omega_0 t \right] \approx$$

$$\approx -(2/\pi) [1 + (2/3) \cos 2\Omega_0 t - (2/15) \cos 4\Omega_0 t + (2/35) \cos 6\Omega_0 t - \dots].$$

Функцию $\sin[\omega_0 t + \beta \gamma(t)] = \sin[\omega_0 t + \beta \sin \Omega_0 t]$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sin[\omega_0 t + \beta \sin \Omega_0 t] &= J_0(\beta) \sin \omega_0 t + J_1(\beta) [\sin(\omega_0 + \Omega_0)t - \\ &- \sin(\omega_0 - \Omega_0)t] + J_2(\beta) [\sin(\omega_0 + 2\Omega_0)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_0)t] + \\ &+ J_3(\beta) [\sin(\omega_0 + 3\Omega_0)t - \sin(\omega_0 - 3\Omega_0)t] + \dots \end{aligned}$$

В результате определим

$$\begin{aligned} \frac{\tau(t)}{\tau_0} &= 1 - \frac{2M}{\pi} \left[1 + \frac{2}{3} \cos 2\Omega_0 t - \dots \right] + \\ &+ \left[\left(1 - \frac{2M}{\pi} \right) J_0(\beta) - \frac{4M}{3\pi} J_2(\beta) + \dots \right] \sin \omega_0 t + \\ &+ \left[\left(1 - \frac{4M}{3\pi} \right) J_1(\beta) - \dots \right] [\sin(\omega_0 + \Omega_0)t - \sin(\omega_0 - \Omega_0)t] + \\ &+ \left[\left(1 - \frac{28M}{15\pi} \right) J_2(\beta) - \frac{2M}{3\pi} J_0(\beta) + \dots \right] [\sin(\omega_0 + 2\Omega_0)t + \\ &+ \sin(\omega_0 - 2\Omega_0)t] + \dots \end{aligned}$$

Если положить $\beta \ll 1$, то $J_2(\beta) \ll J_0(\beta)$; $J_3(\beta) \ll J_0(\beta)$ и т. д. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\tau(t)}{\tau_0} &\approx 1 - \frac{2M}{\pi} - \frac{4M}{3\pi} \cos 2\Omega_0 t + \left(1 - \frac{2M}{\pi} \right) J_0(\beta) \sin \omega_0 t + \\ &+ J_1(\beta) \left[1 - \frac{4M}{3\pi} \right] [\sin(\omega_0 + \Omega_0)t - \sin(\omega_0 - \Omega_0)t] + \\ &+ \left[\left(1 - \frac{28M}{15\pi} \right) J_2(\beta) - \frac{2M}{3\pi} J_0(\beta) \right] [\sin(\omega_0 + 2\Omega_0)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_0)t]. \end{aligned}$$

Если $M \leq 0,1$, то

$$\begin{aligned} \frac{\tau(t)}{\tau_0} &\approx 1 - \frac{4M}{3\pi} \cos 2\Omega_0 t + J_0(\beta) \sin \omega_0 t + J_1(\beta) [\sin(\omega_0 + \Omega_0)t - \\ &- \sin(\omega_0 - \Omega_0)t] + \left[J_2(\beta) - \frac{2M}{3\pi} J_0(\beta) \right] \times \\ &\times [\sin(\omega_0 + 2\Omega_0)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_0)t]. \end{aligned}$$

Воспользуемся рекуррентной формулой из теории функций Бесселя

$$J_{n-1}(\beta) + J_{n+1}(\beta) = (2n/\beta) J_n(\beta)$$

и найдем

$$J_2(\beta) = (\beta/4) [J_1(\beta) + J_3(\beta)].$$

Так как при $\beta \ll 1$ $J_3(\beta) \ll J_1(\beta)$, то

$$J_2(\beta) = (\beta/4) J_1(\beta),$$

но $J_1(\beta) = (\beta/2)[J_0(\beta) + J_2(\beta)]$, а так как $J_2(\beta) \ll J_0(\beta)$, то

$$J_1(\beta) = (\beta/2) J_0(\beta);$$

$$J_2(\beta) = (\beta/4) J_1(\beta) = (\beta^2/8) J_0(\beta).$$

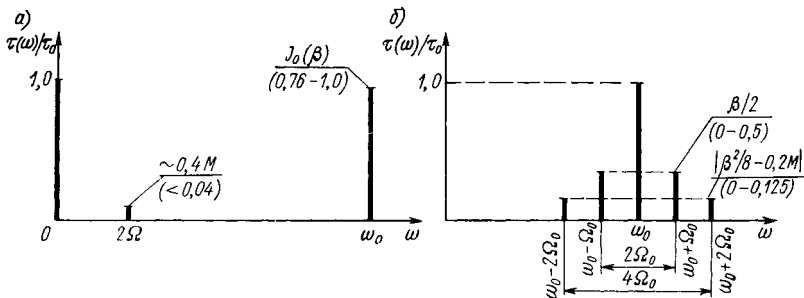


Рис. 175. Спектр амплитуд модулированного потока излучения при гармонических частотной и амплитудной модуляциях коэффициента пропускания раstra для $\beta \leq 1$; $M \leq 0,1$: а — низкочастотная часть спектра и первая гармоника; б — высокочастотная часть спектра

Следовательно,

$$J_2(\beta) - [2M/(3\pi)] J_0(\beta) = (\beta^2/8) J_0(\beta) - [2M/(3\pi)] J_0(\beta) = \\ = J_0(\beta) [\beta^2/8 - 2M/(3\pi)];$$

$$\tau(t)/\tau_0 \approx 1 - [4M/(3\pi)] \cos 2\Omega_0 t + J_0(\beta) \sin \omega_0 t + \\ + (\beta/2) J_0(\beta) [\sin(\omega_0 + \Omega_0)t - \sin(\omega_0 - \Omega_0)t] + \\ + [\beta^2/8 - 2M/(3\pi)] J_0(\beta) [\sin(\omega_0 + 2\Omega_0)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_0)t];$$

$$\tau(\omega) = \tau_0 - [4M\tau_0/(3\pi)] \cos 2\Omega_0 t + \tau_0 J_0(\beta) \{\sin \omega_0 t + (\beta/2)[\sin(\omega_0 + \Omega_0)t - \\ - \sin(\omega_0 - \Omega_0)t] + [\beta^2/8 - 2M/(3\pi)] [\sin(\omega_0 + 2\Omega_0)t + \sin(\omega_0 - 2\Omega_0)t]\}.$$

Спектр амплитуд модулированного сигнала для этого случая представлен на рис. 175. Как и в случае чисто частотной модуляции, отношение амплитуды первой боковой частоты a_1 к амплитуде первой гармоники A_1 равно

$$a_1/A_1 = \beta/2.$$

Отношение амплитуды второй боковой частоты a_2 к амплитуде первой гармоники A_1 равно

$$a_2/A_1 = \beta^2/8 - 2M/(3\pi).$$

Если обеспечены условия, когда $\beta \ll 1$ (например, $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$), то

$$a_2/A_1 = -2M/(3\pi) \approx -0,2M.$$

Пусть коэффициент пропускания раstra определяется гармонической функцией

$$\tau(t) = \tau_0 + \tau_1 \cos \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Предположим, что такой растр осуществляет модуляцию кратковременного импульса $\Phi_0(t)$ потока излучения, спектральная плотность которого равна $\tilde{\Phi}_0(f)$. Спектр Фурье модулированного растром излучения равен

$$\tilde{\Phi}(f) = \tau_0 \tilde{\Phi}_0(f) + (\tau_1/2) [\tilde{\Phi}_0(f - f_0) + \tilde{\Phi}_0(f + f_0)].$$

Пусть кратковременным импульсом потока излучения является прямоугольный импульс, т. е. на растр падает излучение Φ_0 в течение времени от момента $-t_{\text{вх}}/2$ до $+t_{\text{вх}}/2$. При этом момент времени $t = 0$ соответствует середине прямоугольного импульса и совпадает с максимумом пропускания раstra.

Спектр падающего на растр потока излучения равен

$$\tilde{\Phi}_0(f) = \Phi_0 t_{\text{вх}} \text{sa}(\pi f t_{\text{вх}}),$$

где $\text{sa}(\pi f t_{\text{вх}}) = (\sin \pi f t_{\text{вх}}) / (\pi f t_{\text{вх}})$.

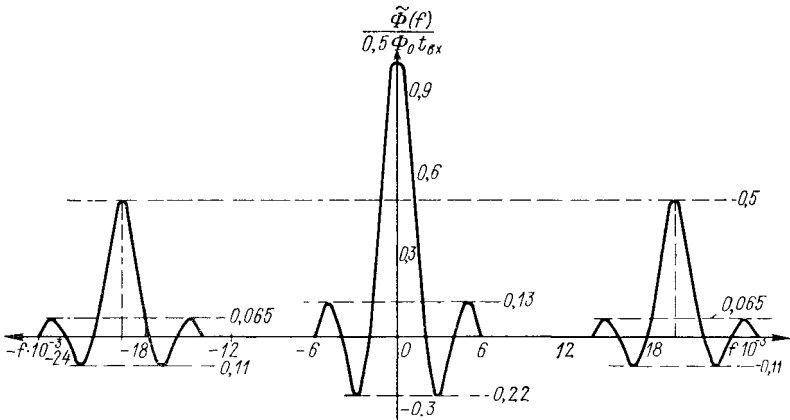


Рис. 176. Спектр прямоугольного импульса потока излучения, прошедшего через гармонический модулятор, для $f_0 = 20\,000$ Гц; $t_{\text{вх}} = 0,5 \cdot 10^{-3}$ с

Спектр модулированного потока излучения при максимальной глубине модуляции, когда $\tau_1 = \tau_0 = 0,5$, равен

$$\tilde{\Phi}(f) = 0,5 \Phi_0 t_{\text{вх}} \text{sa}(\pi f t_{\text{вх}}) + 0,25 \Phi_0 t_{\text{вх}} [\text{sa} \pi(f - f_0) t_{\text{вх}} + \text{sa} \pi(f + f_0) t_{\text{вх}}].$$

Вид спектра представлен на рис. 176.

Если момент времени, соответствующий центру импульса падающего потока излучения, сдвинут относительно момента времени,

соответствующего максимуму пропускания растра, на величину Δt , то спектр модулированного излучения окажется равным

$$\tilde{\Phi}(f) = \{0,5\Phi_0 t_{\text{вх}} \text{sa}(\pi f t_{\text{вх}}) + 0,25\Phi_0 t_{\text{вх}} [\text{sa} \pi t_{\text{вх}} (f - f_0) e^{j2\pi f_0 \Delta t} + \\ + \text{sa} \pi t_{\text{вх}} (f + f_0) e^{-j2\pi f_0 \Delta t}] \} e^{-j2\pi f \Delta t}.$$

Если $t_{\text{вх}} \gg 1/f_0$, сдвиг сигнала скажется в основном на взаимных фазовых сдвигах составляющих спектра, а не на модулях его спектральных плотностей.

Если же это условие не выполняется, например импульс падающего потока излучения очень короткий, т. е. $t_{\text{вх}} \rightarrow 0$, причем $\Phi_0 t_{\text{вх}} = Q$ — конечная величина, то, так как

$$\lim_{t_{\text{вх}} \rightarrow 0} \text{sa} \pi f t_{\text{вх}} = 1,$$

спектр модулированного потока излучения равен

$$\tilde{\Phi}(f) = (0,5Q + 0,25Q2 \cos 2\pi f_0 \Delta t) e^{-j2\pi f \Delta t} = \\ = 0,5Q e^{-j2\pi f \Delta t} (1 + \cos 2\pi f_0 \Delta t).$$

В этом случае сдвиг сигнала на время Δt прямо влияет на модуль спектра. Поскольку $Q e^{-j2\pi f \Delta t}$ представляет собой спектр бесконечно короткого импульса (δ -функции), приходящего в момент времени Δt , а $0,5(1 + \cos 2\pi f_0 \Delta t)$ — пропускание растра в этот же момент времени, указанное влияние имеет простую физическую интерпретацию.

§ 8.3. МОДУЛЯЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ВРАЩАЮЩИМСЯ СЕКТОРНЫМ РАСТРОМ (ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ)

Пусть растр представляет собой секторный диск, имеющий N прозрачных и N непрозрачных секторов и вращающийся со скоростью n , с^{-1} (рис. 177).

Так же, как и в общем случае, поток излучения, прошедший через растр к приемнику излучения, равен

$$\Phi(t) = \Phi_0(t) \tau(t),$$

где $\Phi_0(t)$ — поток, падающий на диафрагму и растр; $\tau(t)$ — интегральный коэффициент пропускания диафрагмы и растра.

Если $\tau(t)$ — четная функция, то

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \tau_p(\bar{z}, t) \tau_\phi(\bar{z}) d\sigma = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t.$$

Интересующий нас спектр потока излучения равен

$$\tilde{\Phi}(f) = 0,5A_0 \tilde{\Phi}_0(f) + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\tilde{\Phi}_0(f - kf_0) + \tilde{\Phi}_0(f + kf_0)].$$

Следовательно, для расчета спектра необходимо найти коэффициенты A_k разложения $\tau(t)$, т. е. вычислить $\tau(t)$ и прежде всего пропускание растра $\tau_p(\bar{z}, t)$ в точке с обобщенной координатой \bar{z} .

Положение точки \bar{z} в плоскости диафрагмы в данном случае удобно задать полярными координатами ρ , φ .

Предполагая, что пропускание секторного растра от радиус-вектора ρ не зависит, найдем

$$\tau_p(\bar{z}, t) = \tau_p(\varphi, t)$$

Зависимость от времени можно определить, вводя подвижную систему координат (ρ, φ') , связанную с растром. Так как за время t начало отсчета OO_1 займет положение OO_2 , повернувшись на угол $\Delta\varphi$, то $\varphi' = \varphi - \Delta\varphi$, причем из пропорции

$$2\pi - 1/n; \quad \Delta\varphi - t$$

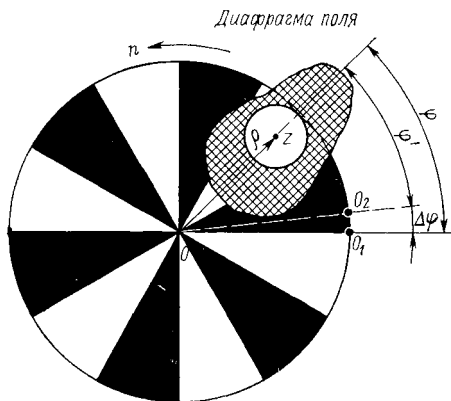


Рис. 177. Секторный растр, модулирующий излучение, прошедшее через диафрагму поля

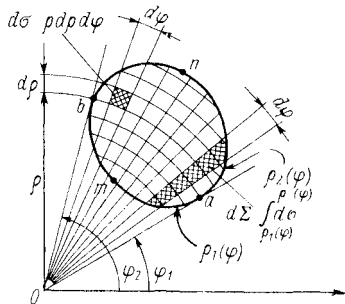


Рис. 178. Диафрагма поля и ее элементы в полярных координатах

имеем $\Delta\varphi = 2\pi n t = 2\pi t [\Omega_0/(2\pi)] = \Omega_0 t$, где $\Omega_0 = 2\pi n$ — угловая скорость вращения диска. Поэтому можно написать

$$\tau_p(\bar{z}, t) = \tau_p(\varphi, t) - \tau_p(\varphi') = \tau_p(\varphi - \Delta\varphi) = \tau_p(\varphi - \Omega_0 t)$$

Функцию $\tau_p(\varphi')$ можно представить рядом Фурье, так как это периодическая функция с периодом повторения, выраженным в угловой мере и равным $\varphi_T = 360^\circ/N = 2\pi/N$, где N — число периодов на всем растре, равное числу прозрачных (или непрозрачных) секторов.

Следовательно,

$$\tau_p(\varphi') = 0,5a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos 2\pi k \frac{\varphi'}{\varphi_T} + b_k \sin 2\pi k \frac{\varphi'}{\varphi_T} \right),$$

где

$$a_k = \frac{2}{\varphi_T} \int_{-\varphi_T/2}^{+\varphi_T/2} \tau_p(\varphi') \cos 2\pi k \frac{\varphi'}{\varphi_T} d\varphi';$$

$$b_k = \frac{2}{\varphi_T} \int_{-\varphi_T/2}^{+\varphi_T/2} \tau_p(\varphi') \sin 2\pi k \frac{\varphi'}{\varphi_T} d\varphi', \quad a_0 = \frac{2}{\varphi_T} \int_{-\varphi_T/2}^{+\varphi_T/2} \tau_p(\varphi') d\varphi'$$

Так как $\varphi' = \varphi - \Delta\varphi = \varphi - \Omega_0 t$, то

$$\tau_p(\varphi, t) = 0,5a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos 2\pi k \frac{\varphi - \Omega_0 t}{\varphi_T} + b_k \sin 2\pi k \frac{\varphi - \Omega_0 t}{\varphi_T} \right),$$

но

$$\cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} (\varphi - \Omega_0 t) = \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t + \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t;$$

$$\sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} (\varphi - \Omega_0 t) = \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t - \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \tau_p(\varphi, t) = 0,5a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} & \left[\left(a_k \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi + b_k \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi \right) \times \right. \\ & \left. \times \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t + \left(a_k \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi - b_k \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi \right) \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t \right]. \end{aligned}$$

Вычислим теперь интегральный коэффициент пропускания диафрагмы и раstra $\tau(t)$. В выбранной полярной системе координат он равен

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{(\sigma)} \tau_p(\varphi, t) \tau_\varphi(\varphi) d\sigma,$$

если допустить, что диафрагма имеет площадь σ и коэффициент пропускания, зависящий только от полярного угла φ . Это допущение, в свою очередь, означает, что освещенность диафрагмы σ падающим потоком излучения одинакова вдоль радиус-вектора ρ .

Для вычисления двойного интеграла по существующему правилу разобьем площадь диафрагмы координатными линиями $\rho = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ на элементарные части (рис. 178), площадь которых равна

$$d\sigma = \rho d\varphi d\rho.$$

Проводя суммирование сначала вдоль каждого элементарного сектора $d\Sigma$, а затем по всем секторам, определим

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{\varphi_1, \rho_1(\varphi)}^{\varphi_2, \rho_2(\varphi)} \tau_p(\varphi, t) \tau_\varphi(\varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 — угловые координаты границ диафрагмы; $\rho_1(\varphi)$ — уравнение внутренней части кривой, ограничивающей площадь σ (кривая *amb*); $\rho_2(\varphi)$ — уравнение внешней части кривой, ограничивающей площадь σ (кривая *anb*).

Следует заметить, что если полюс лежит внутри диафрагмы (рис. 179, а), то интегрирование производится в пределах:

$$\varphi_1 = -\pi; \quad \varphi_2 = +\pi; \quad \rho_1(\varphi) = 0; \quad \rho_2(\varphi) = \rho(\varphi).$$

В частном случае, когда полюс лежит на границе круглой диафрагмы (рис. 179, б), то

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\pi/2; \\ \varphi_2 &= +\pi/2. \end{aligned}$$

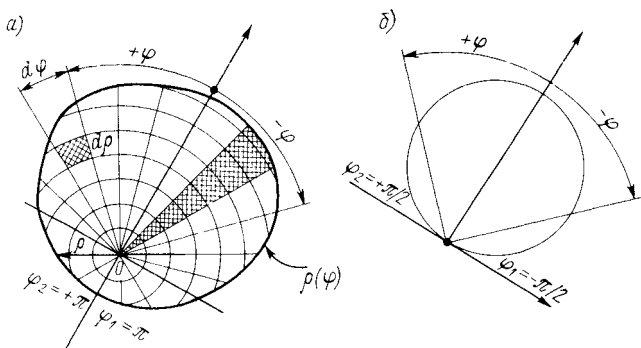


Рис. 179. Схемы относительного расположения диафрагмы и раstra: а — центр раstra (полюс) лежит внутри диафрагмы; б — полюс лежит на границе круглой диафрагмы

Следовательно,

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_p(\varphi, t) \tau_\Phi(\varphi) d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho = \frac{1}{\sigma} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_p(\varphi, t) \tau_\Phi(\varphi) d\Sigma,$$

где

$$d\Sigma = d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho = \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho d\varphi = 0,5 [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)] d\varphi,$$

т. е. $d\Sigma$ представляет площадь элементарного сектора (см. рис. 178).

Однако полученное для $\tau(t)$ выражение часто оказывается удобным представить в виде

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_p(\varphi, t) \tau_\Phi(\varphi) \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_p(\varphi, t) \tau_\Delta(\varphi) d\varphi.$$

где

$$\tau_\Delta(\varphi) = \frac{\tau_\Phi(\varphi)}{\sigma} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho = [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)] \tau_\Phi(\varphi) / (2\sigma).$$

Коэффициенту $\tau_\Delta(\varphi)$ можно придать смысл функции пропускания диафрагмы, так как он зависит от ее геометрии $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ и пропускания фильтра, ее закрывающего, $\tau_\Phi(\varphi)$.

Подставляя ранее вычисленное значение функции раstra $\tau_p(\varphi, t)$ в выражение для $\tau(t)$, найдем

$$\begin{aligned} \tau(t) = & 0,5a_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_\Delta(\varphi) d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_\Delta(\varphi) \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi d\varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_\Delta(\varphi) \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi d\varphi \right) \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t + \right. \\ & \left. + \left(a_k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_\Delta(\varphi) \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi d\varphi - b_k \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_\Delta(\varphi) \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \varphi d\varphi \right) \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0' t \right]. \end{aligned}$$

Вводя обозначения:

$$a_{0k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_{\text{д}}(\varphi) \cos \frac{2\pi k}{\varphi_f} \varphi d\varphi; \quad b_{0k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_{\text{д}}(\varphi) \sin \frac{2\pi k}{\varphi_f} \varphi d\varphi,$$

можно определить:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= 0,5a_0a_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_h a_{0k} + b_h b_{0k}) \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t + \right. \\ &\quad \left. + (a_h b_{0k} - b_h a_{0k}) \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t \right]; \\ \tau(t) &= 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t + B_k \sin \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t \right] = \\ &= 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k\omega_0 t + B_k \sin k\omega_0 t], \end{aligned}$$

где $A_k = a_h a_{0k} + b_h b_{0k}$; $B_k = a_h b_{0k} - b_h a_{0k}$; $A_0 = a_0 a_{00}$; $\omega_0 = N\Omega_0$; $\varphi_T = 2\pi/N$.

Если в начальный момент просвет раstra расположен симметрично относительно центра диафрагмы, то $\tau_0(\varphi')$ — функция четная и $b_h = 0$, а если $\tau_{\text{д}}(\varphi)$ — также функция четная, то $b_{0k} = 0$, тогда

$$A_k = a_h a_{0k}; \quad B_k = 0; \quad A_0 = a_0 a_{00};$$

$$\tau(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{2\pi k}{\varphi_T} \Omega_0 t = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t,$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0$ — частота модуляции.

Следовательно, спектр падающего на приемник потока излучения равен

$$\tilde{\Phi}(f) = 0,5A_0\tilde{\Phi}_0(f) + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\tilde{\Phi}_0(f - kf_0) + \tilde{\Phi}_0(f + kf_0)],$$

где $A_k = a_h a_{0k}$; $A_0 = a_0 a_{00}$, причем

$$\begin{aligned} a_h &= \frac{2}{\varphi_T} \int_{-\varphi_T/2}^{+\varphi_T/2} \tau_{\text{д}}(\varphi') \cos 2\pi k \frac{\varphi'}{\varphi_f} d\varphi' = \frac{N}{\pi} \int_{-\pi/(2N)}^{+\pi/(2N)} \tau_{\text{д}}(\varphi') \cos kN\varphi' d\varphi'; \\ a_{0k} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_{\text{д}}(\varphi) \cos 2\pi k \frac{\varphi}{\varphi_f} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_{\text{д}}(\varphi) \cos kN\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Если $\Phi_0(t) = \Phi_0 = \text{const}$, то

$$\Phi(t) = \Phi_0 \tau(t)$$

и спектр Фурье выразится через функции Дирака

$$\tilde{\Phi}(f) = 0,5A_0\Phi_0\delta(f) + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_0 A_k [\delta(f - kf_0) + \delta(f + kf_0)],$$

а амплитудный спектр будет представлен в виде

$$\Phi(f) = 0,5A_0\Phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_0 A_k \cos 2\pi k f_0 t.$$

Здесь $\Phi_0 = E\pi r^2$, где E — освещенность изображения; πr^2 — площадь круглого изображения.

§ 8.4. МОДУЛЯЦИЯ СЕКТОРНЫМ РАСТРОМ ИЗЛУЧЕНИЯ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО В ПРЕДЕЛАХ ЧАСТИ СЕКТОРА РАСТРА

Отверстие диафрагмы представляет собой часть сектора — щель с угловой шириной от $\varphi_1 = -\alpha_0$ до $\varphi_2 = +\alpha_0$ и высотой, ограниченной радиусами ρ_1 и ρ_2 (рис. 180). Отверстие не закрыто фильтром, т. е. $\tau_\phi(\varphi) = 1$, и, следовательно, падающий поток излучения распределен равномерно по отверстию диафрагмы. Растр состоит из N непрозрачных секторов, пропускание которых $\tau_p = 0$, и N прозрачных секторов, пропускание которых равно τ_p .

Полагая, что в начальный момент просвет растра расположен симметрично относительно краев отверстия диафрагмы в силу четности функций $\tau_p(\varphi)$ и $\tau_d(\varphi)$ (как это было сделано выше), найдем:

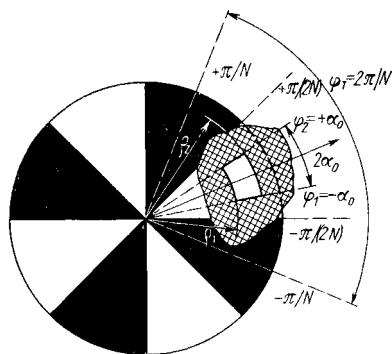


Рис. 180. Секторный растр с трапецидальной диафрагмой поля

$$\tau(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t;$$

$$A_k = a_k a_{0k}, \quad A_0 = a_0 a_{00};$$

$$a_k = \frac{2}{\varphi_T} \int_{-\varphi_T/2}^{+\varphi_T/2} \tau_p(\varphi) \cos 2\pi k \frac{\varphi}{\varphi_T} d\varphi; \quad a_0 = \frac{2}{\varphi_T} \int_{\varphi_T/2}^{+\varphi_T/2} \tau_p(\varphi) d\varphi;$$

$$a_{0k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_d(\varphi) \cos 2\pi k \frac{\varphi}{\varphi_T} d\varphi; \quad a_{00} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_d(\varphi) d\varphi.$$

Имея в виду, что $\varphi_T = 2\pi/N$, определим:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{N}{\pi} \int_{-\pi/N}^{+\pi/N} \tau_p(\varphi) \cos Nk\varphi d\varphi = \frac{N}{\pi} \int_{-\pi/N}^{-\pi/(2N)} \tau_p(\varphi) \cos Nk\varphi d\varphi + \\ &+ \frac{N}{\pi} \int_{-\pi/(2N)}^{+\pi/(2N)} \tau_p(\varphi) \cos Nk\varphi d\varphi + \frac{N}{\pi} \int_{+\pi/(2N)}^{+\pi/N} \tau_p(\varphi) \cos Nk\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку для непрозрачных участков раstra, ограниченных углами от $-\pi/N$ до $-\pi/(2N)$ и от $+\pi/(2N)$ до $+\pi/N$, $\tau_p(\varphi) = 0$, а для прозрачного участка $[\text{от } -\pi/(2N) \text{ до } +\pi/(2N)]$ $\tau_p(\varphi) = \tau_p$, то можно найти

$$a_k = \frac{N}{\pi} \tau_p \int_{-\pi/(2N)}^{+\pi/(2N)} \cos Nk\varphi d\varphi = \tau_p \operatorname{sa} k \frac{\pi}{2},$$

где $\operatorname{sa} x = (\sin x)/x$.

Далее определим:

$$a_0 = \tau_p \operatorname{sa}(0) = \tau_p;$$

$$\begin{aligned} a_{0k} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_p(\varphi) \cos 2\pi k \frac{\varphi}{\varphi_T} d\varphi = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2\sigma} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos Nk\varphi d\varphi = \\ &= \frac{(\rho_2^2 - \rho_1^2) \alpha_0}{\sigma} \operatorname{sa} Nk\alpha_0; \end{aligned}$$

$$a_{00} = [(\rho_2^2 - \rho_1^2)/\sigma] \alpha_0.$$

Так как площадь части кругового кольца, ограниченного радиусами ρ_1 , ρ_2 и центральным углом $2\alpha_0$ (площадь диафрагмы), равна

$$\sigma = (2\alpha_0/360^\circ) \pi (\rho_2^2 - \rho_1^2),$$

где угол $2\alpha_0$ выражен в градусах, то, выражая угол $2\alpha_0$ в радианах, найдем

$$\sigma = 2\alpha_0 (180/360) (\rho_2^2 - \rho_1^2) = \alpha_0 (\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

Следовательно,

$$a_{0k} = [(\rho_2^2 - \rho_1^2) \alpha_0 / \sigma] \operatorname{sa} Nk\alpha_0 = \operatorname{sa} Nk\alpha_0; \quad a_{00} = 1,$$

откуда

$$A_k = a_k a_{0k} = \tau_p \operatorname{sa}(k\pi/2) \operatorname{sa} kN\alpha_0; \quad A_0 = a_0 a_{00} = \tau_p.$$

Амплитуда первой гармоники

$$A_1 = \tau_p \operatorname{sa}(\pi/2) \operatorname{sa} N\alpha_0 = (2\tau_p/\pi) \operatorname{sa} N\alpha_0;$$

$A_1 = 0$ при $N\alpha_0 = m\pi$; $\alpha_0 = m(\pi/N) = m(\varphi_T/2)$, где m равно 1; 2; 3; 4; ..., т. е. $A_1 = 0$ в том случае, когда угловая ширина отверстия диафрагмы равна целому числу периодов раstra.

§ 8.5. МОДУЛЯЦИЯ СЕКТОРНЫМ РАСТРОМ ИЗЛУЧЕНИЯ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО В ПРЕДЕЛАХ КРУГЛОЙ ДИАФРАГМЫ ПОЛЯ

Отверстие диафрагмы представляет собой круг радиусом r , имеющий на расстоянии ρ_0 угловой размер $2\alpha_0$ (рис. 181). Отверстие не закрыто фильтром, т. е. $\tau_\Phi(\varphi) = 1$, и, следовательно, па-

дающий поток излучения распределен равномерно по отверстию диафрагмы. Растр состоит из N непрозрачных секторов, пропускание которых равно нулю, и N прозрачных секторов, пропускание которых равно τ_p . Полагая (как и в предыдущем случае), что в начальный момент времени просвет раstra расположен симметрично относительно краев отверстия диафрагмы (отсчет угла φ_0 произво-

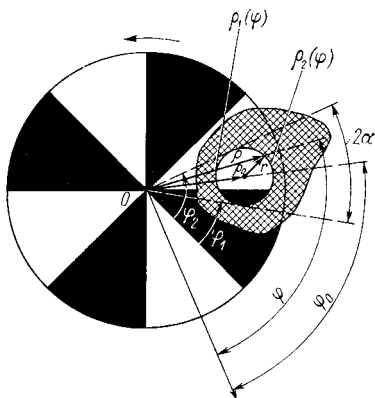


Рис. 181. Секторный растр с круглой диафрагмой поля

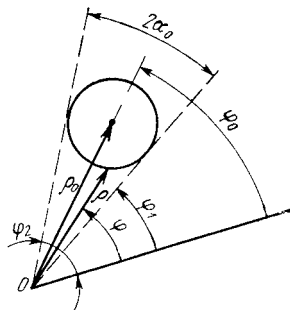


Рис. 182. Окружность в полярных координатах

дится от центра прозрачного сектора), в силу четности функций $\tau_p(\varphi)$ и $\tau_d(t)$, найдем:

$$\Phi(t) = \Phi_0(t) \tau(t);$$

$$\tilde{\Phi}(f) = 0,5 A_0 \tilde{\Phi}_0(f) + 0,5 \sum_{k=1}^{\infty} A_k [\tilde{\Phi}_0(f - kf_0) + \tilde{\Phi}_0(f + kf_0)];$$

$$\tau(t) = 0,5 A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\omega_0 t;$$

$$A_0 = a_0 a_{00}; A_k = a_k a_{0k}; a_k = \frac{2}{\varphi_T} \int_{-\varphi_T/2}^{+\varphi_T/2} \tau_p(\varphi) \cos 2\pi k \frac{\varphi}{\varphi_T} d\varphi;$$

$$a_{0k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_d(\varphi) \cos 2\pi k \frac{\varphi}{\varphi_T} d\varphi; a_{00} = [a_{0k}]_{k=0}; a_0 = [a_k]_{k=0}.$$

Поскольку $\varphi_T = 2\pi/N$, то $a_h = \tau_p \text{ sa}(k\pi/2)$; $a_0 = \tau_p$.

Далее найдем a_{0k} . Полагая, что полюс лежит вне диафрагмы, т. е. $\rho_0 > r$, имеем $\tau_d(\varphi) = [\rho_0^2(\varphi) - r^2]/(2\sigma)$. Так как уравнение окружности в полярных координатах (рис. 182) имеет вид

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (\rho_0^2 - r^2) = 0,$$

то $\rho_{2,1} = \rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \pm \sqrt{\rho_0^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) - (\rho_0^2 - r^2)}$,

откуда

$$\rho_2 + \rho_1 = 2\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0);$$

$$\rho_2 - \rho_1 = 2\sqrt{\rho_0^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) - (\rho_0^2 - r^2)};$$

$$\rho_2^2 - \rho_1^2 = (\rho_2 + \rho_1)(\rho_2 - \rho_1) = 4\rho_0 r \cos(\varphi - \varphi_0) \sqrt{1 - x_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)},$$

где $x_0 = \rho_0/r$.

Учитывая также, что $\sigma = \pi r^2$, получим

$$\tau_d(\varphi) = (\rho_2^2 - \rho_1^2)/(2\sigma) = (2/\pi) x_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \sqrt{1 - x_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}.$$

Соответственно,

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - x_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)} \cos(\varphi - \varphi_0) \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Последующий расчет может проводиться двумя путями.

Первый путь используется исключительно в случае, когда $x_0 = \rho_0/r > 1$.

Полученное выражение для a_{0k} приводим к виду

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} \cos Nk\varphi_0 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \left[Nk \arcsin \left(\frac{r}{\rho_0} \cos \theta \right) \right] d\theta.$$

Для этого прежде всего заметим, что при $x_0 = \rho_0/r > 1$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \alpha_0 = \varphi_0 - \arcsin(r/\rho_0);$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \alpha_0 = \varphi_0 + \arcsin(r/\rho_0).$$

Следовательно,

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \int_{\varphi_0 - \arcsin(r/\rho_0)}^{\varphi_0 + \arcsin(r/\rho_0)} \sqrt{1 - x_0^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)} \cos(\varphi - \varphi_0) \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Избавимся от φ_0 в пределах интегрирования. Для этого обозначим $\alpha = \varphi - \varphi_0$, тогда найдем

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \int_{-\arcsin(r/\rho_0)}^{+\arcsin(r/\rho_0)} \sqrt{1 - (x_0 \sin \alpha)^2} \cos \alpha \cos Nk(\alpha + \varphi_0) d\alpha.$$

Так как $\cos Nk(\alpha + \varphi_0) = \cos Nk\alpha \cos k\varphi_0 - \sin Nk\alpha \sin Nk\varphi_0$, а интеграл в симметричных пределах от выражения, включающего в себя в качестве сомножителя $\sin Nk\alpha$, равен нулю, то

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \cos Nk\varphi_0 \int_{-\arcsin(r/\rho_0)}^{+\arcsin(r/\rho_0)} \sqrt{1 - (x_0 \sin \alpha)^2} \cos \alpha \cos Nk\alpha d\alpha.$$

Избавимся от $\arcsin(r/\rho_0)$ в пределах интегрирования. Для этого обозначим $y = Nk \sin \alpha$, тогда получим

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \frac{\cos Nk\varphi_0}{Nk} \int_{-y_0}^{+y_0} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2} \cos \left(Nk \arcsin \frac{y}{Nk}\right) dy,$$

где $y_0 = Nk(r/\rho_0)$.

Обозначим далее

$$y/y_0 = \cos \theta.$$

Справедливость такой подстановки определяется условием $y/y_0 \leq 1$. Действительно,

$$y/y_0 = (Nk \sin \alpha) / [Nk(r/\rho_0)] = (\rho_0/r) \sin \alpha;$$

очевидно, что

$$(y/y_0)_{\max} = [(\rho_0/r) \sin \alpha]_{\max} = (\rho_0/r) \sin \alpha_{\max},$$

но максимальное значение α определяется пределами интегрирования, т. е.

$$\alpha_{\max} = \alpha_0 = \arcsin(r/\rho_0),$$

следовательно,

$$(\rho_0/r) \sin \alpha_{\max} = (\rho_0/r) \sin [\arcsin(r/\rho_0)] = 1$$

и $y/y_0 \leq 1$.

Если $y/y_0 = \cos \theta$, то $dy = -y_0 \sin \theta d\theta$, когда

$$y = +y_0; \quad \cos \theta = +1; \quad \theta = 0;$$

$$y = -y_0; \quad \cos \theta = -1; \quad \theta = \pi,$$

следовательно,

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \frac{\cos Nk\varphi_0}{Nk} \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \times \\ \times \cos \left[Nk \arcsin \left(\frac{y_0}{Nk} \cos \theta \right) \right] (-y_0 \sin \theta) d\theta.$$

Поменяв местами пределы интегрирования и имея в виду, что

$$y_0/Nk = r/\rho_0; \quad \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta,$$

найдем

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} \cos Nk\varphi_0 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \left[Nk \arcsin \left(\frac{r}{\rho_0} \cos \theta \right) \right] d\theta.$$

Это выражение весьма близко к значению функции Бесселя первого порядка

$$J_1(y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos(y_0 \cos \theta) d\theta.$$

Значения функции $2J_1(y_0)/y_0$

y_0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	1,0000	0,9988	0,9950	0,9888	0,9801	0,9691	0,9557	0,9400	0,9221	0,9021
1	0,8801	0,8562	0,8305	0,8031	0,7742	0,7439	0,7124	0,6797	0,6461	0,6117
2	0,5757	0,5412	0,5054	0,4695	0,4335	0,3977	0,3622	0,3271	0,2926	0,2589
3	0,2260	0,1941	0,1633	0,1337	0,1054	0,0785	0,0530	0,0291	0,0067	—0,0140
4	—0,0330	—0,0504	—0,0660	—0,0800	—0,0922	—0,1027	—0,1115	—0,1188	—0,1244	—0,1284
5	—0,1310	—0,1322	—0,1320	—0,1306	—0,1279	—0,1242	—0,1194	—0,1137	—0,1073	—0,1000
6	—0,0922	—0,0839	—0,0751	—0,0661	—0,0568	—0,0473	—0,0379	—0,0285	—0,0192	—0,0101
7	—0,0013	0,0071	0,0151	0,0226	0,0296	0,0361	0,0419	0,0471	0,0516	0,0555
8	0,0587	0,0611	0,0629	0,0640	0,0645	0,0643	0,0634	0,0620	0,0600	0,0575
9	0,0545	0,0511	0,0473	0,0431	0,0386	0,0340	0,0291	0,0240	0,0189	0,0138
10	0,0087	0,0036	—0,0013	—0,0061	—0,0107	—0,0150	—0,0191	—0,0229	—0,0263	—0,0294
11	—0,0321	—0,0345	—0,0364	—0,0379	—0,0390	—0,0397	—0,0400	—0,0399	—0,0394	—0,0385
12	—0,0372	—0,0357	—0,0338	—0,0316	—0,0291	—0,0265	—0,0236	—0,0206	—0,0174	—0,0141
13	—0,0108	—0,0075	—0,0041	—0,0008	0,0025	0,0056	0,0087	0,0116	0,0143	0,0168
14	0,0191	0,0211	0,0229	0,0244	0,0257	0,0267	0,0274	0,0278	0,0279	0,0278
15	0,0273	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Для того чтобы достигнуть полного соответствия, представим аргумент, стоящий под знаком косинуса в подынтегральном выражении для a_{0k} , в виде ряда. Для $|(r/\rho_0) \cos \theta| < 1$ имеем

$$Nk \arcsin \left(\frac{r}{\rho_0} \cos \theta \right) = Nk \left[\frac{r}{\rho_0} \cos \theta + \frac{[(r/\rho_0) \cos \theta]^3}{6} + \dots \right] \approx \\ \approx Nk \frac{r}{\rho_0} \cos \theta = y_0 \cos \theta,$$

где $y_0 = Nk (r/\rho_0)$, тогда

$$a_{0k} \approx \cos Nk\varphi_0 [2J_1(y_0)/y_0].$$

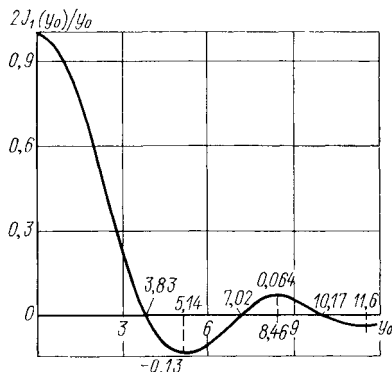


Рис. 183. График функции $2J_1(y_0)/y_0$

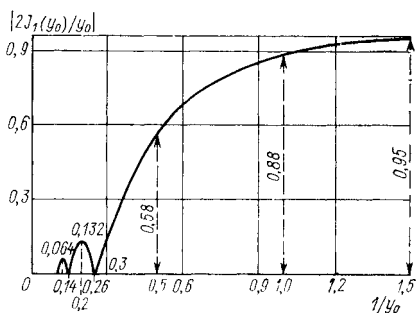


Рис. 184. Зависимость $|2J_1(y_0)/y_0|$ от $1/y_0$

Так как выбор начала координат произволен, то при $\varphi_0 = 0$ имеем

$$a_{0k} \approx 2J_1(y_0)/y_0.$$

График функции $2J_1(y_0)/y_0$ приведен в табл. 4 и на рис. 183.

Экстремальные значения функции $2J_1(y_0)/y_0$, а также ее значения, равные нулю, соответствуют следующим значениям аргумента y_0 :

y_0	0	3,83	5,14	7,02	8,46
$2J_1(y_0)/y_0$	1 (max)	0	-0,132 (min)	0	0,064 (max)
y_0	10,17		11,62	13,32	14,8
$2J_1(y_0)/y_0$	0		-0,04 (min)	0	0,028 (max)

Так как при $y_0 = 0$ функция $2J_1(y_0)/y_0 = 1$, то

$$a_{00} = 1; A_k = a_k a_{0k} = \tau_p \operatorname{sa} k(\pi/2) [2J_1(y_0)/y_0]; A_0 = a_0 a_{00} = \tau_p.$$

Амплитуда первой гармоники спектра модулированного потока излучения

$$A_1 = (2/\pi) \tau_p [2J_1(y_0)/y_0]$$

равна нулю, когда

$$2J_1(y_0)/y_0 = 0,$$

т. е. для y , равного 3,83; 7,02; 10,17; 13,32; ..., или для ρ_0/r , равного $N/3,83$; $N/7,02$; $N/10,17$; $N/13,32$; ...

Так как все выводы справедливы при $\rho_0/r > 1$, то, например, для $N = 10$ можно найти лишь значение первого и второго нуля, для которых $(\rho_0/r)_1 = 10/3,83 = 2,86$; $(\rho_0/r)_2 = 10/7,02 = 1,42$. На рис. 184 приведена зависимость $|2J_1(y_0)/y_0|$ от $1/y_0$, которая может быть основой для расчета амплитуды k -й гармоники

$$A_k = \tau_p \operatorname{sa} k(\pi/2) |2J_1(y_0)/y_0|$$

для значений $x_0 = \rho_0/r = kN(1/y_0)$.

В частности, заметим, что при $\tau_p = 1$; $k = 1$; $N = 1$, когда $x_0 = \rho_0/r = 1/y_0 = 1$, амплитуда первой гармоники, вычисленная по полученной приближенной формуле, равна

$$A_1 = (2/\pi) [2J_1(1)/1] = 0,635 \cdot 0,88 = 0,56.$$

Так как при $N = 1$ величина $x_0 = 1/y_0$, то использовать зависимость, представленную на рис. 184, можно в этом случае лишь начиная со значений $1/y_0 \geq 1,0$. Соответственно при $N = 2$ имеем $1/y_0 \geq 0,5$, при $N = 3$ имеем $1/y_0 \geq 0,33$ и т. д.

Второй путь расчета a_{0k} используется, когда ρ_0/r принимает значения как больше, так и меньше единицы. Для того чтобы вычислить амплитуду первой гармоники не только при $\rho_0/r > 1$, но и при $\rho_0/r < 1$, обратимся к исходному выражению для a_{0k} , приняв сразу же $\varphi_0 = 0$ для упрощения промежуточных преобразований.

В этом случае

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 - x_0^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Если $x_0 = \rho_0/r \geq 1$, то

$$\varphi_1 = -\alpha_0 = -\arcsin(r/\rho_0); \quad \varphi_2 = +\alpha_0 = +\arcsin(r/\rho_0).$$

Так как подынтегральное выражение — четная функция φ , получим

$$a_{0k} = \frac{4}{\pi} x_0 \int_0^{\alpha_0} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Для вычисления полученного интеграла разложим $\sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2}$ в ряд. Для этого рассмотрим максимальное значение величины $x = (x_0 \sin \varphi)^2$. Очевидно, что $x = x_{\max}$ при $\varphi = \varphi_{\max}$, но $\varphi_{\max} = \alpha_0 = \arcsin(r/\rho_0)$, т. е.

$$x_{\max} = \{(\rho_0/r) \sin \varphi_{\max}\}^2 = \{(\rho_0/r) \sin [\arcsin(r/\rho_0)]\}^2 = 1,$$

следовательно, $x \leq 1$.

Так как в этом случае

$$\sqrt{1 - x} = 1 - x/2 - x^2/8 - x^3/16 - \dots,$$

то можно найти:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} &= 1 - (1/2)(x_0 \sin \varphi)^2 - (1/8)(x_0 \sin \varphi)^4 - \\ &\quad - (1/16)(x_0 \sin \varphi)^6 - \dots; \\ a_{0k} &= (4/\pi) x_0 [J_1 - (J_2 + J_3 + J_4 + \dots)], \end{aligned}$$

где

$$J_1 = \int_0^{\alpha_0} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi; \quad J_2 = \frac{x_0^2}{2} \int_0^{\alpha_0} \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi;$$

$$J_3 = \frac{x_0^4}{8} \int_0^{\alpha_0} \sin^4 \varphi \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi; \quad J_4 = \frac{x_0^6}{16} \int_0^{\alpha_0} \sin^6 \varphi \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi \dots$$

Имея в виду, что

$$\cos \varphi \cos Nk\varphi = (1/2) [\cos (Nk - 1) \varphi + \cos (Nk + 1) \varphi];$$

$$\sin^2 \varphi = (1/2) (1 - \cos 2\varphi);$$

$$\sin^4 \varphi = (1/8) (3 + \cos 4\varphi - 4 \cos 2\varphi);$$

$$\sin^6 \varphi = (1/16) [5 - (9/2) \cos 2\varphi - 6 \sin \varphi \sin 3\varphi - (1/2) \cos 6\varphi],$$

можно найти

$$a_{0k} = \frac{4}{\pi} x_0 [J_1 - (J_2 + J_3 + J_4 + \dots)] \approx$$

$$\approx \frac{2}{\pi} x_0 \alpha_0 \left\{ \left(1 - \frac{x_0^2}{8} - \frac{x_0^4}{64} - \frac{5x_0^6}{1024} \right) [\text{sa}(Nk - 1) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 1) \alpha_0] + \right.$$

$$+ \left(\frac{x_0^2}{8} + \frac{3x_0^4}{128} + \frac{9x_0^6}{1024} \right) [\text{sa}(Nk - 3) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 3) \alpha_0] -$$

$$- \left(\frac{x_0^4}{128} + \frac{5x_0^6}{1024} \right) [\text{sa}(Nk - 5) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 5) \alpha_0] +$$

$$\left. + \frac{x_0^6}{1024} [\text{sa}(Nk - 7) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 7) \alpha_0] \right\}.$$

При $k = 1$

$$a_{01} \approx \frac{2}{\pi} x_0 \alpha_0 \left\{ \left(1 - \frac{x_0^2}{8} - \frac{x_0^4}{64} - \frac{5x_0^6}{1024} \right) [\text{sa}(N - 1) \alpha_0 + \text{sa}(N + 1) \alpha_0] + \right.$$

$$+ \left(\frac{x_0^2}{8} + \frac{3x_0^4}{128} + \frac{9x_0^6}{1024} \right) [\text{sa}(N - 3) \alpha_0 + \text{sa}(N + 3) \alpha_0] -$$

$$- \left(\frac{x_0^4}{128} + \frac{5x_0^6}{1024} \right) [\text{sa}(N - 5) \alpha_0 + \text{sa}(N + 5) \alpha_0] +$$

$$\left. + \frac{x_0^6}{1024} [\text{sa}(N - 7) \alpha_0 + \text{sa}(N + 7) \alpha_0] \right\},$$

где $\alpha_0 = \arcsin(1/x_0)$; $x_0 = \rho_0/r \geq 1$.

Амплитуда первой гармоники модулированного сигнала равна

$$A_1 = a_1 a_{01} = \tau_p (2/\pi) a_{01}.$$

В табл. 5 приведены значения коэффициента $a'_{01} = (\pi/2) a_{01}$ для различных значений N и x_0 . Зная коэффициент, легко найти амплитуду первой гармоники, которая при $\tau_p = 1$ равна $A_1 = (4/\pi^2) a'_{01} \approx 0,4 a_{01}$.

Значения коэффициента α'_{01}

x_0	N														
	1	2	3	4	5	7	8	10	11	12	15				
1,0	1,34223	0,76468	0,24697	0,00631	—0,01994	0,00154	—0,00541	0,00494	—0,00300	—0,00375	0,00000				
1,5	1,49975	1,22809	0,85199	0,46041	0,13559	—0,14700	—0,12193	0,03108	0,07194	0,06713	—0,04561				
2,0	1,54482	1,39028	1,15623	0,87368	0,57838	0,08130	—0,07485	—0,19570	—0,14245	—0,08093	0,08072				
2,5	1,56471	1,46535	1,30926	1,10962	0,88284	0,41940	0,21591	—0,07530	—0,15240	—0,18612	—0,09715				
3,0	1,57529	1,50613	1,39541	1,24962	1,07713	0,69139	0,49860	0,18932	0,02678	—0,07520	—0,19424				
3,5	1,58160	1,53072	1,44836	1,33806	1,20450	0,89044	0,72251	0,39670	0,25005	0,12054	—0,13806				
4,0	1,58567	1,54668	1,48312	1,39709	1,29138	1,03495	0,89227	0,50916	0,45720	0,32336	0,00008				
4,5	1,58844	1,55762	1,50713	1,43830	1,35288	1,14134	1,02049	0,76329	0,63249	0,50515	0,16405				
5,0	1,59042	1,56544	1,52440	1,46814	1,39785	1,22122	1,11848	0,89434	0,77741	0,65985	0,32584				
5,5	1,59189	1,57124	1,53722	1,49042	1,43165	1,28239	1,19444	0,99914	0,80496	0,78866	0,47267				
6,0	1,59300	1,57564	1,54699	1,50747	1,45766	1,33012	1,25423	1,04350	0,99103	0,89538	0,40305				
6,5	1,59386	1,57907	1,55462	1,52082	1,47808	1,36799	1,30199	1,15202	1,05984	0,98412	0,71558				
7,0	1,59454	1,58179	1,56068	1,53144	1,49439	1,39850	1,34066	1,20822	1,13498	1,05804	0,81252				
7,5	1,59509	1,58398	1,56557	1,54005	1,50763	1,42340	1,37237	1,25476	1,13926	1,12005	0,89639				
8,0	1,59554	1,58578	1,56958	1,54710	1,51851	1,44399	1,39866	1,29367	1,23485	1,17242	0,96842				
8,5	1,59592	1,58726	1,57291	1,55796	1,52755	1,46118	1,42068	1,32647	1,27344	1,21694	1,03067				
9,0	1,59623	1,58851	1,57570	1,55788	1,53517	1,47569	1,43929	1,35436	1,30635	1,25505	1,08465				
9,5	1,59650	1,58957	1,57806	1,56205	1,54163	1,48803	1,45516	1,37424	1,33462	1,28788	1,13166				
10,0	1,59672	1,59047	1,58008	1,56562	1,54715	1,49862	1,46830	1,39884	1,35906	1,31633	1,17278				

Таблица 6

Значения $x_0 = \rho_0/r$, при которых амплитуда первой гармоники равна нулю

N	Число нулей	x_0
1; 2, 3; 4	0	—
5	1	1,34395
7	2	1,17069; 1,87729
8	3	1,04671; 1,29543; 2,14228
10	4	1,03450; 1,18736; 1,55986; 2,67244
11	5	1,00000; 1,07890; 1,26881; 1,69644; 2,93771
12	5	1,02519; 1,13694; 1,35441; 1,83482; 3,20309
13	6	1,04389; 1,13946; 1,31293; 1,62590; 2,25677; 3,99976

Таблица 7

Значения амплитуд первой гармоники, полученных различными способами

x_0	$N = 1$		$N = 2$		$N = 3$		$N = 10$	
	A'_1	A''_1	A'_1	A''_1	A'_1	A''_1	A'_1	A''_1
1,0	0,54	0,56	0,30	0,37	0,10	0,15	0,003	0,005
2,0	0,62	0,62	0,55	0,56	0,46	0,47	—0,08	—0,08
5,0	0,64	0,64	0,62	0,63	0,61	0,61	0,36	0,37
10,0	0,64	0,64	0,64	0,64	0,63	0,63	0,56	0,56

Значения x_0 , при которых амплитуда первой гармоники равна нулю, приведены в табл. 6.

Сопоставление значений A_1 , вычисленных из соотношения $A_1 = A'_1 = 0,4a'_{01}$, со значениями A_1 , найденными из формулы $A_1 = A''_1 = 0,64[2J_1(y_0)/y_0]$, дает хорошее совпадение результатов. Действительно, для x_0 , равного 1; 2; 5; 10 и N , равного 1; 2; 3; 10, имеем значения, приведенные в табл. 7.

Полученное вторым способом расчета выражение для a_{0k} при $x_0 \geq 1$ неудобно для анализа вследствие своей громоздкости. Однако при $x_0 \leq 1$ этот способ является единственно возможным.

Действительно в этом случае имеем:

$$\varphi_1 = -\pi; \quad \varphi_2 = +\pi; \quad \rho_1(\varphi) = 0;$$

$$\rho_2(\varphi) = \rho(\varphi) = \rho_0 \cos \varphi + r \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau_d(\varphi) &= [\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)]/2\sigma = \\ &= (1/2\sigma) [\rho_0^2 \cos 2\varphi + r^2 + 2\rho_0 r \cos \varphi \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2}]; \end{aligned}$$

$$a_{0k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_{\text{д}}(\varphi) \cos Nk\varphi d\varphi = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [1 + x_0^2 \cos 2\varphi + 2x_0 \cos \varphi \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2}] \cos Nk\varphi d\varphi;$$

где

$$a_{0k} = (1/\pi) [J_1 + J_2 + J_3], \\ J_1 = \int_0^{\pi} \cos Nk\varphi d\varphi; \\ J_2 = x_0^2 \int_0^{\pi} \cos 2\varphi \cos Nk\varphi d\varphi; \\ J_3 = 2x_0 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Рассмотрим эти интегралы:

$$J_1 = \varphi \operatorname{sa}(Nk\varphi) \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} \pi & \text{при } Nk = 0; \\ 0 & \text{при } Nk \neq 0; \end{cases} \\ J_2 = (x_0^2 \pi / 2) [\operatorname{sa}(Nk - 2)\varphi + \operatorname{sa}(Nk + 2)\varphi] \Big|_0^{\pi} = \\ = \begin{cases} x_0^2 (\pi / 2) & \text{при } Nk = 2; \\ 0 & \text{при } Nk \neq 2; \end{cases} \\ J_3 = 2x_0 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi + \\ + 2x_0 \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Во втором слагаемом интеграла J_3 сделаем замену переменной $\varphi = \pi - \theta$:

$$2x_0 \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - (x_0 \sin \theta)^2} (-1) \cos \theta [\cos Nk\pi \cos Nk\theta + \\ + \sin Nk\pi \sin Nk\theta] (-1) d\theta.$$

Анализ полученного выражения показывает, что

$$\sin Nk\pi = 0 \text{ — при любом целом } Nk; \\ \cos Nk\pi = \begin{cases} +1 & \text{при } Nk \text{ четном;} \\ -1 & \text{при } Nk \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$(-1) \cos Nk\pi = \begin{cases} -1 & \text{при } Nk \text{ четном;} \\ +1 & \text{при } Nk \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$J_3 = 2x_0 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi + \\ + (\mp 1) 2x_0 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi,$$

причем $J_3 = 0$ при Nk , равном 0; 2; 4; 6; ...;

$$J_3 = 4x_0 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi$$

при Nk , равном 1; 3; 5; 7...

Так как $\sqrt{1-x} = 1 - x/2 - x^2/8 - x^3/16 - \dots$, то

$$J_3/4x_0 = J'_3 - (J''_3 + J'''_3 + J^{IV}_3 + \dots),$$

где

$$J'_3 = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi; \\ J''_3 = x_0^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi; \\ J'''_3 = \frac{x_0^4}{8} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi; \\ J^{IV}_3 = \frac{x_0^6}{16} \int_0^{\pi/2} \sin^6 \varphi \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Вычислим первый интеграл

$$J'_3 = \frac{\pi}{4} \left[\operatorname{sa} (Nk - 1) \frac{\pi}{2} + \operatorname{sa} (Nk + 1) \frac{\pi}{2} \right].$$

Так как Nk — нечетное, то $Nk + 1$ — четное, $(Nk + 1)/2 = m$ — целое, следовательно, $\operatorname{sa} [(Nk + 1) \pi/2] = \operatorname{sa} m\pi = 0$ и

$$J'_3 = \frac{\pi}{4} \operatorname{sa} (Nk - 1) \frac{\pi}{2} = \\ = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{при } Nk = 1; \\ 0 & \text{при } Nk \neq 1. \end{cases}$$

Вычислим второй интеграл

$$J_3'' = \frac{x_0^2}{8} \pi \left[\operatorname{sa}(Nk - 1) \frac{\pi}{2} - \operatorname{sa}(Nk - 3) \frac{\pi}{2} - \right. \\ \left. - \operatorname{sa}(Nk + 3) \frac{\pi}{2} + \operatorname{sa}(Nk + 1) \frac{\pi}{2} \right].$$

Так как $(Nk + 1) \pi/2 = m\pi$; $\operatorname{sa}(Nk + 1) \pi/2 = 0$; $(Nk + 3) \pi/2 = m\pi$; $\operatorname{sa}(Nk + 3) \pi/2 = 0$, следовательно,

$$J_3'' = x_0^2 \frac{\pi}{8} \left[\operatorname{sa}(Nk - 1) \frac{\pi}{2} - \operatorname{sa}(Nk - 3) \frac{\pi}{2} \right] = \\ = \begin{cases} x_0^2 \frac{\pi}{8} & \text{при } Nk = 1; \\ -x_0^2 \frac{\pi}{8} & \text{при } Nk = 3; \\ 0 & \text{при } Nk = 5; 7; 9; \dots \end{cases}$$

При вычислении третьего интеграла будем иметь в виду, что $\operatorname{sa}(Nk + 1, 3, 5) \pi/2 = 0$, тогда найдем

$$J_3''' = \frac{x_0^4}{128} \pi \left[\operatorname{sa}(Nk - 1) \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \operatorname{sa}(Nk - 3) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sa}(Nk - 5) \frac{\pi}{2} \right] = \\ = \begin{cases} \frac{x_0^4}{128} \pi & \text{при } Nk = 1; \\ -\frac{3x_0^4}{256} \pi & \text{при } Nk = 3; \\ \frac{x_0^4}{256} \pi & \text{при } Nk = 5; \\ 0 & \text{при } Nk = 7; 9; 11; \dots \end{cases}$$

Для четвертого интеграла аналогичным путем получим

$$J_3^{IV} = \frac{x_0^6}{2048} \pi \left[5 \operatorname{sa}(Nk - 1) \frac{\pi}{2} - 9 \operatorname{sa}(Nk - 3) \frac{\pi}{2} + \right. \\ \left. + 5 \operatorname{sa}(Nk - 5) \frac{\pi}{2} - \operatorname{sa}(Nk - 7) \frac{\pi}{2} \right] = \\ = \begin{cases} \frac{5x_0^6}{2048} \pi & \text{при } Nk = 1; \\ -\frac{9x_0^6}{2048} \pi & \text{при } Nk = 3; \\ \frac{5x_0^6}{2048} \pi & \text{при } Nk = 5; \\ -\frac{x_0^6}{2048} \pi & \text{при } Nk = 7; \\ 0 & \text{при } Nk = 9; 11; 13; \dots \end{cases}$$

Следовательно,

$$J_3 = \begin{cases} 0 & \text{при } Nk = 0; 2; 4; 6; \dots; \\ x_0\pi - \frac{x_0^3}{2}\pi - \frac{x_0^5}{32}\pi - \frac{5x_0^7}{512}\pi - \dots & \text{при } Nk = 1; \\ \frac{x_0^3}{2}\pi + \frac{3x_0^5}{64}\pi - \frac{9x_0^7}{512}\pi + \dots & \text{при } Nk = 3; \\ -\frac{x_0^5}{64}\pi - \frac{5x_0^7}{512}\pi - \dots \approx 0 & \text{при } Nk = 5; \\ \frac{x_0^7}{512}\pi + \dots \approx 0 & \text{при } Nk = 7; \\ \approx 0 & \text{при } Nk = 9; 11; 13; \dots \end{cases}$$

Так как $a_{0k} = (1/\pi) (J_1 + J_2 + J_3)$, то при $x_0 \ll 1$ в результате вычислений соответствующих интегралов можно найти следующие значения a_{0k} при различных Nk :

$$\begin{array}{cccccccccccc} Nk & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 & 3 & 4; 5; 6; 7; 8; 9; \dots \\ a_{0k} & \dots & \dots & \dots & x_0 - x_0^3/2 & x_0^2/2 & x_0^3/2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Случай, когда $Nk = 0$, не имеет смысла, так как $k \neq 0$, а при $N = 0$ модуляция отсутствует.

Амплитуда первой гармоники модулированного потока излучения будет равна

$$A_1 = \tau_p(2/\pi) a_{01}.$$

В табл. 8 приведены значения коэффициента $a'_{01} = (\pi/2) a_{01}$ для различных значений x_0 и N . Пользуясь этим коэффициентом, можно рассчитать амплитуду первой гармоники, которая при $\tau_p = 1$ равна

$$A_1 = (4/\pi^2) a'_{01} \approx 0,4a'_{01}.$$

В частности, при $\tau_p = 1$ и $N=1$

$$A_1 = (2/\pi) x_0 [1 - (x_0^2/2)],$$

если $x_0 = 1$, $A_1 = 1/\pi \approx 0,32$.

Расхождения в значениях амплитуды первой гармоники, полученные при различных способах вычисления, объясняются тем, что случай, когда $x_0 = 1$, является граничным, и ему свойственны наибольшие ошибки, связанные с принятыми в расчетах приближениями. Между тем рассчитать точные значения амплитуды первой гармоники при $x_0 = 1$ не представляет трудностей, так как в общем случае

$$a_{01} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_d(\varphi) \cos N\varphi d\varphi,$$

Т а б л и ц а 8
Значения коэффициента a'_{01}

x_0	N			
	1	2	3	4; 5;...
1,0	0,80	0,80	0,80	0
0,9	0,85	0,63	0,56	0
0,8	0,85	0,50	0,41	0
0,7	0,82	0,38	0,27	0
0,6	0,77	0,28	0,17	0
0,5	0,69	0,19	0,097	0
0,4	0,58	0,12	0,050	0
0,3	0,46	0,071	0,021	0
0,2	0,31	0,031	0,0063	0
0,1	0,157	0,0078	0,00078	0
0	0	0	0	0

где при $x_0 \geq 1$

$$\tau_d(\varphi) = (2/\pi) x_0 \cos \varphi \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2};$$

при $x_0 \leq 1$

$$\tau_d(\varphi) = (1/2\pi) [x_0^2 \cos 2\varphi + 1 + 2x_0 \cos \varphi \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2}];$$

при $x_0 = 1$

$$\tau_d(\varphi) = (2/\pi) \cos^2 \varphi.$$

Так как в этом случае $\varphi_1 = -\pi/2$, $\varphi_2 = +\pi/2$, то можно найти

$$a_{01} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \varphi \cos N\varphi d\varphi.$$

Вычисление полученного интеграла приводит к следующему выражению:

$$a_{01} = \text{sa}(N\pi/2) + 0,5 \text{sa}[(N-2)\pi/2] + 0,5 \text{sa}[(N+2)\pi/2].$$

Сопоставим все полученные значения амплитуды первой гармоники для $x_0 = 1$ (табл. 9).

Наиболее близки к точному значению приближения ряда при $x_0 \geq 1$. Существенные расхождения получаются для приближения ряда при $x_0 \leq 1$ для $N=1$ и $N=3$.

Таблица 9

Значения амплитуд первой гармоники

N	Точное значение	Значения, полученные из приближенных формул		
		Приближение к функции Бесселя при $x_0 \geq 1$	ряд при $x_0 \geq 1$	ряд при $x_0 \leq 1$
1	0,54	0,56	0,54	0,32
2	0,32	0,37	0,30	0,32
3	0,11	0,15	0,10	0,32
4	0	-0,02	0,0025	0
5	-0,016	-0,08	-0,008	0

Кривые коэффициентов a'_{01} , вычисленных по приближенным формулам, представлены на рис. 185. Штриховой линией показана аппроксимация тех участков соответствующих кривых, где имеют место максимальные расхождения различных приближений. Для $x_0 \leq 1$ и $N > 3$ коэффициент $a'_{01} = 0$ для четных N — точно, для нечетных — приближенно.

В заключение рассмотрим причины расхождения вычисленных разными методами значений отношения $(\rho_0/r)_0$,

при которых амплитуда первой гармоники модулированного сигнала равна нулю. Как было показано в § 7.2, минимальное значение глубины амплитудной модуляции шестисекторным растром имеет место при $(\rho_0/r)_0$, равном 1,0; 1,15; 2,0. Между тем амплитуда первой гармоники равна нулю, когда $2J_1(y_0)/y_0 = 0$, т. е. для $y_0 = [N/(\rho_0/r)_0]$, равного 3,83; 7,02; 10,17, или при $(\rho_0/r)_0$, равном $N/3,83$; $N/7,02$; $N/10,17$. Если $N = 6$, то $(\rho_0/r)_0$ равно 0,59; 0,85; 1,56.

Так как значения $(\rho_0/r)_0 < 1,0$ нельзя принимать во внимание в силу ранее рассмотренных ограничений, то сравнению подлежат

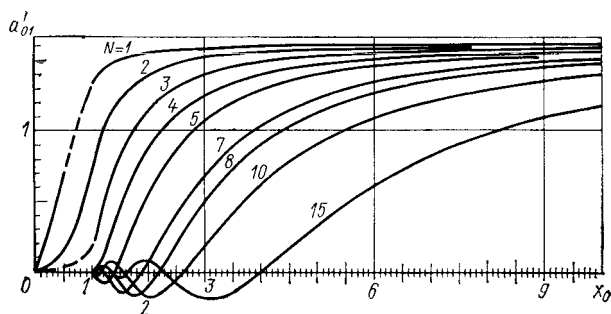


Рис. 185. Графики изменения коэффициентов a'_{01} ($A_1 = 0,4a'_{01}$)

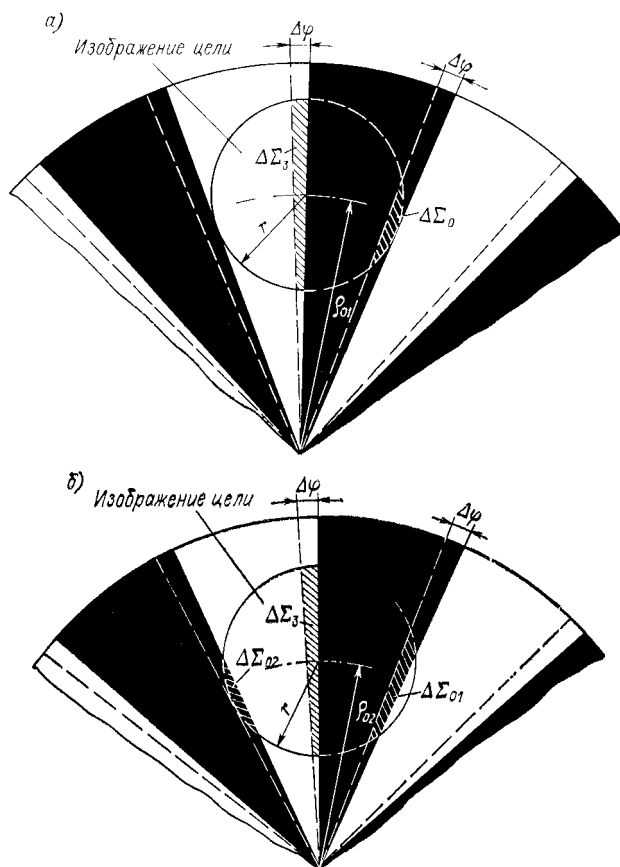


Рис. 186. Эффект поворота секторного раstra на малый угол $\Delta\varphi$ а — $\rho_{01} = 2r$, $\Delta\Sigma_s > \Delta\Sigma_0$; б — $\rho_{02} < 2r$, $\Delta\Sigma_s = \Delta\Sigma_{01} + \Delta\Sigma_{02}$

лишь два значения: $(\rho_0/r)_0 = 2,0$ и $(\rho_0/r)_0 = 1,56$. Причина их расхождения заключается в том, что форма изображения цели (круг) не соответствует форме просветов раstra (часть сектора), поэтому условие заполнения изображением цели четного числа секторов, принятое при вычислении $(\rho_0/r)_0 = 2,0$, недостаточно: при повороте раstra на малый угол $\Delta\varphi$ площадь открывающейся части изображения $\Delta\Sigma_0$ не равна площади закрывающейся части $\Delta\Sigma_3$. Необходимо дополнительное смещение изображения цели к центру раstra, чтобы обеспечить отсутствие сигнала. Это иллюстрируется рис. 186, из которого следует, что при заполнении изображением цели двух секторов раstra (а) $\Delta\Sigma_3 > \Delta\Sigma_0$; если же изображение цели сместить к центру (б), то можно обеспечить условие $\Delta\Sigma_3 = \Delta\Sigma_0 + \Delta\Sigma_{02}$.

На основании приведенных расчетов спектра, модулированного секторным растром потока излучения $\Phi_0 = \text{const}$ для случая, когда изображение представляет собой равномерно освещенный круг радиусом r , находящийся на расстоянии ρ_0 от центра N -секторного раstra, можно записать следующие основные соотношения.

Амплитудный спектр модулированного потока излучения будет иметь вид

$$\Phi(f) = 0,5A_0\Phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_0 A_k \cos k\omega_0 t,$$

где $\Phi_0 = E\pi r^2$ (E — освещенность круглого изображения цели); $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Коэффициенты разложения в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 a_{00}; \quad A_k = a_k a_{0k}; \\ a_k &= \tau_p \text{sa}(k\pi/2); \quad a_0 = \tau_p; \quad a_{0k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_d(\varphi) \cos Nk\varphi d\varphi; \\ a_{00} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau_d(\varphi) d\varphi = [a_{0k}]_{k=0}. \end{aligned}$$

В выражения для коэффициентов разложения входят следующие коэффициенты: τ_p — пропускания прозрачных секторов раstra; τ_d — пропускания диафрагмы. Вычисление коэффициента пропускания диафрагмы выполняется по различным формулам в зависимости от величины $x_0 = \rho_0/r$.

Для $x_0 = \rho_0/r \geq 1$

$$\begin{aligned} \tau_d(\varphi) &= (2/\pi) x_0 \cos \varphi \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2}; \\ \varphi_1 &= -\arcsin(1/x_0); \quad \varphi_2 = +\arcsin(1/x_0). \end{aligned}$$

Получим два приближенных решения уравнения, определяющего коэффициенты разложения a_{0k} и a_{00} .

Первое решение приводит к следующим значениям:

$$a_{0k} = 2J_1(y_0)/y_0; \quad y_0 = Nk/x_0; \quad a_{00} = 1,$$

где $J_1(y_0)$ — функция Бесселя первого порядка.

Второе решение дает:

$$a_{0k} = (2/\pi) x_0 \alpha_0 \{ (1 - x_0^2/8 - 2x_0^4/128 - 5x_0^6/1024) [\text{sa}(Nk - 1) \alpha_0 + \\ + \text{sa}(Nk + 1) \alpha_0] + (x_0^2/8 + 3x_0^4/128 + 9x_0^6/1024) [\text{sa}(Nk - 3) \alpha_0 + \\ + \text{sa}(Nk + 3) \alpha_0] - (x_0^4/128 + 5x_0^6/1024) [\text{sa}(Nk - 5) \alpha_0 + \\ + \text{sa}(Nk + 5) \alpha_0] + (x_0^6/1024) [\text{sa}(Nk - 7) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 7) \alpha_0] \},$$

где $\alpha_0 = \arcsin(1/x_0)$.

Можно записать решение в другом виде:

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} x_0 \alpha_0 \left[\text{sa}_1 - \frac{x_0^2}{8} (\text{sa}_1 - \text{sa}_3) - \frac{x_0^4}{128} (2 \text{sa}_1 + \text{sa}_5 - 3 \text{sa}_3) - \right. \\ \left. - \frac{x_0^6}{1024} (5 \text{sa}_1 + \text{sa}_5 - 9 \text{sa}_3 - \text{sa}_7) \right],$$

где

$$\text{sa}_1 = \text{sa}(Nk - 1) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 1) \alpha_0;$$

$$\text{sa}_3 = \text{sa}(Nk - 3) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 3) \alpha_0;$$

$$\text{sa}_5 = \text{sa}(Nk - 5) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 5) \alpha_0;$$

$$\text{sa}_7 = \text{sa}(Nk - 7) \alpha_0 + \text{sa}(Nk + 7) \alpha_0.$$

Отметим, что оба решения дают близкие по значению результаты.

Для $x_0 = \rho_0/r \ll 1$

$$\tau_d(\varphi) = (1/2\pi) [x_0^2 \cos 2\varphi + 1 + 2x_0 \cos \varphi \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2}];$$

$$\varphi_1 = -\pi; \quad \varphi_2 = +\pi.$$

В данном случае решение различно для разных значений Nk .

Если Nk равно 1; 3; 5; 7, ..., то

$$a_{0k} = \frac{4}{\pi} x_0 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (x_0 \sin \varphi)^2} \cos \varphi \cos Nk\varphi d\varphi.$$

Приближенно вычислим интеграл, входящий в полученное выражение

$$a_{0k} \approx \left[x_0 - \frac{x_0^3}{2} - \frac{x_0^5}{32} - \frac{5x_0^7}{512} - \dots \right] \text{sa}(Nk - 1) \frac{\pi}{2} + \\ + \left[\frac{x_0^3}{2} + \frac{3x_0^5}{64} + \frac{9x_0^7}{512} + \dots \right] \text{sa}(Nk - 3) \frac{\pi}{2} - \\ - \left[\frac{x_0^5}{64} + \frac{5x_0^7}{512} + \dots \right] \text{sa}(Nk - 5) \frac{\pi}{2} + \frac{x_0^7}{512} \text{sa}(Nk - 7) \frac{\pi}{2} - \dots$$

Следовательно, $a_{0k} \approx x_0 (1 - x_0^2/2)$ для $Nk = 1$; $a_{0k} \approx x_0^3/2$ для $Nk = 3$; $a_{0k} \approx 0$ для Nk , равного 5; 7; 9, ...

Если $Nk = 2$, то $a_{0k} = x_0^2/2$.

Если Nk равно 4; 6; 8; 10, ..., то $a_{0k} = 0$.

Отметим, что решения для $Nk = 1$ и $Nk = 3$ дают большие ошибки при $x_0 > 0,5$.

осью O_1O_1 , параллельной оси OO , четвертую (R, β) — с полюсом в точке O_1 и полярной осью O_1O' , совпадающей с OO' . В первой системе положение изображения цели характеризуется координатами (ρ_0, φ_0) , во второй — (ρ_0, φ_0) , в третьей — (R, γ) и в четвертой — (R, β) . Положение изображения цели при отсутствии сканирования — точка O_1 — характеризуется в первой системе координатами $(\rho_{\text{ц}}, \varphi_{\text{ц}})$.

Из треугольника OO_2O_1 можно найти

$$\rho_0 = \sqrt{\rho_{\text{ц}}^2 + R^2 - 2\rho_{\text{ц}}R \cos(180 - \beta)} = \sqrt{\rho_{\text{ц}}^2 + R^2 + 2\rho_{\text{ц}}R \cos \beta}.$$

Здесь $\beta = \gamma - \varphi_{\text{ц}} = \Omega_0 t - \varphi_{\text{ц}}$, где $\gamma = \Omega_0 t$. Следовательно,

$$\rho_0 = R \sqrt{\Delta^2 + 2\Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{\text{ц}}) + 1},$$

где $\Delta = \rho_{\text{ц}}/R$

В свою очередь, опустив перпендикуляр $O_2O'_2$ из точки O_2 на ось O_1O' , найдем

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= \arctg(O_2O'_2/OO'_2) = \arctg[R \sin \beta / (\rho_{\text{ц}} + R \cos \beta)] = \\ &= \arctg[\sin \beta / (\Delta + \cos \beta)] = \arctg\{\sin(\Omega_0 t - \varphi_{\text{ц}}) / [\Delta + \cos(\Omega_0 t - \varphi_{\text{ц}})]\}. \end{aligned}$$

При решении задачи о модуляции потока излучения вращающимся секторным диском для случая, когда отверстие диафрагмы представляло собой круг радиусом r , было найдено, что амплитуда k -й гармоники модулированного сигнала при $\rho_0/r \geq 1$ равна

$$A_k = \tau_p [\text{sa}(k\pi/2)] [2J_1(y_0)/y_0] \cos Nk\varphi_0.$$

где τ_p — коэффициент пропускания прозрачных секторов раstra; $y_0 = Nk(r/\rho_0)$; φ_0 — полярный угол, характеризующий положение центра отверстия диафрагмы, отсчитываемый от середины прозрачного сектора раstra.

Имея в виду, что изображение цели представляет собой «отверстие диафрагмы» (так как энергия излучения отличается от нуля только в пределах этого изображения), можно использовать полученное выражение в качестве исходного для расчета k -й гармоники модулированного сигнала при коническом сканировании.

Так как при выбранной системе координат

$$\varphi_0 = \varphi'_0 + \varphi_{\text{ц}},$$

где $\varphi_{\text{ц}}$ — полярный угол цели (центра окружности, по которой вращается изображение цели), можно найти мгновенное значение амплитуды модулированного сигнала

$$A_k = A_{k0} \cos \varphi$$

с амплитудой колебания

$$\begin{aligned} A_{k0} &= \tau_p \left(\text{sa} k \frac{\pi}{2} \right) \frac{2J_1(y_0)}{y_0} = \tau_p \left(\text{sa} k \frac{\pi}{2} \right) \frac{2J_1[Nk(r/\rho_0)]}{Nk(r/\rho_0)} = \\ &= 2\tau_p \left(\text{sa} k \frac{\pi}{2} \right) \frac{R}{Nkr} \sqrt{\Delta^2 + 2\Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{\text{ц}}) + 1} \times \\ &\quad \times J_1 \left(\frac{Nkr}{R \sqrt{\Delta^2 + 2\Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{\text{ц}}) + 1}} \right) \end{aligned}$$

и полной фазой колебания

$$\psi = Nk\varphi_0 = Nk \left(\varphi_{II} + \arctg \frac{\sin(\Omega_0 t - \varphi_{II})}{\Delta + \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II})} \right).$$

Таким образом, мгновенная амплитуда k -й гармоники модулированного потока излучения A_k представляет собой гармонический (косинусоидальный) сигнал, амплитуда и полная фаза которого изменяются во времени.

По определению круговая частота является производной аргумента (полной фазы) тригонометрической функции, представляющей колебание,

$$\begin{aligned} \omega = \frac{d\psi}{dt} &= Nk \frac{d\varphi_0}{dt} = Nk \frac{d}{dt} \left[\varphi_{II} + \arctg \frac{\sin(\Omega_0 t - \varphi_{II})}{\Delta + \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II})} \right] = \\ &= Nk\Omega_0 \frac{1 + \Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II})}{\Delta^2 + 2\Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II}) + 1}. \end{aligned}$$

При отсутствии рассогласования, когда изображение цели без сканирования совпадает с центром раstra и $\Delta = 0$, то

$$\omega = Nk\Omega_0 = k\omega_0 = \omega_k,$$

где $\omega_0 = N\Omega_0$ — основная частота модуляции (первая гармоника модулированного сигнала); $\omega_k = k\omega_0$ — частота k -й гармоники.

Так как амплитуда колебания и его полная фаза соответственно равны:

$$A_{k0} = \tau_p \operatorname{sa} (k\pi/2) 2J_1(Nkr/R)/(Nkr/R);$$

$$\psi = Nk\Omega_0 t = \omega_k t,$$

то

$$A_k = A_{k0} \cos \omega_k t = A_{k0} \cos Nk\Omega_0 t.$$

Следовательно, имеет место чисто гармоническая модуляция потока излучения с постоянными значениями амплитуды и фазы модулированного сигнала.

При малых, но конечных значениях угла рассогласования, когда $\Delta \ll 1$, можно разложить функцию $\omega = \omega(\Delta)$ в ряд Маклорена

$$\omega(\Delta) = \omega(0) + (\Delta/1!) \omega'(0) + (\Delta^2/2!) \omega''(0) + \dots$$

Так как

$$\omega(0) = \omega_k = k\omega_0 = Nk\Omega_0;$$

$$\cos(\Omega_0 t - \varphi_{II}) [\Delta^2 + 2\Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II}) + 1] -$$

$$\omega'(\Delta) = \omega_k \frac{-[2\Delta + 2\cos(\Omega_0 t - \varphi_{II})][1 + \Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II})]}{[\Delta^2 + 2\Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II}) + 1]^2};$$

$$\omega'(0) = -\omega_k \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II}),$$

то

$$\omega(\Delta) \approx \omega_k [1 - \Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{II})].$$

Амплитуда частотного отклонения для k -й гармоники $\Delta\omega_{\max k}$, называемая также девиацией частоты ω_{dk} , равна

$$\omega_{dk} = \Delta\omega_{\max k} = \Delta\omega_k = \Delta k\omega_0 = \Delta Nk\Omega_0,$$

а глубина частотной модуляции k -й гармоники —

$$m_k = \Delta \omega_{\max k} / \omega_k = \omega_{\Delta k} / \omega_k = \Delta.$$

В то же время дополнительная амплитудная модуляция при $\Delta \ll 1$ практически отсутствует, так как радикалы, входящие в выражение для A_{k0} , близки к единице

$$\sqrt{\Delta^2 + 2\Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{\Pi}) + 1} \approx 1,$$

т. е.

$$A_{k0} = \tau_p \operatorname{sa}(k\pi/2) 2J_1(Nkr/R)/(Nkr/R).$$

Следовательно, при коническом сканировании и малых углах рассогласования имеет место гармоническая частотная модуляция, причем девиация частоты модулированного сигнала пропорциональна углу рассогласования $\rho_{\Pi} = R\Delta$, а фаза девиации частоты равна полярному углу цели φ_{Π} .

Так как амплитуда k -й гармоники модулированного сигнала $A_k = A_{k0} \cos \psi$, а

$$\psi = \int_0^t \omega dt = \omega_k \int_0^t [1 - \Delta \cos(\Omega_0 t - \varphi_{\Pi})] dt = \omega_k t - \beta_k \sin(\Omega_0 t - \varphi_{\Pi}),$$

где индекс модуляции $\beta_k = \omega_{\Pi}/\Omega_0 = \Delta(\omega_k/\Omega_0) = (\rho_{\Pi}/R)(\omega_k/\Omega_0)$, то

$$A_k = A_{k0} \cos[\omega_k t - \beta_k \sin(\Omega_0 t - \varphi_{\Pi})].$$

Здесь

$$A_{k0} = \tau_p \operatorname{sa}(k\pi/2) 2J_1(Nkr/R)/(Nkr/R); \quad \omega_k = Nk\Omega_0; \quad \Omega_0 = 2\pi n_{\Pi},$$

где n_{Π} — скорость вращения изображения цели, с^{-1} ; $\beta_k = (\rho_{\Pi}/R) \times \times kN$ — индекс модуляции для k -й гармоники; R — радиус сканирования; ρ_{Π} — радиус-вектор изображения цели при отсутствии сканирования.

Амплитудный спектр модулированного потока излучения при коническом сканировании секторным растром определяется выражением

$$\Phi(f) = 0.5A_0\Phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_0 A_k \cos k\omega_0 t.$$

Здесь $A_0 = \tau_p$; $\Phi_0 = E\pi r^2$; $A_k = A_{k0} \cos[\omega_k t - \beta_k \sin(\Omega_0 t - \varphi_{\Pi})]$, где E — освещенность круглого изображения цели; τ_p — коэффициент пропускания прозрачных секторов раstra.

Значения величин, входящих в последнее равенство, были определены выше. Полагая для упрощения последующих выкладок $\varphi_{\Pi} = 0$, можно найти

$$A_k = A_{k0} [\cos \omega_k t \cos(\beta_k \sin \Omega_0 t) + \sin \omega_k t \sin(\beta_k \sin \Omega_0 t)].$$

Если $\beta_k \ll 1$, т. е. $kN\rho_{\Pi} \ll R$, то

$$\sin(\beta_k \sin \Omega_0 t) \approx \beta_k \sin \Omega_0 t; \quad \cos(\beta_k \sin \Omega_0 t) \approx 1.$$

Преобразуя уравнения для амплитуды k -й гармоники, получим

$$A_k = A_{k0} [\cos \omega_k t + 0,5\beta_k \cos (\omega_k - \Omega_0) t - 0,5\beta_k \cos (\omega_k + \Omega_0) t].$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой колебание с несущей частотой ω_k . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям, появляющимся в процессе модуляции. Частоты этих колебаний $\omega_k - \Omega_0$ и $\omega_k + \Omega_0$ называются верхней и нижней боковыми частотами модуляции. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и равны $0,5\beta_k A_{k0}$, а фазы симметричны относительно фазы несущего колебания.

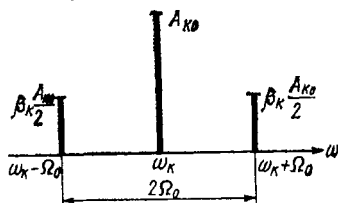


Рис. 188. Спектр амплитуд модулированного потока излучения при коническом сканировании по секторному растру для частот диапазона k -й гармоники и малом индексе модуляции

Спектр амплитуд модулированного потока излучения для этого случая представлен на рис. 188. Он не отличается от спектра амплитудно-модулированного сигнала и его ширина равна $2\Omega_0$.

В случае произвольного индекса модуляции β_k следует пользоваться общей формулой для мгновенной амплитуды

$$A_k = A_{k0} [\cos \omega_k t \cos (\beta_k \sin \Omega_0 t) + \sin \omega_k t \sin (\beta_k \sin \Omega_0 t)].$$

Вводя функции Бесселя, можно найти:

$$\sin (\beta_k \sin \Omega_0 t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1} (\beta_k) \sin (2n+1) \Omega_0 t;$$

$$\cos (\beta_k \sin \Omega_0 t) = J_0 (\beta_k) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} (\beta_k) \cos 2n \Omega_0 t,$$

где $J_{2n}(\beta_k)$ и $J_{2n+1}(\beta_k)$ — функции Бесселя $2n$ -го и $2n+1$ -го порядка от аргумента β_k . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{A_{k0}} = & J_0 (\beta_k) \sin \omega_k t + \sum_{n=1}^{\infty} J_n (\beta_k) [\sin (\omega_k + n\Omega_0) t + \\ & + (-1)^n \sin (\omega_k - n\Omega_0) t]. \end{aligned}$$

Таким образом, спектр состоит из бесконечного числа боковых частот, отличающихся от несущей на $n\Omega_0$, где n — любое целое число. Амплитуда n -й боковой составляющей равна $A_{k0} J_n (\beta_k)$, где A_{k0} — амплитуда немодулированного колебания; β_k — индекс модуляции. Существенно, что она зависит от $\beta_k = \omega_n / \Omega_0$ и совершенно не зависит от абсолютного значения несущей частоты ω_k .

Ширина спектра при больших индексах модуляции примерно равна удвоенной девиации частоты $2\omega_d$. При $\beta_k \leq 0,5$ ширина спектра определяется одной парой боковых частот и равна $2\Omega_0$. При $\beta_k = 0,5 \div 1$ приобретает некоторое значение вторая пара боко-

вых частот и ширина спектра равна $4\Omega_0$, при $\beta_k = 1 \div 2$ вступает третья и четвертая пара боковых частот и спектр занимает диапазон $(6 \div 8) \Omega_0$. При больших индексах модуляции ширина спектра составит $2\beta_k \Omega_0 = 2\omega_d$.

§ 8.7. МОДУЛЯЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ РАСТРОМ, ИМЕЮЩИМ ФОРМУ БАРАБАНА ИЛИ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ЛЕНТЫ

Пусть растр представляет собой барабан или перфорированную ленту, причем период перфорации равен l_T , а скорость движения v , т. е. временной период модуляции $T = l_T/v$. В этом случае положе-

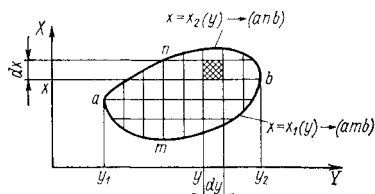
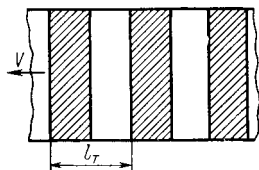
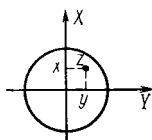


Рис. 189. Относительное расположение круглой диафрагмы поля и набегающего на нее растра в виде перфорированной ленты

Рис. 190. Диафрагма поля и ее элементы в прямоугольной системе координат

ние точки z в плоскости диафрагмы удобно задать прямоугольными координатами (x, y) (рис. 189), связанными с диафрагмой.

По-прежнему интегральный коэффициент пропускания равен:

$$\tau(t) = (1/\sigma) \int \tau_p(\bar{z}, t) \tau_\phi(\bar{z}) d\sigma; \quad \Phi(t) = \Phi_0(t) \tau(t).$$

В данном случае пропускание растра от координаты x не зависит, следовательно,

$$\tau_p(\bar{z}, t) = \tau_p(y, t).$$

В системе координат, связанных с растром, имеем

$$\tau_p(\bar{z}, t) = \tau_p(y - vt) = \tau_p(y').$$

Функция $\tau_p(y')$ может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\tau_p(y') = 0,5a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos 2\pi k \frac{y'}{l_T} + b_k \sin 2\pi k \frac{y'}{l_T} \right),$$

где

$$a_k = \frac{2}{l_T} \int_{-l_T/2}^{+l_T/2} \tau_p(y') \cos 2\pi k \frac{y'}{l_T} dy';$$

$$b_k = \frac{2}{l_T} \int_{-l_T/2}^{+l_T/2} \tau_p(y') \sin 2\pi k \frac{y'}{l_T} dy'; \quad a_0 = \frac{2}{l_T} \int_{-l_T/2}^{+l_T/2} \tau_p(y') dy'.$$

Приняв $y' = y - vt$, найдем

$$\tau_p(y, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k \cos \frac{2\pi k}{l_T} y + b_k \sin \frac{2\pi k}{l_T} y \right) \cos \frac{2\pi k}{l_T} vt + \right. \\ \left. + \left[a_k \sin \frac{2\pi k}{l_T} y - b_k \cos \frac{2\pi k}{l_T} y \right] \sin \frac{2\pi k}{l_T} vt \right].$$

Так как

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \tau_p(y, t) \tau_{\Phi}(y) dy,$$

а двойной интеграл в декартовых координатах равен (рис. 190)

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \tau_p(y, t) \tau_{\Phi}(y) dx dy,$$

где $x_1(y)$ — уравнение нижней части кривой amb , ограничивающей площадь σ ; $x_2(y)$ — уравнение верхней части кривой anb , ограничивающей площадь σ , то

$$\tau(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{y_1}^{y_2} \tau_p(y, t) \tau_{\Phi}(y) [x_2(y) - x_1(y)] dy.$$

Обозначим

$$\tau_d(y) = \tau_{\Phi}(y) [x_2(y) - x_1(y)]/\sigma,$$

тогда

$$\tau(t) = \int_{y_1}^{y_2} \tau_p(y, t) \tau_d(y) dy.$$

Подставляя в полученное выражение значение $\tau_p(y, t)$ и вводя обозначения:

$$a_{0k} = \int_{y_1}^{y_2} \tau_d(y) \cos \frac{2\pi k}{l_T} y dy; \quad b_{0k} = \int_{y_1}^{y_2} \tau_d(y) \sin \frac{2\pi k}{l_T} y dy,$$

найдем

$$\tau(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos \frac{2\pi k}{l_T} vt + B_k \sin \frac{2\pi k}{l_T} vt \right],$$

где

$$A_k = a_k a_{0k} + b_k b_{0k}; \quad B_k = a_k b_{0k} - b_k a_{0k}; \quad A_0 = a_0 a_{00}.$$

Для четных функций $\tau_p(y)$ и $\tau_d(y)$ имеем:

$$\tau(t) = 0,5A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos 2\pi k \frac{v}{l_T} t;$$

$$A_k = a_k a_{0k}; \quad A_0 = a_0 a_{00}.$$

В качестве примера определим интегральный коэффициент пропускания раstra, имеющего одинаковые по ширине просветы и промежутки между ними, для диафрагмы круглой формы.

Пропускание раstra (рис. 191)

$$\tau_p(y) = \begin{cases} \tau_0 & \text{при } |y| \leq l_T/4; \\ 0 & \text{при } l_T/4 < |y| < l_T/2. \end{cases}$$

Коэффициенты Фурье равны:

$$a_k = \frac{2}{l_T} \tau_p \int_{-l_T/4}^{+l_T/4} \cos 2\pi k \frac{y}{l_T} dy = \tau_p \left(\text{sa } k \frac{\pi}{2} \right);$$

$$a_0 = \tau_p.$$

Далее, при $\tau_\Phi(y) = 1$ имеем

$$\tau_d(y) = [x_2(y) - x_1(y)]/\sigma.$$

Так как уравнение окружности радиусом r , описывающей диафрагму, в прямоугольной системе координат имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

то его корни:

$$x_{2,1} = \pm \sqrt{r^2 - y^2};$$

$$x_2(y) - x_1(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Следовательно,

$$\tau_d(y) = (2\sqrt{r^2 - y^2})/\sigma = \\ = (2/\pi r^2) \sqrt{r^2 - y^2};$$

$$a_{0k} = \int_{y_1}^{y_2} \tau_d(y) \cos 2\pi k \frac{y}{l_T} dy = \\ = \frac{2}{\pi r^2} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{r^2 - y^2} \cos 2\pi k \frac{y}{l_T} dy.$$

Подставив в пределы интегрирования значения $y_1 = -r$; $y_2 = +r$, получим

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi r} \int_{-r}^{+r} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2} \cos 2\pi k \frac{y}{l_T} dy.$$

Обозначим:

$$y/r = \cos \theta; \quad y = r \cos \theta; \quad dy = -r \sin \theta d\theta.$$

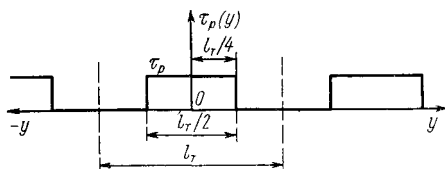


Рис. 191. Функция пропускания раstra

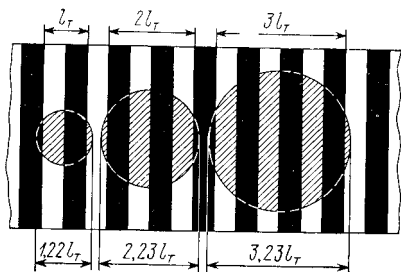


Рис. 192. Относительные размеры изображения цели и модулирующих полос раstra для случая, когда амплитуда первой гармоники модулированного потока излучения равна нулю

Тогда определим

$$a_{0k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos(\bar{z}_k \cos \theta) d\theta,$$

где $z_k = 2\pi k r / l_T$.

Так как функция Бесселя первого порядка равна

$$J_1(z_k) = \frac{z_k}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos(z_k \cos \theta) d\theta,$$

то

$$a_{0k} = 2J_1(z_k)/z_k.$$

При $k = 0$ $z_k = 0$ и $a_{00} = 1$.

Следовательно,

$$A_k = a_k a_{0k} = \tau_p \left(\operatorname{sak} \frac{\pi}{2} \right) \frac{2J_1[k(2\pi r/l_T)]}{k(2\pi r/l_T)};$$

$$A_0 = a_0 a_{00} = \tau_p.$$

Амплитуда первой гармоники

$$A_1 = \tau_p(2/\pi) 2J_1(z_1)/z_1,$$

где $z_1 = 2\pi r/l_T$. При z_1 , равном 3,83; 7,02; 10,17; 13,32; ..., т. е. при $2r/l_T = z_1/\pi$, равном 1,22; 2,23; 3,23; 4,25; ..., $A_1 = 0$.

Необходимые расчеты для этого случая могут быть проведены на основании данных рис. 183.

На рис. 192 представлены относительные размеры диафрагмы (круглого изображения цели) и модулирующих полос растра для случая, когда амплитуда первой гармоники равна нулю.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ИЗЛУЧЕНИЯ

Любая информация содержит след событий, состоящих в изменении состояния объектов или процессов. Событие порождает сообщение, которое представляет собой его описание. Именно в сообщении и содержится информация. Когда сообщение является новым, неожиданным, его необходимо передать от источника к потребителю информации. Для передачи сообщения используется сигнал — физический процесс, несущий в себе информацию и пригодный для передачи на расстояние. Преобразование сообщения в сигнал называется кодированием, а обратное преобразование — декодированием.

Пользуясь терминологией теории информации, можно следующим образом представить процесс приема и преобразования потока излучения оптико-электронным прибором.

Положение, размеры, форма и энергия окружающих нас тел есть их *состояние*.

Изменение состояния во времени или пространстве — *событие*.

Описанием события является *сообщение* — поток излучения, испускаемый любым окружающим нас телом.

Поток излучения, преобразованный оптической системой (сфокусированный, промодулированный и т. д.), является *сигналом*, несущим информацию. Это преобразование сообщения в сигнал есть *кодирование*.

Сигнал порождает сигнал: поток излучения в оптико-электронном приборе преобразуется приемником излучения в электрический сигнал, подлежащий усилению и обработке в электронной части прибора.

В результате обработки электрический сигнал преобразуется в вид, пригодный для воспроизведения и восприятия исходного сообщения с неизбежными искажениями, возникшими в процессе его передачи. Это — *декодирование*.

Сигнал может быть *детерминированным* и *случайным*. Он может представлять собой простое гармоническое колебание, быть периодическим или непериодическим процессом.

На рис. 193 приведены три схемы излучения, отличающиеся различным характером взаимодействия излучения с поверхностью *A* и точкой *M* на ней, в которой рассчитывается яркость пучка. Схема на рис. 193, *а* соответствует случаю, когда поверхность *A* является источником излучения, на рис. 193, *б* — приемником излучения, на рис. 193, *в* излучение распространяется сквозь поверхность *A*.

Любую сложную (периодическую и непериодическую) функцию можно представить в виде суммы гармонических колебаний. Поэтому процессы, происходящие в тракте оптико-электронного прибора со сложным сигналом, можно изучать на основе процессов прохождения по тракту простого гармонического сигнала. Основным свойством любого сигнала является перенос им конечной порции энергии на расстояние. Для описания этого свойства применительно к оптическому излучению служат энергетические характеристики.

§ 9.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим основные энергетические характеристики оптического излучения, уходящего от источника, падающего на приемник и распространяющегося в пространстве (поле излучения).

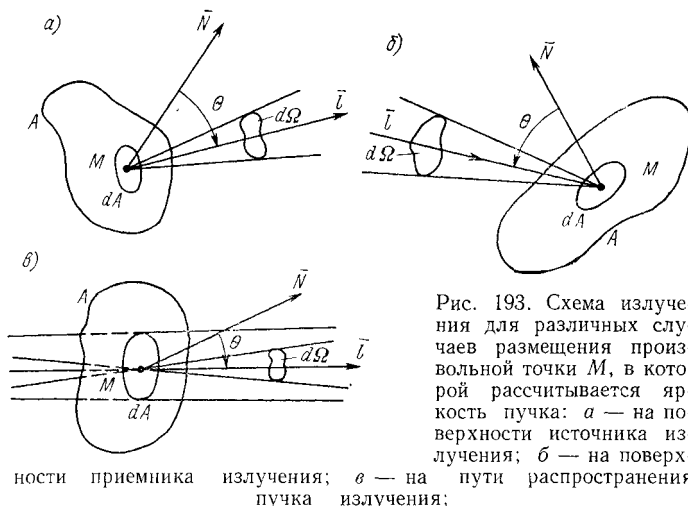


Рис. 193. Схема излучения для различных случаев размещения произвольной точки M , в которой рассчитывается яркость пучка: a — на поверхности источника излучения; $б$ — на поверхности приемника излучения; $в$ — на пути распространения пучка излучения;

dA — элементарная площадка на поверхности A ; \vec{N} — нормаль к площадке; \vec{l} — направление распространения излучения; $d\Omega$ — элементарный телесный угол, заполненный потоком излучения

Поток излучения

Основной величиной, которая позволяет судить о количестве излучения, является *поток излучения* Φ_e (Вт), или *мощность излучения* — количество излучаемой, поглощаемой или переносимой в единицу времени энергии:

$$\Phi_e = dW/dt,$$

где W — энергия излучения, Дж.

Поток излучения *, сосредоточенный в малом диапазоне длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, называют *спектральным* (монохроматическим)

* Индекс «е» в дальнейшем используется только в тех случаях, когда наряду с энергетическими характеристиками излучения будут применяться другие единицы (световые, эффективные и т. д.).

потоком излучения $d\Phi$ или $\Phi(\lambda)$, а величину потока излучения, приходящегося на единичный интервал длин волн внутри диапазона $d\lambda$, — *спектральной плотностью* потока излучения (предел отношения потока излучения, соответствующего узкому участку спектра, к ширине этого участка)

$$\Phi_\lambda = d\Phi/d\lambda.$$

Спектральная плотность потока излучения измеряется в Вт·мкм⁻¹.

Здесь и в дальнейшем используется следующее правило применения прилагательного «спектральный»: если некоторые величины, например поток излучения, коэффициент излучения и др., рассматриваются применительно к монохроматическому излучению (от λ до $\lambda + d\lambda$), то они являются функцией длины волны и обозначаются тем же термином с прилагательным «спектральный» и той же буквой, за которой ставится в скобках λ , например спектральный поток излучения $\Phi(\lambda)$. В отличие от этого, когда рассматривается спектральная плотность некоторой величины x , т. е. $dx/d\lambda$, она обозначается той же буквой с индексом λ , например спектральная плотность потока излучения $\Phi_\lambda = d\Phi/d\lambda$. Если спектральная плотность зависит от длины волны и температуры, то соответствующее обозначение будет $\Phi_\lambda(\lambda, T)$ и т. д.

В качестве единицы длины используются долгие единицы международной системы СИ — сантиметр (см) и микрометр (мкм).

Энергетическая сила света (сила излучения)

Энергетической силой света (силой излучения) I по ГОСТ 7601—78 (Вт·ср⁻¹) называют поток излучения источника, приходящийся на единицу телесного угла, в пределах которого излучение распространяется (иногда эту величину называют *угловой плотностью* потока излучения в данном направлении):

$$I = d\Phi/d\Omega.$$

Из определения энергетической силы света следует, что полный поток излучения в телесном угле Ω_0

$$\Phi_{\Omega_0} = \int_{(\Omega_0)} I d\Omega.$$

В случае неравномерного углового распределения потока излучения $I = I(\Omega)$ вводят понятие средней по телесному углу энергетической силы света, под которой понимается сила излучения источника с равномерным распределением потока, который равен потоку источника с неравномерным **распределением**:

$$\bar{I} = \frac{\Phi_{\Omega_0}}{\Omega_0} = \left[\int_{(\Omega_0)} I(\Omega) d\Omega \right] / \Omega_0.$$

Среднее значение силы излучения внутри телесного угла 4π называют **среднесферической силой излучения**

$$I_{\text{сф}} = \frac{\Phi_{4\pi}}{4\pi} = \left[\int_{(4\pi)} I(\Omega) d\Omega \right] / (4\pi).$$

Спектральная (мономатическая) энергетическая сила излучения dI или $I(\lambda)$ состоит из излучений с длинами волн, заключенными между λ и $\lambda + d\lambda$

Спектральная плотность энергетической силы излучения I_λ (Вт·см⁻¹·мкм⁻¹) равна

$$I_\lambda = dI/d\lambda.$$

Поверхностная плотность потока излучения

Поверхностная плотность потока излучения определяется величиной потока излучения, приходящейся на единицу площади. Различают энергетическую освещенность и энергетическую светимость поверхности.

Энергетическая освещенность (в точке поверхности) E (Вт·см⁻²) — отношение потока излучения, падающего на элемент поверхности, содержащий рассматриваемую точку, к площади этого элемента:

$$E = d\Phi/dA.$$

Энергетическая светимость (в точке поверхности) M (Вт·см⁻²) — отношение потока излучения, испускаемого в полусферу элементом поверхности, содержащим заданную точку, к площади этого элемента:

$$M = d\Phi/dA.$$

Спектральные плотности энергетической освещенности и энергетической светимости, измеряемые в Вт·см⁻²·мкм⁻¹, равны:

$$E_\lambda = dE/d\lambda; \quad M_\lambda = dM/d\lambda.$$

Поверхностно-угловая плотность потока излучения — энергетическая яркость

Энергетическая яркость L (Вт·см⁻²·ср⁻¹) в данном направлении \vec{l} в произвольной точке M , лежащей на поверхности источника, или приемника или на пути распространения пучка (рис. 193), представляет собой отношение элементарного потока излучения $d^2\Phi$ к произведению телесного угла $d\Omega$, в котором он распространяется, площади dA , которую он оставляет, и косинуса угла θ между данным направлением \vec{l} и нормалью N к площади dA :

$$L = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dA \cos \theta}.$$

Так как поток излучения $\Phi = f(\Omega, A)$ в данном случае рассматривается как функция двух переменных — телесного угла Ω и площади A источника излучения, то при небольших и независимых изменениях Ω и A на $d\Omega$ и dA суммарное изменение потока излучения Φ может быть вычислено как полный дифференциал 2-го порядка

$$d^2\Phi = d(\Phi) = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Omega^2}\right) d\Omega^2 + 2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Omega\partial A}\right) d\Omega dA + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial A^2}\right) dA^2,$$

где $\partial^2\Phi/\partial\Omega^2$, $\partial^2\Phi/\partial A^2$, $\partial^2\Phi/(\partial\Omega\partial A)$ — частные производные 2-го порядка от функции $\Phi = f(\Omega, A)$

Спектральная плотность энергетической яркости L_λ (Вт·см⁻²·ср⁻¹·мкм⁻¹) равна

$$L_\lambda = dL/d\lambda.$$

Различают три частных случая определения энергетической яркости (рис. 193, а—в).

1. В произвольной точке M на поверхности источника излучения в направлении \vec{l} энергетическая яркость есть отношение энергетической силы света dI , излучаемой элементом dA в этом направлении, к произведению площади dA и косинуса угла θ (к площади проекции элемента dA на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения):

$$L = \frac{dI}{dA \cos \theta}.$$

2. В произвольной точке M на поверхности приемника в направлении \vec{l} энергетическая яркость есть отношение энергетической освещенности dE , создаваемой в этой точке приемника, в плоскости, перпендикулярной направлению \vec{l} , к элементарному телесному углу $d\Omega$, в котором заключен поток, создающий эту освещенность:

$$L = dE/d\Omega.$$

3. В произвольной точке M на пути распространения элементарного пучка в направлении \vec{l} энергетическая яркость есть отношение потока, переносимого пучком излучения $d\Phi$, к *геометрическому фактору* этого пучка $dG = dA \cos \theta d\Omega$, где dA — площадь сечения пучка; $d\Omega$ — телесный угол, который им заполняется; θ — угол между нормалью к dA и направлением \vec{l} :

$$L = \frac{d\Phi}{dG} = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dA \cos \theta}.$$

Как известно из геометрической оптики, при отсутствии рассеяния *оптический фактор*, равный произведению *геометрического фактора* элементарного пучка и квадрата показателя преломления среды, в которой он распространяется, инвариантен на всем пути пучка (инвариант Штраубеля):

$$dGn^2 = \text{const.}$$

Следовательно, отношение энергетической яркости к квадрату показателя преломления (приведенная или редуцированная энергетическая яркость) также инвариантно на всем протяжении элементарного пучка (при отсутствии потерь на поглощение и отражение):

$$L/n^2 = \text{const.}$$

Этот закон был получен термодинамическим путем еще Клаузиусом в 1864 г.

Поверхности тел, энергетическая яркость которых во всех направлениях одинакова, называют диффузно излучающими, и для них справедлив закон, установленный Ламбертом. Согласно этому закону, энергетическая сила света диффузно излучающей поверхности в данном направлении для всех длин волн пропорциональна косинусу угла θ между направлением излучения и нормалью к излучающей поверхности:

$$I = LA \cos \theta.$$

Если значения энергетической силы света и энергетической яркости отложить от центра излучающего тела в виде векторов, то поверхность, проведенная по концам векторов, называется фотометрической, а тело, заключенное внутри этой поверхности, — фотометрическим.

Для тел, подчиняющихся закону Ламберта, фотометрическое тело энергетической яркости излучающей поверхности A представляет собой полусферу, а фотометрическое тело энергетической силы света — сферу, касательную к поверхности A (рис. 194).

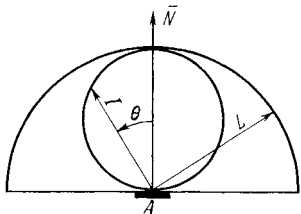


Рис. 194. Зависимость яркости L и силы света I для поверхности A , подчиняющейся закону Ламберта

Между энергетическими светимостью и яркостью диффузно излучающих поверхностей существует соотношение, вывод которого приводится в § 9.2:

$$M = \pi L.$$

Строго говоря, закон Ламберта справедлив только для особого класса источников излучения — абсолютно черного тела или идеально диффузно рассеивающих поверхностей. Но на практике он может применяться с достаточно хорошим приближением во многих случаях. Примерами являются поверхности Солнца и Земли, порошкообразные люминофоры, все тела с матовой диффузной окраской и т. д.

§ 9.2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Поток излучения в полусферу

Поток излучения в элементарный телесный угол $d\Omega$ в соответствии с определением энергетической силы света равен

$$d\Phi = I d\Omega.$$

Поток излучения в полусферу $\Phi_{2\pi}$ можно найти следующим образом (рис. 195).

Расположим излучающую поверхность dA в центре сферы радиусом r (начало координат xyz на рис. 195). Выбранное направление зададим углами θ , φ и построим элементарный телесный угол $d\Omega$, образованный двумя углами $d\theta$ и $d\varphi$. При этом на поверхности сферы будет вырезана площадка dA_1 , величина которой равна

$$dA_1 = r^2 d\theta d\varphi \sin \theta.$$

Теперь можно определить телесный угол $d\Omega$ и элементарный поток $d\Phi$, излучаемый внутрь этого телесного угла:

$$d\Omega = dA_1/r^2 = d\theta d\varphi \sin \theta;$$

$$d\Phi = I d\Omega = I d\theta d\varphi \sin \theta.$$

Так как в пределах элементарного телесного угла

$$I = L dA \cos \theta,$$

то

$$d\Phi = L dA \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta.$$

Выполняя интегрирование по θ и φ , определим

$$\Phi_{2\pi} = dA \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} L \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

В тех случаях, когда энергетическая яркость излучающей поверхности по всем направлениям одинакова, т. е. излучение поверхности подчиняется закону Ламберта, можно найти

$$\begin{aligned} \Phi_{2\pi} &= L dA \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= L dA \int_0^{2\pi} [(-\cos 2\theta)/4]_0^{\pi/2} d\varphi = \\ &= L dA \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2} = \pi L dA. \end{aligned}$$

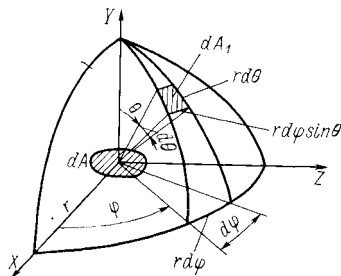


Рис. 195. Схема излучения элементарной площадки dA в полушфферу

Энергетическая светимость в этом случае равна $M = \pi L$.

Энергетическая освещенность от точечных и протяженных источников

Точечный источник, т. е. источник излучения, размеры которого настолько малы по сравнению с расстоянием до приемника, что ими можно пренебречь в вычислениях, характеризуется энергетической силой света I (рис. 196).

Поток излучения в элементарный телесный угол $d\Omega$ от точечного источника S равен

$$d\Phi = I d\Omega = I (dA_1 \cos \theta)/R^2,$$

где $d\Omega = (dA_1 \cos \theta)/R^2$.

Следовательно, энергетическая освещенность

$$E = \frac{d\Phi}{dA_1} = \frac{I \cos \theta}{R^2}.$$

Полученная формула выражает следующие законы освещенности, создаваемой точечным источником.

1. Освещенность поверхности точечным источником прямо пропорциональна силе света источника в данном направлении и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до освещаемого им элемента поверхности (закон квадратов расстояний, или закон обратных квадратов).

2. Освещенность пропорциональна косинусу угла падения лучей на освещаемую поверхность (закон наклона).

Протяженный источник, т. е. источник излучения, размеры которого соизмеримы с расстоянием до приемника, характеризуется энергетической яркостью L . Пусть поверхность A_2 освещается большой поверхностью A_1 — протяженным источником излучения (рис. 197).

Энергетическая освещенность поверхности A_2 в точке O_2 , создаваемая элементарной площадкой dA_1 , линейные размеры которой малы по сравнению с расстоянием R между источником излучения и освещаемой им поверхностью, может быть вычислена по закону обратных квадратов

$$dE = (I \cos \theta_2)/R^2.$$

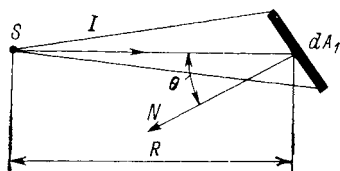


Рис. 196. Освещенность элементарной площадки dA_1 точечным источником S

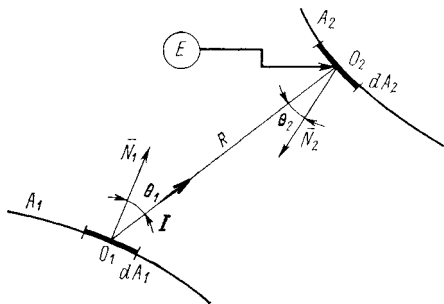


Рис. 197. Освещенность E поверхности A_2 поверхностью A_1

Здесь $I = L \cos \theta_1 dA_1$, где L — энергетическая яркость элемента dA_1 в направлении R на освещаемый объект.

Следовательно,

$$dE = [(L \cos \theta_1 \cos \theta_2)/R^2] dA_1.$$

Элементарный телесный угол $d\Omega_2$, под которым из точки O_2 виден излучающий элемент dA_1 , равен

$$d\Omega_2 = (dA_1 \cos \theta_1)/R^2.$$

Следовательно,

$$dE = L \cos \theta_2 d\Omega_2.$$

Интегрируя полученное выражение по телесному углу Ω_2 , под которым из точки O_2 поверхности A_2 видна поверхность A_1 , найдем энергетическую освещенность поверхности A_2 в точке O_2 , создаваемую всей поверхностью A_1 :

$$E = \int_{(\Omega_2)} L \cos \theta_2 d\Omega_2.$$

Если излучение поверхности A_1 удовлетворяет закону Ламберта, т. е. $L = \text{const}$, то

$$E = L \int_{(\Omega_2)} \cos \theta_2 d\Omega_2.$$

Полученная формула является основным выражением для расчета освещенностей от больших поверхностей.

Введем обозначение

$$\Sigma = \int_{(\Omega_2)} \cos \theta_2 d\Omega_2;$$

тогда $E = L \Sigma$.

Воспользуемся геометрической интерпретацией интеграла Σ . Для этого опишем вокруг элемента освещаемой поверхности dA_2 полусферу радиусом $r = 1$ (рис. 198). Тогда образующие телесных углов $d\Omega_2$ и Ω_2 «вырежут» на поверхности полусферы площади $d\sigma$ и σ , численно равные значениям соответствующих телесных углов,

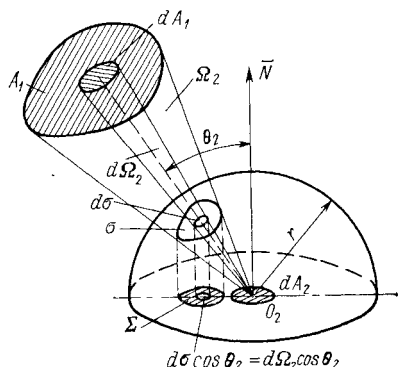


Рис. 198. Геометрическая интерпретация интеграла $\Sigma = \int_{(\Omega_2)} \cos \theta_2 d\Omega_2$

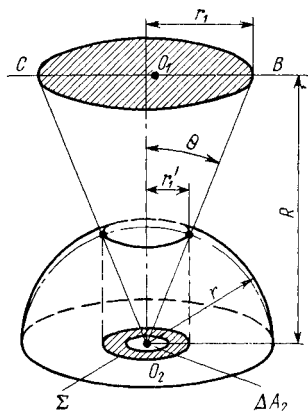


Рис. 199. Освещенность малой площадки равнярким диском

так как $r = 1$, т. е. $d\sigma = d\Omega_2$; $\sigma = \Omega_2$. Элемент поверхности $d\sigma$ наклонен относительно плоскости основания полусферы под тем же углом θ_2 , который составляет падающий луч с нормалью к элементу поверхности dA_2 . Таким образом, произведение $\cos \theta_2 d\sigma = \cos \theta_2 d\Omega_2$ численно равно площади проекции элемента поверхности полусферы $d\sigma = d\Omega_2$ на плоскость основания полусферы, т. е. на плоскость освещаемого элемента.

Отсюда следует, что интеграл Σ численно равен площади проекции на плоскость основания той части поверхности полусферы (с радиусом, равным единице), которая «вырезается» телесным углом Ω_2 .

Рассмотрим два примера.

1. Пусть освещенность малой площадки LA_2 создается бесконечно большой равняркой плоскостью или вогнутой полусферой произвольного радиуса; тогда телесный угол Ω_2 равен всей полусфере и, следовательно, площадь проекции полусферы на плоскость ее основания равна площади большого круга $\pi r^2 = \pi$, так как $r = 1$. Значит, $\Sigma = \pi$, а освещенность площадки LA_2 равна

$$E = \pi L.$$

2. Если освещенность малой площадки ΔA_2 в точке O_2 создается равноярким диском радиусом r_1 , находящимся на расстоянии R от нее (рис. 199), то значение Σ можно определить следующим образом:

$$\Sigma = \pi (r_1')^2 = \pi (r \sin \theta)^2.$$

Так как $r = 1$,

$$\Sigma = \pi \sin^2 \theta; \quad E = \pi L \sin^2 \theta.$$

С другой стороны, из рис. 199 следует, что

$$\sin^2 \theta = \frac{r_1^2}{(O_2 B)^2} = \frac{r_1^2}{(r_1^2 + R^2)} = \frac{r_1^2}{R^2 [1 + (r_1^2/R^2)]}.$$

Преобразовав уравнение для освещенности, получим

$$E = \frac{L \pi r_1^2}{R^2 [1 + (r_1^2/R^2)]}.$$

Сила света

$$I = \pi r_1^2 L,$$

поэтому

$$E = \frac{I}{R^2} \frac{1}{1 + (r_1/R)^2} = E_0 k.$$

Следовательно, энергетическая освещенность определяется произведением двух сомножителей. Первый сомножитель $I/R^2 = E_0$ представляет собой освещенность, вычисляемую по закону обратных квадратов; второй — $1/[1 + (r_1/R)^2] = k$ — некоторый поправочный коэффициент. Если $R = 10r_1 = 5(2r_1)$, то

$$k = \frac{1}{1 + (r_1/R)^2} = 0,99,$$

т. е. погрешность при расчете освещенности от большой поверхности по закону квадратов расстояний в этом случае составляет не более 1 %.

Таким образом, если расстояние от излучающей поверхности до приемника излучения больше или равно пяти диаметрам источника, то последний можно считать точечным и для расчетов освещенности пользоваться законом квадратов расстояний.

Рассмотренный пример позволяет рассчитать освещенность малой площадки A' , находящейся в плоскости изображения объектива, выходной зрачок которого представляет собой равнояркий (энергетическая яркость L') диск диаметром D' (рис. 200).

Если апертурный угол такого объектива в пространстве изображений равен $\sigma'_{A'}$, то на основании предыдущего расчета очевидно, что

$$E = \pi L' \sin^2 \sigma'_{A'}.$$

Поток излучения, проходящий через площадку A' ,

$$\Phi = EA' = \pi L' A' \sin^2 \sigma'_{A'}.$$

Так как в соответствии с инвариантом Штраубеля

$$L/n^2 = L'/n'^2,$$

где L и n — величины, относящиеся к пространству предметов, а L' и n' — к пространству изображений, то освещенность площадки A' в плоскости изображения оказывается равной

$$E = \pi L (n'/n)^2 \sin^2 \sigma'_{A'},$$

где L — энергетическая яркость источника излучения. При этом, как и прежде, предполагается отсутствие потерь на поглощение и отражение, которые могут быть учтены соответствующим коэффициентом.

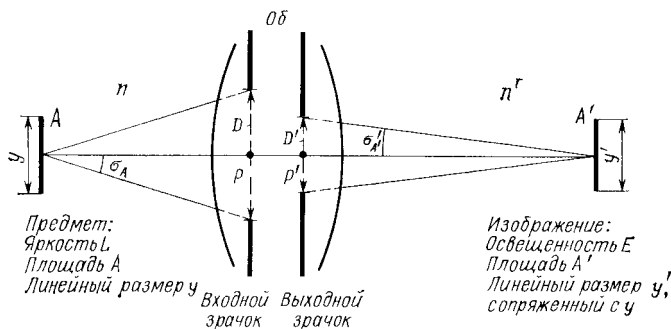


Рис. 200. Освещенность плоскости изображения объектива

Поскольку при отсутствии потерь поток излучения одинаков в любом сечении пучка, то произведение $\pi L' A' \sin^2 \sigma'_{A'}$ является инвариантом, приводящим к следующему соотношению:

$$\pi L' A' \sin^2 \sigma'_{A'} = \pi L A \sin^2 \sigma_A;$$

но $L' = L (n'/n)^2$, следовательно,

$$n'^2 A' \sin^2 \sigma'_{A'} = n^2 A \sin^2 \sigma_A.$$

Извлекая квадратный корень и вводя значения сопряженных линейных размеров предмета и изображения $y = \sqrt{A}$; $y' = \sqrt{A'}$, приходим к инварианту

$$n' y' \sin \sigma'_{A'} = n y \sin \sigma_A.$$

Полученное соотношение носит в оптике название *закона синусов* и установлено Аббе.

В общем виде этот закон формулируется следующим образом: произведение показателя преломления среды, длины отрезка прямой линии, перпендикулярной оси симметрии пучка излучения, и синуса угла, образуемого с этой осью каким-нибудь лучом, выходящим из точки пересечения отрезка с осью, остается инвариантным для обеих сред, в которых расположены оптически сопряженные сечения пучка излучения.

§ 9.3. МОЩНОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ СОСТАВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Точные и относительно простые количественные соотношения, определяющие величину и спектральный состав излучения тела, существуют лишь для определенного класса тел, называемых абсолютно черными.

Абсолютно черное тело (полный излучатель, излучатель Планка) поглощает все падающее на него излучение независимо от направления падения, спектрального состава и поляризации*.

Следовательно, для такого тела *для всех длин волн равен единице спектральный (мономатический) коэффициент поглощения* $\alpha(\lambda, T)$, показывающий, какая часть падающего на поверхность тела мономатического потока излучения при данной температуре T и длине волны λ поглощается.

Между тем из *закона Кирхгофа*, определяющего соотношение излучения и поглощения, известно, что в условиях термодинамического равновесия при температурном излучении чем больше тело поглощает, тем больше оно излучает, т. е. отношение спектральной энергетической яркости $L(\lambda, T)$ к спектральному коэффициенту поглощения $\alpha(\lambda, T)$ при данной температуре T и длине волны λ не зависит от природы тела:

$$L(\lambda, T)/\alpha(\lambda, T) = \text{const.}$$

Поэтому абсолютно черное тело можно также определить как тело, которое излучает наибольшее возможное количество энергии при данной температуре для всех длин волн. При применении закона Кирхгофа имеется в виду лишь тепловое (температурное) излучение тела, когда убыль энергии, уносимой излучением, может быть пополнена сообщением ему соответствующего количества тепла.

Тепловое излучение занимает особое место среди всех иных видов излучения благодаря своему свойству находиться в равновесии с внутренней энергией излучающего тела.

Излучение любой длины волны обуславливается колебаниями электрических зарядов, входящих в состав вещества, и сопровождается потерей энергии. Общая энергия замкнутой системы содержится частично в виде энергии излучения, частично в виде внутренней энергии излучающего тела. Состояние системы будет равновесным, если с течением времени распределение энергии между телом и излучением не меняется, т. е. поглощение некоторой доли испущенной энергии возвращает тело в первоначальное энергетическое состояние. Если излучение определяется температурой тела, то повышение температуры, вызванное поглощением теплоты, компенсирует понижение температуры, связанное с излучением энергии. Таким образом, температурное излучение является *равновесным*. К *неравновесным* излучениям, яркость которых может превышать при данной температуре яркость теплового излучения тела, относится прежде всего *люминесценция*.

* Излучение абсолютно черного тела далее отмечается индексом «ноль»:
 $M^0(\lambda, T)$.

Убыль энергии при люминесценции может пополняться либо за счет химических превращений внутри тела (*хемиллюминесценция*), либо за счет освещения тела светом более короткой длины волны, чем испускаемый свет (*фотолюминесценция*), либо за счет бомбардировки тела электронами (*катодолюминесценция*), либо за счет энергии электрического тока, проходящего через тело (*электролюминесценция*).

Дополнительным критерием, позволяющим отличить люминесценцию от всех других видов свечения, является длительность люминесцентного излучения, которое прекращается после устранения вызвавшей его причины за время, значительно превосходящее время собственных колебаний светящейся молекулы, которое составляет 10^{-14} — 10^{-15} с.

К излучениям, яркость которых может превышать при данной температуре яркость теплового излучения, относится, кроме люминесценции, *рассеянный и зеркально отраженный свет*, а также *свечение Вавилова—Черенкова*, возникающее при движении электрона со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данном веществе. Однако в отличие от люминесценции все эти излучения существуют лишь постольку, поскольку есть вызывающая их причина, и исчезают после ее исчезновения за время, меньшее, чем 10^{-14} с.

Следует также отметить, что закон Кирхгофа, сформулированный для условия равновесия излучения и вещества, имеет более широкие границы применимости, если отсутствие равновесия не влияет существенно на состояние излучающего тела.

Абсолютно черного тела в природе не существует, но многие тела могут рассматриваться как абсолютно черные в ограниченной области спектра. К ним относятся, например, поверхность, покрытая сажей, небольшое отверстие в стенке замкнутой полости, конус или клин с малым углом при вершине и т. д.

Нечерными телами в противоположность черным называют тела, коэффициент поглощения которых меньше единицы. Если спектральный коэффициент поглощения не зависит от длины волны в рассматриваемой области спектра, то тело принято называть не-селективным излучателем или *серым телом*. К серым телам можно отнести железо, сажу, графит, различные черни, некоторые краски и другие хорошо поглощающие излучения вещества.

Большинство тел не являются серыми, так как их коэффициент поглощения зависит от длины волны. В этом случае говорят, что излучение имеет селективный характер, а соответствующее излучающее тело называют *селективным излучателем*. Например, металлы имеют наибольшее значение коэффициента поглощения в области малых длин волн; при увеличении длины волны их коэффициент поглощения, как правило, уменьшается. У диэлектриков, наоборот, по мере увеличения длины волны коэффициент поглощения увеличивается. Вещества, прозрачные в широкой области спектра и имеющие узкие полосы поглощения, обладают избирательным излучением. К ним относится атмосфера Земли, содержащая углекислый газ, пары воды и озон, имеющие полосы поглощения в различных

областях спектра. Излучение атмосферы имеет резко селективный характер.

Способность реального тела, нагретого до температуры T , излучать можно оценивать количественно *относительными энергетическими характеристиками*, которые позволяют сопоставить его излучение с излучением абсолютно черного тела.

К ним относятся прежде всего предусмотренные ГОСТ 7601—78 *коэффициент теплового излучения и коэффициент направленного теплового излучения*.

Коэффициент теплового излучения ϵ равен отношению энергетических светимостей теплового излучателя и абсолютно черного тела при той же температуре. Его спектральная величина равна:

$$\epsilon(\lambda, T) = \frac{M(\lambda, T)}{M^{\circ}(\lambda, T)} = \frac{M_{\lambda}(\lambda, T)}{M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T)}.$$

Коэффициент направленного теплового излучения $\epsilon(\theta, \varphi)$ равен отношению энергетической яркости теплового излучателя в данном направлении к энергетической яркости черного тела при той же температуре. Его спектральная величина равна:

$$\epsilon(\lambda, T, \theta, \varphi) = \frac{L(\lambda, T, \theta, \varphi)}{L^{\circ}(\lambda, T)} = \frac{L_{\lambda}(\lambda, T, \theta, \varphi)}{L_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T)}.$$

Международный светотехнический словарь предусматривает использование терминов: 05—180 «коэффициент направленного излучения (теплового излучателя)», совпадающий по определению с $\epsilon(\theta, \varphi)$ и 05—175 «коэффициент излучения (теплового излучателя) или коэффициент черноты», совпадающий по определению с ϵ .

Так как в соответствии с законом Кирхгофа

$$L(\lambda, T, \theta, \varphi)/\alpha(\lambda, T, \theta, \varphi) = L^{\circ}(\lambda, T)/\alpha^{\circ}(\lambda, T),$$

а для абсолютно черного тела $\alpha^{\circ}(\lambda, T) = 1$, то

$$\epsilon(\lambda, T, \theta, \varphi) = \alpha(\lambda, T, \theta, \varphi).$$

Полученное соотношение представляет собой по существу еще одну формулировку закона Кирхгофа: *в точке поверхности теплового излучателя при любой температуре и длине волны коэффициент направленного теплового излучения для заданного направления равен коэффициенту поглощения для противоположного направления, или чем выше коэффициент поглощения тела, тем лучшим излучателем оно является. Для абсолютно черного тела*

$$\epsilon^{\circ}(\lambda, T) = \alpha^{\circ}(\lambda, T) = 1.$$

Следовательно, коэффициент поглощения (спектральный и интегральный) характеризует не только способность среды или тела задерживать попавшее в них излучение, но характеризует и излучательные свойства среды (тела).

Поскольку излучательная способность тела, характеризующая его коэффициентом направленного излучения, определяется отношением энергетической яркости данного тела к энергетической яркости абсолютно черного тела, она зависит от направления распространения излучения. Если угол между направлением излучения и

Значения полного нормального коэффициента направленного излучения
для некоторых материалов

Материал	Температура, °С	Коэффициент направленного излучения
Алюминий:		
полированные листы	100	0,05
неполированные листы	100	0,09
анодированные листы	100	0,55
слои, нанесенные вакуумным напылением	20	0,04
Сталь:		
полированная	100	0,07
окисленная	200	0,79
Золото (хорошо полированное)	100	0,02
Уголь:		
сажа	20	0,95
графит	20	0,98
Бетон	20	0,92
Стекло (полированное)	20	0,94
Лак:		
белый	100	0,92
матовый черный	100	0,97
Бумага (белая)	20	0,93
Песок	20	0,9
Кирпич	20	0,93
Человеческая кожа	32	0,98
Вода	20	0,96
Лед:		
гладкий	—10	0,96
замерзшие кристаллы	—10	0,98
Снег	—10	0,85
Почва	20	0,95

нормалью к поверхности равен нулю, то коэффициент направленного излучения называют нормальным, а в том случае, когда он измеряется для всего диапазона длин волн — полным.

Значения полного нормального коэффициента направленного излучения некоторых материалов, заимствованные из книги Хадсона «Инфракрасные системы», приведены в табл. 10.

Поглощение и испускание излучения телом может происходить в существенно различных спектральных диапазонах, что приводит к значительным отличиям отношения α/ϵ от единицы. Например, при освещении снегового покрова Солнцем, 98 % излучения которого лежит в диапазоне 0,15—3 мкм, поглощение излучения происходит в этом же диапазоне, а 98 % испускаемого снегом излучения заключено в диапазоне 3—70 мкм с максимумом около 10 мкм.

Отличие от единицы отношения коэффициента поглощения солнечного излучения к низкотемпературному коэффициенту направленного излучения используется при обеспечении равновесной температуры космических кораблей, так как для тела, находящегося

в космическом пространстве, единственной возможностью отдачи поглощенную энергию солнечных лучей является излучение этой энергии. Например, для полированного алюминия коэффициент поглощения солнечных лучей составляет $\alpha = 0,387$, а коэффициент направленного излучения этого же материала, находящегося при температуре 300 К, равен $\epsilon = 0,027$. Следовательно, отношение $\alpha/\epsilon = 14,35$. В то же время белое покрытие из двуокиси титана имеет $\alpha = 0,19$ и $\epsilon = 0,94$, т. е. $\alpha/\epsilon = 0,20$.

В общем случае излучение нечерного тела складывается из собственного излучения и отраженного от него излучения других тел

$$M_{\lambda\Sigma} = M_{\lambda\text{соб}} + M_{\lambda\text{отр.}}$$

Спектральную плотность энергетической светимости отраженного излучения $M_{\lambda\text{отр}}$ можно выразить через спектральную плотность энергетической освещенности E_{λ} и спектральный коэффициент отражения $\rho(\lambda, T)$

$$M_{\lambda\text{отр}} = \rho(\lambda, T) E_{\lambda},$$

причем *спектральный коэффициент отражения* $\rho(\lambda, T)$ равен отношению монохроматического потока излучения, отраженного данным телом, к монохроматическому потоку излучения, упавшему на него.

В свою очередь, спектральную плотность энергетической светимости собственного (теплого) излучения $M_{\lambda\text{соб}}$ можно выразить через спектральную энергетическую светимость абсолютно черного тела и спектральный коэффициент теплового излучения

$$M_{\lambda\text{соб}}(\lambda, T) = \epsilon(\lambda, T) M_{\lambda}^0(\lambda, T).$$

Следовательно, общую спектральную плотность энергетической светимости нечерного тела можно определить как

$$M_{\lambda\Sigma} = \epsilon(\lambda, T) M_{\lambda}^0(\lambda, T) + \rho(\lambda, T) E_{\lambda}.$$

Если тело полностью непрозрачно, т. е. все излучение, падающее на него, либо поглощается, либо отражается, то сумма спектральных коэффициентов поглощения и отражения равна единице, т. е.

$$\alpha(\lambda, T) + \rho(\lambda, T) = 1,$$

а так как $\alpha(\lambda, T) = \epsilon(\lambda, T)$, то

$$M_{\lambda\Sigma} = \epsilon(\lambda, T) M_{\lambda}^0(\lambda, T) + [1 - \epsilon(\lambda, T)] E_{\lambda}.$$

Для полупрозрачных тел имеет место более сложное соотношение, учитывающее коэффициент пропускания

$$\alpha(\lambda, T) + \tau^*(\lambda, T) + \rho^*(\lambda, T) = 1,$$

где $\tau^*(\lambda, T)$ и $\rho^*(\lambda, T)$ — кажущиеся наблюдаемые коэффициенты пропускания и отражения, отличающиеся от истинных коэффициентов пропускания и отражения $\rho(\lambda, T)$ и $\tau(\lambda, T)$ за счет потерь на многократное отражение от поверхностей, ограничивающих слой полупрозрачного вещества, из-за чего $\tau^*(\lambda, T) < \tau(\lambda, T)$, и за счет

многократного внутреннего отражения, увеличивающего первичное отражение, из-за чего $\rho^*(\lambda, T) > \rho(\lambda, T)$.

Соответствующие формулы имеют вид:

$$\tau^*(\lambda, T) = \tau(\lambda, T) \frac{[1 - \rho(\lambda, T)]^2}{1 - \rho^2(\lambda, T) \tau^2(\lambda, T)},$$

$$\rho^*(\lambda, T) = \rho(\lambda, T) \left[1 + \frac{\tau^2(\lambda, T) [1 - \rho^2(\lambda, T)]^2}{1 - \rho^2(\lambda, T) \tau^2(\lambda, T)} \right].$$

Распределение энергии излучения в спектре абсолютно черного тела определяется формулой Планка, полученной им в 1900 г. на основе представлений о квантовой природе света.

Формула Планка определяет зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела в вакууме от температуры и длины волны

$$M_\lambda^0(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} (e^{c_2/(\lambda T)} - 1)^{-1}.$$

Здесь λ — длина волны, см или мкм; T — абсолютная температура, К; c_1 — первая постоянная формулы Планка, $c_1 = 2\pi^5 c^2 h = (3,7415 \pm \pm 0,0003) \cdot 10^{-12}$ Вт·см² = $3,7415 \cdot 10^4$ Вт·см⁻²·мкм⁴; c_2 — вторая постоянная формулы Планка, $c_2 = ch/k = (1,43879 \pm 0,00019)$ см·К = $1,43879 \cdot 10^4$ мкм·К.

В выражения для постоянных формулы Планка входят: скорость света в вакууме $c = (2,997925 \pm 0,000003) \cdot 10^{10}$ см·с⁻¹; постоянная Планка $h = (6,6256 \pm 0,0005) \cdot 10^{-34}$ Дж·с; постоянная Больцмана $k = (1,38054 \pm 0,00018) \cdot 10^{-23}$ Дж·К⁻¹ = $1,38054 \cdot 10^{-23}$ Вт·с·К⁻¹ = $1,38054 \cdot 10^{-16}$ эрг·К⁻¹.

Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела, определяемая формулой Планка, выражается в Вт·см⁻³ или в Вт·см⁻²·мкм⁻¹.

Если излучение происходит не в вакууме, а в среде, имеющей показатель преломления n , в формуле Планка следует заменить скорость света c на c/n и длину волны λ на λ/n .

Из формулы Планка следуют два закона, которые фактически были получены до появления квантовой теории на основании термодинамических соотношений.

В соответствии с первым из них — *законом Стефана—Больцмана* — суммарная (интегральная) энергетическая светимость M^0 (Вт·см⁻²) пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры

$$M^0 = \int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \approx 5,7 \cdot 10^{-12} T^4,$$

где σ — постоянная Стефана—Больцмана, $\sigma = (2/15) \pi^5 [k^4/(c^2 h^3)] = (c_1/c_2^4)(\pi^4/15) = (5,6697 \pm 0,0029) \cdot 10^{-12}$ Вт·см⁻²·К⁻⁴ $\approx 5,7 \times 10^{-12}$ Вт·см⁻²·К⁻⁴.

Второй закон — *закон смещения Голицына — Вина* — позволяет найти длину волны, соответствующую максимальному излучению.

Дифференцируя формулу Планка по длине волны и приравнявая результат нулю, найдем:

$$\lambda_m T = c_2/4,9651;$$

$$\lambda_m T = 0,28978 \text{ см} \cdot \text{К} = 2897,8 \text{ мкм} \cdot \text{К},$$

т. е. длина волны максимального излучения обратно пропорциональна абсолютной температуре.

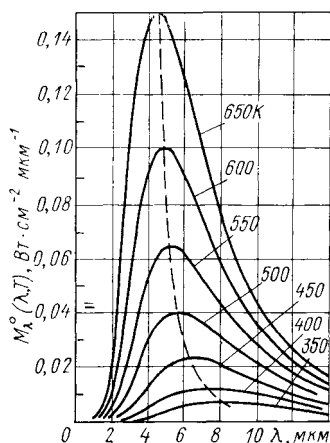


Рис. 201. Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела в зависимости от длины волны при различных температурах (штриховая линия, проходящая через максимумы кривых Планка, представляет закон смещения Голицына — Вина)

гревать излучатель до максимально возможной температуры, не ограничиваясь выбором температуры излучателя в соответствии с законом смещения Голицына—Вина.

2. Подъем кривых Планка со стороны более коротких волн круче, чем со стороны длинных. Мощность излучения, заключенная между длиной волны, равной нулю, и длиной волны, соответствующей максимуму излучения, может быть легко вычислена путем численного интегрирования. Она составляет четвертую часть суммарной мощности излучения

$$\int_0^{\lambda_m} M_{\lambda}^0(\lambda, T) d\lambda = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} M_{\lambda}^0(\lambda, T) d\lambda = \frac{\sigma T^4}{4}.$$

3. Начиная с 14 мкм, имеет место практически полное поглощение инфракрасного излучения атмосферой, поэтому отношение мощ-

Подставляя полученное значение λ_m в формулу Планка, можно найти максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости ($\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2}$)

$$M_{\lambda}^0(\lambda_m T) = M_{\lambda_m}^0(T) = \mathcal{B} T^5 \approx 1,3 \cdot 10^{-11} T^5,$$

причем постоянная

$$\mathcal{B} = (c_1/c_2^5) (4,9651)^5 (e^{4,9651} - 1)^{-1} =$$

$$= 2\pi [k^5/(h^4 c^3)] (4,9651)^5 (e^{4,9651} - 1)^{-1} =$$

$$= 1,2865 \cdot 10^{-11} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-5}.$$

Спектральное распределение энергетической светимости абсолютно черного тела при некоторых температурах, описываемое формулой Планка, представлено на рис. 201 в виде семейства кривых, называемых кривыми Планка.

Анализ хода кривых Планка позволяет сделать некоторые выводы, имеющие важное практическое значение.

1. Кривая Планка для более низкой температуры всегда расположена внутри кривой для более высокой температуры. Следовательно, для получения максимальной энергии излучения на заданной длине волны необходимо на-

Значения функции $y = f(x)$

x	y	x	y	x	y	x	y
0,10	$4,70 \cdot 10^{-15}$	1,20	$9,28 \cdot 10^{-1}$	2,30	$2,89 \cdot 10^{-1}$	5,00	$2,68 \cdot 10^{-2}$
0,20	$7,37 \cdot 10^{-6}$	1,30	$8,60 \cdot 10^{-1}$	2,40	$2,58 \cdot 10^{-1}$	6,00	$1,42 \cdot 10^{-2}$
0,30	$3,8 \cdot 10^{-3}$	1,40	$7,85 \cdot 10^{-1}$	2,50	$2,32 \cdot 10^{-1}$	7,00	$8,20 \cdot 10^{-3}$
0,40	$5,65 \cdot 10^{-2}$	1,50	$7,10 \cdot 10^{-1}$	2,60	$2,08 \cdot 10^{-1}$	8,00	$5,05 \cdot 10^{-3}$
0,50	$2,22 \cdot 10^{-1}$	1,60	$6,38 \cdot 10^{-1}$	2,70	$1,87 \cdot 10^{-1}$	9,00	$3,27 \cdot 10^{-3}$
0,60	$4,66 \cdot 10^{-1}$	1,70	$5,71 \cdot 10^{-1}$	2,80	$1,69 \cdot 10^{-1}$	10,0	$2,20 \cdot 10^{-3}$
0,70	$7,04 \cdot 10^{-1}$	1,80	$5,10 \cdot 10^{-1}$	2,90	$1,53 \cdot 10^{-1}$	15,0	$4,80 \cdot 10^{-4}$
0,80	$8,77 \cdot 10^{-1}$	1,90	$4,54 \cdot 10^{-1}$	3,00	$1,38 \cdot 10^{-1}$	20,0	$1,60 \cdot 10^{-4}$
0,90	$9,72 \cdot 10^{-1}$	2,00	$4,05 \cdot 10^{-1}$	3,50	$8,66 \cdot 10^{-2}$	30,0	$3,25 \cdot 10^{-5}$
1,00	1,00	2,10	$3,62 \cdot 10^{-1}$	4,00	$5,65 \cdot 10^{-2}$	50,0	$4,36 \cdot 10^{-6}$
1,10	$9,79 \cdot 10^{-1}$	2,20	$3,23 \cdot 10^{-1}$				

ности излучения, сосредоточенной в спектральном интервале до 14 мкм, к суммарной мощности излучения дает представление о максимально возможном коэффициенте использования излучения при проведении измерений в атмосфере Земли.

При температурах излучателя 600 и 300 К это отношение соответственно равно:

$$\eta_{600} = \int_0^{14} M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, 600) d\lambda \bigg/ \int_0^{\infty} M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, 600) d\lambda = 0,87;$$

$$\eta_{300} = \int_0^{14} M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, 300) d\lambda \bigg/ \int_0^{\infty} M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, 300) d\lambda = 0,48.$$

4. Пользоваться семейством кривых Планка при выполнении практических расчетов затруднительно, так как для каждого значения температуры придется иметь отдельную кривую. Этого можно избежать, вводя в формулу Планка безразмерные величины:

$$y = \frac{M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T)}{M_{\lambda_m}^{\circ}(\lambda_m, T)}; \quad x = \lambda/\lambda_m.$$

В этом случае формула Планка имеет вид

$$y = 142,32x^{-5}(e^{4,9651/x} - 1)^{-1}.$$

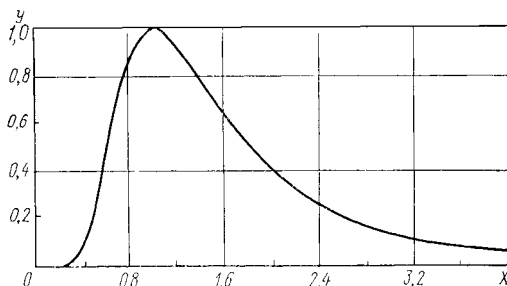


Рис. 202. Единая изотермическая кривая Планка

Кривая, построенная по этой формуле, представлена на рис. 202. Она называется изотермической кривой Планка. Значения функции $y = f(x)$ приведены в табл. 11.

Иногда изотермическую кривую Планка представляют в виде функции $y = M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T)/M_{\lambda_m}^{\circ}(\lambda_m, T) = f(\lambda T)$, что практически

приводит лишь к некоторому изменению масштаба по оси абсцисс, так как

$$x = \lambda/\lambda_m \approx \lambda T/2897,8 \approx \lambda T/3000.$$

На рис. 203 изотермическая (универсальная) кривая Планка дана в этом виде, причем одновременно нанесена кривая, позволяющая определить (z) долю интегральной энергетической светимости от $\lambda T = 0$ до определенной величины $\lambda T \left(z = \frac{\int_0^x y dx}{\int_0^\infty y dx} \right)$. Например, при $\lambda T = 4000$ мкм·К спектральная плотность энергии

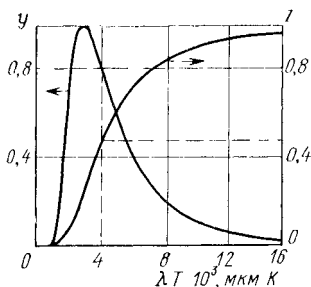


Рис. 203. Универсальные кривые излучения абсолютно черного тела

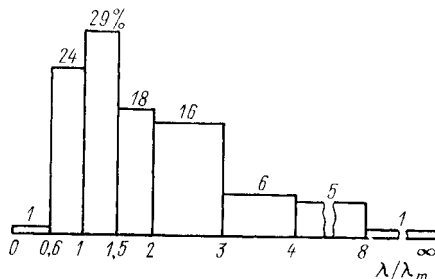


Рис. 204. Количество энергии, приходящейся на различные участки спектра

ческой светимости составляет 0,8 ее максимального значения. В области от нуля до $\lambda T = 4000$ мкм·К заключено около 50 % полного излучения.

Оценка доли энергии, приходящейся на различные участки спектра излучения абсолютно черного тела, представлена на рис. 204 в виде диаграммы.

До сих пор формула Планка рассматривалась как некоторая функция от длины волны. Шкала длин волн в настоящее время наиболее распространена. Однако закон Планка можно выразить, взяв в качестве аргумента частоту $\nu = c/\lambda$ или волновое число $\tilde{\nu} = 1/\lambda$.

Для шкалы частот закон Планка имеет вид

$$M_\nu^\circ(\nu, T) = (c_1/c^4) \nu^3 (e^{c_2 \nu/(cT)} - 1)^{-1} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} (e^{h\nu/(kT)} - 1)^{-1}$$

и представляет собой спектральную плотность энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру T на частоте ν .

Следует отметить, что максимум функции Планка по шкале длин волн сдвинут в сторону больших частот по отношению к максимуму по шкале частот.

Для шкалы волновых чисел закон Планка имеет вид

$$M_{\tilde{\nu}}^\circ(\tilde{\nu}, T) = c_1 \tilde{\nu}^3 (e^{c_2 \tilde{\nu}/T} - 1)^{-1}$$

и представляет собой спектральную плотность энергетической светимости абсолютно черного тела, имеющего температуру T для волнового числа $\tilde{\nu}$.

Максимум функции $M_{\tilde{\nu}}^{\circ}(\tilde{\nu}, T)$ располагается там же, где максимум функции $M_{\nu}^{\circ}(\nu, T)$.

Кроме указанных шкал, иногда применяют логарифмическую шкалу длин волн или волновых чисел.

В некоторых случаях излучение удобно характеризовать числом фотонов, поступающих в единицу времени. Закон Планка для спектральной плотности потока фотонов $N_{\lambda}(\lambda, T)$, выраженной в фотон $\cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{мкм}^{-1}$, имеет вид

$$N_{\lambda}(\lambda, T) = 2\pi c \lambda^{-1} (e^{hc/(\lambda kT)} - 1)^{-1} = c_3 \lambda^{-4} (e^{c_2/(\lambda T)} - 1)^{-1},$$

где $c_2 = 1,43879 \cdot 10^4$ мкм \cdot К; $c_3 = 1,88365 \cdot 10^{23}$ мкм³ $\cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$; λ , в мкм.

Во многих случаях, когда температуры цели и фона очень близки и обнаружение становится затруднительным, основной интерес представляют не абсолютные значения излучений цели и фона, а разность потоков, испускаемых объектом излучения (целью) и фоном с единицы площади их излучающих поверхностей. Эта разность определяет возможность выделения цели из окружающего ее фона и называется *контрастным излучением или энергетическим контрастом*.

Контрастное излучение двух близких по температуре абсолютно черных тел можно найти, дифференцируя формулу Планка и переходя к конечным разностям,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T)}{\partial T} &= c_1 \lambda^{-5} \frac{\partial}{\partial T} (e^{c_2/(\lambda T)} - 1)^{-1} = \\ &= \frac{c_1 c_2}{T^2} \lambda^{-6} (e^{c_2/(\lambda T)} - 1)^{-2} e^{c_2/(\lambda T)} = \frac{c_2}{\lambda T} (1 - e^{-c_2/(\lambda T)})^{-1} \frac{M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T)}{T}. \end{aligned}$$

Переход к конечным разностям дает

$$\Delta M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T) = [c_2/(\lambda T)] (1 - e^{-c_2/(\lambda T)})^{-1} M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T) \Delta T/T.$$

Оценка пределов изменения температуры ΔT , для которых возможен переход к конечным разностям, показывает, что при значении температуры, близком к комнатной ($T \approx 300$ К), расчеты с точностью до 10 % возможны во всем спектральном диапазоне от 2 до 14 мкм. Относительные значения $\Delta M_{\lambda}^{\circ}(\lambda, T)/\Delta T$ в функции λT приведены на рис. 205. Длина волны, соответствующая максимуму этой функции, определяется выражением, аналогичным закону смещения Голицына—Вина, $\lambda_m T = 2411$ мкм \cdot К. Для $T = 300$ К $\lambda_m \approx 8$ мкм.

Так как с ошибкой не более чем 5 %

$$(1 - e^{-c_2/(\lambda T)})^{-1} = 1$$

при $c_2/(\lambda T) \geq 3$, т. е. при $\lambda T \leq c_2/3 = 1,44 \cdot 10^4/3 \approx 5000$ мкм·К, то для области температур, близких к комнатной, можно считать

$$\Delta M_{\lambda}^0(\lambda, T) \approx [c_2/(\lambda T)] M_{\lambda}^0(\lambda, T) \Delta T/T.$$

Интегральное значение контрастного излучения в спектральном диапазоне от 0 до λ равно

$$\Delta M_{0-\lambda}^0 = c_2 \frac{\Delta T}{T^3} \int_0^{\lambda} M_{\lambda}^0(\lambda, T) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

В диапазоне от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$ контрастное излучение легко определить, дифференцируя формулу закона Стефана—Больцмана,

$$dM^0/dT = 4\sigma T^3,$$

откуда получим

$$\Delta M_{0-\infty}^0 = 4\sigma T^3 \Delta T \approx 22,7 \cdot 10^{-12} T^3 \Delta T.$$

Интегральное контрастное излучение двух нечерных тел можно вычислить по формуле

$$\Delta M_{0-\infty}^0 = \int_0^{\infty} \{ \varepsilon_1(\lambda, T_1) M_{\lambda}^0(\lambda, T_1) - \varepsilon_2(\lambda, T_2) \times \\ \times M_{\lambda}^0(\lambda, T_2) + [\rho_1(\lambda, T_1) - \rho_2(\lambda, T_2)] E_{\lambda} \} d\lambda,$$

где $\varepsilon_1(\lambda, T_1)$ и $\varepsilon_2(\lambda, T_2)$ — спектральные коэффициенты теплового излучения тел, имеющих температуры T_1 и T_2 соответственно; $M_{\lambda}^0(\lambda, T_1)$ и $M_{\lambda}^0(\lambda, T_2)$ — спектральные плотности энергетической светимости абсолютно черного тела для температур T_1 и T_2 соответственно; $\rho_1(\lambda, T_1)$; $\rho_2(\lambda, T_2)$ — спектральные коэффициенты отражения тел; E_{λ} — спектральная плотность энергетической освещенности тел (предполагается одинаковой).

Методику расчета характеристик инфракрасного излучения абсолютно черного тела в широком диапазоне температур от 100 до 6000 К и необходимые справочные данные можно найти в книге М. А. Брамсона «Инфракрасное излучение нагретых тел».

§ 9.4. ВЛИЯНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СРЕДЫ НА МОЩНОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ СОСТАВ ИЗЛУЧЕНИЯ

В большинстве случаев излучение объекта наблюдения поступает в приемное устройство оптико-электронного прибора измененным по величине и спектральному составу за счет действия промежуточной среды, в которой оно распространяется. При этом часть энергии излучения поглощается средой, часть отражается, часть рассеивается и только оставшаяся часть используется наблюдателем. Решение задачи о прохождении потока излучения сквозь промежуточную среду требует рассмотрения механизма взаимодействия излу-

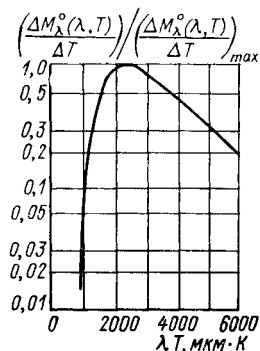


Рис. 205. Относительные значения $\Delta M_{\lambda}^0(\lambda, T)/\Delta T$ в функции λT

чения с веществом. Действие электромагнитной волны на вещество и обратное воздействие вещества на электромагнитную волну сводится к возбуждению колебаний электрических зарядов, входящих в состав вещества, в такт с колебаниями электрического вектора волны возбуждения и возникновению вследствие этого вторичных электромагнитных волн. Интерференция первичной и вторичной волн обуславливает в линейном приближении все процессы отражения, преломления, поглощения, рассеяния и т. д. Полная молекулярная теория прохождения света через вещество сводится к разбору этого взаимодействия.

Формально результат взаимодействия может быть описан с помощью коэффициентов пропускания, поглощения и отражения.

Если $\Phi_0(\lambda)$ — монохроматический поток излучения, вошедший в некоторую среду, а $\Phi_\tau(\lambda)$ — монохроматический поток излучения, прошедший через некоторую толщу этой среды, то спектральный коэффициент пропускания, характеризующий прозрачность среды, равен

$$\tau(\lambda) = \Phi_\tau(\lambda)/\Phi_0(\lambda).$$

Естественно предположить, что в однородной среде тонкие слои одинаковой толщины dR поглощают одинаковую долю падающего на них монохроматического потока (при относительно слабых потоках, когда еще не сказываются нелинейные явления).

Иными словами, поглощенный в тонком слое элементарный поток излучения $d\Phi_0(\lambda)$ пропорционален падающему на этот слой потоку $\Phi_0(\lambda)$ и толщине слоя

$$d\Phi_0(\lambda) = -a'(\lambda) \Phi_0(\lambda) dR,$$

где $a'(\lambda)$ — коэффициент пропорциональности или *спектральный натуральный показатель поглощения*, равный отношению потока излучения, поглощенного тонким слоем среды, к потоку, вошедшему в этот слой, и толщине слоя. Иначе говоря, это отношение коэффициента поглощения для элемента пути, пройденного излучением, к длине dl этого элемента. Знак минус показывает, что имеет место уменьшение потока излучения, вошедшего в слой.

Разделяя переменные и интегрируя по всей толщине R среды, найдем

$$\int_{\Phi_0(\lambda)}^{\Phi_\tau(\lambda)} \frac{d\Phi_0(\lambda)}{\Phi_0(\lambda)} = - \int_0^R a'(\lambda) dR,$$

откуда

$$\ln [\Phi_\tau(\lambda)/\Phi_0(\lambda)] = -a'(\lambda) R;$$

$$\Phi_\tau(\lambda) = \Phi_0(\lambda) e^{-a'(\lambda) R}.$$

Полученное соотношение называется *степенным законом ослабления излучения* или *законом Бугера—Ламберта*.

Из него, в частности, следует, что спектральный натуральный показатель поглощения $a'(\lambda) = -\ln [\Phi_\tau(\lambda)/\Phi_0(\lambda)]/R$ есть величина, обратная расстоянию, на котором поток излучения, образующий

параллельный пучок, ослабляется в e раз (основание натуральных логарифмов) в результате поглощения в веществе. Действительно, при $\Phi_\tau(\lambda)/\Phi_0(\lambda) = 1/e$, $a'(\lambda) = 1/R$.

Спектральный показатель поглощения $a(\lambda)$ ГОСТ 7601—78 определяет как величину, обратную расстоянию, на котором ослабление потока излучения равно 10. Очевидно, что $a'(\lambda) = 2,3a(\lambda)$, $a(\lambda) = 0,434a'(\lambda)$.

В свою очередь, натуральный показатель поглощения a' и *главный показатель поглощения κ* находятся в соотношении $a' = 4\pi\kappa$, а κ , наряду с показателем преломления n , является составляющей комплексного показателя преломления

$$\hat{n} = n - j\kappa.$$

Учитывая определение спектрального коэффициента пропускания, можно найти

$$\tau(\lambda) = e^{-a'(\lambda)R}.$$

Из степенного закона ослабления излучения следует, что если для данного расстояния R_0 коэффициент пропускания известен и равен

$$\tau_0(\lambda) = e^{-a'(\lambda)R_0},$$

то для расстояния R его можно найти следующим образом.

Возводя обе части уравнения для $\tau_0(\lambda)$ в степень R/R_0 , получим:

$$[\tau_0(\lambda)]^{R/R_0} = e^{-a'(\lambda)R}; \quad \tau(\lambda) = [\tau_0(\lambda)]^{R/R_0}.$$

Если $R_0 = 1$ (1 см, 1 м, 1 км), то $\tau(\lambda) = [\tau_0(\lambda)]^R$.

В некоторых случаях пропускание материалов характеризуется их оптической плотностью D , связанной с коэффициентом пропускания соотношением

$$D(\lambda) = \lg |1/\tau(\lambda)| = \lg e^{a'(\lambda)R} = 0,434a'(\lambda)R = a(\lambda)R.$$

Единицей оптической плотности является такая плотность, при которой происходит ослабление проходящего излучения в 10 раз. Если излучение проходит через оптическую среду, состоящую из нескольких различных слоев, то общий спектральный коэффициент пропускания равен произведению коэффициентов пропускания отдельных слоев

$$\tau(\lambda) = \tau_1(\lambda) \tau_2(\lambda) \dots \tau_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{i=n} \tau_i(\lambda),$$

а спектральная оптическая плотность — сумме плотностей каждого слоя

$$D(\lambda) = D_1(\lambda) + D_2(\lambda) + \dots + D_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{i=n} D_i(\lambda).$$

Следует иметь в виду, что при этом не учитывается отражение от границ раздела слоев.

Отражение и преломление наблюдаются на границе раздела двух сред, имеющих разные показатели преломления. Направленное (зеркальное) отражение и преломление подчиняются, как известно, следующим законам (рис. 206)

Луч падающий (поток излучения Φ_0), луч отраженный (поток излучения Φ_ρ), луч преломленный (поток излучения Φ_r) и нормаль в точке падения \vec{N} лежат в одной плоскости. Угол падения равен углу отражения: $i = \rho$. Угол падения i и угол преломления r связаны между собой зависимостью $\sin i / \sin r = n_2(\lambda) / n_1(\lambda) = n_{21}(\lambda)$, где $n_1(\lambda)$ и $n_2(\lambda)$ — абсолютные спектральные показатели преломления; $n_{21}(\lambda)$ — относительный спектральный показатель преломления второй среды относительно первой.

Показатель или коэффициент преломления среды для монохроматического излучения с длиной волны λ (от λ до $\lambda + d\lambda$) равен отношению фазовой скорости монохроматического излучения в вакууме к фазовой скорости монохроматического излучения в среде. Законы отражения и преломления потока излучения дают правильный ответ на вопрос о направлении преломленной и отраженной волны, но ничего не говорят о величине и фазе отраженного и преломленного излучения.

Соответствующие соотношения можно найти, пользуясь формулами Френеля. Для естественного (неполяризованного) излучения справедливы следующие выражения для отраженного и преломленного потоков излучения:

$$\Phi_\rho(\lambda) = 0,5\Phi_0(\lambda) \left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)} \right];$$

$$\Phi_r(\lambda) = 0,5\Phi_0(\lambda) \left[\frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} + \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \right].$$

Следовательно, спектральный коэффициент отражения равен $\rho(\lambda) = \Phi_\rho(\lambda) / \Phi_0(\lambda) = [\sin^2(i-r) / \sin^2(i+r) + \operatorname{tg}^2(i-r) / \operatorname{tg}^2(i+r)] / 2$, причем в соответствии с законом преломления

$$\sin r = (n_1 / n_2) \sin i,$$

а отношение n_1 / n_2 является функцией длины волны.

Для нормального падения $i = r = 0$ формулы Френеля упрощаются, и выражение для спектрального коэффициента отражения имеет вид

$$\rho(\lambda) = (n_2 - n_1)^2 / (n_2 + n_1)^2 = (n_{21} - 1)^2 / (n_{21} + 1)^2,$$

где n_1 , n_2 , n_{21} — спектральные коэффициенты (показатели) преломления — функции длины волны λ .

В процессе отражения и преломления излучения на границе раздела двух сред имеют место различные физические явления, из которых наибольший интерес представляют: 1) поляризация отраженного потока излучения; 2) полное внутреннее отражение; 3) интерференция отраженных лучей при просветлении оптики.

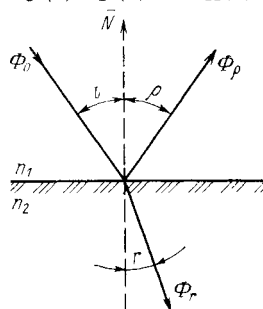


Рис. 206. Зеркальное отражение и преломление излучения на границе двух сред

1. В общем случае поток излучения, падающий на границу раздела двух сред, является естественным, т. е. ориентировка электрического и магнитного векторов падающей электромагнитной волны изменяется с течением времени. Однако для любого момента можно разложить каждый из векторов на две составляющие, расположенные в плоскости падения (p -компонента) и перпендикулярно к ней (s -компонента).

Отраженный поток излучения всегда оказывается более или менее *поляризованным*, причем преимущественная поляризация — в плоскости падения (электрический вектор, перпендикулярный плоскости падения, имеет большую амплитуду).

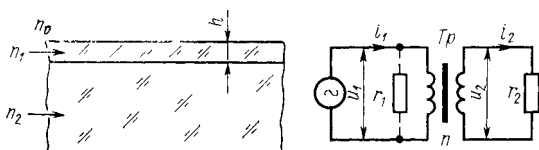


Рис. 207. Просветление оптики

Степень поляризации p (%) характеризуется отношением

$$p = [(\Phi_s - \Phi_p)/(\Phi_s + \Phi_p)] 100,$$

где Φ_s и Φ_p — потоки излучения, соответствующие компонентам s и p .

При условии $i + r = \pi/2$ $p = 100$ %, т. е. имеет место полная поляризация отраженного излучения (закон Брюстера). Для проходящего излучения полная поляризация невозможна.

2. Из закона преломления следует, что если $n_{21} < 1$, то возможно такое значение угла падения i , при котором $\sin r > 1$, что не имеет смысла. Угол i , соответствующий условию $\sin i = n_{21}$, принято называть критическим или предельным. В этих условиях мы не наблюдаем преломленной волны, а излучение отражается обратно в первую среду, в соответствии с чем явление носит название *полного внутреннего отражения*.

3. Вследствие френелевского отражения происходит значительное ослабление потока излучения, проходящего через границу раздела. Для устранения этого явления применяют просветление оптики путем нанесения на поверхности линз тончайшей прозрачной пленки с показателем преломления n_1 , меньшим показателя преломления материала линзы n_2 . При этом толщина пленки h (рис. 207) подбирается таким образом, чтобы отраженные от поверхности пленки и линзы потоки излучения имели фазу колебаний, отличающуюся на 180° , и погасили друг друга. Следовательно, толщина просветляющей пленки должна выбираться из условия, обеспечивающего равенство разности хода отраженных лучей нечетному числу полу-волн

$$2hn_1 = (2k + 1) \lambda/2.$$

Для полного гашения отраженных лучей необходимо также обеспечить равенство коэффициентов отражения пленки и линзы. При нормальном падении излучения из этого равенства следует: $(n_1 - n_0)/(n_1 + n_0) = (n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)$, откуда $n_1 = \sqrt{n_0 n_2} \approx \sqrt{n_2}$, так как $n_0 \approx 1$.

Таким образом, просветляющий слой осуществляет согласование оптических характеристик свободного пространства с характеристиками материала линзы.

В электротехнике функции, аналогичные функциям просветляющей пленки, выполняет согласующий трансформатор с коэффициентом трансформации n , предназначенный для преобразования реального сопротивления нагрузки r_2 в заданное эффективное сопротивление r_1 с целью достижения максимального к. п. д. генератора (см. рис. 207). Действительно, имеют место следующие соотношения, связывающие напряжения и токи в первичной и вторичной обмотках трансформатора:

$$u_2 = nu_1; \quad i_2 = i_1/n;$$

$$u_2/i_2 = n^2 (u_1/i_1).$$

Наряду с этим

$$u_2/i_2 = r_2; \quad u_1/i_1 = r_1,$$

следовательно,

$$r_2 = n^2 r_1; \quad n = \sqrt{r_2/r_1},$$

если $r_1 = 1$, то $n = \sqrt{r_2}$.

Кроме направленного (зеркального) отражения света, имеющего место в случае, когда шероховатость отражающей поверхности много меньше длины волны, наблюдается рассеянное отражение, когда неоднородность структуры сравнима с длиной волны излучения (рис. 208).

Рассеянное отражение подразделяется на направленно-рассеянное и совершенно-рассеянное (диффузное).

Рассеянное отражение характерно тем, что пространственный угол, в котором распространяется поток излучения, при отражении увеличивается. Для диффузно отражающих поверхностей он равен 2π , и спектральная плотность их энергетической яркости за счет отражения излучения определяется соотношением

$$L_{d\lambda} = M_{d\lambda}/\pi = \rho_d(\lambda) E_\lambda/\pi,$$

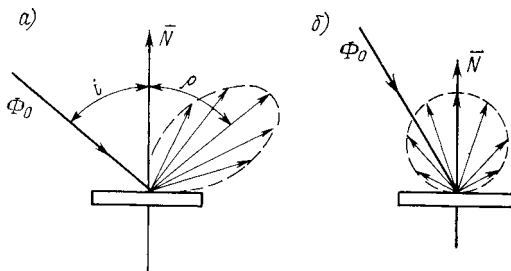


Рис. 208. Рассеянное отражение: а — направленно-рассеянное; б — диффузное

где $\rho_d(\lambda)$ — спектральный коэффициент диффузного отражения; E_λ — спектральная плотность энергетической освещенности поверхности.

В случае направленно-рассеянного отражения для характеристики свойств отражающей поверхности вводят понятие *спектрального коэффициента энергетической яркости* $\beta(\lambda)$, представляющего собой отношение спектральной плотности энергетической яркости поверхности в заданном направлении L_λ к спектральной плотности энергетической яркости идеально рассеивающей поверхности $L_{0\lambda}$, имеющей коэффициент отражения, равный единице, и освещенной так же, как данная поверхность,

$$\beta(\lambda) = L_\lambda / L_{0\lambda} = (L_\lambda / E_\lambda) \pi.$$

Очевидно, что для диффузно отражающей поверхности коэффициент яркости равен коэффициенту отражения

$$\beta_d(\lambda) = [L_{d\lambda} / E_\lambda] \pi = [\rho_d(\lambda) E_\lambda / (E_\lambda \pi)] \pi = \rho_d(\lambda).$$

§ 9.5. ОСЛАБЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРОЙ

Существует три физически разнородных процесса, вызывающих *ослабление излучения* атмосферой: *рассеяние* излучения молекулами атмосферных газов; *рассеяние* излучения частицами дымки, а также частицами, из которых состоят туманы и облака; *поглощение* излучения молекулами газов, составляющих атмосферу, и парами воды.

Количественной характеристикой ослабления излучения является *спектральный натуральный показатель ослабления* $\mu'(\lambda)$, который представляет собой отношение относительного уменьшения монохроматического потока излучения практически параллельного пучка во время его прохождения (при нормальном падении) через бесконечно тонкий слой среды к толщине dR этого слоя:

$$\mu'(\lambda) = - \frac{d\Phi(\lambda)}{dR} \frac{1}{\Phi(\lambda)}.$$

Введенный ранее спектральный натуральный показатель поглощения $a'(\lambda)$ есть часть показателя ослабления, обусловленная поглощением. Другая часть, обусловленная рассеянием, называется *спектральным натуральным показателем рассеяния*. Он обозначается в виде $r'(\lambda)$.

Учитывая, что коэффициент пропускания среды с учетом рассеяния связан с показателем ослабления степенным законом, то

$$\tau(\lambda) = e^{-\mu'(\lambda)R}.$$

Спектральный натуральный показатель ослабления можно также определить как величину, обратную расстоянию, на котором поток монохроматического излучения, образующего параллельный пучок, ослабляется в результате совместного действия поглощения и рассеяния в веществе в e раз.

Показатель ослабления μ есть величина, обратная расстоянию, на котором поток излучения ослабляется в 10 раз. Он связан с натуральным показателем ослабления соотношением $\mu = 0,434\mu'$.

Спектральный натуральный показатель ослабления излучения атмосферой равен

$$\mu'(\lambda) = \mu'_1(\lambda) + \mu'_2(\lambda) + \mu'_3(\lambda),$$

где $\mu'_1(\lambda) = r'_1(\lambda)$ — учитывает молекулярное рассеяние излучения; $\mu'_2(\lambda) = r'_2(\lambda)$ — рассеяние излучения на взвешенных частицах; $\mu'_3(\lambda) = a'(\lambda)$ — поглощение излучения.

В случае чистой и сухой атмосферы излучение рассеивается на неоднородностях среды, связанных с местными изменениями плотности, возникающими благодаря хаотическому тепловому движению молекул атмосферных газов. Размер этих неоднородностей мал по сравнению с длиной волны излучения, и коэффициент ослабления может быть определен по формуле Релея

$$\mu'_1(\lambda) = r'_1(\lambda) = A/\lambda^4,$$

где коэффициент A зависит от температуры и давления воздуха. При $t = 0^\circ \text{C}$ и $p = 700$ мм рт. ст. $A \approx 10^{-30} \text{ м}^3$, т. е. для $\lambda = 0,375 \text{ мкм} = 3,75 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ $\mu'_1(0,375) \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$. Следовательно,

$$\tau_1(0,375) = e^{-\mu'_1(0,375)R} = e^{-5 \cdot 10^{-5} R}.$$

Если $R = 20 \text{ км} = 20 \cdot 10^3 \text{ м} = 1/(5 \cdot 10^{-5}) \text{ м}$, то $\tau_1(0,375) = 1/e \approx 1/2,7$, т. е. монохроматический поток излучения с длиной волны $0,375 \text{ мкм}$ уменьшается в 2,7 раза при прохождении им расстояния в 20 км.

Если наблюдать рассеянное излучение под прямым углом к первичному пучку, то обнаруживается, что оно поляризовано. Если измерять поток излучения, рассеянный по разным направлениям, то можно найти

$$\Phi_0 = \Phi_{\pi/2} (1 + \cos^2 \theta),$$

где θ — угол между направлением наблюдения и распространения первичного пучка излучения.

Кривая, графически показывающая распределение рассеянного потока излучения под различными углами, носит название *индикатрисы рассеяния*.

На практике редко приходится иметь дело с чистой атмосферой. В свободной от облаков и тумана атмосфере содержатся различные примеси (земляная пыль, дым, копоть и др.). Эти примеси являются центрами конденсации водяных паров, в результате чего в атмосфере образуются капли воды. Когда условия образования капель таковы, что их размер не превышает $0,5 \text{ мкм}$, имеет место дымка, в значительной мере ограничивающая дальность видимости.

Для случая, когда размеры частиц соизмеримы с длиной волны, уже неприменим закон рассеяния Релея. Данные о рассеянии на частицах различного размера получены в работах Шулейкина, Стратона и Хаутона, из которых следует, что для $\lambda \gg r$ ($\lambda \geq 2r$), где r — радиус частицы, рассеяние подчиняется закону A/λ^4 ; для $\lambda \ll r$ рассеяние не зависит от длины волны; для $\lambda = r$ имеет место наибольшее рассеяние. Таким образом, в случае дымки, когда

размеры частиц не превышают 0,5 мкм, использование инфракрасной области спектра может иметь преимущества по сравнению с видимыми лучами. На расстоянии 10 км в дымке ослабление инфракрасных лучей с длиной волны около 3 мкм составляет не более 0,00013. Когда видимость в дымке составляет около 1 км, использование для наблюдения даже ближней инфракрасной области спектра дает выигрыш по дальности в 2—4 раза. Использование длинноволновой области ИК-спектра при наблюдении сквозь запыленную и задымленную атмосферу имеет безусловное преимущество ввиду большей скорости осаждения крупных частиц, т. е. большей скорости просветления атмосферы для ИК-лучей.

Т а б л и ц а 12

**Зависимость относительного показателя
рассеяния атмосферы
от дальности видимости**

Состояние атмосферы	Дневная дальность видимости черного предмета на фоне неба свода	Отношение показателя рассеяния реальной атмосферы к показателю рассеяния идеально чистого воздуха μ'_2/μ'_1
Очень плотный туман	< 50 м	> 6060
Плотный туман	50 м	6060
Средний »	200 м	1515
Легкий »	500 м	606
Дымка	1 км	151
Легкая дымка	4 км	75,6
Ясно	10 км	30,2
Очень ясно	20 км	15,1
Исключительно ясно	> 50 км	< 5,06

Работы по определению размеров капелек естественного тумана показывают, что радиусы капелек имеют размеры от 1 до 60 мкм, причем капли, имеющие радиус больше 25 мкм, встречаются крайне редко. Естественный туман никогда не состоит из капелек одного размера, поэтому вычисление прозрачности природных туманов приводит к неточным и противоречивым результатам.

Практически прозрачность тумана лишь очень медленно возрастает с ростом длины волны. При дожде $\rho > 60$ мкм и инфракрасные лучи при наблюдении не имеют преимуществ по сравнению с видимым светом.

Однако это не означает, что инфракрасные системы не могут работать сквозь дождь. Во многих случаях в отличие от облаков и тумана пропускание инфракрасного излучения дождем достаточно велико.

Например, для спектрального диапазона 3,2—4,8 мкм пропускание излучения сквозь дождь на трассе 1,8 км составит 88 % при слабом (0,25 см/ч), 74 % при среднем (1,25 см/ч), 65 % при сильном дожде (2,5 см/ч), 38 % при ливне (10 см/ч).

В табл. 12 приведены значения отношения показателя рассеяния реальной атмосферы к показателю рассеяния идеально чистого воздуха для различных состояний атмосферы.

Значение $\mu'_1 = r'_1$ в видимой области спектра составляет 0,01—0,05 км⁻¹.

В инфракрасной области спектра атмосфера имеет ряд полос по-

глощения, соответствующих резонансным частотам молекул газов, входящих в ее состав. Это прежде всего трехатомные молекулы углекислоты и паров воды.

Углекислота CO_2 характеризуется рядом полос поглощения. Наиболее сильными являются полосы, расположенные вблизи длин волн 4,3 и 12,8—17,3 мкм.

Пары воды H_2O имеют ряд полос, центр которых лежит при 1,37; 1,85; 2,7 и 6,3 мкм. Кроме углекислоты и паров воды, на больших высотах существенным оказывается поглощение озона, который имеет полосы поглощения при 4,8; 6,7; 9,6 мкм.

Начиная с 14 мкм, поглощение всеми компонентами атмосферы становится настолько сильным, что в спектральном диапазоне 14—200 мкм атмосфера практически непрозрачна (небольшое «окно» пропускания расположено вблизи длины волны 21 мкм).

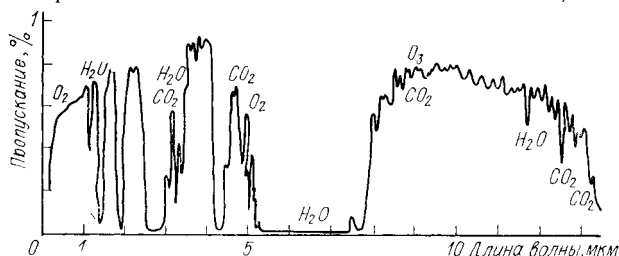


Рис. 209. Пропускание атмосферы на горизонтальной трассе на уровне моря протяженностью 1 миля (1,8 км) при толщине осажденной воды 17 мм по Джебби

Следует иметь в виду, что структура полос поглощения атмосферы в инфракрасной области спектра весьма сложна. Фактически каждая полоса поглощения состоит из множества линий поглощения, частоты которых определяются колебательными и вращательными резонансными частотами молекул. Следовательно, значение коэффициента ослабления $\mu'_z(\lambda) = a'(\lambda)$ меняется здесь очень быстро и применение формулы Бугера—Ламберта становится невозможным. В связи с этим атмосферное поглощение рассчитывается по тем или иным эмпирическим формулам, дающим значение интегрального поглощения для данной полосы пропускания. В качестве примера на рис. 209 приведены кривые спектральной прозрачности атмосферы длиной в 1 милю (1,8 км).

Глава 10

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СИГНАЛА

Свойства приемника излучения (фотоприемника) наиболее полно описываются *системой характеристик*, выражающих зависимость сигнала и шума, вырабатываемых приемником, от различных факторов: величины, спектрального состава и частоты модуляции

излучения, падающего на приемник, температуры окружающей среды, напряжения питания и т. д.

Наиболее распространенными характеристиками приемника излучения являются: *амплитудная* (энергетическая или световая) характеристика, дающая зависимость сигнала от величины потока излучения, падающего на приемник; *спектральная* характеристика, выражающая зависимость сигнала от длины волны падающего излучения; *частотная* характеристика, определяющая инерционные свойства приемника в виде зависимости сигнала от частоты модуляции потока излучения; *шумовая* характеристика, представляющая собой зависимость спектральной плотности шума приемника от частоты.

К сожалению, не всегда возможно иметь для каждого экземпляра приемника излучения полный набор характеристик. Поэтому во многих случаях характеристики заменяются числовыми параметрами, выражающими свойства приемника для определенных наиболее типичных условий.

Например, вместо амплитудной характеристики используется *дифференциальная крутизна преобразования (чувствительность)*, которая определяет величину сигнала, вырабатываемого приемником при облучении его малым синусоидально-модулированным потоком излучения. Частотная характеристика в первом приближении описывается *постоянной времени*; шумовая характеристика — *среднеквадратическим значением шума* или *спектральной плотностью шума* на одной фиксированной частоте. В качестве параметров, описывающих спектральную характеристику, иногда используются *значения длин волн* λ_0 и λ_1 , при которых спектральная чувствительность соответственно равна 0,5 и 0,01 от максимального значения. Например, спектральные свойства фоторезисторов из сернистого, теллуристого и селенистого свинца могут быть описаны следующим образом (в скобках указана температура чувствительного слоя фоторезистора):

	λ_0 , МКМ	λ_1 , МКМ
PbS (295 K)	3,1	3,3
PbTe (77 K)	5,4	5,95
PbSe (77 K)	5,9	6,5

ГОСТ 19852—74 определяет коротковолновую λ' и длинноволновую λ'' границы спектральной чувствительности фотоприемника как наименьшую и наибольшую длины волн монохроматического излучения, при которых спектральная чувствительность фотоприемника равна 0,1 ее максимального значения.

Вместо спектральной характеристики могут задаваться абсолютные значения *пороговой чувствительности* приемника на фиксированных длинах волн и т. д. Если же иметь в виду, что приемник излучения обычно применяется для обнаружения или регистрации потока излучения сложного спектрального состава, т. е. главным образом используются его интегральные свойства, то спектральную характеристику можно задать значениями *коэффициента использования*

излучения или эффективной спектральной ширины полосы пропускания приемника, определение которых приведено ниже.

Далее будут рассмотрены только те характеристики и параметры приемников излучения, которые позволяют осуществить феноменологическое описание свойства приемника преобразовать поток излучения в электрический сигнал.

С этой точки зрения приемник можно рассматривать как четырехполюсник, имеющий крутизну преобразования S , которая и определяет сигнал, вырабатываемый приемником и приходящийся на единицу падающего на него потока излучения (рис. 210).

Крутизна преобразования выражается в различных единицах (вольт на ватт, ом на ватт, ампер на ватт, ампер на люмен и т. д.) и обычно называется чувствительностью, что, конечно, не совсем строго, так как более чувствительным может быть не тот приемник, который вырабатывает больший сигнал, а тот, который обеспечивает большее значение отношения сигнала к шуму. Это обстоятельство находит свое выражение и в технической литературе, где, следуя Джонсу, в отличие от термина *sensitivity* (чувствительность), иногда предпочитают использовать термин *responsivity* (отзывчивость или реакция, ответ).

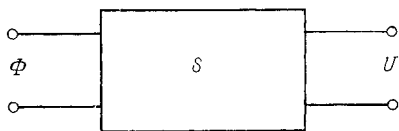


Рис. 210. Приемник как преобразователь излучения в электрический сигнал:

Φ — поток излучения; U — сигнал; S — крутизна преобразования (чувствительность) приемника

§ 10.1. АМПЛИТУДНЫЕ (ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ИЛИ СВЕТОВЫЕ) И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Свойство приемника излучения вырабатывать электрический сигнал определенной величины под действием падающего на него потока

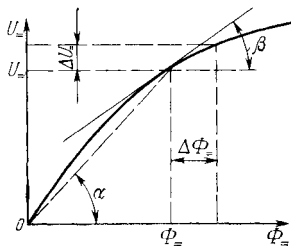


Рис. 211. Общий вид зависимости сигнала, вырабатываемого приемником, от падающего на него потока излучения — полная амплитудная характеристика

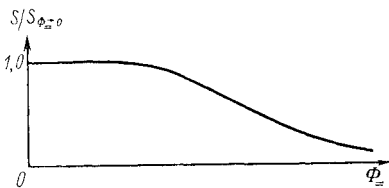


Рис. 212. Общий вид зависимости дифференциальной крутизны (чувствительности) приемника излучения от уровня постоянной засветки — амплитудная (энергетическая или световая) характеристика

излучения трудно выразить одним значением крутизны преобразования, так как зависимость сигнала $U_{\text{н}}$ от потока $\Phi_{\text{н}}$ обычно нелинейна (рис. 211). Для полного описания нужно знать всю эту зависимость,

которую можно назвать *полной амплитудной (статической) характеристикой* приемника излучения. Однако ее получение связано с существенными экспериментальными трудностями, поэтому обычно для описания амплитудной характеристики пользуются понятием *крутизны преобразования (чувствительности)*.

Как известно, различают три значения крутизны (см. рис. 211): *крутизна для немодулированного сигнала*, или *статическая крутизна (чувствительность)* фотоприемника, определяемая наклоном касательной

$$S_{\text{ст}} = U_{\text{ст}} / \Phi_{\text{ст}} = \text{tg } \alpha;$$

крутизна для модулированного сигнала, или *дифференциальная крутизна (чувствительность)*, определяемая наклоном касательной

$$S = \lim_{\Delta \Phi_{\text{ст}} \rightarrow 0} \frac{\Delta U_{\text{ст}}}{\Delta \Phi_{\text{ст}}} = \text{tg } \beta;$$

средняя крутизна $S_{\text{ср}}$, определяемая отношением амплитуды первой гармоники сигнала, вырабатываемого приемником, к амплитуде синусоидально-модулированного потока излучения. Очевидно, что до тех пор, пока поток излучения не выходит за пределы линейного участка полной амплитудной характеристики, средняя крутизна постоянна и сигнал синусоидален. В дальнейшем при увеличении потока имеет место нелинейность, причем в пределе сигнал приобретает форму прямоугольных импульсов, амплитуда первой гармоники

которых практически не изменяется, т. е. значение средней крутизны стремится к нулю.

Наибольшее распространение получило понятие крутизны

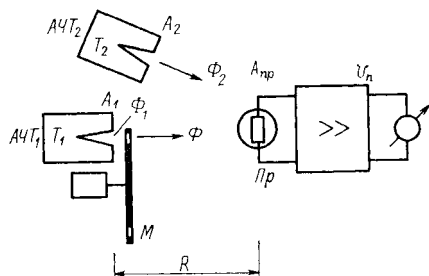


Рис. 213. Принципиальная схема экспериментального определения дифференциальной крутизны приемника излучения

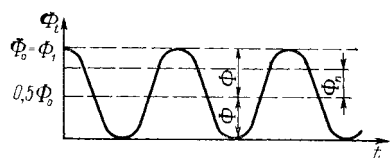


Рис. 214. Процесс синусоидальной модуляции потока излучения $\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_1 = 0,707 \Phi_1 \approx 0,35 \Phi_0 = 0,35 \Phi_1$

для модулированного сигнала, или дифференциальной крутизны (дифференциальной чувствительности). Когда пользуются этим понятием, то под амплитудной (энергетической или световой) характеристикой приемника излучения подразумевают зависимость дифференциальной крутизны (чувствительности), выраженной в относительных величинах $S/S_{\text{ст}} \rightarrow 0$, от уровня постоянной засветки (немодулированного или среднего значения модулированного потока излучения) $\Phi_{\text{ст}}$. Такая характеристика называется *фоновой характеристикой чувствительности* фотоприемника (рис. 212).

Экспериментальное определение дифференциальной крутизны производится следующим образом (рис. 213). Модель абсолютно

черного тела $AЧТ_1$, имеющая температуру T_1 (К) и площадь выходного отверстия A_1 , устанавливается на расстоянии R от приемника излучения $Пр$ с площадью чувствительной поверхности $A_{пр}$.

Немодулированный поток излучения (Вт), падающий на приемник, в этом случае равен

$$\Phi_0 = \Phi_1 = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \frac{A_1}{R^2} A_{пр},$$

где $\sigma \approx 5,7 \cdot 10^{-12}$ Вт·см⁻²·К⁻⁴.

Если этот поток модулируется синусоидально модулятором M , установленным непосредственно у выходного отверстия $AЧТ_1$, то действующее (среднеквадратическое) значение первой гармоники падающего на приемник потока равно (рис. 214)

$$\Phi_{II} = (\sqrt{2}/2)\Phi = (\sqrt{2}/2)0,5\Phi_0 = (\sqrt{2}/2)0,5\Phi_1,$$

где Φ — амплитуда первой гармоники, $(\sqrt{2}/2)0,5 \approx 0,35$.

Сигнал, вырабатываемый приемником, регистрируется прибором, измеряющим среднеквадратическое (действующее) значение первой гармоники U_{II} .

(На рис. 213 предполагается, что прибор отградуирован в действующих значениях первой гармоники входного сигнала, т. е. сигнала на зажимах приемника излучения.)

Уровень постоянной засветки Φ_{\equiv} в общем случае определяется потоком излучения $\Phi_2 AЧТ_2$, постоянной составляющей потока излучения $0,5\Phi_1 AЧТ_1$ и побочными потоками излучения Φ_{ϕ} окружающего фона, т. е.

$$\Phi_{\equiv} = \Phi_2 + 0,5\Phi_1 + \Phi_{\phi}.$$

Обычно измерения проводятся в условиях, когда $\Phi_2 \gg 0,5\Phi_1 + \Phi_{\phi}$. Следовательно,

$$\Phi_{\equiv} \approx \Phi_2 = (\sigma T_2^4/\pi) A_{пр} A_2/R^2.$$

При заданном значении Φ_{\equiv} дифференциальная чувствительность

$$S = U/\Phi = U_{II}/\Phi_{II} \approx 2,83 U_{II}/\Phi_1.$$

Если модулятор не обеспечивает синусоидальной модуляции потока излучения, то осуществляется измерение действующего значения первой гармоники сигнала, выделяемой соответствующим электрическим фильтром. Соотношение между этим действующим значением и фактической величиной полного размаха модулированного потока Φ_1 зависит от формы модуляции. При прямоугольной форме модулированного потока коэффициент $k = \Phi_{II}/\Phi_1 \approx 0,45$, при треугольной форме $k \approx 0,286$. В других случаях значения этого коэффициента могут вычисляться путем разложения сигнала в ряд Фурье.

Основные характеристики приемника измеряются при интегральном облучении (от абсолютно черного тела или другого эталонного источника излучения). Поэтому соответствующее значение крутизны (чувствительности), определяющее меру реакции приемника на сложный поток, называют *интегральным*.

Приводимые в паспортах приемников значения интегральной крутизны обычно определяются для излучения эталонных источников, которыми являются.

источники типа А (2855,6 К), В (4800 К) и С (6500 К) для фотоэлементов с внешним фотоэффектом и других приемников, чувствительных в видимой и ближней инфракрасной области спектра;

абсолютно черное тело с температурами 100° С, 300° С, 500 К и 1273 К для приемников, чувствительных в инфракрасной области спектра.

Сведений об интегральной чувствительности оказывается недостаточно, и возникает потребность в дополнительной информации о *спектральной крутизне* (чувствительности) приемника, определяющей его реакцию на монохроматический поток. Такая информация необходима потому, что один и тот же поток излучения оказывает различное действие на различные приемники излучения (например, глаз человека не видит излучения тела, нагретого до температуры 500 К, в то время как с помощью эвапорографа это излучение можно легко обнаружить).

Различный эффект воздействия излучения на приемники связан с их селективностью (избирательностью). Поэтому при работе с оптико-электронными приборами часто пользуются, наряду с *энергетическими* характеристиками излучения, так называемыми *эффективными* характеристиками (единицами), учитывающими не только абсолютную величину излучения, но и спектральный состав. Определим поток, эффективно воспринимаемый приемником излучения,

$$\Phi_{\text{эф}} = \xi \Phi_e,$$

где Φ_e — полный (энергетический) поток, излучаемый источником во всем спектральном диапазоне и достигающий приемника; ξ — коэффициент использования, показывающий, какая доля полного потока воспринимается приемником.

Коэффициент использования ξ вводится следующим образом.

Пусть $d\Phi_e$ — монохроматический (от λ до $\lambda + d\lambda$) поток, падающий на приемник, а $\Phi_{e\lambda}$ — спектральная плотность этого потока. Тогда $d\Phi_e = \Phi_{e\lambda} d\lambda$, а полный поток, излучаемый источником во всем спектральном диапазоне и достигающий приемника, равен

$$\Phi_e = \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda} d\lambda.$$

Если $\Phi_{e\lambda_{\text{max}}}$ — максимальное значение спектральной плотности потока, то

$$\varphi(\lambda) = \Phi_{e\lambda} / \Phi_{e\lambda_{\text{max}}}$$

представляет собой распределение спектральной плотности потока излучения по спектру в относительных единицах, т. е. относительное спектральное распределение.

Пусть $S(\lambda)$ — спектральная дифференциальная крутизна (чувствительность) приемника, равная

$$S(\lambda) = \frac{dU}{d\Phi_e} = \frac{dU}{\Phi_{e\lambda} d\lambda},$$

а S_{\max} — максимальное значение этой величины *; тогда

$$k(\lambda) = S(\lambda)/S_{\max}$$

представляет собой распределение спектральной дифференциальной крутизны приемника по спектру в относительных единицах, т. е. относительное спектральное распределение крутизны (чувствительности) приемника излучения.

Имеют место также следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} dU &= S(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda = \Phi_{e\lambda_{\max}} S_{\max} \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda; \\ U &= \int_0^{\infty} S(\lambda) \Phi_{e\lambda} d\lambda = \Phi_{e\lambda_{\max}} S_{\max} \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

Таким образом, действие сложного излучения Φ_e на приемник, имеющий спектральное распределение крутизны $S(\lambda)$, вызывает появление сигнала U на зажимах приемника. Тот же сигнал может быть получен, если предположить, что приемник имеет не зависящую от длины волны крутизну S_{\max} , а падающий на приемник поток равен некоторой величине $\Phi_{\lambda\Phi}$, которая подлежит определению.

$$\begin{aligned} \text{Так как } U &= S_{\max} \Phi_{\lambda\Phi}, \text{ то } \Phi_{\lambda\Phi} = \Phi_{e\lambda_{\max}} \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda; \text{ но } \Phi_e = \\ &= \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda} d\lambda = \Phi_{e\lambda_{\max}} \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda; \text{ следовательно,} \\ \Phi_{\lambda\Phi} &= \Phi_e \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda \bigg/ \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$\xi = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda \bigg/ \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda,$$

то

$$\Phi_{\lambda\Phi} = \xi \Phi_e.$$

При расчете коэффициентов использования различными приемниками излучения абсолютно черного тела необходимо иметь в виду следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi^0(\lambda) &= M_{e\lambda}^0(\lambda, T)/M_{e\lambda_{\max}}^0(T); \\ \int_0^{\infty} \varphi^0(\lambda) d\lambda &= \frac{\int_0^{\infty} M_e^0(\lambda, T) d\lambda}{M_{e\lambda_{\max}}^0(T)} = \frac{\sigma T^4}{\mathcal{B} T^5} = \frac{\sigma/\mathcal{B}}{T}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sigma/\mathcal{B} \approx 5,7 \cdot 10^{-12} / (1,3 \cdot 10^{-15}) \approx 4400 \text{ К} \cdot \text{мкм},$$

* При отсутствии максимума в спектральном распределении падающего потока и крутизны приемника в качестве $\Phi_{e\lambda_{\max}}$ и S_{\max} могут быть приняты соответствующие значения на некоторой заданной длине волны (своей для каждой величины).

Относительная спектральная световая эффективность излучения
для стандартного фотометрического наблюдателя МКО

λ , нм	Дневное зрение $v(\lambda)$	Ночное зрение $v'(\lambda)$	λ , нм	Дневное зрение $v(\lambda)$	Ночное зрение $v'(\lambda)$
380	0,0000	0,000589	590	0,757	0,0655
390	0,0001	0,002209	600	0,631	0,03315
400	0,0004	0,00929	610	0,503	0,01593
410	0,0012	0,03484	620	0,381	0,00737
420	0,0040	0,0966	630	0,265	0,003335
430	0,0116	0,1998	640	0,175	0,001497
440	0,023	0,3281	650	0,107	0,000677
450	0,038	0,455	660	0,061	0,0003129
460	0,060	0,567	670	0,032	0,0001480
470	0,091	0,676	680	0,017	0,0000715
480	0,139	0,793	690	0,0082	0,00003533
490	0,208	0,904	700	0,0041	0,00001780
500	0,323	0,982	710	0,0021	0,00000914
510	0,503	0,997	720	0,00105	0,00000478
520	0,710	0,935	730	0,00052	0,000002546
530	0,862	0,811	740	0,00025	0,000001379
540	0,954	0,650	750	0,00012	0,000000760
550	0,995	0,481	760	0,00006	0,000000425
560	0,995	0,3288	770	0,00003	0,000000241
570	0,952	0,2076	780	0,000015	0,000000139
580	0,870	0,1212			

то коэффициент использования излучения абсолютно черного тела равен

$$\xi^{\circ} = (T/4400) \int_0^{\infty} \varphi^{\circ}(\lambda) k(\lambda) d\lambda.$$

Действие излучения на глаз человека можно оценивать также в эффективных величинах

$$\Phi_{\text{эф}v} = \xi_{\text{г.л}} \Phi_e,$$

где $\Phi_{\text{эф}v}$ — эффективный поток, воспринимаемый глазом человека, т. е. световой поток; Φ_e — полный (энергетический) поток, излучаемый источником во всем спектральном диапазоне и достигающий приемника; $\xi_{\text{г.л}}$ — коэффициент использования полного потока глазом человека. Очевидно, что

$$\xi_{\text{г.л}} = \frac{\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) k_{\text{г.л}}(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda}.$$

В качестве *относительного спектрального распределения чувствительности глаза* $k_{\text{г.л}}(\lambda)$ можно использовать *функцию относительной видности глаза*, которую называют также *нормализованной функцией относительной спектральной световой эффективности излучения для стандартного фотометрического наблюдателя МКО* (Международной комиссии по освещению) применительно к дневному $v(\lambda)$ или ночному $v'(\lambda)$ зрению. Эти функции приведены в табл. 13 и на

рис. 215. Поскольку в СССР принято, что все световые величины должны определяться только с применением функции $v(\lambda)$ для дневного зрения, в дальнейшем будем использовать именно эту функцию.

Следовательно, относительное спектральное распределение чувствительности глаза

$$k_{г\lambda}(\lambda) = v(\lambda).$$

Коэффициент использования глазом излучения $\xi_{г\lambda}$ в фотометрии называют *относительной световой эффективностью* и обозначают буквой v , т. е.

$$\xi_{г\lambda} = v = \frac{\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) v(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda},$$

а

$$\Phi_{эфv} = v\Phi_e.$$

При оценке зрительного восприятия *световой ватт* оказывается слишком большой величиной, и для этих целей используется специальная единица — *люмен*, вводимая через *максимальную спектральную световую эффективность излучения* $S_{\max г\lambda}$ (лм·Вт⁻¹), которая имеет место на длине волны 555 нм для дневного зрения, т. е.

$$k_{г\lambda}(\lambda) = v(\lambda) = S_{г\lambda}(\lambda)/S_{\max г\lambda}$$

где $S_{г\lambda}(\lambda)$ — спектральная световая эффективность излучения. Следовательно, световой поток (лм)

$$\Phi_v = S_{\max г\lambda} \Phi_{эфv} = S_{\max г\lambda} \frac{\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) v(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda} \Phi_e = S_{\max г\lambda} \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda} v(\lambda) d\lambda,$$

где $\Phi_{e\lambda}$ — спектральная плотность потока Φ_e .

Значение максимальной спектральной световой эффективности излучения можно определить из предыдущей формулы, имея в виду, что если в качестве источника излучения использовать абсолютно черное тело при температуре затвердевания платины (2042 К), то световой поток, излучаемый в единичном телесном угле (стерадиан), равен 1 лм *. Таким образом можно найти

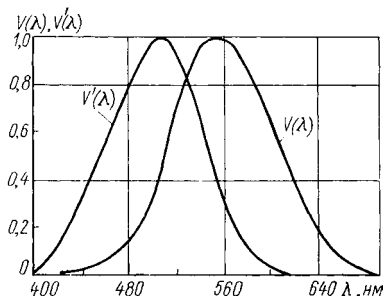


Рис. 215. Относительная спектральная световая эффективность излучения для стандартного фотометрического наблюдателя МКО применительно к дневному $v(\lambda)$ и ночному $v'(\lambda)$ зрению

* В соответствии с решением 9-й (1948 г.) и 13-й (1967 г.) Генеральных конференций по мерам и весам люмен — единица светового потока, определяемая как световой поток, излучаемый в телесном угле 1 ср равномерным точечным источником с силой света в 1 кд. Кандела — единица силы света, определяемая как сила света, излучаемого в перпендикулярном направлении 1/600 000 м² поверхности абсолютно черного тела при температуре затвердевания платины и давлении 101 325 Н/м². Яркость АЧТ при 2042 К равна 0,6 кд·мм⁻².

$$S_{\max \text{ гл}} \approx 680 \text{ лм} \cdot \text{Вт}^{-1},$$

т. е.
$$\Phi_v = 680 \Phi_e \frac{\int_0^\infty \varphi(\lambda) v(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varphi(\lambda) d\lambda}.$$

В заключение рассмотрим связь между интегральной и спектральной крутизной (чувствительностью) приемника излучения и между интегральными значениями крутизны приемника, определенными по отношению к различным источникам излучения.

Интегральная крутизна, определяющая реакцию приемника на сложный (по спектру) поток,

$$S = \frac{U}{\Phi_e} = \frac{\int_0^\infty \Phi_{e\lambda} S(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Phi_{e\lambda} d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varphi(\lambda) d\lambda} S_{\max} = \xi S_{\max};$$

$$S(\lambda) = S_{\max} k(\lambda).$$

Зная крутизну приемника S при облучении его источником заданного спектрального состава, коэффициент использования ξ излучения этого источника и относительное спектральное распределение крутизны $k(\lambda)$, можно найти абсолютное значение *спектральной крутизны* приемника

$$S(\lambda) = (S/\xi) k(\lambda).$$

Пусть крутизна приемника определена по отношению к источнику, относительное спектральное распределение излучения которого равно $\varphi_1(\lambda)$. Тогда интегральная крутизна

$$S_1 = \frac{\int_0^\infty \varphi_1(\lambda) k(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varphi_1(\lambda) d\lambda} S_{\max} = \xi_1 S_{\max}.$$

Соответственно для источника с распределением $\varphi_2(\lambda)$ имеем

$$S_2 = \frac{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) k(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) d\lambda} S_{\max} = \xi_2 S_{\max}.$$

Следовательно, можно найти

$$S_2 = S_1 (\xi_2/\xi_1),$$

где ξ_1 и ξ_2 — коэффициенты использования излучения первого и второго источников одним и тем же приемником.

Если интегральная чувствительность приемника по отношению к источнику с распределением $\varphi_1(\lambda)$ измерялась, кроме того, по воз-

действию на него *светового* потока этого источника, то необходимо учесть переход от энергетических единиц к световым. Тогда получим

$$S_1 = \frac{\int_0^\infty \varphi_1(\lambda) k(\lambda) d\lambda}{680 \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) v(\lambda) d\lambda} S_{\max}; \quad S_2 = \frac{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) k(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) d\lambda} S_{\max}.$$

Следовательно,

$$S_2 = 680 S_1 \frac{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) k(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) v(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) k(\lambda) d\lambda}.$$

Умножив и разделив последнее выражение на $\int_0^\infty \varphi_1(\lambda) d\lambda$, найдем

$$S_2 = 680 S_1 \frac{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) k(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) v(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \varphi_2(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \varphi_1(\lambda) k(\lambda) d\lambda} = 680 S_1 \frac{\xi_2}{\xi_1} v,$$

где $v = \xi_{\text{гл}}$ — относительная световая эффективность излучения. Если, например, S_1 выражена в В/лм, то S_2 — В/Вт.

Наряду с коэффициентом использования для оценки эффективности воздействия на приемник падающего потока может рассматриваться введенное автором и нашедшее широкое применение понятие *эффективной спектральной ширины полосы пропускания приемника излучения* $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}$. Физический смысл этой величины состоит в том, что *действие на селективный фотоприемник излучения с заданным спектральным распределением эквивалентно действию излучения с постоянной спектральной плотностью, равной $\Phi_{e\lambda_{\max}}$ на фотоприемник, имеющий прямоугольную спектральную характеристику с раствором $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}$ и $S(\lambda) = S_{\max}$* .

Действительно, сигнал, вырабатываемый приемником,

$$U = \int_0^\infty \Phi_{e\lambda} S(\lambda) d\lambda = \Phi_{e\lambda_{\max}} S_{\max} \int_0^\infty \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda.$$

Обозначим

$$(\Delta\lambda)_{\text{эф}} = \int_0^\infty \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda;$$

тогда

$$U = \Phi_{e\lambda_{\max}} S_{\max} (\Delta\lambda)_{\text{эф}}.$$

Полученное выражение можно истолковать так, как это сделано выше (см. также рис. 216).

В случае неселективного (теплового) приемника $k_{\text{тепл}}(\lambda) = 1$ и эффективная спектральная ширина полосы пропускания теплового приемника

$$(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Если источник излучения представляет собой абсолютно черное тело, то можно найти $(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}}^0$ (мкм):

$$(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}}^0 = \int_0^{\infty} \varphi^0(\lambda) d\lambda = \frac{\sigma B}{T} \approx \frac{4400}{T},$$

где T — абсолютная температура, К.

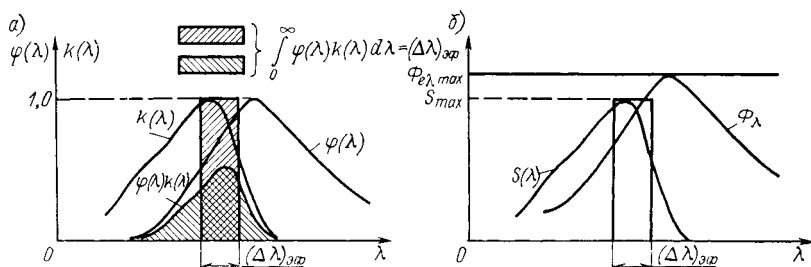


Рис. 216. К определению эффективной спектральной ширины полосы пропускания приемника излучения: а — расчет $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}$; б — действие излучения с постоянной спектральной плотностью $\Phi_{e\lambda, \text{max}}$ на приемник с прямоугольной спектральной характеристикой S_{max} , $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}$

Следует заметить, что значение $(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}}^0 \approx 4400/T$ для теплового приемника практически не реализуется, так как заметная часть излучения, особенно низкотемпературного, даже на самых коротких дистанциях поглощается атмосферой.

Сравнив выражения для эффективной спектральной ширины полосы пропускания приемника $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}$ и коэффициента использования излучения ξ , получим

$$\xi = (\Delta\lambda)_{\text{эф}} / (\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}},$$

т. е. коэффициент использования излучения равен отношению эффективных спектральных полос пропускания данного и неселективного (теплового) приемников излучения.

Если источником излучения является абсолютно черное тело, то

$$\xi^0 = (\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0 / (\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}}^0 \approx [(\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0 / 4400] T \approx 2,3 \cdot 10^{-4} T (\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0.$$

Соответственно можно установить связь между энергетической светимостью абсолютно черного тела или его температурой и значением эффективной светимости излучения АЧТ:

$$\begin{aligned} M_{\text{эф}}^0 &= \xi^0 M_{\text{эф}}^0 = \xi^0 \sigma T^4 \approx 2,3 \cdot 10^{-4} \cdot 5,7 \cdot 10^{-12} T^5 (\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0 \approx \\ &\approx 1,3 \cdot 10^{-15} T^5 (\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0. \end{aligned}$$

Поскольку максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости АЧТ ($\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{мкм}^{-1}$)

$$M_{e\lambda_{\max}}^0(T) = \mathcal{R}T^5 \approx 1,3 \cdot 10^{-15} T^5,$$

то

$$M_{\text{эф}}^0 = M_{e\lambda_{\max}}^0(T) (\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0 \approx 1,3 \cdot 10^{-15} T^5 (\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0,$$

что соответствует значению эффективной спектральной ширины полосы пропускания.

При регистрации приемником контрастного излучения абсолютно черного тела, т. е. разности излучений двух последовательно визируемых абсолютно черных источников близкой температуры, можно найти разность эффективных светимостей

$$\Delta M_{\text{эф}}^0 = \int_0^{\infty} \Delta M_{e\lambda}^0(\lambda, T) k(\lambda) d\lambda,$$

где $\Delta M_{e\lambda}^0(\lambda, T) \approx (c_2/\lambda T) M_{e\lambda}^0(\lambda, T)(\Delta T/T)$; $M_{e\lambda}^0(\lambda, T)$ — спектральная плотность энергетической светимости более холодного тела, имеющего температуру T ; $c_2 \approx 14\,388 \text{ мкм} \cdot \text{К}$ — вторая постоянная формулы Планка; $k(\lambda)$ — относительное спектральное распределение крутизны (чувствительности) приемника излучения.

Полученную формулу можно представить в виде

$$\Delta M_{\text{эф}}^0 = \xi_{\text{к}}^0 (4\sigma T^3 \Delta T),$$

где коэффициент $\xi_{\text{к}}^0$ показывает, какая часть полного контрастного излучения двух абсолютно черных источников используется данным приемником.

Можно найти, что

$$\xi_{\text{к}}^0 = 0,82 \int_0^{\infty} \varphi^0(\lambda) k(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda},$$

где $\varphi^0(\lambda) = M_{e\lambda}^0(\lambda, T)/M_{e\lambda_{\max}}^0(T)$.

Входящий в выражение для $\xi_{\text{к}}^0$ интеграл можно по аналогии с предыдущим назвать *относительной или логарифмической спектральной шириной полосы пропускания приемника излучения (в данном случае для абсолютно черного излучения)*:

$$(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}^0 = \int_0^{\infty} \varphi^0(\lambda) k(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^{\infty} \varphi^0(\lambda) k(\lambda) d \ln \lambda,$$

т. е. коэффициент использования контрастного абсолютно черного излучения можно выразить следующим образом:

$$\xi_{\text{к}}^0 = 0,82 (\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}^0.$$

Для теплового приемника эффективная логарифмическая спектральная ширина полосы пропускания соответствует относительной

Значения $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0$ и $(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}^0$ для некоторых приемников излучения

t, °C	$(\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0 / 10 / (\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}^0 \cdot 100$							
	Идеальный тепловой приемник	PbS (295 K)	PbTe (77 K)	InSb (77 K)	Ge : Au (77 K)	Ge : Hg (30 K)	Hg—Cd—Te (77 K)	Ge : Zn (5 K)
20	150	0,005	2,8	4,6	10	56	38	76
	122	0,015	5,7	8,5	17	57	35	50
50	136	0,016	4,4	6,8	12	55	36	66
	122	0,052	9,0	13	24	57	34	46
100	118	0,065	7,5	10	19	51	31	51
	122	0,23	17	18	36	55	31	40
200	93,2	0,50	14	16	22	40	23	33
	122	1,7	35	34	56	47	25	31
300	78,0	1,3	18	20	32	30	16	23
	122	5,6	52	42	71	37	20	25
400	65,5	2,7	19	20	33	22	13	17
	122	12	63	51	80	29	16	21
500	57,0	4,8	20	20	33	17	9	13
	122	20	71	48	84	23	13	18

величине раствора кривой планковского распределения излучения и равна

$$(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф. тепл}}^0 = \int_0^{\infty} \varphi^0(\lambda) d \ln \lambda \approx 1,22.$$

В этом случае

$$\xi_{\text{к. тепл}}^0 = 0,82 \cdot 1,22 = 1; \Delta M_{\text{эф. тепл}}^0 = \Delta M_{\text{е}}^0 = 4\sigma T^3 \Delta T,$$

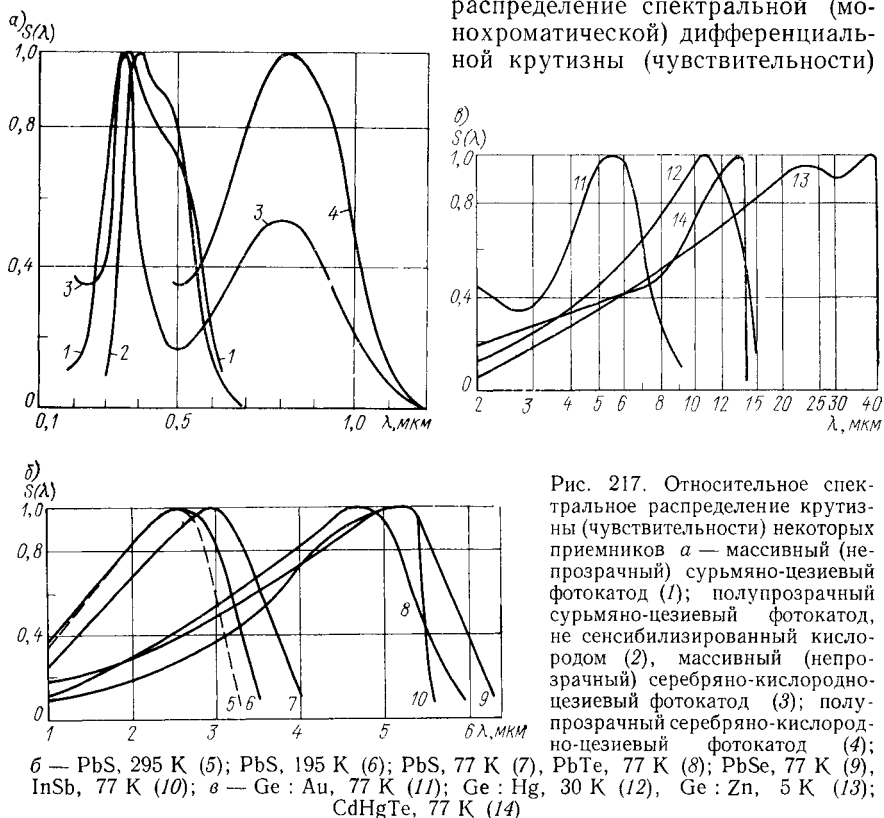
т. е. имеет место известная формула, получаемая из закона Стефана—Больцмана путем дифференцирования.

Эффективная логарифмическая спектральная ширина полосы пропускания для теплового приемника, равная 1,22, практически никогда не достигается, прежде всего из-за ослабления излучения в атмосфере. Вычисления показывают, что даже при очень небольших расстояниях между источником, имеющим температуру 300 K, и приемником $(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф. тепл}}^0 \approx 0,83$. Если же между источником и приемником находится 400-метровый слой атмосферы, то это значение снижается до 0,53.

Значения эффективной спектральной ширины полосы пропускания $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}^0$ и эффективной логарифмической спектральной ширины

полосы пропускания $(\Delta \ln \lambda)_{\text{ф}}^0$ для некоторых приемников излучения при отсутствии ослабления излучения в атмосфере приведены в табл. 14. Рядом с обозначением приемников в скобках указана температура чувствительного слоя.

Наиболее полное представление о селективных свойствах приемника излучения может дать его спектральная характеристика — распределение спектральной (монокроматической) дифференциальной крутизны (чувствительности)



по длинам волн. Измерение этой характеристики осуществляется с помощью монохроматора, который позволяет выделить излучение в очень узкой спектральной полосе, центрированной относительно любой заданной длины волны. Это излучение с помощью зеркала направляется то на исследуемый приемник, то на приемник сравнения, имеющий одинаковую чувствительность на всех длинах волн. Важнейшим требованием к измерениям является малое рассеянное излучение, что заставляет обычно использовать двойной монохроматор.

Основное требование к приемнику сравнения заключается в том, чтобы приемник был действительно черным, т. е. чтобы его чувстви-

тельность не зависела от длины волны. В качестве приемника сравнения обычно используется термоэлемент, однако значительно лучшие результаты можно получить с оптико-акустическим приемником, разработанным в ГОИ М. Л. Вейнгеровым и Н. А. Панкратовым. В процессе измерений крутизна исследуемого приемника для каждой длины волны сравнивается с крутизной (чувствительностью) приемника сравнения.

На рис. 217 приведены данные об относительном спектральном распределении крутизны некоторых приемников.

§ 10.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Частотной характеристикой приемника излучения называют зависимость его дифференциальной крутизны (чувствительности) от частоты модуляции потока излучения $S(f)$. Обычно частотная характеристика выражается в относительных единицах:

$$k(f) = S(f)/S_0,$$

где $S(f)$ и S_0 — значения дифференциальной крутизны (чувствительности) на частотах модуляции f и $f \rightarrow 0$ соответственно.

Частотная характеристика отражает динамические свойства приемника — его способность реагировать на быстрые изменения потока излучения. При графическом изображении частотных характеристик приемников излучения часто используют логарифмический масштаб. В этом случае соответствующую терминологию заимствуют из акустики: если частоты модуляции отличаются друг от друга в два раза, говорят, что они отличаются на октаву, если в 10 раз — на декаду. Сигналы, вырабатываемые приемником, отличаются друг от друга на один децибел, если $20 \lg(u_2/u_1) = 1$, т. е. $u_2/u_1 \approx 1,12$. Если сигналы отличаются на 3 дБ, т. е. $20 \lg(u_2/u_1) = 3$, то $u_2/u_1 \approx 1,41$ или $u_1/u_2 \approx 0,707$.

Частотная характеристика приемника излучения, выраженная в относительных единицах и логарифмическом масштабе, записывается следующим образом:

$$k_{\text{лог}}(f) = 20 \lg k(f), \quad \text{или} \quad k_{\text{лог}}(\omega) = 20 \lg k(\omega),$$

где $\omega = 2\pi f$.

Рассмотрим некоторые специфические вопросы, связанные с частотными характеристиками приемников излучения.

Апериодическое звено — простейший эквивалент приемника излучения с точки зрения его частотной характеристики

В наиболее простом случае эквивалентом приемника излучения с точки зрения его частотной характеристики является апериодическое звено (рис. 218).

Комплексный коэффициент передачи апериодического звена по напряжению равен

$$\dot{K}(\omega) = \dot{u}_2(\omega)/\dot{u}_1(\omega) = 1/(1 + j\omega\tau),$$

где $\tau = RC$ — постоянная времени апериодического звена.

Соответственно частотная (амплитудно-частотная) характеристика вычисляется как модуль комплексного коэффициента передачи:

$$K(\omega) = |\dot{K}(\omega)| = 1/\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Поскольку при $\omega \rightarrow 0$ модуль комплексного коэффициента передачи достигает максимального значения, равного единице, то частотная характеристика аperiodического звена, выраженная в относительных единицах, имеет вид

$$k(\omega) = 1/\sqrt{1 + (\omega\tau)^2},$$

или в логарифмическом масштабе

$$\begin{aligned} k_{\log}(\omega) &= 20 \lg k(\omega) = \\ &= -20 \lg(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

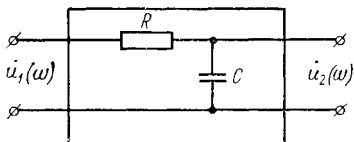


Рис. 218. Аperiodическое звено

При построении частотной характеристики в логарифмическом масштабе иногда используют приближенные методы, основанные на вычислении асимптот соответствующей кривой и замене действительной характеристики ее асимптотами.

Найдем асимптоты частотной характеристики.

При $\omega \rightarrow 0$

$$k_{\log}(\omega) \rightarrow 0.$$

Это дает уравнение первой асимптоты

$$k_{\log}^I(\omega) = 0.$$

При $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} k_{\log}(\omega) &= -20 \lg(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2} = -20 \lg \tau (1/\tau^2 + \omega^2)^{1/2} = \\ &= -20 \lg \tau - 20 \lg(1/\tau^2 + \omega^2)^{1/2} \rightarrow -20 \lg \tau - 20 \lg \omega. \end{aligned}$$

Это дает уравнение второй асимптоты

$$k_{\log}^{II}(\omega) = -20 \lg \tau - 20 \lg \omega.$$

Вторая асимптота пересекает ось нуля децибел в точке ω_{cp} (на частоте «среза»), определяемой из уравнения

$$-20 \lg \tau - 20 \lg \omega_{cp} = 0,$$

откуда

$$\lg \omega_{cp} = -\lg \tau = \lg(1/\tau), \text{ т. е. } \omega_{cp} = 1/\tau.$$

Вторая асимптота наклонена к оси абсцисс на угол α , причем

$$\operatorname{tg} \alpha = dk_{\log}^{II}(\omega)/(d \lg \omega) = -20 \text{ дБ/дек.}$$

При изменении частоты на одну декаду, когда

$$\Delta \lg \omega = \lg \omega_2 - \lg \omega_1 = \lg(\omega_2/\omega_1) = \lg 10 = 1,$$

коэффициент передачи аperiodического звена изменится на 20 дБ.

Действительная частотная характеристика отличается от приближенной, составленной из двух асимптот (рис. 219). На частоте среза разность ординат действительной и приближенной характеристик имеет наибольшее значение, равное -3 дБ:

$$k_{\text{лог}}(\omega_{\text{ср}}) = -20 \lg(1 + \omega_{\text{ср}}^2 \tau^2)^{1/2} = -20 \lg(2)^{1/2} = -3 \text{ дБ}.$$

При этом

$$k(\omega_{\text{ср}}) = 1/\sqrt{1 + \omega_{\text{ср}}^2 \tau^2} = 1/\sqrt{2} = 0,707.$$

Частотная характеристика аperiodического звена в обычном масштабе представлена на рис. 220. Если на вход аperiodического

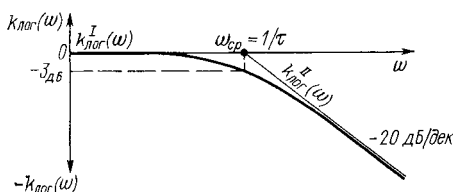


Рис. 219. Частотная характеристика аperiodического звена в логарифмическом масштабе

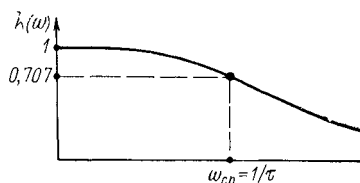


Рис. 220. Частотная характеристика аperiodического звена

звена в момент времени t_0 включить мгновенный перепад напряжения, то на выходе звена напряжение медленно приблизится к установившемуся значению. Все имеющее место в этом случае закономерности можно выяснить, пользуясь формулами операционного исчисления. Если

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq t_0; \\ 0 & \text{при } t < t_0, \end{cases}$$

то функция $u_1(t)$, называемая в этом случае единичным скачком, имеет своим изображением функцию

$$u_1(p) = e^{-pt_0}/p.$$

Поскольку для аperiodического звена

$$k(\omega) = 1/(1 + j\omega\tau),$$

то его изображение

$$k(p) = 1/(1 + p\tau).$$

Изображение сигнала, действующего на выходе,

$$u_2(p) = u_1(p) k(p) = e^{-pt_0}/p(1 + p\tau).$$

Если обозначить $F(p) = 1/p(1 + p\tau)$, то $u_2(p) = F(p) e^{-pt_0}$.

Пусть $f(t)$ — оригинал функции $F(p)$. Из таблиц операционного исчисления можно найти $f(t) = 1 - e^{-t/\tau}$, а на основании теоремы запаздывания имеем

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ f(t - t_0) & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Следовательно, напряжение на выходе аperiodического звена при $t \geq t_0$ имеет вид

$$u_2(t) = 1 - e^{-(t-t_0)/\tau}.$$

Если отсчитывать время с момента появления импульса ($t_0 = 0$), то

$$u_2(t) = 1 - e^{-t/\tau}.$$

При $t = \tau$ $u_2(t) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,37 = 0,63$; при $t \rightarrow \infty$ $u_2(t) = 1$; при $t = 2,2\tau$ $u_2(t) = 1 - e^{-2,2} = 1 - 0,11 = 0,89$.

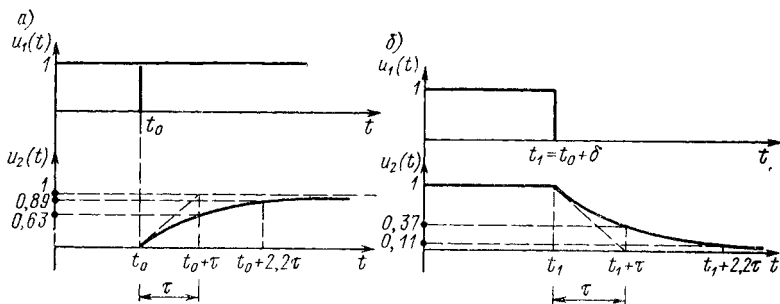


Рис. 221. Переходный процесс в аperiodическом звене при включении (а) и выключении (б) сигнала на входе

Таким образом, постоянная времени аperiodического звена равна времени, в течение которого напряжение на выходе достигает 0,63 своего установившегося значения (рис. 221, а).

Если в момент времени $t_1 = t_0 + \delta$ снять действующее на входе аperiodического звена напряжение или, что то же, подвести ко входу импульс напряжения, изображение которого равно

$$u_1(p) = (1 - e^{-p(t_0+\delta)})/p,$$

то изображение сигнала на выходе имеет вид

$$u_2(p) = (1 - e^{-p(t_0+\delta)})/p(1 + p\tau).$$

Соответствующий сигнал может быть вычислен, и напряжение на выходе оказывается равным:

$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < t_0 + \delta; \\ e^{-[t-(t_0+\delta)]/\tau} & \text{при } t \geq t_0 + \delta. \end{cases}$$

График изменения напряжения $u_2(t)$ представлен на рис. 221, б. В данном случае постоянная времени аperiodического звена соответствует времени, в течение которого напряжение на выходе звена уменьшается до 0,37 от своего первоначального значения.

Процессы, происходящие в реальных приемниках излучения при внезапном возникновении и исчезновении облучения, конечно, значительно более сложны, чем только что описанные для аperiodического звена. В наиболее простом практически имеющем место случае

приемники излучения имеют две различные постоянные времени, проявляющиеся при возникновении (τ_1) и исчезновении (τ_2) облучения (время возбуждения и рекомбинации носителей).

Обычно постоянной времени приемника считают наибольшее время (τ_2) — время, в течение которого сигнал, вырабатываемый прием-

Т а б л и ц а 15

Постоянные времени приемников излучения

Фотоприемник	Температура чувствительного слоя T , К	$\tau_{\text{пр}}$, мкс
Фоторезисторы:		
PbS	295	50—150
PbS	195	250—800
PbTe	77	10—25
PbSe	77	10—25
InSb	77	1—10
Ge : Hg	30	0,1—0,01
Ge · Cd	12	0,1—0,01
Ge · Zn	5	0,1—0,01
Термоэлемент	295	$(10 \div 50) 10^3$
Полупроводниковый болометр	295	$(1 \div 15) 10^3$
Оптико-акустический неселективный приемник	5	10^3

ником, после прекращения облучения уменьшается до значения $0,37 (1/e)$ от установившегося значения.

В табл. 15 приведены значения постоянных времени $\tau_{\text{пр}}$ некоторых приемников излучения.

Коррекция частотной характеристики приемника излучения

При регистрации с помощью инерционного приемника быстропротекающих процессов возникает задача коррекции частотной характеристики приемника излучения, т. е. разработки методов уменьшения эквивалентной инерционности системы приемник — усилитель до значений, обеспечивающих необходимую скорость регистрации.

Практически это можно осуществить включением в схему усилителя дифференцирующего звена (рис. 222), имеющего коэффициент передачи

$$\dot{K}_d(\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_1}{a + j\omega\tau_1} = \frac{1}{a} \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_1/a},$$

где $a = (R_1 + R_2)/R_2$; $\tau_1 = R_1 C_1$.

Если выбрать постоянную времени τ_1 равной постоянной времени приемника излучения $\tau_{\text{пр}}$, то общий коэффициент передачи системы, состоящей из последовательного соединения аperiodического звена (приемника излучения), усилителя с коэффициентом передачи, равным единице, и дифференцирующего звена (рис. 223), равен

$$\begin{aligned} \dot{K}_{\text{общ}}(\omega) &= \dot{k}_{\text{пр}}(\omega) \dot{K}_{\text{ус}}(\omega) \dot{K}_d(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{\text{пр}}} \frac{1}{a} \frac{1 + j\omega\tau_{\text{пр}}}{1 + j\omega\tau_{\text{пр}}/a} = \\ &= \frac{1}{1 + j\omega\tau_{\text{пр}}/a} \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Амплитудно-частотная характеристика системы приемник — дифференцирующее звено

$$K_{\text{общ}}(\omega) = |\dot{K}_{\text{общ}}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_{\text{пр}}/a)^2}} \frac{1}{a}$$

соответствует аperiodическому звену, постоянная времени которого уменьшена по сравнению с постоянной времени приемника излучения в a раз. Уменьшение в a раз абсолютного значения коэффициента передачи может быть легко скомпенсировано соответствующим запасом коэффициента усиления усилителя, который до сих пор условно предполагался равным единице. Аналогичный вывод легко получить, пользуясь логарифмическими частотными характеристиками.

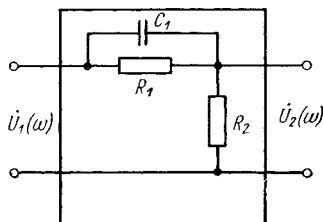


Рис. 222. Дифференцирующее звено

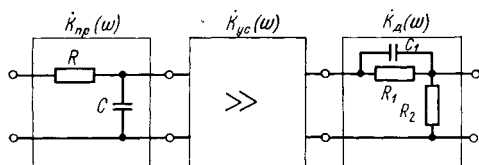


Рис. 223. Последовательное соединение аperiodического звена (приемника излучения), усилителя и дифференцирующего звена: $\tau_{пр} = RC$; $\tau_1 = R_1 C_1 = \tau_{пр}$; $K_{ус}(\omega) = 1$

Амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего звена равна (индекс «д» опускаем)

$$K(\omega) = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}}{\sqrt{1 + \omega^2 (\tau_1/a)^2}},$$

или в децибелах

$$\begin{aligned} K_{\log}(\omega) &= -20 \lg a + 20 \lg (1 + \omega^2 \tau_1^2)^{1/2} - 20 \lg (1 + \omega^2 \tau_1^2/a^2)^{1/2} = \\ &= 20 \lg (1/\tau_1^2 + \omega^2)^{1/2} - 20 \lg (a^2/\tau_1^2 + \omega^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Найдем асимптоты этой характеристики при $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$ и $1/\tau_1 \ll \omega \ll a/\tau_1$:

$$K_{\log}^I(\omega) = -20 \lg a;$$

$$K_{\log}^{II}(\omega) = 0;$$

$$K_{\log}^{III}(\omega) = 20 \lg \omega - 20 \lg (a/\tau_1).$$

Пересечение $K_{\log}^{III}(\omega)$ с осью нуля децибел имеет место на частоте $\omega'_{ср}$, которую можно найти из уравнения

$$20 \lg \omega'_{ср} - 20 \lg (a/\tau_1) = 0,$$

откуда

$$\lg \omega'_{ср} = \lg (a/\tau_1),$$

т. е.

$$\omega'_{ср} = a/\tau_1.$$

Пересечение $K_{\log}^{\text{III}}(\omega)$ с осью $-20 \lg a$ имеет место на частоте $\omega_{\text{ср}}''$, которую можно найти из уравнения

$$20 \lg \omega_{\text{ср}}'' - 20 \lg(a/\tau_1) = -20 \lg a,$$

откуда

$$\lg \omega_{\text{ср}}'' = \lg(a/\tau_1) - \lg a = \lg(1/\tau_1),$$

т. е.

$$\omega_{\text{ср}}'' = 1/\tau_1.$$

Наклон $K_{\log}^{\text{III}}(\omega)$ к оси децибел равен

$$\frac{dK_{\log}^{\text{III}}(\omega)}{d \lg \omega} = +20 \text{ дБ/дек.}$$

Идеальная (составленная из асимптот) логарифмическая амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего звена имеет вид, представленный на рис. 224.

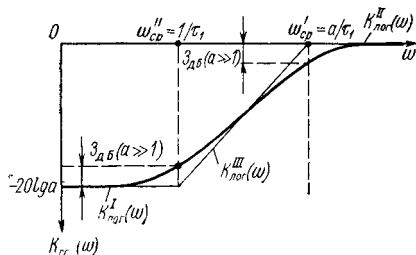


Рис. 224. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего звена

Реальная характеристика наиболее значительно отличается от идеальной на частотах $\omega_{\text{ср}}'$ и $\omega_{\text{ср}}''$. В точке $\omega = \omega_{\text{ср}}' = a/\tau_1$ имеем

$$K_{\log}(\omega_{\text{ср}}') = -20 \lg a - 3 + 10 \lg(1 + a^2);$$

при $a \gg 1$

$$K_{\log}(\omega_{\text{ср}}') = -3 \text{ дБ.}$$

В точке $\omega = \omega_{\text{ср}}'' = 1/\tau_1$ имеем

$$K_{\log}(\omega_{\text{ср}}'') = 3 - 10 \lg(1 + a^2);$$

при $a \gg 1$

$$K_{\log}(\omega_{\text{ср}}'') = 3 - 20 \lg a.$$

Результат сложения амплитудно-частотных характеристик аperiodического (приемника излучения) и дифференцирующего звеньев приведен на рис. 225. Этот результат показывает, что суммарная характеристика соответствует аperiodическому звену с постоянной времени в a раз меньшей, чем исходная.

Если $a > 1$, то система с приемником излучения благодаря дифференцирующему звену становится более быстродействующей.

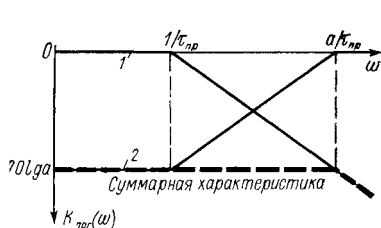


Рис. 225. Суммарная логарифмическая амплитудно-частотная характеристика аperiodического звена (приемника излучения) и дифференцирующего звена:

1 — исходное аperiodическое звено;
2 — дифференцирующее звено

Естественно, что уровень шумов при этом возрастает. Однако, если шум не белый, а спектральная плотность шума убывает обратно пропорционально частоте, шум при коррекции увеличивается меньше, чем в a раз (см. также § 18.11). Введение коррекции дает в этом случае определенные преимущества.

Глава 11

АМПЛИТУДА СИГНАЛА. СОЧЕТАНИЕ ПРИЕМНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ С УСИЛИТЕЛЕМ

Практически любой периодический и непериодический сигнал можно представить в виде суммы гармонических колебаний. Поэтому дальнейшее рассмотрение процесса прохождения сигнала по элек-

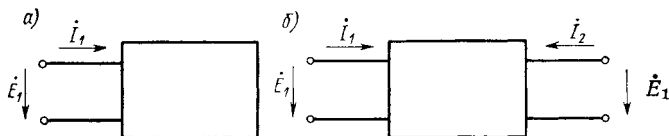


Рис. 226. Схемы замещения двухполюсников и четырехполюсников: *а* — двухполюсник; *б* — четырехполюсник

тронной части тракта оптико-электронного прибора начнем именно с гармонического сигнала.

В электротехнике принято представлять гармоническое колебание в виде

$$a(t) = A \cos(\omega t - \psi) = A \operatorname{Re} [e^{j(\omega t - \psi)}] = \operatorname{Re} [\dot{A} e^{j\omega t}],$$

или

$$a(t) = A \sin(\omega t - \psi) = A \operatorname{Im} [e^{j(\omega t - \psi)}] = \operatorname{Im} [\dot{A} e^{j\omega t}],$$

где Re — от французского *Réel* (действительный); Im — от французского *Imaginaire* (мнимый); A — амплитуда колебания; $\dot{A} = A e^{-j\psi}$ — комплексная амплитуда; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота; f — частота, Гц; ψ — начальная фаза колебания.

Часто символы Re и Im опускают

$$a(t) = A e^{j(\omega t - \psi)} = \dot{A} e^{j\omega t}.$$

При анализе электронных цепей реальные схемы обычно представляют в виде двух- и четырехполюсников, имеющих одну или две пары зажимов.

Любые линейные как активные (содержащие источники энергии), так и пассивные двух- и четырехполюсники могут быть представлены схемами замещения, изображенными на рис. 226. На этих схемах E_1 , E_2 , I_1 , I_2 обозначают комплексные амплитуды синусоидальных напряжений и токов (либо других физических величин) при фиксированной частоте ω . Особенно часто приходится иметь дело с четырех-

полюсниками, возбуждаемыми только со стороны входа. В этом случае под выходным напряжением обычно подразумевается падение напряжения на элементе схемы (нагрузочном сопротивлении), с которого снимается напряжение. Нагрузочное сопротивление иногда включается в четырехполюсник, и тогда он может рассматриваться как разомкнутый, у которого значение тока на выходе равно нулю.

При анализе двухполюсников основное значение имеет их *входное (выходное) сопротивление*

$$\dot{Z} = \dot{E}_1 / \dot{I}_1.$$

При анализе четырехполюсников основное значение имеет отношение выходной величины к входной, которое называют *передаточной функцией*. Если имеется в виду отношение величин, выраженных в одних единицах, например комплексной амплитуды \dot{E}_2 к комплексной амплитуде \dot{E}_1 , то соответствующую безразмерную передаточную функцию

$$\dot{K} = \dot{E}_2 / \dot{E}_1$$

называют *коэффициентом передачи*, а для разомкнутого четырехполюсника и рассмотренного примера — *коэффициентом усиления* напряжения. Если же имеется в виду отношение величин, выраженных в различных единицах, например комплексной амплитуды \dot{I}_2 к комплексной амплитуде \dot{E}_1 , то соответствующую передаточную функцию

$$\dot{S} = \dot{I}_2 / \dot{E}_1,$$

выраженную, в частности, в амперах на вольт, называют *крутизной преобразования*.

В обоих случаях эти функции удобно представлять в виде их относительных значений:

$$\dot{k} = \dot{K} / K_{\max} = \dot{S} / S_{\max},$$

причем \dot{k} — всегда безразмерная и в общем случае комплексная величина — называется *относительной передаточной функцией (относительным коэффициентом передачи (усиления) или относительной крутизной преобразования)*.

Коэффициент передачи, крутизна и относительная передаточная функция в общем случае зависят от частоты ω . Как комплексные величины они могут быть представлены в форме:

$$\dot{K} = K e^{-i\varphi}; \quad \dot{S} = S e^{-i\varphi}; \quad \dot{k} = k e^{-i\varphi}.$$

Модуль соответствующей комплексной величины ($K = |\dot{K}|$, $S = |\dot{S}|$, $k = |\dot{k}|$), представленный как функция частоты, называют *амплитудно-частотной* или просто *амплитудной характеристикой* четырехполюсника, а аргумент φ — *фазочастотной* или *фазовой характеристикой*.

§ 11.1. РАСЧЕТ АМПЛИТУДЫ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ УСИЛИТЕЛЯ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Электронный тракт оптико-электронного прибора состоит из двух основных элементов (рис. 227).

1. *Фотоприемное устройство (ФПУ)* — четырехполюсник, на входе которого действует комплексная амплитуда синусоидально-модулированного потока излучения Φ , определяемая следующим образом.

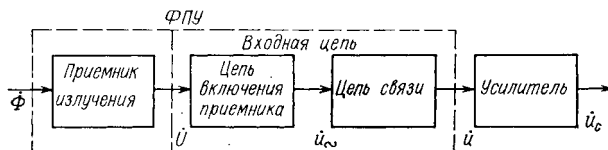


Рис. 227. Электронный тракт оптико-электронного прибора

Если изменение во времени модулированного потока излучения представить в виде

$$\Phi(t) = \Phi + \Phi \cos(\omega t - \psi) = \Phi + \operatorname{Re} \dot{\Phi} e^{j\omega t},$$

то комплексная амплитуда

$$\dot{\Phi} = \Phi e^{-j\psi}.$$

Соответственно на выходе ФПУ действует комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{u} = u e^{-j\theta}.$$

Крутизна преобразования ФПУ

$$\dot{S}_{\text{ФПУ}} = \dot{u}/\dot{\Phi} = (u/\Phi) e^{-j(\theta-\psi)} = S_{\text{ФПУ}} e^{-j\varphi},$$

где амплитудная характеристика $S_{\text{ФПУ}} = |\dot{S}_{\text{ФПУ}}| = u/\Phi$, а фазовая характеристика $\varphi = \theta - \psi$.

2. *Усилитель* — четырехполюсник, обеспечивающий усиление напряжения \dot{u} до значения \dot{u}_c с коэффициентом передачи (усиления)

$$\dot{K}_{yc} = \dot{u}_c/\dot{u} = K_{yc} e^{-j\gamma},$$

где K_{yc} — амплитудная характеристика; γ — фазовая характеристика.

Усилитель, как правило, выполняется состоящим из двух частей: *предварительного* усилителя (предусилителя) и *основного* (главного) усилителя. Предусилитель монтируется в непосредственной близости от приемника излучения, а основной усилитель размещается рядом с регистрирующим устройством. Такое разделение обусловлено тем, что часто оказывается неудобным размещать весь усилитель в одной конструкции с приемником излучения. Передавать же по соединительному кабелю сигнал, вырабатываемый фотоприемным устройством, не всегда возможно, так как помехи, наведенные на кабель внешними электрическими и магнитными полями, могут оказаться соиз-

меримыми с полезным сигналом. Кроме того, выходное сопротивление фотоприемного устройства может быть большим, а собственная емкость соединительного кабеля обычно велика (до нескольких сотен пикофарад). Это затрудняет непосредственное согласование фотоприемного устройства с усилителем, находящимся от него в ряде случаев на значительном расстоянии. Предусилители же могут быть без труда построены по схеме с малым выходным сопротивлением, и согласование легко достигается. Предусилитель иногда включается в состав фотоприемного устройства, так как рассмотрение процесса прохождения сигнала по электронному тракту опико-электронного

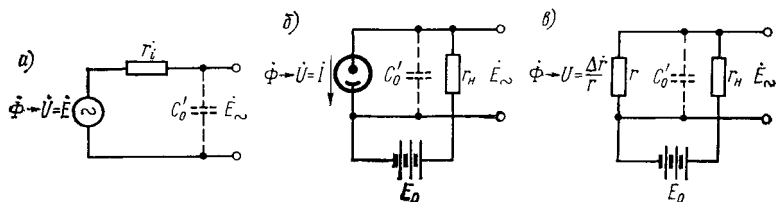


Рис. 228. Цепи включения приемника: а — приемник — генератор э. д. с.; б — приемник — генератор тока; в — приемник — генератор изменения сопротивления

прибора обычно ограничивается рамками линейного приближения, когда безразлично, в каком из последовательно соединенных четырех-полосников сосредоточены функции усиления сигнала.

Состав фотоприемного устройства даже в том случае, когда в него не входит предусилитель, неоднороден, если иметь в виду функции, выполняемые его отдельными элементами. Прежде всего здесь следует выделить *цепь включения* приемника и *цепь связи* (см. рис. 227).

Цепь включения приемника преобразует обобщенный сигнал \dot{U} , вырабатываемый приемником при действии на него потока излучения Φ , в электрическое напряжение \dot{U}_\sim . Комплексная амплитуда обобщенного сигнала \dot{U} в зависимости от типа используемого приемника может представлять собой комплексную амплитуду электродвижущей силы \dot{E} , силы тока \dot{I} , изменения сопротивления Δr и т. д.

Примеры конкретной реализации цепей включения различных приемников изображены на рис. 228. Здесь представлены три наиболее распространенных случая: приемник — генератор электродвижущей силы (термоэлемент, фотовольтаический полупроводниковый приемник), приемник — генератор тока (фотоэлемент, фотоумножитель и др.), приемник — генератор измерения сопротивления (фоторезистор, болометр). Конденсатор C_0' , показанный штриховыми линиями, представляет собой собственную емкость приемника излучения и емкость монтажа цепи включения. Обычно этот конденсатор выносится из цепи включения приемника и его емкость объединяется с емкостью цепи связи. В режиме холостого хода

(при отсутствии нагрузки) на выходе цепи включения приемника действует комплексная амплитуда $(\dot{u}_{\sim})_{x, x} = \dot{E}_{\sim}$, являющаяся следствием первичного преобразования приемником комплексной амплитуды потока излучения $\dot{\Phi}$ в обобщенный сигнал \dot{U} и вторичного преобразования этого сигнала цепью включения приемника в электрическое напряжение.

Если дифференциальная крутизна (чувствительность) собственно приемника излучения

$$\dot{S} = \dot{U} / \dot{\Phi},$$

где \dot{U} — комплексная амплитуда обобщенного сигнала, равная в разных случаях

\dot{E} , \dot{I} , $\Delta \dot{r}$ и т. д.; $\dot{\Phi}$ — комплексная амплитуда синусоидально-модулированного потока излучения, то цепь включения приемника в целом характеризуется крутизной

$$\dot{S}_{\text{вкл}} = \dot{u}_{\sim} / \dot{U},$$

а в режиме холостого хода соответственно

$$\dot{S}_{\text{вкл. х. х}} = \dot{E}_{\sim} / \dot{U}.$$

Цепь связи преобразует напряжение, комплексная амплитуда которого равна \dot{u}_{\sim} , в напряжение с комплексной амплитудой \dot{u} , действующее на выходе фотоприемного устройства.

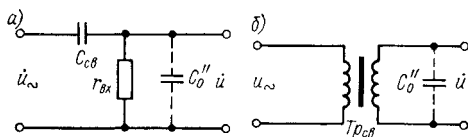


Рис. 229. Цепи связи: а — емкостная связь; б — трансформаторная связь

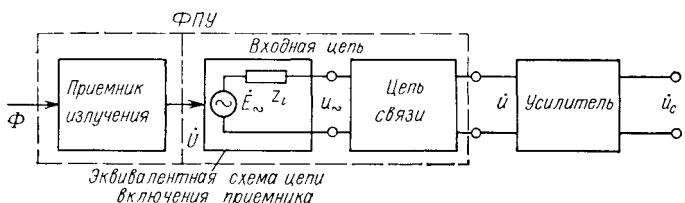


Рис. 230. Схема взаимодействия и соединения элементов электронного тракта

Два примера наиболее часто встречающихся цепей связи приведены на рис. 229.

Цепь включения приемника и цепь связи представляют собой тот реальный набор элементов (конденсаторов, сопротивлений, индуктивностей, трансформаторов, источников питания), через которые электрический сигнал проходит до его последующего усиления. Поэтому эти цепи объединяют в единую цепь, называемую *входной цепью*. Обычно цепь включения приемника в составе входной цепи заменяют эквивалентной схемой, состоящей из источника электродвижущей силы \dot{E}_{\sim} и внутреннего сопротивления \dot{Z}_i . В этом случае определяется следующая схема взаимодействия и соединения элементов электронного тракта прибора (рис. 230).

Поток $\dot{\Phi}$, воздействуя на приемник излучения, вызывает обобщенный сигнал \dot{U} , который, в свою очередь, приводит к возникновению электродвижущей силы E_{\sim} во входной цепи.

Коэффициент передачи входной цепи

$$\dot{K}_{вх} = \dot{U}/\dot{E}_{\sim}.$$

Приемник излучения в этом случае можно характеризовать крутизной (вольтовой чувствительностью)

$$\dot{S}_{пр} = \dot{E}_{\sim}/\dot{\Phi}.$$

Очевидны также следующие соотношения между модулями передаточных функций различных элементов фотоприемного устройства (ФПУ):

$$S_{пр} = E_{\sim}/\Phi = (E_{\sim}/U)(U/\Phi) = S_{вкл. х. х} S,$$

где $S_{вкл. х. х} = E_{\sim}/U$; $S = U/\Phi$.

Обозначим $k_{пр} = S_{пр}/S_{пр\max}$, причем $S_{пр\max} = (E_{\sim}/\Phi)_{\omega \rightarrow 0} = S_{пр0}$, следовательно,

$$k_{пр} = S_{пр}/S_{пр0} = S_{вкл. х. х} S/S_{пр0}.$$

Если крутизна $S_{вкл. х. х}$ от частоты ω не зависит (конденсатор C_0 исключен из схемы цепи включения приемника), можно считать, что ее значение совпадает со значением при $\omega \rightarrow 0$, т. е.

$$S_{вкл. х. х} = (S_{вкл. х. х})_{\omega \rightarrow 0} = S_{вкл. х. х0} = (E_{\sim}/U)_{\omega \rightarrow 0}.$$

В этом случае

$$\frac{S_{пр0}}{S_{вкл. х. х}} = \frac{S_{пр0}}{S_{вкл. х. х0}} = \left(\frac{E_{\sim}/\Phi}{E_{\sim}/U} \right)_{\omega \rightarrow 0} = \left(\frac{U}{\Phi} \right)_{\omega \rightarrow 0} = (S)_{\omega \rightarrow 0} = S_0$$

и

$$k_{пр} = S_{пр}/S_{пр0} = S S_{вкл. х. х0}/S_{пр0} = S/S_0.$$

Следовательно, относительная амплитудно-частотная характеристика приемника излучения, входящего в состав цепи, обеспечивающей безынерционное преобразование обобщенного сигнала в электрическое напряжение, совпадает с относительной амплитудно-частотной характеристикой приемника, осуществляющего преобразование излучения в обобщенный сигнал.

В простейшем случае, когда инерционные свойства приемника представляются аperiodическим звеном, имеем:

$$\dot{k}_{пр} = 1/(1 + j\omega\tau_{пр}); k_{пр} = 1/\sqrt{1 + (\omega\tau_{пр})^2}.$$

Общую крутизну электронного тракта

$$\dot{S}_{общ} = \dot{U}_c/\dot{\Phi}$$

можно представить в виде

$$\dot{S}_{общ} = \dot{S}_{ФПУ} \dot{K}_{ус};$$

в то же время $\dot{S}_{ФПУ} = \dot{S}_{вкл} \dot{K}_{св}$ либо $\dot{S}_{ФПУ} = \dot{S}_{пр} \dot{K}_{вх}$.

Следовательно,

$$\dot{u}_c = \dot{S}_{\Phi \Pi \Upsilon} \dot{K}_{yc} \dot{\Phi};$$

$$\dot{u}_c = \dot{S} \dot{S}_{\text{вкл}} \dot{K}_{\text{св}} \dot{K}_{yc} \dot{\Phi},$$

либо $\dot{u}_c = \dot{S}_{\text{пр}} \dot{K}_{\text{вх}} \dot{K}_{yc} \dot{\Phi}$, причем $\dot{S}_{\Phi \Pi \Upsilon} = \dot{u}/\dot{\Phi}$; $\dot{S} = \dot{U}/\dot{\Phi}$; $\dot{S}_{\text{вкл}} = \dot{u}_{\sim}/\dot{U}$; $\dot{K}_{\text{св}} = \dot{u}/\dot{u}_{\sim}$; $\dot{S}_{\text{пр}} = \dot{E}_{\sim}/\dot{\Phi}$; $\dot{K}_{\text{вх}} = \dot{u}/\dot{E}_{\sim}$.

Введя обозначения:

$$\dot{k}_{\text{пр}} = \dot{S}_{\text{пр}}/S_{\text{пр}0}; \quad \dot{k}_{\text{вх}} = \dot{K}_{\text{вх}}/K_{\text{вх} \max}; \quad \dot{k}_{yc} = \dot{K}_{yc}/K_{yc \max};$$

$$\dot{K}_c = \dot{k}_{\text{пр}} \dot{K}_{\text{вх}} \dot{K}_{yc}; \quad K_{\max} = |\dot{K}_c|_{\max}; \quad \dot{k}_c = \dot{K}_c/K_{\max},$$

найдем

$$\dot{u}_c = S_{\text{пр}0} K_{\max} \dot{k}_c \dot{\Phi}.$$

§ 11.2. РАСЧЕТ АМПЛИТУДЫ СИГНАЛА ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ПРИЕМНИК ИЗЛУЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ГЕНЕРАТОР ИЗМЕНЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим схему фотоприемного устройства для случая, когда в качестве приемника излучения используется приемник — генератор изменения сопротивления, например фоторезистор или болометр (рис. 231).

В этой схеме сигнал вырабатывается электрической цепью, состоящей из источника постоянного напряжения E_0 , сопротивления приемника излучения r и сопротивления нагрузки r_n . На рис. 231 кроме этих элементов представлены: собственная емкость приемника излучения C_0' , разделительный конденсатор $C_{св}$, входное сопротивление усилителя $r_{вх}$ и его входная емкость C_0'' .

Для дальнейшего рассмотрения необходимо использовать излагаемую в общей теории цепей теорему об эквивалентном генераторе,

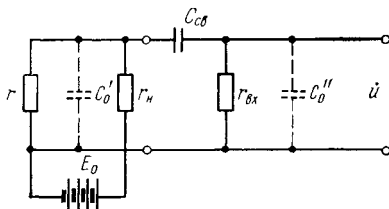


Рис. 231. Схема фотоприемного устройства с приемником — генератором изменения сопротивления

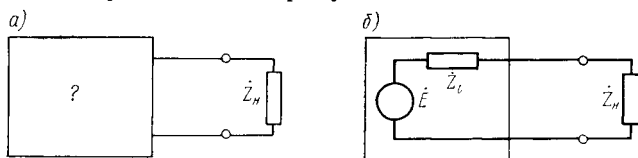


Рис. 232. Схема замещения с эквивалентным генератором: а — исходная; б — эквивалентная

сущность которой заключается в том, что если имеется схема, составленная из произвольного и неизвестного сочетаний источников тока и сопротивлений, то относительно нагрузки \dot{Z}_n (рис. 232) она может быть заменена эквивалентным генератором с внутренним сопротивлением \dot{Z}_i и э. д. с. \dot{E} . Сопротивление экви-

валентного генератора и его э. д. с. оказываются равными выходному сопротивлению и напряжению на выходе исходной схемы в режиме холостого хода, т. е. когда нагрузка \dot{Z}_H отключена.

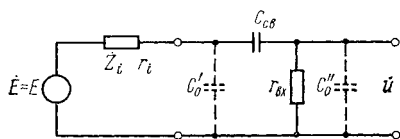


Рис. 233. Эквивалентная схема фотоприемного устройства с фотосопротивлением и болометром

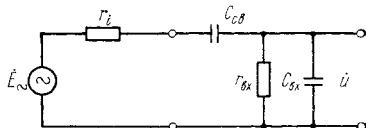


Рис. 234. Схема входной цепи для переменной составляющей сигнала

Пользуясь этой теоремой, преобразуем схему на рис. 231 в эквивалентную, представленную на рис. 233. В этой схеме

$$\dot{E} = E = E_0 r / (r + r_H), \quad \dot{Z}_i = r_i = r r_H / (r + r_H).$$

При освещении приемника потоком, изменяющимся с частотой ω , сопротивление приемника r изменяется с той же частотой и амплитудой Δr . Это, в свою очередь, вызывает изменение э. д. с. эквивалентного генератора E на величину, которая при $\Delta r \ll r$ легко определяется путем дифференцирования:

$$\partial E / \partial r = E_0 r_H / (r + r_H)^2,$$

т. е.

$$\Delta E = E_0 \frac{r_H}{(r + r_H)^2} \Delta r, \quad \text{или} \quad \Delta E = E_0 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \frac{\Delta r}{r},$$

где $\kappa = r / r_H$.

Поскольку постоянная составляющая напряжения на входе усилителя не представляет интереса, схему входной цепи можно представить в виде, изображенном на рис. 234, учитывая, что при синусоидальной модуляции потока излучения и для линейного приближения $\Delta \dot{r}$ представляет собой комплексную амплитуду синусоидально-модулированного сопротивления. Следовательно,

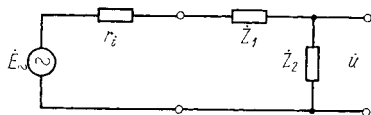


Рис. 235. Упрощенная схема входной цепи для переменной составляющей сигнала

$$\dot{E}_\sim = \Delta \dot{E} = E_0 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \frac{\Delta r}{r};$$

$$r_i = r r_H / (r + r_H) = r / (1 + \kappa).$$

Кроме того, в схеме на рис. 234 объединены емкости C'_0 и C''_0 , так что $C_{вх} = C'_0 + C''_0$. Объединение емкостей C_0 и C''_0 возможно, так как всегда выполняется условие $C_{вх} \ll C_{св}$.

Изменением сопротивления r_i в процессе модуляции можно пренебречь. Действительно,

$$\frac{\partial r_i}{\partial r} = \frac{r_H^2}{(r_H + r)^2} = \frac{1}{(1 + \kappa)^2}, \quad \text{т. е.} \quad \Delta r_i = \Delta r / (1 + \kappa)^2.$$

Так как обычно $\kappa \approx 1$, то Δr_i соизмеримо с Δr и, следовательно, мало по сравнению с r_i .

Дальнейшее упрощение схемы входной цепи возможно за счет введения комплексных сопротивлений \dot{Z}_1 и \dot{Z}_2 (рис. 235), причем

$$\dot{Z}_1 = 1/(j\omega C_{CB}); \quad 1/\dot{Z}_2 = 1/r_{BX} + j\omega C_{BX}.$$

Комплексный коэффициент передачи схемы на рис. 235 равен

$$\dot{K}_{BX} = \frac{\dot{U}}{\dot{E}_{\sim}} = \frac{1}{1 + \dot{Z}_1/\dot{Z}_2 + r_i/\dot{Z}_2}.$$

Подставляя значения \dot{Z}_1 и \dot{Z}_2 , можно найти

$$\dot{K}_{BX} = \frac{1}{1 + \frac{r_i}{r_{BX}} + \frac{C_{BX}}{C_{CB}} + j\left(\omega r_i C_{BX} - \frac{1}{\omega r_{BX} C_{CB}}\right)}.$$

Пренебрегая C_{BX}/C_{CB} по сравнению с единицей и деля числитель и знаменатель на $1 + r_i/r_{BX}$, найдем

$$\dot{K}_{BX} = \frac{r_{BX}/(r_i + r_{BX})}{1 + j\left[\omega C_{BX} \frac{r_i r_{BX}}{r_i + r_{BX}} - \frac{1}{\omega C_{CB}(r_i + r_{BX})}\right]}.$$

Введем обозначения:

$$R_{BX} = r_i r_{BX}/(r_i + r_{BX}); \quad R_{CB} = r_i + r_{BX} \quad \tau_{BX} = C_{BX} R_{BX}; \quad \tau_{CB} = C_{CB} R_{CB}.$$

Тогда окончательно получим

$$\dot{K}_{BX} = \frac{\dot{U}}{\dot{E}_{\sim}} = \frac{K_0}{1 + j\left(\omega \tau_{BX} - \frac{1}{\omega \tau_{CB}}\right)},$$

где

$$K_0 = K_{BX \max} = \frac{r_{BX}}{r_i + r_{BX}} = \frac{1 + \kappa}{1 + \kappa + \chi},$$

причем $\kappa = r/r_{BX}$; $\chi = r/r_{BX}$.

Очевидно, что $\dot{K}_{BX} = K_{BX \max} = K_0$ при $\omega = \omega_0$. Частота ω_0 определяется из соотношения

$$\omega_0 \tau_{BX} = 1/(\omega_0 \tau_{CB}),$$

т. е.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_{BX} \tau_{CB}}.$$

Крутизна фотоприемного устройства в целом равна (см. § 11.2)

$$\dot{S}_{ФПУ} = \dot{S}_{пр} \dot{K}_{BX} = S_{пр0} k_{пр} K_0 k_{BX},$$

где

$$S_{пр0} = (\dot{E}_{\sim}/\dot{\Phi})_{\omega \rightarrow 0} = (\dot{S}_{ВКЛ. \text{ х. х }})_{\omega \rightarrow 0} = S_{ВКЛ. \text{ х. х } 0} S_0;$$

$$S_{ВКЛ. \text{ х. х } 0} = (\dot{E}_{\sim}/\dot{U})_{\omega \rightarrow 0}; \quad S_0 = (\dot{U}/\dot{\Phi})_{\omega \rightarrow 0}.$$

Так как в данном случае обобщенный сигнал \dot{U} равен отношению изменению сопротивления $\dot{U} = \Delta \dot{r}/r$, то

$$S_{ВКЛ. \text{ х. х } 0} = \left(\frac{\dot{E}_{\sim}}{\Delta \dot{r}/r}\right)_{\omega \rightarrow 0} = E_0 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2}.$$

Учитывая также, что

$$k_{\text{нр}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{\text{нр}}}; \quad K_0 = \frac{1 + \kappa}{1 + \kappa + \chi};$$

$$k_{\text{вх}} = \frac{1}{1 + j[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]},$$

найдем

$$\dot{S}_{\text{ФПУ}} = S_0 E_0 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)(1 + \kappa + \chi)} \frac{1}{1 + j\omega\tau_{\text{нр}}} \frac{1}{1 + j[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]},$$

Т а б л и ц а 16

Оптимальные соотношения между сопротивлениями приемника и его нагрузки

$\chi = \frac{r}{r_{\text{вх}}}$	$\kappa_{\text{опт}} = \left(\frac{r}{r_{\text{н}}} \right)_{\text{опт}}$	$S_{\text{ФПУ max}}$
$\chi \ll 1$ ($r \ll r_{\text{вх}}$)	$\kappa_{\text{опт}} = 1$ ($r = r_{\text{н}}$)	$S_0 \frac{E_0}{4}$
$\chi = 1$ ($r = r_{\text{вх}}$)	$\kappa_{\text{опт}} = \sqrt{2}$ ($r = \sqrt{2}r_{\text{н}}$)	$S_0 \frac{E_0}{3 + 2\sqrt{2}} \approx$ $\approx S_0 \frac{E_0}{5,8}$
$\chi \gg 1$ ($r \gg r_{\text{вх}}$) $\chi = 9$ (частный случай для $\chi \gg 1$)	$\kappa_{\text{опт}} = \sqrt{\chi}$ ($r = \sqrt{\chi}r_{\text{н}}$) $\kappa_{\text{опт}} = 3$ ($r = 3r_{\text{н}}$)	$S_0 \frac{E_0}{\chi + 2\sqrt{\chi}}$ $S_0 \frac{E_0}{15}$

где $S_0 = (\Delta r/r/\Phi)_{\omega \rightarrow 0}$.

Максимальное значение крутизны фотоприемного устройства обеспечивается при следующих условиях.

1. Частота модуляции ω находится в области средних частот ($\omega \rightarrow \omega_0$), причем в этой области частот еще не сказывается инерционность приемника, т. е. выполняются соотношения: $\omega_0\tau_{\text{вх}} = 1/(\omega_0\tau_{\text{св}})$; $\omega_0\tau_{\text{нр}} \ll 1$. При этом условии

$$\dot{S}_{\text{ФПУ}} = S_{\text{ФПУ}} = S_0 E_0 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)(1 + \kappa + \chi)}.$$

2. Коэффициент $\kappa = r/r_{\text{н}}$ равен некоторому оптимальному значению $\kappa_{\text{опт}}$, при котором крутизна фотоприемного устройства максимальна, т. е. $S_{\text{ФПУ}} = S_{\text{ФПУ max}}$.

Для того чтобы определить значения $\kappa_{\text{опт}}$ и $S_{\text{ФПУ max}}$, вычислим

$$\frac{\partial S_{\text{ФПУ}}}{\partial \kappa} = S_0 E_0 \frac{1 + \chi - \kappa^2}{(1 + \kappa)^2 (1 + \kappa + \chi)^2}.$$

При $\frac{\partial S_{\text{ФПУ}}}{\partial \kappa} = 0$

$$\kappa = \kappa_{\text{опт}} = \sqrt{1 + \chi},$$

а

$$S_{\text{ФПУ max}} = S_0 E_0 \frac{1}{\chi + 2\sqrt{1 + \chi} + 2}.$$

Значения $\kappa_{\text{опт}}$ и $S_{\text{ФПУ max}}$ для трех характерных значений коэффициента χ приведены в табл. 16.

Для наиболее распространенного случая, когда входное сопротивление усилителя не нарушает режима работы фотоприемного устройства ($r_{\text{вх}} \gg r$), а нагрузка приемника согласована с его сопро-

тивлением ($r_n = r$), $S_{\Phi\PY\max} = S_0 E_0/4$. Именно этот случай является стандартным при определении параметров приемника излучения, и полученное значение крутизны вписывается в паспорт приемника; следовательно, $S_{\text{пасп}} = S_{\Phi\PY\max} = S_0 E_0/4$.

В общем случае при использовании приемника, имеющего паспорт, в произвольной цепи включения и на любой частоте имеем

$$\dot{S}_{\Phi\PY} = S_{\text{пасп}} \frac{4\kappa}{(1+\kappa)(1+\kappa+\chi)} \frac{1}{1+j\omega\tau_{\text{пр}}} \frac{1}{1+j[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]}.$$

Модуль этой крутизны (амплитудно-частотная характеристика)

$$S_{\Phi\PY} = S_{\text{пасп}} \frac{4\kappa}{(1+\kappa)(1+\kappa+\chi)} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau_{\text{пр}})^2}} \frac{1}{\sqrt{1+[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]^2}}.$$

Комплексная амплитуда сигнала на выходе усилителя

$$\dot{u}_c = \dot{S}_{\Phi\PY} \dot{K}_{yc} \Phi,$$

а ее модуль

$$u_c = S_{\Phi\PY} K_{yc} \Phi.$$

В заключение проанализируем форму относительной амплитудно-частотной характеристики входной цепи, определяемую уравнением

$$k_{\text{вх}}(\omega) = |\dot{k}_{\text{вх}}(\omega)| = \left| \frac{1}{1+j[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]^2}}.$$

Очевидно, что $k_{\text{вх}}(\omega) = 1$ при $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{\tau_{\text{вх}}\tau_{\text{св}}}$.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика в районе частоты ω_0 располагается вдоль оси нуля децибел, так как в этом участке $20 \lg k_{\text{вх}}(\omega_0) = 0$.

На низких частотах $\omega = \omega_n \ll \omega_0$ имеем $\omega_n \tau_{\text{вх}} \ll 1/(\omega_n \tau_{\text{св}})$, т. е.

$$k_{\text{вх}}(\omega_n) = \omega_n \tau_{\text{св}} / \sqrt{1 + (\omega_n \tau_{\text{св}})^2},$$

или в логарифмическом масштабе

$$k_{\text{лог}}(\omega_n) = 20 \lg \omega_n - 20 \lg (1/\tau_{\text{св}} + \omega_n^2)^{1/2}.$$

Асимптоты этой кривой при $\omega_n \rightarrow 0$ и $\omega_n \rightarrow \infty$:

$$k_{\text{лог}}^{\text{I}}(\omega_n) = 20 \lg \omega_n + 20 \lg \tau_{\text{св}}; \quad k_{\text{лог}}^{\text{II}}(\omega_n) = 0.$$

На высоких частотах $\omega = \omega_b \gg \omega_0$ имеем $\omega_b \tau_{\text{вх}} \gg 1/(\omega_b \tau_{\text{св}})$, т. е.

$$k_{\text{вх}}(\omega_b) = 1/\sqrt{1 + (\omega_b \tau_{\text{вх}})^2},$$

или в логарифмическом масштабе

$$k_{\text{лог}}(\omega_b) = -20 \lg (1/\tau_{\text{вх}} + \omega_b^2)^{1/2}.$$

Асимптоты этой кривой при $\omega_b \rightarrow 0$ и $\omega_b \rightarrow \infty$:

$$k_{\text{лог}}^{\text{I}}(\omega_b) = 0; \quad k_{\text{лог}}^{\text{II}}(\omega_b) = -20 \lg \tau_{\text{вх}} - 20 \lg \omega_b.$$

Асимптота $k_{\text{лог}}^{\text{II}}(\omega_{\text{в}})$ пересекает ось нуля децибел в точке, определяемой уравнением

$$20 \lg \tau_{\text{вх}} + 20 \lg \omega_{\text{в}} = 0,$$

т. е.

$$\lg \omega_{\text{в}} = \lg (1/\tau_{\text{вх}}), \text{ или } \omega_{\text{в}} = 1/\tau_{\text{вх}}.$$

Наклон этой асимптоты к оси нуля децибел равен -20 дБ/дек.

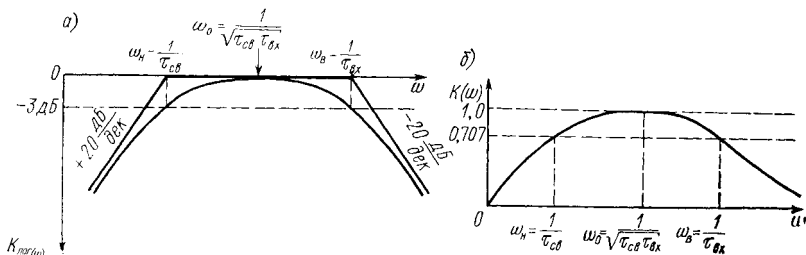


Рис. 236. Амплитудно-частотная характеристика: а — в логарифмическом масштабе; б — в обычном масштабе

Асимптота $k_{\text{лог}}^{\text{II}}(\omega_{\text{н}})$ пересекает ось нуля децибел в точке

$$\omega_{\text{н}} = 1/\tau_{\text{св}}$$

и имеет наклон $+20$ дБ/дек.

Амплитудно-частотная характеристика представлена на рис. 236. Реальная характеристика в наибольшей мере, на -3 дБ (0,707), отличается от идеальной, составленной из асимптот, в точках $\omega_{\text{н}} = 1/\tau_{\text{св}}$ и $\omega_{\text{в}} = 1/\tau_{\text{вх}}$.

§ 11.3. РАСЧЕТ АМПЛИТУДЫ СИГНАЛА ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ПРИЕМНИК ИЗЛУЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ГЕНЕРАТОР ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ (ЭДС)

Когда источником сигнала является приемник излучения — генератор э. д. с. (термоэлемент, фотовольтаический полупроводни-

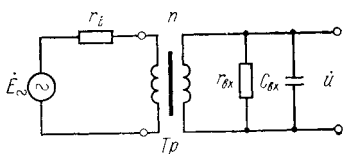


Рис. 237. Схема фотоприемного устройства (входной цепи) с приемником излучения, являющимся источником э. д. с. (n — коэффициент трансформации)

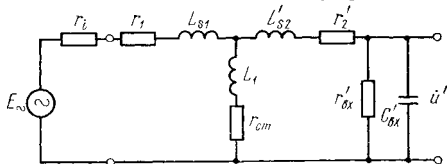


Рис. 238. Эквивалентная схема входной цепи, содержащая схему замещения трансформатора

ковый приемник), расчет величины сигнала может производиться по формулам § 11.2, если считать, что \dot{E}_{\sim} представляет собой э. д. с. приемника, а r_i — его внутреннее сопротивление. Однако задача расчета в рассматриваемом случае оказывается более слож-

ной, так как приемники излучения, вырабатывающие э. д. с., обычно имеют небольшое внутреннее сопротивление, для согласования которого со входом усилителя используется трансформатор. Схема входной цепи с трансформатором представлена на рис. 237. Эквивалентная схема входной цепи, содержащая известную из электротехники схему замещения трансформатора, изображена на рис. 238, где r_1 — активное сопротивление первичной обмотки трансформатора; L_{s1} — индуктивность рассеяния первичной обмотки; r'_2 и L'_{s2} — приведенные (пересчитанные в цепь первичной обмотки) значения активного сопротивления и индуктивности рассеяния вторичной обмотки; $r'_{вх}$ и $C'_{вх}$ — приведенные значения входного сопротивления и входной емкости (в данном случае входная емкость включает в себя кроме емкости монтажа, собственной емкости приемника и входной емкости усилителя еще и собственную межвитковую емкость трансформатора, составляющую обычно 50—100 пФ); L_1 — индуктивность первичной обмотки; $r_{ст}$ — сопротивление потерь в стали сердечника (это сопротивление обычно мало по сравнению с ωL_1 , так как входные трансформаторы работают при относительно малых значениях индукции в стали). Если коэффициент трансформации $n = \omega_2/\omega_1$, где ω_1 и ω_2 — число витков первичной и вторичной обмоток, то имеют место следующие соотношения: $r'_2 = r_2/n^2$; $L'_{s2} = L_{s2}/n^2$; $r'_{вх} = r_{вх}/n^2$; $C'_{вх} = n^2 C_{вх}$; $\dot{u}' = \dot{u}/n$.

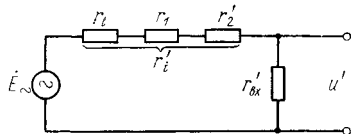


Рис. 239. Эквивалентная схема входной цепи для средних частот

Эквивалентная схема, представленная на рис. 238, может быть в значительной мере упрощена, если не рассматривать одновременно весь рабочий диапазон частот, а разделить его на три области: низкие, средние и высокие частоты.

В области средних частот вблизи частоты ω_0 , для которой удовлетворяются неравенства: $\omega_0 L_1 \gg r'_{вх}$, $\omega_0 L_s \ll r'_{вх}$, $1/(\omega_0 C'_{вх}) \gg r'_{вх}$, в эквивалентную схему не входят реактивные элементы и она имеет вид, изображенный на рис. 239. Комплексный коэффициент передачи напряжения в этой схеме равен

$$\dot{K}'_{вх}(\omega_0) = \left(\frac{\dot{u}'}{\dot{E}_{\sim}} \right)_{\omega=\omega_0} = K'_0 = \frac{r'_{вх}}{r_i + r_1 + r'_2 + r'_{вх}};$$

следовательно,

$$\dot{K}_{вх}(\omega_0) = \left(\frac{\dot{u}}{\dot{E}_{\sim}} \right)_{\omega=\omega_0} = K_0 = K'_0 n = n \frac{r_{вх}/n^2}{r_i + r_1 + r_2/n^2 + r_{вх}/n^2},$$

или

$$K_0 = \frac{n}{1 + [n^2(r_i + r_1) + r_2]/r_{вх}}.$$

Если активное сопротивление первичной цепи трансформатора согласовано с входным сопротивлением $r'_{вх}$, т. е. $n^2 = r_{вх}/(r_i + r_1)$, а $r_2 \ll r_{вх}$, то $K_0 = n/2$.

В области низких частот $\omega = \omega_H < \omega_0$ можно пренебречь сопротивлениями индуктивностей рассеяния L_{s1} и L'_{s2} , а также сопротивлением емкости C'_{BX} . Следовательно, эквивалентная схема на низких частотах имеет вид, представленный на рис. 240, а.

Преобразование схемы на рис. 240, а в схему на рис. 240, б не вносит заметных погрешностей вследствие малой роли активных сопротивлений обмоток трансформатора по сравнению с другими сопротивлениями схемы. Во всяком случае вносимая погрешность создает

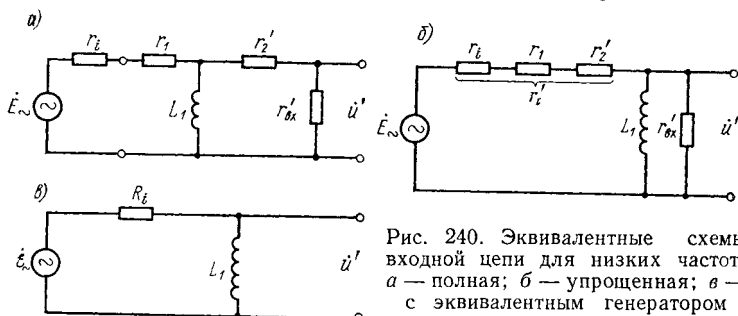


Рис. 240. Эквивалентные схемы входной цепи для низких частот: а — полная; б — упрощенная; в — с эквивалентным генератором

небольшой запас при расчете частотных искажений в области низких частот. Схема на рис. 240, в получена преобразованием схемы на рис. 240, б с помощью теоремы об эквивалентном генераторе.

Так как для эквивалентного генератора внутреннее сопротивление и э. д. с. равны соответственно

$$R_i = \frac{r'_i r'_{BX}}{r'_i + r'_{BX}}; \quad \mathcal{E}_{\sim} = \frac{r'_{BX}}{r'_i + r'_{BX}} \dot{E}_{\sim},$$

где $r'_i = r_i + r_1 + r'_2$, то в области низких частот комплексный коэффициент передачи эквивалентной схемы входной цепи

$$\dot{K}_{BX}(\omega_H) = \left(\frac{\dot{u}'}{\dot{\mathcal{E}}_{\sim}} \right)_{\omega=\omega_H} = \frac{j\omega_H L_1}{R_i + j\omega_H L_1} = \frac{1}{1 + R_i/(j\omega_H L_1)}.$$

Поскольку интересующее нас значение комплексного коэффициента передачи фотоприемного устройства

$$\begin{aligned} \dot{K}_{BX}(\omega_H) &= \left(\frac{\dot{u}}{\dot{E}_{\sim}} \right)_{\omega=\omega_H} = \left(\frac{\dot{u}'}{\dot{\mathcal{E}}_{\sim}} \right)_{\omega=\omega_H} \frac{n r'_{BX}}{r'_{BX} + r'_i} = \\ &= \dot{K}'_{BX}(\omega_H) \frac{n}{1 + [n^2 (r_i + r_1) + r_2]/r_{BX}} = \dot{K}'_{BX}(\omega_H) K_0, \end{aligned}$$

то

$$\dot{K}_{BX}(\omega_H) = \frac{K_0}{1 + R_i/(j\omega_H L_1)}.$$

Модуль комплексного коэффициента передачи в области низких частот

$$K_{BX}(\omega_H) = K_0 / \sqrt{1 + [R_i/(\omega_H L_1)]^2},$$

а аргумент

$$\varphi_{BX}(\omega_H) = \varphi_H = \arctg [R_i/(\omega_H L_1)].$$

Относительная амплитудно-частотная характеристика входной цепи в области низких частот имеет вид

$$k_{\text{вх}}(\omega_{\text{H}}) = K_{\text{вх}}(\omega_{\text{H}})/K_0 = 1/\sqrt{1 + [R_i/(\omega_{\text{H}}L_1)]^2},$$

или

$$k_{\text{вх}}(\omega_{\text{H}}) = 1/\sqrt{1 + 1/(\omega_{\text{H}}\tau_{\text{H}})^2},$$

где $\tau_{\text{H}} = L_1/R_i$.

Если $\omega_{\text{H}} = 1/\tau_{\text{H}}$, то $k_{\text{вх}}(\omega_{\text{H}}) = 1/\sqrt{2} = 0,707$.

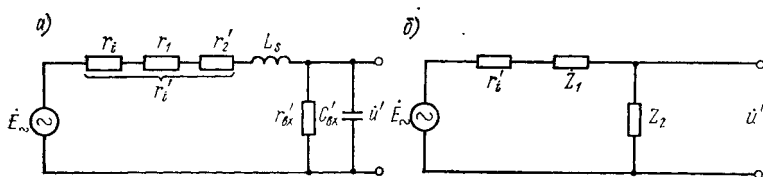


Рис. 241. Эквивалентные схемы входной цепи для высоких частот: а — полная; б — упрощенная

В области высоких частот ($\omega = \omega_{\text{B}} > \omega_0$) эквивалентная схема входной цепи с трансформатором имеет вид, представленный на рис. 241. На этой схеме введены следующие обозначения:

$$r'_i = r_i + r_1 + r'_2; \quad L_s = L_{s_1} + L_{s_2};$$

$$\dot{Z}_1 = j\omega L_s; \quad 1/\dot{Z}_2 = 1/r'_{\text{вх}} + j\omega C'_{\text{вх}}.$$

Комплексный коэффициент передачи схемы на рис. 241, б равен

$$\dot{K}'_{\text{вх}}(\omega_{\text{B}}) = \left(\frac{\dot{u}'}{\dot{E}_{\sim}} \right)_{\omega=\omega_{\text{B}}} = \frac{1}{1 + \dot{Z}_1/\dot{Z}_2 + r'_i/\dot{Z}_2}.$$

Подставляя значения \dot{Z}_1 и \dot{Z}_2 и преобразуя, можно найти

$$\dot{K}'_{\text{вх}}(\omega_{\text{B}}) = \frac{K'_0}{1 - \omega^2\tau_1\tau_2 + j\omega(a\tau_1 + \tau_2)},$$

где $K'_0 = r'_{\text{вх}}/(r'_i + r'_{\text{вх}})$; $\tau_1 = r'_{\text{вх}}C'_{\text{вх}}$; $\tau_2 = L_s/(r'_i + r'_{\text{вх}})$; $a = r'_i/(r'_i + r'_{\text{вх}})$.

Так как

$$K_{\text{вх}}(\omega_{\text{B}}) = (\dot{u}'/\dot{E}_{\sim})_{\omega=\omega_{\text{B}}} = (n\dot{u}'/\dot{E}_{\sim})_{\omega=\omega_{\text{B}}} = n\dot{K}'_{\text{вх}}(\omega_{\text{B}}),$$

то

$$\dot{K}_{\text{вх}}(\omega_{\text{B}}) = \frac{K_0}{1 - \omega^2\tau_1\tau_2 + j\omega(a\tau_1 + \tau_2)},$$

где $K_0 = nK'_0 = \frac{n}{1 + [n^2(r_i + r_1) + r_2]/r_{\text{вх}}}$.

Модуль коэффициента передачи

$$K_{\text{вх}}(\omega_{\text{B}}) = \frac{K_0}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau_1\tau_2)^2 + \omega^2(a\tau_1 + \tau_2)^2}}.$$

Относительная амплитудно-частотная характеристика определяется выражением

$$k_{\text{вх}}(\omega_{\text{в}}) = \frac{K_{\text{вх}}(\omega_{\text{в}})}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2)^2 + \omega^2 (a\tau_1 + \tau_2)^2}},$$

а обратная величина, называемая коэффициентом частотных искажений, определится выражением

$$M_{\text{в}} = 1/k_{\text{вх}}(\omega_{\text{в}}) = \sqrt{(1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2)^2 + \omega^2 (a\tau_1 + \tau_2)^2}.$$

Введем обозначения:

$$p = \omega \sqrt{\tau_1 \tau_2} = \omega \sqrt{K'_0 C_{\text{вх}} L_s} = \omega \sqrt{n K_0 C_{\text{вх}} L_s};$$

$$d = \frac{a\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \sqrt{K'_0} \left(r'_i \sqrt{\frac{C_{\text{вх}}}{L_s}} + \frac{1}{r'_{\text{вх}}} \sqrt{\frac{L_s}{C_{\text{вх}}}} \right).$$

Тогда можно записать

$$k_{\text{вх}}(\omega_{\text{в}}) = 1/\sqrt{(1-p)^2 + (pd)^2},$$

или

$$M_{\text{в}} = \sqrt{(1-p)^2 + (pd)^2}.$$

Величину p , пропорциональную частоте, называют обобщенной частотой. Величина d представляет собой затухание контура входной

цепи на верхних частотах, она определяет форму частотной характеристики. С увеличением d подъем характеристики за счет резонанса уменьшается.

Условие максимума коэффициента передачи (минимума коэффициента частотных искажений) найдем, продифференцировав выражение для $M_{\text{в}}$, и приравняв производную нулю. При этом можно найти

$$\partial M_{\text{в}}^2 / \partial p = -4p(1+p^2) + 2pd^2 = 0,$$

откуда значение p , соответствующее максимуму коэффициента передачи в области высоких частот, равно

$$p_{\text{max}} = \sqrt{1 - d^2/2}.$$

т. е.

$$\omega_{\text{max}} = \frac{\sqrt{\tau_1 \tau_2 - (a\tau_1 + \tau_2)^2/2}}{\tau_1 \tau_2}.$$

Полученное выражение для ω_{max} имеет физический смысл при условии $d < \sqrt{2}$, что является условием получения подъема частотной характеристики. Для $d > \sqrt{2}$ частотная характеристика не имеет подъема в области верхних частот.

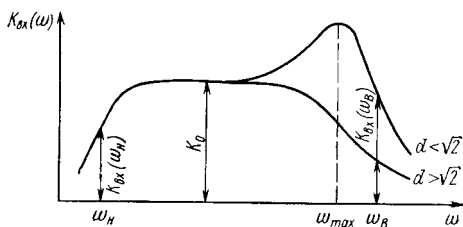


Рис. 242. Частотная характеристика входной цепи фотоприемного устройства с приемником — генератором э. д. с.

Общий вид частотной характеристики фотоприемного устройства, входная цепь которого включает в себя трансформатор, представлен на рис. 242.

Подробности расчета можно найти в книге С. Н. Кризе «Усиленные устройства».

§ 11.4. РАСЧЕТ АМПЛИТУДЫ СИГНАЛА ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ПРИЕМНИК ИЗЛУЧЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ГЕНЕРАТОР ТОКА

Если источником сигнала служит приемник — генератор тока, например фотоэмиссионный приемник излучения (рис. 243), то эквива-

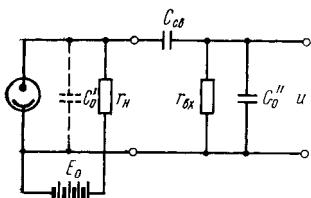


Рис. 243. Схема фотоприемного устройства с фотоэмиссионным приемником излучения (генератор тока)

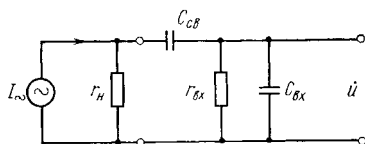


Рис. 244. Эквивалентная схема фотоприемного устройства с фотоэмиссионным приемником излучения (для переменного тока)

лентной схемой фотоприемного устройства является схема, представленная на рис. 244. В этой схеме сила тока, протекающего через генератор, не зависит от напряжения на его зажимах, т. е. от сопротивления нагрузки. Так как внутреннее сопротивление генератора тока равно бесконечности, то, применяя к схеме на рис. 244 теорему об эквивалентном генераторе, можно представить ее в виде, изображенном на рис. 245. В этом случае приходим к схеме входной цепи фотоприемного устройства с приемником — генератором э. д. с., у которого $r_i = r_H$; $\dot{E}_{\sim} = \dot{I}_{\sim} r_H$. Поскольку в § 11.2 уже было получено выражение для комплексного коэффициента передачи подобной схемы, можно сразу же записать

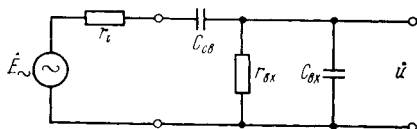


Рис. 245. Схема входной цепи фотоприемного устройства с фотоэмиссионным приемником излучения — генератором э. д. с.

$$\dot{K}_{BX} = \frac{\dot{u}}{\dot{E}_{\sim}} = \frac{K_0}{1 + j[\omega\tau_{BX} - 1/(\omega\tau_{CB})]},$$

где

$$K_0 = r_{BX}/(r_i + r_{BX}) = r_{BX}/(r_H + r_{BX}); \quad \tau_{BX} = C_{BX}R_{BX};$$

$$R_{BX} = r_i r_{BX}/(r_i + r_{BX}) = r_H r_{BX}/(r_H + r_{BX});$$

$$\tau_{CB} = C_{CB}R_{CB}; \quad R_{CB} = r_i + r_{BX} = r_H + r_{BX}.$$

Коэффициент передачи достигает максимального значения, равного K_0 , на частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_{\text{вх}}\tau_{\text{св}}}.$$

Относительный коэффициент передачи

$$\dot{k}_{\text{вх}} = \frac{\dot{K}_{\text{вх}}}{K_0} = \frac{1}{1 + j[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]},$$

а его модуль (относительная амплитудно-частотная характеристика)

$$k_{\text{вх}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + [\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]^2}}.$$

Крутизна фотоприемного устройства в целом равна

$$\dot{S}_{\Phi\Pi\Upsilon} = S_{\text{пр}0} K_0 \dot{k}_{\text{пр}} \dot{k}_{\text{вх}} = S_0 S_{\text{вкл. х. х}0} K_0 \dot{k}_{\text{пр}} \dot{k}_{\text{вх}}.$$

Так как в данном случае комплексная амплитуда обобщенного сигнала \dot{U} равна комплексной амплитуде тока, вырабатываемого приемником, т. е. $\dot{U} = \dot{I}_{\sim}$, то

$$S_{\text{вкл. х. х}0} = (\dot{E}_{\sim}/\dot{I}_{\sim})_{\omega \rightarrow 0} = r_{\text{н}}.$$

Учитывая также, что

$$\dot{k}_{\text{пр}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_{\text{пр}}};$$

$$K_0 = \frac{r_{\text{вх}}}{r_{\text{н}} + r_{\text{вх}}};$$

$$\dot{k}_{\text{вх}} = \frac{1}{1 + j[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]};$$

$$K_0 S_{\text{вкл. х. х}0} = \frac{r_{\text{вх}}'_{\text{н}}}{r_{\text{вх}} + r_{\text{н}}} = R_{\text{вх}},$$

найдем

$$\dot{S}_{\Phi\Pi\Upsilon} = S_0 \dot{k}_{\text{пр}} R_{\text{вх}} \dot{k}_{\text{вх}} = S_0 R_{\text{вх}} \frac{1}{1 + j\omega\tau_{\text{пр}}} \frac{1}{1 + j[\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]},$$

где $S_0 = (I/\Phi)_{\omega \rightarrow 0}$.

Модуль крутизны фотоприемного устройства — амплитудно-частотная характеристика

$$S_{\Phi\Pi\Upsilon} = S_0 k_{\text{пр}} R_{\text{вх}} k_{\text{вх}} = S_0 R_{\text{вх}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_{\text{пр}})^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + [\omega\tau_{\text{вх}} - 1/(\omega\tau_{\text{св}})]^2}}.$$

Максимального значения крутизны фотоприемного устройства можно достичь, увеличивая $R_{\text{вх}}$, однако при этом трудно сохранить на заданной частоте значение коэффициента передачи входной цепи $k_{\text{вх}}$, так как с ростом $R_{\text{вх}}$ растет постоянная времени $\tau_{\text{вх}} = C_{\text{вх}} R_{\text{вх}}$.

Компромиссное решение может быть найдено посредством коррекции постоянной времени входной цепи $\tau_{\text{вх}}$, возрастающей с увеличением $R_{\text{вх}}$, соответствующими дифференцирующими цепочками в схеме усилителя подобно тому, как это описано в § 10.2.

Глава 12

СПЕКТР СИГНАЛА. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ. РАСЧЕТ СПЕКТРОВ

Любое сложное колебание может быть представлено большим числом простых гармонических составляющих, которые образуют его *спектр*.

Ньютон назвал спектром цветную полоску, появляющуюся на экране, установленном за призмой, в которой преломлялся пучок белого света. По современным представлениям белый свет, представляющий собой сложное колебание, состоит из отдельных монохроматических (одноцветных) лучей, которые в опыте Ньютона различно преломлялись призмой. Подобно этому любой сложный звук (аккорд) состоит из набора гармонических колебаний звуковой частоты.

Спектральные представления колебаний широко распространились главным образом в связи с развитием радиотехники. Их основой является *гармонический анализ* процессов, выполняемый с помощью математического аппарата *разложений Фурье*, который, кстати сказать, рассматривался их автором лишь как средство решения отвлеченных математических задач.

Широкое распространение гармонического анализа во всех отраслях современной науки и техники объясняется рядом причин. Во-первых, гармоническое колебание является простейшей функцией, не поддающейся дальнейшему разложению в спектр. Во-вторых, оно является единственной функцией, сохраняющей свою форму при прохождении через любую линейную систему. Далее, разложение сложного сигнала по ортогональной системе основных тригонометрических функций — синусов и косинусов — позволяет использовать символический метод, подробно разработанный для анализа передачи гармонических колебаний через линейные системы.

Возможность использовать гармонический анализ не только в теории и технике формирования и обработки сигналов, но и для решения таких задач, как определение взаимной связи распределения токов в антенне сантиметрового диапазона с формой ее диаграммы направленности, определение структуры пространственных фильтров, позволяющих осуществить опознавание изображения на фотоснимке, улучшить качество последнего и т. д., привлекло к разложениям Фурье пристальное внимание научных работников и инженеров.

§ 12.1. СПЕКТРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Периодических сигналов в строгом смысле не существует, так как основным свойством периодической функции является *бесконечное* повторение одного и того же явления. Однако понятие периодического сигнала с большой пользой применяется при анализе

реальных процессов, всегда занимающих конечные интервалы времени или пространства.

Рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к определению и расчету спектров периодических сигналов.

Гармонические колебания

Простейшим периодическим сигналом является гармоническое колебание, определяемое тригонометрической функцией времени или пространства

$$U(t) = A \cos[(2\pi/T)t - \psi] = A \cos(\omega t - \psi) = A \cos \varphi$$

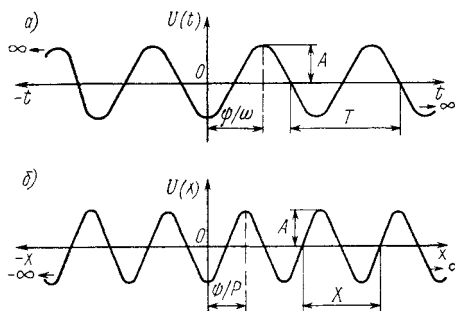


Рис. 246. Графическое представление гармонического колебания: а — функция времени; б — функция пространственной координаты

при $-\infty < t < +\infty$ или

$$U(x) = A \cos[(2\pi/\lambda)x - \psi] = A \cos(px - \psi) = A \cos \varphi$$

при $-\infty < x < +\infty$. Здесь A , T — амплитуда и период колебания; $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ — круговая частота колебания; $f = 1/T$ — частота колебания; λ — длина волны; $p = 2\pi/\lambda = 2\pi v$ — круговая пространственная частота; $v = 1/\lambda$ — пространственная частота колебания (волновое число); ψ , φ — начальная и полная фазы колебания.

Графическое изображение гармонического колебания представлено на рис. 246. В дальнейшем в качестве аргумента гармонической функции будут использоваться равным образом временная t и пространственная x (y) координаты.

Гармоническое колебание можно представить в виде действительной части комплексного переменного

$$U(t) = A \operatorname{Re} [e^{j\varphi}],$$

откуда, учитывая, что

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi,$$

найдем

$$U(t) = A \operatorname{Re} [\cos \varphi + j \sin \varphi] = A \cos \varphi.$$

В этом случае имеется в виду, что некоторый вектор \vec{A} вращается с угловой скоростью ω и значение $U(t)$ определяется его проекцией на действительную ось (рис. 247).

Можно также воспользоваться представлением гармонического колебания в виде суммы двух векторов \vec{B} и \vec{C} , имеющих одинаковый модуль $0,5A$ и вращающихся с частотой ω в противоположных направлениях (рис. 248). Тогда

$$U(t) = \dot{B} + \dot{C} = 0,5Ae^{+j\varphi} + 0,5Ae^{-j\varphi} = 0,5A(e^{+j\varphi} + e^{-j\varphi}) = A \cos \varphi.$$

В полученном выражении одно из слагаемых может трактоваться как колебание с «отрицательной» частотой $\omega_- = -\omega_+$ и фазой $\psi_- = -\psi_+$.

Действительно, можно найти (индекс «плюс» для положительных значений частоты и фазы в дальнейшем опускается)

$$\begin{aligned} U(t) &= \dot{B} + \dot{C} = 0,5Ae^{+j\varphi} + 0,5Ae^{-j\varphi} = \\ &= 0,5Ae^{+j(\omega t - \psi)} + 0,5Ae^{-j(\omega t - \psi)} = 0,5A[e^{j(\omega t - \psi)} + e^{j(\omega_- t - \psi_-)}] = \\ &= 0,5A[e^{j(\omega t - \psi)} + e^{j(-\omega) t - \psi_-}]. \end{aligned}$$

Используя тригонометрическое представление комплексного числа, легко показать, как это уже было сделано в § 8.1, что гармонической

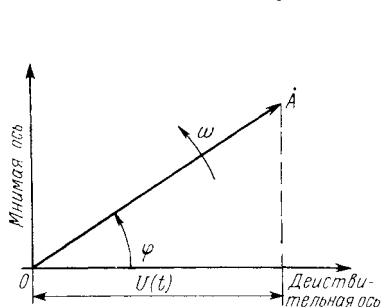


Рис. 247. Представление гармонического колебания в виде проекции вращающегося вектора на действительную ось

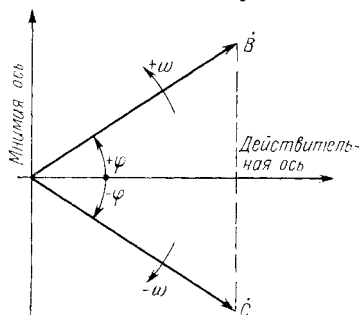


Рис. 248. Векторное представление гармонического колебания

составляющей с какой-либо физической частотой ω всегда соответствует пара слагаемых, одно из которых содержит отрицательную частоту.

Сложный периодический процесс

Любой сложный периодический процесс может быть представлен с помощью ряда Фурье в виде суммы элементарных гармонических колебаний.

Пусть функция $U(t)$, заданная в интервале от t_1 до t_2 , повторяется с частотой $\omega_1 = 2\pi/T$ (рис. 249). Тогда с несущественными математическими ограничениями, сводящимися к тому, что функция должна быть непрерывной или иметь конечное число разрывов, а также иметь в пределах одного периода конечное число максимумов и минимумов (условие Дирихле), функция $U(t)$ может быть представлена рядом Фурье в виде суммы тригонометрических функций:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t),$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \sin k\omega_1 t dt.$$

Разложение $U(t)$ может быть записано и в другой форме.
Пусть

$$a_k = A_k \cos \psi_k; \quad b_k = A_k \sin \psi_k$$

т. е.

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \psi_k = \arctg(b_k/a_k).$$

Тогда найдем

$$\begin{aligned} a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t &= A_k (\cos \psi_k \cos k\omega_1 t + \sin \psi_k \sin k\omega_1 t) = \\ &= A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k) \end{aligned}$$

и

$$U(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k),$$

где $A_0 = a_0$.

Следовательно, любая сложная периодическая функция практически всегда может быть представлена в виде суммы гармонических составляющих и вполне определяется совокупностями значений A_k и ψ_k .

Совокупность величин A_k носит название *спектра амплитуд*, а совокупность величин ψ_k — *спектра фаз*. Обычно под словом спектр понимают спектр амплитуд. При графическом изображении спектра принято представлять амплитуды отдельных гармоник вертикальными отрезками соответствующей длины (линиями).

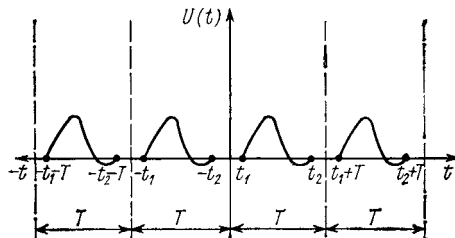


Рис. 249. Произвольный периодический процесс

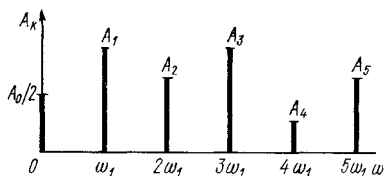


Рис. 250. Спектр амплитуд

Спектр периодической функции состоит из отдельных линий, соответствующих дискретным частотам: 0, ω_1 , $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ и т. д. (рис. 250). Отсюда и название *линейчатый*, или *дискретный, спектр*. Строго говоря, дискретность спектра не является признаком периодической функции. *Спектр периодической функции не только дискретный, но и гармонический*, т. е. он состоит из равноотстоящих спектральных линий — гармоник, причем частоты гармоник находятся в простых кратных соотношениях.

Функция, обладающая дискретным спектром из произвольно расположенных по шкале частот спектральных линий, называется *квазипериодической* (почти периодической). Такой функцией описываются, в частности, модулированные колебания, которые будут рассмотрены далее.

Существует еще одна весьма важная форма представления периодической функции рядом Фурье. В этом случае ряд Фурье записывается в комплексном виде.

Для получения соответствующего результата используем возможность выразить отдельное гармоническое колебание как сумму двух векторов

$$A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k) = 0,5 A_k e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)} + 0,5 A_k e^{-j(k\omega_1 t - \psi_k)}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j(k\omega_1 t - \psi_k)}.$$

Можно убедиться, что A_k — функция, четная относительно k , а ψ_k — функция нечетная. Действительно,

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \psi_k = \text{arctg}(b_k/a_k),$$

но

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \sin k\omega_1 t dt,$$

т. е.

$$a_{-k} = a_{+k}; \quad b_{-k} = -b_{+k}$$

и

$$A_{-k} = A_{+k}; \quad \psi_{-k} = -\psi_{+k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{A_k}{2} e^{-j(k\omega_1 t - \psi_k)} = \sum_{k=-1}^{k=-\infty} \frac{A_k}{2} e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)}$$

и

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=-\infty}^{k=-1} A_k e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)} + \sum_{k=+1}^{k=+\infty} A_k e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)} \right].$$

Кроме того, так как при $k=0$ $b_k = b_0 = 0$; $\psi_k = \psi_0 = 0$; $e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)} = 1$, то в этом случае

$$(A_k/2) e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)} = A_0/2 = a_0/2.$$

Таким образом, можно найти

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k e^{j(k\omega_1 t - \psi_k)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k e^{-j\psi_k} e^{jk\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\dot{A}_k = A_k e^{-j\psi_k},$$

найдем окончательно выражение для разложения Фурье функции $U(t)$ в комплексном виде:

$$U(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}.$$

Так как

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \operatorname{tg} \psi_k = b_k/a_k,$$

то

$$\begin{aligned} \dot{A}_k &= A_k e^{-j\psi_k} = a_k - jb_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \cos k\omega_1 t dt - \\ &- j \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt, \end{aligned}$$

или

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Периодическая функция $U(t)$, определяющая прямоугольные импульсы, имеет вид, представленный на рис. 251.

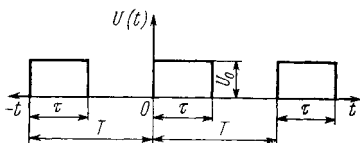


Рис. 251. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

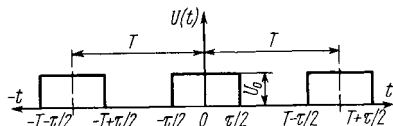


Рис. 252. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов, расположенных симметрично относительно начала отсчета

В промежутке от $t_1 = 0$ до $t_2 = \tau$ функция $U(t) = U_0$, а в остальной части периода T функция $U(t) = 0$. Таким образом, можно найти:

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{2} &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} U_0 dt = \frac{U_0}{T} \tau; \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\tau} U_0 \cos k\omega_1 t dt = \\ &= \frac{2U_0}{T} \frac{\sin k\omega_1 \tau}{k\omega_1 \tau} \tau = 2U_0 \frac{\tau}{T} \operatorname{sa}(k\omega_1 \tau), \end{aligned}$$

где, как и в одном случае ранее, обозначено

$$\text{sa}(k\omega_1\tau) = \sin k\omega_1\tau / (k\omega_1\tau),$$

и

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U(t) \sin k\omega_1 t dt = \frac{2U_0}{T} \frac{1 - \cos k\omega_1\tau}{k\omega_1} = 2U_0 \frac{\tau}{T} \frac{1 - \cos k\omega_1\tau}{k\omega_1\tau}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2U_0 \frac{\tau}{T} \frac{1}{k\omega_1\tau} 2 \sqrt{\frac{1 - \cos k\omega_1\tau}{2}} = \\ &= 2U_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(k\omega_1\tau/2)}{k\omega_1\tau/2} = 2U_0 \frac{\tau}{T} \text{sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right); \\ \psi_k &= \arctg \frac{1 - \cos k\omega_1\tau}{\sin k\omega_1\tau} = \arctg \frac{2 \sin^2(k\omega_1\tau/2)}{2 \sin(k\omega_1\tau/2) \cos(k\omega_1\tau/2)} = \\ &= \arctg\left(\text{tg} \frac{k\omega_1\tau}{2}\right) = \frac{k\omega_1\tau}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k) = \\ &= U_0 \frac{\tau}{T} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \cos k\omega_1 \left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Так как

$$\dot{A}_k = A_k e^{-j\psi_k} = 2U_0 \frac{\tau}{T} \text{sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) e^{-jk\omega_1\tau/2},$$

то в комплексной форме имеем

$$U(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t} = U_0 \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \text{sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) e^{jk\omega_1(t-\tau/2)}.$$

Если начало отсчета выбрать в центре импульса (рис. 252), то можно найти:

$$b_k = 0;$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} U_0 \cos k\omega_1 t dt = \frac{4U_0}{T} \frac{\sin(k\omega_1\tau/2)}{k\omega_1\tau/2} \frac{\tau}{2} = 2U_0 \frac{\tau}{T} \text{sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right);$$

$$A_k = a_k; \quad \psi_k = 0$$

и

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \frac{\tau}{T} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \cos k\omega_1 t \right] = \\ &= U_0 \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \text{sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) e^{jk\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Таким образом, спектр последовательности прямоугольных импульсов состоит из бесконечного числа гармонических составляющих т. е. составляющих с частотами, кратными частоте ω_1 .

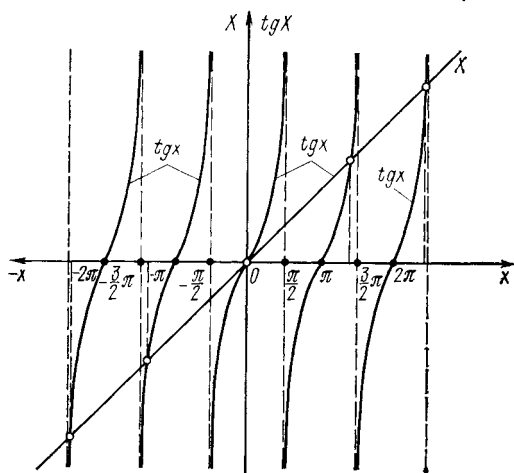


Рис. 253. Графическое решение трансцендентного уравнения $x = \operatorname{tg} x$

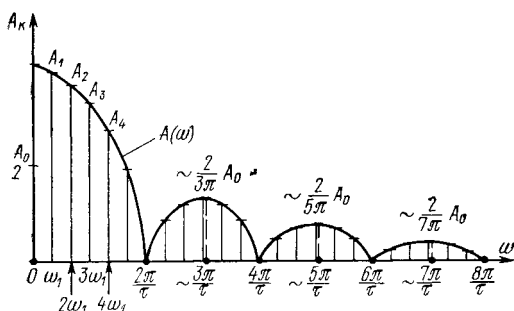


Рис. 254. Спектр амплитуд периодической последовательности прямоугольных импульсов (см. рис. 251) для случая $2\pi/\tau \gg \omega_1 = 1/T$, или $\tau/T \ll 2\pi$

Огибающую спектр амплитуд можно получить, если рассматривать не только дискретные значения $k\omega_1$ на оси частот, но и все текущие значения частоты ω . Тогда огибающая спектра амплитуд равна

$$\begin{aligned} A(\omega) &= A_k = \\ &= 2U_0 \frac{\tau}{T} \operatorname{sa} \left(\frac{k\omega_1 \tau}{2} \right) = \\ &= 2U_0 \frac{\tau}{T} \operatorname{sa} \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) = \\ &= 2U_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2}. \end{aligned}$$

Она имеет нулевые значения в тех же точках, что и $\sin(\omega_0 \tau/2)$, т. е. при $\omega_0 \tau/2 = n\pi$, или $\omega_0 = 2n\pi/\tau$. Исключение составляет точка для $n=0$, т. е. $\omega_0 \tau/2 = 0$, где имеет место неопределенность типа $0/0$. Раскрывая ее по правилу Лопиталья, найдем, что при $\omega = 0$ $2U_0(\tau/T) \operatorname{sa}(\omega \tau/2) = 2U_0 \tau/T$, что в два раза больше постоянной составляющей разложения Фурье ($A_0/2 = U_0 \tau/T$). Постоянная составляющая как бы выпадает из тех значений амплитуд

спектра, которые могут быть получены по точкам огибающей.

Огибающая $A(\omega)$ имеет максимумы в точках $\omega = \omega_{\max}$, когда

$$\frac{\sin(\omega_{\max} \tau/2)}{\omega_{\max} \tau/2} = \left[\frac{\sin(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} \right]_{\max}.$$

Обозначая $\omega_{\max} \tau/2 = x$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0,$$

т. е.

$$x \cos x = \sin x, \text{ или } x = \operatorname{tg} x.$$

Корни этого трансцендентного уравнения (кроме очевидного корня $x = 0$) близки к значениям $x = \pm (2n + 1) \pi/2$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, так как они соответствуют точкам пересечения прямой и тангенсоиды (рис. 253), т. е.

$$\omega_{\max} \approx (2n + 1) \pi/\tau.$$

Спектр амплитуд периодической последовательности прямоугольных импульсов имеет вид, представленный на рис. 254.

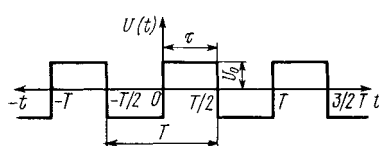


Рис. 255. Несимметричный меандр

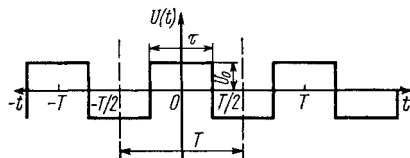


Рис. 256. Симметричный меандр

Если длительность импульсов $\tau = T/2$ и постоянная составляющая отсутствует (рис. 255), то периодическая последовательность прямоугольных импульсов представляет собой прямоугольное колебание (меандр), для которого ряд Фурье, как это следует из общего выражения, имеет вид

$$U(t) = \frac{4U_0}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots \right).$$

При отсчете времени от середины импульса (рис. 256) соответственно найдем

$$U(t) = \frac{4U_0}{\pi} \left(\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \dots \right).$$

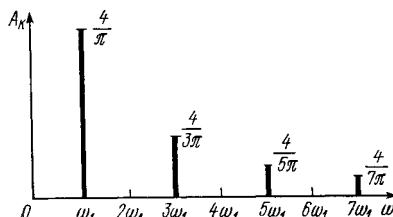


Рис. 257. Спектр амплитуд меандра

Спектр амплитуд меандра при $U_0 = 1$ изображен на рис. 257. На рис. 258 тот же спектр представлен для случая, когда используются отрицательные частоты.

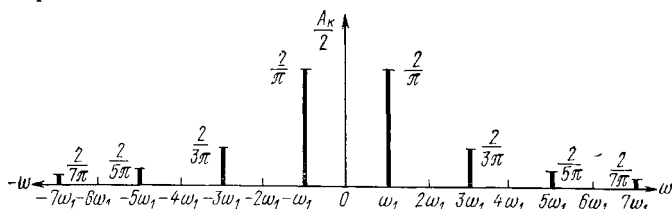


Рис. 258. Спектр амплитуд меандра при использовании отрицательных частот

Следует заметить, что с увеличением числа суммируемых гармоник сумма ряда все более и более приближается к функции $U(t)$, кроме точек разрыва этой функции, где образуется выброс, величина

которого при $k \rightarrow \infty$ равна $1,18U_0$. Этот дефект сходимости, получивший в математике название «явление Гиббса», не имеет существенного значения, так как при $k \rightarrow \infty$ выбросы становятся бесконечно узкими.

§ 12.2. СПЕКТРЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ, ЗАДАННЫХ ОДНОМЕРНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВРЕМЕНИ ИЛИ ПРОСТРАНСТВА

Предположим, что сигнал задан в виде функции времени, удовлетворяющей условиям Дирихле и абсолютно интегрируемой. Последнее требование означает, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(t)| dt = N < \infty,$$

т. е. функция $U(t)$ обращается в нуль при $t \rightarrow \pm \infty$.

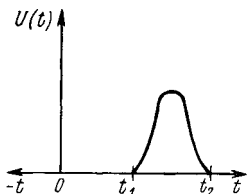


Рис. 259. Непериодический сигнал — функция времени, заданная в конечном интервале

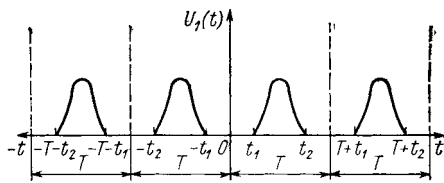


Рис. 260. Периодический сигнал, форма которого внутри интервала T соответствует форме непериодического сигнала (см. рис. 259)

Для удобства рассуждений примем пока, что сигнал $U(t)$ действует в конечном интервале $t_1 < t < t_2$ (рис. 259). В целях проведения гармонического анализа превратим заданную функцию в периодическую $U_1(t)$ путем повторения ее с произвольным периодом $T > t_2 - t_1$ (рис. 260). Тогда для этой новой функции разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=+\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=-1}^{k=+\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \psi_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}, \end{aligned}$$

причем амплитуды отдельных гармонических составляющих a_0 , a_k , b_k , A_0 , A_k , \dot{A}_k будут тем меньше, чем больше интервал T .

Очевидно, что $U_1(t) \rightarrow U(t)$ при $T \rightarrow \infty$. Следовательно, если период T устремить к бесконечности, то в пределе получим бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих, сумма которых изображает исходную непериодическую функцию. Количество гармонических составляющих при этом будет бесконечно большим,

так как основная частота $f_1 = \omega_1/(2\pi) = 1/T$ при $T \rightarrow \infty$ стремится к нулю, т. е. расстояние между спектральными линиями, равное f_1 , становится бесконечно малым (df), а спектр — сплошным. Действительно (см. с. 282),

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[\frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} U_1(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \right] e^{jk\omega_1 t} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{jk\omega_1 t f_1} \int_{t_1}^{t_2} U_1(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \end{aligned}$$

При $T \rightarrow \infty$ $U_1(t) \rightarrow U(t)$; $f_1 \rightarrow df$; $k\omega_1 \rightarrow \omega = 2\pi f$, а операция суммирования превращается в операцию интегрирования, т. е.

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} df \int_{t_1}^{t_2} U(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Обозначим внутренний интеграл некоторой функцией частоты с волнистой чертой наверху, показывающей, что при вычислении этой функции осуществлено разложение Фурье:

$$\tilde{U}(f) = \int_{t_1}^{t_2} U(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Тогда найдем

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Если функция $U(t)$ задана в неограниченных пределах, то

$$\tilde{U}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Выражение, определяющее функцию $\tilde{U}(f)$, называют *прямым преобразованием Фурье*, а $U(t)$ — *обратным преобразованием Фурье*.

Так как

$$\tilde{U}(f) df = \tilde{U}(\omega) d\omega,$$

т. е.

$$\tilde{U}(f) = \tilde{U}(\omega) \frac{d\omega}{df} = \tilde{U}(\omega) \frac{2\pi df}{df} = 2\pi \tilde{U}(\omega),$$

то преобразования Фурье могут иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt; \\ U(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Этот вид преобразований иногда удобнее для использования, так как он обеспечивает более лаконичную запись показателя степени в подынтегральном выражении.

Часто допускается ошибка и коэффициент $1/(2\pi)$ вводится в обратное преобразование Фурье. Тогда преобразования имеют вид

$$\tilde{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt; \quad U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U} e^{j\omega t} d\omega.$$

Функция \tilde{U} в этом случае определяется произведением амплитуды сигнала $U(t)$ на время или отношением амплитуды к полосе частот, выраженной в герцах: амплитуда \times время = $\frac{\text{амплитуда}}{\text{полоса частот (Гц)}}$. Следовательно, \tilde{U} является функцией частоты f , т. е. $\tilde{U} = \tilde{U}(f)$, и введение ее в обратном преобразовании Фурье под знак интеграла, имеющего в качестве переменной интегрирования круговую частоту ω , следует считать неверным.

Функцию $\tilde{U}(f)$, или $\tilde{U}(\omega)$, называют *спектральной плотностью*, *спектральной характеристикой* или *комплексным спектром Фурье* функции $U(t)$.

По аналогии с комплексным представлением ряда Фурье, в соответствии с которым периодическая функция $U_1(t)$ равна

$$U_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{jk\omega_1 t},$$

где $\dot{A}_k e^{jk\omega_1 t}$ — отдельное колебание с комплексной амплитудой \dot{A}_k , обратное преобразование Фурье для непериодической функции $U(t)$ можно записать в виде

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{U}(\omega) d\omega e^{j\omega t},$$

т. е. подынтегральное выражение $2\tilde{U}(\omega) d\omega e^{j\omega t}$ можно считать отдельным колебанием с бесконечно малой комплексной амплитудой

$$d\dot{A} = 2\tilde{U}(\omega) d\omega.$$

Следовательно, спектральная плотность

$$\tilde{U}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{d\dot{A}}{d\omega},$$

или

$$\tilde{U}(f) = \frac{1}{2} \frac{d\dot{A}}{df}.$$

Если амплитуда сигнала измеряется в В, то спектральная плотность $\tilde{U}(\omega)$ измеряется в В·рда⁻¹·с, а $U(f)$ — в В·Гц⁻¹.

Преобразование Фурье, естественно, может быть применено не только к функции времени $U(t)$, но и к функции $U(x)$ пространственной координаты x . В этом случае спектр Фурье

$$\tilde{U}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi\nu x} dx,$$

или

$$\tilde{U}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-ipx} dx,$$

где $p = 2\pi/\lambda$ — круговая пространственная частота; $\nu = 1/\lambda$ — пространственная частота. Спектральная плотность $\tilde{U}(\nu)$ в этом случае измеряется в В·см, а $\tilde{U}(p)$ в В·рад⁻¹·см, если амплитуда сигнала выражена в В, а x в см.

Пространственная частота является аналогом обычной временной или электрической частоты f . Она обозначается иногда в виде f_x или f_y (соответственно, $\omega_x = 2\pi f_x$ и $\omega_y = 2\pi f_y$), если пространство описывается декартовыми координатами x , y . В этом случае временную частоту следует обозначать в виде f_t ($\omega_t = 2\pi f_t$). В дальнейшем могут использоваться различные обозначения, однако в большинстве случаев пространственная частота, отсчитываемая в декартовых координатах вдоль оси x , обозначается в виде ν , вдоль оси y — в виде μ , а вдоль произвольной полярной оси — в виде κ . Временная частота измеряется в герцах, а пространственная частота — в см⁻¹, либо рад⁻¹ (мрад⁻¹), если пространственный период (длина волны) λ , обозначаемый в виде T_x , T_y , выражается в угловой мере в радианах или миллирадианах (мрад = 10⁻³ рад).

Таким образом, в данном случае преобразования Фурье связывают между собой две функции: вещественную $U(t)$ или $U(x)$ и комплексную $\tilde{U}(f)$ или $\tilde{U}(\nu)$, представляющую собой ее спектр по Фурье, причем обратное преобразование позволяет выразить непериодическую функцию суммой бесконечно большого числа бесконечно малых гармонических колебаний, близких по частоте.

Учитывая, что

$$e^{-j2\pi ft} = \cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft,$$

прямое преобразование Фурье можно записать в виде суммы косинус- и синус-преобразований:

$$\tilde{U}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \cos 2\pi ft dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \sin 2\pi ft dt.$$

Вводя обозначения: $a(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \cos(2\pi ft) dt$ — косинус-преобразование, определяющее действительную часть спектральной плотности; $b(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) \sin(2\pi ft) dt$ — синус-преобразование, определяющее мнимую часть спектральной плотности, найдем

$$\tilde{U}(f) = a(f) - jb(f) = A(f) e^{-j\psi(f)},$$

где $A(f) = \sqrt{a^2(f) + b^2(f)}$ — амплитудная характеристика спектральной плотности; $\psi(f) = \arctg [b(f)/a(f)]$ — фазовая характеристика спектральной плотности.

Если $U(t)$ — четная функция, т. е. $U(t) = U(-t)$, то

$$\tilde{U}(f) = a(f) = 2 \int_0^{\infty} U(t) \cos 2\pi f t dt.$$

Если же $U(t)$ — нечетная функция, т. е. $U(t) = -U(-t)$, то

$$\tilde{U}(f) = -jb(f) = -2j \int_0^{\infty} U(t) \sin 2\pi f t dt.$$

Так как

$$\tilde{U}(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{+j2\pi f t} dt = a(f) + jb(f),$$

то

$$\tilde{U}(-f) = \tilde{U}^*(f),$$

где $\tilde{U}^*(f)$ — комплексно-сопряженное значение спектра.

Действительная и мнимая части спектра $a(f)$ и $b(f)$ могут также обозначаться в виде:

$$a(f) = \operatorname{Re}[\tilde{U}(f)]; \quad b(f) = \operatorname{Im}[\tilde{U}(f)].$$

Действительная часть спектра — всегда четная функция (рис. 261, а), мнимая часть спектра — всегда нечетная функция (рис. 261, б). Комплексность спектра означает сдвиг отдельных его составляющих по фазе.

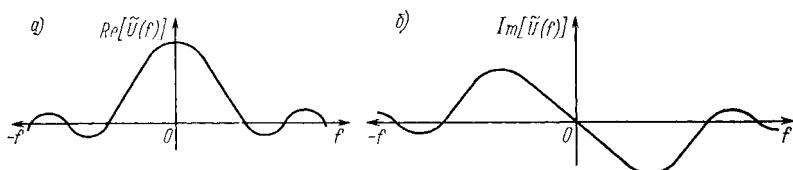


Рис. 261. Действительная (а) и мнимая (б) части спектра Фурье

Прямое преобразование Фурье (спектр Фурье) вещественной функции U может обозначаться символом $\mathcal{F}\{U\}$. Соответственно, обратное преобразование Фурье комплексной функции \tilde{U} обозначается в виде символа $\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}\}$. Так как комплексная функция получена в результате прямого преобразования Фурье, то она обозначается в виде \tilde{U} , как это было отмечено выше.

Необходимо обратить особое внимание на то, что в когерентной оптике предметом спектрального фурье-анализа часто являются не вещественные, а комплексные функции пространственных координат $\dot{U}(x)$, $\dot{U}(y)$ или $\dot{U}(x, y)$, поскольку яркость когерентно освещенных объектов определяется *распределением амплитуд и фаз* световой

волны. В этом случае спектр $\tilde{U}(v)$ вычисляется как прямое преобразование Фурье комплексной функции

$$\tilde{U}(v) = \mathcal{F}\{\dot{U}(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Соответственно в результате обратного преобразования получим

$$\dot{U}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}(v)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(v) e^{j2\pi vx} dv.$$

Аналогичным образом можно найти:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}(x)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x) e^{j2\pi vx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(-x) e^{-j2\pi v(-x)} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x) e^{-j2\pi(-v)x} dx, \\ \mathcal{F}\{\tilde{U}(v)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(v) e^{j2\pi vx} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(-v) e^{j2\pi(-v)x} dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(v) e^{j2\pi v(-x)} dv. \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(v) &= \mathcal{F}\{\dot{U}(x)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}(-x)\}, \\ \tilde{U}(-v) &= \mathcal{F}\{\dot{U}(-x)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}(x)\}, \\ \dot{U}(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}(v)\} = \mathcal{F}\{\tilde{U}(-v)\}, \\ \dot{U}(-x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}(-v)\} = \mathcal{F}\{\tilde{U}(v)\}. \end{aligned}$$

Относительно спектра Фурье комплексной функции нельзя утверждать, что его действительная часть всегда является четной функцией, а мнимая часть — нечетной функцией.

Действительно, пусть $\dot{U}(x) = a(x) + jb(x)$, $\tilde{U}(v) = \tilde{a}(v) + j\tilde{b}(v)$,

$$\text{где } \tilde{a}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) e^{-j2\pi vx} dx; \quad \tilde{b}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Так как, в свою очередь, $\tilde{a}(v) = A(v) + jB(v)$, $\tilde{b}(v) = C(v) + jD(v)$, где $A(v)$, $B(v)$, $C(v)$, $D(v)$ — вещественные функции, то

$$\begin{aligned} \tilde{U}(v) &= \tilde{a}(v) + j\tilde{b}(v) = A(v) + jB(v) + jC(v) - D(v) = M(v) + jN(v), \\ \text{где } N(v) &= A(v) - D(v); \quad M(v) = B(v) + C(v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Поскольку } A(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \cos 2\pi vx dx; \quad B(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \sin 2\pi vx dx; \quad C(v) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \cos 2\pi vx dx; \quad D(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \sin 2\pi vx dx, \text{ то четными функциями частоты } v \end{aligned}$$

являются функции $A(v)$ и $C(v)$, а нечетными — $B(v)$ и $D(v)$, однако относительно действительной $N(v)$ и мнимой $M(v)$ частей спектра $\tilde{U}(v)$ нельзя заранее утверждать, четными или нечетными функциями они являются.

§ 12.3. СВОЙСТВА СПЕКТРОВ ОДНОМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Основные свойства спектров определяются рядом теорем, которые будут далее рассмотрены применительно к пространственным координатам.

Теорема о спектре суммы

Пусть функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ имеют спектры $\tilde{U}_1(v)$ и $\tilde{U}_2(v)$, т. е.

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{-j2\pi vx} dx; \\ \tilde{U}_2(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(x) e^{-j2\pi vx} dx.\end{aligned}$$

Тогда можно найти сумму спектров:

$$\tilde{U}(v) = \tilde{U}_1(v) + \tilde{U}_2(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [U_1(x) + U_2(x)] e^{-j2\pi vx} dx.$$

Так как правая часть равенства представляет собой спектр суммы двух функций, очевидно, что в силу линейности преобразования Фурье *спектр суммы равен сумме спектров*.

Теорема запаздывания

Эта теорема определяет спектр функции, смещенной относительно исходной на заданную величину.

Пусть функция $U(x)$ имеет спектр

$$\tilde{U}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Найдем спектр $\tilde{U}_1(v)$, соответствующий функции $U_1(x) = U(x - x_0)$. Так как по определению имеем

$$\tilde{U}_1(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{-j2\pi vx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x - x_0) e^{-j2\pi vx} dx,$$

то, произведя замену переменной интегрирования на $x_1 = x - x_0$, получим

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1) e^{-j2\pi v(x_1 + x_0)} dx_1 = \\ &= e^{-j2\pi vx_0} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1) e^{-j2\pi vx_1} dx_1;\end{aligned}$$

но

$$\tilde{U}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1) e^{-j2\pi vx_1} dx_1$$

и

$$\tilde{U}_1(\nu) = \tilde{U}(\nu) e^{-j2\pi\nu x_0},$$

т. е. спектр функции, смещенной относительно исходной на заданную величину x_0 , равен спектру исходной функции, умноженному на $e^{-j2\pi\nu x_0}$.

Поскольку амплитудная характеристика спектральной плотности (модуль спектра)

$$\begin{aligned} A_1(\nu) &= |\tilde{U}_1(\nu)| = |\tilde{U}(\nu) e^{-j2\pi\nu x_0}| = \\ &= |\tilde{U}(\nu)| |e^{-j2\pi\nu x_0}| = |\tilde{U}(\nu)| = A(\nu), \end{aligned}$$

то при смещении функции по оси x модуль спектра остается неизменным.

Теорема смещения, или теорема о транспозиции (переносе) спектра

Эта теорема определяет функцию, которой соответствует спектр, смещенный по шкале частот на величину ν_0 относительно исходного значения ν .

Пусть спектр функции $U(x)$ есть $\tilde{U}(\nu)$, т. е.

$$\tilde{U}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi\nu x} dx.$$

Очевидно, что смещенный спектр

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(\nu) &= \tilde{U}(\nu + \nu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi(\nu + \nu_0)x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi\nu x} e^{-j2\pi\nu_0 x} dx. \end{aligned}$$

Обозначив

$$U_1(x) = U(x) e^{-j2\pi\nu_0 x},$$

найдем

$$\tilde{U}_1(\nu) = \tilde{U}(\nu + \nu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{-j2\pi\nu x} dx.$$

Следовательно, смещенным спектром обладает функция

$$U_1(x) = U(x) e^{-j2\pi\nu_0 x},$$

т. е. функции $U(x)$ соответствует комплексный спектр $\tilde{U}(\nu)$, а функции $U_1(x) = U(x) e^{-j2\pi\nu_0 x}$ — смещенный спектр $\tilde{U}_1(\nu) = \tilde{U}(\nu + \nu_0)$.

Связь между произведениями функций и их спектров
(формула Релея). Равенство (теорема) Парсеваля

Пусть две функции $U_1(x)$ и $U_2(x)$ имеют комплексные спектры $\tilde{U}_1(v)$ и $\tilde{U}_2(v)$, т. е.

$$\tilde{U}_1(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{-j2\pi vx} dx;$$

$$\tilde{U}_2(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(x) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Так как в соответствии с обратным преобразованием Фурье

$$U_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(v) e^{j2\pi vx} dv,$$

то можно найти

$$U_1(x)U_2(x) = U_2(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(v) e^{j2\pi vx} dv.$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства по x в пределах $\pm\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x)U_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(v) e^{j2\pi vx} dv.$$

Изменяя порядок интегрирования в правой части, найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x)U_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(v) dv \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(x) e^{j2\pi vx} dx,$$

но внутренний интеграл представляет собой сопряженный спектр функции $U_2(x)$. Действительно,

$$\tilde{U}_2^*(v) = \tilde{U}_2(-v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(x) e^{j2\pi vx} dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x)U_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(v)\tilde{U}_2^*(v) dv.$$

Последнее соотношение, полученное Релеем, определяет связь между произведениями функций и их спектров. Из него, в частности, следует, что при $U_1(x) = U_2(x) = U(x)$, когда

$$\tilde{U}_1(v) = \tilde{U}_2(v) = \tilde{U}(v),$$

т. е.

$$\tilde{U}_1(v)\tilde{U}_2^*(v) = |\tilde{U}(v)|^2,$$

имеем

$$\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} [U(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{U}(v)|^2 dv,$$

Следовательно, интеграл в пределах $\pm\infty$ от квадрата заданной функции (общая энергия рассматриваемого процесса ω) равен интегралу в пределах $\pm\infty$ от квадрата модуля комплексного спектра (общая энергия спектра ω).

Это соотношение, выражающее закон сохранения энергии, носит название уравнения замкнутости или равенства Парсеваля, по имени ученого, который еще в начале XIX в. рассматривал подобную теорему.

Спектр произведения. Теорема о свертке спектров

Пусть две функции $U_1(x)$ и $U_3(x)$ имеют комплексные спектры $\tilde{U}_1(\mu)$ и $\tilde{U}_3(\mu)$; тогда можно записать следующее исходное равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_3(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(\mu) \tilde{U}_3^*(\mu) d\mu.$$

Рассмотрим также функцию $U_2(x)$ со спектром $\tilde{U}_2(\mu)$, удовлетворяющую соотношению

$$U_2(x) = U_3(x) e^{j2\pi\nu x},$$

или

$$U_3(x) = U_2(x) e^{-j2\pi\nu x}.$$

Тогда в соответствии с теоремой смещения спектр функции $U_3(x)$ равен смещенному спектру функции $U_2(x)$, т. е.

$$\tilde{U}_3(\mu) = \tilde{U}_2(\mu + \nu),$$

или

$$\tilde{U}_3^*(\mu) = \tilde{U}_3(-\mu) = \tilde{U}_2(-\mu + \nu).$$

Имея это в виду, можно следующим образом преобразовать левую и правую части исходного равенства.

1. Левая часть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_3(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_2(x) e^{-j2\pi\nu x} dx.$$

Полученное выражение представляет собой комплексный спектр произведения двух функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$, который обозначим символом прямого преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}\{U_1(x) U_2(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_2(x) e^{-j2\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_3(x) dx.$$

2. Правая часть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(\mu) \tilde{U}_3^*(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(\mu) \tilde{U}_2(\nu - \mu) d\mu.$$

Полученное выражение представляет собой своеобразную операцию интегрирования, которую принято называть *сверткой функций* $\tilde{U}_1(\mu)$ и $\tilde{U}_2(\mu)$:

$$\tilde{U}_1(\mu) \otimes \tilde{U}_2(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(\mu) \tilde{U}_2(\nu - \mu) d\mu.$$

Следовательно, можно найти

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_2(x) e^{-j2\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(\mu) \tilde{U}_2(\nu - \mu) d\mu,$$

или комплексный спектр произведения двух функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$ равен

$$\mathcal{F}\{U_1(x) U_2(x)\} = \tilde{U}_1(\mu) \otimes \tilde{U}_2(\mu),$$

т. е. *спектр произведения равен свертке спектров*. Очевидно, что левая и правая части последнего равенства представляют собой комплексную функцию частоты ν :

$$\tilde{U}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_2(x) e^{-j2\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_1(\mu) \tilde{U}_2(\nu - \mu) d\mu.$$

Теорема о спектре свертки

Рассмотрим свертку $U(y)$ двух функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$

$$U(y) = U_1(x) \otimes U_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) U_2(y - x) dx.$$

Спектр свертки $U(y)$ равен

$$\tilde{U}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) e^{-j2\pi\nu y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(y - x) e^{-j2\pi\nu y} dy.$$

Осуществим замену переменной, вводя новую переменную $z = y - x$; тогда

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(z) e^{-j2\pi\nu(z+x)} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{-j2\pi\nu x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(z) e^{-j2\pi\nu z} dz. \end{aligned}$$

Так как

$$\tilde{U}_1(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{-j2\pi\nu x} dx; \quad \tilde{U}_2(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_2(z) e^{-j2\pi\nu z} dz,$$

то

$$\tilde{U}(\nu) = \tilde{U}_1(\nu) \tilde{U}_2(\nu),$$

или

$$\mathcal{F}\{U_1(x) \otimes U_2(x)\} = \tilde{U}_1(\nu) \tilde{U}_2(\nu).$$

Следовательно, *спектр свертки двух функций равен произведению спектров этих функций*.

Пусть спектр функции $U(x)$ равен $\tilde{U}(v)$. Найдем спектр $\tilde{U}_1(v)$ производной от заданной функции $U'(x) = \frac{dU(x)}{dx}$.

В соответствии с преобразованием Фурье имеем

$$\tilde{U}_1(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U'(x) e^{-j2\pi vx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi vx} dU(x).$$

Интегрируя по частям $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$, найдем

$$\tilde{U}_1(v) = U(x) e^{-j2\pi vx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) d e^{-j2\pi vx}.$$

Так как функция $U(x)$, представляемая интегралом Фурье, обращается в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$, то

$$U(x) e^{-j2\pi vx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow 0.$$

В то же время

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x) d e^{-j2\pi vx} = -j2\pi v \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Следовательно,

$$\tilde{U}_1(v) = j2\pi v \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi vx} dx = j2\pi v \tilde{U}(v),$$

т. е. спектр производной равен спектру исходной функции, умноженному на $j2\pi v$.

Теорема о спектре интеграла

Пусть спектр функции $U(x)$ равен $\tilde{U}(v)$. Найдем спектр $U_1(v)$ интеграла от заданной функции в пределах от $-\infty$ до $+x$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+x} U(x) dx.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+x} U(x) dx \right) e^{-j2\pi vx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+x} U(x) dx \right) \frac{d e^{-j2\pi vx}}{-j2\pi v}. \end{aligned}$$

Интегрируя полученное выражение по частям, найдем

$$\tilde{U}_1(v) = \left[\left(\int_{-\infty}^{+x} U(x) dx \right) \frac{e^{-j2\pi vx}}{-j2\pi v} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j2\pi vx}}{-j2\pi v} U(x) dx.$$

При условии, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U(x) dx = 0,$$

найдем

$$\tilde{U}_1(v) = \frac{1}{j2\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi vx} dx = \frac{\tilde{U}(v)}{j2\pi v},$$

т. е. спектр интеграла заданной функции равен ее спектру, деленному на $j2\pi v$.

§ 12.4. РАСЧЕТ СПЕКТРОВ ФУРЬЕ НЕКОТОРЫХ ИМПУЛЬСОВ И ПРОЦЕССОВ, ЗАДАННЫХ ОДНОМЕРНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Единичный скачок (единичная функция Хевисайда)

Пусть изменение интересующей нас величины вдоль пространственной координаты x выражается функцией $U(x)$, причем

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функция $U(x)$ имеет вид, представленный на рис. 262. Для этой функции, называемой *единичным скачком*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |U(x)| dx = \infty,$$

т. е. условие абсолютной интегрируемости не удовлетворяется и преобразования Фурье не могут быть применены непосредственно.

Функция — единичный скачок в начале координат является частным случаем *функции знака или сигнум-функции*

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Единичный скачок — есть сигнум-функция положительных значений x , т. е.

$$\text{Sgn}(+x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$U_1(x) = U(x) e^{-cx},$$

где $c = \text{const}$.

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Ее спектр

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(x) e^{-cx} e^{-j2\pi\nu x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x(c+j2\pi\nu)} dx = \\ &= \frac{1}{-(c+j2\pi\nu)} e^{-x(c+j2\pi\nu)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{c+j2\pi\nu}.\end{aligned}$$

Так как $U(x) = U_1(x)$ при $c \rightarrow 0$, то спектр функции $U(x)$ равен

$$\tilde{U}(\nu) = \lim_{c \rightarrow 0} \tilde{U}_1(\nu) = 1/(j2\pi\nu) = -j/(2\pi\nu).$$

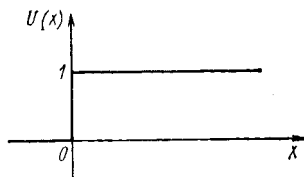


Рис. 262. Единичный скачок в начале координат

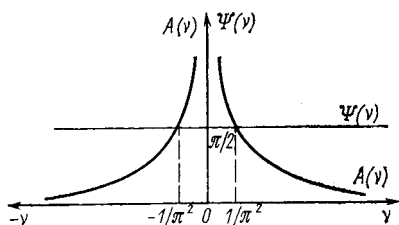


Рис. 263. Спектры амплитуд и фаз единичного скачка

Для дальнейшего рассмотрим произвольную комплексную величину

$$a - jb = \rho e^{-j\varphi}.$$

Если $a = 0$, $b = 1$, то $a - jb = -j$. Но в этом случае аргумент $\operatorname{tg} \varphi = b/a = \infty$, т. е. $\varphi = \pi/2$, а модуль $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$. Следовательно, можно найти, что $-j = e^{-j\pi/2}$. Тогда

$$\tilde{U}(\nu) = -j/(2\pi\nu) = e^{-j\pi/2}/(2\pi\nu);$$

$$A(\nu) = 1/(2\pi|\nu|); \quad \psi(\nu) = \pi/2.$$

Соответствующие спектры амплитуд и фаз представлены на рис. 263.

Прямоугольный импульс

Рассмотрим вначале спектр прямоугольного импульса, имеющего амплитуду U_0 , длительность Δx и расположенного симметрично относительно начала координат. Функцию $U(x)$, описывающую такой прямоугольный импульс, можно задать следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & \text{при } |x| \leq \Delta x/2; \\ 0 & \text{при } |x| > \Delta x/2. \end{cases}$$

В этом случае она имеет вид, представленный на рис. 264. Вычислим ее спектр $\tilde{U}(\nu)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi\nu x} dx = \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} U_0 e^{-j2\pi\nu x} dx = \\ &= \frac{U_0}{-j2\pi\nu} e^{-j2\pi\nu x} \Big|_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} = \frac{e^{j2\pi\nu \Delta x/2} - e^{-j2\pi\nu \Delta x/2}}{j2\pi\nu} U_0.\end{aligned}$$

Так как справедливо соотношение

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j},$$

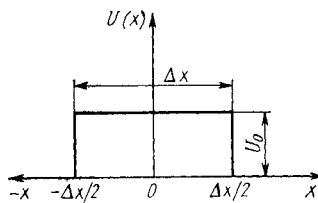


Рис. 264. Прямоугольный импульс

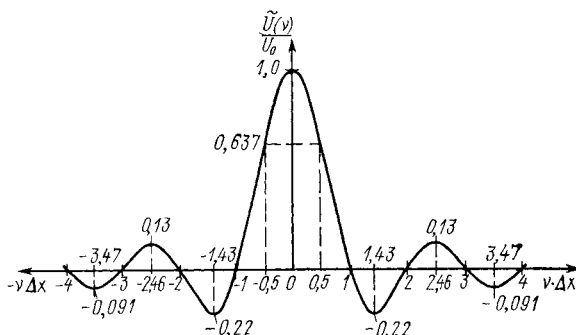


Рис. 265. Комплексный спектр прямоугольного импульса

то можно найти

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\nu) &= \frac{U_0}{\pi\nu} \sin\left(2\pi\nu \frac{\Delta x}{2}\right) = U_0 \Delta x \frac{\sin(\pi\nu \Delta x)}{\pi\nu \Delta x} = \\ &= U_0 \Delta x \text{Sinc}(\nu \Delta x) = \tilde{U}_0 \text{Sinc}(\nu \Delta x),\end{aligned}$$

где $\tilde{U}_0 = U_0 \Delta x$.

Относительная спектральная плотность $\tilde{\gamma}(\nu) = \tilde{U}(\nu)/\tilde{U}_0 = \text{Sinc}(\nu \Delta x)$.

Если обозначить $z = \nu \Delta x$, то относительную спектральную плотность можно представить в виде

$$\tilde{\gamma}(z) = \text{Sinc}(z) = \sin \pi z / (\pi z) = \text{sa}(\pi z).$$

В данном случае $\tilde{U}(\nu)$ — всегда действительная величина, принимающая положительный или отрицательный знак (рис. 265). При $\nu = 0$ $\tilde{U}(\nu)/\tilde{U}_0 = 1$, так как $\text{Sinc}(0) = 1$. Функция обращается в нуль при $2\pi\nu_0 \Delta x/2 = \pi$, т. е. $\nu_0 = n/\Delta x$, где $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ В области частот, где $\tilde{U}(\nu)$ имеет положительные значения, начальные фазы всех гармоник равны нулю; в области частот, где $\tilde{U}(\nu)$ отрицательна, имеет место скачок фаз всех гармоник на величину π . Действительно, фазовая характеристика спектральной плотности

$$\psi(\nu) = \arctg[b(\nu)/a(\nu)] = \arctg 0 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

представлена на рис. 266 сплошной линией совместно с амплитудной характеристикой, которая определяется модулем спектра

$$A(\nu) = |\tilde{U}(\nu)| = |U_0 \Delta x| |\text{Sinc}(\nu \Delta x)| = |\tilde{U}_0| |\text{Sinc}(\nu \Delta x)|.$$

Максимальные значения спектральной плотности соответствуют частотам ν_{max} , определяемым из уравнения

$$\partial \text{Sinc}(\nu_{\text{max}} \Delta x) / (\partial \nu_{\text{max}}) = 0,$$

откуда

$$2\pi \nu_{\text{max}} \Delta x / 2 =$$

$$= \text{tg}(2\pi \nu_{\text{max}} \Delta x / 2);$$

$$\nu_{\text{max}} = \text{tg}(2\pi \nu_{\text{max}} \Delta x) / (\pi \Delta x).$$

Для главного максимума $\nu_{\text{max}} = 0$; для первого бокового максимума $\nu_{\text{max}} \approx \pm 1,43 / \Delta x$; для прочих максимумов значения ν_{max}

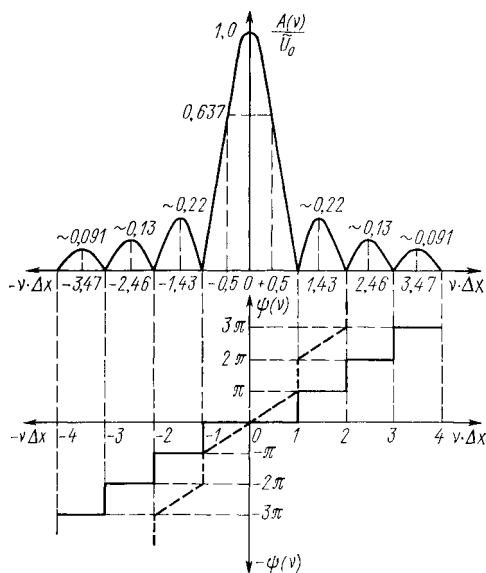


Рис. 266. Амплитудная и фазовая характеристики спектральной плотности прямоугольного импульса

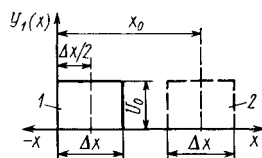


Рис. 267. Сдвинутый прямоугольный импульс: 1 — основной вариант; 2 — общий случай

все более и более точно приближаются к величинам $\pm 2,5 / \Delta x$, $\pm 3,5 / \Delta x$, $\pm 4,5 / \Delta x$, ... Относительная спектральная плотность $\tilde{U}(\nu) / \tilde{U}_0$ в максимумах приближенно равна: $+1,0$; $-0,22$; $+0,13$; $-0,091$; $+0,071$; ..

Вычислим спектр прямоугольного импульса, сдвинутого вдоль оси так, как это показано на рис. 267. В этом случае можно записать

$$U_1(x) = U(x - \Delta x / 2).$$

Действительно, учитывая, что $U(x) = U_0$, для $|x| \leq \Delta x / 2$, найдем при $x = 0$

$$U_1(x) = U(-\Delta x / 2) = U_0;$$

при $x = \Delta x$

$$U_1(x) = U(+\Delta x / 2) = U_0.$$

Используя теорему запаздывания, найдем

$$\tilde{U}_1(\nu) = \tilde{U}(\nu) e^{-j2\pi \nu \Delta x / 2},$$

где $\tilde{U}(\nu) = U_0 \Delta x \text{Sinc}(\nu \Delta x)$.

Если в общем случае импульс сдвинут на величину x_0 , т. е.

$$U_1(x) = U(x - x_0),$$

то

$$\tilde{U}_1(v) = \tilde{U}(v) e^{-j2\pi v x_0},$$

или

$$\tilde{U}_1(v) = \tilde{U}_0 \operatorname{Sinc}(v \Delta x) e^{-j2\pi v x_0},$$

где $\tilde{U}_0 = U_0 \Delta x$.

Так как модуль спектра $\tilde{U}_1(v)$ равен модулю спектра $\tilde{U}(v)$, то амплитудная характеристика спектральной плотности прямоугольного импульса не зависит от выбора начала отсчета:

$$A_1(v) = |\tilde{U}_1(v)| = |\tilde{U}(v)| = A(v).$$

В свою очередь, фазовая характеристика $\psi_1(v) = 2\pi v x_0 + n\pi$, или при $x_0 = \Delta x/2$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\psi_1(v) = 2\pi v \Delta x/2 + n\pi.$$

Для сдвинутого прямоугольного импульса фазовая характеристика спектральной плотности показана на рис. 266 штриховой линией. Здесь по-прежнему каждая перемена знака спектра $\tilde{U}(v)$ учитывается приращением фазы на π .

Полная энергия прямоугольного импульса, очевидно, равна

$$\omega_0 = U_0^2 \Delta x.$$

Найдем энергию, заключенную в полосе частот от 0 до v . В соответствии с равенством Парсеваля для случая только положительных частот имеем

$$\omega_v = 2 \int_0^v |\tilde{U}(v)|^2 dv = 2U_0^2 \Delta x^2 \int_0^v |\operatorname{Sinc}(v \Delta x)|^2 dv,$$

или

$$\omega_v = 2U_0^2 \Delta x^2 \int_0^v \frac{\sin^2(\pi v \Delta x)}{(\pi v \Delta x)^2} dv.$$

Вводя обозначение $y = \pi v \Delta x$, найдем

$$\omega_v = U_0^2 \Delta x \frac{2}{\pi} \int_0^y \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = \omega_0 \frac{2}{\pi} \int_0^y \frac{\sin^2 y}{y^2} dy.$$

Входящий в полученное выражение интеграл

$$\int_0^y \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = -\frac{\sin^2 y}{y} + \operatorname{Si}(2y),$$

где *интегральный синус* равен

$$\operatorname{Si}(2y) = \int_0^{2y} \frac{\sin t}{t} dt = 2y - \frac{(2y)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(2y)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(2y)^7}{7 \cdot 7!} \dots$$

Значения коэффициента $\eta = w_v/w_0$, характеризующего относительную энергию в полосе частот от 0 до ν , для косинусного η_k , косинус-квадратного η_{k-k} и прямоугольного $\eta_{пр}$ импульсов, имеющих ширину Δx

$z_1 = \nu \Delta x$	η_k	η_{k-k}	$\eta_{пр}$	$z_1 = \nu \Delta x$	η_k	η_{k-k}	$\eta_{пр}$	$z_1 = \nu \Delta x$	η_k	η_{k-k}	$\eta_{пр}$
0,00	0,000	0,000	0,000	0,55	0,746	0,647	0,810	1,10	0,984	0,947	0,903
0,05	0,081	0,067	0,100	0,60	0,788	0,690	0,839	1,15	0,988	0,958	0,905
0,10	0,161	0,133	0,198	0,65	0,826	0,730	0,861	1,20	0,991	0,967	0,907
0,15	0,240	0,198	0,293	0,70	0,859	0,766	0,878	1,25	0,993	0,974	0,909
0,20	0,316	0,262	0,383	0,75	0,887	0,799	0,889	1,30	0,994	0,981	0,913
0,25	0,390	0,325	0,467	0,80	0,911	0,829	0,896	1,35	0,995	0,985	0,917
0,30	0,460	0,385	0,545	0,85	0,930	0,856	0,900	1,40	0,995	0,989	0,922
0,35	0,527	0,443	0,615	0,90	0,947	0,879	0,902	1,45	0,995	0,992	0,926
0,40	0,589	0,499	0,676	0,95	0,960	0,900	0,903	1,50	0,995	0,995	0,931
0,45	0,646	0,551	0,729	1,00	0,970	0,918	0,903	2,00	0,998	0,999	0,950
0,50	0,698	0,601	0,774	1,05	0,978	0,933	0,903				

Таким образом, отношение энергии прямоугольного импульса, заключенной в полосе частот от 0 до ν , к полной энергии равно

$$\eta = \frac{w_v}{w_0} = \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(p \Delta x) - \frac{2 \sin^2(p \Delta x/2)}{p \Delta x} \right], \quad \eta$$

где $p = 2\pi\nu$. Значения коэффициента $\eta = w_v/w_0$ для прямоугольного импульса $\eta_{пр}$ приведены в табл. 17.

Зависимость коэффициента η от частоты ν приведена на рис. 268. Из графика следует, что около 90 % энергии прямоугольного импульса сосредоточено в полосе частот от 0 до $\nu = 1/\Delta x$, т. е. $\nu \Delta x = 1$.

Здесь уместно отметить, что в фурье-анализе используется сокращенная система обозначений, введенная Гудменом. Одним из этих обозначений мы уже пользовались: это Sinc-функция, определяемая выражением

$$\text{Sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x).$$

Прямоугольный импульс, изображенный на рис. 264, описывается прямоугольной или Rect-функцией, причем

$$\text{Rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \left|\frac{x}{\Delta x}\right| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \left|\frac{x}{\Delta x}\right| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Прямоугольный импульс, имеющий амплитуду U_0 , записывается в виде $U_0 \text{Rect}\left(\frac{x}{\Delta x}\right)$.

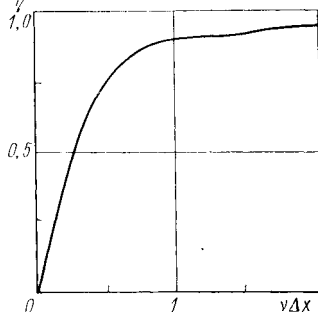


Рис. 268. Зависимость коэффициента $\eta = w_v/w_0$ от произведения $\nu \Delta x$, характеризующая энергию прямоугольного импульса длительности Δx в полосе частот от 0 до ν

Выше мы убедились, что спектр Фурье прямоугольной функции равен Sinc-функции

$$\mathcal{F} \left\{ \text{Rect} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right\} = \Delta x \text{Sinc} (\Delta x v),$$

или в относительных единицах

$$\left[\mathcal{F} \left\{ \text{Rect} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right\} \right]_{\text{отн}} = \text{Sinc} (\Delta x v).$$

Рассмотрим выражение для спектра Фурье Sinc-функции. Пусть

$$U(x) = \text{Sinc} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) = \frac{\sin \left(\pi \frac{x}{\Delta x} \right)}{\pi \frac{x}{\Delta x}}.$$

Так как функция $\text{Sinc}(x/\Delta x)$ — четная относительно x , то ее спектр определяется косинус-преобразованием Фурье

$$\begin{aligned} \tilde{U}(v) &= \mathcal{F} \{ U(x) \} = 2 \int_0^{\infty} U(x) \cos(2\pi v x) dx = \\ &= \frac{2 \Delta x}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \left(\pi \frac{x}{\Delta x} \right) \cos(2\pi v x) \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

В справочнике [25] находим табличный интеграл № 3.741.2

$$\int_0^{\infty} \sin ax \cos bx \frac{dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } a > b \geq 0, \\ 0 & \text{при } b > a \geq 0. \end{cases}$$

Так как в нашем случае $a = \frac{\pi}{\Delta x}$, $b = 2\pi v$, то

$$\tilde{U}(v) = \mathcal{F} \left\{ \text{Sinc} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right\} = \Delta x \text{Rect} (\Delta x v),$$

или в относительных единицах

где
$$\left[\mathcal{F} \left\{ \text{Sinc} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right\} \right]_{\text{отн}} = \text{Rect} (\Delta x v),$$

$$\text{Rect} (\Delta x v) = \begin{cases} 1 & \text{при } \Delta x v \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \Delta x v > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, имеем пару полезных преобразований Фурье:

$$\left[\mathcal{F} \left\{ \text{Rect} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right\} \right]_{\text{отн}} = \text{Sinc} (\Delta x v),$$

$$\left[\mathcal{F} \left\{ \text{Sinc} \left(\frac{x}{\Delta x} \right) \right\} \right]_{\text{отн}} = \text{Rect} (\Delta x v).$$

Единичный импульс (дельта-функция Дирака)

Единичным импульсом называют функцию $\delta(x)$, равную нулю всюду, кроме точки $x = 0$, или функцию $\delta_1(x) = \delta(x - x_0)$, равную нулю всюду, кроме точки $x = x_0$, где она равна бесконечности, причем площадь импульса конечна и равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

Таким образом, можно записать, что

$$\delta_1(x) = \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x_0; \\ \infty & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

в том числе и при $x_0 = 0$.

Эта функция называется также *дельта-функцией* или *функцией Дирака*.

Одним из свойств дельта-функции является четность, т. е.

$$\delta_1(x) = \delta_1(-x), \text{ или } \delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x).$$

Найдем спектр дельта-функции. Для этого введем в рассмотрение прямоугольный импульс $U_1(x)$ с амплитудой U_0 и протяженностью Δx , середина которого находится в точке $x = x_0$.

Спектр импульса $U_1(x)$ равен

$$\tilde{U}_1(\nu) = U_0 \Delta x \operatorname{Sinc}(\nu \Delta x) e^{-j2\pi\nu x_0}.$$

Спектр дельта-функции можно найти, имея в виду, что $\tilde{\delta}_1(\nu) = \lim \tilde{U}_1(\nu)$ при $U_0 \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$ и $U_0 \Delta x = 1$. Тогда имеем

$$\tilde{\delta}_1(\nu) = e^{-j2\pi\nu x_0}.$$

Модуль спектра

$$A(\nu) = |\tilde{\delta}_1(\nu)| = 1,$$

что означает наличие сплошного равномерного спектра в пределах $\pm\infty$.

Фазовая характеристика

$$\psi(\nu) = 2\pi\nu x_0.$$

Таким образом, *спектральная плотность дельта-функции $\delta(x)$ естественна, ее модуль (амплитудно-частотная характеристика) равен единице для всех частот, а аргумент (фазовая характеристика) равен нулю для всех частот*. Это означает, что все гармонические составляющие дельта-функции, суммируясь с нулевыми начальными фазами, образуют пик бесконечно большой величины, в начале координат при $x = 0$.

Аналогично дельта-функция $\delta(x - x_0)$, определяющая единичный импульс в момент $x = x_0$, обладает спектральной плотностью $e^{-j2\pi\nu x_0}$.

Модуль этой функции по-прежнему равен единице, а фазовая характеристика $\psi(v) = 2\pi vx_0$. Следовательно, в этом случае происходит совпадение фаз всех гармоник и образование пика в точке $x = x_0$.

Энергия единичного импульса бесконечно велика. Это следует из равенства Парсевала, в соответствии с которым энергия

$$\omega_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\delta}_1(v)|^2 dv = \infty.$$

Рассмотрим некоторые свойства дельта-функции. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, найдем

$$\delta_1(x) = \delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}_1(v) e^{j2\pi vx} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi v(x-x_0)} dv.$$

Полученное выражение представляет собой условное *интегральное определение дельта-функции*.

Учитывая симметрию интеграла Фурье, переменные x и v можно поменять местами, т. е. записать выражение для спектральной плотности, имеющей вид дельта-функции, следующим образом:

$$\delta(v - v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi x(v-v_0)} dx.$$

В силу четности дельта-функции можно записать

$$\delta(v - v_0) = \delta(v_0 - v).$$

Одним из основных свойств дельта-функции является так называемое *фильтрующее* или *стробирующее* свойство, которое вытекает из основного определения дельта-функции и выражается в следующем соотношении:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) U(x) dx = U(x_0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x - x_0) dx = U(x_0).$$

Справедливость этого соотношения очевидна, так как по определению функция $\delta(x - x_0)$ равна нулю всюду, кроме точки $x = x_0$. Следовательно, интервал интегрирования ε может быть сделан сколь угодно малым ($\varepsilon > 0$), лишь бы он включал в себя точку x_0 . В этом интервале функция $U(x)$ принимает постоянное значение $U(x_0)$, которое можно вынести за знак интеграла. Таким образом, умножение любой подынтегральной функции $U(x)$ на дельта-функцию $\delta(x - x_0)$ позволяет приравнять интеграл произведения значению функции $U(x)$ в точке $x = x_0$.

Наряду с прямоугольным импульсом существует достаточно большая свобода выбора первоначальной формы импульса, из которого в пределе образуется дельта-функция.

Во всех случаях дельта-функция может рассматриваться как предел, к которому стремится импульс убывающей ширины, увеличивающейся амплитуды и единичной площади, т. е.

$$\delta(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} U_0 \gamma(x),$$

где U_0 — амплитуда импульса; Δ — полуширина импульса, отсчитываемая на заданном уровне; $\gamma(x)$ — функция, описывающая форму импульса.

Существует значительное число импульсов различной формы, удовлетворяющих такому определению дельта-функции. В частности, это может быть:

а) прямоугольный импульс, уже рассмотренный выше, у которого

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq \Delta; \\ 0 & \text{при } |x| > \Delta, \end{cases}$$

амплитуда $U_0 = 1/2\Delta$, ширина $2\Delta \rightarrow 0$, а площадь равна единице, так как $U_0 2\Delta = [1/(2\Delta)] 2\Delta = 1$;

б) колоколообразный (гауссов) импульс

$$\gamma(x) = e^{-x^2/(2\Delta^2)},$$

у которого амплитуда $U_0 = 1/(\Delta\sqrt{2\pi})$, ширина на уровне $e^{-0.5} = 0,606$ равна $2\Delta \rightarrow 0$, а площадь равна единице, так как

$$\frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/(2\Delta^2)} dx = \frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} \Delta\sqrt{2\pi} = 1;$$

в) импульс вида

$$\gamma(x) = \text{Sinc}(2x/\Delta),$$

у которого амплитуда $U_0 = 2/\Delta$, ширина главного максимума $2\Delta \rightarrow 0$, а площадь равна единице, так как

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi x/\Delta)}{2\pi x/\Delta} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[(2\pi/\Delta)x]}{x} dx = \frac{1}{\pi} \pi = 1. \end{aligned}$$

Колоколообразный (гауссов) импульс

Форма этого импульса определяется выражениями:

$$U(x) = U_0 e^{-x^2/(2x_0^2)};$$

$$U_{\text{отн}}(x) = \frac{U(x)}{U_0} = e^{-x^2/(2x_0^2)},$$

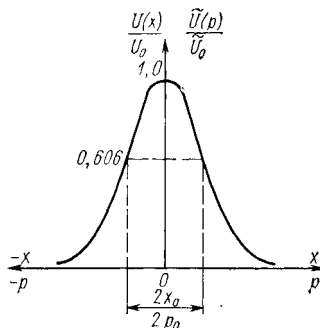


Рис. 269. Колоколообразный импульс и его спектр

т. е. совпадает с графиком нормального (гауссова) закона распределения вероятностей (рис. 269). Постоянная x_0 обозначает половину протяженности импульса, определяемую на уровне $e^{-1/2} = 0,606$ от амплитуды U_0 импульса, т. е. полная длительность импульса на этом уровне равна $2x_0$. Для нормального закона $x_0 = \sigma$, где σ — среднеквадратическое отклонение, а $U_0 = 1/2\pi\sigma^2$. С целью вычисления спектра

$$\tilde{U}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0 e^{-x^2/(2x_0^2)} e^{-j2\pi vx} dx$$

удобно в подынтегральной функции дополнить показатель степени $-\left[x^2/(2x_0^2) + j2\pi vx\right]$ до квадрата суммы:

$$-\left[\left(\frac{x^2}{2x_0^2} + j2\pi vx + d^2\right) - d^2\right] = -\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}x_0} + d\right)^2 - d^2\right],$$

где $d = j2\pi vx_0/\sqrt{2}$.

Вводя новую переменную $y = x/(\sqrt{2}x_0) + d$, найдем

$$\tilde{U}(v) = \sqrt{2x_0}U_0 e^{-(2\pi vx_0)^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$, то

$$\tilde{U}(v) = \sqrt{2\pi}U_0 x_0 e^{-(2\pi vx_0)^2/2},$$

$$\tilde{U}_{\text{отн}}(v) = \frac{\tilde{U}(v)}{\tilde{U}(0)} = e^{-\frac{(2\pi vx_0)^2}{2}}.$$

Если ввести круговую пространственную частоту $p = 2\pi v$ и иметь в виду, что $\tilde{U}(v) = 2\pi \tilde{U}(p)$, то можно найти

$$\tilde{U}(p) = \frac{U_0 x_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-p^2/[2(1/x_0)^2]}.$$

Обозначив $p_0 = 1/x_0$, получим

$$\tilde{U}_{\text{отн}}(p) = \tilde{U}(p)/\tilde{U}_0 = e^{-p^2/(2p_0^2)}.$$

Таким образом, спектр колоколообразного импульса представляет собой по форме точно такую же колоколообразную функцию частоты. Это отражено на рис. 269, где одна и та же кривая в разном масштабе соответствует импульсу и его спектру.

Найдем полную энергию колоколообразного импульса. Используя равенство Парсеваля, имеем

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{U}(v)|^2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} |2\pi \tilde{U}(p)|^2 \frac{dp}{2\pi} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{U}(p)|^2 dp.$$

Следовательно,

$$w_0 = 2\pi \tilde{U}_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2p^2/(2p_0^2)} dp = 2\pi \sqrt{\pi} \tilde{U}_0^2 p_0,$$

или

$$w_0 = 2\pi \sqrt{\pi} \frac{U_0^2 x_0^2}{2\pi} \frac{1}{x_0} = \sqrt{\pi} U_0^2 x_0.$$

Энергия, содержащаяся в полосе частот от 0 до $p = 2\pi v$, равна

$$w_p = 4\pi \tilde{U}_0^2 \int_0^p e^{-p^2/p_0^2} dp.$$

Обозначим $\xi^2/2 = p^2/p_0^2$, т. е. $\xi = \sqrt{2}p/p_0$. Тогда

$$\omega_p = 4\pi \tilde{U}_0^2 \frac{p_0}{\sqrt{2}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2/2} d\xi,$$

но

$$\int_0^{\xi} e^{-\xi^2/2} d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \Phi(\xi),$$

где $\Phi(\xi)$ — интеграл вероятности (табулированная величина).

Следовательно,

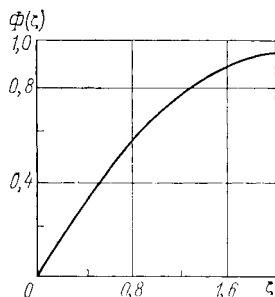
$$\begin{aligned} \omega_p &= 4\pi \tilde{U}_0^2 \frac{p_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \Phi(\xi) = \\ &= 4\pi \frac{U_0^2 x_0^2}{2\pi} \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{2}x_0} \Phi(\xi), \end{aligned}$$

или

$$\omega_p = \sqrt{\pi} U_0^2 x_0 \Phi(\xi),$$

причем

$$\eta = \omega_p/\omega_0 = \Phi(\xi).$$



Интеграл вероятности табулирован. График функции $\Phi(\xi)$ приведен на рис. 270.

Рис. 270. График функции интеграла вероятности

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2/2} d\xi$$

Для получения 90 % энергии импульса необходимо иметь $\xi = 1,65$. Так как $\xi = \sqrt{2}p/p_0 = \sqrt{2} \, 2\pi\nu x_0$, то

$$2x_0\nu = \xi/(\pi\sqrt{2}) = 1,65/4,43 = 0,37 \text{ или } \nu = 0,37/(2x_0),$$

где $2x_0$ — длительность импульса на уровне 0,606 от максимального значения его амплитуды.

Косинусный и косинус-квадратный импульсы

Форма косинусного импульса определяется выражением (рис. 271)

$$U(x) = \begin{cases} U_0 \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{(\Delta x/2)} & \text{при } |x| \leq \Delta x/2; \\ 0 & \text{при } |x| > \Delta x/2. \end{cases}$$

Спектр этого импульса

$$\tilde{U}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-i2\pi\nu x} dx = U_0 \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{\Delta x/2} e^{-i2\pi\nu x} dx.$$

Так как косинус—функция четная, получим косинус-преобразование Фурье

$$\tilde{U}(v) = 2U_0 \int_0^{\Delta x/2} \cos \frac{\pi}{2} \frac{x}{(\Delta x/2)} \cos 2\pi v x dx.$$

Имея в виду, что

$$\int \cos ax \cos bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)},$$

найдем

$$\tilde{U}(v) = 2U_0 \frac{\pi}{\Delta x} \frac{\cos(2\pi v \Delta x/2)}{(\pi/\Delta x)^2 - (2\pi v)^2}.$$

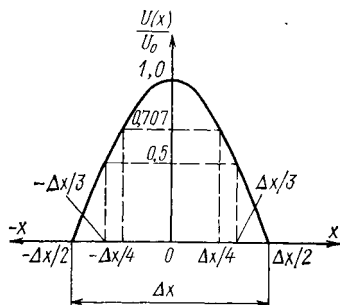


Рис. 271. Косинусный импульс

Спектральная плотность имеет главный максимум при $v = 0$. В этом случае

$$\tilde{U}_0 = (2/\pi) U_0 \Delta x \approx 0,635 U_0 \Delta x.$$

Относительная спектральная плотность

$$\tilde{y}(v) = \frac{\tilde{U}(v)}{\tilde{U}_0} = \frac{\cos(\pi v \Delta x)}{1 - (2\pi v \Delta x/\pi)^2},$$

или, если обозначить $z = \Delta x v$, то

$$\tilde{y}(z) = \frac{\cos \pi z}{1 - (2z)^2}.$$

Спектральная плотность равна нулю при $z = (2n + 1)/2$ или при $v = (2n + 1)[1/(2\Delta x)]$ для любых целых значений n , за исключением $n = 0$, так как в этом случае $z = 1/2$ и выражение для $\tilde{y}(z)$ дает неопределенность типа $0/0$.

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, найдем

$$\tilde{y}(1/2) = [\pi \sin \pi z / (8z)]_{z=1/2} = \pi/4 \approx 0,785;$$

следовательно, для $v = 1/(2\Delta x)$

$$\tilde{U}(v) = \tilde{U}_0 \tilde{y}(1/2) = 0,5 U_0 \Delta x.$$

Найдем боковые максимумы спектральной плотности. Вычислив и приравняв нулю производную $\partial \tilde{y}(z)/\partial z$, получим трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} \pi z = \frac{8}{\pi} \frac{z}{1 - (2z)^2}.$$

Графическое решение этого уравнения дает следующие координаты боковых максимумов спектральной плотности: $\pm 1,89$; $\pm 2,93$, а далее значения все более и более приближаются к n , где n — целое число.

Соответствующие значения относительной спектральной плотности в боковых максимумах равны: $\tilde{y}(1,89) = -0,071$; $\tilde{y}(2,93) = +0,029$; $\tilde{y}(4) = -0,016$; $\tilde{y}(5) = +0,01$ и т. д.

График функции $\tilde{\gamma}(v)$ представлен на рис. 272.

Форма косинус-квадратного импульса определяется выражением (рис. 273)

$$U(x) = \begin{cases} U_0 \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{x}{(\Delta x/2)} & \text{при } |x| \leq \Delta x/2; \\ 0 & \text{при } |x| > \Delta x/2. \end{cases}$$

Спектр этого импульса

$$\tilde{U}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi vx} dx = U_0 \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{x}{\Delta x/2} e^{-j2\pi vx} dx.$$

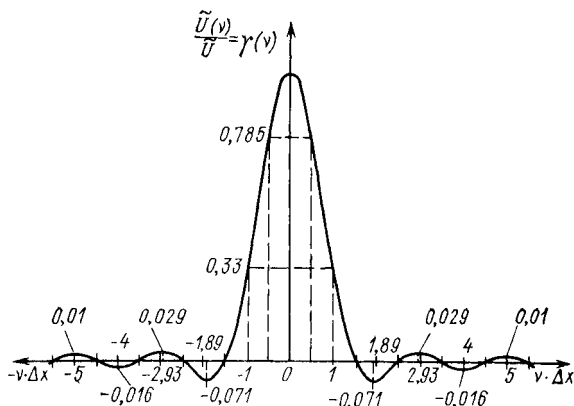


Рис. 272. Комплексный спектр косинусного импульса

Так как рассматриваемая функция — четная, найдем

$$\tilde{U}(v) = U_0 \int_{-\Delta x/2}^{+\Delta x/2} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{x}{\Delta x/2} \cos 2\pi vx dx.$$

Имея в виду, что

$$\cos^2 ax \cos bx = 0,5 \cos ax [\cos (a - b)x + \cos (a + b)x];$$

$$\int \cos ax \cos cx dx = \frac{\sin (a - c)x}{2(a - c)} + \frac{\sin (a + c)x}{2(a + c)},$$

получим

$$\tilde{U}(v) = \frac{U_0 \Delta x}{2} \frac{\text{Sinc}(v \Delta x)}{1 - (v \Delta x)^2}.$$

Главный максимум спектральной плотности имеет место при $v = 0$. В этом случае

$$\tilde{U}_0 = U_0 \Delta x/2 = 0,5 U_0 \Delta x.$$

Относительная спектральная плотность

$$\tilde{\gamma}(v) = \tilde{U}(v)/\tilde{U}_0 = \text{Sinc}(v \Delta x)/[1 - (v \Delta x)^2],$$

или, если обозначить $z = v \Delta x$, то

$$\tilde{y}(z) = \text{Sinc } z / (1 - z^2),$$

где $\text{Sinc } z = \sin(\pi z) / (\pi z)$.

Спектральная плотность обращается в нуль при $z = n$, или при $v = n / (1/\Delta x)$, для любых целых значений n , кроме $n = 0$ и $n = 1$, где имеет место неопределенность типа $0/0$.

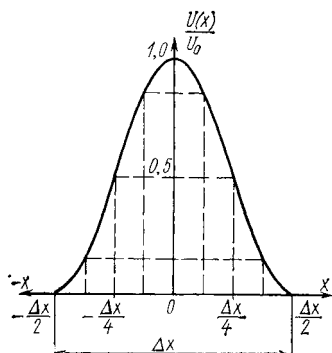


Рис. 273. Косинус-квадратный импульс

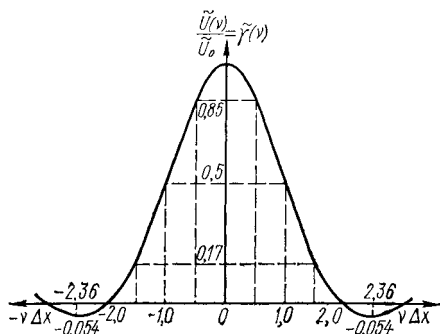


Рис. 274. Комплексный спектр косинус-квадратного импульса

Раскрывая неопределенность, найдем

$$\tilde{y}(0) = 1; \tilde{y}(1) = 0,5.$$

Боковые максимумы спектральной плотности соответствуют значениям z (или частотам v), определяемым из соотношения

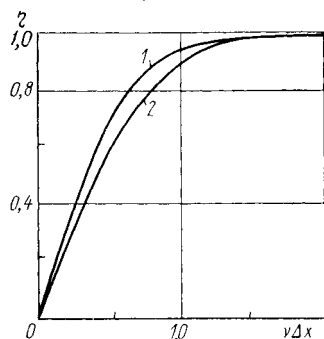


Рис. 275. Зависимости коэффициента $\eta = \omega_v / \omega_0$ от произведения $v\Delta x$, характеризующие энергию косинусного (1) и косинус-квадратного (2) импульсов в полосе частот от 0 до v

$$\frac{\partial \tilde{y}(z)}{\partial z} = 0, \text{ или } \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sin \pi z}{\pi z (1 - z^2)} \right) = 0,$$

что приводит к трансцендентному уравнению

$$\text{tg } \pi z = \frac{\pi z}{1 + 2/(1 - 1/z^2)}.$$

Графическое решение этого уравнения дает следующее значение координаты первого бокового максимума: $z_{\text{max}} = \pm 2,36$, или $v_{\text{max}} = \pm 2,36 / \Delta x$. Относительная спектральная плотность в первом боковом максимуме равна $\tilde{y}(2,36) = -0,054$.

График функции $\tilde{y}(v)$ для косинус-квадратного импульса приведен на рис. 274. Зависимости коэффициента $\eta = \omega_v / \omega_0$ для косинусного (1) и косинус-квадратного (2) импульсов представ-

лены на рис. 275. Значения коэффициента $\eta = \omega_v / \omega_0$ для косинусного (η_k) и косинус-квадратного (η_{k-k}) импульсов даны в табл. 17.

Как известно, простое гармоническое колебание, т. е. функцию

$$U(x) = U_0 \cos 2\pi\nu_1 x,$$

можно представить в виде суммы двух комплексных чисел (векторов):

$$U(x) = \frac{U_0}{2} e^{j2\pi\nu_1 x} + \frac{U_0}{2} e^{-j2\pi\nu_1 x}.$$

Спектр амплитуд такого колебания является дискретным и представляется графически вертикальным отрезком (линией) длиной U_0 , расположенным в точке ν_1 , а при использовании «отрицательных» частот — двумя линиями $U_0/2$ в точках $\pm\nu_1$. Спектральная плотность амплитуд гармонического колебания в этих точках равна бесконечности, а при всех остальных значениях частоты она равна нулю. Этот результат нельзя получить непосредственно с помощью прямого преобразования Фурье, так как гармоническая функция, существующая беспрерывно, не обладает свойством абсолютной интегрируемости.

Однако спектральную плотность гармонического колебания можно вычислить, воспользовавшись свойствами дельта-функции Дирака. Действительно, спектральная плотность

$$\tilde{U}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi\nu x} dx = \frac{U_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\nu-\nu_1)x} dx + \frac{U_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\nu+\nu_1)x} dx,$$

но в соответствии с определением дельта-функции найдем:

$$\delta(\nu - \nu_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\nu-\nu_1)x} dx;$$

$$\delta(\nu + \nu_1) = \delta[\nu - (-\nu_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(\nu+\nu_1)x} dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\nu) &= 0,5U_0\delta(\nu - \nu_1) + 0,5U_0\delta(\nu + \nu_1) = 0,5U_0\delta(\nu - \nu_1) + \\ &+ 0,5U_0\delta(\nu - [-\nu_1]). \end{aligned}$$

Если использовать только положительные частоты, то

$$\tilde{U}(\nu) = U_0\delta(\nu - \nu_1).$$

Таким образом, спектральная плотность простого гармонического колебания частоты ν_1 выражается через дельта-функцию.

Сложный периодический процесс

Практически любой сложный периодический процесс можно представить в виде суммы гармонических колебаний:

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{jk2\pi\nu_1 x},$$

где $\dot{A}_k = \frac{2}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} U(x) e^{-jk2\pi v_1 x} dx$; x_1, x_2 — пределы, в которых задана функция $U(x)$; $\lambda = 2\pi/p_1 = 1/v_1$ — длина волны колебания, имеющего пространственную частоту v_1 .

Спектральная плотность функции $\dot{A}_k e^{jk2\pi v_1 x}$, представляющей собой гармоническое колебание, равна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k e^{jk2\pi v_1 x} e^{-j2\pi v x} dx = \dot{A}_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(v - kv_1)x} dx = \dot{A}_k \delta(v - kv_1).$$

Значит, спектральная плотность сложного периодического процесса определится следующим образом:

$$\tilde{U}(v) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k \delta(v - kv_1).$$

При $\pm k$ имеем пару членов этой суммы

$$0,5 \dot{A}_k \delta(v - |k| v_1) + 0,5 \dot{A}_k \delta(v + |k| v_1),$$

а при $k = 0$ — один член

$$0,5 A_0 \delta(v) = 0,5 a_0 \delta(v).$$

§ 12.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ СПЕКТРОМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ОДИНОЧНОГО ИМПУЛЬСА ТОЙ ЖЕ ФОРМЫ

Амплитудный спектр периодической последовательности импульсов $U(x)$ можно представить в виде

$$\dot{A}_k = \frac{2}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} U(x) e^{-jk2\pi v_1 x} dx.$$

В то же время спектральная плотность амплитуд одиночного импульса той же формы $U(x)$ равна

$$\tilde{U}(v) = \int_{x_1}^{x_2} U(x) e^{-j2\pi v x} dx.$$

Следовательно, при $kv_1 = v$ комплексная амплитуда k -й гармоники дискретного спектра

$$\dot{A}_k = (2/\lambda) \tilde{U}(v), \text{ или } A_k = |\dot{A}_k| = (2/\lambda) |\tilde{U}(v)|.$$

В качестве примера найдем спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов с длительностью Δx и амплитудой U_0 , повторяющихся с периодом $\lambda = 1/v_1$. Спектральная плотность амплитуд одиночного прямоугольного импульса (см. § 12.4)

$$\tilde{U}(v) = U_0 \Delta x \operatorname{Sinc}(v \Delta x).$$

Комплексная амплитуда k -й гармоники дискретного спектра

$$\dot{A}_k = \frac{2}{\lambda} \tilde{U}(\nu) = 2U_0 \frac{\Delta x}{\lambda} \text{Sinc}(k\nu_1 \Delta x).$$

Если процесс развивается во времени, то при длительности импульса τ , периоде T и частоте f_1

$$\dot{A}_k = 2U_0 \frac{\tau}{T} \text{Sinc}(kf\tau),$$

что совпадает с результатом, полученным прямым расчетом в § 12.1.

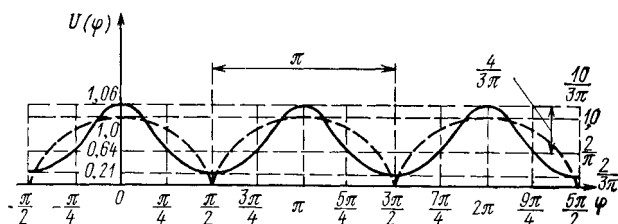


Рис. 276. Периодическая последовательность импульсов косинусной формы (---) и ее первая гармоника (—)

Найдем также спектр периодической последовательности импульсов косинусной формы (рис. 276), определяемой уравнением

$$U(\varphi) = |\cos \varphi|.$$

Поскольку спектральная плотность косинусного импульса с длительностью Δx и амплитудой U_0 известна и равна

$$\tilde{U}(\nu) = 2U_0 \frac{\pi}{\Delta x} \frac{\cos(2\pi\nu \Delta x/2)}{(\pi/\Delta x)^2 - (2\pi\nu)^2},$$

то при $U_0 = 1$, $\Delta x = \pi$, $\nu = 1/\pi$ можно найти

$$\tilde{U}(\varphi) = \frac{2 \cos k\pi}{1 - 4k^2} = \frac{2(-1)^k}{1 - 4k^2},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно, комплексная амплитуда k -й гармоники дискретного спектра, равная

$$\dot{A}_k = (2/\lambda) \tilde{U}(\varphi),$$

при $\lambda = \pi$ определяется выражением

$$\dot{A}_k = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{1 - 4k^2} = A_k,$$

т. е. является действительной величиной.

Спектральное разложение исходной функции $U(\varphi)$ можно представить в виде

$$U(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} k\varphi\right),$$

т. е.

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \cos(2k\varphi) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\varphi - \frac{2}{15} \cos 4\varphi + \frac{2}{35} \cos 6\varphi - \dots \right). \end{aligned}$$

Первая гармоника ($k=1$) $U_1(\varphi) = (4/3\pi) \cos 2\varphi$ показана на рис. 276.

§ 12.6. СПЕКТРЫ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Вводные замечания

В простейшем случае процесс модуляции заключается в изменении одного из параметров гармонического колебания — амплитуды, частоты или фазы.

Пусть

$$U(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \psi_0).$$

В немодулированном колебании все три параметра A_0 , ω_0 и ψ_0 постоянны.

При модуляции они изменяются, что можно выразить путем умножения соответствующего параметра на величину

$$1 + mF(t),$$

где $F(t)$ — модулирующая функция; m — глубина модуляции, причем обычно $|F(t)| \leq 1$; $0 \leq m \leq 1$.

В зависимости от того, какой параметр изменяется в процессе модуляции, различают *амплитудную модуляцию* (АМ), *частотную модуляцию* (ЧМ) и *фазовую модуляцию* (ФМ). Если исходное периодическое колебание не является гармоническим, то процесс изменения основных параметров составляющих его импульсов (амплитуды, длительности, частоты повторения, фазы и т. д.) называют *импульсной модуляцией*.

Некоторые вопросы гармонической модуляции уже были рассмотрены в § 8.2. Однако при разработке оптико-электронного прибора спектральный анализ приходится осуществлять не только применительно к потоку излучения, модулированному растром, но и к электрическим сигналам, подвергающимся модуляции в процессе их преобразования в электронном тракте, поэтому далее спектры модулированных колебаний будут рассмотрены в более общем виде.

При амплитудной модуляции и $\psi_0 = 0$ модулированное колебание имеет вид

$$U(t) = A_0 [1 + mF(t)] \cos \omega_0 t.$$

Если модуляция осуществляется гармоническим сигналом (*гармоническая модуляция*), то

$$F(t) = \cos \Omega t.$$

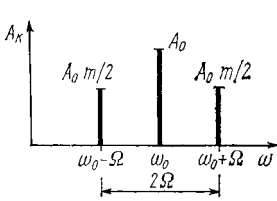


Рис. 277. Спектр амплитудно-модулированного колебания при синусоидальной модуляции

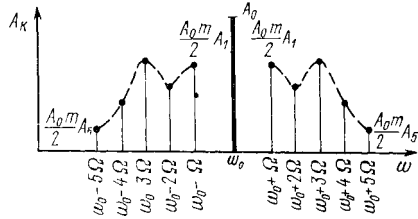


Рис. 278. Спектр амплитудно-модулированного колебания при модуляции сложным периодическим сигналом

Следовательно,

$$\begin{aligned} U(t) &= A_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ &= A_0 (\cos \omega_0 t + m \cos \omega_0 t \cos \Omega t) = \\ &= A_0 [\cos \omega_0 t + 0,5m \cos (\omega_0 - \Omega) t + 0,5m \cos (\omega_0 + \Omega) t]. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание. Его частота ω_0 носит название *несущей частоты*. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям, появляющимся вследствие модуляции. Частоты этих колебаний $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ называются *боковыми частотами* (верхней и нижней) или спутниками.

Таким образом, амплитудно-модулированное колебание имеет *дискретный спектр*, состоящий из трех спектральных линий (рис. 277). Ширина спектра амплитудно-модулированного колебания равна удвоенной частоте модуляции 2Ω .

В случае модуляции сложным периодическим сигналом

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos k\Omega t; \\ U(t) &= A_0 \left(1 + m \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos k\Omega t \right) \cos \omega_0 t = \\ &= A_0 \left[\cos \omega_0 t + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos (\omega_0 - k\Omega) t + \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos (\omega_0 + k\Omega) t \right], \end{aligned}$$

т. е. амплитудно-модулированное колебание состоит из колебания несущей частоты и двух групп колебаний, называемых *боковыми полосами*.

Спектр модулированного колебания изображен на рис. 278. Правая боковая полоса этого спектра воспроизводит спектр модулирующей функции, а левая представляет собой зеркальное отражение правой. В процессе модуляции происходит перенос спектра модулирующей функции — смещение его на величину ω_0 по шкале частот.

Спектр частотно-модулированного колебания

При частотной модуляции частота исходного гармонического колебания изменяется по закону

$$\omega = \omega_0 [1 + mF(t)].$$

Если модулирующая функция представляет собой гармонический сигнал, например $F(t) = \cos \Omega t$, а глубина модуляции $m = \Delta\omega/\omega_0$, то

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t,$$

где $\Delta\omega$ — амплитуда частотного отклонения, называемая *девиацией частоты* или просто *девиацией*.

Пусть исходное колебание имеет вид

$$U(t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi_0) = A_0 \cos \varphi;$$

при этом очевидно, что $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, т. е.

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t.$$

Последнее равенство определяет изменение полной фазы исходного колебания за время от 0 до t , в течение которого происходит изменение частоты. Имея это в виду, найдем

$$\begin{aligned} U(t) &= A_0 \cos \left(\int_0^t \omega dt \right) = A_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t \right) = \\ &= A_0 [\cos \omega_0 t \cos (\beta \sin \Omega t) - \sin \omega_0 t \sin (\beta \sin \Omega t)], \end{aligned}$$

где $\beta = \Delta\omega/\Omega$ — *индекс модуляции*.

В частном случае, когда индекс модуляции имеет малую величину, т. е. $\beta \ll 1$; $\cos(\beta \sin \Omega t) \approx 1$; $\sin(\beta \sin \Omega t) \approx \beta \sin \Omega t$, можно найти

$$\begin{aligned} U(t) &\approx A_0 (\cos \omega_0 t - \beta \sin \Omega t \sin \omega_0 t) = \\ &= A_0 [\cos \omega_0 t - 0,5\beta \cos(\omega_0 - \Omega)t + 0,5\beta \cos(\omega_0 + \Omega)t]. \end{aligned}$$

Если сравним полученное выражение с выражением для амплитудно-модулированного сигнала

$$U(t) = A_0 [\cos \omega_0 t + 0,5m \cos (\omega_0 - \Omega) t + 0,5m \cos (\omega_0 + \Omega) t],$$

то увидим, что спектр колебания, модулированного по частоте, при малом индексе модуляции состоит, как и спектр амплитудно-модулированного колебания, из несущей частоты ω_0 и двух боковых частот — верхней $\omega_0 + \Omega$ и нижней $\omega_0 - \Omega$. Единственное отличие заключается в сдвиге фазы колебания нижней боковой частоты на 180° (знак минус) относительно фазы при амплитудной модуляции. При этом индекс частотной модуляции β совпадает с глубиной амплитудной модуляции m . Ширина спектра частотно-модулированного колебания в этом случае равна 2Ω (рис. 279).

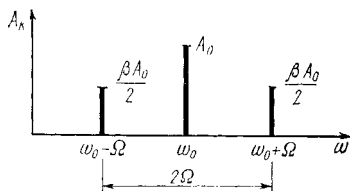


Рис. 279. Амплитудный спектр частотно-модулированного колебания при малом индексе модуляции

В общем случае, т. е. при произвольном индексе модуляции, можно вычислить спектр модулированного сигнала, используя формулы из теории бесселевых функций:

$$\cos (\beta \sin \Omega t) = J_0(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} J_{2n}(\beta) \cos 2n\Omega t;$$

$$\sin (\beta \sin \Omega t) = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} J_{2n+1}(\beta) \sin (2n+1)\Omega t.$$

Имея это в виду, найдем

$$\begin{aligned} U(t)/A_0 &= J_0(\beta) \cos \omega_0 t - J_1(\beta) [\cos (\omega_0 - \Omega) t - \cos (\omega_0 + \Omega) t] + \\ &+ J_2(\beta) [\cos (\omega_0 - 2\Omega) t + \cos (\omega_0 + 2\Omega) t] - \\ &- J_3(\beta) [\cos (\omega_0 - 3\Omega) t - \cos (\omega_0 + 3\Omega) t] + \\ &+ J_4(\beta) [\cos (\omega_0 - 4\Omega) t + \cos (\omega_0 + 4\Omega) t] - \dots = \\ &= J_0(\beta) \cos \omega_0 t + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k J_k(\beta) [\cos (\omega_0 - k\Omega) t + \\ &+ (-1)^k \cos (\omega_0 + k\Omega) t]. \end{aligned}$$

Таким образом, результирующее колебание имеет дискретный спектр, причем в отличие от амплитудной модуляции этот спектр занимает бесконечно большую полосу частот.

Частота каждой гармоники отличается от несущей на $\pm k\Omega$. Амплитуда k -й гармоники $A_k = J_k(\beta) A_0$, где β — индекс частотной модуляции. Амплитуда колебания несущей частоты равна

$J_0(\beta) A_0$. Следовательно, практическое ограничение спектра определяется законом изменения бесселевой функции $J_k(\beta)$.

В табл. 3 были приведены значения $J_n(\beta)$ для $\beta \leq 10$ и $n \leq 11$. Так как в рассматриваемом случае $n = k$, то из таблицы следует, что при $\beta \leq 0,5$ ширина спектра практически равна 2Ω . При $0,5 \leq \beta \leq 1$ приобретает некоторое значение вторая пара боковых частот, так как их относительная амплитуда равна 0,11. Следовательно,

в этом случае ширина спектра должна быть принята равной 4Ω .

При $1 \leq \beta \leq 2$ ширина спектра достигает $(6 \div 8) \Omega$. Далее она приближается к значению $2\beta\Omega$. Это означает, что наибольшее значение k , с которым приходится считаться, приближается к индексу модуляции, когда $k = \beta$. Так как $\beta = \Delta\omega/\Omega$, то при $\beta > 2$ ширина спектра $2\beta\Omega = 2(\Delta\omega/\Omega)\Omega = 2\Delta\omega$.

Вид некоторых спектров приведен на рис. 280. Важно обратить внимание на то, что при частотной модуляции, когда частота исходного колебания непрерывно изменяется в пределах заданного интервала $\omega_0 \pm \Delta\omega$, спектр получается не сплошным, а дискретным, причем только при очень больших значениях $\Delta\omega$ ($\beta \geq 2$) ширина его равна $2\Delta\omega$. При узком интервале полосы качания

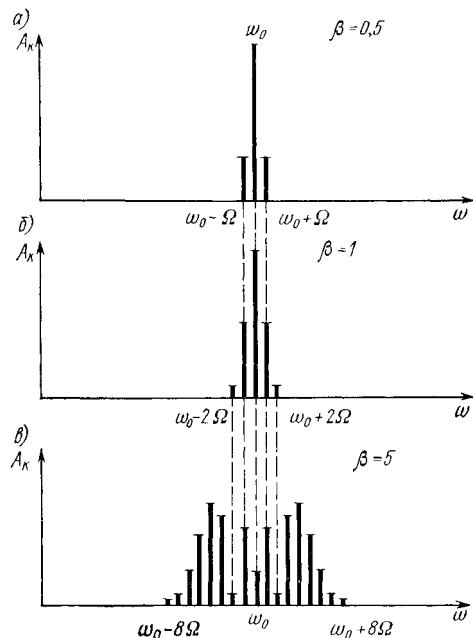


Рис. 280. Вид спектров частотно-модулированного колебания при различных индексах модуляции

частоты ($2\Delta\omega$) ширина спектра модулированного колебания не зависит от интервала, а определится, как и при АМ, шириной спектра модулирующей функции 2Ω . Это не позволяет сократить полосу рабочих частот за счет использования частотной модуляции.

Спектр колебания при фазовой модуляции

Пусть имеем исходное гармоническое колебание

$$U(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \psi_0).$$

Заменим в нем ψ_0 величиной

$$\psi = \psi_0 [1 + mF(t)] = \psi_0 + \Delta\psi F(t),$$

где $m = \Delta\psi/\psi_0$.

Тогда получим

$$U(t) = A_0 \cos [\omega_0 t - \psi_0 - \Delta\psi F(t)].$$

В аналогичном случае при частотной модуляции, когда

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega F(t),$$

имели

$$U(t) = A_0 \cos (\omega t - \psi_0) = A_0 \cos (\psi - \psi_0),$$

где

$$\omega = \frac{d\psi}{dt}, \text{ т. е. } \psi = \int_0^t \omega dt = \omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t F(t) dt.$$

Следовательно,

$$U(t) = A_0 \cos \left[\omega_0 t - \psi_0 + \Delta\omega \int_0^t F(t) dt \right].$$

Различие между выражениями для фазовой и частотной модуляции заключается лишь в том, что при фазовой модуляции в аргумент входит модулирующая функция $F(t)$, а при частотной модуляции — ее интеграл.

Если $F(t) = \cos \Omega t$, то для фазовой модуляции имеем

$$U(t) = A_0 \cos (\omega_0 t - \psi_0 - \Delta\psi \cos \Omega t),$$

а для частотной модуляции найдем

$$U(t) = A_0 \cos (\omega_0 t - \psi_0 + \Delta\omega/\Omega \sin \Omega t),$$

т. е. полученные выражения практически совпадают.

Следовательно, при гармонических частотной и фазовой модуляциях различия в форме модулированных колебаний нет.

Эти различия обнаруживаются при более сложных законах модуляции, что ясно видно на рис. 281, где показана форма АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов при импульсной модуляции.

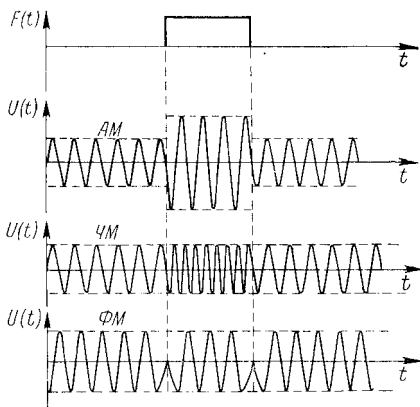


Рис. 281. Форма АМ-, ЧМ- и ФМ-сигналов при импульсной модуляции

§ 12.7. ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА О ДИСКРЕТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ

При передаче реальных сигналов их спектр всегда ограничен конечным значением полосы пропускания тракта.

Непрерывные сигналы, имеющие ограниченный спектр, вполне определяются конечным числом значений на протяжении конечного

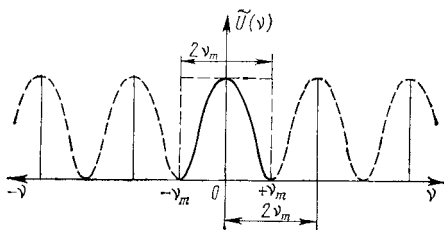


Рис. 282. Периодическое повторение заданной функции (к доказательству теоремы Котельникова)

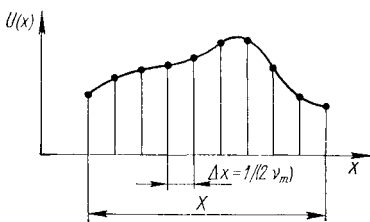


Рис. 283. Дискретизация сигнала

интервала. Это находит отражение в теореме, носящей имя акад. В. А. Котельникова *: *если функция $U(x)$ не содержит частот, больших чем ν_m , то она полностью определяется путем задания ее ординат в последовательных точках, отстоящих друг от друга на расстояние $1/(2\nu_m)$.*

Приведем доказательство этой теоремы.

В общем случае

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(\nu) e^{j2\pi\nu x} d\nu,$$

где

$$\tilde{U}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi\nu x} dx.$$

Так как для функции $U(x)$ с ограниченным спектром при $\nu > \nu_m$ $\tilde{U}(\nu) = 0$, то

$$U(x) = \int_{-\nu_m}^{+\nu_m} \tilde{U}(\nu) e^{j2\pi\nu x} d\nu.$$

Поскольку пределы интегрирования ограничивают последующее рассмотрение интервалом частот от $-\nu_m$ до $+\nu_m$, нам безразлично, как ведет себя функция $\tilde{U}(\nu)$ за пределами этого интервала. Поэтому предположим, что она периодически повторяется с периодом $2\nu_m$ (рис. 282). Тогда эту периодическую функцию можно представить рядом Фурье

$$\tilde{U}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{i \frac{2\pi}{(2\nu_m)} k \nu},$$

где

$$\dot{A}_k = \frac{2}{(2\nu_m)} \int_{-\nu_m}^{+\nu_m} \tilde{U}(\nu) e^{-j \frac{2\pi}{(2\nu_m)} k \nu} d\nu.$$

* В теореме имеются в виду функция времени $U(t)$ и частота f_m . Здесь используем ее для пространственных функций, спектр которых ограничен частотой ν_m .

Так как при $x = -k/(2v_m)$

$$U\left(-\frac{k}{2v_m}\right) = \int_{-v_m}^{+v_m} \tilde{U}(v) e^{-j2\pi v \frac{k}{2v_m}} dv,$$

то

$$\dot{A}_k = \frac{2}{(2v_m)} U\left(-\frac{k}{2v_m}\right).$$

Следовательно,

$$U(x) = \int_{-v_m}^{+v_m} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k e^{j2\pi k \frac{v}{2v_m}} \right) e^{j2\pi vx} dv;$$

изменяя порядок интегрирования и суммирования, найдем

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k \int_{-v_m}^{+v_m} e^{j2\pi v [x + k/(2v_m)]} dv.$$

Входящий в полученное выражение интеграл

$$\int_{-v_m}^{+v_m} e^{j2\pi v [x + k/(2v_m)]} dv = \frac{e^{j2\pi v_m [x + k/(2v_m)]} - e^{-j2\pi v_m [x + k/(2v_m)]}}{j2\pi [x + k/(2v_m)]}.$$

Умножая и деля значение интеграла на $2v_m$, получим

$$\int_{-v_m}^{+v_m} e^{j2\pi v [x + k/(2v_m)]} dv = 2v_m \text{Sinc} \left[2v_m \left(x + \frac{k}{2v_m} \right) \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \dot{A}_k v_m \text{Sinc} \left[2v_m \left(x + \frac{k}{2v_m} \right) \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} U\left(-\frac{k}{2v_m}\right) \text{Sinc} \left[2v_m \left(x + \frac{k}{2v_m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta x = 1/(2v_m)$$

и, обратив внимание на тот факт, что k принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. знаки при k можно поменять местами, найдем

$$U(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} U(k \Delta x) \text{Sinc} [2v_m (x - k \Delta x)].$$

Полученное выражение позволяет представить заданную непрерывную функцию $U(x)$ дискретными значениями, отстоящими друг от друга на расстоянии $\Delta x = 1/(2v_m)$ (рис. 283). Эти значения функции иногда называют *выборками сигнала*.

Если протяженность сигнала конечна (X), а полоса частот по-прежнему ограничена ν_m , то эти условия оказываются несовместимыми, поскольку функция конечной протяженности обладает бесконечно широким спектром. Однако всегда можно определить наивысшую частоту спектра ν_m , за пределами которой содержится пренебрежимо малая энергия сигнала.

Число выборок N в этом случае

$$N = X/\Delta x + 1,$$

поскольку одна «лишняя» выборка нужна на границах сигнала.

Так как обычно $X/\Delta x \gg 1$, то

$$N = X/\Delta x = 2\nu_m X.$$

§ 12.8. СПЕКТРЫ ДВУМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Основные соотношения

Пусть двумерная вещественная функция $U(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Функция $U(x, y)$ абсолютно интегрируема по бесконечной плоскости XY , т. е. существует интеграл

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) dx dy = N < \infty.$$

2. Функция $U(x, y)$ непрерывна или имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов в пределах любого прямоугольника конечных размеров.

3. Функция $U(x, y)$ не имеет разрывов второго рода *.

В этом случае может быть осуществлено преобразование Фурье функции $U(x, y)$

$$\tilde{U}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy,$$

т. е. найдена функция $\tilde{U}(\nu, \mu)$ двух независимых переменных ν и μ , которые называются пространственными частотами.

Соответствующие им круговые пространственные частоты равны:

$$p = 2\pi\nu; \quad q = 2\pi\mu.$$

* Условия 2 и 3 называются условиями Дирихле. Разрыв первого рода (обыкновенный разрыв, конечный разрыв или скачок) означает, что при переходе x через значение a функция $U(x)$ «перескакивает» от одного конечного значения к другому. Само значение $U(x)$ при $x = a$ может быть не задано, оно может совпадать со значением функции слева $U(a-0)$ или справа $U(a+0)$ от точки разрыва. Иначе говоря, при разрыве первого рода существует конечный предел $U(a+0)$, хотя он и не равен значению функции $U(a)$ в точке a . Если предел бесконечен или его вовсе нет, говорят о разрыве второго рода.

Точно так же справедливо и обратное преобразование

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(v, \mu) e^{j2\pi(vx + \mu y)} dv d\mu.$$

Функция $\tilde{U}(v, \mu)$ является комплексной функцией пространственных частот и представляет собой *спектральную плотность функции* $U(x, y)$. Совокупность модулей $\tilde{U}(v, \mu)$ называется *пространственно-частотным спектром* функции $U(x, y)$.

Если двумерная вещественная функция $U(x, y)$ используется для описания реакции оптической (оптико-электронной) системы на входное воздействие в виде пространственного распределения яркости двумерного некогерентно излучающего объекта, т. е. реакции, в результате которой образуется новая двумерная функция, характеризующая распределение яркости изображения объекта, то соответствующее преобразование Фурье $\tilde{U}(v, \mu)$ называется *оптической передаточной функцией* (ОПФ). В дальнейшем она обозначается в виде $\tilde{h}(v, \mu)$. Это комплексная функция, ее модуль называется *пространственно-частотной характеристикой, частотно-контрастной характеристикой, функцией передачи модуляции или модуляционной передаточной функцией* (ПЧХ, ЧКХ, ФПМ, МПФ). Аргумент ОПФ называется *функцией передачи фазы (фазовой передаточной функцией или фазочастотной характеристикой)* (ФПФ, ФЧХ). Иначе говоря, можно записать:

$$\text{ОПФ} = \text{ЧКХ} e^{j \text{ФЧХ}};$$

$$\text{ЧКХ} = \text{ПЧХ} = \text{ФПМ} = \text{МПФ} = |\text{ОПФ}|;$$

$$\text{ФЧХ} = \text{ФПФ} = \arg \text{ОПФ}.$$

Термины ФПМ — ЧКХ, ФПФ — ФЧХ предусмотрены ГОСТ 23935—79 для равноправного использования до 1/1 1984 г. После этого срока предполагается стандартизовать один термин. Термины ПЧХ и МПФ используются в иностранной литературе.

Если двумерная функция в плоскости XU задана в полярных координатах ρ, φ , причем

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg(y/x);$$

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi,$$

то для вычисления соответствующего спектра необходимо перейти к полярным координатам также и в плоскости пространственных частот v, μ , т. е. ввести вектор пространственной частоты \varkappa и его фазовый угол θ так, что

$$|\varkappa| = \varkappa = \sqrt{v^2 + \mu^2}; \quad \theta = \arctg(\mu/v);$$

$$v = \varkappa \cos \theta; \quad \mu = \varkappa \sin \theta.$$

Тогда, имея в виду соотношение, связывающее элементарные площадки в прямоугольных и полярных координатах,

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi,$$

легко осуществить переход от спектра функции $U(x, y)$ в прямоугольных координатах

$$\tilde{U}(v, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi(vx + \mu y)} dx dy$$

к спектру функции $U(\rho, \varphi)$ в полярных координатах

$$\tilde{U}(\kappa, \theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} U(\rho, \varphi) e^{-j2\pi\kappa\rho \cos(\varphi-\theta)} \rho d\rho.$$

Если речь идет о функции трех переменных $U(x, y, t)$, то можно получить пару трехмерных преобразований Фурье*:

$$U(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(v, \mu, f) e^{j2\pi(vx + \mu y + ft)} dv d\mu df;$$

$$\tilde{U}(v, \mu, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, t) e^{-j2\pi(vx + \mu y + ft)} dx dy dt.$$

Формально все полученные результаты, касающиеся свойств спектров (преобразований Фурье) одномерных вещественных функций, обобщаются на случай двумерных и многомерных функций, т. е. для этих функций справедлива теорема о спектре суммы, теорема смещения, теорема Парсевала, теорема свертки и т. д.

Однако на некоторых специфических свойствах многомерных спектров вещественных функций следует остановиться более подробно.

Двумерная дельта-функция Дирака

Определение дельта-функции в двумерном пространстве представляет собой обобщение определения одномерной дельта-функции, но в двумерном пространстве существует большая свобода выбора первоначальной формы импульса, из которого в пределе образуется дельта-функция.

Как бы ни определялась двумерная дельта-функция Дирака, она имеет следующие основные свойства:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = y = 0; \\ 0 & \text{при } x \neq 0 \text{ и } y \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x, y) dx dy = 1 \quad \text{при } \varepsilon > 0;$$

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta(x, y);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) \delta(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = U(x, y).$$

Последнее свойство, связанное с тем, что двумерная дельта-функция $\delta(x - \xi, y - \eta)$ равна нулю всюду, кроме точек $x = \xi$ и $y = \eta$, называют фильтрующим (стробирующим) свойством дельта-функции.

* Когда для двойного или тройного интеграла указывается только один предел интегрирования, то этот предел относится к интегрированию по всем переменным.

Дельта-функцию можно определить также и в пространстве с более высоким числом измерений, при этом ее свойства совершенно схожи со свойствами ее аналогов в пространстве меньшего числа измерений.

Редукция преобразования Фурье к меньшему числу переменных

Пользуясь свойствами дельта-функции, можно осуществлять редукцию преобразования Фурье к меньшему числу переменных.

Предположим, например, что функция $U(x, y, t)$ не зависит от t , но ее спектр записан в трехмерной форме. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{U}(v, \mu, f) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi(vx + \mu y + ft)} dx dy dt = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi(vx + \mu y)} dx dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt.\end{aligned}$$

Последний интеграл представляет собой дельта функцию

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt,$$

т. е.

$$\tilde{U}(v, \mu, f) = \tilde{U}(v, \mu) \delta(f).$$

Следовательно, исходная функция

$$\begin{aligned}U(x, y, t) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(v, \mu, f) e^{j2\pi(vx + \mu y + ft)} dv d\mu df = \\ &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(v, \mu) \delta(f) e^{j2\pi(vx + \mu y + ft)} dv d\mu df = U(x, y).\end{aligned}$$

Спектр сечения двумерной функции

Пусть имеется вещественная функция двух переменных $U(x, y)$. Совершим над нею преобразование Фурье по координате x :

$$\tilde{U}(v, \hat{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Знак \wedge над одним из аргументов указывает, что преобразование Фурье по этому аргументу еще не проведено. Таким образом, мы получили спектр значений функции $U(x, y)$ при заданном y , или как бы спектр сечения функции $U(x, y)$ для данного y .

Если далее найти преобразование Фурье функции $\tilde{U}(v, y)$, рассматривая ее как функцию аргумента y , то найдем

$$\tilde{U}(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(v, y) e^{-j2\pi\mu y} dy,$$

или

$$\tilde{U}(v, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi(vx + \mu y)} dx dy,$$

а это уже двумерный спектр функции в целом и разбить его на спектры отдельных сечений в общем случае нельзя.

Двумерные спектры функций с разделяющимися переменными.
Преобразование Фурье—Бесселя, или преобразование Ганкеля нулевого порядка

Функция двух независимых переменных называется функцией с разделяющимися переменными в определенной системе координат, если ее можно записать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной.

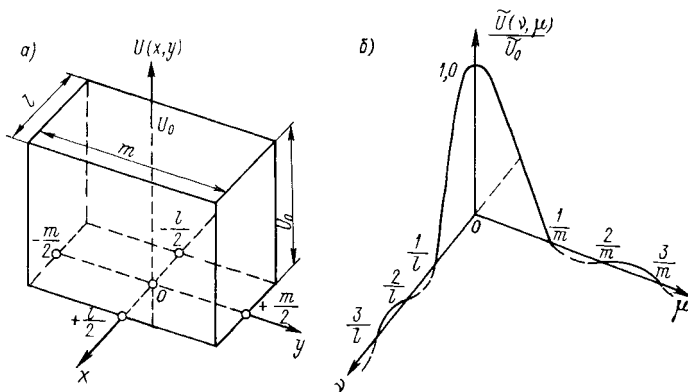


Рис. 284. Спектр функции с разделяющимися переменными в прямоугольной системе координат: а — функция; б — ее спектр

Иными словами, $U(x, y)$ есть функция с разделяющимися переменными в декартовых прямоугольных координатах, если

$$U(x, y) = U(x) U(y).$$

В цилиндрических координатах $U(\rho, \varphi)$ также является функцией с разделяющимися переменными, если

$$U(\rho, \varphi) = U(\rho) U(\varphi).$$

Функции с разделяющимися переменными часто удобнее для использования, чем более общие функции, так как их свойства позволяют свести сложные двумерные действия к более простым одно-

мерным. Например, двумерный спектр функции с разделяющимися переменными в прямоугольной системе координат можно представить в виде произведения одномерных спектров.

Действительно, если $U(x, y) = U(x) U(y)$, то

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\nu, \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(x) e^{-j2\pi\nu x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} U(y) e^{-j2\pi\mu y} dy = \tilde{U}(\nu) \tilde{U}(\mu).\end{aligned}$$

Вычислим для примера спектр функции $U(x, y)$, которая равна $U_0 = \text{const}$ на интервалах по оси x от $-l/2$ до $l/2$ и по оси y от $-m/2$ до $+m/2$, а за пределами этих интервалов равна нулю (рис. 284, а).

Рассматриваемая функция $U(x, y)$ может быть выражена через двумерную прямоугольную функцию

$$\text{Rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{m}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \left|\frac{x}{l}\right| \leq \frac{1}{2} \text{ и } \left|\frac{y}{m}\right| \leq \frac{1}{2}; \\ 0 & \text{при } \left|\frac{x}{l}\right| > \frac{1}{2} \text{ и } \left|\frac{y}{m}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

следующим образом:

$$U(x, y) = U_0 \text{Rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{m}\right).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\nu, \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy = \\ &= U_0 \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-j2\pi\nu x} dx \int_{-m/2}^{+m/2} e^{-j2\pi\mu y} dy = \tilde{U}_0 \text{Sinc}(l\nu) \text{Sinc}(m\mu),\end{aligned}$$

где $\tilde{U}_0 = U_0 ml$.

Нормированное (относительное) значение спектра (рис. 284, б)

$$\tilde{U}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = \frac{\tilde{U}(\nu, \mu)}{\tilde{U}(0, 0)} = \frac{\tilde{U}(\nu, \mu)}{\tilde{U}_0} = \text{Sinc}(l\nu) \text{Sinc}(m\mu)$$

Следовательно, можно записать

$$\left[\mathcal{F} \left\{ \text{Rect}\left(\frac{x}{l}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{m}\right) \right\} \right]_{\text{отн}} = \text{Sinc}(l\nu) \text{Sinc}(m\mu).$$

По аналогии с одномерным спектром прямоугольной функции (§ 5.2) найдем

$$\left[\mathcal{F} \left\{ \text{Sinc}\left(\frac{x}{l}\right) \text{Sinc}\left(\frac{y}{m}\right) \right\} \right]_{\text{отн}} = \text{Rect}(l\nu) \text{Rect}(m\mu).$$

При разделении переменных в цилиндрической системе координат вычисление спектра осуществить сложнее, однако и в этом слу-

чае обычно двумерные операции можно свести к ряду одномерных. Наиболее просто это делается для функций, обладающих осевой симметрией. Значения такой функции определяются только радиус-вектором, т. е.

$$U(\rho, \varphi) = U(\rho).$$

Следовательно, можно найти

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\kappa, \theta) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} U(\rho, \varphi) e^{-j2\pi\rho \cos(\varphi-\theta)} \rho d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} U(\rho) \rho d\rho \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j2\pi\rho \cos(\varphi-\theta)} d\varphi.\end{aligned}$$

Внутренний интеграл представляет собой функцию Бесселя нулевого порядка

$$J_0(2\pi\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-j2\pi\rho \cos(\varphi-\theta)} d\varphi.$$

Таким образом, искомый спектр становится функцией только пространственной частоты κ , не зависящей от фазового угла θ :

$$\tilde{U}(\kappa) = 2\pi \int_0^{\infty} U(\rho) J_0(2\pi\rho) \rho d\rho.$$

Этот особый вид двумерного преобразования Фурье для функций, обладающих осевой симметрией, встречается достаточно часто и носит специальное название *преобразования Фурье—Бесселя*, или *преобразования Ганкеля нулевого порядка*.

Аналогичным образом можно найти обратное преобразование, если функция $\tilde{U}(\kappa)$ обладает осевой симметрией:

$$U(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} \tilde{U}(\kappa) J_0(2\pi\rho\kappa) \kappa d\kappa.$$

Преобразование Фурье—Бесселя (Ганкеля) может быть представлено в символическом виде:
прямое преобразование

$$\mathcal{B}\{U(\rho)\} = 2\pi \int_0^{\infty} U(\rho) J_0(2\pi\rho\kappa) \rho d\rho,$$

обратное преобразование

$$\mathcal{B}^{-1}\{\tilde{U}(\kappa)\} = 2\pi \int_0^{\infty} \tilde{U}(\kappa) J_0(2\pi\rho\kappa) \kappa d\kappa.$$

Вычислим для примера спектр функции $U(\rho, \varphi)$, которая равна $U_0 = \text{const}$ внутри круга радиусом ρ_0 , а за пределами этого круга равна нулю (рис. 285, а).

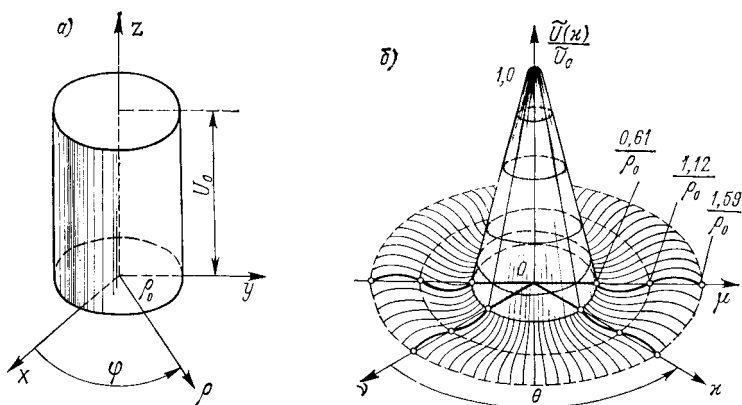


Рис. 285. Спектр функции с осевой симметрией: а — функция; б — ее спектр

Рассматриваемая функция $U(\rho, \varphi)$ может быть выражена через *круговую или Circ — функцию*

$$\text{Circ} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{\rho}{\rho_0} \leq 1, \\ 0 & \text{при } \frac{\rho}{\rho_0} > 1 \end{cases}$$

следующим образом

$$U(\rho, \varphi) = U_0 \text{Circ} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right).$$

Очевидно, что в этом случае

$$\tilde{U}(\kappa) = 2\pi U_0 \int_0^{\rho_0} J_0(2\pi\kappa\rho) \rho d\rho.$$

Используем формулу приведения бesselевых функций

$$\frac{dJ_k(z)}{dz} = J_{k-1}(z) - \frac{k}{z} J_k(z),$$

которую можно представить в виде

$$\frac{dJ_k(z)}{dz} + \frac{kJ_k(z)}{z} = J_{k-1}(z)$$

или

$$\frac{d[J_k(z) z^k]}{dz} = z^k J_{k-1}(z).$$

При $k = 1$ найдем

$$zJ_0(z) = \frac{d[zJ_1(z)]}{dz}.$$

Обозначив $z = 2\pi\kappa\rho$, получим

$$\begin{aligned} 2\pi U_0 \int_0^{\rho_0} J_0(2\pi\kappa\rho) \rho \, d\rho &= \frac{U_0}{2\pi\kappa^2} \int_0^{z_0} J_0(z) z \, dz = \\ &= \frac{U_0}{2\pi\kappa^2} \int_0^{z_0} d[J_1(z) z] = \frac{U_0 z_0 J_1(z_0)}{2\pi\kappa^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{U}(\kappa) = 2\pi U_0 \int_0^{\rho_0} J_0(2\pi\kappa\rho) \rho \, d\rho = U_0 \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(z_0)}{z_0}.$$

если $z_0 = 2\pi\kappa\rho_0$, то

$$\tilde{U}(\kappa) = \tilde{U}_0 \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(\pi x_0)}{\pi x_0},$$

где $x_0 = 2\kappa\rho_0$, т. е. $z_0 = \pi x_0$.

Функцию $\frac{2J_1(z_0)}{z_0} = \frac{2J_1(\pi x_0)}{\pi x_0}$ (см. рис. 285, б) принято называть Bessinc-функцией, причем

$$\text{Bessinc}(x_0) = \frac{2J_1(\pi x_0)}{\pi x_0}.$$

Следовательно, можно записать

$$\mathcal{B}\left\{\text{Circ}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right\} = U_0 \pi \rho_0^2 \text{Bessinc}(2\rho_0\kappa)$$

или

$$\left[\mathcal{B}\left\{\text{Circ}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right\}\right]_{\text{отн}} = \text{Bessinc}(2\rho_0\kappa).$$

Соответственно,

$$\left[\mathcal{B}\left\{\text{Bessinc}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right\}\right]_{\text{отн}} = \text{Circ}(2\rho_0\kappa).$$

§ 12.9. ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ (ПЧХ) ОБЪЕКТОВ НАБЛЮДЕНИЯ ПРИ НЕКОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ

Основные соотношения

Пусть имеется излучающий объект, характеризующийся распределением яркости $L(x, y)$. Переменные x и y могут представлять собой координаты некоторой точки в системе координат, связанной с объектом, однако более удобно задавать распределение яркости по координатам в плоскости изображения, создаваемого оптической системой. При большом расстоянии до объекта плоскость изображения совпадает с задней фокальной плоскостью оптической системы (рис. 286), так что имеют место следующие соотношения:

$$x = f' \operatorname{tg} \alpha' \approx f' \alpha'; \quad y = f' \operatorname{tg} \beta' \approx f' \beta',$$

где f' — заднее фокусное расстояние оптической системы.

В воздухе $\alpha' = \alpha$; $\beta' = \beta$. В среде с показателем преломления n (иммерсионный объектив) $\alpha' = \alpha/n$; $\beta' = \beta/n$.

Следовательно, в общем случае

$$x = \frac{f'}{n} \frac{X}{R}; \quad y = \frac{f'}{n} \frac{Y}{R}.$$

Заметим также, что яркость выражена в эффективных величинах, т. е.

$$L(x, y) = \xi L_e(x, y),$$

где

$$\xi = \int_0^\infty \varphi(\lambda) k(\lambda) \tau_a(\lambda) \tau_o(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \varphi(\lambda) d\lambda;$$

$$L_e(x, y) = \int_0^\infty L_{e\lambda}(x, y) d\lambda;$$

$\varphi(\lambda)$, $k(\lambda)$ — относительные спектральные характеристики излучения источника и чувствительности приемника; $\tau_a(\lambda)$, $\tau_o(\lambda)$ — спектральные коэффициенты пропускания атмосферы и оптической системы; $L_{e\lambda}(x, y)$ — спектральная плотность энергетической яркости объекта в точке с координатами x, y .

Двумерный спектр функции $L(x, y)$ равен

$$\tilde{L}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} L(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy.$$

Спектр $\tilde{L}(\nu, \mu)$ является комплексной функцией пространственных частот. Совокупность модулей этой функции называется пространственно частотной характеристикой (ПЧХ) излучения объекта наблюдения. Двумерный спектр измеряется в $\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1} \cdot \text{см}^2 = \text{Вт} \cdot \text{ср}^{-1}$.

Рассмотренные в § 12.8 свойства двумерных спектров позволяют легко получить выражения для спектров некоторых моделей мало-размерных источников излучения (имеются в виду объекты, детали которых не разрешаются оптической системой прибора).

ПЧХ точечного источника

Математической моделью точечного источника излучения является двумерная дельта-функция Дирака, т. е.

$$L(x, y) = I \delta(x - x_0, y - y_0),$$

где I — сила света источника в данном направлении, измеряемая в эффективных величинах $\text{Вт} \cdot \text{ср}^{-1}$; $\delta(x - x_0, y - y_0)$ — функция Дирака в точке $(x - x_0, y - y_0)$, измеряемая в см^{-2} .

Действительно, пусть, например, двумерная дельта-функция является пределом произведения двух колоколообразных импульсов, имеющих протяженность $\Delta \rightarrow 0$, т. е.

$$\delta(x, y) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} U_0^2 e^{-(x^2 + y^2)/(2\Delta^2)}.$$

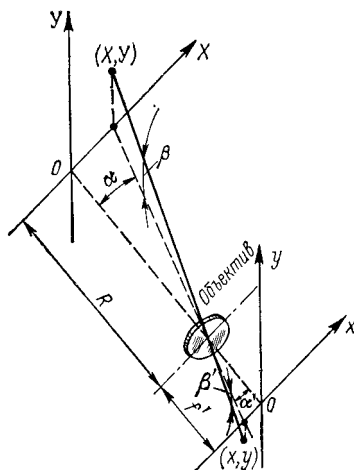


Рис. 286. Схема наблюдения

Так как $U_0^2 = 1/(2\pi\Delta^2)$, то двумерная дельта-функция измеряется в см^{-2} , если Δ выражена в см.

Спектр точечного источника ($\text{Вт}\cdot\text{ср}^{-1}$)

$$\tilde{L}(\nu, \mu) = I e^{-j2\pi(\nu x_0 + \mu y_0)},$$

а ПЧХ — модуль спектра — является постоянной величиной, равной I .

ПЧХ объекта прямоугольной формы

Для объекта прямоугольной формы (рис. 284) при $U_0 = L_0$ в пределах от $-l/2$ до $+l/2$ по оси x и от $-m/2$ до $+m/2$ по оси y найдем двумерный спектр ($\text{Вт}\cdot\text{ср}^{-1}$)

$$\tilde{L}(\nu, \mu) = L_0 m l \text{Sinc}(l\nu) \text{Sinc}(m\mu),$$

причем для принятых на рис. 284 обозначений $\tilde{L}(\nu, \mu) = \tilde{U}(\nu, \mu)$, $L_0 m l = \tilde{U}_0$.

$$\text{ПЧХ} = |\tilde{L}(\nu, \mu)| = L_0 m l |\text{Sinc}(l\nu) \text{Sinc}(m\mu)|.$$

ПЧХ круглого объекта равномерной яркости

Для круглого объекта равномерной яркости (рис. 285) при $U_0 = L_0$ внутри круга радиусом ρ_0 найдем спектральную плотность ($\text{Вт}\cdot\text{ср}^{-1}$)

$$\tilde{L}(\kappa) = L_0 \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(z_0)}{z_0} = L_0 \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(\pi x_0)}{\pi x_0},$$

причем для принятых на рис. 285 обозначений $\tilde{L}(\kappa) = \tilde{U}(\kappa)$, $L_0 \pi \rho_0^2 = \tilde{U}_0$.

$$\text{ПЧХ} = |\tilde{L}(\kappa)| = L_0 \pi \rho_0^2 \left| \frac{2J_1(z_0)}{z_0} \right| = L_0 \pi \rho_0^2 \left| \frac{2J_1(\pi x_0)}{\pi x_0} \right|,$$

где $z_0 = 2\pi \rho_0 \kappa = \pi x_0$.

ПЧХ круглого объекта неравномерной яркости

Для круглого объекта с неравномерно распределенной яркостью вид спектра существенно зависит от закона распределения яркости, так как в соответствии с преобразованием Ганкеля спектр

$$\tilde{L}(\kappa) = 2\pi \int_0^\infty L(\rho) J_0(2\pi \rho \kappa) \rho d\rho.$$

Если яркость $L(\rho)$ распределена по гауссоиде, т. е.

$$L(\rho) = L_0 e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)},$$

то можно найти $\tilde{L}(\kappa) = 2\pi L_0 \int_0^\infty e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} J_0(2\pi \rho \kappa) \rho d\rho$.

Входящий в полученное выражение интеграл сводится к *интегралу Вебера*

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_n(bx) x^{n+1} dx.$$

Для вычисления этого интеграла заменим функцию Бесселя степенным рядом и проинтегрируем почленно. Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_n(bx) x^{n+1} dx &= \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x^{n+1} dx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (bx/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{n+2k} \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x^{2n+2k+1} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{n+2k} \frac{1}{2a^{2n+2k+2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+k} dt = \\ &= \frac{b^n}{(2a^2)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-b^2/(4a^2)]^k}{k!} = \frac{b^n}{(2a^2)^{n+1}} e^{-b^2/(4a^2)}. \end{aligned}$$

Здесь при вычислении мы воспользовались определением показательной функции $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} (z^k)/(k!)$ и табличным интегралом из справочника по математике И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева:

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}},$$

что при $x = t$, $m = k + n$, $a = 1$ позволяет найти

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+k} dt = \Gamma(k+n+1).$$

Для $n = 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_0(bx) x dx = \frac{1}{2a^2} e^{-b^2/(4a^2)}.$$

Следовательно,

$$\tilde{L}(x) = 2\pi L_0 \rho_0^2 e^{-(2\pi x \rho_0)^2/2},$$

т. е. спектр имеет вид исходной функции, что характерно для гауссоиды.

ПЧХ объекта вытянутой формы

Для объекта вытянутой формы с плавно меняющимся по площади распределением яркости, описываемым, например, двумерной гауссоидой

$$L(x, y) = L_0 e^{-[x^2/(2\rho_1^2) + y^2/(2\rho_2^2)]},$$

спектр следует вычислять по общей формуле

$$\tilde{L}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} L(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy,$$

т. е.

$$\tilde{L}(\nu, \mu) = L_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu x - x^2/(2\rho_1^2)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu y - y^2/(2\rho_2^2)} dy.$$

Полученное произведение однотипных интегралов можно вычислить, пользуясь табличным интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2 - 2bz - c} dz = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/a - c}.$$

Так как

$$a = 1/(2\rho_1^2) = 1/(2\rho_2^2); \quad b = j\pi\nu = j\pi\mu; \quad c = 0,$$

то

$$\tilde{L}(\nu, \mu) = 2L_0\pi\rho_1\rho_2 e^{-[(2\pi\nu\rho_1)^2 + (2\pi\mu\rho_2)^2]/2}.$$

Далее можно перейти к цилиндрической системе координат, вводя следующие обозначения:

$$\nu = \kappa \cos \theta; \quad \rho_1 = \rho_{1,2} \cos \zeta; \quad \mu = \kappa \sin \theta; \quad \rho_2 = \rho_{1,2} \sin \zeta.$$

Путем несложных алгебраических преобразований в этом случае найдем

$$\tilde{L}(\kappa, \theta) = L_0\pi\rho_{1,2}^2 \sin 2\zeta e^{-(2\pi\kappa\rho_{1,2})^2 F(\theta)/4},$$

где

$$\rho_{1,2}^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2; \quad \zeta = \arctg(\rho_2/\rho_1);$$

$$F(\theta) = 2(\cos^2 \theta \cos^2 \zeta + \sin^2 \theta \sin^2 \zeta); \quad \theta = \arctg(\mu/\nu).$$

В частном случае, когда $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$; $\rho_{1,2}^2 = 2\rho_0^2$; $\zeta = 45^\circ$; $F(\theta) = 1$, найдем

$$\tilde{L}(\kappa) = 2L_0\pi\rho_0^2 e^{-(2\pi\kappa\rho_0)^2/2},$$

что совпадает с полученным выше выражением для осесимметричной модели.

§ 12.10. ОСОБЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРОВ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ

Свойства спектров комплексных функций определяются теоремами, уже рассмотренными применительно к спектрам вещественных функций. Однако некоторые особые случаи требуют специального рассмотрения. Для упрощения промежуточных выкладок расчеты выполняются ниже на примере одномерных функций, а полученные результаты обобщаются для двумерных процессов, где особые свойства спектров комплексных функций проявляются наиболее полно, т. к. именно *двумерные функции пространственных координат могут быть комплексными* в отличие от вещественных одномерных функций времени.

Если комплексная функция $\dot{U}(x)$ имеет спектр $\tilde{U}(v) = \mathcal{F}\{\dot{U}(x)\}$, то спектр функции $\dot{U}^*(x)$, взаимно сопряженной с функцией $\dot{U}(x)$, равен

$$\tilde{U}_1(v) := \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}^*(x) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Поскольку действительные части комплексных функций $\dot{U}(x)$ и $\dot{U}^*(x)$ равны, а мнимые отличаются только знаком

$$\dot{U}(x) = a(x) + jb(x), \quad \dot{U}^*(x) = a(x) - jb(x),$$

то можно найти:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) e^{-j2\pi vx} dx + j \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) e^{-j2\pi vx} dx = \tilde{a}(v) + j\tilde{b}(v), \\ \tilde{U}_1(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) e^{-j2\pi vx} dx - j \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) e^{-j2\pi vx} dx = \tilde{a}(v) - j\tilde{b}(v), \end{aligned}$$

где комплексные функции — спектры Фурье:

$$\begin{aligned} \tilde{a}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) e^{-j2\pi vx} dx = A(v) + jB(v); \\ \tilde{b}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) e^{-j2\pi vx} dx = C(v) - jD(v), \end{aligned}$$

а вещественные функции —

$$\begin{aligned} A(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \cos(2\pi vx) dx; & B(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) \sin(2\pi vx) dx; \\ C(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \cos(2\pi vx) dx; & D(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b(x) \sin(2\pi vx) dx, \end{aligned}$$

причем $A(v)$ и $C(v)$ — четные, $B(v)$ и $D(v)$ — нечетные функции пространственной частоты v .

Выразим спектры $\tilde{U}(v)$ и $\tilde{U}_1(v)$ через вещественные функции

$$\begin{aligned} \tilde{U}(v) &= \tilde{a}(v) + j\tilde{b}(v) = [A(v) - D(v)] + j[B(v) + C(v)] = \\ &= M(v) + jN(v), \end{aligned}$$

где вещественные функции

$$M(v) = A(v) - D(v); \quad N(v) = B(v) + C(v),$$

причем

$$\begin{aligned} M(-v) &= A(-v) - D(-v) = A(v) + D(v); \\ N(-v) &= B(-v) + C(-v) = -B(v) + C(v). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(v) &= \tilde{a}(v) - j\tilde{b}(v) = [A(v) + D(v)] - j[-B(v) + C(v)] = \\ &= M(-v) - jN(-v),\end{aligned}$$

т. е.

$$\tilde{U}_1(v) = \tilde{U}^*(-v),$$

а это означает, что спектр взаимно сопряженной функции взаимно сопряжен с ее спектром, вычисленным для отрицательных частот:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x) e^{-j2\pi vx} dx, \\ \tilde{U}^*(-v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}^*(x) e^{-j2\pi vx} dx.\end{aligned}$$

Взаимно сопряженный спектр для положительных частот соответственно равен

$$\tilde{U}^*(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}^*(x) e^{j2\pi vx} dx.$$

В символических обозначениях:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(v) &= \mathcal{F}\{\dot{U}(x)\}, \\ \tilde{U}^*(v) &= \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}^*(x)\}, \\ \tilde{U}^*(-v) &= \mathcal{F}\{\dot{U}^*(x)\}.\end{aligned}$$

Пользуясь аналогичными приемами вычислений и распространяя полученные результаты на двумерные функции, можно составить следующие соотношения для прямых и обратных преобразований Фурье сопряженных комплексных функций в символических обозначениях:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(v, \mu) &= \mathcal{F}\{\dot{U}(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}(-x, -y)\}, \\ \tilde{U}(-v, -\mu) &= \mathcal{F}\{\dot{U}(-x, -y)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}(x, y)\}, \\ \tilde{U}^*(v, \mu) &= \mathcal{F}\{\dot{U}^*(-x, -y)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}^*(x, y)\}, \\ \tilde{U}^*(-v, -\mu) &= \mathcal{F}\{\dot{U}^*(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\dot{U}^*(-x, -y)\}, \\ \dot{U}(x, y) &= \mathcal{F}\{\tilde{U}(-v, -\mu)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}(v, \mu)\}, \\ \dot{U}(-x, -y) &= \mathcal{F}\{\tilde{U}(v, \mu)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}(-v, -\mu)\}, \\ \dot{U}^*(x, y) &= \mathcal{F}\{\tilde{U}^*(v, \mu)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}^*(-v, -\mu)\}, \\ \dot{U}^*(-x, -y) &= \mathcal{F}\{\tilde{U}^*(-v, -\mu)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{U}^*(v, \mu)\}.\end{aligned}$$

Важно отметить, что в отличие от спектров вещественных функций *спектр комплексной функции, вычисленный для отрицательных частот, не является взаимно сопряженным со спектром, вычисленным для положительных частот, т. е.*

$$\tilde{U}(-\nu) \neq \tilde{U}^*(\nu),$$

действительно,

$$\tilde{U}(\nu) = [A(\nu) - D(\nu)] + j[B(\nu) + C(\nu)],$$

$$\tilde{U}^*(\nu) = [A(\nu) - D(\nu)] - j[B(\nu) + C(\nu)],$$

$$\tilde{U}(-\nu) = [A(\nu) + D(\nu)] + j[-B(\nu) + C(\nu)],$$

$$\tilde{U}^*(-\nu) = [A(\nu) + D(\nu)] - j[-B(\nu) + C(\nu)].$$

Спектр свертки комплексных функций
(теорема о спектре свертки)

Пользуясь теми же приемами, что и при доказательстве теоремы о спектре свертки двух вещественных функций (§ 12.3), нетрудно показать, что *спектр свертки комплексных функций равен произведению спектров этих функций.*

Если даны две комплексные функции $\dot{U}_1(\xi)$ и $\dot{U}_2(\xi)$ с соответствующими спектрами:

$$\tilde{U}_1(\nu) = \mathcal{F}\{\dot{U}_1(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_1(\xi) e^{-j2\pi\nu\xi} d\xi,$$

$$\tilde{U}_2(\nu) = \mathcal{F}\{\dot{U}_2(\xi)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_2(\xi) e^{-j2\pi\nu\xi} d\xi$$

и сверткой

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1(\xi) \otimes \dot{U}_2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_1(\xi) \dot{U}_2(x - \xi) d\xi,$$

то спектр свертки равен

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\dot{U}(x)\} &= \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_1(\xi) \dot{U}_2(x - \xi) d\xi\right\} = \\ &= \mathcal{F}\{\dot{U}_1(\xi)\} \mathcal{F}\{\dot{U}_2(\xi)\}. \end{aligned}$$

Следовательно, для комплексных функций так же как и для функций вещественных, *спектр свертки равен произведению спектров.* Иначе говоря, в принятых выше обозначениях запишем: $\tilde{U}(\nu) = \tilde{U}_1(\nu)\tilde{U}_2(\nu)$. Для двух равных комплексных функций $\dot{U}_1(\xi) = \dot{U}_2(\xi)$ спектр свертки выражается квадратом спектра любой из этих функций: $\tilde{U}(\nu) = [\tilde{U}_1(\nu)]^2 = [\tilde{U}_2(\nu)]^2$.

Распространяя полученный результат на различные сочетания знаков у аргумента свертываемых функций, для спектров свертки двумерных комплексных функций можно найти

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_1(\xi, \zeta) \dot{U}_2(x - \xi, y - \zeta) d\xi d\zeta \right\} &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(\xi, \zeta) \otimes \dot{U}_2(\xi, \zeta) \} = \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(\xi, \zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}_2(\xi, \zeta) \} = \tilde{U}_1(v, \mu) \tilde{U}_2(v, \mu); \\
 \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_1(\xi, \zeta) \dot{U}_2(-x - \xi, -y - \zeta) d\xi d\zeta \right\} &= \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(-\xi, -\zeta) \otimes \dot{U}_2(-\xi, -\zeta) \} = \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(-\xi, -\zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}_2(-\xi, -\zeta) \} = \tilde{U}_1(-v, -\mu) \tilde{U}_2(-v, -\mu); \\
 \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_1(\xi, \zeta) \dot{U}_2(x + \xi, y + \zeta) d\xi d\zeta \right\} &= \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(\xi, \zeta) \otimes \dot{U}_2(-\xi, -\zeta) \} = \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(\xi, \zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}_2(-\xi, -\zeta) \} = \tilde{U}_1(v, \mu) \tilde{U}_2(-v, -\mu); \\
 \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_1(\xi, \zeta) \dot{U}_2(-x + \xi, -y + \zeta) d\xi d\zeta \right\} &= \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(-\xi, -\zeta) \otimes \dot{U}_2(\xi, \zeta) \} = \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}_1(-\xi, -\zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}_2(\xi, \zeta) \} = \tilde{U}_1(-v, -\mu) \tilde{U}_2(v, \mu).
 \end{aligned}$$

Если требуется вычислить спектр свертки двух одинаковых функций $\dot{U}_1(\xi, \zeta) = \dot{U}_2(\xi, \zeta) = \dot{U}(\xi, \zeta)$, то для различных сочетаний знаков у аргументов получим:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}(x - \xi, y - \zeta) d\xi d\zeta \right\} &= \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \otimes \dot{U}(\xi, \zeta) \} = \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \} = \tilde{U}(v, \mu) \tilde{U}(v, \mu) = [\tilde{U}(v, \mu)]^2; \\
 \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}(-x - \xi, -y - \zeta) d\xi d\zeta \right\} &= \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}(-\xi, -\zeta) \otimes \dot{U}(-\xi, -\zeta) \} = \\
 &= \mathcal{F} \{ \dot{U}(-\xi, -\zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}(-\xi, -\zeta) \} = \\
 &= \tilde{U}(-v, -\mu) \tilde{U}(-v, -\mu) = [\tilde{U}(-v, -\mu)]^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}(\pm x + \xi, \pm y + \zeta) d\xi d\zeta \right\} = \\
& = \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \otimes \dot{U}(-\xi, -\zeta) \} = \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \} \times \\
& \times \mathcal{F} \{ \dot{U}(-\xi, -\zeta) \} = \tilde{U}(\nu, \mu) \tilde{U}(-\nu, -\mu).
\end{aligned}$$

На примере одномерных функций отдельно покажем справедливость последнего выражения, вычислив спектры для $+x$ (случай а) и $-x$ (случай б):

$$\begin{aligned}
\text{а) } \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) \dot{U}(x + \xi) d\xi \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) \dot{U}(x + \xi) \times \\
&\times e^{-j2\pi\nu x} d\xi dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x + \xi) e^{-j2\pi\nu x} dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\zeta) e^{-j2\pi\nu(\xi - \zeta)} d\zeta = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) e^{j2\pi\nu\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\zeta) e^{-j2\pi\nu\zeta} d\zeta = \tilde{U}(-\nu) \tilde{U}(\nu);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) \dot{U}(-x + \xi) d\xi \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) \dot{U}(-x + \xi) e^{-j2\pi\nu x} d\xi dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(-x + \xi) e^{-j2\pi\nu x} dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\zeta) e^{-2\pi\nu(\xi - \zeta)} d\zeta = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) e^{-j2\pi\nu\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\zeta) e^{j2\pi\nu\zeta} d\zeta = \tilde{U}(\nu) \tilde{U}(-\nu).
\end{aligned}$$

Действительно,

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi) \dot{U}(\pm x + \xi) d\xi \right\} = \tilde{U}(-\nu) \tilde{U}(\nu) = \tilde{U}(\nu) \tilde{U}(-\nu).$$

Для других рассмотренных выше случаев может использоваться аналогичный способ доказательства справедливости полученных выражений.

**Спектр свертки взаимно сопряженных комплексных функций
(теорема о спектре функции автокорреляции)**

Учитывая, что спектр свертки равен произведению спектров, найдем:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}^*(x - \xi, y - \zeta) d\xi d\zeta \right\} = \\
 & = \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \otimes \dot{U}^*(\xi, \zeta) \} = \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}^*(\xi, \zeta) \} = \\
 & = \tilde{U}(v, \mu) \tilde{U}^*(-v, -\mu); \\
 & \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}^*(-x - \xi, -y - \zeta) d\xi d\zeta \right\} = \\
 & = \mathcal{F} \{ \dot{U}(-\xi, -\zeta) \otimes \dot{U}^*(-\xi, -\zeta) \} = \\
 & = \mathcal{F} \{ \dot{U}(-\xi, -\zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}^*(-\xi, -\zeta) \} = \tilde{U}(-v, -\mu) \tilde{U}^*(v, \mu); \\
 & \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}^*(\pm x + \xi, \pm y + \zeta) d\xi d\zeta \right\} = \\
 & = \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \otimes \dot{U}^*(-\xi, -\zeta) \} = \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \} \mathcal{F} \{ \dot{U}^*(-\xi, -\zeta) \} = \\
 & = \tilde{U}(v, \mu) \tilde{U}^*(v, \mu) = |\tilde{U}(v, \mu)|^2.
 \end{aligned}$$

Последний случай представляет наибольший интерес. Соответствующее ему выражение принято называть *теоремой о спектре функции автокорреляции*: спектр взаимно сопряженных комплексных функций, одна из которых вычислена для отрицательных значений аргумента, равен квадрату модуля спектра:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F} \{ \dot{U}(\xi, \zeta) \otimes \dot{U}^*(-\xi, -\zeta) \} = \\
 & = \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}^*(\pm x + \xi, \pm y + \zeta) d\xi d\zeta \right\} = |\tilde{U}(v, \mu)|^2.
 \end{aligned}$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(\xi, \zeta) \dot{U}^*(\pm x + \xi, \pm y + \zeta) d\xi d\zeta$ служит мерой связи значений сигнала в точках, разделенных некоторым интервалом $(\pm x, \pm y)$. Он показывает, насколько быстро уменьшается зависимость значений функции от ее предыдущего хода. Этот интеграл принято называть *функцией автокорреляции*. Следовательно, теорему о спектре функции автокорреляции можно сформулировать следующим образом: *спектр функции автокорреляции равен квадрату модуля спектра исходной функции*.

Выразив квадрат модуля комплексной функции через произведение комплексной функции на функцию взаимно с ней сопряженную и применив теорему о свертке спектров, найдем

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \{ |\dot{U}(x, y)|^2 \} &= \mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \dot{U}^*(x, y) \} = \\ &= \mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} \otimes \mathcal{F} \{ \dot{U}^*(x, y) \} = \tilde{U}(\nu, \mu) \otimes \tilde{U}^*(-\nu, -\mu) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\nu, \mu) \tilde{U}^*(f_x + \nu, f_y + \mu) df_x df_y,\end{aligned}$$

т. е. спектр квадрата модуля комплексной функции равен свертке спектра этой функции и взаимно сопряженного ему спектра, вычисленного для отрицательных частот:

$$\mathcal{F} \{ |\dot{U}(x, y)|^2 \} = \tilde{U}(\nu, \mu) \otimes \tilde{U}^*(-\nu, -\mu).$$

Интегральная теорема Фурье

Найдем спектр обратного преобразования Фурье комплексной функции пространственных координат $\mathcal{F} \{ \mathcal{F}^{-1} \{ \dot{U}(x, y) \} \}$. Так как $\mathcal{F}^{-1} \{ \dot{U}(x, y) \} = \tilde{U}(-\nu, -\mu)$, а $\mathcal{F} \{ \tilde{U}(-\nu, -\mu) \} = \dot{U}(x, y)$, то $\mathcal{F} \{ \mathcal{F}^{-1} \{ \dot{U}(x, y) \} \} = \dot{U}(x, y)$. Далее вычислим обратное преобразование Фурье спектра комплексной функции пространственных координат $\mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} \}$. Так как

$$\mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} = \tilde{U}(\nu, \mu);$$

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \tilde{U}(\nu, \mu) \} = \dot{U}(x, y),$$

то

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} \} = \dot{U}(x, y).$$

Следовательно,

$$\mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} \{ \dot{U}(x, y) \} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} = \dot{U}(x, y),$$

т. е. производя прямое и обратное преобразования Фурье одно за другим в любой последовательности, мы вновь получаем исходную функцию (за исключением точки разрыва, где два последовательных преобразования дают среднее значение функции в окрестности данной точки).

На основании интегральной теоремы можно получить соотношение, определяющее спектр прямого преобразования Фурье $\mathcal{F} \{ \mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} \}$.

Поскольку

$$\mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ \dot{U}(-x, -y) \},$$

то

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{F} \{ \dot{U}(x, y) \} \} = \mathcal{F} \{ \mathcal{F}^{-1} \{ \dot{U}(-x, -y) \} \} = \dot{U}(-x, -y).$$

РЕАКЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМ НА ВХОДНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ФИЛЬТРА И ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В соответствии с определением Гудмена под системой следует понимать все то, что осуществляет преобразование ряда входных функций или воздействий в ряд выходных функций или реакций (откликов).

Реакция системы на входное воздействие может быть описана некоторыми обобщенными характеристиками, определение которых не зависит от того, что представляет собой рассматриваемая система: усилитель электрического сигнала или объектив, воспроизводящий изображение удаленных предметов. Однако в каждом конкретном случае характеристики системы имеют различные, исторически сложившиеся, определения, наименования и обозначения. Поэтому реакцию электрических и оптических систем на входное воздействие рассмотрим раздельно и выявим наличие аналогии между соответствующими представлениями.

Введем понятия о наиболее часто встречающемся классе систем — *линейных системах* — и подклассе линейных систем — *инвариантных линейных системах*.

Система считается линейной, если ее реакция на одновременное воздействие нескольких сигналов в точности равна сумме реакций, вызываемых каждым сигналом в отдельности. Основное свойство линейной системы заключается в том, что ее реакцию на произвольный входной сигнал можно выразить через реакцию на определенные элементарные функции, на которые можно разложить входной сигнал.

Условие инвариантности требует, чтобы реакция линейной системы не зависела от начала отсчета. При *временной инвариантности* это означает, что реакция системы в момент времени t на входное воздействие в виде единичного импульса, действующего в момент времени t_1 , зависит только от промежутка времени $t - t_1$. При *пространственной инвариантности (изопланарности)* импульсный отклик системы зависит только от расстояний $x - x_1$ и $y - y_1$.

§ 13.1. РЕАКЦИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Пусть на вход линейной системы (рис. 287), представляющей собой электрический фильтр с коэффициентом передачи $\dot{K}(f)$, поступает сигнал — электрическое напряжение $u_{вх}(t_1)$, спектральная плотность которого

$$\tilde{u}_{вх}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{вх}(t_1) e^{-j2\pi f t_1} dt_1.$$

Спектральная плотность сигнала на выходе системы может быть вычислена на основании следующих очевидных соотношений:

элементарные комплексные амплитуды входного и выходного сигналов

$$\begin{aligned} d\dot{u}_{\text{вх}} &= 2\tilde{u}_{\text{вх}}(f) df; \\ d\dot{u}_{\text{вых}} &= 2\tilde{u}_{\text{вых}}(f) df; \end{aligned}$$

комплексный коэффициент передачи, представляющий собой отношение комплексной амплитуды сигнала на выходе к комплексной амплитуде сигнала на входе,

$$\dot{K}(f) = \frac{d\dot{u}_{\text{вых}}}{d\dot{u}_{\text{вх}}} = \frac{\tilde{u}_{\text{вых}}(f)}{\tilde{u}_{\text{вх}}(f)}.$$

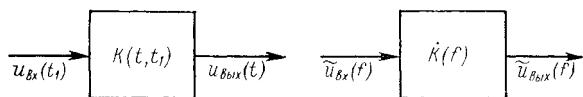


Рис. 287. Электрическая система — преобразователь входного воздействия в реакцию (отклик) на выходе

Следовательно,

$$\tilde{u}_{\text{вых}}(f) = \tilde{u}_{\text{вх}}(f) \dot{K}(f).$$

Будем трактовать комплексный коэффициент передачи $\dot{K}(f)$ как спектральную плотность $\tilde{K}(f)$ некоторой функции времени $K(t)$, вводимую следующим образом:

$$\dot{K}(f) = \tilde{K}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{-j2\pi ft} dt \left/ \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt, \right.$$

или, если обозначить

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt,$$

то

$$\dot{K}(f) = \tilde{K}(f) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Исходя из такой трактовки комплексного коэффициента передачи, найдем

$$\tilde{u}_{\text{вых}}(f) = \tilde{u}_{\text{вх}}(f) \tilde{K}(f).$$

Тогда форму сигнала на выходе системы $u_{\text{вых}}(t)$, соответствующую спектру $\tilde{u}_{\text{вых}}(f)$, можно найти, пользуясь теоремой о спектре свертки, из которой следует, что если спектр $\tilde{u}_{\text{вых}}(f)$ равен произведению спектров $\tilde{u}_{\text{вх}}(f)$ и $\tilde{K}(f)$, то функция $u_{\text{вых}}(t)$ равна свертке функций $u_{\text{вх}}(t)$ и $K(t)$.

Следовательно,

$$u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вх}}(t) \otimes K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}(t_1) K(t - t_1) dt_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}(t - t_1) K(t_1) dt_1,$$

причем на основании обратного преобразования Фурье

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{\text{вых}}(f) e^{j2\pi ft} df.$$

Входящее в интеграл свертки значение текущего времени t_1 соответствует началу отсчета в системе координат, сдвинутой вдоль оси так, что $t - t_1 = \tau$ (рис. 288).

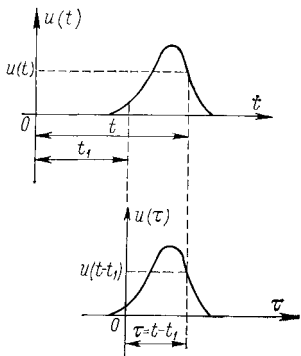


Рис. 288. Преобразование координат

Следует иметь в виду, что для реальных электрических систем всегда выполняется условие $K(t - t_1) = 0$ при $t < t_1$, т. е. при отрицательном аргументе функция $K(t - t_1)$ должна обращаться в нуль, так как *отклик не может опережать воздействие*. Это условие, называемое *условием физической осуществимости электрического фильтра*, приводит к необходимости выполнять интегрирование при временной фильтрации в несимметричных пределах:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t_1) K(t - t_1) dt_1.$$

Однако для удобства и упрощения математических преобразований пределы интегрирования делаются симметричными и равными $\pm\infty$, при этом всегда подразумевается, что для $t < t_1$ подынтегральное выражение обращается в нуль. Практическим следствием условия физической осуществимости является необходимость некоторой за-

держки сигнала для обработки его электрическим фильтром в реальном масштабе времени. Как мы убедимся в дальнейшем, при оптической фильтрации эти ограничения отсутствуют, так как отрицательные и положительные значения пространственных координат входного сигнала равноправны.

Физический смысл функций $K(t)$ и $K(t - t_1)$ можно легко понять, предположив, что на вход четырехполюсника в момент времени $t_1 = 0$ воздействует единичный импульс, определяемый выражением

$$u_{\text{вх}}^1(t_1) = A\delta(t_1) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft_1} df,$$

где $\delta(t_1)$ — дельта-функция, с^{-1} ; A — площадь входного сигнала, которая для единичного импульса равна 1 В·с.

Форма сигнала на выходе четырехполюсника при действии на входе единичного импульса в момент времени $t_1 = 0$ определяется выражением

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}^1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вх}}^1(t_1) K(t - t_1) dt_1 = A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_1) K(t - t_1) dt_1 = \\ &= AK(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_1) dt_1 = AK(t). \end{aligned}$$

В соответствии с определением

$$\tilde{K}(f) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{aA} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вых}}^1(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Следовательно, *комплексный коэффициент передачи* системы $\tilde{K}(f) = \tilde{K}(f)$ с точностью до постоянного множителя представляет собой спектр ее реакции на единичный импульс, а введенная выше функция $K(t) = (1/A) u_{\text{вых}}^1(t)$, называемая *импульсной характеристикой* системы, также с точностью до постоянного множителя есть реакция системы на единичный импульс, действующий на входе в момент времени $t_1 = 0$.

Аналогично этому $K(\tau)$ есть реакция системы на единичный импульс, действующий в момент $\tau = 0$, а так как $\tau = t - t_1$, то $K(t - t_1)$ есть реакция системы на единичный импульс, действующий на входе в момент времени $t = t_1$. В общем случае импульсная характеристика неинвариантной системы зависит от абсолютных значений t и t_1 , т. е. представляет собой функцию $K(t, t_1)$, как это показано на рис. 287.

Определим смысл введенных коэффициентов a , A и единицы измерения всех величин.

Так как A — площадь входного импульса (В·с), то

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\text{вых}}^1(t) dt / A$$

определяет, какую долю составляет площадь импульса на выходе от площади импульса на входе. Очевидно, что a — безразмерная величина. Импульсная характеристика системы $K(t)$ измеряется в с^{-1} , а $\tilde{K}(f)$ и $\tilde{K}(f)$ — величины безразмерные.

Следует также обратить внимание на то, что все приведенные выше соотношения справедливы только для линейной инвариантной системы, у которой импульсная характеристика зависит не от моментов времени t и t_1 , а только от их разности $\tau = t - t_1$. В противном случае теоремой о спектре свертки пользоваться нельзя, так как спектральная плотность выходного сигнала не равна произведению спектральной плотности сигнала на входе и комплексного коэффициента передачи. Само понятие комплексного коэффициента передачи в этом случае теряет всякий смысл, поскольку за счет нелинейных эффектов спектр выходного сигнала может быть существенно изменен. Нелинейные эффекты в электрических фильтрах во многих практических случаях могут быть учтены отдельно, что позволяет при анализе электронных схем широко пользоваться спектральными представлениями.

§ 13.2. РЕАКЦИЯ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА НЕКОГЕРЕНТНОЕ ОСВЕЩЕНИЕ

Значительно большие трудности возникают при анализе реакции оптической системы на входное воздействие. Линейность оптических систем обычно не вызывает сомнения, а для некоторых нели-

нейных оптических элементов, таких, как фотопленка, соотношение между входным сигналом (освещенность изображения) и реакцией (потемнение эмульсии) совершенно аналогично соответствующим характеристикам нелинейных элементов электронных схем, так что в обоих случаях могут использоваться близкие приближенные математические методы.

Однако инвариантность линейных оптических систем совершенно неочевидна, так как системы, создающие изображение, редко бывают изопланарны по всему полю, т. е. изображение точечного источника меняет не только свое положение, но и форму по мере того, как этот источник перемещается в пространстве предметов.

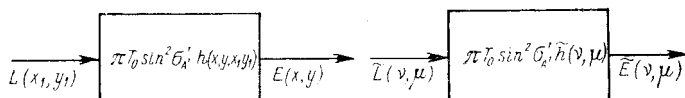


Рис. 289. Оптическая система — преобразователь входного воздействия в реакцию (отклик) на выходе

Имея это в виду, рассмотрим прежде всего случай, когда в поле зрения прибора имеется одна светящаяся точка (дельта-функция) с координатами (X_1, Y_1) .

Освещенность изображения этой точки, имеющего координаты (x_1, y_1) , в идеальной оптической системе, т. е. системе без aberrаций и дифракционного рассеяния, равна бесконечности, тогда как в других точках плоскости изображения она равна нулю.

В реальной оптической системе дифракционное рассеяние и aberrации вызывают размытие изображения светящейся точки по пятну рассеяния, в результате чего освещенность в некоторой произвольной точке (x, y) плоскости изображения оказывается отличной от нуля.

Степень размытия изображения характеризуется функцией рассеяния $h(x, y, x_1, y_1)$, которая представляет собой освещенность, получающуюся в точке (x, y) , когда в точку (x_1, y_1) направлен поток излучения, равный единице.

Так как весь размытый поток должен быть равен исходному падающему потоку, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y, x_1, y_1) dx dy = 1.$$

Поскольку функция рассеяния характеризует реакцию оптической системы на излучение точечного источника, ее можно сравнить с импульсной характеристикой электрического фильтра, описывающей его реакцию на единичный импульс в виде дельта-функции.

Идеальный электрический фильтр, имеющий бесконечно широкую полосу пропускания, воспроизводит единичный импульс без искажений, и напряжение на его выходных зажимах бесконечно велико

в момент действия единичного импульса и равно нулю в другие моменты времени. Реальный фильтр, имеющий ограниченную полосу пропускания, распределяет энергию единичного импульса во времени по закону, зависящему от комплексного коэффициента передачи фильтра.

Учитывая сказанное, рассмотрим распределение освещенности в изображении, когда имеется не одна светящаяся точка, а их совокупность, составляющая объект наблюдения. В этом случае на элементарную площадку $dx_1 dy_1$ вокруг точки (x_1, y_1) падает поток излучения $E(x_1, y_1) dx_1 dy_1$, в точке же (x, y) этот поток создаст освещенность

$$dE = E(x_1, y_1) h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Полная освещенность в точке (x, y) равна сумме освещенностей, возникающих из-за рассеяния потоков, направленных на все элементы $dx_1 dy_1$:

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x_1, y_1) h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Полученное соотношение, связывающее входной и выходной сигналы оптической системы (рис. 289), имеет фундаментальный характер и известно как *интеграл суперпозиции, означающий, что линейная система полностью характеризуется суммой ее откликов на входные воздействия*.

Поскольку освещенность в точке (x_1, y_1) плоскости изображения связана с яркостью соответствующей точки объекта $L(x_1, y_1)$ известным соотношением

$$E(x_1, y_1) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A L(x_1, y_1),$$

где T_0 — спектральный коэффициент пропускания оптической системы прибора и промежуточной среды; σ'_A — задний апертурный угол объектива, то можно найти

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Теперь можно определить двумерный спектр выходного сигнала, т. е. вычислить величину

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\nu, \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy = \\ &= \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) h(x, y, x_1, y_1) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx_1 dy_1 dx dy. \end{aligned}$$

Процесс вычисления можно существенно упростить, введя некоторые ограничения вида функции рассеяния.

Если размытие изображения одинаково во всех точках поля зрения объектива, т. е. качество изображения по полю постоянно,

то освещенность в рассматриваемой точке (x, y) зависит только от расстояния, на котором она находится от точки (x_1, y_1) , куда направлен поток излучения. В этом случае функция рассеяния

$$h(x, y, x_1, y_1) = h(x - x_1, y - y_1)$$

и считают, что оптическая система удовлетворяет условию *пространственной инвариантности*, или *изопланарности*. Она аналогична линейному электрическому фильтру, форма сигнала на выходе которого не зависит от момента прихода входного импульса. Изопланарная оптическая система обладает только сферической аберрацией и дифракционным размытием изображения. Наличие комы и астигматизма делает систему неизопланарной в целом, однако поле зрения всегда можно разделить на зоны, в пределах которых условие изопланарности соблюдается с определенной точностью и функция рассеяния значительно не изменяется (разделение на изопланарные области). В этом случае можно найти

$$E(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(x_1, y_1) h(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1,$$

или

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \iint_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) h(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

Используя теорему о спектре свертки, получим двумерный спектр выходного сигнала оптической системы в виде

$$\tilde{E}(\nu, \mu) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \tilde{L}(\nu, \mu) \tilde{h}(\nu, \mu),$$

где спектральная плотность распределения яркости

$$\tilde{L}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) e^{-j2\pi(\nu x_1 + \mu y_1)} dx_1 dy_1,$$

а спектральная плотность функции рассеяния

$$\tilde{h}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \zeta) e^{-j2\pi(\nu \xi + \mu \zeta)} d\xi d\zeta \left| \begin{array}{l} \xi = x - x_1 \\ \zeta = y - y_1 \end{array} \right.$$

называется *передаточной функцией оптической системы* (оптической передаточной функцией).

Эта функция автоматически нормирована, так как нормировка означает вычисление отношения

$$\tilde{h}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \zeta) e^{-j2\pi(\nu \xi + \mu \zeta)} d\xi d\zeta \bigg/ \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

но ранее уже было определено, что

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = 1.$$

Часто оказывается удобным использовать не двумерные передаточные функции, а соответствующие сечения при заданных значениях одной из координат x или y , преобразование Фурье по которой не осуществляется.

В частности, спектр сечения функции $L(x_1, y_1)$ при заданном y_1

$$\tilde{L}(v, y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) e^{-j2\pi vx_1} dx_1.$$

Спектр сечения функции $E(x, y)$ при заданном y

$$\tilde{E}(v, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}(v, y_1) \tilde{h}(v, y \supseteq y_1) dy_1.$$

Значение освещенности на выходе оптической системы можно найти по ее спектру, используя обратное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(v, \mu) e^{j2\pi(vx + \mu y)} dv d\mu = \\ &= \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}(v, \mu) \tilde{h}(v, \mu) e^{j2\pi(vx + \mu y)} dv d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно, *оптическая система осуществляет двумерное преобразование Фурье над произведением спектров ее функции рассеяния и входного сигнала.*

§ 13.3. РЕАКЦИЯ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА КОГЕРЕНТНОЕ ОСВЕЩЕНИЕ. ВЗАИМОСВЯЗЬ НЕКОГЕРЕНТНОЙ И КОГЕРЕНТНОЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

До сих пор рассматривалась реакция оптической системы на изменение яркости поля излучения в пространстве и во времени. Яркость является энергетической характеристикой излучения, пропорциональной его средней мощности, которая может принимать только положительные значения, что существенно ограничивает возможности выполнения оптической системой различных операций по обработке изображения и улучшению его качества. По существу, оптическая система в условиях некогерентного освещения обеспечивает пространственную фильтрацию изображения главным образом как *фильтр нижних частот*.

Между тем тот факт, что функция рассеяния определяет реакцию оптической системы на излучение точечного источника (т. е. излучение, обладающее идеальной *пространственной когерентностью*), наводит на мысль о возможности избежать усреднения и определить более тонкие свойства оптической системы, учитывающие ее реакцию на излучение с заданным распределением *амплитуд и фаз* световой волны. Естественно, что для этого необходимо прежде всего ввести допущение о *монохроматичности точечного источника излучения*, определяющего его *временную когерентность*.

Распространение оптического излучения, являющегося частным случаем электромагнитного излучения, может быть описано значениями векторов напряженностей электрического и магнитного полей, связанных между собой уравнениями Максвелла. Однако для облегчения дальнейшего изложения можно ввести некоторые существенные упрощения, которые состоят в том, что рассматриваются только *скалярные* амплитуды одной поперечной компоненты электрического или магнитного поля, т. е. световое возмущение в некоторой точке P пространства описывается скалярной функцией $U(P, t)$. Причем в качестве этой функции обычно выбирается *напряженность электрического поля*, так как большинство физических устройств реагируют именно на электрическую составляющую электромагнитного поля.

Для монохроматической волны, следовательно, имеем

$$U(P, t) = U(P) \cos \left[\frac{2\pi c}{\lambda} t + \varphi(P) \right],$$

где $U(P)$, $\varphi(P)$ — амплитуда и фаза волны в точке P ; c — скорость света; λ — длина световой волны.

В дальнейшем целесообразно использовать запись выражения для монохроматической волны в комплексном виде, поэтому можно выразить скалярную функцию $U(P, t)$ как действительную часть комплексной амплитуды поля в точке P

$$\dot{U}(P) = U(P) e^{-i\varphi(P)},$$

т. е. найти

$$U(P, t) = \operatorname{Re} \dot{U}(P) e^{-i2\pi \frac{c}{\lambda} t}.$$

Будем считать, как и прежде, что реакция оптической системы на излучение точечного источника представляет собой функцию рассеяния (или импульсную характеристику), однако, учитывая монохроматичность излучения, исходящего из одной точки, т. е. *полную его когерентность*, назовем эту реакцию *когерентной функцией рассеяния*. Поскольку при когерентном освещении речь идет о передаче сигнала с учетом изменения его фазы, функция, характеризующая реакцию оптической системы, должна быть комплексной. Следовательно, если точка P_1 , имеющая координаты (x_1, y_1) , является изображением точечного монохроматического источника излучения, то в соседней с ней точке P с координатами (x, y) действует комплексная амплитуда светового поля, равная когерентной функции рассеяния $\dot{H}(P, P_1) = \dot{H}(x, y, x_1, y_1)$. Для *протяженного* монохроматического источника излучения, обладающего пространственной когерентностью, при которой абсолютные значения фазы поля в двух произвольных точках будут меняться одинаково, а относительная разность фаз сохраняется, комплексные амплитуды поля в точке (x, y) , определяемые излучением всех точек (x_1, y_1) , будут

складываться, т. е. имеет место суперпозиция колебаний, выражаемая интегралом суперпозиции

$$\dot{U}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x_1, y_1) \dot{H}(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Таким образом, когерентная оптическая система, создающая изображение, линейна относительно комплексной амплитуды поля. При действии на оптическую систему пространственно некогерентного освещения функции рассеяния для каждой точки (x_1, y_1) будут иметь различные статистически независимые значения. Следовательно, в этом случае речь может идти только о сложении средних мощностей или потоков излучения. Поэтому оптическая система при некогерентном освещении линейно отображает не комплексную амплитуду, а поток или интенсивность излучения — величину, пропорциональную квадрату амплитуды электромагнитного колебания (квадрату модуля комплексной амплитуды). Интеграл суперпозиции в этом случае можно применить для освещенности изображения в точках (x, y) и (x_1, y_1) . Соответственно имеем

$$E(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x_1, y_1) h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

где $h(x, y, x_1, y_1)$ — некогерентная функция рассеяния. С точностью до постоянных коэффициентов имеем:

$$E(x_1, y_1) = |\dot{U}(x_1, y_1)|^2;$$

$$h(x, y, x_1, y_1) = |\dot{H}(x, y, x_1, y_1)|^2.$$

Если когерентная оптическая система (оптическая система, работающая при когерентном освещении) обладает свойством инвариантности (изопланарна), то для нее

$$\dot{H}(x, y, x_1, y_1) = \dot{H}(x - x_1, y - y_1),$$

т. е. интеграл суперпозиции есть свертка

$$\dot{U}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x_1, y_1) \dot{H}(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

Следовательно, пространственный спектр выходного сигнала $\dot{U}(x, y)$ равен произведению спектра сигнала на входе $\dot{U}(x_1, y_1)$ и спектра когерентной функции рассеяния $\dot{H}(\xi, \zeta)$, где $\xi = x - x_1$, $\zeta = y - y_1$, а именно:

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(v, \mu) = \tilde{U}_{\text{вх}}(v, \mu) \tilde{H}(v, \mu),$$

где

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x_1, y_1) e^{-j2\pi(vx_1 + \mu y_1)} dx_1 dy_1;$$

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x, y) e^{-j2\pi(vx + \mu y)} dx dy,$$

причем когерентная передаточная функция имеет вид

$$\tilde{H}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}(\xi, \zeta) e^{-j2\pi(\nu\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta.$$

Некогерентная передаточная функция $\tilde{h}(\nu, \mu)$ может быть выражена через $\tilde{H}(\nu, \mu)$ следующим образом. С точностью до постоянных множителей можно найти

$$\tilde{h}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(\xi, \zeta) e^{-j2\pi(\nu\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta = \iint_{-\infty}^{+\infty} |\dot{H}(\xi, \zeta)|^2 e^{-j2\pi(\nu\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta,$$

а так как спектр Фурье квадрата модуля комплексной функции

$$\mathcal{F}\{|\dot{H}(\xi, \zeta)|^2\} = \mathcal{F}\{\dot{H}(\xi, \zeta) \dot{H}^*(\xi, \zeta)\} = \mathcal{F}\{\dot{H}(\xi, \zeta)\} \otimes \mathcal{F}\{\dot{H}^*(\xi, \zeta)\} = \\ = \tilde{H}(\nu, \mu) \otimes \tilde{H}^*(-\nu, -\mu),$$

то

$$\tilde{h}(\nu, \mu) = \tilde{H}(\nu, \mu) \otimes \tilde{H}^*(-\nu, -\mu) = \\ = \iint_{-\infty}^{+\infty} H(f'_x, f'_y) \tilde{H}^*(f'_x + \nu, f'_y + \mu) df'_x df'_y,$$

где f'_x, f'_y — текущие значения пространственных частот вдоль осей декартовых координат x и y , т. е. тех же осей, вдоль которых определены пространственные частоты ν и μ соответственно.

Обозначим $f_x = f'_x + \nu/2$, $f_y = f'_y + \mu/2$ и найдем

$$\tilde{h}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}\left(f_x - \frac{\nu}{2}, f_y - \frac{\mu}{2}\right) \tilde{H}^*\left(f_x + \frac{\nu}{2}, f_y + \frac{\mu}{2}\right) df_x df_y.$$

Поскольку выше была сделана оговорка, что исходные равенства справедливы с точностью до постоянных множителей, нормируем некогерентную передаточную функцию, вычислив отношение ее значений на частотах ν, μ и частотах $\nu = 0, \mu = 0$. Тогда найдем

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = \frac{\tilde{h}(\nu, \mu)}{\tilde{h}(0, 0)} =$$

$$= \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}\left(f_x - \frac{\nu}{2}, f_y - \frac{\mu}{2}\right) \tilde{H}^*\left(f_x + \frac{\nu}{2}, f_y + \frac{\mu}{2}\right) df_x df_y}{\iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}(f_x, f_y) \tilde{H}^*(f_x, f_y) df_x df_y},$$

или

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = \frac{\iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}\left(f_x - \frac{\nu}{2}, f_y - \frac{\mu}{2}\right) \tilde{H}^*\left(f_x + \frac{\nu}{2}, f_y + \frac{\mu}{2}\right) df_x df_y}{\iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{H}(f_x, f_y)|^2 df_x df_y}.$$

Полученное выражение определяет взаимосвязь некогерентной и когерентной передаточных функций.

Глава 14

ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КАК ФИЛЬТР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Оптическая передаточная функция $\tilde{h}(\nu, \mu)$ позволяет установить соответствие между двумерным спектром распределения яркости в плоскости объекта и двумерным спектром распределения освещенности в плоскости изображения:

$$\tilde{E}(\nu, \mu) = \pi T_0 \sin^2 \sigma_A \cdot \tilde{h}(\nu, \mu) \tilde{L}(\nu, \mu).$$

Следовательно, *оптическая система представляет собой линейный фильтр пространственных частот с коэффициентом передачи $\tilde{h}(\nu, \mu)$* .

Модуль функции $\tilde{h}(\nu, \mu)$ называют *двумерной пространственно-частотной характеристикой (ПЧХ) оптической системы**.

Рассмотрим простой пример, позволяющий понять, как оптическая система выполняет функции пространственного фильтра.

Пусть функция рассеяния определяется следующими соотношениями:

$$\tilde{h}(x, y) = \begin{cases} h_0 & \text{при } |x| \leq l/2, \quad |y| \leq l/2; \\ 0 & \text{при } |x| > l/2, \quad |y| > l/2, \end{cases}$$

причем условием нормировки является

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x, y) dx dy = h_0 l^2 = 1.$$

Спектр функции рассеяния — оптическая передаточная функция

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\nu, \mu) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(x, y) dx dy} = \\ &= \frac{h_0 \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-j2\pi\nu x} dx \int_{-l/2}^{+l/2} e^{-j2\pi\mu y} dy}{h_0 l^2} = \frac{\sin(\pi\nu l)}{\pi\nu l} \frac{\sin(\pi\mu l)}{\pi\mu l} = \text{Sinc}(\nu l) \text{Sinc}(\mu l). \end{aligned}$$

Очевидно, что рассматриваемая оптическая система вдоль каждой из осей x и y будет пропускать в основном сигналы с частотами, находящимися в пределах главного максимума функций $\text{Sinc}(\nu l)$ и $\text{Sinc}(\mu l)$, т. е. ограниченными значениями $\nu_0 = \mu_0 = 1/l$.

Поскольку трудно представить практическую реализацию системы с функцией рассеяния квадратной формы при равномерном распределении энергии в ее пределах, в дальнейшем будут рассмотрены более точные аппроксимации.

* См. также § 12.9.

Необходимо отметить, что фильтром пространственных частот может быть не только объектив, но и другие элементы оптической системы — всякого рода диафрагмы, маски и растры. При наличии, например в плоскости изображения диафрагмы, имеющей коэффициент передачи $\tilde{h}_d(\nu, \mu)$, результирующая спектральная плотность освещенности плоскости изображения за диафрагмой может быть найдена в виде произведения

$$\tilde{E}(\nu, \mu) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \tilde{L}(\nu, \mu) \tilde{h}(\nu, \mu) \tilde{h}_d(\nu, \mu).$$

§ 14.1. ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НЕКОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ

Рассмотрим некоторые практические аппроксимации функции рассеяния объектива, позволяющие рассчитать его *оптическую передаточную функцию* (ОПФ) и *пространственно частотную характеристику* (ПЧХ), которую называют также *частотно контрастной характеристикой* (ЧКХ), *модуляционной передаточной функцией* (МПФ) или *функцией передачи модуляции* (ФПМ).

Пятно рассеяния представляет собой равномерно освещенный круг радиусом ρ_0

Функция рассеяния в этом случае аппроксимируется цилиндром, т. е. функцией, обладающей осевой симметрией, и задавать ее целесообразно в цилиндрической системе координат, т. е.

$$h(\rho, \varphi) = h(\rho) = \begin{cases} h_0 & \text{при } \rho \leq \rho_0; \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_0. \end{cases}$$

Нормированный спектр этой функции, определяемый преобразованием Ганкеля,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= \frac{2\pi \int_0^\infty h(\rho) J_0(2\pi x \rho) \rho d\rho}{2\pi \int_0^\infty h(\rho) \rho d\rho} = \frac{h_0 \pi \rho_0^2 \frac{2J_1(z_0)}{z_0}}{h_0 \pi \rho_0^2} = \\ &= \frac{2J_1(z_0)}{z_0} = \frac{2J_1(\pi x_0)}{\pi x_0}, \end{aligned}$$

где $z_0 = 2\pi x_0 \rho_0$; x — пространственная частота.

Вид спектра можно представить себе на основании рис. 285, б, если положить $\tilde{h}(x) = \tilde{U}(x)/\tilde{U}_0$. Первый предел разрешения (переход функции рассеяния через нулевое значение) соответствует частоте $x = 0,61/\rho_0$. Таким образом, при отношении диаметра пятна $2\rho_0$ к периоду синусоидального пространственного рас-

пределения яркости (периоду синусоидальной миры) $\lambda = 1/\kappa$, равном $2\rho_0/\lambda = 1,22$, контраста в изображении не будет. Для пространственной частоты $\kappa > \kappa_0$ спектр $\tilde{h}(\kappa)$ становится отрицательным, что свидетельствует о наличии пространственного фазового сдвига на 180° . Переход через нулевой контраст с последующим резким изменением фазы показан на рис. 290, приведенном в книге О'Нейла «Введение в статистическую оптику». Подобный эффект, известный под названием ложного разрешения, проявляется, если спроектировать миру, состоящую из сходящихся полос, на экран, а затем дефокусировать проектор. Вообще цилиндрическая аппроксимация функции рассеяния пригодна для несфокусированной идеальной оптической системы, когда наблюдение проводится в плоскости, смещенной относительно плоскости наибольшей передаточной функции для этого случая представлено кривой на рис. 290.

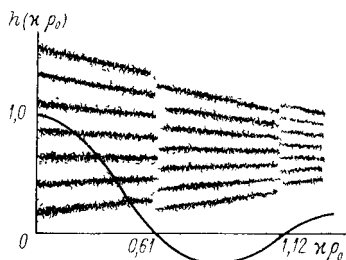


Рис. 290. Изображение миры, состоящей из сходящихся полос, объективом высокого качества («идеальным») в плоскости, смещенной относительно плоскости наибольшей резкости (эффект «ложного разрешения» наблюдается в области с пространственным фазовым сдвигом 180°)

Пространственно-частотная характеристика, представляющая собой модуль оптической передаточной функции, строится обычно для значений частот, находящихся в пределах главного максимума, ее построение может быть выполнено по данным табл. 4.

Пятно рассеяния представляет собой круг, изменение освещенности внутри которого аппроксимируется гауссолой вращения

В этом случае функция рассеяния имеет вид

$$h(\rho, \varphi) = h(\rho) = e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)}.$$

Аналогичное выражение для функции рассеяния широко применяется также при расчете влияния апертуры электронного пучка на спектр сигнала в телевидении.

Нормированный спектр этой осесимметричной функции определяется преобразованием Ганкеля и интегралом Вебера

$$\tilde{h}(\kappa) = \frac{2\pi \int_0^\infty h(\rho) J_0(2\pi\kappa\rho) \rho d\rho}{2\pi \int_0^\infty h(\rho) \rho d\rho} = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} J_0(2\pi\kappa\rho) \rho d\rho}{\int_0^\infty e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} \rho d\rho}.$$

Пользуясь табличным значением интеграла 6.633.2 [25],

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_n(\alpha x) J_n(\beta x) x dx = [1/(2a^2)] e^{-(\alpha^2 + \beta^2)/(4a^2)} I_n(\alpha\beta/2a^2),$$

где J_n — бesselева функция n -го порядка 1-го рода; I_n — бesselева функция n -го порядка чисто мнимого аргумента, при $a^2 = 1/(2\rho_0^2)$; $x = \rho$; $n = 0$; $\alpha = 2\pi\kappa$; $\beta = 0$ найдем

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} J_0(2\pi\kappa\rho) \rho d\rho = \rho_0^2 e^{-(2\pi\kappa\rho_0)^2/2},$$

а если и $\alpha = 0$, то получим

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} \rho d\rho = \rho_0^2,$$

поскольку $J_0(0) = 1$ и $I_0(0) = 1$.

Следовательно,

$$\bar{h}(\kappa) = \frac{\rho_0^2 e^{-(2\pi\kappa\rho_0)^2/2}}{\rho_0^2} = e^{-(2\pi\kappa\rho_0)^2/2} = e^{-2\pi^2 \rho_0^2 \kappa^2},$$

т. е. спектр имеет вид исходной функции рассеяния — гауссоиды вращения.

На частоте $\kappa_e = \sqrt{2}/(2\pi\rho_0) \approx 0,225/\rho_0$ спектральная плотность уменьшается в e раз по отношению к максимальному значению. Спектральная плотность падает до 0,1 при $\kappa_{0,1} = 2,146/(2\pi\rho_0) \approx \approx 0,683/(2\rho_0)$, где $2\rho_0$ — диаметр пятна (на уровне 0,606 от максимального значения).

Подсчитаем относительное значение энергии излучения, заключенной в части пятна рассеяния, имеющей радиус r , для случая, когда распределение освещенности в пятне аппроксимируется гауссоидой вращения. Для этого вычислим коэффициент

$$\eta = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^r h(\rho) \rho d\rho d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} h(\rho) \rho d\rho d\varphi} = \frac{2\pi \int_0^r e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} \rho d\rho}{2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} \rho d\rho}.$$

Так как

$$\int_0^r e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{r^2} e^{-x/(2\rho_0^2)} dx,$$

то, пользуясь табличным значением интеграла 3.351.1 [25],

$$\int_0^u x^n e^{-\mu x} dx = \frac{n!}{\mu^{n+1}} - e^{-\mu u} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \frac{u^k}{\mu^{n-k+1}},$$

который для $n = 0$ имеет вид

$$\int_0^u e^{-x\mu} dx = \frac{1}{\mu} (1 - e^{-\mu u}),$$

при $u = r^2$, $\mu = 1/2\rho_0^2$ найдем

$$\frac{1}{2} \int_0^{r^2} e^{-x/(2\rho_0^2)} dx = \rho_0^2 (1 - e^{-r^2/(2\rho_0^2)}).$$

С другой стороны, $\int_0^\infty e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)} \rho d\rho = \rho_0^2$, следовательно, можно найти

$$\eta = 1 - e^{-r^2/(2\rho_0^2)},$$

откуда

$$\rho_0 = r/\sqrt{2 \ln[1/(1 - \eta)]}.$$

Например, если 90 % энергии, заключенной во всем пятне рассеяния, сосредоточено в пределах окружности, имеющей радиус r , то радиус пятна рассеяния, отсчитанный на уровне $e^{-0.5} \approx 0,606$ от максимального значения, равен $\rho_0 = r/\sqrt{2 \ln[1/(1 - 0,9)]} \approx 0,47r$. В этом случае коэффициент передачи контраста на пространственной частоте $\kappa_e = \sqrt{2}/(2\pi\rho_0) \approx 0,47r$ равен $e^{-1} \approx 0,37$.

Гауссойдой вращения, как известно, описывается круговое двумерное нормальное распределение случайных величин, характеризующееся дисперсией σ^2 и среднеквадратическим отклонением σ ,

закон распределения для которых имеет вид $\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$, где $\rho^2 = x^2 + y^2$. Поэтому радиус ρ_0 пятна рассеяния оптической системы, изменение освещенности внутри которого аппроксимируется гауссойдой вращения, иногда называют среднеквадратическим отклонением и обозначают его σ .

Известная в теории вероятностей центральная предельная теорема, утверждающая, что закон распределения суммы случайных величин неограниченно приближается к нормальному закону, имеет, отмеченный Р. Брейсуэллом, А. Папулисом и Дж. Ллойдом, аналог в теории линейной фильтрации: произведение n ограниченных по полосе пространственно-частотных характеристик отдельных звеньев линейной системы стремится к гауссовой форме, когда n становится большим (практически при $n \geq 4$ достигается весьма точная аппроксимация). Это обстоятельство придает особое значение гауссойде вращения, как универсальному способу описания пространственно-частотных свойств оптико-электронных приборов.

**Изображение создается объективом,
качество которого ограничивается только дифракцией**

В этом случае мы имеем дело с дифракционным диском Эри и нормированная функция рассеяния имеет вид

$$h(\rho, \varphi) = h(\rho) = [2J_1(z)/z]^2 = [2J_1(\pi x)/\pi x]^2,$$

где $z = \pi(D/\lambda)(\rho/f') = \pi x$; D , f' — диаметр входного зрачка и заднее фокусное расстояние объектива; λ — длина волны падающего излучения; $x = (D/\lambda)(\rho/f')$.

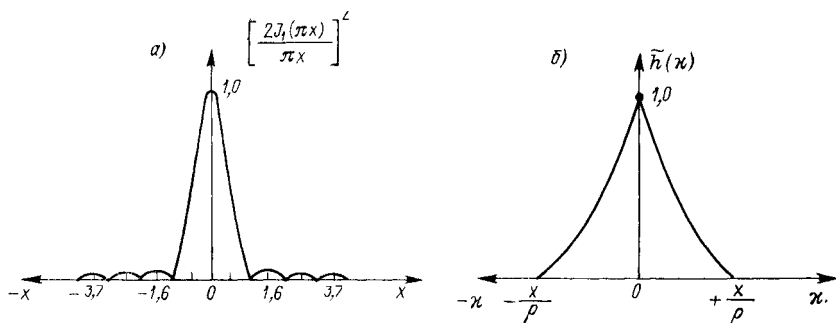


Рис. 291. Дифракционная функция рассеяния (а) и ее спектр (б)

Значения $h(\rho)$ в максимумах и минимумах этой функции даны в табл. 18. Из таблицы видно, что радиус первого темного кольца

$$\rho_0 = 1,22 [\lambda/(D/f')] = 1,22\lambda f'/D.$$

Оптическая передаточная функция для этого случая приводится в уже упомянутой книге О'Нейла. Эта функция обладает осевой симметрией, и ее нормированное значение

$$\tilde{h}(\kappa) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos \frac{\kappa}{x/\rho} - \frac{\kappa}{x/\rho} \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{x/\rho} \right)^2} \right] & \text{при } |\kappa| \leq x/\rho; \\ 0 & \text{при } |\kappa| > x/\rho, \end{cases}$$

Т а б л и ц а 18
Функция рассеяния объектива,
качество которого
ограничивается дифракцией

x	z	$h(\rho)$
0	0	1,0
1,220	3,832	0
1,635	5,136	0,0175
2,233	7,015	0
2,679	8,416	0,0042
3,238	10,172	0
3,699	11,620	0,0016

где

$$x/\rho = D/(\lambda f').$$

Дифракционная функция рассеяния и ее спектр — оптическая передаточная функция — представлены на рис. 291.

Пятно рассеяния имеет квадратную форму, а распределение освещенности в нем аппроксимируется произведением косинусов в n -й степени

По предложению Н. С. Шестова функцию рассеяния можно представить в виде квадратной площадки, но так, что она оказывается очень близкой к функции, имеющей осевую симметрию.

Соответствующее выражение для функции рассеяния в этом случае имеет вид

$$h(x, y) = \begin{cases} h_0^2 \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{x}{\rho_0} \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{y}{\rho_0} & \text{при } |x| \leq \rho_0, |y| \leq \rho_0; \\ 0 & \text{при } |x| > \rho_0, |y| > \rho_0. \end{cases}$$

Т а б л и ц а 19

Функция рассеяния для аппроксимации
распределения освещенности
произведением косинусов

$\frac{x}{\rho_0}$	$\frac{h(x, y)}{h_0^2}$	
	$n = 2$	$n = 8$
0	1,0	1,0
0,1	0,976	0,907
0,2	0,904	0,669
0,3	0,804	0,419
0,4	0,654	0,183
0,5	0,500	0,062
0,6	0,346	0,014
0,7	0,206	$1,8 \cdot 10^{-3}$
0,8	0,095	$8,9 \cdot 10^{-5}$
0,9	0,024	$3,5 \cdot 10^{-7}$
1,0	0	0

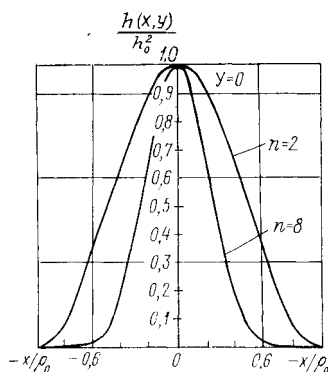


Рис. 292. Функция рассеяния вида $h(x, y)/h_0^2 = \cos^n(\pi x/2\rho_0) \cos^n(\pi y/2\rho_0)$ для $n = 2$ и $n = 8$

Вид этой функции при $y = 0$, $n = 2$ и $n = 8$ показан на рис. 292. Значения ее приведены в табл. 19.

Нормирующий множитель h_0^2 можно вычислить из условия

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx dy = 1,$$

что дает

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dx dy &= h_0^2 \int_{-\rho_0}^{+\rho_0} \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{x}{\rho_0} dx \int_{-\rho_0}^{+\rho_0} \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{y}{\rho_0} dy = \\ &= \left(\frac{4}{\pi} \rho_0 h_0 \int_0^{\pi/2} \cos^n z dz \right)^2 = 1, \end{aligned}$$

где новая переменная

$$z = [\pi/(2\rho_0)] x = [\pi/(2\rho_0)] y,$$

но

$$\begin{aligned} J(n) &= \int_0^{\pi/2} \cos^n z dz = \\ &= \frac{\pi}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(n+1)}{[\Gamma(n/2+1)]^2}, \end{aligned}$$

а значения гамма-функций $\Gamma(n+1)$ и $\Gamma(n/2+1)$ могут быть найдены в таблицах специальных функций.

Т а б л и ц а 20
Значения интеграла $J(n)$
и нормирующих коэффициентов

n	$J(n)$	$\rho_0 h_0$	$(\rho_0 h_0)^2$
1	1,0	0,785	0,617
2	0,785	1,0	1,0
3	0,667	1,18	1,39
4	0,589	1,33	1,78
5	0,534	1,47	2,16
6	0,491	1,6	2,56
7	0,458	1,71	2,94
8	0,429	1,83	3,35
9	0,407	1,93	3,72
10	0,386	2,03	4,14

Следовательно, из условия нормировки имеем

$$(4/\pi) \rho_0 h_0 J(n) = 1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \rho_0 h_0 &= \pi/[4J(n)] = 0,785/J(n); \\ (\rho_0 h_0)^2 &= \pi^2/[16J^2(n)] = 0,617/J^2(n). \end{aligned}$$

Значения $J(n)$, $\rho_0 h_0$ и $(\rho_0 h_0)^2$ приведены в табл. 20.

Степень осевой симметрии функции рассеяния можно оценить, рассматривая контуры ее сечений плоскостью, параллельной плоскости xOy .

Уравнение функции рассеяния в полярных координатах найдем, положив $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; тогда

$$h(\rho, \varphi)/h_0^2 = \cos^n[(\pi/2)(\rho/\rho_0) \cos \varphi] \cos^n[(\pi/2)(\rho/\rho_0) \sin \varphi],$$

причем область существования функции соответствует значениям $\rho \leq \sqrt{2}\rho_0$.

Контур сечения функции рассеяния плоскостью, параллельной плоскости xOy и находящейся на расстоянии H от нее, можно найти из уравнения

$$\cos^n[(\pi/2)(\rho/\rho_0) \cos \varphi] \cos^n[(\pi/2)(\rho/\rho_0) \sin \varphi] = H,$$

где расстояние $H = h(\rho, \varphi)/h_0^2$ выражено в относительных единицах.

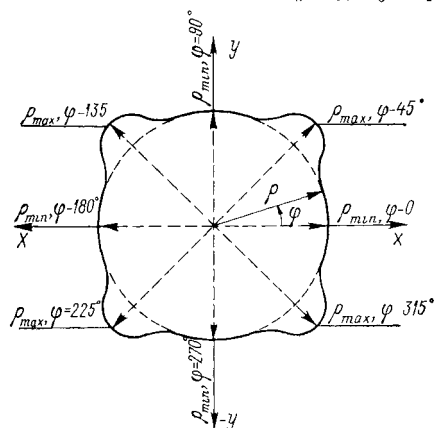


Рис. 293. Осевая асимметрия функции рассеяния вида $h(x, y) = h_0^2 \cos^n \frac{\pi x}{2\rho_0} \cos^n \frac{\pi y}{2\rho_0}$

Следовательно, радиус-вектор ρ для точек, лежащих на контуре сечения функции рассеяния плоскостью, зависит от расстояния H , полярного угла φ и показателя степени n , т. е. $\rho = \rho(H, \varphi, n)$. Осевую асимметрию контура сечения можно оценить разностью двух значений радиус-вектора ρ_{\max} и ρ_{\min} , т. е. найти $\Delta\rho = \rho_{\max} - \rho_{\min}$ или относительную величину $\delta = \Delta\rho/\rho_{\max} = 1 - \rho_{\min}/\rho_{\max}$. Очевидно, что величина δ для данного сечения H зависит только от n , т. е. $\delta = \delta_H(n)$.

На рис. 293 сплошной линией показан контур одного из сечений функции с осевой асимметрией. Так как ρ_{\min} соответствует значениям полярного угла 0, 90, 180, 270, 360° и т. д. (на осях x и y), а ρ_{\max} — углам 45, 135, 225, 315° и т. д. (на биссектрисах координатных углов), то можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} h(\rho_{\min}, 0)/h_0^2 &= H = \cos^n[(\pi/2)(\rho_{\min}/\rho_0)]; \\ h(\rho_{\max}, 45^\circ)/h_0^2 &= H = \cos^{2n}[(\pi/2)(\rho_{\max}/\rho_0)(\sqrt{2}/2)]. \end{aligned}$$

Обозначив $z_{\min} = (\pi/2) (\rho_{\min}/\rho_0)$; $z_{\max} = (\pi/2) (\rho_{\max}/\rho_0) (V\sqrt{2}/2)$, найдем

$$\cos^n z_{\min} = \cos^{2n} z_{\max} = H,$$

откуда

$$z_{\min} = \arccos H^{1/n}; \quad z_{\max} = \arccos H^{1/(2n)}.$$

Так как

$$\rho_{\min} = (2/\pi) \rho_0 z_{\min}; \quad \rho_{\max} = (2\sqrt{2}/\pi) \rho_0 z_{\max},$$

то

$$\delta_H(n) = 1 - \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} = 1 - 0,707 \frac{z_{\min}}{z_{\max}} = 1 - 0,707 \frac{\arccos(H)^{1/n}}{\arccos(H)^{1/(2n)}}.$$

Для $n = 1 \div 10$, $H = 0,1$ и $H = 0,9$ соответствующие значения $\delta_H(n)$ представлены в табл. 21.

Из таблицы, следует что осевая асимметрия уменьшается с ростом показателя степени n и высоты сечения H . Значит, отступление от осевой симметрии существенно только в такой области, на которую приходится лишь небольшая часть энергии излучения. При $n = 2$ относительная осевая асимметрия даже на уровне 0,1 не превышает 10%.

Оптическую передаточную функцию для рассматриваемой аппроксимации можно найти, пользуясь тем, что переменные x и y в функции $h(x, y)$ разделены и, следовательно, ее спектр равен произведению соответствующих одномерных спектров

$$\begin{aligned} \tilde{h}(v, \mu) &= \tilde{h}(v) \tilde{h}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) e^{-j2\pi(vx + \mu y)} dx dy = \\ &= h_0^2 \int_{-\rho_0}^{+\rho_0} \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{x}{\rho_0} e^{-j2\pi vx} dx \int_{-\rho_0}^{+\rho_0} \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{y}{\rho_0} e^{-j2\pi \mu y} dy. \end{aligned}$$

Учитывая возможность перехода к косинус-преобразованию Фурье, найдем:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(v) &= h_0 \int_{-\rho_0}^{+\rho_0} \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{x}{\rho_0} \cos 2\pi vx dx; \\ \tilde{h}(\mu) &= h_0 \int_{-\rho_0}^{+\rho_0} \cos^n \frac{\pi}{2} \frac{y}{\rho_0} \cos 2\pi \mu y dy, \end{aligned}$$

где коэффициент h_0 определяется из рассмотренного выше условия нормировки:

$$h_0 = \pi / [4\rho_0 J(n)].$$

Т а б л и ц а 21

Коэффициенты относительной асимметрии контура сечения функции рассеяния

n	$\delta_H(n), \%$		n	$\delta_H(n), \%$	
	$H=0,1$	$H=0,9$		$H=0,1$	$H=0,9$
1	16,8	0,87	6	3,2	0,16
2	9,4	0,48	7	2,5	0,14
3	6,3	0,31	8	2,3	0,12
4	4,8	0,24	9	2,2	0,11
5	3,8	0,19	10	2,1	0,10

Полученные интегралы могут быть вычислены, так как входящий в них $\cos^n z$ можно представить в виде суммы

$$\cos^n z = \cos nz + C_n^2 \cos^{n-2} z \sin^2 z + C_n^4 \cos^{n-4} z \sin^4 z + \dots + C_n^6 \cos^{n-6} z \sin^6 z + \dots,$$

где C_n^m — биномиальные коэффициенты.

Для $n = 2$ соответствующие расчеты уже были выполнены при определении спектра косинус-квадратного импульса. В этом случае найдем:

$$\tilde{h}(\nu) = h_0 \rho_0 \frac{\text{Sinc}(2\nu\rho_0)}{1 - (2\nu\rho_0)^2}; \quad \tilde{h}(\mu) = h_0 \rho_0 \frac{\text{Sinc}(2\mu\rho_0)}{1 - (2\mu\rho_0)^2}.$$

Так как при $n = 2$ $h_0 \rho_0 = 1$, окончательно получим

$$\tilde{h}(\nu, \mu) = \frac{\text{Sinc}(2\nu\rho_0)}{1 - (2\nu\rho_0)^2} \frac{\text{Sinc}(2\mu\rho_0)}{1 - (2\mu\rho_0)^2}.$$

Сечение спектра можно видеть на рис. 274, учитывая, что на этом рисунке $\tilde{h}(\nu, \mu) = \tilde{\gamma}(\nu)$, $\Delta x = 2\rho_0$. Наименьшая частота, при которой оптическая передаточная функция $\tilde{h}(\nu, \mu)$ обращается в нуль, равна $1/\rho_0$.

ЧКХ оптической системы

Выполним расчет частотно-контрастной характеристики оптической системы в виде зависимости коэффициента передачи контраста от числа штрихов на единицу длины (пространственной частоты) тестовых мир.

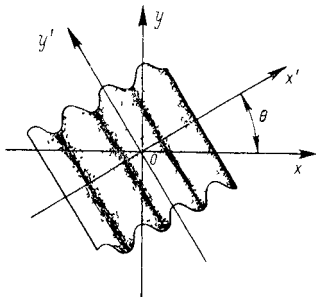


Рис. 294. Произвольное расположение синусоидальной миры относительно осей координат xoy

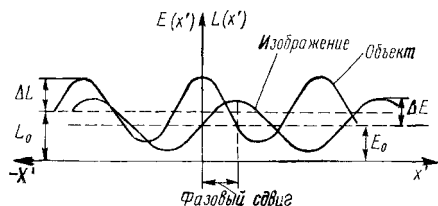


Рис. 295. Распределение яркости синусоидальной миры и освещенности в ее изображении

Контраст на входе (по яркости в плоскости предметов)

$$K_L = (L_{\max} - L_{\min}) / (L_{\max} + L_{\min}).$$

Контраст на выходе (по освещенности в плоскости изображений)

$$K_E = (E_{\max} - E_{\min}) / (E_{\max} + E_{\min}).$$

Следовательно, коэффициент передачи контраста, являющийся функцией пространственной частоты (число штрихов на единицу длины) ν , равен

$$K(\nu) = K_E / K_L.$$

Так как штрихи миры вытянуты по одной из осей, то ЧКХ получается фактически одномерной. Ее можно получить отдельно для двух взаимно перпендикулярных осей, однако последующее вычисление двумерной ЧКХ из двух одномерных возможно только при условии разделения переменных в функции рассеяния исследуемого объекта. Имея это в виду, рассмотрим действие на оптическую систему с функцией рассеяния $h(x, y)$ синусоидальной миры, расположенной в предметной плоскости так, что ее штрихи перпендикулярны оси x . Случай произвольного расположения миры, когда ее штрихи перпендикулярны оси x' , повернутой относительно оси x на угол θ (рис. 294), будет рассмотрен отдельно.

Если яркость фона в плоскости предметов равна L_0 , а модуляция ее синусоидальной мирой равна ΔL (рис. 295), то распределение яркости в точке с координатами x_1, y_1 можно представить в виде

$$L(x_1, y_1) = L(x_1) = L_0 + \Delta L \cos 2\pi v_0 x_1 = L_0 (1 + K_L \cos 2\pi v_0 x_1).$$

где $K_L = \Delta L/L_0 = (L_{\max} - L_{\min})/(L_{\max} + L_{\min})$; $L_{\max} = L_0 + \Delta L$; $L_{\min} = L_0 - \Delta L$; v_0 — пространственная частота миры (число штрихов на единицу длины).

Можно вычислить двумерный пространственный спектр миры

$$\begin{aligned} \tilde{L}(v, \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1) e^{-j2\pi(vx_1 + \mu y_1)} dx_1 dy_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu y_1} dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1) e^{-j2\pi v x_1} dx_1 = \tilde{L}(v) \delta(\mu), \end{aligned}$$

где дельта-функция в начале координат

$$\delta(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu y_1} dy_1,$$

а одномерный спектр яркости

$$\begin{aligned} \tilde{L}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1) e^{-j2\pi v x_1} dx_1 = L_0 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + K_L \cos 2\pi v_0 x_1) e^{-j2\pi v x_1} dx_1 = \\ &= L_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi v x_1} dx_1 + L_0 K_L \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi v_0 x_1 e^{-j2\pi v x_1} dx_1, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi v x_1} dx_1 &= \delta(v); \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi v_0 x_1 e^{-j2\pi v x_1} dx_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{j2\pi v_0 x_1} + e^{-j2\pi v_0 x_1}) e^{-j2\pi v x_1} dx_1 = \\ &= \frac{1}{2} [\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)], \end{aligned}$$

т. е.

$$\tilde{L}(v) = L_0 [\delta(v) + (K_L/2) \delta(v - v_0) + (K_L/2) \delta(v + v_0)].$$

Следовательно,

$$\tilde{L}(v, \mu) = L_0 [\delta(v, \mu) + (K_L/2) \delta(v - v_0, \mu) + (K_L/2) \delta(v + v_0, \mu)],$$

где $\delta(v, \mu) = \delta(v) \delta(\mu)$; $\delta(v \pm v_0, \mu) = \delta(v \pm v_0) \delta(\mu)$.

В связи с тем, что последующий анализ выражений, содержащих дельта-функции, затруднен, перейдем к непосредственному определению амплитудного спектра.

Распределение освещенности в плоскости изображения

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) h(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

При условии, что переменные функции рассеяния разделяются, т. е. $h(x - x_1, y - y_1) = h(x - x_1) h(y - y_1)$, а $L(x_1, y_1) = L(x_1)$, найдем

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} h(y - y_1) dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1) h(x - x_1) dx_1.$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} h(y - y_1) dy_1 = 1$, то

$$\begin{aligned} E(x, y) &= E(x) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1) h(x - x_1) dx_1 = \\ &= \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A L_0 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x_1) dx_1 + K_L \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi v_0 x_1 h(x - x_1) dx_1 \right]. \end{aligned}$$

Вводя новую переменную $\xi = x - x_1$ и вновь учитывая, что

$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x_1) dx_1 = 1$, найдем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi v_0 x_1 h(x - x_1) dx_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cos 2\pi v_0 (x - \xi) d\xi = \\ &= \cos 2\pi v_0 x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cos 2\pi v_0 \xi d\xi + \sin 2\pi v_0 x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \sin 2\pi v_0 \xi d\xi. \end{aligned}$$

Так как одномерная оптическая передаточная функция для частоты v_0

$$\begin{aligned} \bar{h}(v_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{-2j\pi v_0 \xi} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cos 2\pi v_0 \xi d\xi - \\ &- j \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \sin 2\pi v_0 \xi d\xi = h_c(v_0) - jh_s(v_0), \end{aligned}$$

где косинус- и синус-составляющие

$$h_c(v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cos 2\pi v_0 \xi d\xi; \quad h_s(v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \sin 2\pi v_0 \xi d\xi,$$

то

$$E(x, y) = E(x) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A L_0 \{1 + K_L h_c(v_0) \cos 2\pi v_0 x + \\ + K_L h_s(v_0) \sin 2\pi v_0 x\}.$$

Поскольку

$$\tilde{h}_c(v_0) = |\tilde{h}(v_0)| \cos \varphi(v_0),$$

$$\tilde{h}_s(v_0) = |\tilde{h}(v_0)| \sin \varphi(v_0),$$

где

$$|\tilde{h}(v_0)| = \sqrt{h_c^2 + h_s^2}; \quad \varphi(v_0) = \arctg(h_s/h_c),$$

можно найти

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A L_0 \{1 + K_L |\tilde{h}(v_0)| \cos [2\pi v_0 x - \varphi(v_0)]\},$$

где

$$\cos [2\pi v_0 x - \varphi(v_0)] = \cos \varphi(v_0) \cos 2\pi v_0 x + \\ + \sin \varphi(v_0) \sin 2\pi v_0 x,$$

или

$$E(x, y) = E_0 \{1 + K_E \cos [2\pi v_0 x - \varphi(v_0)]\},$$

причем

$$E_0 = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A L_0;$$

$$K_E = \Delta E/E_0 = (E_{\max} - E_{\min})/(E_{\max} + E_{\min}) = K_L |\tilde{h}(v_0)|;$$

$$E_{\max} = E_0 + \Delta E; \quad E_{\min} = E_0 - \Delta E.$$

Таким образом, изображением синусоидальной волны всегда будет также синусоидальная волна, но с другими амплитудой и фазой (рис. 295).

Искомый коэффициент передачи контраста на частоте $\nu = \nu_0$ равен модулю оптической передаточной функции

$$K(\nu) = K_E/K_L = |\tilde{h}(\nu)|.$$

Зависимость $K(\nu)$ от ν и называют *частотно-контрастной характеристикой*.

Для произвольного расположения миры (см рис. 294) следует считать, что все полученные выше соотношения относятся к повернутой на угол θ системе координат x', y' , т. е.

$$E(x', y') = E_0 \{1 + K_E \cos [2\pi v_0 x' - \varphi(v_0)]\}.$$

Старые и новые координаты связаны соотношениями:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta; \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta;$$

следовательно,

$$E(x', y') = E(x, y, \theta);$$

$$E(x, y, \theta) = E_0 \{1 + K_E \cos [2\pi v_0 (x \cos \theta + y \sin \theta) - \varphi(v_0)]\}.$$

Яркость мира может быть распределена не по синусоидальному закону, а представлять собой тест-объект, в котором полосы и промежутки равного размера излучают как черные тела с различной температурой T_{\max} и T_{\min} , т. е. имеет место последовательность прямоугольных импульсов яркости на входе системы. В этом случае контраст освещенности на частоте первой гармоники $\nu = \nu_1$ равен

$$K_E(\nu_1) = K_L \frac{2}{\pi} |\tilde{h}(\nu_1)|,$$

поскольку амплитуда первой гармоники, действующей на входе периодической последовательности прямоугольных импульсов единичной амплитуды, равна $2/\pi$, а модуль оптической передаточной функции для частоты ν_1 определяет степень уменьшения амплитуды первой гармоники входного сигнала при его прохождении через оптическую систему.

§ 14.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ДИАФРАГМ, РАСТРОВ И ПРИЕМНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ НЕКОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ

В оптическую систему оптико-электронного прибора кроме объектива, создающего изображение поля излучения в картинной плоскости, обычно входят еще некоторые элементы, обеспечивающие обработку полученного изображения и преобразование пространственного распределения освещенности в электрический сигнал, изменяющийся во времени. К этим элементам следует отнести всякого рода диафрагмы, растры и приемник излучения.

Понятие передаточной функции, заимствованное из теории электрических фильтров, хорошо применимо к описанию свойств объектива, а спектр результирующего распределения освещенности на выходе оптической системы можно определить непосредственно путем вычисления произведения спектров всех входящих в нее элементов. Поэтому многие исследователи стали искать пути пространственно-частотного описания свойств этих элементов.

Относительно приемника излучения и диафрагм эти поиски достаточно быстро привели к желаемым результатам, и соответствующие пространственно-частотные характеристики широко используются при расчете спектра сигнала на выходе оптико-электронного прибора.

Что же касается растров, то, несмотря на большое количество отечественных и иностранных работ, посвященных этому вопросу, почти все реализованные растровые конструкции созданы на основе опыта разработчика и его интуитивных соображений, а не в результате расчетов математических моделей, которые используются в основном для анализа предложенных растров, а не для синтеза их оптимальной формы. Это связано, в частности, с тем, что обычные предпосылки относительно законов распределения сигнала и шума неприменимы к оптической фильтрации. Кроме того, используемая для обработки сигнала электронная схема предъявляет жесткие требования к выбору раstra и типа модуляции, которую он создает.

Существующая ситуация следующим образом характеризуется в работе [5]: «Растры конструируются в основном теми, кто длительное время использует или конструирует их и для кого процесс конструирования является в большей степени автоматическим, чем логическим. В настоящее время накоплено столько экспериментальных данных, что для первого приближения можно опираться на свой или чужой опыт и обойти скучные стороны конструирования пространственного фильтра, а для лучшего приближения предлагаемые методы расчета непригодны».

Нельзя согласиться в полной мере со столь категорическим осуждением теории, тем более что в последнее время появился ряд работ, и прежде всего монография В. Л. Левшина [69], в которых развита общая теория растров на базе обобщенного частотного метода. В этих работах приведены преобразования Фурье для большого числа разнообразных растров, разработаны методы расчета для сдвигов, вращений раstra и т. д.

В дальнейшем мы вернемся к рассмотрению некоторых теоретических основ конструирования растров, однако желающим серьезно заняться представлением растровых систем с помощью передаточных функций рекомендуем обратиться к специальной литературе.

Практическое инженерное значение в настоящее время имеет не *пространственно-частотное*, а *пространственно-временное* описание процесса растровой модуляции, когда в результате расчета временных спектров сигналов, подвергнутых модуляции, выявляются составляющие спектра, несущие информацию об изображении. Такой подход в полной мере развит в гл. 8 этой книги.

Оптическую передаточную функцию приемника излучения рассчитывают обычно следующим образом. Принимают, что фоточувствительный слой или наложенная на него диафрагма поля зрения совмещены с плоскостью изображения. Инерционность приемника учитывают при анализе характеристик электронного тракта, а при расчете пространственной передаточной функции приемник считают безынерционным. Изменение крутизны (чувствительности) приемника в пределах площади фотослоя в первом приближении не учитывают, т. е. предполагают, что зависимость крутизны от пространственных координат связана лишь с конечными размерами фотослоя. Следовательно, спектр Фурье (оптическую передаточную функцию) приемника излучения определяют обычным путем:

$$\tilde{S}(v, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) e^{-j2\pi(vx + \mu y)} dx dy,$$

где $S(x, y)$ — распределение дифференциальной крутизны приемника по координатам x, y .

Переменные x, y в функции $S(x, y)$ часто разделяются, т. е. эта функция может быть представлена в виде произведения функций, зависящих только от x и только от y

$$S(x, y) = S_0 S(x) S(y).$$

Например, для прямоугольной площадки:

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq a/2; \\ 0 & \text{при } |x| > a/2; \end{cases}$$

$$S(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq b/2; \\ 0 & \text{при } |y| > b/2, \end{cases}$$

где a и b — размеры чувствительной площадки.

Диафрагма, закрывающая приемник излучения, может быть круглой. В этом случае переменные не разделяются, т. е.

$$S(x, y) = S_0 S(x, y),$$

причем

$$S(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x^2 + y^2 \leq r^2; \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Расчет спектров во всех этих случаях не имеет каких-либо особенностей по сравнению с расчетом обычных двумерных спектров и их сечений. Некоторые конкретные примеры расчета будут рассмотрены ниже.

Расчет оптической передаточной функции диафрагм также не требует какого-либо нового подхода, если иметь в виду, что распределение коэффициента пропускания диафрагмы по ее площади $T(x, y)$ аналогично функции распределения чувствительности приемника излучения по его чувствительной площадке.

§ 14.3. ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Когерентная функция рассеяния определяет комплексную амплитуду излучения в точке (x, y) пространства изображений при действии в точке (X_1, Y_1) пространства предметов точечного монохроматического источника излучения.

Вычислить когерентную функцию рассеяния можно на основании соотношений *скалярной теории дифракции*. Эта теория достаточно подробно излагается в различных книгах по физике и теории поля. Принципы использования преобразований Фурье в скалярной теории дифракции рассматриваются в классических работах А. Марешаля, М. Франсона, О'Нейла, Дж. Гудмена, а также в монографиях советских авторов Г. С. Кондратенкова, О. Н. Литвиненко, Г. М. Мосягина, В. Б. Немтинова и других. Все эти труды вошли в список литературы и достаточно доступны, что позволяет ограничиться изложением лишь основных результатов.

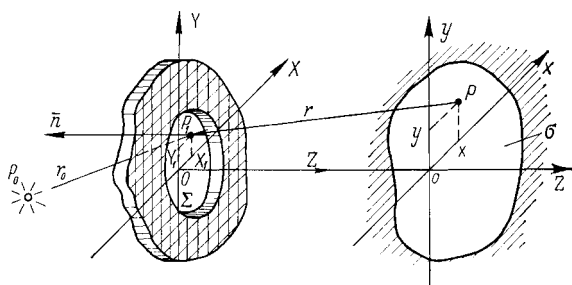
Вначале рассмотрим простейшую оптическую систему, представляющую собой отверстие в непрозрачном экране, освещаемое точечным источником монохроматического излучения, и свободное пространство за экраном (рис. 296). Плоскость экрана совпадает с плоскостью (X, Y) декартовой системы координат (X, Y, Z) , а плоскость наблюдения, находящаяся на расстоянии Z , — с плоскостью (x, y)

системы координат (x, y, z) , расположенной так, что координата $Z = -z$, а плоскости (X, Y) и (x, y) параллельны друг другу.

Дифракция, т. е. отклонение световых лучей от прямой линии, не связанное с их отражением или преломлением, приводит к тому, что переход от света к тени в плоскости наблюдения (x, y) не имеет четкой границы. Это явление впервые описал Гримальди в 1665 г. Его наблюдения за распределением освещенности в плоскости за экраном с отверстием показали, что переход от света к тени происходит не резко, а постепенно. Только в 1678 г. явление дифракции было удовлетворительно объяснено основоположником волновой теории света Гюйгенсом, который предложил рассматривать каждую точку распространяющейся в пространстве световой волны как источник вторичного волнового возмущения, что позволяло ему

Рис. 296. Распространение монохроматической волны через отверстие в экране и свободное пространство — простейшую оптическую систему:

P_0 — точечный источник монохроматического излучения; P_1 — воображаемый вторичный источник излучения Гюйгенса; P — точка наблюдения; Σ — площадь отверстия в бесконечном непрозрачном экране; o — область наблюдения дифрагированной волны



находить очередное новое положение фронта волны (например, за отверстием в экране) путем построения огибающей вторичных сферических волн. Дальнейшее развитие теории дифракции связано главным образом с именами Юнга и Френеля, выполнивших свои работы уже после 1800 года.

Следует, однако, заметить, что сторонники выдвинутой Ньютоном в конце XVII в. *корпускулярной теории* знали о явлении дифракции света, но не могли найти ему правильного объяснения. В частности, выдающийся французский революционер Жан Поль Марат, который был известен также как ученый (Эдинбургский университет в 1775 г. присвоил ему степень доктора медицины, его лабораторию по поводу исследований электричества посещал Франклин, состоявший с ним в переписке, и т. д.), в 1780 г. и 1784 г. опубликовал свои работы по оптике, в которых описал опыты со сложными дифракционными картинками, которые он пытался объяснить, приписывая «световым шарикам» свойства вещественных тел, в том числе способность притягиваться другими телами.

Между эпохой Ньютона и эпохой Юнга и Френеля оптика не претерпела существенного развития, так как лишь немногие наиболее прозорливые ученые разделяли и развивали волновые воззрения Гюйгенса. В их числе были и наши соотечественники Л. Эйлер и М. В. Ломоносов. Еще в 1756 г. М. В. Ломоносов в своем «Слове

о происхождении света» рассматривает свет как распространение и передачу колебательного волнового процесса в эфире.

Тем не менее только исследования интерференции света Юнгом в 1802 г. и работы Френеля 1818 г., в которых он применил законы интерференции к вторичным волнам Гюйгенса, позволили сделать существенный шаг в области расчета распределения интенсивности света в дифракционных картинах. Последующие работы Кирхгофа (1882 г.), Пуанкаре (1892 г.), Релея и Зоммерфельда (1894 г.) создали скалярную теорию дифракции в ее современном виде.

Основные выводы скалярной теории дифракции приводят к тому, что результирующее поле в точке наблюдения Р (рис. 296) вычисляется путем сложения сферических волн, излучаемых каждой точкой отверстия в экране Σ . Комплексная амплитуда результирующего поля $\dot{U}(P)$, регистрируемая в точке Р области σ плоскости наблюдения (x, y) , определяется выражением

$$\dot{U}(P) = \iint_{\Sigma} \dot{U}'(P_1) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma,$$

где $\dot{U}'(P_1)$ — комплексная амплитуда воображаемых точечных источников — сферических волн Гюйгенса, действующих в отверстии экрана (в точке P_1); e^{ikr}/r — уравнение сферической волны единичной амплитуды, распространяющейся в свободном пространстве из точки P_1 в точку Р, называемое *функцией Грина свободного пространства*; Σ — площадь отверстия в бесконечном непрозрачном экране; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; kr — фаза волны на расстоянии r от источника излучения; $1/r$ — амплитуда волны на расстоянии r от источника излучения единичной амплитуды.

Комплексная амплитуда $\dot{U}'(P_1)$ отличается от *истинной* комплексной амплитуды волнового поля в той же точке $\dot{U}(P_1)$, определяемой излучением точечного монохроматического источника, расположенного в точке P_0 и имеющего интенсивность U_0 , поскольку

$$\dot{U}(P_1) = U_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0},$$

а для вычисления верного значения результирующего поля $\dot{U}(P)$ в соответствии с выводами скалярной теории дифракции необходимо, чтобы

$$\dot{U}'(P_1) = \dot{U}(P_1) \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r})}{j\lambda},$$

где \vec{n} — вектор нормали к плоскости отверстия в экране в точке P_1 ; \vec{r} — радиус-вектор точки наблюдения; (\vec{n}, \vec{r}) — угол между нормалью и направлением наблюдения; λ — длина волны; $j = \sqrt{-1}$.

Отличие $\dot{U}'(P_1)$ от $\dot{U}(P_1)$ состоит, следовательно, в том, что амплитуда колебания *воображаемого* источника Гюйгенса $\dot{U}'(P_1)$ отличается от амплитуды *истинной* волны $\dot{U}(P_1)$ множителем λ^{-1} .

Кроме того, эта амплитуда уменьшена за счет коэффициента наклона $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \leq 1$, т. е. каждый воображаемый вторичный источник обладает направленностью излучения, а фаза его излучения в точке P_1 отличается от фазы истинной волны на 90° (действительно, $1/j = -j$, комплексное число $a - jb = \rho e^{-j\varphi}$, определяемая им фаза $\varphi = \operatorname{arctg} b/a$ при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi = 90^\circ$).

Таким образом, выражение для комплексной амплитуды поля в точке P имеет вид

$$\dot{U}(P) = \iint_{\Sigma} \dot{U}(P_1) \frac{e^{ikr}}{j\lambda r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) d\Sigma.$$

Переходя к декартовым координатам, найдем

$$\dot{U}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) \frac{e^{ikr}}{j\lambda r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) dX_1 dY_1,$$

где $\dot{U}(x, y)$ — комплексная амплитуда поля в плоскости наблюдения, расположенной на расстоянии Z от плоскости экрана; $\dot{U}(X_1, Y_1)$ — истинное значение комплексной амплитуды поля в от-
верстии экрана;

$$r = \sqrt{Z^2 + (x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2},$$

пределы интегрирования приняты равными $\pm\infty$, поскольку предполагается, что в плоскости экрана вне площади отверстия Σ комплексная амплитуда поля $\dot{U}(X_1, Y_1) = 0$.

Обозначив

$$\dot{H}(x, y, X_1, Y_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}),$$

получим интеграл суперпозиции

$$\dot{U}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) dX_1 dY_1,$$

определяющий поле в точке наблюдения, как сумму комплексных истинных амплитуд волны в отверстии экрана, эффект действия каждой из которых при суммировании учитывается весовым коэффициентом $\dot{H}(x, y, X_1, Y_1)$.

Из структуры интеграла суперпозиции формально следует, что весовая функция $\dot{H}(x, y, X_1, Y_1)$ представляет собой когерентную функцию рассеяния свободного пространства, расположенного за экраном, поскольку она определяет комплексную амплитуду излучения в точке (x, y) пространства изображений при действии в точке (X_1, Y_1) пространства предметов (отверстия в экране) точечного монохроматического источника излучения. Если же подвергнуть анализу состав функции $\dot{H}(x, y, X_1, Y_1)$, то, поскольку ее вид

учитывает положения скалярной теории дифракции (через коэффициент $\cos(\vec{n}, \vec{r})/(j\lambda)$ и ограниченную область существования функции $\dot{U}(X_1, Y_1)$ в плоскости экрана), можно сделать вывод, что функция $\dot{H}(x, y, X_1, Y_1)$ в данном случае представляет собой *функцию рассеяния простейшей оптической системы*, состоящей из отверстия в экране и свободного пространства за экраном.

Эту простейшую оптическую систему можно считать изопланарной, поскольку ее функция рассеяния зависит только от разности координат рассматриваемых точек (x, y) и (X_1, Y_1) (единственная функция, входящая в выражение для $\dot{H}(x, y, X_1, Y_1)$, — расстояние $r = Z \sqrt{1 + \left[\frac{(x-X_1)}{Z}\right]^2 + \left[\frac{(y-Y_1)}{Z}\right]^2}$, следовательно,

$$\dot{H}(x, y, X_1, Y_1) = \dot{H}(x - X_1, y - Y_1) = \dot{H}(\xi, \zeta),$$

где $\xi = x - X_1$; $\zeta = y - Y_1$.

Применяя к функции $\dot{H}(\xi, \zeta)$ преобразование Фурье, можно найти передаточную функцию

$$\tilde{H}(\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}(\xi, \zeta) e^{-j2\pi(\nu\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta,$$

т. е. рассматривать *отверстие в экране и свободное пространство за экраном как линейный фильтр пространственных частот*.

Спектр сигнала на выходе фильтра

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x, y) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy$$

определяется произведением спектра входного сигнала

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) e^{-j2\pi(\nu X_1 + \mu Y_1)} dX_1 dY_1,$$

и передаточной функции $\tilde{H}(\nu, \mu)$, которую называют *передаточной функцией свободного пространства*, т. е.

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(\nu, \mu) = \tilde{H}(\nu, \mu) \tilde{U}_{\text{вх}}(\nu, \mu).$$

Передаточная функция свободного пространства характеризует явление распространения электромагнитного излучения от плоскости (X, Y) к плоскости (x, y) . Она может быть представлена следующей формулой, полученной путем решения скалярного волнового уравнения с помощью преобразований Фурье

$$\tilde{H}(\nu, \mu) = e^{jkZ \sqrt{1 - \lambda^2(\nu^2 + \mu^2)}}$$

или

$$\tilde{H}(\kappa) = e^{jkZ \sqrt{1 - (\lambda\kappa)^2}},$$

где

$$\kappa = \sqrt{\nu^2 + \mu^2},$$

откуда следует, что для пространственных частот, удовлетворяющих неравенству $v^2 + \mu^2 \leq 1/\lambda^2$, модуль передаточной функции $|\tilde{H}(v, \mu)| = 1$, а ее аргумент $\varphi = kZ \sqrt{1 - \lambda^2(v^2 + \mu^2)}$. В пределах полосы пропускания фильтра, ограниченной частотой λ^{-1} , имеют место фазовые сдвиги, зависящие от частоты $\kappa = \sqrt{v^2 + \mu^2}$. За пределами полосы пропускания, где $v^2 + \mu^2 > 1/\lambda^2$ или $\kappa > \lambda^{-1}$, происходит быстрое затухание волн по экспоненциальному закону

$$e^{kZ \sqrt{\lambda^2(v^2 + \mu^2) - 1}}.$$

Поэтому вся информация, заключенная в сигналах с пространственной частотой, превышающей λ^{-1} , практически не передается при распространении света в свободном пространстве. *Минимальный период изменения сигнала должен быть гораздо больше длины световой волны, если необходимо передать информацию о наличии таких изменений на расстояние, превышающее значение нескольких длин волн.*

Рассмотрим решение скалярного волнового уравнения с помощью преобразований Фурье.

Комплексная амплитуда \dot{U} любого монохроматического оптического возмущения, распространяющегося в свободном пространстве, должна подчиняться скалярному волновому уравнению, которое называется уравнением Гельмгольца, по имени ученого, впервые использовавшего его в акустике,

$$\nabla^2 \dot{U} + k^2 \dot{U} = 0,$$

где оператор Лапласа набла квадрат $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Пусть в произвольной точке плоскости (x, y) действует комплексная амплитуда $\dot{U}(x, y, 0)$ светового монохроматического поля, которое распространяется в положительном направлении оси Oz . Это поле (выходной сигнал) создается произвольной системой монохроматических источников излучения. Нас интересует расчет результирующего поля (выходного сигнала) в точке с координатами (x, y, z) , т. е. $\dot{U}(x, y, z)$. Уравнение Гельмгольца для этого поля имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{U}(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{U}(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{U}(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 \dot{U}(x, y, z) = 0.$$

Умножим волновое уравнение на комплексную экспоненциальную функцию $e^{j2\pi(vx + \mu y)}$, которую можно рассматривать как плоскую волну единичной амплитуды с направляющими косинусами α, β, γ , так как уравнение такой волны есть $e^{j k(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$, причем $\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}$, если $\alpha = \lambda v$, $\beta = \lambda \mu$, $\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2(v^2 + \mu^2)}$. После умножения проинтегрируем волновое уравнение по x и y в бесконечных пределах. Вычислим вначале интеграл

$$\begin{aligned} J_1 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \dot{U}(x, y, z)}{\partial x^2} e^{-j2\pi(vx + \mu y)} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\mu y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jvx} \frac{\partial^2 \dot{U}(x, y, z)}{\partial x^2} dx \right] dy. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, найдем

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi\mu y} \left[e^{-j2\pi vx} \frac{\partial \dot{U}(x, y, z)}{\partial x} \right]_{x=-\infty}^{\infty} + \\ + j2\pi v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi vx} \frac{\partial \dot{U}(x, y, z)}{\partial x} dx dy.$$

Считая, что $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \dot{U}(x, y, z)}{\partial x} = 0$, получим

$$J_1 = j2\pi v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi vx} \frac{\partial \dot{U}(x, y, z)}{\partial x} dx \right] dy = \\ = j2\pi v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi vx} d\dot{U}(x, y, z) \right] dy.$$

Повторно интегрируя по частям, будем иметь

$$J_1 = j2\pi v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\mu y} \left[e^{-j2\pi vx} \dot{U}(x, y, z) \right]_{x=-\infty}^{\infty} + \\ + j2\pi v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi vx} \dot{U}(x, y, z) dx dy$$

Вновь полагая $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \dot{U}(x, y, z) = 0$, найдем

$$J_1 = -(2\pi v)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x, y, z) e^{-j2\pi(vx+\mu y)} dx dy.$$

Так как спектр выходного сигнала

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(v, \mu) = \tilde{U}(v, \mu, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x, y, z) e^{-j2\pi(vx+\mu y)} dx dy,$$

то $J_1 = -(2\pi v)^2 \tilde{U}(v, \mu, z)$.

Аналогичным образом можно найти

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \dot{U}(x, y, z)}{\partial y^2} e^{-j2\pi(vx+\mu y)} dx dy = -(2\pi\mu)^2 \tilde{U}(v, \mu, z);$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \dot{U}(x, y, z)}{dz^2} e^{-j2\pi(vx+\mu y)} dx dy = \frac{d^2 \tilde{U}(v, \mu, z)}{dz^2};$$

$$J_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \dot{U}(x, y, z) e^{-j2\pi(vx+\mu y)} dx dy = k^2 \tilde{U}(v, \mu, z).$$

Тогда волновое уравнение примет вид

$$-(2\pi\nu)^2\tilde{U}(\nu, \mu, z) - (2\pi\mu)^2\tilde{U}(\nu, \mu, z) + \frac{d^2\tilde{U}(\nu, \mu, z)}{dz^2} + k^2\tilde{U}(\nu, \mu, z) = 0$$

или

$$\frac{d^2\tilde{U}(\nu, \mu, z)}{dz^2} + k^2[1 - \lambda^2(\nu^2 + \mu^2)]\tilde{U}(\nu, \mu, z) = 0.$$

Общим решением полученного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами является выражение

$$\tilde{U}(\nu, \mu, z) = c_1 e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2(\nu^2+\mu^2)}} + c_2 e^{-ikz\sqrt{1-\lambda^2(\nu^2+\mu^2)}},$$

где c_1, c_2 — постоянные интегрирования, не зависящие от z , определяемые граничными условиями.

Первый член общего решения соответствует прямой волне, а второй — обратной. Для случая распространения света в однородной среде второй член равен нулю. Следовательно,

$$\tilde{U}(\nu, \mu, z) = c_1 e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2(\nu^2+\mu^2)}}.$$

При $z = 0$ имеем

$$\tilde{U}(\nu, \mu, 0) = c_1.$$

но это спектр входного сигнала

$$\tilde{U}(\nu, \mu, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(x, y, 0) e^{-j2\pi(\nu x + \mu y)} dx dy.$$

Таким образом, окончательно получим:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\nu, \mu, z) &= \tilde{U}(\nu, \mu, 0) e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2(\nu^2+\mu^2)}}, \\ \tilde{H}(\nu, \mu) &= e^{ikz\sqrt{1-\lambda^2(\nu^2+\mu^2)}}.\end{aligned}$$

Для рассматриваемого выше взаимного расположения различных систем координат (см. рис. 296), когда пространство предметов описывается в декартовых прямоугольных координатах (X, Y, Z) , а пространство изображений — в координатах (x, y, z) , образованных параллельным переносом системы координат пространства предметов вдоль положительного направления оси OZ на расстояние Z , соответствующие выражения для спектров сигналов и передаточной функции свободного пространства имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{вх}(\nu, \mu) &= \tilde{U}(\nu, \mu, 0), \\ \tilde{U}_{вых}(\nu, \mu) &= \tilde{U}(\nu, \mu, Z), \\ \tilde{U}_{вых}(\nu, \mu) &= \tilde{U}_{вх}(\nu, \mu) e^{ikZ\sqrt{1-\lambda^2(\nu^2+\mu^2)}}, \\ \tilde{H}(\nu, \mu) &= e^{ikZ\sqrt{1-\lambda^2(\nu^2+\mu^2)}},\end{aligned}$$

или

$$\tilde{H}(\kappa) = e^{ikZ\sqrt{1-(\lambda\kappa)^2}},$$

где $\kappa = \sqrt{\nu^2 + \mu^2}$.

Исходное выражение для когерентной функции рассеяния $\dot{H}(x, y, X_1, Y_1)$ можно упростить, последовательно используя следующие допущения.

1. С ошибкой, не превышающей 5%, можно положить $\cos(\vec{n}, \vec{r}) = 1$, что справедливо для значений угла $(\vec{n}, \vec{r}) \leq 18^\circ$, так как $\cos 18^\circ = 0,95$. Не увеличивая ошибку, можно заменить r в знаменателе уравнения сферической волны e^{ikr}/r на Z . В показателе степени числителя этого сделать нельзя, так как малые изменения Δr приводят к большим сдвигам фазы $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda) \Delta r$, т. е. к значительным фазовым искажениям.

С учетом сделанных замечаний найдем

$$\dot{H}(x, y, X_1, Y_1) = \dot{H}(x - X_1, y - Y_1) = \dot{H}(\xi, \zeta) = \frac{1}{j\lambda Z} e^{jkZ} \sqrt{1 + \frac{(\xi^2 + \zeta^2)}{Z^2}},$$

$$\text{или } \dot{H}(\rho) = \frac{1}{j\lambda Z} e^{jkZ} \sqrt{1 + (\rho/Z)^2},$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \zeta^2$.

Запишем уравнения, которые с точностью, соответствующей рассмотренным допущениям, описывают явление распространения поля от плоскости (X, Y) к плоскости (x, y) :

$$\dot{U}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_{\text{вх}}(\nu, \mu) \tilde{H}(\nu, \mu) e^{j2\pi(\nu x + \mu y)} d\nu d\mu;$$

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) e^{-j2\pi(\nu X_1 + \mu Y_1)} dX_1 dY_1;$$

$$\tilde{H}(\nu, \mu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}(\xi, \zeta) e^{-j2\pi(\nu \xi + \mu \zeta)} d\xi d\zeta;$$

$$\dot{H}(\xi, \zeta) = \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{jkZ} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{Z^2}\right)(\xi^2 + \zeta^2)};$$

$$\tilde{H}(\nu, \mu) = e^{jkZ} \sqrt{1 - \lambda^2(\nu^2 + \mu^2)};$$

$$0 < Z < \infty.$$

2. Рассмотрим *приближение Френеля* как следующий шаг упрощения вида когерентной функции рассеяния. Это приближение исходит из возможности учитывать только два первых члена ряда при разложении функции типа $\sqrt{1+b}$ в ряд Тейлора

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{8} + \dots$$

Для $b = \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2 < 1$ получим

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho}{Z}\right)^4 + \dots$$

$$\dots \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{Z}\right)^2.$$

Следовательно, можно записать функцию рассеяния, упрощенную по Френелю, следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{H}(\rho) &= \frac{e^{jk\left(Z + \frac{\rho^2}{2Z}\right)}}{j\lambda Z} = \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}\rho^2}, \\ \dot{H}(\xi, \zeta) &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(\xi^2 + \zeta^2)}, \\ \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) &= \\ &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(x^2 + y^2)} e^{j\frac{k}{2Z}(X_1^2 + Y_1^2)} e^{-j\frac{k}{Z}(xX_1 + yY_1)}.\end{aligned}$$

Используя приближение Френеля, мы заменяем сферические волны Гюйгенса поверхностями второго порядка. Действительно, поверхность равных фаз сферических волн Гюйгенса определяется уравнением $R = Z\sqrt{1 + (\rho/Z)^2}$ или $R^2 = Z^2 + \rho^2$, т. е. представляет собой сферу радиуса R с центром в начале координат при $Z = 0$. В отличие от этого, поверхность равных фаз волн Френеля имеет вид $R_1 = \frac{\rho^2}{2Z} + Z$ или $\frac{\rho^2}{(R_1/\sqrt{2})^2} + \frac{(Z - R_1/2)^2}{(R_1/2)^2} = 1$, т. е. представляет собой эллипс с полуосями $R_1/\sqrt{2}$ и $R_1/2$ и с центром на оси OZ при $Z = R_1/2$.

На расстоянии Z эллиптическая поверхность будет отличаться от ближайшей сферы на величину, равную разности между точным R и приближенным R_1 значениями расстояния, вызывающего изменение фазы распространяющейся волны $\varphi = kR$ и $\varphi_1 = kR_1$. Полагая, что эта разность определяется первым отброшенным членом разложения, т. е. величиной

$$\Delta R = R - R_1 = Z \frac{b^2}{8} = \frac{Z}{8} \left(\frac{\rho}{Z} \right)^4 = \frac{\rho^4}{8Z^3},$$

можно воспользоваться *правилом четверти волны Релея*, в соответствии с которым максимальное отклонение фронта волны от сферы, заметно не уменьшающее центральный максимум дифракционной картины, равно $\lambda/4$. Тогда найдем $\rho^4/(8Z^3) \leq \lambda/4$ или $\rho \leq \sqrt[4]{2\lambda Z^3}$, $Z \geq \rho^3/\sqrt[3]{2\lambda}$. Если принять более жесткое условие для допустимого отступления фронта волны от ближайшей сферы $\Delta R \leq \lambda/8$, то границы применимости упрощений Френеля изменятся незначительно, а соответствующие соотношения станут более простыми и наглядными:

$$\rho \leq Z \sqrt[4]{\lambda/Z}; \quad Z \geq \rho^3/\sqrt[3]{\rho/\lambda}.$$

Величина $\rho = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = \sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2}$ представляет собой максимальный линейный размер объединенных областей существования поля в плоскости предметов (область Σ) и в плоскости изображений (область σ). Отношение ρ/Z характеризует значение

максимального угла, который образует направление наблюдения с осью OZ в зоне дифракции Френеля.

Если $\rho = 20$ мм, а $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ мм, то $Z \geq 20 \sqrt[3]{20/0,5 \cdot 10^{-3}} = 684$ мм, а $\rho/Z \leq \sqrt[4]{0,5 \cdot 10^{-3}/684} \approx 0,03$ (или около $1,8^\circ$).

Найдем выражение когерентной передаточной функции для зоны дифракции Френеля

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\nu, \mu) &= \mathcal{F}\{\tilde{H}(\xi, \zeta)\} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(\xi^2 + \zeta^2)} e^{-j2\pi(\nu\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta = \\ &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{k}{2Z}\xi^2 - j2\pi\nu\xi} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{k}{2Z}\zeta^2 - j2\pi\mu\zeta} d\zeta.\end{aligned}$$

Поскольку в данном случае

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\nu, \mu) &= \tilde{H}(\nu) \tilde{H}(\mu), \\ \tilde{H}(\nu) &= \frac{V e^{jkZ}}{V j\lambda Z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{k}{2Z}\xi^2 - j2\pi\nu\xi} d\xi, \\ \tilde{H}(\mu) &= \frac{V e^{jkZ}}{V j\lambda Z} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{k}{2Z}\zeta^2 - j2\pi\mu\zeta} d\zeta,\end{aligned}$$

то, воспользовавшись табличным интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\rho^2 - 2b\rho - c} d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a} - c},$$

и имея в виду, что $a = -j\frac{k}{2Z}$; $b = j\pi\nu$ (или $j\pi\mu$); $c = 0$, определим:

$$\begin{aligned}\tilde{H}(\nu) &= (-1) \sqrt{e^{jkZ}} e^{-j\pi\lambda Z\nu^2}; \quad \tilde{H}(\mu) = (-1) \sqrt{e^{jkZ}} e^{-j\pi\lambda Z\mu^2}; \\ \tilde{H}(\nu, \mu) &= e^{jkZ} e^{-j\pi\lambda Z(\nu^2 + \mu^2)}, \\ \tilde{H}(\kappa) &= e^{jkZ} e^{-j\pi\lambda Z\kappa^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция для зоны дифракции Френеля содержит два экспоненциальных члена: первый e^{jkZ} определяет общую фазовую задержку, которая происходит при распространении волны между двумя плоскостями, находящимися на расстоянии Z . Второй сомножитель $e^{-j\pi\lambda Z\kappa^2}$ определяет квадратичную дисперсию фазы. Так как зона дифракции Френеля располагается вблизи оптической оси (оси OZ), можно сказать, что при распространении параксиальных пучков свободное пространство, как фильтр пространственных частот, имеет постоянную амплитудную ($|\tilde{H}(\kappa)| = 1$) и квадратичную фазовую характеристики.

Следует заметить, что при очень больших расстояниях Z выражение для френелевской передаточной функции оказывается несправедливым, что накладывает дополнительные ограничения на условия существования зоны дифракции Френеля. Для определения этих ограничений сопоставим точное значение фазового сдвига, создаваемого свободным пространством, $\varphi = kZ \sqrt{1 - (\lambda\kappa)^2}$ с фазовым сдвигом при френелевском приближении $\varphi_1 = kZ [1 - (\lambda\kappa)^2/2]$. Разность фаз определяется разностью расстояний ΔR , которое вновь приравняем первому отбрасываемому члену при разложении точного значения в ряд Тейлора. Так как

$$Z \sqrt{1 - (\lambda\kappa)^2} = Z \left[1 - \frac{(\lambda\kappa)^2}{2} - \frac{(\lambda\kappa)^4}{8} + \dots \right],$$

то френелевская функция является квадратичным приближением, а $\Delta R = Z (\lambda\kappa)^4/8$. Если принять $\Delta R \ll \lambda/8$, то $Z \ll 1/(\lambda^3\kappa^4)$.

Зададимся размером наиболее мелкой пространственной неоднородности в плоскости отверстия в экране $\delta = 1/\kappa$. Тогда при $\Delta R \ll \lambda/8$ получим $Z \ll \delta (\delta/\lambda)^3$ или $(\delta/Z) \geq (\lambda/\delta)^3$.

Наивысшая пространственная частота сигнала, пропускаемого через линейный фильтр — свободное пространство, должна быть ниже λ^{-1} . Следовательно, необходимо, чтобы $\delta > \lambda$. Пусть $\delta = 200\lambda$ при $\lambda = 0,5$ мкм, $\delta = 100$ мкм, тогда $Z \ll 200\lambda (200\lambda/\lambda)^3 = 2 \cdot 10^2 \times 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^6 = 800$ м.

Следовательно, все пространственные неоднородности входного сигнала, размер которых превышает 100 мкм, могут быть описаны в пространстве изображений с помощью формулы Френеля для передаточной функции при условии, что расстояние до зоны наблюдения не будет превышать 800 м.

Найдем комплексную амплитуду поля в зоне дифракции Френеля

$$\dot{U}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) dX_1, dY_1,$$

так как

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j \frac{k}{2Z} (x^2 + y^2)} e^{j \frac{k}{2Z} (X_1^2 + Y_1^2)} \times \\ &\times e^{-j \frac{k}{Z} (xX_1 + yY_1)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y) &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j \frac{k}{2Z} (x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) e^{j \frac{k}{2Z} (X_1^2 + Y_1^2)} \times \\ &\times e^{-j \frac{k}{Z} (xX_1 + yY_1)} dX_1 dY_1. \end{aligned}$$

Вводя пространственные частоты $\nu = x/(\lambda Z)$ и $\mu = y/(\lambda Z)$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y) = & \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) e^{-j\frac{k}{2Z}(X_1^2+Y_1^2)} \times \\ & \times e^{-j2\pi(\nu X_1+\mu Y_1)} dX_1 dY_1. \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до множителя, который не зависит от координат (X_1, Y_1) , комплексную амплитуду результирующей волны можно найти как фурье-образ функции $\dot{U}(X_1, Y_1) e^{j\frac{k}{2Z}(X_1^2+Y_1^2)}$ для пространственных частот $\nu = x/(\lambda Z)$ и $\mu = y/(\lambda Z)$.

Полученные выражения позволяют рассчитать картину распределения поля в зоне дифракции Френеля, которая обычно выражается через табулированные функции — *интегралы Френеля*, графически интерпретируемые *спиралью Корню*. Дифракция Френеля локализована на конечном расстоянии и происходит вблизи края волновой поверхности в тени какого либо препятствия. Соответствующие расчеты и построения широко освещаются в книгах по физической оптике.

На очень малом расстоянии от объекта наблюдения (отверстия в экране) дифракционное изображение представляет собой геометрическую тень объекта. Верхняя граница области тени определяется размером минимальной неоднородности поля излучения. Ее можно найти, оценив вклад второго члена разложения функции $Z\sqrt{1-(\lambda\kappa)^2} = Z(1 - \lambda^2\kappa^2/2)$, которым в этом случае пренебрегают. Положив $Z(\lambda^2\kappa^2/2) \leq \lambda/8$, найдем $Z \leq 0,25\delta(\delta/\lambda)$, где $\delta = 1/\kappa$. Если $\delta = 100$ мкм; $\lambda = 0,5$ мкм, то $Z \leq 5$ мм.

3. Рассмотрим возможность дальнейшего упрощения вида когерентной функции рассеяния $\dot{H}(x, y, X_1, Y_1)$. Эта возможность появляется при использовании *приближения Фраунгофера*, когда полагают $k/2Z(X_1^2 + Y_1^2) \ll 1$, т. е. $Z \gg k(X_1^2 + Y_1^2)/2$; $e^{j\frac{k}{2Z}(X_1^2+Y_1^2)} \approx 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(x^2+y^2)} e^{-j\frac{k}{Z}(xX_1+yY_1)}; \\ \dot{U}(x, y) &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) e^{-j\frac{k}{Z}(xX_1+yY_1)} dX_1 dY_1 = \\ &= \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}(X_1, Y_1) e^{-j2\pi(\nu X_1+\mu Y_1)} dX_1 dY_1. \end{aligned}$$

Следовательно, распределение комплексной амплитуды поля в зоне дифракции *Фраунгофера* с точностью до множителя, не зависящего от координат (X_1, Y_1) , представляет собой фурье-образ

распределения поля в отверстии экрана, вычисленный для пространственных частот:

$$\nu = x/(\lambda Z); \mu = y/(\lambda Z);$$

$$\dot{U}(x, y) = \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}\{\dot{U}(X_1, Y_1)\}.$$

В качестве примера найдем комплексную амплитуду поля в зоне дифракции Фраунгофера для различной формы отверстия в экране — прямоугольного и круглого отверстия, считая, что комплексная амплитуда поля в отверстии постоянна и равна U_0 , а за пределами отверстия она равна нулю.

Для прямоугольного отверстия, имеющего размеры $\pm l/2$ вдоль оси X и $\pm m/2$ вдоль оси Y , найдем

$$\dot{U}(X_1, Y_1) = U_0 \operatorname{Rect} \frac{X_1}{l} \operatorname{Rect} \frac{Y_1}{m},$$

где

$$\operatorname{Rect} \frac{X_1}{l} \operatorname{Rect} \frac{Y_1}{m} = \begin{cases} 1 & \text{при } \left| \frac{X_1}{l} \right| \text{ и } \left| \frac{Y_1}{m} \right| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \left| \frac{X_1}{l} \right| \text{ и } \left| \frac{Y_1}{m} \right| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}\{\dot{U}(X_1, Y_1)\} = U_0 l m \operatorname{Sinc}(lv) \operatorname{Sinc}(m\mu),$$

причем $\operatorname{Sinc}(lv) = \sin(\pi lv)/(\pi lv)$; $\operatorname{Sinc}(m\mu) = \sin(\pi m\mu)/(\pi m\mu)$;
 $\nu = x/(\lambda Z)$; $\mu = y/(\lambda Z)$;

$$\dot{U}(x, y) = \frac{e^{jkZ} e^{\frac{k}{2Z}(x^2+y^2)}}{j\lambda Z} \mathcal{F}\{\dot{U}(X_1, Y_1)\}.$$

Так как освещенность изображения пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды, то распределение освещенности плоскости, расположенной в зоне дифракции Фраунгофера параллельно экрану с отверстием, определяется выражением

$$|\dot{U}(x, y)|^2 = \left(\frac{lm}{\lambda Z} U_0 \right)^2 \operatorname{Sinc}^2 \left(\frac{lx}{\lambda Z} \right) \operatorname{Sinc}^2 \left(\frac{my}{\lambda Z} \right).$$

В относительных единицах освещенность равна

$$E_{\text{отн}}(x, y) = \frac{|\dot{U}(x, y)|^2}{|\dot{U}(0, 0)|^2} = \operatorname{Sinc}^2 \left(\frac{l}{\lambda Z} x \right) \operatorname{Sinc}^2 \left(\frac{m}{\lambda Z} y \right).$$

Для отверстия квадратной формы, когда $m = l$, найдем

$$E_{\text{отн}}(x, y) = \operatorname{Sinc}^2 \left(\frac{l}{\lambda Z} x \right) \operatorname{Sinc}^2 \left(\frac{l}{\lambda Z} y \right).$$

Освещенность равна нулю в точках, определяемых из уравнения

$$\frac{\pi l}{\lambda Z} x_0 \text{ (или } y_0) = k\pi,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$; при $k = 1$ $x_{01} = y_{01} = \lambda Z/l$.

Для круглого отверстия в экране, имеющего диаметр D , вычисление облегчается, если перейти в плоскости экрана к полярной системе координат:

$$P = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}; \quad X_1 = P \cos \Phi, \\ \Phi = \arctg \frac{Y_1}{X_1}; \quad Y_1 = P \sin \Phi.$$

Поскольку в отверстии экрана $\dot{U}(P, \Phi) = U_0$, а вне отверстия $\dot{U}(P, \Phi) = 0$, то можно записать

$$\dot{U}(P, \Phi) = \dot{U}(P) = U_0 \text{Circ} \left(\frac{P}{P_0} \right),$$

где

$$\text{Circ} \left(\frac{P}{P_0} \right) = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{P}{P_0} \leq 1, \\ 0 & \text{при } \frac{P}{P_0} > 1, \end{cases} \quad P_0 = D/2.$$

Переходя к полярным координатам в частотной плоскости:

$$\kappa = \sqrt{\nu^2 + \mu^2}; \quad \nu = \kappa \cos \theta;$$

$$\theta = \arctg \frac{\mu}{\nu}; \quad \mu = \kappa \sin \theta,$$

получим спектр через преобразование Фурье—Бесселя

$$\tilde{U}(\kappa, \theta) = \tilde{U}(\kappa) = \mathcal{B} \{ \dot{U}(P) \} = 2\pi \int_0^\infty \dot{U}(P) J_0(2\pi\kappa P) P dP.$$

Так как

$$\mathcal{B} \left\{ \text{Circ} \left(\frac{P}{P_0} \right) \right\} = \pi P_0^2 \text{Bessinc}(2P_0\kappa),$$

где $\text{Bessinc}(2P_0\kappa) = \frac{2J_1(\pi 2P_0\kappa)}{\pi 2P_0\kappa}$,

то

$$\tilde{U}(\kappa) = \mathcal{B} \{ \dot{U}(P) \} = U_0 \pi P_0^2 \text{Bessinc}(2P_0\kappa).$$

Если в плоскости наблюдения радиус вектор $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а полярный угол $\varphi = \arctg y/x$, то искомого распределение комплексной амплитуды в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\dot{U}(\rho, \varphi) = \dot{U}(\rho) = \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}\rho^2} \mathcal{B} \{ \dot{U}(P) \} = \\ = \frac{e^{jkZ}}{j\lambda Z} e^{j\frac{k}{2Z}\rho^2} U_0 \pi P_0^2 \text{Bessinc}(2P_0\kappa),$$

где $\kappa = \sqrt{\nu^2 + \mu^2} = \sqrt{x^2 + y^2}/(\lambda Z) = \rho/(\lambda Z)$.

Распределение освещенности можно найти, вычисляя квадрат модуля амплитуды,

$$|\dot{U}(\rho)|^2 = [U_0 \pi (D/2)^2]^2 \text{Bessinc}^2(D\rho/\lambda Z),$$

что в относительных единицах приводит к выражению

$$E_{\text{отн}}(\rho) = \text{Bessinc}^2(D\rho/\lambda Z).$$

Радиус первого темного кольца в распределении освещенности можно найти из уравнения $D\rho_{01}/(\lambda Z) = 3,83$, поскольку функция Бесселя для аргумента 3,83 равна нулю: $J_1(3,83) = 0$.

Следовательно,

$$\rho_{01} = (3,83/\pi)(\lambda Z/D) = 1,22\lambda/(D/Z).$$

Оценим расстояние от отверстия в экране до зоны, где наблюдается дифракция Фраунгофера. Если $\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $\sqrt{X_1^2 + Y_1^2} = P = 20 \text{ мм} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, то $\pi P^2/\lambda = 3,14 \cdot 400 \cdot 10^{-6} / (0,5 \cdot 10^{-6}) = 2513,3 \text{ м}$, следовательно $Z \gg 2,5 \text{ км}$, а угол, под которым из зоны Фраунгофера видно отверстие в экране, примерно равен $2P/Z = 40 \cdot 10^{-3} / 2513,3 \approx 16 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 16 \text{ мкрад}$ или $3,3''$.

Таким образом, явления Фраунгофера локализованы на бесконечности вблизи центральной части распространяющейся волновой поверхности, которая несет основную информацию об изображении. Поэтому именно явления Фраунгофера изучаются для определения качества изображения.

Для наблюдения картины дифракции Фраунгофера на более близких расстояниях и под большими углами необходимо использовать дополнительную оптическую систему — сферическую линзу, установленную между отверстием в экране (или в этом отверстии) и плоскостью наблюдения. Это позволяет устранить экспоненциаль-

ный множитель $e^{i \frac{k}{2Z}(x^2+y^2)}$ в выражении для картины дифракции Френеля, не вводя дополнительных ограничений.

Покажем это, рассматривая схему на рис. 297, где изображена тонкая сферическая линза. Луч, входящий в линзу в точке m с координатами (x_m, y_m) , выходит из нее в точке m' с теми же координатами, т. е. смещением луча можно пренебречь. Вследствие этого тонкая линза лишь задерживает фронт падающей волны по фазе на величину, пропорциональную толщине линзы в данной точке. Фокальная плоскость линзы удалена от нее на расстояние $f' = \frac{R_1 R_2}{n-1}$ (R_2 — R_1), где R_1, R_2 — радиусы кривизны сферических поверхностей линзы; n — показатель преломления материала линзы.

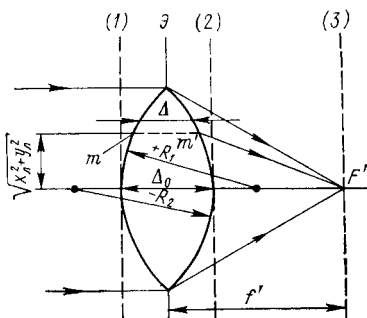


Рис. 297. Распространение монохроматической волны через тонкую линзу

По существу, тонкая линза на схеме рис. 297 представляет собой то «отверстие» в непрозрачном экране, дифракция на котором рассматривалась выше. Конечный размер апертуры линзы можно учесть функцией $\Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$, которая определяется следующим образом:

$$\Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \begin{cases} 1 & \text{внутри апертуры,} \\ 0 & \text{вне апертуры.} \end{cases}$$

Комплексный коэффициент пропускания линзы в точке с координатами $(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$ равен $\hat{\tau}_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$.

Предположим, что на линзу падает монохроматическая волна с комплексной амплитудой, распределенной в плоскости (1) на рис. 297 по закону $\hat{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$. Тогда распределение поля в плоскости (2) непосредственно за линзой определяется выражением

$$\hat{U}_{\text{вых}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \hat{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \hat{\tau}_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}).$$

Распределение поля в задней фокальной плоскости тонкой линзы (3), характеризующейся декартовыми координатами (x, y) , можно найти по формуле дифракции Френеля для $Z = f'$

$$\begin{aligned} \hat{U}(x, y) &= \frac{e^{jkf'}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}(x^2+y^2)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) e^{j\frac{k}{2f'}(x_{\text{л}}^2+y_{\text{л}}^2)} e^{-j\frac{k}{f'}(xx_{\text{л}}+yy_{\text{л}})} dx_{\text{л}} dy_{\text{л}} = \\ &= \frac{e^{jkf'}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \hat{\tau}_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \times \\ &\times e^{j\frac{k}{2f'}(x_{\text{л}}^2+y_{\text{л}}^2)} e^{-j\frac{k}{f'}(xx_{\text{л}}+yy_{\text{л}})} dx_{\text{л}} dy_{\text{л}}. \end{aligned}$$

Для дальнейшего найдем комплексный коэффициент пропускания линзы, которая вносит только фазовый сдвиг:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) &= e^{j\varphi_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})}, \\ \varphi_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) &= kn\Delta(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) - k[\Delta_0 - \Delta(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})] = \\ &= k\Delta_0 + (n-1)k\Delta(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}), \end{aligned}$$

где Δ_0 — толщина линзы на оптической оси; $\Delta(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$ — толщина линзы на расстоянии $\sqrt{x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2}$ от оптической оси; $k = 2\pi/\lambda$.

Функцию толщины линзы $\Delta(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$ можно найти путем несложных геометрических построений и вычислений, выполненных в работе [27]. В параксиальном приближении

$$\Delta(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \Delta_0 - [(x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2)/2](1/R_1 - 1/R_2),$$

следовательно,

$$\varphi_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = kn\Delta_0 - k\frac{x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = kn\Delta_0 - k\frac{x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2}{2f'},$$

т. е. фазовое преобразование линзы имеет вид

$$\dot{r}_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = e^{jkn \Delta_0} e^{-j \frac{k}{2f'}} (x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2).$$

Поле за линзой определяется выражением

$$\dot{U}_{\text{вых}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) e^{jkn \Delta_0} e^{-j \frac{k}{2f'}} (x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}).$$

Распределение комплексной амплитуды поля в задней фокальной плоскости

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y) &= \frac{e^{jkf'} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j \frac{k}{2f'}} (x^2 + y^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \times \\ &\times e^{-j \frac{k}{f'} (xx_{\text{л}} + yy_{\text{л}})} dx_{\text{л}} dy_{\text{л}}. \end{aligned}$$

Для пространственных частот $v = x/(\lambda f')$ и $\mu = y/(\lambda f')$ найдем

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y) &= \frac{e^{jkf'} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j \frac{k}{2f'}} (x^2 + y^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \times \\ &\times e^{-j2\pi (vx_{\text{л}} + \mu y_{\text{л}})} dx_{\text{л}} dy_{\text{л}}. \end{aligned}$$

Следовательно, *распределение поля в фокальной плоскости линзы пропорционально двумерному фурье-образу части исходного поля ограниченному отверстием линзы*

$$\dot{U}(x, y) = \frac{e^{jkf'} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j \frac{k}{2f'}} (x^2 + y^2) \mathcal{F} \{ \dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \}.$$

Входящие в полученное выражение коэффициенты $e^{jkf'}$, $e^{jkn \Delta_0}$, j определяют величину постоянного фазового сдвига, а коэффициент $e^{j \frac{k}{2f'}} (x^2 + y^2)$ характеризует фазовое искривление поля в плоскости наблюдения. Поскольку освещенность плоскости наблюдения, вызывающая реакцию установленных в этой плоскости приемников излучения на падающую волну, пропорциональна квадрату модуля ее комплексной амплитуды, т. е. величине

$$|\dot{U}(x, y)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 f'^2} |\mathcal{F} \{ \dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \}|^2,$$

то фазовые коэффициенты, входящие в выражение для $\dot{U}(x, y)$, в ряде случаев могут не учитываться.

Если монохроматическая волна, падающая на тонкую линзу, определена в точке (X_1, Y_1) плоскости (X, Y) , находящейся на расстоянии — a до линзы (рис. 298), в виде $\dot{U}_0(X_1, Y_1)$, то распределение комплексной амплитуды поля в фокальной плоскости линзы можно найти следующим образом.

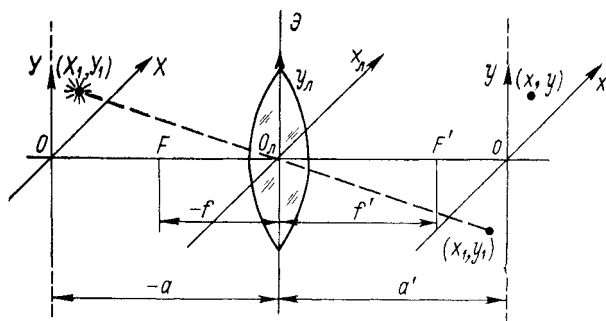


Рис. 298. Реакция линзы на входное воздействие:

\mathcal{E} — бесконечный экран; X_1, Y_1 — точечный монохроматический источник излучения; X_l, Y_l — точка в плоскости наблюдения, сопряженная с точкой X_1, Y_1 ; x, y — произвольная расположенная точка в плоскости наблюдения

Спектр Фурье распределения комплексной амплитуды поля $\dot{U}_{\text{вх}}(x_l, y_l)$, падающего на линзу, равен

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(\nu, \mu) = \mathcal{F}\{\dot{U}_{\text{вх}}(x_l, y_l)\}.$$

Если спектр исходной волны

$$U_0(\nu, \mu) = \mathcal{F}\{\dot{U}_0(X_1, Y_1)\},$$

то, пользуясь значением когерентной передаточной функции для зоны дифракции Френеля, найдем

$$\tilde{U}_{\text{вх}}(\nu, \mu) = \tilde{U}_0(\nu, \mu) \tilde{H}(\nu, \mu) = U_0(\nu, \mu) e^{-jka} e^{j\pi\lambda a (\nu^2 + \mu^2)}.$$

Поскольку распределение поля в фокальной плоскости линзы

$$\dot{U}(x, y) = \frac{e^{jkf'} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}(x^2 + y^2)} \mathcal{F}\{\dot{U}_{\text{вх}}(x_l, y_l) \Psi(x_l, y_l)\},$$

то, не учитывая конечность апертуры линзы, т. е. полагая $\Psi(x_l, y_l) = 1$, получим

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, y) &= \frac{e^{jkf'} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}(x^2 + y^2)} \mathcal{F}\{\dot{U}_{\text{вх}}(x_l, y_l)\} = \\ &= \frac{e^{jkf'} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}(x^2 + y^2)} e^{-jka} e^{j\pi\lambda a (\nu^2 + \mu^2)} \mathcal{F}\{\dot{U}_0(X_1, Y_1)\}. \end{aligned}$$

Вводя пространственные частоты $\nu = x/(\lambda f')$, $\mu = y/(\lambda f')$, найдем

$$\begin{aligned}\dot{U}(x, y) &= \frac{e^{jkf'} e^{jkn \Delta_0} e^{-jka}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}(x^2+y^2)} e^{j\frac{\pi a}{\lambda f'^2}(x^2+y^2)} \times \\ &\times \mathcal{F}\{\dot{U}_0(X_1, Y_1)\} = \\ &= \frac{e^{jkf'} e^{-jka} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}[(x^2+y^2)(1+\frac{a}{f'})]} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_0(X_1, Y_1) e^{-j2\pi(\nu X_1 + \mu Y_1)} dX_1 dY_1.\end{aligned}$$

Следовательно, комплексная амплитуда волны в точке (x, y) определяется комплексной амплитудой спектра Фурье исходного поля $\dot{U}_0(X_1, Y_1)$ на частотах $\nu = x/(\lambda f')$ и $\mu = y/(\lambda f')$. Если вызывающий появление исходного поля предмет расположен в передней фокальной плоскости линзы, т. е. $-a = -f = f'$, то $(1 + a/f') = (1 - f'/f') = 0$, фазовое искривление исчезает, и с точностью до постоянных коэффициентов

$$\dot{U}(x, y) = \mathcal{F}\{\dot{U}_0(X_1, Y_1)\}.$$

Влияние конечной апертуры линзы, вызывающей *виньетирование*, можно приближенно учесть, как это показал Гудмен, функцией зрачка, вычисленной при условии, что проекция апертуры линзы располагается в плоскости (X, Y) вокруг точки, сопряженной с точкой в плоскости наблюдения, имеющей координаты (x, y) , следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned}\dot{U}(x, y) &= \frac{e^{jkf'} e^{-jka} e^{jkn \Delta_0}}{j\lambda f'} e^{j\frac{k}{2f'}[(x^2+y^2)(1+\frac{a}{f'})]} \times \\ &\times \mathcal{F}\left\{\dot{U}_0(X_1, Y_1) \Psi\left(X_1 + \frac{a}{f'} x, Y_1 + \frac{a}{f'} y\right)\right\}.\end{aligned}$$

В общем случае необходимо найти распределение комплексной амплитуды поля в плоскости (x, y) , располагающейся за тонкой линзой на расстоянии a' , когда исходное поле $\dot{U}_0(X_1, Y_1)$ задается непосредственно за предметом, находящимся до линзы на расстоянии $-a$ (рис. 298).

Рассматриваемые распределения связаны между собой интегралом суперпозиции

$$\dot{U}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_0(X_1, Y_1) \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) dX_1 dY_1.$$

По аналогии с § 13.2 координаты (X_1, Y_1) точки в плоскости предмета можно заменить координатами сопряженной с ней точки (x_1, y_1) в плоскости изображения либо непосредственно, либо через линейное увеличение

$$V = x_1/X_1 = y_1/Y_1 = a'/a.$$

Для определения когерентной функции рассеяния $H(x, y, X_1, Y_1)$ допустим, что в одной из точек предмета с координатами (X_1, Y_1) действует точечный источник (дельта-функция). В этом случае на линзу будет падать сферическая волна, комплексная амплитуда которой может быть вычислена для параксиального приближения с помощью формулы дифракции Френеля

$$\dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \frac{e^{-jka}}{-j\lambda a} e^{-j \frac{k}{2a} [(x_{\text{л}} - X_1)^2 + (y_{\text{л}} - Y_1)^2]}.$$

После прохождения линзы распределение поля имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{вых}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) &= \dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \tau_{\text{л}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \\ &= \dot{U}_{\text{вх}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) e^{jkn \Delta_0} e^{-j \frac{k}{2f'} (x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2)} \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}). \end{aligned}$$

Распределение поля в плоскости наблюдения можно рассчитать, вновь предположив, что на расстоянии a' за линзой находится зона Френеля, а так как речь идет о вычислении результирующего распределения поля при действии в плоскости (X_1, Y_1) *точечного* монохроматического источника излучения, то это распределение представляет собой *реакцию рассматриваемой системы на единичный импульс, т. е. когерентную функцию рассеяния (импульсную функцию)*:

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) &= \frac{e^{jka'}}{j\lambda a'} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_{\text{вых}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) e^{j \frac{k}{2a'} [(x - x_{\text{л}})^2 + (y - y_{\text{л}})^2]} \times \\ &\times dx_{\text{л}} dy_{\text{л}} = \frac{e^{jka'}}{j\lambda a'} e^{j \frac{k}{2a'} (x^2 + y^2)} \times \\ &\times \int \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_{\text{вых}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) e^{j \frac{k}{2a'} (x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2)} e^{-j \frac{k}{a'} (xx_{\text{л}} + yy_{\text{л}})} dx_{\text{л}} dy_{\text{л}}. \end{aligned}$$

Подставляя значение $\dot{U}_{\text{вых}}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$ и отбрасывая множители, определяющие величину *постоянного* фазового сдвига ($e^{jka'} e^{-jka} e^{jkn \Delta_0}$), найдем

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) &= \frac{1}{\lambda^2 a' a} e^{j \frac{k}{2a'} (x^2 + y^2)} e^{-j \frac{k}{2a} (x_1^2 + y_1^2)} \times \\ &\times \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) e^{j \frac{k}{2} (x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2)} \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} - \frac{1}{f'} \right) \times \\ &\times e^{-jk \left[x_{\text{л}} \left(\frac{x}{a'} - \frac{X_1}{a} \right) + y_{\text{л}} \left(\frac{y}{a'} - \frac{Y_1}{a} \right) \right]} dx_{\text{л}} dy_{\text{л}}. \end{aligned}$$

Множитель $e^{j \frac{k}{2a'} (x^2 + y^2)}$ определяет изменение фазы в плоскости наблюдения и никак не влияет на распределение интенсивности из-

лучения в этой плоскости, т. е. может быть опущен. Множитель $e^{-j \frac{k}{2a} (x_1^2 + y_1^2)}$ зависит от переменных интегрирования интеграла суперпозиции

$$\dot{U}(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \dot{U}_0(X_1, Y_1) \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) dX_1 dY_1,$$

однако, от него тоже можно избавиться, поскольку $e^{-j \frac{k}{2a} (x_1^2 + y_1^2)} = e^{-\frac{k}{2a} \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{V^2} \right)}$, а для системы высокого качества основной вклад в величину комплексной амплитуды поля в точке (x, y) дает небольшая область в окрестностях этой точки, т. е. $x_1 \approx x$, $y_1 \approx y$, и, следовательно, $e^{-j \frac{k}{2a} (x_1^2 + y_1^2)} \approx e^{-j \frac{k}{2a} \left(\frac{x^2 + y^2}{V^2} \right)}$, где V — линейное увеличение. В этом виде экспоненциальный множитель не влияет на распределение интенсивности и его можно опустить.

Для сопряженных плоскостей (X, Y) , и (x, y) справедлива формула линзы $1/a' - 1/a = 1/f'$, поэтому

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) &= \frac{1}{\lambda^2 a' a} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x_{\pi}, y_{\pi}) \times \\ &\times e^{-jk \left[x_{\pi} \left(\frac{x}{a'} - \frac{X_1}{a} \right) + y_{\pi} \left(\frac{y}{a'} - \frac{Y_1}{a} \right) \right]} dx_{\pi} dy_{\pi} = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 a' a} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x_{\pi}, y_{\pi}) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda a'} \left[x_{\pi} \left(x - \frac{a'}{a} X_1 \right) + y_{\pi} \left(y - \frac{a'}{a} Y_1 \right) \right]} dx_{\pi} dy_{\pi}. \end{aligned}$$

Так как линейное увеличение $V = a'/a$, причем $VX_1 = x_1$, $VY_1 = y_1$, то

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y, X_1, Y_1) &= \\ &= \frac{1}{\lambda^2 a' a} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x_{\pi}, y_{\pi}) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda a'} [(x - VX_1) x_{\pi} + (y - VY_1) y_{\pi}]} dx_{\pi} dy_{\pi} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{H}(x, y, x_1, y_1) &= \dot{H}(x - x_1, y - y_1) = \\ &= \frac{1}{\lambda^2 a' a} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x_{\pi}, y_{\pi}) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda a'} [(x - x_1) x_{\pi} + (y - y_1) y_{\pi}]} dx_{\pi} dy_{\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно, когерентная функция рассеяния линзы определяется картиной дифракции Фраунгофера на ее апертуре, причем центр картины находится в точке изображения с координатами $x = x_1$ и $y = y_1$ ($x_1 = VX_1$, $y_1 = VY_1$).

Введем обозначения: $f_{x_{\pi}} = x_{\pi}/(\lambda a')$, $f_{y_{\pi}} = y_{\pi}/(\lambda a')$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{H}(x - x_1, y - y_1) = & V \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\lambda a' f_{x_{\pi}}, \lambda a' f_{y_{\pi}}) \times \\ & \times e^{-j2\pi [(x-x_1) f_{x_{\pi}} + (y-y_1) f_{y_{\pi}}]} df_{x_{\pi}} df_{y_{\pi}}, \end{aligned}$$

где

$$V = a'/a, \quad df_{x_{\pi}} = dx_{\pi}/(\lambda a'), \quad df_{y_{\pi}} = dy_{\pi}/(\lambda a').$$

Кроме того, обозначив $x - x_1 = \xi$, $y - y_1 = \zeta$, найдем выражение для когерентной функции рассеяния линзы в виде

$$\dot{H}_1(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\lambda a' f_{x_{\pi}}, \lambda a' f_{y_{\pi}}) e^{-j2\pi (\xi f_{x_{\pi}} + \zeta f_{y_{\pi}})} df_{x_{\pi}} df_{y_{\pi}},$$

где $\dot{H}_1(\xi, \zeta) = \dot{H}(\xi, \zeta)/V$.

Распределение комплексной амплитуды поля в пространстве изображений определяется интегралом суперпозиции, в котором распределение комплексной амплитуды поля в пространстве предметов должно быть представлено функцией $\dot{U}_0(X_1, Y_1)$. Поскольку $X_1 = x_1/V = -x_1/|V|$, $Y_1 = y_1/V = -y_1/|V|$, то интеграл суперпозиции может быть записан в виде

$$\dot{U}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}(x - x_1, y - y_1) \dot{U}_0\left(-\frac{x_1}{|V|}, -\frac{y_1}{|V|}\right) dx_1 dy_1.$$

Если обозначить $\dot{H}_1(x - x_1, y - y_1) = \dot{H}(x - x_1, y - y_1)/V$, $\dot{U}_1(x, y) = (1/V) \dot{U}_0(-x_1/|V|, -y_1/|V|)$, то

$$\dot{U}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}_1(x - x_1, y - y_1) \dot{U}_1(x, y) dx_1 dy_1 = \dot{H}_1(x, y) \otimes \dot{U}_1(x, y)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{H}_1(x, y) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\lambda a' f_{x_{\pi}}, \lambda a' f_{y_{\pi}}) e^{-j2\pi (x f_{x_{\pi}} + y f_{y_{\pi}})} df_{x_{\pi}} df_{y_{\pi}}, \\ \dot{H}_1(x - x_1, y - y_1) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\lambda a' f_{x_{\pi}}, \lambda a' f_{y_{\pi}}) \times \\ & \times e^{-j2\pi [(x-x_1) f_{x_{\pi}} + (y-y_1) f_{y_{\pi}}]} df_{x_{\pi}} df_{y_{\pi}}. \end{aligned}$$

В идеальной оптической системе дифракция не проявляется и качество изображения определяется законами геометрической оптики. Для получения соответствующих этому случаю выражений положим $\lambda \rightarrow 0$. Функция зрачка при $\lambda \rightarrow 0$ равна единице в безграничной

области значений координат $x_{\text{л}}$ и $y_{\text{л}}$. Тогда когерентная функция рассеяния есть дельта функция

$$\begin{aligned}\dot{H}_1(x - x_1, y - y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi [(x-x_1) f_{x_{\text{л}}} + (y-y_1) f_{y_{\text{л}}}] } df_{x_{\text{л}}} df_{y_{\text{л}}} = \\ &= \delta(x - x_1, y - y_1),\end{aligned}$$

но при этом

$$\dot{U}(x, y) = \dot{U}_1(x, y) = (1/V) U_0(-x_1/|V|, -y_1/|V|).$$

Следовательно, изображение, полученное в приближении геометрической оптики, представляет собой точную копию предмета, увеличенную и перевернутую в плоскости изображения

При учете дифракционных эффектов изображение не является больше точной копией предмета и точность воспроизведения зависит от вида функции рассеяния, которая сглаживает мелкие детали в изображении.

Найдем когерентную передаточную функцию тонкой линзы. По определению

$$\tilde{H}(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}(\xi, \zeta) e^{-j2\pi (v\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta,$$

или

$$\tilde{H}_1(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}_1(\xi, \zeta) e^{-j2\pi (v\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta,$$

где $\tilde{H}_1(\xi, \zeta) = H(\xi, \zeta)/V$, $\tilde{H}_1(v, \mu) = \tilde{H}(v, \mu)/V$, V — линейное увеличение; $\xi = x - x_1$; $\zeta = y - y_1$; (x_1, y_1) — точка плоскости изображений, сопряженная с произвольной точкой (X_1, Y_1) плоскости предметов, в которой находится рассматриваемый источник излучения; (x, y) — произвольная точка плоскости изображений. Так как

$$\dot{H}_1(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\lambda a' f_{x_{\text{л}}}, \lambda a' f_{y_{\text{л}}}) e^{-j2\pi (\xi f_{x_{\text{л}}} + \zeta f_{y_{\text{л}}})} df_{x_{\text{л}}} df_{y_{\text{л}}},$$

то

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1(v, \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\lambda a' f_{x_{\text{л}}}, \lambda a' f_{y_{\text{л}}}) df_{x_{\text{л}}} df_{y_{\text{л}}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi [(f_{x_{\text{л}}} + v) \xi + (f_{y_{\text{л}}} + \mu) \zeta]} d\xi d\zeta.\end{aligned}$$

Внутренний интеграл выражения для $\tilde{H}_1(v, \mu)$ представляет собой дельта функцию $\delta(f_{x_{\text{л}}} + v, f_{y_{\text{л}}} + \mu)$, которая равна нулю всюду, кроме точек с координатами $f_{x_{\text{л}}} = -v$ и $f_{y_{\text{л}}} = -\mu$. Пользуясь фильтрующим свойством дельта функции, найдем

$$\tilde{H}_1(v, \mu) = \Psi(-\lambda a' v, -\lambda a' \mu).$$

Этот результат можно легко получить, оперируя символическими обозначениями для фурье-преобразований. Действительно,

$$\tilde{H}_1(v, \mu) = \mathcal{F} \{ \dot{H}_1(\xi, \zeta) \},$$

но

$$\dot{H}_1(\xi, \zeta) = \mathcal{F} \{ \Psi(\lambda a' f_{x_{\text{пл}}}, \lambda a' f_{y_{\text{пл}}}) \},$$

поэтому

$$\tilde{H}_1(v, \mu) = \mathcal{F} \{ \mathcal{F} \{ \Psi(\lambda a' f_{x_{\text{пл}}}, \lambda a' f_{y_{\text{пл}}}) \} \} = \Psi(-\lambda a' v, -\lambda a' \mu),$$

что следует из интегральной теоремы Фурье.

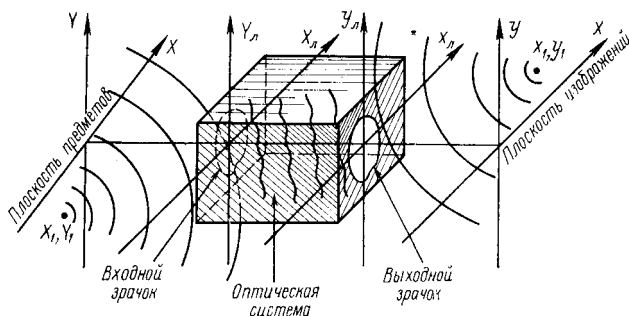


Рис. 299. Обобщенная оптическая система

Знак минус в аргументе функции зрачка можно опустить, поскольку все рассматриваемые в дальнейшем примеры вычислений когерентной передаточной функции симметричны относительно пространственных частот v и μ . Таким образом,

$$\tilde{H}_1(v, \mu) = \Psi(\lambda a' v, \lambda a' \mu).$$

Если оптическая система состоит не из одной тонкой линзы, а линза имеет конечную толщину или в систему входят несколько линз (зеркал), то все полученные выводы можно распространить и на эти случаи, учитывая, что нас не интересуют конкретные расположения и форма элементов, создающих изображение.

Входом такой обобщенной оптической системы (рис. 299) является ее входной зрачок, представляющий собой отверстие конечных размеров (эффективное или действительное), через которое свет проходит прежде, чем он достигнет элементов, создающих изображение, а выходом — выходной зрачок (также эффективный или действительный), представляющий собой отверстие конечных размеров, через которое свет проходит после создающих изображение элементов на пути к плоскости изображения. Путь света между входным и выходным зрачками, т. е. между системами координат $X_{\text{л}}, Y_{\text{л}}$ и $x_{\text{л}}, y_{\text{л}}$, описывается в приближении геометрической оптики. Входной и выходной зрачки определяются проекциями наименьшей апертуры системы в пространстве предметов и пространстве изображений. Входной зрачок всегда является изображением выходного зрачка и наоборот.

Расстояние между выходным зрачком и плоскостью наблюдения, равное $z_{\text{л}}$, в общем случае отличается от расстояния a' (от задней главной точки оптической

системы до осевой точки изображения) на величину a'_p , — расстояние от задней главной точки до осевой точки выходного луча, т. е. $z_{\text{л}} = a' - a'_p$. Из условия синусов следует $D'/z_{\text{л}} = 2 \sin \sigma'_A$. Если предмет находится в бесконечности, то $2 \sin \sigma'_A \cdot (\infty) = D/f'$.

Следовательно, в этом случае $D'/z_{\text{л}} = D/f'$, где D , D' — диаметры входного и выходного лучков, σ'_A и $\sigma'_A(\infty)$ — апертурные углы в пространстве изображений для произвольного расположения предмета и расположения предмета в бесконечности; f' — заднее фокусное расстояние.

Если оптическая система состоит из одной тонкой линзы, что для простоты и предполагается во всех последующих расчетах, то $D' = D$, $z_{\text{л}} = a'$, а для предмета в бесконечности $z_{\text{л}} = a' = f'$.

Оптическая система называется *дифракционно ограниченной*, если она преобразует расходящуюся сферическую волну, падающую на входной лучок, в сходящуюся сферическую волну, выходящую через выходной лучок. Если фронт волны от точечного источника после выходного лучка отличается от идеальной сферической формы, то говорят, что оптическая система имеет *абберации*.

В качестве примера найдем когерентную функцию рассеяния и когерентную передаточную функцию для дифракционно ограниченной оптической системы, лучок которой имеет в одном случае квадратную, а в другом случае круглую форму. Для лучка квадратной формы со стороной l (рис. 300) функция лучка может быть представлена *прямоугольной функцией*

$$\Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \text{Rect}\left(\frac{x_{\text{л}}}{l}\right) \text{Rect}\left(\frac{y_{\text{л}}}{l}\right),$$

так как в этом случае

$$\Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \left|\frac{x_{\text{л}}}{l}\right| \leq \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{y_{\text{л}}}{l}\right| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \left|\frac{x_{\text{л}}}{l}\right| > \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{y_{\text{л}}}{l}\right| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

что соответствует обычно используемому определению двумерной прямоугольной функции. Когерентная передаточная функция

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1(v, \mu) &= \Psi(\lambda a' v, \lambda a' \mu) = \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \\ &= \text{Rect}\left(\frac{x_{\text{л}}}{l}\right) \text{Rect}\left(\frac{y_{\text{л}}}{l}\right) = \text{Rect}\left(\frac{\lambda a' v}{l}\right) \text{Rect}\left(\frac{\lambda a' \mu}{l}\right). \end{aligned}$$

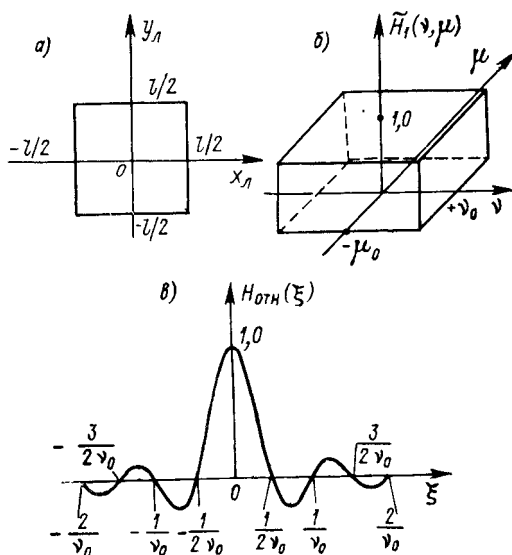


Рис. 300. Дифракционно ограниченная оптическая система с лучком квадратной формы (а) и ее когерентные функции: передаточная (б) и рассеяния (в)

Предельная пространственная частота для этой функции $\kappa_0 = v_0 = \mu_0 = l/2\lambda a'$, следовательно, можно найти (рис. 300, б)

$$\tilde{H}_1(v, \mu) = \text{Rect}\left(\frac{v}{2\kappa_0}\right) \text{Rect}\left(\frac{\mu}{2\kappa_0}\right).$$

Если $l = 100$ мм; $a' = 500$ мм; $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ мм, то $\kappa_0 = 200$ мм $^{-1}$.

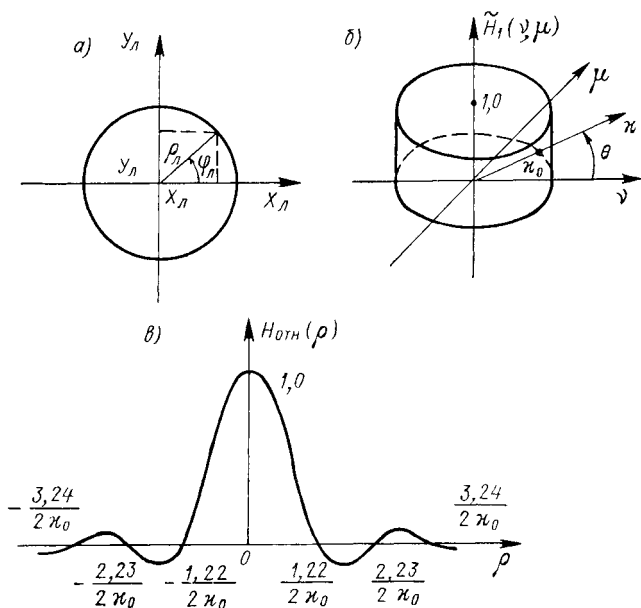


Рис. 301. Дифракционно ограниченная оптическая система с зрачком круглой формы (а) и ее когерентные функции: передаточная (б) и рассеяния (в)

Когерентная функция рассеяния соответственно равна

$$\begin{aligned} \dot{H}_1(\xi, \zeta) &= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dot{H}_1(v, \mu) e^{j2\pi(\xi v + \zeta \mu)} dv d\mu = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \text{Rect}\left(\frac{v}{2v_0}\right) \text{Rect}\left(\frac{\mu}{2\mu_0}\right) \times \\ &\times e^{j2\pi(\xi v + \zeta \mu)} dv d\mu = \int_{-v_0}^{+v_0} \int_{-\mu_0}^{+\mu_0} e^{j2\pi(\xi v + \zeta \mu)} dv d\mu = \\ &= 4v_0\mu_0 \text{Sinc}(2v_0\xi) \text{Sinc}(2\mu_0\zeta), \end{aligned}$$

или в относительных единицах $H_{\text{отн}}(\xi, \zeta) = \dot{H}_1(\xi, \zeta)/\dot{H}_1(0, 0) = \text{Sinc}(2v_0\xi) \text{Sinc}(2\mu_0\zeta) = \text{Sinc}(2\kappa_0\xi) \text{Sinc}(2\kappa_0\zeta)$.

Выполненные расчеты подтверждают, что нормированное значение преобразования Фурье прямоугольной функции есть Sinc-функция

$$\left[\mathcal{F} \left\{ \text{Rect}\left(\frac{v}{2\kappa_0}\right) \text{Rect}\left(\frac{\mu}{2\kappa_0}\right) \right\} \right]_{\text{отн}} = \text{Sinc}(2\kappa_0\xi) \text{Sinc}(2\kappa_0\zeta).$$

Значения функции $\text{Sinc } x$ могут быть получены на основании данных табл. 2. Функция $H_{\text{отн}}(\xi) = \text{Sinc}(2\nu_0\xi)$ дана на рис. 300, в.

Для зрачка круглой формы с диаметром $D = 2\rho_0$ (рис. 301) функция зрачка может быть представлена *круговой функцией*

$$\Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \text{Circ} \left(\frac{\sqrt{x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2}}{\rho_0} \right),$$

так как в этом случае

$$\Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \begin{cases} 1 & \text{при } (\sqrt{x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2})/\rho_0 \leq 1, \\ 0 & \text{при } (\sqrt{x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2})/\rho_0 > 1, \end{cases}$$

что соответствует обычно используемому определению круговой функции.

Когерентная передаточная функция (см. рис. 301, б)

$$\tilde{H}_1(\nu, \mu) = \Psi(\lambda a' \nu, \lambda a' \mu) = \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \text{Circ} \left(\frac{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}}{\rho_0/\lambda a'} \right).$$

В полярной системе координат соответственно имеем:

$$\rho_{\text{л}} = \sqrt{x_{\text{л}}^2 + y_{\text{л}}^2} \quad \kappa = \sqrt{\nu^2 + \mu^2},$$

$$\varphi_{\text{л}} = \text{arctg } y_{\text{л}}/x_{\text{л}} \quad \theta = \text{arctg } \mu/\nu,$$

$$\Psi(\rho_{\text{л}}, \varphi_{\text{л}}) = \Psi(\rho_{\text{л}}) = \text{Circ}(\rho_{\text{л}}/\rho_0),$$

$$\Psi(\rho_{\text{л}}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho_{\text{л}}/\rho_0 \leq 1, \\ 0 & \text{при } \rho_{\text{л}}/\rho_0 > 1. \end{cases}$$

$$\tilde{H}_1(\kappa, \theta) = \tilde{H}_1(\kappa) = \text{Circ } \kappa/\kappa_0,$$

где предельная пространственная частота

$$\kappa_0 = D/(2\lambda a') = \rho_0/(\lambda a').$$

Если $D = 100$ мм; $a' = 500$ мм; $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ мм, то $\kappa_0 = 200$ мм $^{-1}$.

Когерентная функция рассеяния для рассматриваемого случая может быть найдена с помощью преобразования Фурье—Бесселя (преобразования Ганкеля), как это уже делалось при вычислении спектров функций, обладающих осевой симметрией. Однако мы воспользуемся здесь простым правилом, в соответствии с которым нормированное значение преобразования Ганкеля (символ $\mathcal{B} \{ \}$) от круговой функции есть Bessinc-функция:

$$[\mathcal{B} \{ \text{Circ } \kappa/\kappa_0 \}]_{\text{отн}} = \text{Bessinc}(2\kappa_0\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$, $\kappa_0 = D/(2\lambda a') = \rho_0/(\lambda a')$.

Следовательно, относительное (нормированное) значение когерентной функции рассеяния (см. рис. 301, в)

$$H_{\text{отн}}(\rho) = \text{Bessinc}(2\kappa_0\rho) = 2J_1(2\pi\kappa_0\rho)/(2\pi\kappa_0\rho).$$

Нормированная функция рассеяния равна нулю, когда аргумент функции Бесселя J_1 последовательно равен 3,83; 7,02; 10,17; 13,32 и т. д. Отсюда легко найти радиус первого темного кольца

в распределении значений когерентной функции рассеяния: $2\lambda\kappa_0\rho_{01} = 3,83$; $\rho_{01} = (3,83/\pi) [1/(2\kappa_0)] = 1,22\lambda/(D/a') = 1,22/(2\kappa_0)$.

Заметим, что аналогичное выражение было получено для некогерентной функции рассеяния расфокусированной системы в § 14.1. Значения функции $2I_1(y_0)/y_0$ приведены в табл. 4, а ее график — на рис. 183.

§ 14.4. СВЯЗЬ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ НЕКОГЕРЕНТНОМ И КОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ С ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ: РАЗМЕРАМИ И ФОРМОЙ ЗРАЧКА, ФОКУСНЫМ РАССТОЯНИЕМ И КАЧЕСТВОМ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Функция рассеяния оптической системы при некогерентном освещении $h(x, y, x_1, y_1)$ была введена достаточно формально, ее

практические аппроксимации, заданные произвольно и рассмотренные в § 14.1, не позволяли установить органическую связь некогерентной передаточной функции с такими фундаментальными характеристиками оптической системы, как размеры и форма зрачка, фокусное расстояние и качество изображения. Между тем в § 13.3 было получено выражение, определяющее взаимосвязь некогерентной и когерентной передаточных функций. Это выражение

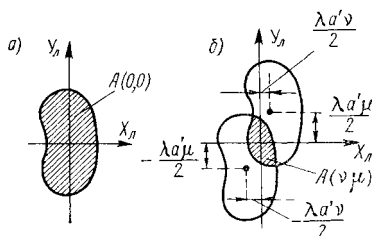


Рис. 302. К расчету ОПФ дифракционно ограниченной системы: а — зрачок площадью $A(0,0)$; б — два смещенных зрачка, площадь области перекрытия $A(\nu, \mu)$

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}\left(f_x - \frac{\nu}{2}, f_y - \frac{\mu}{2}\right) \tilde{H}^*\left(f_x + \frac{\nu}{2}, f_y + \frac{\mu}{2}\right) df_x df_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{H}(f_x, f_y)|^2 df_x df_y}$$

представляет относительную (нормированную для «нулевой частоты») некогерентную передаточную функцию $\tilde{h}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = \tilde{h}(\nu, \mu)/\tilde{h}(0, 0)$ в виде, допускающем удобную геометрическую интерпретацию.

Действительно, для дифракционно ограниченных оптических систем было найдено (см. § 14.3), что когерентная передаточная функция равна

$$\tilde{H}(\nu, \mu) = V\Psi(\lambda a'\nu, \lambda a'\mu),$$

где V — линейное увеличение; $\Psi(\lambda a'\nu, \lambda a'\mu)$ — функция зрачка; λ — длина волны монохроматического излучения; a' — расстояние от задней главной точки оптической системы до осевой точки изображения (для тонкой линзы).

Подставив значение $\tilde{H}(v, \mu)$ в выражение для $\tilde{h}_{\text{отн}}(v, \mu)$, путем простой замены переменных можно найти

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(v, \mu) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\left(f_x - \frac{\lambda a' v}{2}, f_y - \frac{\lambda a' \mu}{2}\right) \Psi\left(f_x + \frac{\lambda a' v}{2}, f_y + \frac{\lambda a' \mu}{2}\right) df_x df_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(f_x, f_y) df_x df_y}.$$

Поскольку функция зрачка Ψ равна единице или нулю, в подынтегральном выражении знаменателя Ψ^2 заменена на Ψ , а также не используются обозначения модуля и сопряженного значения функции ($|\Psi| = \Psi$, $\Psi^* = \Psi$).

На рис. 302 представлено геометрическое построение, соответствующее полученному выражению для оптической передаточной функции (ОПФ). Полная площадь зрачка, изображенного на этом рисунке, $A(0, 0)$ равна знаменателю ОПФ. Числитель представляет собой площадь $A(v, \mu)$ области перекрытия двух смещенных функций зрачка, центр одной лежит в точке с координатами $(\lambda a' v/2, \lambda a' \mu/2)$, а другой — в диаметрально противоположной точке $(-\lambda a' v/2, -\lambda a' \mu/2)$. Таким образом,

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(v, \mu) = A(v, \mu)/A(0, 0).$$

Для квадратного зрачка со стороной l и диагональю D ($l = 0,707 D$) можно найти (рис. 303):

$$A(v, \mu) = \begin{cases} (l - \lambda a' v)(l - \lambda a' \mu) & \text{при } |v| = |\mu| \leq l/\lambda a', \\ 0 & \text{при } |v| = |\mu| > l/\lambda a', \end{cases}$$

$$A(0, 0) = l^2.$$

Так как

$$(l - \lambda a' v)(l - \lambda a' \mu)/l^2 = \left(1 - \frac{v}{l/(\lambda a')}\right) \left(1 - \frac{\mu}{l/(\lambda a')}\right),$$

то введя обозначение $\kappa_0 = v_0 = \mu_0 = l/(2\lambda a')$, и определяя треугольные функции:

$$\Lambda\left(\frac{v}{4\kappa_0}\right) = \Lambda\left(\frac{v}{4\kappa_0}\right) = \begin{cases} 1 - 2\left|\frac{v}{4\kappa_0}\right| & \text{при } \left|\frac{v}{4\kappa_0}\right| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \left|\frac{v}{4\kappa_0}\right| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\Lambda\left(\frac{\mu}{4\kappa_0}\right) = \Lambda\left(\frac{\mu}{4\kappa_0}\right) = \begin{cases} 1 - 2\left|\frac{\mu}{4\kappa_0}\right| & \text{при } \left|\frac{\mu}{4\kappa_0}\right| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \left|\frac{\mu}{4\kappa_0}\right| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

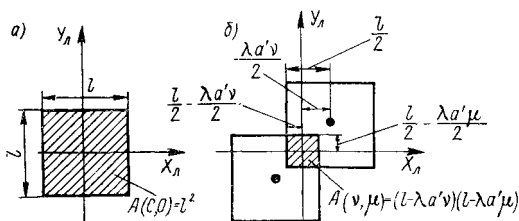


Рис. 303. К расчету ОПФ дифракционно ограниченной системы с квадратным зрачком: а — квадратный зрачок площадью l^2 ; б — два смещенных квадратных зрачка, площадь области перекрытия $(l - \lambda a' v)(l - \lambda a' \mu)$

найдем

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = \begin{cases} \Lambda\left(\frac{\nu}{4\kappa_0}\right) \Lambda\left(\frac{\mu}{4\kappa_0}\right) & \text{при } \left|\frac{\nu}{4\kappa_0}\right| \text{ и } \left|\frac{\mu}{4\kappa_0}\right| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \left|\frac{\nu}{4\kappa_0}\right| \text{ и } \left|\frac{\mu}{4\kappa_0}\right| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $\kappa_0 = l/(2\lambda a') = D/(2,82\lambda a')$ — предельная пространственная частота для когерентной системы. Вид некогерентной передаточной функции (ОПФ) представлен на рис. 304, б.

Предельная пространственная частота при некогерентном освещении равна $2\kappa_0$, так как для $|\nu| = 2\kappa_0$ или $|\mu| = 2\kappa_0$, $\tilde{h}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = 0$.

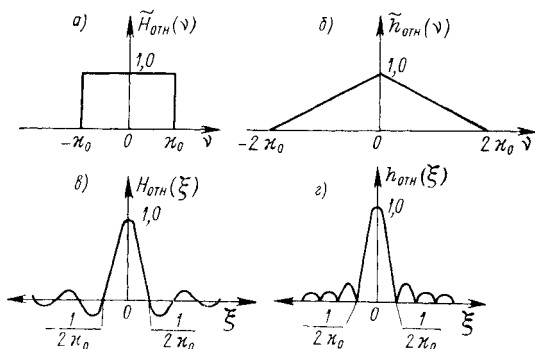


Рис. 304. Одномерные передаточные функции и функции рассеяния дифракционно ограниченных оптических систем с квадратным зрачком (сечения вдоль осей ξ и ν): а — когерентная передаточная функция; б — когерентная функция рассеяния; в — некогерентная передаточная функция; г — некогерентная функция рассеяния (κ_0 — предельная частота при когерентном освещении)

Функцию рассеяния для некогерентного освещения можно найти с помощью прямого преобразования Фурье оптической передаточной функции. Поскольку $\tilde{h}_{\text{отн}}(\nu, \mu) = \tilde{h}_{\text{отн}}(\nu) \tilde{h}_{\text{отн}}(\mu)$, решение задачи выполним для одномерной функции

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(\kappa) = \begin{cases} 1 - 2\left|\frac{\kappa}{4\kappa_0}\right| & \text{при } \left|\frac{\kappa}{4\kappa_0}\right| \leq 1, \\ 0 & \text{при } \left|\frac{\kappa}{4\kappa_0}\right| > 1. \end{cases}$$

Учитывая, что функция $\tilde{h}_{\text{отн}}(\kappa)$ четная, найдем косинус-преобразование Фурье

$$\begin{aligned} h(\xi) &= 2 \int_0^{\infty} \tilde{h}_{\text{отн}}(\kappa) \cos(2\pi\xi\kappa) d\kappa = 2 \int_0^{2\kappa_0} \left[1 - 2\left(\frac{\kappa}{4\kappa_0}\right)\right] \cos(2\pi\xi\kappa) d\kappa = \\ &= 2 \int_0^{2\kappa_0} \cos(2\pi\xi\kappa) d\kappa - \frac{2}{2\kappa_0} \int_0^{2\kappa_0} \kappa \cos(2\pi\xi\kappa) d\kappa. \end{aligned}$$

Поскольку $\int x \cos ax dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$, а $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, найдем

$$h(\xi) = 2\kappa_0 \text{Sinc}^2(2\kappa_0\xi),$$

где $\kappa_0 = l/(2\lambda a')$, $\text{Sinc}(2\kappa_0\xi) = \sin(2\pi\kappa_0\xi)/(2\pi\kappa_0\xi)$.

Нормированное значение двумерной функции рассеяния для некогерентного освещения соответственно равно

$$h_{\text{отн}}(\xi, \zeta) = h_{\text{отн}}(\xi) h_{\text{отн}}(\zeta) = \text{Sinc}^2(2\kappa_0 \xi) \text{Sinc}^2(2\kappa_0 \zeta).$$

Этот же результат можно получить из соотношения

$$h_{\text{отн}}(\xi, \zeta) = |\dot{H}_{\text{отн}}(\xi, \zeta)|^2,$$

где когерентная функция рассеяния для зрачка квадратной формы равна

$$H_{\text{отн}}(\xi, \zeta) = \text{Sinc}(2\kappa_0 \xi) \text{Sinc}(2\kappa_0 \zeta),$$

следовательно

$$h_{\text{отн}}(\xi, \zeta) = \text{Sinc}^2(2\kappa_0 \xi) \text{Sinc}^2(2\kappa_0 \zeta).$$

Некогерентная функция рассеяния для оптической системы, имеющей квадратный зрачок, представлена на рис. 304, *г*.

Для круглого зрачка диаметром D площадь

$$A(0, 0) = \pi D^2/4:$$

площадь области перекрытия (рис. 305, *б*) равна

$$A(v, \mu) = 4 [(s_1 + s_2) - (s_1)];$$

площадь сектора

$$(s_1 + s_2) =$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} \pi D^2/4 = \frac{\arccos \lambda a' \kappa / D}{2\pi} \pi \frac{D^2}{4},$$

площадь треугольника

$$(s_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda a' \kappa}{2} \right) \sqrt{(D/2)^2 - (\lambda a' \kappa / 2)^2},$$

где κ — пространственная частота вдоль радиус-вектора ρ ;

площадь части сегмента (s_2)

$$(s_2) = (s_1 + s_2) - (s_1) = \frac{\pi D^2}{4} \left[\frac{1}{2\pi} \arccos \frac{\kappa}{2\kappa_0} - \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa}{2\kappa_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{2\kappa_0} \right)^2} \right],$$

где $\kappa_0 = D/(2\lambda a')$. Таким образом,

$$\bar{h}_{\text{отн}}(\kappa) = \begin{cases} \frac{4(s_2)}{\pi D^2/4} & \text{— в пределах существования области перекрытия;} \\ 0 & \text{— вне пределов существования области перекрытия.} \end{cases}$$

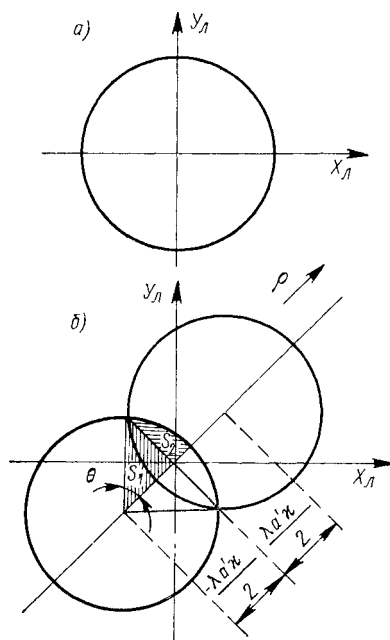


Рис. 305. К расчету ОПФ дифракционно ограниченной системы с круглым зрачком: *а* — круглый зрачок площадью $\pi D^2/4$; *б* — два смежных вдоль радиуса-вектора ρ круглых зрачка, площадь области перекрытия $4S_2 = 4 [(s_1 + s_2) - (s_1)]$

Следовательно,

$$\tilde{h}_{\text{отн}}(\kappa) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{\kappa}{2\kappa_0} \right) - \left(\frac{\kappa}{2\kappa_0} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa}{2\kappa_0} \right)^2} \right] & \text{при } \kappa \leq 2\kappa_0 \\ 0 & \text{при } \kappa > 2\kappa_0. \end{cases}$$

На рис. 306, б представлена ОПФ дифракционно ограниченной системы. Ее предельная частота $2\kappa_0$ в два раза превышает предельную частоту при когерентном освещении. Ранее соответствующая функция была приведена без доказательств на рис. 291, б в терминах x/ρ , где $x = D\rho/(\lambda f')$; D , f' — диаметр и заднее фокусное расстояние

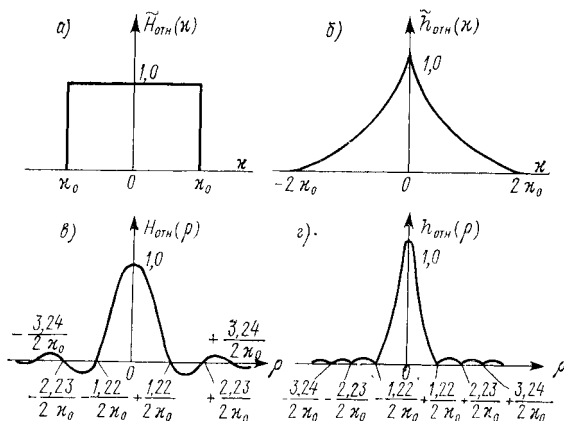


Рис. 306. Одномерные передаточные функции и функции рассеяния дифракционно ограниченных оптических систем с круглым зрачком (сечение вдоль радиуса-вектора $\vec{\rho}$): а, б — когерентная и некогерентная передаточные функции соответственно; в, г — когерентная и некогерентная функции рассеяния соответственно; (κ_0 — предельная частота при когерентном освещении)

объектива (если предмет находится на «бесконечности» $a' = f'$); λ — длина волны света; ρ — радиус-вектор в плоскости зрачка. Очевидно, что $2\kappa_0 = D / (\lambda a') = x/\rho$.

Нормированное значение двумерной функции рассеяния при некогерентном освещении найдем, возведя в квадрат модуль когерентной функции рассеяния

$$h_{\text{отн}}(\rho) = |\dot{H}_{\text{отн}}(\rho)|^2 = \text{Bessinc}^2(2\kappa_0\rho),$$

где Bessinc-функция

$$\text{Bessinc}(2\kappa_0\rho) = \frac{2J_1(2\pi\kappa_0\rho)}{2\pi\kappa_0\rho},$$

радиус первого темного кольца

$$\rho_{01} = 1,22/(2\kappa_0) = 1,22\lambda/(D/a').$$

Некогерентная функция рассеяния дифракционно ограниченной оптической системы с круглым зрачком была исследована Эри в 1864 г. Поэтому распределение освещенности в изображении светящейся точки, описываемое функцией $\text{Bessinc}^2(x)$, называют *дифракционным диском или дифракционным пятном Эри*. Впоследствии (в 1879 г.). Релей показал, что интенсивность центрального макси-

муна дифракционного пятна Эри уменьшается всего на 20 %, что почти не влияет на качество изображения, если волновая поверхность отличается от идеальной сферы не более, чем на $\lambda/4$, т. е. она заключена между двумя сферическими поверхностями, расположенными на расстоянии $\lambda/4$. Это и есть знаменитое *правило четверти волны* Релея.

Экстремальные значения функций Bessinc (x) = $2J_1(\pi x)/(\pi x)$ и Bessinc² (x) = $2J_1^2(\pi x)/(\pi x)^2$, а также значения их аргумента x , при котором эти функции равны нулю, приведены в табл. 22. В табл. 4 были приведены значения функции $2J_1(y_0)/y_0$, позволяющие легко вычислить функции Bessinc (x) и Bessinc² (x), так как $x = y_0/\pi$. Анализ функции Bessinc² (x) показывает, что значение освещенности в дифракционном изображении точки резко уменьшается в периферических зонах пятна Эри. Действительно, максимальное значение освещенности в пределах первого светлого кольца, окружающего светлое пятно в центре, составляет всего 1,7 % от освещенности в центре, во втором светлом кольце — 0,42 %, в третьем — 0,16 %, в четвертом — 0,078 % и т. д. Однако, поток излучения за пределами центрального пятна составляет значительную величину (около 16 %). Покажем это, вычислив распределение потока излучения в дифракционном пятне Эри.

Освещенность элементарного кольца, расположенного на расстоянии ρ от центра и имеющего площадь $2\pi\rho d\rho$, с точностью до постоянного коэффициента равна

$$E(\rho) = \text{Bessinc}^2(2\kappa_0\rho).$$

Следовательно, поток излучения, распределенный внутри элементарного кольца, равен

$$d\Phi = 2\pi\rho E(\rho) d\rho = 2\pi\rho \text{Bessinc}^2(2\kappa_0\rho) d\rho,$$

а поток, попадающий в круг радиусом ρ ,

$$\Phi(\rho) = 2\pi \int_0^\rho \text{Bessinc}^2(2\kappa_0\rho) \rho d\rho = 8\pi \int_0^\rho \frac{J_1^2(2\pi\kappa_0\rho)}{(2\pi\kappa_0\rho)^2} \rho d\rho.$$

Вводя обозначение $z = 2\pi\kappa_0\rho$, найдем

$$\Phi(z) = \frac{2}{\pi\kappa_0^2} \int_0^z \frac{J_1^2(z)}{z} dz.$$

Т а б л и ц а 22

Значения функций Bessinc (x)
и Bessinc² (x)

x	Bessinc (x)	Bessinc ² (x)
0	1	1
1,22	0	0
1,64	−0,132	0,017
2,23	0	0
2,69	0,064	0,0041
3,24	0	0
3,70	−0,04	0,0016
4,24	0	0
4,71	0,028	0,00078

Используя формулы приведения бесселевых функций

$$\frac{dJ_k(z)}{dz} = J_{k-1}(z) - \frac{k}{z} J_k(z) \text{ или } \frac{d[J_k(z) z^k]}{dz} = z^k J_{k-1}(z),$$

получим:

$$J_1'(z) = \frac{dJ_1(z)}{dz} = J_0(z) - \frac{J_1(z)}{z};$$

$$J_1(z) = -J_0'(z) = -\frac{dJ_0(z)}{dz};$$

$$\begin{aligned} \frac{J_1^2(z)}{2} &= \int J_1(z) dJ_1(z) = \int J_1(z) \left[J_0(z) - \frac{J_1(z)}{z} \right] dz = \\ &= \int J_1(z) J_0(z) dz - \int \frac{J_1^2(z)}{z} dz = - \int J_0(z) dJ_0(z) - \\ &- \int \frac{J_1^2(z)}{z} dz = - \frac{J_0^2(z)}{2} - \int \frac{J_1^2(z)}{z} dz. \end{aligned}$$

С учетом того, что при целом k $J_{-k}(z) = (-1)^k J_k(z)$, получим

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi \kappa_0^2} [-J_1^2(z) - J_0^2(z)]_0^z = \frac{1}{\pi \kappa_0^2} [1 - J_1^2(z) - J_0^2(z)],$$

поскольку $J_1(0) = 0$, $J_0(0) = 1$.

Нормируя полученное выражение и возвращаясь к значениям ρ , найдем

$$\Phi_{\text{отн}}(\rho) = \Phi(\rho)/\Phi(\infty) = 1 - J_1^2(2\pi \kappa_0 \rho) - J_0^2(2\pi \kappa_0 \rho).$$

В табл. 23 приведены значения $\Phi_{\text{отн}}(\rho)$ и $1 - \Phi_{\text{отн}}(\rho)$, характеризующие распределение потока излучения в дифракционном пятне Эри.

Таким образом, передаточные функции и функции рассеяния некогерентных оптических систем были получены через соответствующие функции, рассчитанные при когерентном освещении. В свою очередь, эти функции связаны с распределением комплексных амплитуд поля в зрачке оптической системой, т. е. с ее фундаментальными характеристиками. Были рассмотрены наиболее простые и в то же время наиболее часто встречающиеся примеры, относящиеся к случаю равномерно пропускающего свет зрачка квадратной и круглой формы. В некоторых практических приложениях используются оптические системы, построенные таким образом, что комплексная амплитуда поля в плоскости зрачка изменяется по определенному закону, зависящему от решаемой задачи. Обычно это достигается за счет наложения на зрачок специальных диафрагм или масок.

Т а б л и ц а 23

Распределение потока излучения
в дифракционном пятне Эри

ρ	1,22	2,23	3,24	4,24
$\Phi_{\text{отн}}(\rho)$	0,839	0,910	0,938	0,953
$1 - \Phi_{\text{отн}}(\rho)$	0,161	0,090	0,062	0,047

и круглой формы. В некоторых практических приложениях используются оптические системы, построенные таким образом, что комплексная амплитуда поля в плоскости зрачка изменяется по определенному закону, зависящему от решаемой задачи. Обычно это достигается за счет наложения на зрачок специальных диафрагм или масок.

В наиболее простом случае, когда решается задача восприятия слабого точечного источника по соседству с яркой точкой, дифракционные кольца вокруг изображения которой мешают наблюдению изображения слабого источника, распределение амплитуд в зрачке изменяется так, чтобы уменьшить освещенность дифракционных колец вокруг изображения яркой точки, т. е. убрать фон — основание («под»), на котором осуществляется наблюдение. Этот прием называют *аподизацией* (а-подизация, т. е. устранение основания). Аподизация сопровождается расширением центрального максимума дифракционной картины, т. е. осуществляя ее мы выигрываем в обнаружении слабого источника на некотором расстоянии от сильного, теряя в пределе разрешения двух одинаковых точечных источников.

Иногда поступают наоборот, уменьшая освещенность в центре дифракционного пятна, увеличивают освещенность колец. При этом улучшается разрешающая способность для точечных источников и ухудшается контраст для протяженных объектов. Возможны и другие методы, рассмотрение которых выходит за рамки настоящей книги. Читатель найдет соответствующие материалы в цитированной литературе, в частности, в основополагающей монографии [77].

Важное практическое значение имеют результаты расчета передаточной функции дифракционно ограниченной некогерентной оптической системы с круглым непрозрачным экраном в центре. Определяя площадь перекрытия двух колец, одно из которых скользит по другому, О'Нейл получил кривые, представленные на рис. 307. На этом рисунке по оси абсцисс отложено значение пространственной частоты в относительных единицах $[\chi/(2\chi_0)]$, параметр η равен отношению диаметра непрозрачного экрана D_0 к диаметру объектива (D), т. е. $\eta = D_0/D$, незранированная часть площади зрачка равна $1 - \eta^2 = 1 - (D_0/D)^2 = (s - s_0)/s_0$, где $s = \pi D^2/4$, $s_0 = \pi D_0^2/4$. Рассмотренные выше примеры показывают, что предельная частота передаточной функции оптической системы при некогерентном освещении в два раза превышает предельную частоту при когерентном освещении. Это обстоятельство, однако, еще не означает, что качество изображения при некогерентном освещении выше, чем при когерентном. Прямое сравнение предельных частот не позволяет осуществить оценку качества изображения, в частности потому, что предельная частота при когерентном освещении определяет максимальную частоту амплитуды изображения, в то время как предельная частота при некогерентном освещении относится к частотным составляющим интенсивности изображения, причем в конечном

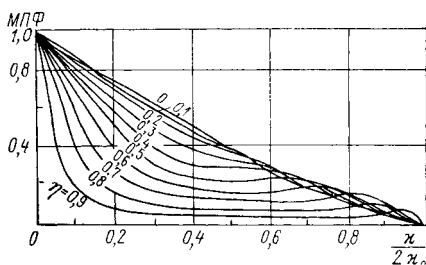


Рис. 307. Одномерная МПФ дифракционно ограниченной некогерентной оптической системы с круглым непрозрачным экраном в центре

итоге в обоих случаях наблюдается интенсивность. Кроме того, критерии качества изображения настолько сложны, что свести оценку только к значению предельной частоты было бы совершенно неправильно. В каждом конкретном случае необходимо выбирать тот вид освещения (когерентное или некогерентное), который позволит наилучшим образом решить задачу, поставленную перед наблюдателем изображения. Так, наличие выраженных осцилляций яркости на резких контурах изображения при когерентном освещении, связанных с резкими переходами когерентной передаточной функции, в ряде случаев может оказаться недопустимым. Зернистость изображения (наличие «спеклов»), которая наблюдается при высокой степени когерентности освещения, также вызывает неприятные ощущения. Однако, «спекловая» структура при когерентном освещении позволяет выявить малозаметные детали изображения, что имеет огромное значение при решении целого ряда специальных задач при анализе изображений.

Простой пример, приведенный в [27], относящийся к возможности разрешения изображения двух точек, наглядно подтверждает необоснованность общих заключений о преимуществах одного или другого вида освещения.

В соответствии с хорошо известным *критерием Релея* два некогерентных точечных источника разрешаются дифракционно ограниченной некогерентной оптической системой, если центр диска Эри, созданного одним источником, совпадает с первым темным кольцом дифракционной картины, созданной вторым источником. Минимальное расстояние между источниками в этом случае равно радиусу первого темного кольца $\rho_{01} = 1,22\lambda/(D/a')$, а провал в центре дифракционной картины, создаваемой двумя источниками, составляет 19 %. Если наблюдаемые источники, разнесенные на минимальное расстояние по Релею, когерентны, причем сдвиг фазы излучения одного источника относительно излучения второго составляет φ , то распределение освещенности в дифракционной картине можно найти следующим образом.

Распределение комплексной амплитуды света в изображении когерентного точечного источника, находящегося на оптической оси объектива, определяется выражением $2J_1(\pi x)/(\pi x)$, где $x = 2\kappa_0\rho$, $2\kappa_0 = D/(\lambda a')$. Если источник сдвинут от оси на половину минимального расстояния Релея, т. е. на величину $\Delta\rho = 0,61\lambda/(D/a') = 0,61/(2\kappa_0)$ или $\Delta x = 2\kappa_0\Delta\rho = 0,61$ то распределение комплексной амплитуды будет $2J_1[\pi(x \pm 0,61)]/(\pi(x \pm 0,61))$. Следовательно, интенсивность в дифракционной картине распределена по закону

$$J(x) = \left[\frac{2J_1[\pi(x - 0,61)]}{\pi(x - 0,61)} + e^{i\varphi} \frac{2J_1[\pi(x + 0,61)]}{\pi(x + 0,61)} \right]^2.$$

На рис. 308 приведены распределения интенсивности при $\varphi = 0, 90$ и 180° . Распределение интенсивности для случая $\varphi = 90^\circ$ соответствует распределению интенсивности для двух некогерентных источников. Для $\varphi = 0$ провал на кривой $J(x)$ отсутствует и две когерентно излучающие точки труднее различить, чем в случае неко-

герентного освещения. Если же источники излучают в противофазе ($\varphi = 180^\circ$), то провал на кривой больше 19% и при когерентном освещении две точки различимы лучше, чем при некогерентном. Таким образом, нельзя сделать однозначного вывода о преимуществах того или иного вида освещения.

В дифракционно ограниченной оптической системе точечный источник излучения (источник сферической волны) обуславливает появление в выходном зрачке сферической волны, сходящейся в точке идеального изображения. При наличии *аббераций* (отклонений волнового фронта в выходном зрачке от сферической формы) оптическую передаточную функцию можно вычислить, заменяя *дейст-*

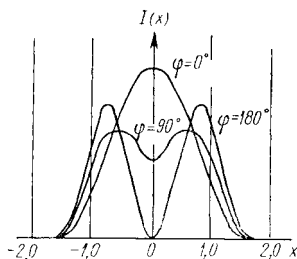


Рис. 308. Распределение освещенности в изображении двух когерентно светящихся точек

тельную функцию зрачка $\Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$ обобщенной комплексной функцией зрачка

$$\dot{\Psi}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) = \Psi(x_{\text{л}}, y_{\text{л}}) e^{ikW(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})},$$

где $k = 2\pi/\lambda$; $W(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$ — абберационная функция.

Абберационная функция представляет собой отклонение волнового фронта от идеального сферического фронта в точке зрачка с координатами $(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$. Следовательно, при расчете обобщенной функции зрачка предполагается, что искажения волны создаются воображаемой фазовой пластинкой, деформирующей выходящий из зрачка фронт волны в соответствии с комплексным коэффициентом пропускания $\dot{\Psi}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$. Функция рассеяния когерентной системы с абберациями представляет собой картину Фраунгофера на отверстии с коэффициентом пропускания $\dot{\Psi}(x_{\text{л}}, y_{\text{л}})$. Функция рассеяния некогерентной системы с абберациями равна квадрату модуля когерентной функции рассеяния.

Когерентная передаточная функция системы с абберациями равна

$$\tilde{H}_1(\nu, \mu) = \dot{\Psi}(\lambda a' \nu, \lambda a' \mu) = \Psi(\lambda a' \nu, \lambda a' \mu) e^{ikW(\lambda a' \nu, \lambda a' \mu)}.$$

Таким образом, при когерентном освещении абберации вносят фазовые искажения в пределах полосы пропускания, которая, как

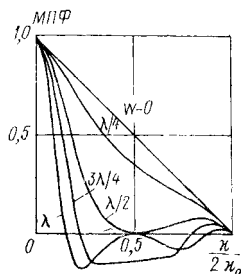


Рис. 309. Одномерная МПФ расфокусированной некогерентной оптической системы, имеющей зрачок квадратной формы (сечение вдоль оси x , пространственная частота $\kappa = \nu$)

и для дифракционно ограниченной системы, определяется конечными размерами зрачка объектива.

Для некогерентной системы с аберрациями

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{отн}}(v, \mu) = \\ = \frac{\iint_{A(v, \mu)} e^{jk \left[w \left(f_{x\text{л}} - \frac{\lambda a' v}{2}, f_{y\text{л}} - \frac{\lambda a' \mu}{2} \right) - w \left(f_{x\text{л}} + \frac{\lambda a' v}{2}, f_{y\text{л}} + \frac{\lambda a' \mu}{2} \right) \right]}{A(0, 0)} df_{x\text{л}} df_{y\text{л}}, \end{aligned}$$

где $A(0, 0)$ — область интегрирования, соответствующая площади всего зрачка; $A(v, \mu)$ — область интегрирования, соответствующая площади перекрытия функций $\Psi(f_{x\text{л}} - \lambda a' v/2, f_{y\text{л}} - \lambda a' \mu/2)$ и $\Psi(f_{x\text{л}} + \lambda a' v/2, f_{y\text{л}} + \lambda a' \mu/2)$.

Аберрации никогда не увеличивают модуль ОПФ—МПФ, они уменьшают контраст каждой пространственно-частотной составляющей освещенности изображения. Абсолютное значение предельной частоты остается неизменным, однако значения МПФ на высоких частотах при сильных аберрациях могут быть настолько малы, что введенная Шаде эквивалентная полоса частот

$$N_e = \int_0^\infty |\tilde{h}_{\text{отн}}(\kappa)|^2 d\kappa,$$

уменьшается по сравнению с дифракционно ограниченной системой. Кроме того, аберрации могут привести к наличию отрицательных значений ОПФ, что совершенно невозможно в системах, свободных от аберраций. Для отрицательных значений ОПФ, составляющие изображения испытывают изменение знака контраста. Это явление было рассмотрено в § 14.1 для расфокусированной системы, которая условно может рассматриваться как система с аберрациями, хотя отклонения фронта волны от сферического здесь не происходит.

На рис. 309 показаны кривые МПФ для расфокусированной оптической системы, имеющей зрачок квадратной формы со стороной l , при различных значениях максимальной аберрационной функции

$$W = \epsilon l^2/8,$$

где

$$\epsilon = 1/a' + 1/a - 1/f'.$$

Полученное Дж. Гудменом выражение для ОПФ в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\text{отн}}(v, \mu) = \Lambda\left(\frac{v}{2\kappa_0}\right) \Lambda\left(\frac{\mu}{2\kappa_0}\right) \text{Sinc}\left[\frac{8W}{\lambda}\left(\frac{v}{2\kappa_0}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{|v|}{2\kappa_0}\right)\right] \text{Sinc}\left[\frac{8W}{\lambda}\left(\frac{\mu}{2\kappa_0}\right) \left(1 - \frac{|\mu|}{2\kappa_0}\right)\right]. \end{aligned}$$

Глава 15

СПЕКТР СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ УСИЛИТЕЛЯ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА ПРИ НЕКОГЕРЕНТНОМ ОСВЕЩЕНИИ

В общем случае для линейной системы освещенность плоскости изображения в точке с координатами x, y равна

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

где $L(x_1, y_1)$ — яркость объекта наблюдения в точке с координатами x_1, y_1 , выраженная в $\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$; σ'_A — задний апертурный угол оптической системы, ...°; T_0 — ее спектральный коэффициент пропускания на заданной длине волны; коэффициент $\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A$, измеряется в ср; $h(x, y, x_1, y_1)$ — функция рассеяния объектива, создающего изображение объекта наблюдения, определяющая освещенность в точке (x, y) плоскости изображения, когда в точку (x_1, y_1) падает поток излучения, равный единице; функция рассеяния нормирована, т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 = 1$, следовательно, она измеряется в см^{-2} .

Если яркость объекта наблюдения является функцией времени, то освещенность плоскости изображения также зависит от времени:

$$E(x, y, t) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1, t) h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Поместим в плоскость изображения безынерционный приемник излучения, имеющий распределение дифференциальной крутизны по координатам x и y — $S(x, y)$. Тогда реакция приемника, связанная с воздействием излучения на элемент его чувствительной площадки $dx dy$, равна

$$dU_0(t) = S(x, y) E(x, y, t) dx dy.$$

Полная реакция приемника при условии аддитивности реакций, связанных с воздействием потока излучения на элементарные площадки, выразится как

$$U_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) E(x, y, t) dx dy,$$

или

$$U_0(t) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1, t) S(x, y) h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1 dx dy.$$

Полученное выражение определяет форму сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником.

Временной спектр этого сигнала выражается преобразованием Фурье

$$\tilde{U}_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Для инерционного приемника, имеющего коэффициент передачи $k_{\text{пр}}(f)$, спектральную плотность можно найти, если предположить, что сигнал, выработанный безынерционным приемником, проходит через четырехполосник с коэффициентом передачи $k_{\text{пр}}(f)$:

$$\tilde{U}(f) = \tilde{U}_0(f) \dot{k}_{\text{пр}}(f).$$

Комплексный спектр напряжения сигнала на выходе усилителя

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{U}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{yc}}(f),$$

где $\dot{S}_{\text{вх}}(f) = \dot{u}(f)/\dot{U}(f)$ — крутизна входной цепи, состоящей из цепи включения приемника и цепи связи (рис. 227); $\dot{u}_c(f)$ — комплексная амплитуда напряжения сигнала на выходе усилителя; $\dot{u}(f)$ — комплексная амплитуда напряжения сигнала на входе усилителя; $\dot{U}(f)$ — комплексная амплитуда обобщенного сигнала, вырабатываемого приемником излучения; $\dot{K}_{\text{yc}}(f) = \dot{u}_c(f)/\dot{u}(f)$ — коэффициент передачи усилителя.

Следовательно, спектральная плотность выходного напряжения

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{U}_0(f) \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{yc}}(f),$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{u}_c(f) = & \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{yc}}(f) \times \\ & \times \iiint_{-\infty}^{+\infty} \int L(x_1, y_1, t) S(x, y) h(x, y, x_1, y_1) e^{-j2\pi ft} dx_1 dy_1 dx dy dt, \end{aligned}$$

причем $\tilde{u}_c(f)$ выражается в В·с или В·Гц⁻¹.

Полученное выражение можно существенно упростить, если ввести два важных допущения:

1) предположить, что оптическая система обладает свойством изопланарности (пространственной инвариантности), т. е.

$$h(x, y, x_1, y_1) = h(x - x_1, y - y_1);$$

2) задать закон сканирования (пространственной развертки изображения), когда зависимость освещенности в точке (x, y) плоскости изображения от времени $E(x, y, t)$ будет определена в явном виде.

§ 15.1. ИЗОПЛАНАРНАЯ ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА И ЗАДАННЫЙ ЗАКОН СКАНИРОВАНИЯ

Рассмотрим наиболее типичный случай, когда за счет сканирования объект движется относительно приемной системы, имея неизменную за время наблюдения яркость в точке с координатами x_1, y_1 .

Предположим, что относительное перемещение изображения объекта совершается вдоль оси x со скоростью v (рис. 310), и введем си-

стему координат $x'O'y'$, связанную с подвижным изображением объекта. В этих координатах освещенность в точке (x', y') от времени не зависит и равна $E(x', y')$, а сама система координат $x'O'y'$ движется относительно системы координат xOy вдоль оси x так, что $x' = x - vt$; $y' = y$.
В этом случае

$$E(x', y') = E(x - vt, y)$$

и реакция безынерционного приемника на воздействие потока излучения определяется выражением

$$\begin{aligned} U_0(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) E(x - vt, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} E(x - vt, y) S(x, y) dx. \end{aligned}$$

Введем обозначение $vt = x_0$ и рассмотрим внутренний интеграл выражения для $U_0(t)$, обозначив его $U_0(x_0, y)$:

$$U_0(x_0, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x - x_0, y) S(x, y) dx.$$

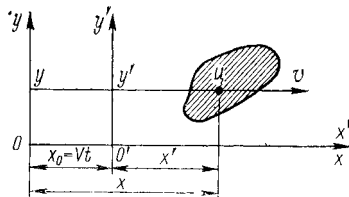


Рис. 310. Движение системы координат $x'O'y'$, связанной с изображением объекта наблюдения (Ц), относительно неподвижной системы координат xOy

Вернемся к обозначению $x' = x - x_0$; тогда получим

$$\begin{aligned} U_0(x_0, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(x', y) S(x' + x_0, y) dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(x', y) S[x_0 - (-x'), y] dx'. \end{aligned}$$

Если принять $x'' = -x'$, $dx' = -dx''$ и иметь в виду, что

$$x' = \begin{cases} -\infty, & x'' = +\infty; \\ +\infty, & x'' = -\infty, \end{cases}$$

найдем

$$U_0(x_0, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(-x'', y) S(x_0 - x'', y) dx''.$$

Полученный интеграл есть одномерная свертка функций $E(-x_0, y)$ и $S(x_0, y)$, т. е.

$$U_0(x_0, y) = E(-x_0, y) \otimes S(x_0, y).$$

Спектр свертки можно найти сразу же как произведение спектров функций, образующих свертку, однако, учитывая некоторые особенности, выполним весь расчет полностью.

Одномерный спектр функции $U_0(x_0, y)$ равен

$$\begin{aligned} U_0(v, \hat{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y) e^{-j2\pi vx_0} dx_0 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(-x'', y) dx'' \int_{-\infty}^{+\infty} S(x_0 - x'', y) e^{-j2\pi vx_0} dx_0. \end{aligned}$$

Так как $x_0 - x'' = x_0 + x' = x$, то

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(v, \hat{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(-x'', y) dx'' \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) e^{-j2\pi v(x+x'')} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(-x'', y) e^{-j2\pi vx''} dx'' \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) e^{-j2\pi vx} dx. \end{aligned}$$

Вновь заменим переменную $-x'' = x'$, причем заметим, что в процессе этой замены одновременно с изменением знака первого интеграла изменяются знаки пределов интегрирования; следовательно,

$$\tilde{U}_0(v, \hat{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x', y) e^{j2\pi vx'} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Первый интеграл представляет собой сопряженный одномерный спектр функции $E(x', y)$, а второй — одномерный спектр функции $S(x, y)$, поэтому

$$\tilde{U}_0(v, \hat{y}) = \tilde{E}^*(v, \hat{y}) \tilde{S}(v, \hat{y}),$$

где

$$\tilde{E}^*(v, \hat{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x', y) e^{j2\pi vx'} dx',$$

или (так как $y = y'$)

$$\tilde{E}^*(v, \hat{y}) = \tilde{E}^*(v, \hat{y}') = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x', y') e^{j2\pi vx'} dx',$$

а

$$\tilde{S}(v, \hat{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) e^{-j2\pi vx} dx.$$

Далее, поскольку

$$U_0(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0, y) dy,$$

то соответствующий спектр

$$\tilde{U}_0(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_0(v, \hat{y}) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*(v, \hat{y}) \tilde{S}(v, \hat{y}) dy.$$

Вспомним, что нас интересует функция

$$U_0(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) E(x - vt, y) dx dy$$

и ее спектр

$$\tilde{U}_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t) e^{-j2\pi f t} dt = \iiint_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) E(x - vt, y) e^{-j2\pi f t} dx dy dt.$$

Но $U_0(x_0) = U_0(vt)$, а спектр функции $U_0(vt)$ равен

$$\overline{U_0(vt)} = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(vt) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0) e^{-j2\pi (f/v) x_0} dx_0.$$

При движении изображения объекта в картинной плоскости с линейной скоростью v вдоль оси x пространственный период λ анализируется за время T , представляющее собой период изменения сигнала во времени. Следовательно, $T = \lambda/v$; но $T = 1/f$, а $\lambda = 1/v$, т. е. $f = v\lambda$, или $f/v = \lambda$. Тогда

$$\overline{U_0(vt)} = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(x_0) e^{-j2\pi v \lambda x_0} dx_0 = \frac{\tilde{U}_0(v)}{v}.$$

Поскольку функция $U_0(vt)$ определяется выражением

$$U_0(vt) = \iint_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) E(x - vt, y) dx dy,$$

то ее спектр

$$\overline{U_0(vt)} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) E(x - vt, y) e^{-j2\pi f t} dx dy dt;$$

следовательно,

$$\tilde{U}_0(f) = \overline{U_0(vt)} = \tilde{U}_0(v)/v = \tilde{U}_0(f/v)/v,$$

т. е.

$$\tilde{U}_0(f) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*(v, \hat{y}) \tilde{S}(v, \hat{y}) dy = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) dy.$$

Для того, чтобы получить эту формулу, можно также использовать соотношение $\tilde{U}_0(f) df = \tilde{U}_0(v) dv$, откуда

$$\tilde{U}_0(f) = \tilde{U}_0(v) \frac{dv}{df} = \tilde{U}_0(v) \frac{dv}{v dv} = \frac{\tilde{U}_0(v)}{v} = \frac{\tilde{U}_0(f/v)}{v}.$$

В общем случае в системе координат $x'O'y'$, связанной с объектом наблюдения, освещенность точки (x', y') равна

$$E(x', y') = \pi T_0 \sin^2 \sigma_{A'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x'_1, y'_1) h(x', y', x'_1, y'_1) dx'_1 dy'_1.$$

Для изопланарной системы

$$\begin{aligned} E(x', y') &= \pi T_0 \sin^2 \sigma_{A'} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x'_1, y'_1) h(x' - x'_1, y' - y'_1) dx'_1 dy'_1 = \\ &= \pi T_0 \sin^2 \sigma_{A'} \int_{-\infty}^{+\infty} dy'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} L(x'_1, y'_1) h(x' - x'_1, y' - y'_1) dx'_1. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл представляет собой одномерную (по координате x') свертку функций $L(x', y'_1)$ и $h(x', y' - y'_1)$, т. е.

$$L(x', y'_1) \otimes h(x', y' - y'_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x'_1, y'_1) h(x' - x'_1, y' - y'_1) dx'_1.$$

Спектр свертки равен произведению спектров

$$\overline{L(x', y'_1) \otimes h(x', y' - y'_1)} = \tilde{L}(v, \hat{y}'_1) \tilde{h}(v, y' \hat{-} y'_1).$$

Следовательно, спектр сечения исходной функции $E(x', y')$ равен

$$\tilde{E}(v, \hat{y}') = \pi T_0 \sin^2 \sigma_{A'} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}(v, \hat{y}'_1) \tilde{h}(v, y' \hat{-} y'_1) dy'_1.$$

Так как $y' = y$ и нас интересует сопряженное значение спектра, то

$$\tilde{E}^*(v, \hat{y}) = \pi T_0 \sin^2 \sigma_{A'} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^*(v, \hat{y}'_1) \tilde{h}^*(v, y \hat{-} y'_1) dy'_1.$$

Здесь

$$\tilde{L}^*(v, \hat{y}'_1) = \tilde{L}^*(v, \tilde{y}'_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x'_1, y'_1) e^{j2\pi v x'_1} dx'_1;$$

$$\tilde{h}^*(v, y \hat{-} y'_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x', y - y_1) e^{j2\pi v x'} dx';$$

(x'_1, y'_1) — произвольная точка в системе координат, связанных с объектом.

Учтем, что $x' = x - vt = x - x_0$. Так как x_1 — произвольная координата, то, полагая $x_1 = x_0$ получим

$$\tilde{h}^*(v, y \hat{-} y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x_1, y - y_1) e^{j2\pi v (x - x_1)} d(x - x_1).$$

При переходе к временным спектрам достаточно сделать подстановку $v = f/v$. В результате можно найти

$$\tilde{U}_0(f) = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^* \left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1 \right) \tilde{S} \left(\frac{f}{v}, \hat{y} \right) \tilde{h}^* \left(\frac{f}{v}, \widehat{y - y_1} \right) dy dy_1.$$

Если оптическая система идеальна, т. е. светящаяся точка в плоскости предметов изображается в картинной плоскости вновь в виде точки (а практически — в виде пятна, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с мгновенным полем зрения прибора), то функция рассеяния представляет собой дельта-функцию:

$$h(x - x_1, y - y_1) = \delta(x - x_1, y - y_1) = \delta(x - x_1) \delta(y - y_1).$$

Следовательно, в этом случае сопряженное значение спектра функции рассеяния

$$\tilde{h}^*(v, \widehat{y - y_1}) = \tilde{\delta}^*(v) \delta(\widehat{y - y_1}),$$

причем $\tilde{\delta}^*(v) = 1$.

Тогда спектр сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником, установленным в плоскости изображения, создаваемого идеальной оптической системой

$$\tilde{U}_{00}(f) = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^* \left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1 \right) \tilde{S} \left(\frac{f}{v}, \hat{y} \right) \delta(\widehat{y - y_1}) dy dy_1.$$

Учитывая фильтрующие свойства дельта-функции, найдем

$$\tilde{U}_{00}(f) = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^* \left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1 \right) \hat{S} \left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1 \right) dy_1.$$

Если оптическая система, имеющая aberrации, визирует точечный источник (дельта-функцию), то

$$L(x'_1, y'_1) = I \delta(x'_1, y'_1) = I \delta(x'_1) \delta(y'_1),$$

где I — сила света источника.

Следовательно, сопряженное значение спектра распределения яркости

$$\tilde{L}^*(v, \hat{y}'_1) = I \tilde{\delta}^*(v) \delta(\hat{y}'_1) = I \delta^*(v) \delta(y_1),$$

причем $\tilde{\delta}^*(v) = 1$.

В свою очередь, входящий в исходное уравнение коэффициент $\pi \sin^2 \sigma'_{A'}$ для случая наблюдения точечного источника представим в виде

$$\pi \sin^2 \sigma'_{A'} = \pi (D/2)^2 / (f')^2 = A_{00} / (f')^2,$$

где D — диаметр входного зрачка; $A_{00} = \pi D^2/4$ — площадь входного зрачка объектива; f' — заднее фокусное расстояние.

Если бы источник излучения имел площадь $A_{ист}$ и находился на расстоянии R от объектива, то его изображение, создаваемое идеальным объективом в сопряженной плоскости, совпадающей с задней

фокальной плоскостью при $R \rightarrow \infty$, имело бы площадь $A'_{\text{ист}} = A_{\text{ист}} (f')^2 / R^2$. Поскольку $(A_{\text{ист}} / R^2) (f')^2 / A'_{\text{ист}} = 1$, можно записать

$$\pi \sin^2 \sigma'_{A'} = \frac{A_{\text{об}}}{(f')^2} \frac{A_{\text{ист}}}{R^2} \frac{(f')^2}{A'_{\text{ист}}} = \frac{A_{\text{ист}}}{A'_{\text{ист}}} \frac{A_{\text{об}}}{R^2}.$$

Для рассматриваемого случая площадь источника $A_{\text{ист}}$ и его изображения $A'_{\text{ист}}$ одинаковы (являются точками), т. е. $A_{\text{ист}} / A'_{\text{ист}} = 1$,

$$\pi \sin^2 \sigma'_{A'} = A_{\text{об}} / R^2 = \pi (D/2R)^2.$$

Тогда спектр сигнала при реакции на единичный импульс найдем в виде

$$\tilde{U}_0^1(f) = \frac{\pi T_0 (D/2R)^2}{v} I \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{h}^*\left(\frac{f}{v}, \widehat{y - y_1}\right) \delta(y_1) dy dy_1.$$

Учитывая фильтрующие свойства дельта-функции [функция $\delta(y_1)$ отлична от нуля только при $y_1 = 0$], получим

$$\tilde{U}_0^1(f) = \frac{\pi T_0 (D/2R)^2}{v} I \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{h}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) dy.$$

Если точечный источник визируется идеальной оптической системой, легко найти, что спектр сигнала определяется лишь одномерным (вдоль оси x) спектром приемника излучения:

$$\tilde{U}_{00}^1(f) = \pi T_0 (D/2R)^2 I \frac{\tilde{S}(f/v)}{v}.$$

Спектр сигнала на выходе усилителя во всех случаях равен

$$\tilde{U}_c(f) = \tilde{U}_0(f) \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f).$$

Выражение для спектра сигнала при визировании точечного источника можно получить непосредственно из основных соотношений, не пользуясь понятием дельта-функции и искусственным приемом вычисления значения коэффициента $\pi \sin^2 \sigma'_{A'}$.

Действительно, поток излучения от точечного источника, воспринимаемый объективом, равен $IT_0 A_{\text{об}} / R^2$. Освещенность плоскости изображения в произвольной точке изопланарной системы определяется этим потоком излучения и функцией рассеяния объектива:

$$E(x, y) = IT_0 (A_{\text{об}} / R^2) h(x, y).$$

Так как в общем случае (для $x_1 = y_1 = 0$)

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(f) &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) dy, \\ \tilde{E}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) &= IT_0 (A_{\text{об}} / R^2) \tilde{h}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right), \end{aligned}$$

то

$$\tilde{U}_0^1(f) = \frac{\pi T_0 (D/2R)^2}{v} I \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{h}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) dy.$$

§ 15.2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СПЕКТРА СИГНАЛА

Многочисленные примеры расчета спектра сигнала приводятся в работе [156]. Рассмотрим здесь следующие характерные случаи расчета:

- 1) идеальная оптическая система и разделяющиеся переменные в функции распределения чувствительности приемника излучения;
- 2) идеальная оптическая система и неразделяющиеся переменные;
- 3) оптическая система с аберрациями;
- 4) сканирующая оптическая система, для которой известен закон набегания изображения цели на чувствительную площадку приемника излучения.

**Расчет спектра сигнала,
вырабатываемого безынерционным приемником излучения,
установленным в плоскости изображения идеального объектива,
когда переменные
в функции распределения чувствительности приемника разделяются**

Предположим, что объект наблюдения имеет прямоугольную форму и одинаковую яркость по всей поверхности. Фотослой прием-

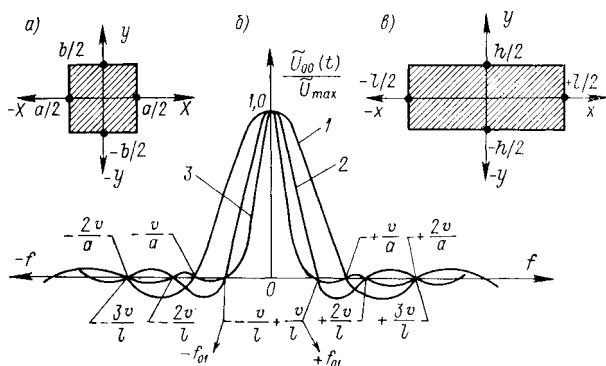


Рис. 311. Формы объекта наблюдения и приемника излучения, а также соответствующие им спектры: а — форма чувствительной площадки приемника излучения; б — спектр сигнала и его составляющие; в — форма объекта наблюдения:

1 — $\text{sa}(\pi f a / v)$; 2 — $\text{sa}(\pi f l / v)$; 3 — $\text{sa}(\pi f a / v) \text{sa}(\pi f l / v)$

ника излучения размещен в начале координат и также имеет прямоугольную форму с одинаковой чувствительностью во всех точках его поверхности (рис. 311).

Соответствующие функции можно представить следующим образом (в координатах плоскости изображения).

Для распределения чувствительности приемника излучения:

$$S(x, y) = S_0 S(x) S(y);$$

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq a/2; \\ 0 & \text{при } |x| > a/2; \end{cases}$$

$$S(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq b/2; \\ 0 & \text{при } |y| > b/2; \end{cases}$$

для распределения яркости объекта наблюдения:

$$L(x, y) = L_0 L(x) L(y);$$

$$L(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq l/2 \\ 0 & \text{при } |x| > l/2; \end{cases}$$

$$L(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq h/2; \\ 0 & \text{при } |y| > h/2; \end{cases}$$

причем $h > b$.

Спектры сечений этих функций определим из выражений:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(v, \hat{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) e^{-j2\pi vx} dx = S_0 S(y) \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-j2\pi vx} dx = \\ &= S_0 a S(y) \text{sa}(\pi va); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}^*(v, \hat{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} L(x, y) e^{j2\pi vx} dx = L_0 L(y) \int_{-l/2}^{+l/2} e^{j2\pi vx} dx = \\ &= L_0 l L(y) \text{sa}(\pi vl). \end{aligned}$$

Спектр сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником, установленным в плоскости изображения идеальной оптической системы:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{00}(f) &= \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) dy = \\ &= \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A}{v} L_0 S_0 a l \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} a\right) \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} l\right) \int_{-\infty}^{+\infty} L(y) S(y) dy. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(y) S(y) dy = \int_{-b/2}^{+b/2} dy = b,$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{00}(f) &= \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A}{v} L_0 S_0 a l b \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} a\right) \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} l\right) = \\ &= \tilde{U}_{\max} \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} a\right) \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} l\right). \end{aligned}$$

Вид полученного спектра представлен на рис. 311, б для случая, когда $a < l$.

Так как частота сигнала, соответствующая первому нулю спектральной плотности, для каждой составляющей спектра равна либо v/a , либо v/l , то для результирующего спектра эта частота равна $f_{01} = v/l$, где l — размер изображения объекта наблюдения вдоль оси x . Для определения скорости движения изображения v предположим, что сканирование осуществляется установленным перед объективом $Об$ плоским зеркалом $З$ (рис. 312), вращающимся с частотой n_3 (c^{-1}). Скорость вращения визирного луча в этом случае $n = 2n_3$.

Так как соотношение между линейным и угловым отклонениями визирного луча имеет вид $x = f'\alpha$, то

$$v = \frac{dx}{dt} = f' \frac{d\alpha}{dt} = f'\Omega,$$

где $\Omega = d\alpha/dt$ — угловая скорость вращения визирного луча, $рад \cdot c^{-1}$; f' — заднее фокусное расстояние объектива.

Поскольку $\Omega = 2\pi n = 4\pi n_3$, то

$$v = 4\pi n_3 f'.$$

Если $n_3 = 5 c^{-1}$; $f' = 200$ мм; $l = 4$ мм, то

$$v = 4\pi \cdot 5 \cdot 0,2 = 12,57 \text{ м} \cdot c^{-1}.$$

Следовательно,

$$f_{01} = v/l = 12,57/4 \cdot 10^{-3} = 3141,6 \text{ Гц}.$$

Расчет спектра сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником излучения, установленным в плоскости изображения идеального объектива, когда переменные в функции распределения чувствительности приемника не разделяются

Предположим, что объект наблюдения представляет собой бесконечно длинную полосу равной яркости, а форма чувствительной площадки приемника излучения определяется круглой диафрагмой поля, внутри которой чувствительность неизменна (рис. 313). Схема сканирования соответствует рис. 312.

Функции, описывающие распределение чувствительности приемника и яркости источника, имеют следующий вид:

$$S(x, y) = \begin{cases} S_0 & \text{при } x^2 + y^2 \leq r^2; \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > r^2; \end{cases}$$

$$L(x, y) = L(x) = \begin{cases} L_0 & \text{при } |x| \leq l/2; \\ 0 & \text{при } |x| > l/2, \end{cases}$$

причем $r < l$.

Сечение спектра функции $L(x, y)$ можно найти в виде

$$\tilde{L}^*(f/v, y) = L_0 l \text{ sa}[\pi(f/v)l].$$

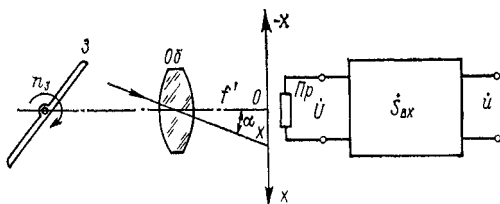


Рис. 312. Схема сканирования

В соответствии с результатами § 12.8 спектр функции $S(x, y)$, имеющей осевую симметрию, определяется преобразованием Ганкеля и равен

$$\tilde{S}(\kappa) = S_0 \pi r^2 2J_1(z_0)/z_0,$$

где κ — пространственная частота; $z_0 = 2\pi \kappa r$; $J_1(z_0)$ — функция Бесселя первого порядка.

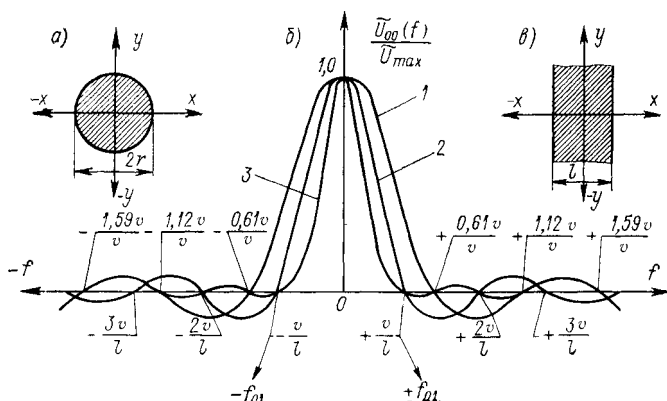


Рис. 313. Формы объекта наблюдения и приемника излучения, а также соответствующие им спектры: а — форма чувствительной площадки приемника излучения; б — спектр сигнала и его составляющие; в — форма объекта наблюдения:

$$1 - \frac{2J_1(2\pi f r/v)}{2\pi f r/v}; \quad 2 - \text{sa}(2\pi f l/2v); \quad 3 - \text{sa}(2\pi f l/2v) \frac{2J_1(2\pi f r/v)}{2\pi f r/v}$$

Так как функция $\tilde{S}(\kappa)$ обладает осевой симметрией, то, полагая $\kappa = f/v$, можно найти

$$\tilde{S}(f/v, \hat{y}) = \pi r^2 S_0 2J_1(z_0)/z_0,$$

где $z_0 = 2\pi (f/v) r$.

Следовательно, искомый спектр сигнала

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{00}(f) &= \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A}{v} L_0 S_0 l \pi r^2 \text{sa} \left(\pi \frac{f}{v} l \right) \frac{2J_1(z_0)}{z_0} = \\ &= U_{\max} \text{sa} \left(2\pi \frac{f}{v} \frac{l}{2} \right) \frac{2J_1[2\pi (f/v) r]}{2\pi (f/v) r}. \end{aligned}$$

Вид спектра показан на рис. 313, б. Так как функции, составляющие спектр, первый раз обращаются в нуль на частотах v/l и $0,61v/r$ соответственно, то при $r < l$ для результирующего спектра эта частота равна v/l . Если $v \approx 12,57 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ($f' = 200 \text{ мм}$; $n_a = 5 \text{ с}^{-1}$); $l = 4 \text{ мм}$, то

$$f_{01} = v/l = 3141,6 \text{ Гц}.$$

Предположим, что приемник излучения и объект наблюдения имеют распределения чувствительности и яркости такие же, как на рис. 311. Функцию рассеяния объектива аппроксимируем гауссоидой вращения, т. е. запишем

$$h(\rho) = [1/(2\pi\rho_0^2)] e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)}.$$

В этом выражении постоянный множитель $1/2\pi\rho_0^2$ введен для выполнения условия нормировки, т. е. $2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho) \rho d\rho = 1$, а $2\rho_0$ представляет собой диаметр кружка рассеяния, отсчитанный на уровне 0,606 от максимального значения (диаметр кружка рассеяния на уровне 0,1 от максимального значения равен $4,28\rho_0$).

Так как в данном случае

$$\rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$

то

$$h(x - x_1, y - y_1) = [1/(2\pi\rho_0^2)] e^{-(x-x_1)^2/(2\rho_0^2)} e^{-(y-y_1)^2/(2\rho_0^2)}.$$

Спектры сечений равны

$$\tilde{S}(v, \hat{y}) = S_0 a S(y) \text{sa}(\pi v a);$$

$$\tilde{L}^*(v, \hat{y}_1) = L_0 l L(y_1) \text{sa}(\pi v l);$$

$$\tilde{h}^*(v, y \hat{=} y_1) = \left(1/\sqrt{2\pi\rho_0^2}\right) e^{-(2\pi v \rho_0)^2/2} e^{-(y-y_1)^2/(2\rho_0^2)}.$$

Спектр сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником, установленным в плоскости изображения:

$$\tilde{U}_0(f) = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1\right) \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) h(v, y \hat{=} y_1) dy dy_1 =$$

$$= \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A}{v} L_0 S_0 \frac{al}{\sqrt{2\pi\rho_0^2}} \text{sa}(\pi v a) \text{sa}(\pi v l) e^{-[2\pi(f/v)\rho_0]^2/2} \mathcal{J},$$

где

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(y_1) S(y) e^{-(y-y_1)^2/(2\rho_0^2)} dy dy_1.$$

Пусть функции $L(y_1)$ и $S(y)$ определяются выражениями:

$$L(y_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y_1| \leq h/2; \\ 0 & \text{при } |y_1| > h/2; \end{cases}$$

$$S(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y| \leq b/2; \\ 0 & \text{при } |y| > b/2. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{J} = \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-h/2}^{+h/2} e^{-(y-y_1)^2/(2\rho_0^2)} dy_1.$$

Рассмотрим внутренний интеграл $\mathcal{I}_{\text{вн}}$. Полагая $(y - y_1)/\rho_0 = z$, найдем

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\text{вн}} &= -\rho_0 \int_{(y-0,5h)/\rho_0}^{(y+0,5h)/\rho_0} e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \rho \left[\Phi\left(\frac{y+0,5h}{\rho_0}\right) - \Phi\left(\frac{y-0,5h}{\rho_0}\right) \right],\end{aligned}$$

где $\Phi\left(\frac{y \pm 0,5h}{\rho_0}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(y \pm 0,5h)/\rho_0} e^{-z^2/2} dz$ — интеграл вероятности.

Следовательно,

$$\mathcal{I} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \rho_0 \int_{-b/2}^{+b/2} \left[\Phi\left(\frac{y+0,5h}{\rho_0}\right) - \Phi\left(\frac{y-0,5h}{\rho_0}\right) \right] dy,$$

а

$$\tilde{U}_0(f) = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} L_0 S_0 \frac{al}{2} \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} a\right) \text{sa}\left(\pi \frac{f}{v} l\right) e^{-[2\pi (f/v) \rho_0]^2/2} (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2),$$

где

$$\mathcal{I}_1 = \int_{-b/2}^{+b/2} \Phi\left(\frac{y+0,5h}{\rho_0}\right) dy, \quad \mathcal{I}_2 = \int_{-b/2}^{+b/2} \Phi\left(\frac{y-0,5h}{\rho_0}\right) dy.$$

Найдем \mathcal{I}_1 , сделав замену переменных:

$$\xi = y + 0,5h;$$

тогда

$$\mathcal{I}_1 = \int_{(h-b)/2}^{(h+b)/2} \Phi\left(\frac{\xi}{\rho_0}\right) d\xi.$$

Воспользуемся известной формулой

$$\int \Phi(\sqrt{2} \alpha \xi) d\xi = \xi \Phi(\sqrt{2} \alpha \xi) + \frac{e^{-\alpha^2 \xi^2} - 1}{\sqrt{\alpha \pi}}.$$

Так как

$$\alpha = 1/(\sqrt{2} \rho_0),$$

то можно найти

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \frac{b+h}{2} \Phi\left(\frac{b+h}{2\rho_0}\right) - \frac{b-h}{2} \Phi\left(\frac{b-h}{2\rho_0}\right) - \\ &- 2 \sqrt{\frac{\sqrt{2} \rho_0}{\pi}} e^{-(b^2+h^2)/(8\rho_0^2)} \text{sh} \frac{bh}{4\rho_0^2},\end{aligned}$$

где $\text{sh} \frac{bh}{4\rho_0^2} = \frac{e^{bh/(4\rho_0^2)} - e^{-bh/(4\rho_0^2)}}{2}$ — гиперболический синус.

Соответственно:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &= \frac{b-h}{2} \Phi\left(\frac{b-h}{2\rho_0}\right) - \frac{b+h}{2} \Phi\left(\frac{b+h}{2\rho_0}\right) + \\ &+ 2 \sqrt{\frac{V\sqrt{2}\rho_0}{\pi}} e^{-(b^2+h^2)/(8\rho_0^2)} \operatorname{sh} \frac{bh}{4\rho_0^2}; \\ \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 &= (b+h) \Phi\left(\frac{b+h}{2\rho_0}\right) - (b-h) \Phi\left(\frac{b-h}{2\rho_0}\right) - \\ &- 4 \sqrt{\frac{V\sqrt{2}\rho_0}{\pi}} e^{-(b^2+h^2)/(8\rho_0^2)} \operatorname{sh} \frac{bh}{4\rho_0^2}.\end{aligned}$$

Окончательно найдем

$$\tilde{U}_0(f) = \tilde{U}_{\max} \operatorname{sa}[\pi(f/v)a] \operatorname{sa}[\pi(f/v)l] e^{-[2\pi(f/v)\rho_0]^2/2},$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{\max} &= \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} L_0 S_0 \frac{al}{2} \times \\ &\times \left[(b+h) \Phi\left(\frac{b+h}{2\rho_0}\right) - (b-h) \Phi\left(\frac{b-h}{2\rho_0}\right) - \right. \\ &\left. - 4 \sqrt{\frac{\rho_0 V\sqrt{2}}{\pi}} e^{-(b^2+h^2)/(8\rho_0^2)} \operatorname{sh} \frac{bh}{4\rho_0^2} \right].\end{aligned}$$

Оценим влияние диаметра пятна рассеяния объектива. Для этого предположим, что размеры объекта наблюдения малы и его спектр не влияет на результирующий спектр $\tilde{U}_0(f)$, т. е. $\operatorname{sa}[\pi(f/v)l] \approx 1$.

Диаметр кружка рассеяния объектива на уровне q от максимального значения освещенности в центре пятна

$$2\rho_q = 2\rho_0 \sqrt{-2 \ln q}.$$

Предположим, что система согласована, т. е. диаметр кружка рассеяния на уровне q равен размеру чувствительной площадки приемника излучения a :

$$a = 2\rho_q = 2\rho_0 \sqrt{-2 \ln q}.$$

Будем оценивать влияние aberrаций объектива на результирующий спектр (ЧКХ) системы по относительной спектральной плотности p функции рассеяния на частоте, которая в 2π раз меньше частоты f_{01} , соответствующей первому нулю оптической передаточной функции приемника.

Так как $f_{01} = v/a$, то

$$f_{01} = v/(2\rho_0 \sqrt{-2 \ln q}).$$

Учитывая, что в соответствии с принятым определением

$$\rho = e^{-[2\pi (f_{01} 2\pi\nu) \rho_0]^2/2} = e^{1/(16 \ln q)},$$

а

$$16 \ln q = -8 [2\rho_q/(2\rho_0)]^2 = -8\rho_q^2/\rho_0^2,$$

получаем

$$\rho = e^{-1/[8 (\rho_q/\rho_0)^2]}.$$

Соответствующие значения представлены в табл. 24.

Зависимость ρ от q приведена на рис. 314. Из этой зависимости следует, что если диаметр кружка рассеяния, измеренный на уровне 0,7 от максимальной освещенности в его центре, вписать в размер чувствительной площадки приемника,

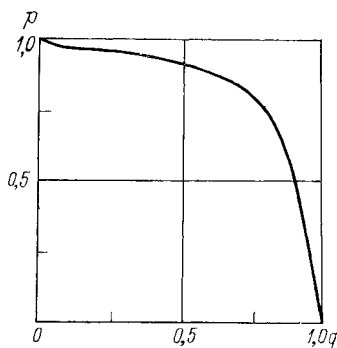


Рис. 314. Зависимость ρ от q , учитывающая влияние aberrаций объектива на ЧКХ оптической системы прибора

Т а б л и ц а 24
Влияние aberrаций объектива на ЧКХ

q	ρ_q/ρ_0	ρ	q	ρ_q/ρ_0	ρ
0	∞	1,0	0,8	0,67	0,76
0,1	2,15	0,97	0,9	0,46	0,55
0,2	1,79	0,96	0,95	0,32	0,29
0,3	1,55	0,95	0,97	0,25	0,14
0,4	1,35	0,93	0,98	0,2	0,04
0,5	1,17	0,91	0,99	0,14	$1,7 \times 10^{-3}$
0,6	1,01	0,88			
0,7	0,84	0,84	1,0	0	0

то на частоте, в 2π раз меньшей частоты первого нуля передаточной функции приемника (т. е. на частоте, примерно равной $0,16f_{01}$), aberrации объектива уменьшат контраст на 16 %. В сторону меньших уровней идет медленное увеличение контраста, в сторону больших уровней — быстрый спад.

Расчет спектра сигнала для случая, когда задан закон набегания изображения точечной цели на чувствительную площадку приемника излучения

Спектр сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником, может быть рассчитан непосредственно из преобразования Фурье, если известна функция $U_0(t)$, определяющая закон изменения сигнала приемника:

$$\tilde{U}_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t) e^{-2\pi f t} dt.$$

Для безынерционного приемника функция $U_0(t)$ точно воспроизводит закон изменения воспринимаемого приемником потока излу-

чения $\Phi(t)$ — закон набегания изображения цели на чувствительную площадку приемника в процессе сканирования:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \gamma(t),$$

где Φ_0 — эффективное значение потока излучения, падающего на приемник, когда цель находится в центре мгновенного поля зрения; $\gamma(t)$ — функция, описывающая закон изменения потока излучения, падающего на приемник, в процессе сканирования.

В свою очередь,

$$U_0(t) = U_0 \gamma(t),$$

где $U_0 = S_0 \Phi_0$; S_0 — дифференциальная крутизна преобразования безынерционного приемника (реального приемника для частоты модуляции $f \rightarrow 0$).

Функцию $\gamma(t)$ можно найти, исследуя процесс набегания изображения точечной цели на чувствительную площадку приемника.

Рассмотрим два крайних случая (рис. 315).

1. В приборе используются высококачественный объектив и приемник излучения (диафрагма поля для системы с конденсором) относительно большого размера. В этом случае диаметр кружка рассеяния объектива значительно меньше размера приемной площадки (диафрагмы поля) и функция $\gamma(t)$, характеризующая закон набегания, аппроксимируется прямоугольной функцией $\gamma_{пр}(t)$:

$$\gamma_{пр}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq t_{вх}/2; \\ 0 & \text{при } |t| > t_{вх}/2. \end{cases}$$

2. Максимальный диаметр кружка рассеяния объектива, при котором еще не происходит потерь энергии, когда цель находится в центре мгновенного поля зрения, равен размеру приемной площадки. Следовательно, этот случай характеризуется плавной кривой закона набегания. Конкретный вид функции $\gamma(t)$ зависит от распределения энергии в кружке рассеяния объектива и распределения чувствительности прибора внутри мгновенного поля зрения, т. е. от диаграммы направленности приемной системы (по терминологии, принятой в радиолокации). Достаточно удобно и точно можно аппроксимировать эту функцию косинус-квадратным законом набегания:

$$\gamma_{кк}(t) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{t}{t_{вх}/2} & \text{при } |t| \leq t_{вх}/2; \\ 0 & \text{при } |t| > t_{вх}/2. \end{cases}$$

Найдем спектр сигнала для рассмотренных двух крайних случаев, имея в виду соотношения, полученные в § 12.4.

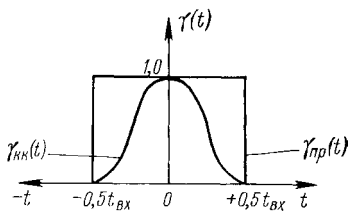


Рис. 315. Аппроксимация закона набегания изображения точечной цели на чувствительную площадку приемника

Так как

$$\tilde{U}_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t) e^{-i2\pi f t} dt = U_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) e^{-i2\pi f t} dt,$$

то для четной функции $\gamma(t)$, существующей в симметричных пределах $\pm t_{\text{вх}}/2$, имеем косинус-преобразование Фурье

$$\tilde{U}_0(f) = U_0 \int_{-t_{\text{вх}}/2}^{+t_{\text{вх}}/2} \gamma(t) \cos 2\pi f t dt = U_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f),$$

где

$$\tilde{\gamma}(f) = \frac{1}{t_{\text{вх}}} \int_{-t_{\text{вх}}/2}^{+t_{\text{вх}}/2} \gamma(t) \cos 2\pi f t dt; \quad U_0 t_{\text{вх}} = \Phi_0 t_{\text{вх}} S_0.$$

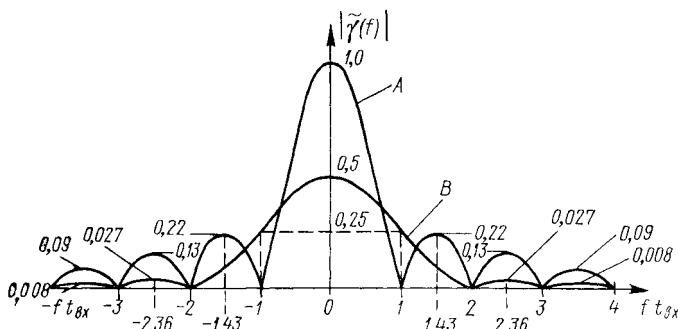


Рис. 316. Спектры прямоугольного (А) и косинус-квадратного (В) импульсов

Для прямоугольной формы импульса набегания найдем

$$\tilde{\gamma}_{\text{пр}}(f) = \frac{1}{t_{\text{вх}}} \int_{-t_{\text{вх}}/2}^{+t_{\text{вх}}/2} \cos 2\pi f t dt = \frac{\sin [2\pi f (t_{\text{вх}}/2)]}{2\pi f (t_{\text{вх}}/2)};$$

вводя для краткости обозначение

$$\text{sa } x = \sin x/x,$$

получим

$$\tilde{\gamma}_{\text{пр}}(f) = \text{sa } [2\pi f (t_{\text{вх}}/2)] = \text{sa } (\pi f t_{\text{вх}}).$$

Найденная функция обращается в нуль при $2\pi f (t_{\text{вх}}/2) = n\pi$ где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$; в точке $n = 0$ раскрытие неопределенности дает значение $\tilde{\gamma}_{\text{пр}}(0) = 1$. Соответствующий график модуля спектра прямоугольного импульса имеет вид, показанный на рис. 316 (кривая А).

Наименьшая частота, при которой спектральная плотность обращается в нуль, равна $f_{01} = 1/t_{\text{вх}}$.

Максимальные значения спектральной плотности соответствуют частотам, определяемым из уравнения

$$\frac{d}{dx} (\sin x/x) = 0,$$

откуда

$$x = \operatorname{tg} x,$$

где $x = 2\pi f (t_{\text{BX}}/2)$, т. е. главный максимум соответствует значению $x = 0$, а первый боковой максимум — значению $x \approx \pm 1,43\pi$ (257°), или $f_{\text{max } 1} \approx \pm 1,43/t_{\text{BX}}$. Спектральная плотность в первом боковом максимуме будет определяться величиной $|\tilde{Y}_{\text{пр}}(f_{\text{max } 1})| \approx 0,22$.

Для косинус-квадратной формы закона набегания можно найти

$$\tilde{Y}_{\text{KK}}(f) = \frac{1}{t_{\text{BX}}} \int_{-t_{\text{BX}}/2}^{+t_{\text{BX}}/2} \cos^2 \frac{\pi}{2} \frac{t}{t_{\text{BX}}/2} \cos 2\pi f t dt$$

Полученный интеграл равен

$$\tilde{Y}_{\text{KK}}(f) = 0,5 \frac{\text{sa} [2\pi f (t_{\text{BX}}/2)]}{1 - (ft_{\text{BX}})^2} = 0,5 \frac{\text{sa} (\pi ft_{\text{BX}})}{1 - (ft_{\text{BX}})^2},$$

а его нормированное значение —

$$\tilde{Y}_{\text{KK}}^{\text{н}} = \frac{\text{sa} [2\pi f (t_{\text{BX}}/2)]}{1 - (ft_{\text{BX}})^2} = \frac{\text{sa} (\pi ft_{\text{BX}})}{1 - (ft_{\text{BX}})^2}.$$

Функция спектральной плотности обращается в нуль при $2\pi f (t_{\text{BX}}/2) = k\pi$ для $k = \pm 2, 3, 4, \dots$; при $k = 0$ и $k = 1$ имеет место неопределенность. Неопределенность в числителе при $k = 0$ легко раскрывается по правилу Лопиталя, что дает значение $\tilde{Y}_{\text{KK}}(0) = 0,5$. Раскрытие неопределенности при $k = 1$ ($f = 1/t_{\text{BX}}$) дает значение $\tilde{Y}_{\text{KK}}(1/t_{\text{BX}}) = 0,25$. Соответствующий график спектра косинус-квадратного импульса имеет вид, представленный на рис. 316 (кривая В).

Наименьшая частота, при которой спектральная плотность обращается в нуль, равна

$$f_{01} = 2/t_{\text{BX}}.$$

Максимальные значения спектральной плотности соответствуют частотам, определяемым из уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x [1 - (x/\pi)^2]} \right) = 0,$$

откуда

$$x \frac{1 - (x/\pi)^2}{1 - 3(x/\pi)^2} = \operatorname{tg} x,$$

или

$$x \frac{1}{1 + 2 [1 - (\pi/x)^2]} = \operatorname{tg} x,$$

где $x = 2\pi f (t_{\text{BX}}/2)$, т. е. главный максимум соответствует значению $x = 0$, а первый боковой максимум — значению $x \approx \pm 2,36\pi$ (425°), или $f_{\text{max } 1} \approx \pm 2,36/t_{\text{BX}}$. Спектральная плотность в первом боковом максимуме будет определяться величиной $|\tilde{Y}_{\text{KK}}(f_{\text{max } 1})| \approx 0,027$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ШУМА

Несмотря на возможность усиления сколь угодно слабых сигналов до любой величины, все же их не всегда удается зарегистрировать из-за *хаотических флуктуаций или шумов*. На зажимах любого приемника или системы, состоящей из приемника и усилителя, обычно существует определенный уровень шума. Этот шум определяет нижний предел энергии, которая еще может быть обнаружена.

Любая величина, характеризующая работу приемника излучения (напряжение, ток, сопротивление и т. д.), флуктуирует по случайному закону около своего среднего значения. Эта флуктуация и есть то, что мы называем внутренним или *собственным шумом приемника*.

Распределение яркости природных образований в поле зрения прибора также имеет случайный характер, создает неоднородный фон, препятствующий обнаружению яркости наблюдения. В процессе сканирования неравномерности яркости фона в пространстве преобразуются приемником излучения в случайные изменения вырабатываемого им сигнала, которые принято называть *шумом фона*. Наряду с этим *входная цепь усилителя и усилитель* характеризуются *собственными шумами усилителя*, увеличивающими общий уровень шума прибора.

Процесс регистрации сигнала при наличии шумов требует предварительного знания отличительных признаков сигнала и шума. Использование этих признаков позволяет решить задачу обнаружения — ответить на вопрос о наличии или отсутствии сигнала. Обычно ответ носит вероятностный характер, т. е. существует определенная вероятность и ложного решения. Это связано с тем, что любой признак или свойство в той или иной степени присущи как сигналу, так и шуму.

По теории шумов и проблемам обнаружения имеется большое число книг и статей, поэтому главной целью последующего изложения является подготовка читателя к свободному обращению с соответствующей терминологией и получение тех минимальных сведений о шуме, которые позволят в заключительной части этой книги решать простейшую задачу обнаружения.

С точки зрения математика шум представляет собой *случайную функцию*, которая в результате опыта может принять тот или иной конкретный вид, какой именно — заранее неизвестно. Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется *реализацией случайной функции*. Случайную функцию нельзя

изобразить в виде графика, начертить можно лишь ее конкретную реализацию.

Аргументом случайной функции могут быть не только время, но и пространственные координаты. Например, яркость земной поверхности представляет собой случайную функцию координат рассматриваемой точки. Температура воздуха в различных слоях атмосферы может рассматриваться как случайная функция высоты и т. д.

На практике встречаются также случайные функции, зависящие не от одного аргумента, а от нескольких. Например, яркость данной точки земной поверхности зависит от времени суток, т. е. является случайной функцией пространственных координат x , y и времени t .

Рассмотрим некоторые математические методы описания шума, используя в качестве аргумента обобщенную координату χ , которая в одних случаях может представлять собой временную координату t , а в других — пространственные координаты x и y .

§ 16.1. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Статистические свойства шума в общем случае описываются *многомерными законами распределения*.

Пусть имеем случайную функцию $U(\chi)$, две конкретные реализации которой $U_1(\chi)$ и $U_2(\chi)$ изображены на рис. 317.

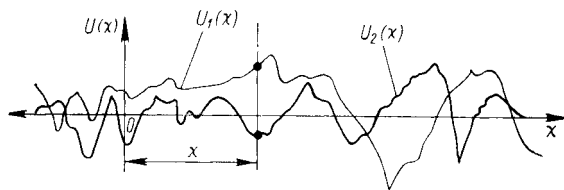


Рис. 317. Реализации случайной функции

Если зафиксировать значение аргумента χ , то случайная функция при этом фиксированном аргументе будет представлять собой *случайную величину*, которую называют *сечением случайной функции*. Эта случайная величина U может принимать любые значения, заранее неизвестно — какие именно.

Предполагая, однако, что вероятность попадания случайной величины U внутрь малого интервала dU пропорциональна интервалу, можно охарактеризовать ее этой вероятностью

$$dP = p(U) dU$$

или значением коэффициента пропорциональности — функцией

$$p(U) = \frac{dP}{dU},$$

которую называют *плотностью распределения вероятностей* случайной величины U , или, поскольку U есть сечение случайной функции, *одномерным законом распределения* вероятностей случайной функции.

Так как непрерывная случайная величина U обязательно имеет какое-либо конкретное значение в промежутке от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. вероятность пребывания ее в этом промежутке равна единице, имеем условие для функции $p(U)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(U) dU = 1,$$

которое называют *условием нормировки*.

Одномерный закон распределения $p(U)$ не является исчерпывающей характеристикой случайной функции $U(\chi)$. Он характеризует распределение вероятностей только для данного, хотя и произвольного, значения аргумента и не отвечает на вопрос о распределении случайных величин U для различных χ .

Более полной характеристикой случайной функции является *двумерный закон распределения* $p(U_1, U_2)$ — это закон распределения системы двух случайных величин $U_1 = U(\chi_1)$ и $U_2 = U(\chi_2)$, т. е. двух произвольных сечений случайной функции. Определить двумерный закон распределения можно, задавая вероятность dP того, что одна случайная величина имеет значение, заключенное между U_1 и $U_1 + dU_1$, а другая — между U_2 и $U_2 + dU_2$,

$$dP = p(U_1, U_2) dU_1 dU_2.$$

Тогда

$$p(U_1, U_2) = \frac{dP}{dU_1 dU_2},$$

причем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(U_1, U_2) dU_1 dU_2 &= 1; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p(U_1, U_2) dU_2 &= p(U_1). \end{aligned}$$

Так как U_1 и U_2 являются функциями χ_1 и χ_2 , закон распределения иногда представляют в виде $p(U_1, U_2, \chi_1, \chi_2)$ или соответственно $p(U, \chi)$.

Можно неограниченно увеличивать число аргументов и получать все более исчерпывающие характеристики случайной функции — *многомерные законы распределения*. Однако оперировать с такими громоздкими характеристиками крайне неудобно.

Кроме того, получение столь полных характеристик исследуемых процессов, например случайного распределения яркости фона, оказывается весьма сложной задачей. Поэтому на практике приходится использовать неполный набор вероятностных характеристик, ограничиваясь, например, одномерным или двумерным законом распределения.

Законы распределения большей частью неизвестны, однако при весьма общих дополнительных условиях во многих случаях они хорошо аппроксимируются *нормальным* или *гауссовым законом* распределения.

В одномерном случае плотность распределения вероятностей для нормального закона равна

$$p(U) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) e^{-(U-\bar{U})^2/2\sigma^2},$$

где σ^2 — параметр нормального закона; \bar{U} — среднее значение U , называемое часто *центром рассеивания*. Величина σ определяет полуширину части кривой, описываемой функцией $p(U)$, включающую в себя все точки, находящиеся выше уровня 0,606 от максимального значения, равного $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ при $U = \bar{U}$. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}/a,$$

то функция $p(U)$ удовлетворяет условию нормировки, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(U) dU = 1.$$

Для удобства отклонение U от среднего значения \bar{U} часто выражают в единицах величины σ , называемой *стандартным* или *средне-квадратическим отклонением*

$$z = (U - \bar{U})/\sigma = \Delta U/\sigma = u/\sigma,$$

где $\Delta U = u = U - \bar{U}$ — *центрированное значение* случайной величины.

Тогда

$$p(z) = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-z^2/2},$$

причем $\int_{-\infty}^{+\infty} p(z) dz = 1$.

Двумерное нормальное распределение имеет плотность распределения вероятностей вида

$$p(U_1, U_2) = [1/(2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-r^2})] \times \\ \times e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{U_1 - \bar{U}_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2r \left(\frac{U_1 - \bar{U}_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{U_2 - \bar{U}_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{U_2 - \bar{U}_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]},$$

или

$$p(z_1, z_2) = [1/(2\pi \sqrt{1-r^2})] e^{-\{1/[2(1-r^2)]\} [z_1^2 - 2rz_1z_2 + z_2^2]},$$

где σ_1, σ_2 — стандартные отклонения случайных величин (сечений случайной функции) U_1 и U_2 ; \bar{U}_1, \bar{U}_2 — средние значения случайных величин U_1 и U_2 ; r — коэффициент корреляции случайных величин U_1 и U_2 , определение которого приводится ниже.

Функции $p(U_1, U_2)$ и $p(z_1, z_2)$ связаны соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(U_1, U_2) dU_1 dU_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = 1.$$

Если $r = 0$, то

$$p(z_1, z_2) = (1/2\pi) e^{-(1/2)(z_1^2 + z_2^2)} = (1/\sqrt{2\pi}) e^{-z_1^2/2} (1/\sqrt{2\pi}) e^{-z_2^2/2}.$$

В этом случае двумерная плотность распределения вероятностей может быть представлена в виде произведения двух одномерных функций

$$p(z_1, z_2) = p(z_1) p(z_2),$$

что существенно упрощает ее исследование.

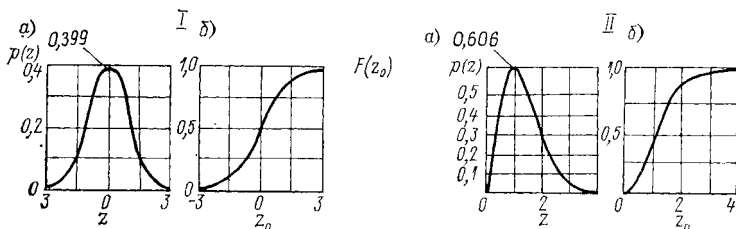


Рис. 318. Плотности распределения вероятностей (а) и функции распределения вероятностей (б) для нормального (I) и релеевского (II) законов распределения вероятностей случайных функций

Наряду с нормальным законом распределения при анализе шумов, прошедших через узкополосный фильтр и детектор электронной схемы *, используется *распределение Релея*, для которого

$$p(U) = \begin{cases} (U/\sigma_k^2) e^{-U^2/(2\sigma_k^2)} & \text{при } U > 0; \\ 0 & \text{при } U \leq 0. \end{cases}$$

Так как

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{2a^{(n+1)/2}},$$

где Γ — гамма-функция, то при $n = 1$ и $a = 1/(2\sigma_k^2)$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma(1)}{2a} = \frac{1}{2a} = \sigma_k^2.$$

* На выходе узкополосного фильтра шум представляет собой модулированное колебание, все параметры которого — несущая частота, фаза и огибающая — являются случайными медленно меняющимися функциями времени. Среднее значение несущей частоты равно частоте настройки фильтра, а среднее значение частотного отклонения шума близко к полосе пропускания фильтра. Фаза несущей частоты равновероятна в интервале от $-\pi$ до $+\pi$. Плотность вероятности огибающей определяется распределением Релея, а спектр огибающей примыкает к нулевой частоте. Эта огибающая может быть выделена на нагрузке линейного или квадратичного детектора.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(U) dU = 1.$$

Соответственно, если обозначить $z = U/\sigma_h$, то

$$p(z) = (z/\sigma_h) e^{-z^2/2}.$$

Вид функций плотности распределения для нормального и релеевского (при $\sigma_h = 1$) распределений представлен на рис. 318, а.

Вероятность того, что сечение случайной функции $U(\chi)$ для аргумента χ , равное U , не превзойдет значения U_0 , равна

$$P\{U < U_0\} = \int_{-\infty}^{U_0} p(U) dU.$$

Функцию, задающую эту вероятность, называют *функцией распределения вероятностей сечения* случайной функции

$$F(U_0) = P\{U < U_0\} = \int_{-\infty}^{U_0} p(U) dU.$$

Полученное соотношение устанавливает связь функции распределения с *плотностью распределения вероятностей сечения* случайной функции.

Очевидны также следующие соотношения:

$$1 - F(U_0) = P\{U > U_0\} = \int_{U_0}^{+\infty} p(U) dU;$$

$$F(+U_0) - F(-U_0) = P\{-U_0 < U < +U_0\} = \int_{-U_0}^{+U_0} p(U) dU.$$

Последнее соотношение, определяющее вероятность того, что сечение случайной функции $U(\chi)$ для аргумента χ , равное U , будет находиться в пределах от $-U_0$ до $+U_0$, т. е. по абсолютному значению не превзойдет уровня U_0 , представляет наибольший интерес.

Действительно, для нормального закона, когда $p(z)$ — четная функция, найдем

$$P\{-z_0 < z < z_0\} = 2 \int_0^{z_0} p(z) dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_0} e^{-z^2/2} dz,$$

где $z = (U - \bar{U})/\sigma$.

Полученное выражение, называемое *интегралом вероятности Гаусса*, табулировано. Значение интеграла вероятности

$$\Phi(z_0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_0} e^{-z^2/2} dz$$

приведено в виде кривой на рис. 270, где $\xi = z_0$.

Иногда интегралом вероятности называют функцию

$$\operatorname{erf}(z_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_0} e^{-z^2} dz = \Phi(\sqrt{2}z_0).$$

Так как в общем случае можно записать

$$F(U_2) - F(U_1) = P\{U_1 < U < U_2\} = \int_{U_1}^{U_2} p(U) dU,$$

то при $U_1 = 0$ $F(U_1) = F(0)$. Если $p(U) = p(-U)$, когда $F(0) = 1/2$, найдем

$$F(U_2) - 0,5 = \int_0^{U_2} p(U) dU.$$

Следовательно, учитывая, что для нормального закона

$$\int_0^{z_0} p(z) dz = 0,5\Phi(z_0),$$

получим

$$0,5\Phi(z_0) = F(z_0) - F(0) = F(z_0) - 0,5.$$

Функция распределения вероятностей, определяющая вероятность того, что сечение случайной функции не превзойдет значения z_0 , для нормального закона равно $F(z_0) = 0,5[1 + \Phi(z_0)]$. Вид этой функции представлен на рис. 318, 1б. На рис. 318, IIб представлена функция релеевского распределения.

Часто наиболее доступными и достаточными для описания вероятностных характеристик случайных функций являются их *числовые параметры* или так называемые *моменты распределения* — *математическое ожидание*, *дисперсия* и *корреляционная функция*.

§ 16.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Математическое ожидание случайной функции $U(x)$ представляет собой некоторую среднюю (неслучайную) функцию, вокруг которой различным образом располагаются конкретные реализации случайной функции.

При каждом значении аргумента средняя функция равна среднему значению (математическому ожиданию) соответствующего сечения случайной функции.

Среднее значение сечения случайной функции (среднее значение случайной величины) \bar{U} равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины (сечения случайной функции) на вероятность этих значений, т. е. для непрерывной случайной величины

$$\bar{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} U p(U) dU$$

Математическое ожидание случайной функции можно найти, вычисляя \bar{U} для различных значений аргумента χ .

Для стационарных случайных функций, определение которых будет дано ниже, математическое ожидание, вычисленное по множеству реализаций (ансамблю), есть просто число, которое называют средним по ансамблю, в этом случае $\bar{U} = \text{const}$.

При экспериментальных исследованиях вероятностных характеристик шума обычно используется другой способ усреднения — усреднение по аргументу χ . Среднее по аргументу равно

$$\bar{U}_{\text{арг}} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} U(\chi) d\chi,$$

где $U(\chi)$ — одна из реализаций случайной функции, заданная в интервале $\pm X$; $2X$ — достаточно большой интервал, который теоретически стремится к бесконечности, а практически величина его столь велика, что результаты измерений существенно не отличаются от результатов, полученных внутри еще большего интервала.

В общем случае среднее значение для каждой реализации будет свое и может значительно отличаться от математического ожидания случайной функции, вычисленного как среднее из множества реализаций. Однако для особого класса случайных функций, получивших название *эргодических*, среднее по аргументу на достаточно большом участке наблюдения с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равно среднему по множеству наблюдений $\bar{U} = \bar{U}_{\text{арг}}$.

§ 16.3. ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Дисперсия случайной функции $U(\chi)$ представляет собой некоторую неслучайную функцию, значение которой для каждого χ равно дисперсии сечения случайной функции.

Дисперсией сечения случайной функции (дисперсией случайной величины) $\overline{\Delta U^2}$ называется среднее значение квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения

$$\overline{\Delta U^2} = \overline{(U - \bar{U})^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (U - \bar{U})^2 p(U) dU.$$

Дисперсию случайной функции можно найти, вычисляя $\overline{\Delta U^2}$ для различных χ

Так как

$$\begin{aligned} \overline{\Delta U^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (U - \bar{U})^2 p(U) dU = \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 p(U) dU - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} U \bar{U} p(U) dU + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{U})^2 p(U) dU = \bar{U}^2 - 2\bar{U}\bar{U} + (\bar{U})^2 = \bar{U}^2 - (\bar{U})^2, \end{aligned}$$

то при $\bar{U} = 0$

$$\overline{\Delta U^2} = \bar{U}^2.$$

Величина $\sqrt{\overline{\Delta U^2}}$ называется *среднеквадратическим отклонением* (значением) случайной величины — сечения случайной функции.

Для стационарной случайной функции дисперсия, вычисленная по множеству реализаций, постоянна, т. е. является просто числом, которое принято называть дисперсией по ансамблю, в этом случае $\overline{\Delta U^2} = \text{const}$.

Дисперсия случайной функции может также вычисляться как среднее по аргументу χ

$$\overline{\Delta U_{\text{арг}}^2} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} [U(\chi) - \bar{U}]^2 d\chi.$$

В случае эргодической случайной функции дисперсии, вычисленные как среднее по аргументу и по ансамблю, совпадают: $\overline{\Delta U^2} = \overline{\Delta U_{\text{арг}}^2}$.

Для нормального закона распределения среднеквадратическим значением является стандартное отклонение σ , а дисперсией — σ^2 . Действительно, в этом случае имеем

$$\overline{\Delta U^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (U - \bar{U})^2 p(U) dU = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (U - \bar{U})^2 e^{-(U-\bar{U})^2/(2\sigma^2)} dU.$$

Если $z = (U - \bar{U})/\sigma$, то

$$\begin{aligned} \overline{\Delta z^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\Gamma(3/2)}{2(0,5)^{1,5}} = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}/2}{1/(2\sqrt{2})} = \sigma^2, \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-az^2} dz = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{2a^{(n+1)/2}},$$

а гамма-функция $\Gamma[(n+1)/2]$ при $n = 2$ равна $\sqrt{\pi}/2$.

Для распределения Релея можно найти:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \sqrt{\pi/2} \sigma_k = 1,253\sigma_k; \\ \overline{\Delta U^2} &= [2 - (\pi/2)] \sigma_k^2 = 0,429\sigma_k^2. \end{aligned}$$

§ 16.4. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Математическое ожидание и дисперсия не дают достаточно полного представления о случайной функции. Две случайные функции могут иметь одинаковые среднее значение и дисперсию, но быть совершенно различными по характеру их изменения во времени.

Рассмотрим два соседних сечения случайной функции, т. е. две случайные величины $U_1 = U(\chi_1)$ и $U_2 = U(\chi_2)$. При близких значениях χ_1 и χ_2 величины U_1 и U_2 связаны тесной зависимостью:

если величина U_1 приняла какое-то значение, то величина U_2 с большой вероятностью примет значение, близкое к нему. При увеличении же интервала между сечениями χ_1 и χ_2 зависимость между U_1 и U_2 должна ослабевать.

Степень зависимости случайных величин U_1 и U_2 может быть охарактеризована некоторой функцией двух аргументов χ_1 и χ_2 — *корреляционной функцией*, которая определяется как математическое ожидание произведения двух центрированных случайных величин $U_1 - \bar{U}_1$ и $U_2 - \bar{U}_2$

$$K_U(\chi_1, \chi_2) = \overline{(U_1 - \bar{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2)} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} (U_1 - \bar{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2) p(U_1, U_2) dU_1 dU_2.$$

Вместо корреляционной функции пользуются также *коэффициентом корреляции*

$$r_U(\chi_1, \chi_2) = \overline{(U_1 - \bar{U}_1)(U_2 - \bar{U}_2)} / \sqrt{\overline{(U_1 - \bar{U}_1)^2} \overline{(U_2 - \bar{U}_2)^2}}.$$

Если $|r_U| = 1$, то говорят о полной корреляции (полной взаимозависимости) случайных величин. Это имеет место, в частности, когда $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, т. е. $U_1 = U_2 = U$, так как в этом случае корреляционная функция равна дисперсии

$$K_U(\chi) = \overline{(U - \bar{U})^2} = \overline{\Delta U^2}.$$

Если коэффициент корреляции равен нулю, то случайные величины некоррелированы, т. е. полностью независимы друг от друга. Если $0 < |r_U| < 1$, имеет место частичная корреляция.

Для стационарного случайного процесса корреляционная функция не зависит от того, где именно на оси χ (времени или расстояния) располагаются два рассматриваемых сечения $U(\chi_1)$ и $U(\chi_2)$, а зависит только от разности $\Delta\chi = |\chi_2 - \chi_1|$.

В этом случае

$$K_U(\chi_1, \chi_2) = K_U(\Delta\chi).$$

Для эргодического случайного процесса функция корреляции может быть вычислена как среднее по аргументу

$$K_U(\Delta\chi) = K_{\text{эрг}}(\Delta\chi) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} [U(\chi) - \bar{U}][U(\chi + \Delta\chi) - \bar{U}] d\chi.$$

В ряде случаев рассматривается *функция взаимной корреляции* двух случайных эргодических процессов $U(\chi)$ и $V(\chi)$. Эта функция характеризует статистическую связь этих процессов и определяется выражением

$$K_{UV}(\Delta\chi) = \overline{u(\chi)v(\chi + \Delta\chi)} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} u(\chi)v(\chi + \Delta\chi) d\chi.$$

Здесь

$$u(\chi) = U(\chi) - \overline{U(\chi)}; v(\chi + \Delta\chi) = V(\chi + \Delta\chi) - \overline{V(\chi + \Delta\chi)},$$

где $U(\chi)$, $V(\chi + \Delta\chi)$ — сечения соответствующих случайных функций при значениях аргумента χ и $\chi + \Delta\chi$.

При $U(\chi) = V(\chi)$ функция взаимной корреляции переходит в функцию корреляции, или, как ее часто называют, в *функцию автокорреляции*, показывающую, насколько быстро уменьшается зависимость значений случайной функции от ее предыдущего хода. Максимальное абсолютное значение функции корреляции не может превышать дисперсии, т. е. ее значения при $\Delta\chi = 0$. Функция взаимной корреляции в отличие от функции корреляции может не обладать свойством четности

$$K_{UV}(\chi) \neq K_{UV}(-\chi).$$

Для независимых случайных процессов функция взаимной корреляции обращается в нуль.

В связи с завершением рассмотрения трех основных числовых характеристик случайных функций (среднего значения, дисперсии и корреляционной функции) остановимся на определении стационарного и эргодического процессов.

Случайная функция называется *стационарной в узком смысле* или строго стационарной, если все ее n -мерные законы распределения не зависят от начала отсчета (времени, пространственной координаты и т. д.).

Случайная функция называется *стационарной в широком смысле*, если ее среднее значение и дисперсия не зависят от аргумента (времени, пространственной координаты и т. д.), а функция корреляции зависит только от разности аргументов ($t_2 - t_1$; $x_2 - x_1$ и т. д.). Эти условия полностью выполняются и для функции стационарной в узком смысле, так как из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Случайная функция называется *эргодической*, если ее среднее значение, дисперсия и корреляционная функция, вычисленные по нескольким реализациям (средние статистические или средние по ансамблю), совпадают со средними значениями, вычисленными для одной реализации при достаточно большом значении временного или пространственного интервала усреднения.

§ 16.5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ИЛИ СПЕКТР ХИНЧИНА—ВИНЕРА

Случайный процесс представляет собой множество (ансамбль) случайных функций, обладающих различной формой и различной внутренней структурой, т. е. различным спектром. Всегда можно вычислить спектр для каждой конкретной реализации случайной функции, пользуясь разложением Фурье, однако усреднение комплексной спектральной плотности по всем реализациям приведет к нулевому спектру из-за случайности и независимости фаз спектраль-

ных составляющих в различных реализациях. Даже для одной случайной функции разложение Фурье не имеет смысла, так как представление ее в виде суммы гармонических колебаний с амплитудами $2\bar{U}(\kappa) d\kappa$ и вычисление спектральной плотности $\bar{U}(\kappa)$ приводит вновь к случайной функции, поскольку каждая комплексная амплитуда является случайной величиной.

Следовательно, непосредственный спектральный анализ случайной функции не позволяет выявить, какого рода колебания преобладают в данном процессе, какова его внутренняя структура, так как спектральная плотность такого процесса сама является случайной функцией.

В связи с этим вводится понятие *спектральной плотности дисперсии* случайной функции, поскольку дисперсия представляет собой неслучайную функцию, а ее распределение по частотам определяет спектральное распределение среднего квадрата заданной случайной функции. Спектральную плотность дисперсии называют также *спектральной плотностью шума* и представляют в виде

$$E(\kappa) = \lim_{\Delta\kappa \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta u^2}}{\Delta\kappa} = \frac{\overline{du^2}}{d\kappa},$$

откуда

$$\overline{u^2} = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa,$$

где

$$u = \Delta U = U - \bar{U}.$$

Дисперсия случайной функции может быть разложена на бесконечно большое число элементарных слагаемых $\overline{du^2} = E(\kappa) d\kappa$, каждое из которых представляет собой дисперсию, приходящуюся на элементарный интервал частот $d\kappa$, прилегающий к частоте κ .

Если спектральная плотность шума не зависит от частоты, то шум называют *белым*, если же зависимость от частоты имеет место, то шум называют *окрашенным*. Эта терминология заимствована из физической оптики, где белый свет представляют в виде набора электромагнитных колебаний всех частот, а окраска света зависит от наличия преимущественных (по энергии) частот в спектре колебаний.

Для определения спектральной плотности шума могут использоваться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{u^2} &= \int_0^\infty E(\omega) d\omega; \quad \overline{u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) d\kappa; \\ \overline{u^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E(\omega) &= E(\kappa) \frac{d\kappa}{d\omega} = \frac{E(\kappa)}{2\pi}; \quad E_1(\kappa) = E(\kappa)/2; \\ E_1(\omega) &= E(\omega)/2; \quad \omega = 2\pi\kappa. \end{aligned}$$

Область интегрирования в некоторых из приведенных соотношений расширена на интервал от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. в рассмотрение введены отрицательные частоты.

Соотношения между функциями $E(\chi)$, $E_1(\chi)$, $E(\omega)$, $E_1(\omega)$ иллюстрируются кривыми на рис. 319.

Формально установленная связь между дисперсией и спектральной плотностью шума может быть существенно углублена, если найти зависимость спектральной плотности шума от функции корреляции случайного процесса. Нетрудно понять возможные причины такой зависимости. Действительно, чем больше взаимосвязь между сечениями случайной функции, находящимися друг от друга на

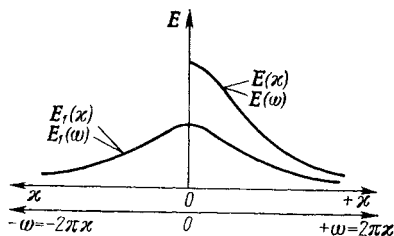


Рис. 319. Различные функции спектральной плотности шума

значительном расстоянии, тем, очевидно, более медленно развивается процесс, не испытывая резких изменений в промежутках между рассматриваемыми сечениями. Следовательно, в этом случае можно ожидать, что в спектральном распределении дисперсии случайного процесса отсутствуют составляющие на высоких частотах. Наоборот, если расположенные достаточно близко друг от друга сечения случайной функции

связаны между собой слабо, можно ожидать быстрых изменений дисперсии процесса, т. е. наличия значительной мощности его в высокочастотной области спектра.

Для установления интересующей нас зависимости предположим, что задана стационарная и эргодическая случайная функция $U(\chi)$, определенная при всех значениях аргумента χ . Пусть функция $U(\chi)$ имеет весьма большую, но конечную протяженность в интервале от $-X$ до $+X$, т. е. она представляет собой «урезанную» функцию, определяемую соотношением

$$U_X(\chi) = \begin{cases} U(\chi) & \text{при } |\chi| \leq X; \\ 0 & \text{при } |\chi| > X. \end{cases}$$

Функция автокорреляции рассматриваемой функции $U_X(\chi)$, определенная как среднее по аргументу, равна

$$K(\Delta\chi) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} u_X(\chi) u_X(\chi + \Delta\chi) d\chi,$$

где $u_X(\chi)$ и $u_X(\chi + \Delta\chi)$ — центрированные значения функций $U_X(\chi)$ и $U_X(\chi + \Delta\chi)$.

* Иногда удобнее использовать иные обозначения. Например, обозначать спектральную плотность, учитывающую отрицательные частоты, $E(\chi)$, а в обозначение спектральной плотности для положительных частот вводить индекс «+» у символа частоты, т. е. $E(\chi_+)$ или $E(\omega_+)$.

Функции $u_X(\chi)$ и $u_X(\chi + \Delta\chi)$ можно представить в виде интегралов Фурье:

$$u_X(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_X(\kappa) e^{j2\pi\kappa\chi} d\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_X^*(\kappa) e^{-j2\pi\kappa\chi} d\kappa;$$

$$u_X(\chi + \Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_X(\kappa_1) e^{j2\pi\kappa_1(\chi + \Delta\chi)} d\kappa_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K(\Delta\chi) &= \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_X(\kappa_1) \tilde{u}_X^*(\kappa) e^{j2\pi\kappa_1\Delta\chi} e^{j2\pi(\kappa_1 - \kappa)\chi} d\chi d\kappa d\kappa_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\tilde{u}_X(\kappa_1) \tilde{u}_X^*(\kappa)}{2X} \right] e^{j2\pi\kappa_1\Delta\chi} \left[\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{+X} e^{j2\pi(\kappa_1 - \kappa)\chi} d\chi \right] d\kappa d\kappa_1. \end{aligned}$$

Но внутренний интеграл при $X \rightarrow \infty$ представляет собой дельта-функцию

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{+X} e^{j2\pi(\kappa_1 - \kappa)\chi} d\chi = \delta(\kappa_1 - \kappa),$$

поэтому

$$K(\Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{\tilde{u}_X(\kappa_1) \tilde{u}_X^*(\kappa)}{2X} \right] e^{j2\pi\kappa_1\Delta\chi} \delta(\kappa_1 - \kappa) d\kappa d\kappa_1.$$

Так как дельта-функция не равна нулю только при $\kappa_1 = \kappa$, пользуясь фильтрующим свойством дельта-функции, найдем

$$K(\Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{u}_X(\kappa)|^2}{2X} e^{j2\pi\kappa\Delta\chi} d\kappa.$$

Обозначив

$$E_1(\kappa) = \lim_{X \rightarrow \infty} [|\tilde{u}_X(\kappa)|^2 / (2X)],$$

найдем

$$K(\Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) e^{j2\pi\kappa\Delta\chi} d\kappa.$$

Поскольку из полученного соотношения видно, что $K(\Delta\chi)$ есть преобразование Фурье от $E_1(\kappa)$, то справедливо также и преобразование

$$E_1(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) e^{-j2\pi\kappa\Delta\chi} d(\Delta\chi).$$

При этом по-прежнему предполагается, что для случайной функции времени обобщенная координата $\chi = t$, а для случайной функции пространственных координат $\chi = x$ или $\chi = y$.

Функция $E_1(\kappa)$ называется *энергетическим спектром* случайного процесса. Это становится понятным, если учесть, что при $\Delta\chi = 0$

$$K(\Delta\chi) = K(0) = \overline{u^2} = \overline{\Delta U^2} = \overline{(U - \overline{U})^2},$$

т. е. представляет собой дисперсию процесса. Поскольку

$$K(\Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) e^{j2\pi\kappa \Delta\chi} d\kappa,$$

то

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) d\kappa,$$

откуда следует, что

$$E_1(\kappa) = \frac{d\overline{u^2}}{d\kappa}$$

представляет собой *спектральную плотность дисперсии* — дисперсию, приходящуюся на единичный интервал частот. Если процесс развивается во времени, а случайной функцией $u(t)$ являются электрические напряжение или ток, то средний квадрат этой функции можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую в сопротивлении 1 Ом. Спектральная плотность средней мощности представляет собой среднюю мощность, приходящуюся на частотный интервал 1 Гц, т. е. мощность, умноженную на время или энергию. Поэтому спектральную плотность дисперсии процесса часто называют *энергетическим спектром* или *спектром мощности*. Однако, если речь идет, например, о спектре флуктуаций потока излучения, который сам является мощностью, предпочитают пользоваться названием — *спектр Хинчина—Винера*, так как именно Хинчин и Винер показали, что автокорреляционная функция и энергетический спектр случайного процесса являются парой преобразований Фурье:

$$E_1(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) e^{-j2\pi\kappa \Delta\chi} d(\Delta\chi);$$

$$K(\Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) e^{j2\pi\kappa \Delta\chi} d\kappa.$$

Учитывая различные определения спектральной плотности шума, а также четность корреляционной функции для стационарного случайного процесса, можно найти:

$$\begin{aligned} E_1(\kappa) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) \cos 2\pi\kappa \Delta\chi d(\Delta\chi) = \\ &= 2 \int_0^{\infty} K(\Delta\chi) \cos 2\pi\kappa \Delta\chi d(\Delta\chi); \end{aligned}$$

$$K(\Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) e^{j2\pi\kappa\Delta\chi} d\kappa = 2 \int_0^{\infty} E_1(\kappa) \cos 2\pi\kappa\Delta\chi d\kappa,$$

или

$$E(\chi) = 2E_1(\chi) = 4 \int_0^{\infty} K(\Delta\chi) \cos 2\pi\chi\Delta\chi d(\Delta\chi);$$

$$K(\Delta\chi) = \int_0^{\infty} E(\chi) \cos 2\pi\chi\Delta\chi d\chi,$$

или

$$E_1(w) = \frac{E_1(\chi)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) e^{-jw\Delta\chi} d(\Delta\chi) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\Delta\chi) \cos w\Delta\chi d(\Delta\chi);$$

$$K(\Delta\chi) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(w) e^{jw\Delta\chi} d\left(\frac{w}{2\pi}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(w) e^{jw\Delta\chi} dw = 2 \int_0^{\infty} E_1(w) \cos w\Delta\chi dw,$$

или

$$E(w) = 2E_1(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\Delta\chi) \cos w\Delta\chi d(\Delta\chi);$$

$$K(\Delta\chi) = \int_0^{\infty} E(w) \cos w\Delta\chi d\omega.$$

Мы остановились на этих в общем элементарных вычислениях, имея в виду часто встречающиеся ошибки, связанные с неправильным использованием коэффициентов 2; 4; π ; 2π ; $1/\pi$; $1/2\pi$ и т. д. Этих ошибок можно избежать, если помнить, что в исходных выражениях, где указанные коэффициенты отсутствуют, функция спектральной плотности $E_1(\chi)$ определяется для отрицательных (и не круговых) частот.

Полученные при использовании различных определений спектральной плотности шума результаты сведены в табл. 25. Если спектр Хинчина—Винера вычисляется для временных флуктуаций потока излучения, дисперсия которых выражается в Вт^2 , то спектр измеряется в $\text{Вт}^2/\text{Гц}$ или $\text{Вт}^2 \cdot \text{с}$, а корреляционная функция соответственно в Вт^2 . Для пространственных флуктуаций одномерного распределения яркости по полю излучения корреляционная функция измеряется в $[\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{ср})]^2$, а спектр — в $[\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{ср})]^2 \text{ рад}$.

**Наиболее употребительные определения спектральной плотности
и вида преобразований Хинчина — Винера**

Спектральная плотность и ее связь с дисперсией	Преобразование Хинчина — Винера
$\bar{U}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) d\kappa$	$\begin{aligned} E_1(\kappa) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) e^{-j2\pi\kappa\Delta\chi} d(\Delta\chi) = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} K(\Delta\chi) \cos 2\pi\kappa\Delta\chi d(\Delta\chi) \\ K(\Delta\chi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\kappa) e^{j2\pi\kappa\Delta\chi} d\kappa = \\ &= 2 \int_0^{\infty} E_1(\kappa) \cos 2\pi\kappa\Delta\chi d\kappa \end{aligned}$
$E(\kappa) = 2E_1(\kappa)$ $\bar{U}^2 = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa$	$\begin{aligned} E(\kappa) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) e^{-j2\pi\kappa\Delta\chi} d(\Delta\chi) = \\ &= 4 \int_0^{+\infty} K(\Delta\chi) \cos 2\pi\kappa\Delta\chi d(\Delta\chi) \\ K(\Delta\chi) &= \int_0^{\infty} E(\kappa) \cos 2\pi\kappa\Delta\chi d\kappa \end{aligned}$
$E_1(\omega) = \frac{E_1(\kappa)}{2\pi}$ $\bar{U}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\omega) d\omega$	$\begin{aligned} E_1(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) e^{-j\omega\Delta\chi} d(\Delta\chi) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(\Delta\chi) \cos \omega\Delta\chi d(\Delta\chi) \\ K(\Delta\chi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(\omega) e^{j\omega\Delta\chi} d\omega = \\ &= 2 \int_0^{\infty} E_1(\omega) \cos \omega\Delta\chi d\omega \end{aligned}$
$E(\omega) = 2E_1(\omega)$ $\bar{U}^2 = \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega$	$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\Delta\chi) e^{-j\omega\Delta\chi} d(\Delta\chi) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\Delta\chi) \cos \omega\Delta\chi d(\Delta\chi) \\ K(\Delta\chi) &= \int_0^{\infty} E(\omega) \cos \omega\Delta\chi d\omega \end{aligned}$

§ 16.6. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТР ХИНЧИНА—ВИНЕРА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ ИНВАРИАНТНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть на входе произвольной линейной инвариантной системы с импульсной характеристикой $K(\chi)$ действует сигнал $U_{\text{вх}}(\chi)$, являющийся реализацией стационарного нормально распределенного случайного процесса.

Тогда сигнал на выходе можно найти в виде интеграла свертки

$$U_{\text{вых}}(\chi) = U_{\text{вх}}(\chi) \otimes K(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\text{вх}}(\chi_1) K(\chi - \chi_1) d\chi_1.$$

Так как сигнал, действующий на входе, случаен, то ансамблю реализаций $U_{\text{вх}}(\chi)$ соответствует ансамбль случайных чисел $U_{\text{вых}}(\chi)$. Нас интересует закон распределения этих случайных чисел.

Очевидно, что значения $U_{\text{вх}}(\chi_1)$, взятые из нормально распределенного процесса $U_{\text{вх}}(\chi)$, обладают нормальным распределением. При умножении их на постоянное число $K(\chi - \chi_1)$ распределение остается нормальным.

Таким образом, правая часть выражения для $U_{\text{вых}}(\chi)$ есть сумма нормально распределенных слагаемых, откуда следует, что $U_{\text{вых}}(\chi)$ подчиняется нормальному закону распределения. Это свойство нормального случайного процесса имеет фундаментальное значение и формулируется обычно следующим образом: *при любых линейных преобразованиях нормального (гауссовского) процесса закон распределения остается нормальным (гауссовским).*

Корреляционную функцию и спектр Хинчина—Винера случайного процесса на выходе линейной системы можно найти непосредственно из выражения для $U_{\text{вых}}(\chi)$, однако мы воспользуемся более простым доказательством.

Предположим, что функции $U_{\text{вх}}(\chi)$ и $U_{\text{вых}}(\chi)$ имеют весьма большую, но конечную протяженность в интервале от $-X$ до $+X$. Тогда можно найти преобразования Фурье от этих «урезанных» функций $\tilde{U}_{\text{вх}}(x)$ и $\tilde{U}_{\text{вых}}(x)$, которые связаны между собой соотношением

$$\tilde{U}_{\text{вых}}(x) = \tilde{U}_{\text{вх}}(x) \dot{K}(x),$$

где с точностью до постоянного множителя комплексный коэффициент передачи равен

$$\dot{K}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\chi) e^{-j2\pi x \chi} d\chi.$$

Далее можно найти:

$$|\tilde{U}_{\text{вых}}(x)|^2 = |\tilde{U}_{\text{вх}}(x)|^2 |\dot{K}(x)|^2;$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} [|\tilde{U}_{\text{вых}}(x)|^2 / (2X)] = |\dot{K}(x)|^2 \lim_{X \rightarrow \infty} [|\tilde{U}_{\text{вх}}(x)|^2 / (2X)].$$

Так как спектр Хинчина—Винера определяется выражением

$$E_1(\kappa) = \lim_{X \rightarrow \infty} |U_X(\kappa)|^2 / (2X).$$

то

$$E_{1 \text{ вых}}(\kappa) = |\dot{K}(\kappa)|^2 E_{1 \text{ вх}}(\kappa).$$

Корреляционная функция процесса на выходе равна

$$K_{\text{вых}}(\Delta\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{1 \text{ вых}}(\kappa) e^{j2\pi\kappa \Delta\chi} d\kappa.$$

В этих выражениях обобщенная координата χ по-прежнему в одних случаях представляет собой временную координату t , а в других — пространственные координаты x и y .

Обобщенная частота κ может быть частотой f процесса, развивающегося во времени, или частотами ν , μ для пространственных процессов.

Таким образом, *анализ передачи нормальных случайных процессов через линейные системы с постоянными параметрами* (усиление, фильтрация, дифференцирование, интегрирование и т. д.) по существу сводится к *спектральному (корреляционному) анализу*.

Значительно более сложен анализ передачи случайных процессов с распределением, отличающимся от нормального, так как закон распределения изменяется, а отыскание распределения на выходе системы в общем случае представляет собой весьма сложную задачу, которая рассматривается в специальной литературе.

Действительно, если сигнал на выходе нелинейной системы связан с сигналом на входе соотношением $y = \varphi(x)$, то, полагая, что вероятность нахождения случайной величины x в интервале dx равна вероятности нахождения y в интервале dy , найдем $p(x) dx = p(y) dy$, где $p(x)$ и $p(y)$ — плотности распределения вероятностей на входе и выходе соответственно.

Следовательно,

$$p(y) = \frac{dx}{dy} p(x).$$

Так как $\varphi'(x) = dy/dx$, то $p(y) = p(x)/\varphi'(x)$.

Глава 17

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ И РАСЧЕТА УРОВНЯ ШУМОВ ОТДЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ТРАКТА ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА

Уровень шумов любого участка тракта оптико-электронного прибора, включая промежуточную среду, используемую для передачи потока излучения от источника до оптической системы, определяется не только шумами, действующими на входе данного участка, но и дополнительными шумами, вносимыми этим участком. Только в идеальном случае при прохождении сигнала по тракту не вносится

дополнительных шумов. Для такой идеальной системы уровень шумов на выходе тот же, что и на входе. Однако, к сожалению, все реальные участки тракта: промежуточная среда (например, атмосфера Земли), приемник излучения, входная цепь, усилитель и т. д. — генерируют собственный шум. В результате отношение сигнала к шуму на выходе всегда меньше, чем на входе, если, конечно, оценивать эти отношения в равных условиях наблюдения.

При разработке того или иного прибора конструктор обычно руководствуется следующим правилом: уровень шумов должен определяться шумом источника сигнала. Например, если источником сигнала в электронной части тракта прибора является приемник излучения, то именно шум, генерируемый приемником, должен быть преобладающим.

В ходе разработки сложного прибора необходимо стремиться к тому, чтобы свести до минимума все шумы, увеличивающие шум источника сигнала.

§ 17.1. КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА

Количественной мерой оценки уровня шума является *коэффициент шума* или *шум-фактор*, учитывающий прирост шумов на выходе данного участка тракта прибора по отношению к шумам на его входе.

Рассмотрим выражение для коэффициента шума применительно к электронной части тракта оптико-электронного прибора. Если мощность шума на зажимах приемника излучения, состоящего из шума фона и собственного внутреннего шума приемника, обозначить через $P_{ш. пр}$, а мощность шума усилителя со входной цепью — через $P_{ш. ус}$, то коэффициент шума этих элементов — усилителя и входной цепи — равен

$$F = \frac{P_{ш. пр} + P_{ш. ус}}{P_{ш. пр}} = 1 + \frac{P_{ш. ус}}{P_{ш. пр}}.$$

При вычислении шум-фактора все шумы должны быть отнесены к одной точке тракта передачи сигнала, например к выходу усилителя. Кроме того, необходимо определить, в какой полосе пропускания задается коэффициент шума. Если задавать его в единичной полосе частот, центрированной относительно какой-то определенной частоты, то шум-фактор является функцией частоты.

Иногда величина F рассчитывается для всей эквивалентной шумовой полосы пропускания рассматриваемого участка тракта прибора. В этом случае определяется коэффициент усредненного шума, уже не являющийся функцией частоты.

Так как коэффициент шума представляет собой отношение мощностей, его удобно выразить в децибелах (дБ) по формуле

$$F_1 = 10 \lg F.$$

Для идеального нешумящего приемного устройства коэффициент шума равен единице, а в случае если выражать его в децибелах — нулю.

Если $F = 2$ ($F_1 = 3$ дБ), то говорят, что имеет место *согласование шумов*, так как в этом случае дополнительный собственный шум рассматриваемого участка тракта прибора $P_{ш. доп}$ равен шуму, поступающему на его вход $P_{ш. вх}$, т. е. при $F = 1 + P_{ш. доп}/P_{ш. вх} = 2$,

$$P_{ш. доп} = P_{ш. вх}.$$

Иногда коэффициент шума определяется в терминах отношения сигнала к шуму (c/u). Это возможно в случае, если отношение (c/u) понимать как отношение мощности сигнала к мощности шума. Считая усиление по мощности для сигнала и шума одинаковым, найдем, что при отсутствии собственного шума рассматриваемого участка тракта усиления отношение $(c/u)_{вых} = (c/u)_{вх}$. При наличии дополнительных шумов имеем

$$\left(\frac{c}{u}\right)_{вых} = \frac{P_{с. вых}}{P_{ш. вых} + (P_{ш. вых})_{доп}},$$

так как коэффициент шума

$$F = 1 + (P_{ш. вых})_{доп}/P_{ш. вых},$$

а

$$P_{с. вых}/P_{ш. вых} = P_{с. вх}/P_{ш. вх} = (c/u)_{вх},$$

то

$$F = (c/u)_{вх}/(c/u)_{вых}.$$

§ 17.2. ШУМОВАЯ ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ

Если спектральная плотность шума, действующего на входе четырехполосника равна $E_{вх}(f)$, а его коэффициент передачи равен $\dot{K}(f)$, то спектральная плотность шума на выходе четырехполосника равна $E_{вых}(f) = |\dot{K}(f)|^2 E_{вх}(f)$. Дисперсию шума на выходе, соответственно, найдем в виде

$$\overline{u_{ш. вых}^2} = \int_0^\infty E_{вых}(f) df = \int_0^\infty E_{вх}(f) |\dot{K}(f)|^2 df.$$

Введем обозначения:

$$E_0 = E_{вх}(f_{01}); \quad K_0 = |\dot{K}(f_{02})|,$$

где f_{01} — частота, на которой задано значение спектральной плотности входного шума (например, шума приемника излучения); f_{02} — частота, на которой задано абсолютное значение модуля коэффициента передачи четырехполосника (обычно частота, соответствующая максимальному значению модуля коэффициента передачи). Если далее

$$\varepsilon_{вх}(f) = E_{вх}(f)/E_0, \quad \dot{k}(f) = \dot{K}(f)/K_0,$$

то можно найти

$$\overline{u_{ш. вых}^2} = E_0 K_0^2 \int_0^\infty \varepsilon_{вх}(f) |\dot{k}(f)|^2 df.$$

Обозначим

$$\Delta f_{ш} = \int_0^{\infty} \epsilon_{вх}(f) |k(f)|^2 df,$$

тогда

$$\overline{u_{ш. вых}^2} = E_0 K_0^2 \Delta f_{ш}.$$

Смысл полученного выражения состоит в том, что действие шума с заданной спектральной плотностью на входе четырехполосника, имеющего заданную частотную характеристику, по эффекту на выходе может быть заменено действием белого шума с постоянной спектральной плотностью E_0 на четырехполосник с прямоугольной частотной характеристикой, имеющей ширину $\Delta f_{ш}$ и коэффициент передачи равный K_0 в пределах полосы частот $\Delta f_{ш}$ и равный нулю вне этой полосы частот.

Величина $\Delta f_{ш}$ называется *шумовой полосой пропускания*. Если входной шум белый, т. е. $E_{вх}(f) = E_0 = \text{const}$; $\epsilon_{вх}(f) = 1$, то

$$\Delta f_{ш. бел} = \int_0^{\infty} |\dot{k}(f)|^2 df.$$

Для случая, когда частотная характеристика четырехполосника имеет прямоугольную форму, т. е.

$$k(f) = |\dot{k}(f)| = \begin{cases} 1 & \text{при } f_1 \leq f \leq f_2; \\ 0 & \text{при } f_1 > f > f_2, \end{cases}$$

имеем

$$\Delta f_{ш} = \int_{f_1}^{f_2} \epsilon_{вх}(f) df,$$

или, если шум — белый, $\Delta f_{ш. бел} = f_2 - f_1$.

Для окрашенного шума, когда, например, $E_{вх}(f) = E_0 f_{01}/f$, т. е. $\epsilon_{вх}(f) = f_{01}/f$, шумовая полоса равна

$$\Delta f_{ш. окр} = f_{01} \int_0^{\infty} \frac{|k(f)|^2}{f} df = f_{01} \int_0^{\infty} |\dot{k}(f)|^2 d \ln f.$$

Если в этом случае частотная характеристика четырехполосника имеет прямоугольную форму, получим $\Delta f_{ш. окр} = f_{01} \ln(f_2/f_1)$.

В качестве примера рассмотрим расчет шумовой полосы пропускания апериодического звена для белого шума. Так как в этом случае

$$k(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}},$$

где $\tau = RC$, то

$$\Delta f_{ш. бел} = \int_0^{\infty} k^2(f) df = \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + (2\pi f\tau)^2}.$$

Поскольку $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, то

$$\Delta f_{ш, \text{ бел}} = \frac{1}{2\pi\tau} \operatorname{arctg} (2\pi\tau f) \Big|_0^\infty = \frac{1}{4\tau}.$$

Так как частота среза (частота, на которой коэффициент передачи по мощности падает в два раза *) для аperiodического звена равна $f_{\text{ср}} = 1/(2\pi\tau)$, то

$$\Delta f_{ш, \text{ бел}} = (\pi/2) f_{\text{ср}} = 1,571 f_{\text{ср}}.$$

§ 17.3. ШУМОВЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ

Шум любого элемента (двухполюсника \hat{z}) сложной электрической цепи, нагруженной на сопротивление \hat{z}_H (рис. 320, а), можно представить либо эквивалентным генератором электродвижущей силы

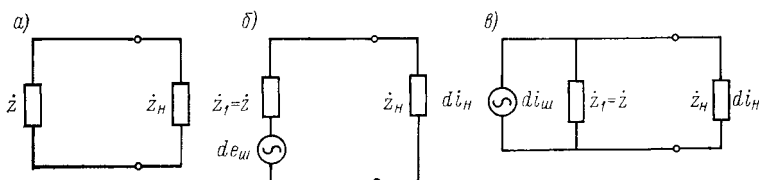


Рис. 320. Эквивалентные шумовые схемы: а — шумящий двухполюсник \hat{z} ; б — эквивалентная схема с генератором э. д. с.; в — эквивалентная схема с генератором тока (\hat{z}_H — сопротивление нагрузки; \hat{z}_1 — нешумящий двухполюсник с комплексным сопротивлением ($\hat{z}_1 = \hat{z}$))

(рис. 320, б), равной среднеквадратическому значению э. д. с. шума, приходящегося на элементарную полосу частот df , $\hat{de}_{ш} = V \overline{\hat{de}_{ш}^2}$, либо эквивалентным генератором тока (рис. 320, в), равным среднеквадратическому значению шумового тока, приходящегося на элементарную полосу частот df , $\hat{di}_{ш} = V \overline{\hat{di}_{ш}^2}$. Очевидно, что $\overline{\hat{de}_{ш}^2} = E(f) df$, $\overline{\hat{di}_{ш}^2} = J(f) df$, где $E(f)$ и $J(f)$ — спектральные плотности шума.

Эквивалентный генератор э. д. с. включается последовательно с нешумящим двухполюсником, комплексное сопротивление которого $\hat{z}_1 = \hat{z}$, а генератор тока — параллельно ему (рис. 320, б и в).

Если двухполюсником является активное сопротивление R , а нагрузкой — также активное сопротивление R_H , то можно записать следующие соотношения между э. д. с. $\hat{de}_{ш}$ и током $\hat{di}_{ш}$. Сила тока в нагрузке для схемы с генератором э. д. с. равна

$$\hat{di}_H = \hat{de}_{ш} / (R + R_H),$$

* Поскольку уменьшение мощности вдвое соответствует 3 дБ, то интервал частот, внутри которого усиление по мощности превосходит 50 % максимальной величины, иногда называют *трехдецибелльной полосой пропускания*.

соответственно для схемы с генератором тока

$$di_{\Pi} = \frac{di_{\Pi} [RR_{\Pi}/(R + R_{\Pi})]}{R_{\Pi}} = \frac{di_{\Pi}}{R + R_{\Pi}} R.$$

Следовательно, из условия равенства токов в нагрузке имеем $di_{\Pi} = de_{\Pi}/R$, или

$$J(f) = E(f)/R^2.$$

Рассмотрим случай (рис. 321, а), когда на вход усилителя включено комплексное сопротивление $\dot{z}(f)$.

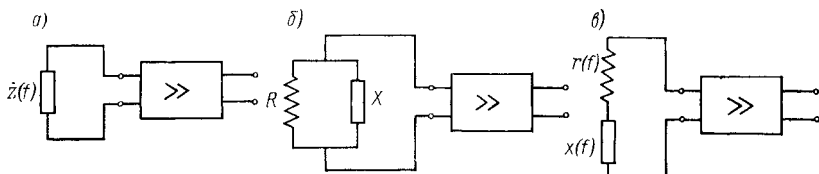


Рис. 321. Включение двухполюсника и его эквивалентных схем на входе усилителя: а — двухполюсник $\dot{z}(f)$; б — параллельная эквивалентная схема R, X ; в — последовательная эквивалентная схема $r(f), x(f)$

Представляя двухполюсник $\dot{z}(f)$ в виде параллельного соединения активного R и реактивного X сопротивлений (рис. 321, б), найдем

$$\dot{z}(f) = \frac{RjX}{R + jX} = \frac{X^2}{R^2 + X^2} R + j \frac{R^2}{R^2 + X^2} X.$$

Вводя обозначения:

$$r(f) = \frac{X^2}{R^2 + X^2} R, \quad x(f) = \frac{R^2}{R^2 + X^2} X,$$

получаем

$$\dot{z}(f) = r(f) + jx(f),$$

что позволяет представить двухполюсник в виде последовательного соединения сопротивлений $r(f)$ и $x(f)$ (рис. 321, в).

Если источником шума в схеме является активное сопротивление R , то шумовая эквивалентная схема с генератором э. д. с. имеет вид, представленный на рис.

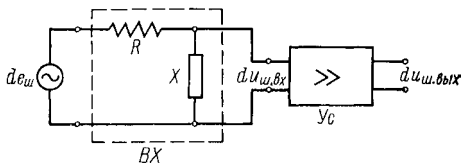


Рис. 322. Шумовая эквивалентная схема

322. Эта схема состоит из последовательного соединения двух четырехполюсников: входной цепи (BX) и усилителя (Ус). Среднеквадратическое напряжение шума на выходе схемы, очевидно, равно

$$du_{\text{ш. вых}} = du_{\text{ш. вх}} K_{\text{Ус}}(f) = de_{\text{ш}} K_{\text{BX}}(f) K_{\text{Ус}}(f),$$

где $K_{\text{BX}}(f)$ и $K_{\text{Ус}}(f)$ — модули комплексных коэффициентов передачи входной цепи и усилителя соответственно: $K_{\text{BX}}(f) = |K_{\text{BX}}(f)|$;

$K_{yc}(f) = |\dot{K}_{yc}(f)|$, причем комплексный коэффициент передачи входной цепи равен

$$\begin{aligned}\dot{K}_{bx}(f) &= \frac{jX}{R + jX} = \frac{X}{R^2 + X^2} X + j \frac{X}{R^2 + X^2} R = \\ &= \frac{r(f)}{R} + j \frac{x(f)}{R} = \frac{z(f)}{R}.\end{aligned}$$

Так как

$$\overline{du_{ш, вых}^2} = \overline{de_{ш}^2} K_{bx}^2(f) K_{yc}^2(f) = \mathbf{E}(f) K_{bx}^2(f) K_{yc}^2(f) df,$$

то дисперсия шума на выходе равна

$$\overline{u_{ш, вых}^2} = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(f) K_{bx}^2(f) K_{yc}^2(f) df.$$

Если обозначить

$$\begin{aligned}\varepsilon(f) &= \mathbf{E}(f)/\mathbf{E}_0, \quad k_{bx}(f) = K_{bx}(f)/K_{0\ bx}, \\ k_{yc}(f) &= K_{yc}(f)/K_{0\ yc},\end{aligned}$$

где \mathbf{E}_0 — спектральная плотность входного шума на частоте f_{01} ; $K_{0\ bx}$ и $K_{0\ yc}$ — максимальные значения модуля коэффициентов передачи входной цепи и усилителя, имеющие место на частотах f_{02} и f_{03} , соответственно, то

$$\overline{u_{ш, вых}^2} = \mathbf{E}_0 K_{0\ bx}^2 K_{0\ yc}^2 \Delta f_{ш},$$

где

$$\Delta f_{ш} = \int_0^{\infty} \varepsilon(f) k_{bx}^2(f) k_{yc}^2(f) df.$$

С другой стороны,

$$\overline{u_{ш, вых}^2} = \int_0^{\infty} \mathbf{E}(f) \frac{|z(f)|^2}{R^2} K_{yc}^2(f) df,$$

причем

$$|z(f)|^2 = r^2(f) + x^2(f) = \left(\frac{X^2 R}{R^2 + X^2} \right) R = r(f) R,$$

то

$$\begin{aligned}\overline{u_{ш, вых}^2} &= \mathbf{E}_0 K_{0\ yc}^2 \int_0^{\infty} \varepsilon(f) \frac{|z(f)|^2}{R^2} k_{yc}^2(f) df = \\ &= \mathbf{E}_0 K_{0\ yc}^2 \int_0^{\infty} \varepsilon(f) \frac{r(f)}{R} k_{yc}^2(f) df.\end{aligned}$$

Полученные выражения для $\overline{u_{ш, вых}^2}$ совершенно одинаковы, так как

$$|\dot{K}_{bx}(f)|^2 = K_{bx}^2(f) = |\dot{z}(f)|^2/R^2 = r(f)/R.$$

Рассчитаем дисперсию шума на входе усилителя, т. е. непосредственно на зажимах двухполюсника (рис. 321). Очевидно, она равна

$$\overline{u_{\text{ш. вх}}^2} = \frac{E_0}{R} \int_0^{\infty} \epsilon(f) r(f) df.$$

Для белого шума, когда $\epsilon(f) = 1$, найдем

$$\overline{u_{\text{ш. вх}}^2} = \frac{E_0}{R} \int_0^{\infty} r(f) df.$$

Интеграл $\int_0^{\infty} r(f) df$ называется *интегралом сопротивления* электрической цепи.

Г л а в а 18

ШУМ ПРИЕМНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ И СОГЛАСОВАНИЕ ЕГО С УСИЛИТЕЛЕМ. ПОРОГ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ДРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Наиболее простой, но в то же время достаточной для многих практических применений характеристикой шума приемников излучения является *энергетический спектр*, т. е. зависимость спектральной плотности шума от частоты. Однако, к сожалению, даже эта характеристика обычно не сообщается потребителю, и в паспорте приемника содержатся сведения лишь о среднеквадратическом значении шума для определенной частоты модуляции излучения. В связи с этим о спектре шума судят зачастую на основании общих сведений о его природе, позволяющих указать распределение мощности шума по частотам для приемника того или иного типа с учетом условий эксплуатации.

Основными видами шумов приемников излучения являются: тепловой; дробовой; токовый; генерационно-рекомбинационный; фотонный; температурный; микрофонный. Физическая природа и методы математического описания перечисленных шумов являются предметом дальнейшего рассмотрения.

Наряду с шумами приемников излучения будут рассмотрены некоторые шумы усилителя с входной цепью, учитывая неизбежное столкновение с ними конструктора оптико-электронного прибора при решении вопросов согласования приемника излучения с усилителем.

§ 18.1. ТЕПЛОВОЙ ШУМ

В результате теплового хаотического движения носителей заряда на концах любого сопротивления возникает переменная электродвижущая сила, называемая *тепловым шумом*, *джонсоновским шумом* или *шумом Найквиста*.

Этот шум был экспериментально открыт Джонсоном в 1928 г. В том же году Найквист на основании термодинамической теории флуктуаций опубликовал вывод формулы для спектральной плотности $[E_T(f), \text{В}^2 \cdot \text{с}]$ э. д. с. шума сопротивления R , имеющего температуру T . Формула Найквиста может быть представлена в виде

$$E_T(f) = 4kTR \frac{hf/(kT)}{e^{hf/(kT)} - 1},$$

где f — частота, Гц; R — сопротивление, Ом; h — постоянная Планка, $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; k — постоянная Больцмана, $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж·К⁻¹; T — абсолютная температура, К.

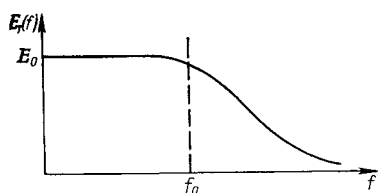


Рис. 323. Зависимость спектральной плотности теплового шума $E_T(f)$ от частоты f

Поскольку при использовании термодинамических методов не предполагается какой-либо конкретный механизм рассматриваемого процесса, результаты, полученные Найквистом, имеют общий характер. Величина флуктуаций совершенно не зависит от природы сопротивления.

Зависимость спектральной плотности теплового шума от частоты представлена на рис. 323. Частота f_0 , на которой начинает уменьшаться спектральная плотность шума, может быть определена на основании разложения в ряд частотно-зависимого члена формулы Найквиста

$$\frac{hf/(kT)}{e^{hf/(kT)} - 1} \approx 1 - \frac{hf}{2kT},$$

при $hf \ll 0,02 kT$ можно считать, что $\frac{hf/(kT)}{e^{hf/(kT)} - 1} = 1$ с достаточной для практических расчетов точностью.

Следовательно, при $T = 295$ К можно найти

$$f_0 \ll 0,02 \frac{kT}{h} = \frac{0,02 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 295}{6,6 \cdot 10^{-34}} = 1,24 \cdot 10^{11} \text{ Гц.}$$

До частот, равных примерно 10^{11} Гц (длина волны 3 мм), тепловой шум можно считать белым со спектральной плотностью э. д. с.

$$E_T(f) = 4kTR,$$

а электродвижущая сила эквивалентного генератора шума равна

$$de_{ш.т} = \sqrt{E_T(f) df} = \sqrt{4kTR df}.$$

Мощность теплового шума можно определить, предполагая, что сопротивление R_1 соединено с сопротивлением R_2 последова-

тельно. Тогда мощность шума dP_2 , рассеиваемая на сопротивлении R_2 , равна

$$dP_2 = \left(\frac{de_{ш. T_1}}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2 = 4kT \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} df,$$

а мощность шума dP_1 , рассеиваемая на сопротивлении R_1 ,

$$dP_1 = \left(\frac{de_{ш. T_2}}{R_1 + R_2} \right)^2 R_1 = 4kT \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} df.$$

Как и следовало ожидать, при тепловом равновесии, согласно второму закону термодинамики, рассеиваемые мощности равны

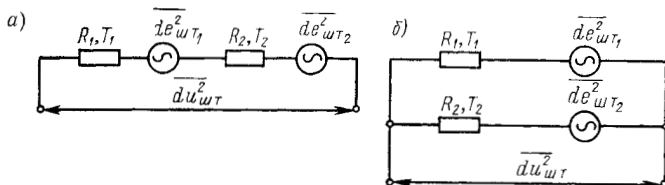


Рис. 324. Шумовые эквивалентные схемы соединения сопротивлений R_1 и R_2 : а — последовательное, б — параллельное

$dP_1 = dP_2 = dP$. Условием передачи максимальной мощности, как известно, является условие согласования сопротивлений источника э. д. с. и нагрузки $R_1 = R_2$.

Следовательно, максимальная мощность шума при наличии согласования равна $dP = 2kT df$ или в конечной полосе Δf мощность шума $P = 2kT \Delta f$. При этом расчете учитывается, что собственный шум сопротивления R_2 создает на этом сопротивлении рассеиваемую мощность, равную $kT \Delta f$, поэтому общая мощность шума, рассеиваемая на сопротивлении нагрузки $R_1 = R_2$, равна $2kT \Delta f$.

При комнатной температуре (295 К) произведение $kT = 4,07 \times 10^{-21}$ Вт·с; мощность шума при ширине полосы 1 Гц равна $8,14 \cdot 10^{-21}$ Вт. Соответственно э. д. с. шума $e_{ш. T}$ (В) для сопротивления R в полосе частот Δf определяется формулами:

$$e_{ш. T} = 1,28 \cdot 10^{-10} (R \Delta f)^{1/2}; \quad \overline{e_{ш. T}^2} = 1,63 \cdot 10^{-20} R \Delta f.$$

В отличие от мощности э. д. с. теплового шума зависит от сопротивления. Для полосы 1 Гц и сопротивления 10^6 Ом э. д. с. теплового шума примерно равна $1,3 \cdot 10^{-7}$ В = 0,13 мкВ.

Если два сопротивления R_1 и R_2 находятся при разных температурах T_1 и T_2 , то условие теплового равновесия оказывается нарушенным и использовать принципы термодинамики для расчета шума нельзя. Однако на основании многочисленных экспериментальных данных дисперсия флуктуаций может быть вычислена в предположении, что каждое из рассматриваемых сопротивлений является генератором э. д. с. шума, дисперсия которого выражается формулой Найквиста с учетом соответствующей температуры.

Тогда при последовательном соединении сопротивлений (рис. 324, а) имеем

$$\overline{du_{ш. T}^2} = \overline{de_{ш. T_1}^2} + \overline{de_{ш. T_2}^2} = 4k(T_1 R_1 + T_2 R_2) df.$$

Введя шумовую температуру $T_{ш}$ — некоторую эквивалентную температуру, при которой сопротивления R_1 и R_2 создавали бы такое же, как в действительности, шумовое напряжение, найдем

$$\overline{du_{ш.т}^2} = 4kT_{ш}(R_1 + R_2)df = 4kT_{ш}R_{эКВ}df,$$

где

$$T_{ш} = T_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} + T_2 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2}{R_1 + R_2}; \quad R_{эКВ} = R_1 + R_2.$$

Для двух параллельных сопротивлений (рис. 324, б) имеем

$$\begin{aligned} \overline{du_{ш.т}^2} &= \frac{\overline{de_{ш.т1}^2} R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} + \frac{\overline{de_{ш.т2}^2} R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} = \\ &= \frac{4kT_1 R_1 R_2^2 df + 4kT_2 R_2 R_1^2 df}{(R_1 + R_2)^2} = 4kT_{ш} R_{эКВ} df, \end{aligned}$$

где

$$T_{ш} = T_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + T_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{T_1 R_2 + T_2 R_1}{R_1 + R_2}; \quad R_{эКВ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Имеется еще одно отклонение от условия теплового равновесия, соответствующее случаю, когда среднее значение силы тока, проходящего через шумящее сопротивление, не равно нулю. Тепловое равновесие нарушается, так как энергия из

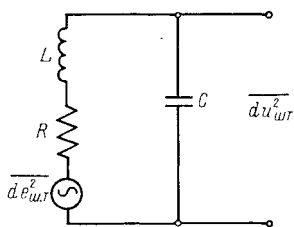


Рис. 325. Схема для расчета напряжения теплового шума на зажимах параллельного колебательного контура

внешнего источника переходит в сопротивление. Однако и здесь эксперимент показывает, что значение среднего тока не влияет на флуктуации, вызванные случайным тепловым движением носителей заряда. Увеличение шума на низких частотах, связанное с прохождением тока, имеет иную природу и будет рассмотрено ниже. В заключение рассмотрим два примера.

1. Рассмотрим порядок расчета шумового напряжения на зажимах параллельного колебательного контура, находящегося в резонансе (рис. 325).

Действующая в контуре э. д. с. шума определяется формулой

$$de_{ш.т} = \sqrt{4kTRdf}.$$

Силу тока в контуре на частоте резонанса, когда $\omega_0 L = -1/(\omega_0 C)$ (т. е. суммарное реактивное сопротивление равно нулю), определим из выражения

$$di_{ш.т} = de_{ш.т}/R,$$

шумовое напряжение на емкости (на зажимах контура):

$$\begin{aligned} du_{ш.т} &= di_{ш.т} \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{4kTRdf}}{\omega_0 RC} = \frac{1}{\omega_0 C} \sqrt{\frac{4kT}{R}} df; \\ \overline{du_{ш.т}^2} &= \frac{4kT}{\omega_0^2 C^2 R} df. \end{aligned}$$

Наряду с этим известно, что колебательный контур в момент резонанса представляет собой чисто активное сопротивление

$$R_{\text{эКВ}} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R} = \frac{1}{(\omega_0 C)^2 R}.$$

Так как на зажимах любого активного сопротивления действует напряжение теплового шума, то

$$du_{\text{ш. т}} = \sqrt{4kTR_{\text{эКВ}} df} = \frac{1}{\omega_0 C} \sqrt{\frac{4kT}{R}} df;$$

$$\overline{du_{\text{ш. т}}^2} = \frac{4kT}{\omega_0^2 C^2 R} df.$$

Полученные двумя способами результаты совпадают.

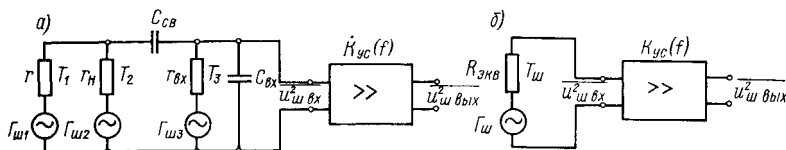


Рис. 326. Схемы для расчета дисперсии шума входной цепи: а — полная электрическая схема; б — эквивалентная схема для случая, когда $1/(\omega C_{св}) \rightarrow 0$

2. Для случая, когда шум входной цепи определяется тепловым шумом ее активных сопротивлений (рис. 326), расчет дисперсии напряжения шума на выходе усилителя проводится следующим образом.

Предполагается, что каждое из трех сопротивлений (рис. 326, а) входной цепи: сопротивление приемника r , находящееся при температуре T_1 , сопротивление нагрузки r_n при температуре T_2 и входное сопротивление усилителя $r_{вх}$ при температуре T_3 — не шумят, а соответствующий шум вырабатывается генераторами э. д. с. шума $\Gamma_{ш1}$, $\Gamma_{ш2}$, $\Gamma_{ш3}$, для которых

$$\overline{de_{\text{ш. т } 1}^2} = 4kT_1 r df = E_1(f) df; \quad \overline{de_{\text{ш. т } 2}^2} = 4kT_2 r_n df = E_2(f) df;$$

$$\overline{de_{\text{ш. т } 3}^2} = 4kT_3 r_{вх} df = E_3(f) df.$$

Так как система линейна, можно отдельно вычислять дисперсию напряжения шума на выходе усилителя от каждого генератора шума, а затем найти сумму

$$\overline{u_{\text{ш. вых}}^2} = \overline{u_{\text{ш. вых } 1}^2} + \overline{u_{\text{ш. вых } 2}^2} + \overline{u_{\text{ш. вых } 3}^2} = \sum_{i=1}^{i=3} \overline{u_{\text{ш. вых } i}^2}.$$

В свою очередь, можно записать

$$\overline{u_{\text{ш. вых } i}^2} = \int_0^{\infty} E_{\text{вых } i}(f) df,$$

где $E_{\text{вых } i}(f)$ — спектральная плотность i й составляющей выходного шума, связанная со спектральной плотностью шума на входе соотношением

$$E_{\text{вых } i}(f) = E_i(f) K_{\text{вх } i}^2(f) K_{\text{ус}}^2(f).$$

При расчете необходимо обратить внимание на то, что модуль коэффициента передачи входной цепи $K_{\text{вх } i}(f)$ имеет свое значение для каждого генератора шума. Расчет не сложен, но приводит к громоздким выражениям, которые здесь не рассматриваются.

Наиболее простые соотношения получаются, если предположить, что в рабочем диапазоне частот усилителя конденсатор $C_{\text{св}}$ не оказывает заметного влияния на уровень выходного шума.

В этом случае шумовая эквивалентная схема входной цепи имеет вид, представленный на рис. 326, б. Спектральная плотность шума генератора $\Gamma_{\text{ш}}$ в этой схеме равна

$$E(f) = 4kT_{\text{ш}} R_{\text{эРВ}},$$

где

$$T_{\text{ш}} = T_1 \frac{R_{\text{вх}}}{r} + T_2 \frac{R_{\text{вх}}}{r_{\text{н}}} + T_3 \frac{R_{\text{вх}}}{r_{\text{вх}}} = R_{\text{вх}} \left(\frac{T_1}{r} + \frac{T_2}{r_{\text{н}}} + \frac{T_3}{r_{\text{вх}}} \right);$$

$$R_{\text{эРВ}} = R_{\text{вх}}; \quad R_{\text{вх}} = rr_{\text{н}}r_{\text{вх}}/(rr_{\text{н}} + rr_{\text{вх}} + r_{\text{н}}r_{\text{вх}}).$$

Если $T_1 = T_2 = T_3 = T$, то $T_{\text{ш}} = T$ и $E(f) = 4kTR_{\text{вх}}$. Если $T_3 = 295 \text{ К}$; $T_1 = T_2 = T$, то

$$T_{\text{ш}} = 295 \frac{R_{\text{вх}}}{r_{\text{вх}}} + T \frac{r + r_{\text{н}}}{rr_{\text{н}}} R_{\text{вх}}.$$

При $r_{\text{вх}} \gg r$ и $r_{\text{вх}} \gg r_{\text{н}}$ $R_{\text{вх}} = rr_{\text{н}}/(r + r_{\text{н}}) = r_{\text{с}}$

$$T_{\text{ш}} = T + \frac{rr_{\text{н}}(r + r_{\text{н}})}{r_{\text{вх}}} 295 \approx T; \quad E(f) = 4kTr_{\text{с}}.$$

Дисперсия шума на входе усилителя для случая, когда $1/(\omega C_{\text{вх}}) \rightarrow 0$ (см. § 17.3) равна

$$\overline{u_{\text{ш вх}}^2} = \frac{E_0}{R_{\text{вх}}} \int_0^{\infty} r(f) df.$$

Здесь

$$r(f) = \frac{X^2}{R_{\text{вх}}^2 + X^2} R_{\text{вх}} = \frac{R_{\text{вх}}}{1 + (\omega \tau_{\text{вх}})^2} = \frac{R_{\text{вх}}}{1 + (2\pi f \tau_{\text{вх}})^2},$$

где $\tau_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} C_{\text{вх}}$; $X = 1/(\omega C_{\text{вх}}) = 1/(2\pi f C_{\text{вх}})$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{ш вх}}^2} &= E_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi f \tau_{\text{вх}})^2} df = \\ &= \frac{E_0}{(2\pi \tau_{\text{вх}})^2} (2\pi \tau_{\text{вх}}) \operatorname{arctg} 2\pi \tau_{\text{вх}} f \Big|_0^{\infty} = \frac{E_0}{2\pi \tau_{\text{вх}}} \frac{\pi}{2} = \frac{E_0}{4\tau_{\text{вх}}}. \end{aligned}$$

Этот результат можно было получить, пользуясь понятием шумовой полосы пропускания (см. § 17.2). Действительно,

$$\overline{u_{\text{ш. вх}}^2} = E_0 \Delta f_{\text{ш}},$$

но для аperiodического звена с постоянной времени $\tau_{\text{вх}}$

$$\Delta f_{\text{ш}} = 1/(4\tau_{\text{вх}}).$$

Следовательно,

$$\overline{u_{\text{ш. вх}}^2} = E_0/(4\tau_{\text{вх}}).$$

Так как $E_0 = 4kT_{\text{ш}}R_{\text{вх}}$, то

$$\overline{u_{\text{ш. вх}}^2} = 4kT_{\text{ш}}R_{\text{вх}}/(4R_{\text{вх}}C_{\text{вх}}) = kT_{\text{ш}}/C_{\text{вх}}.$$

Полученное выражение иногда используется для рекомендации метода «подавления» теплового шума при $C_{\text{вх}} \rightarrow \infty$. Однако при этом не следует забывать, что коэффициент передачи входной цепи — аperiodического звена — для сигнала равен

$$\dot{K}_{\text{вх}}(f) = 1/(1 + j2\pi f\tau_{\text{вх}}),$$

т. е. для $C_{\text{вх}} \rightarrow \infty$, когда $\tau_{\text{вх}} \rightarrow \infty$, коэффициент передачи стремится к нулю. При «подавлении» шума исчезает сигнал.

Дисперсию шума на выходе усилителя, имеющего полосу пропускания от f_1 до f_2 и коэффициент усиления, равный K_0 внутри этой полосы и равный нулю за ее пределами, можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{ш. вых}}^2} &= E_0 K_0^2 \int_{f_1}^{f_2} \frac{1}{1 + (2\pi f\tau_{\text{вх}})^2} df = \frac{E_0 K_0^2}{2\pi\tau_{\text{вх}}} \operatorname{arctg} 2\pi\tau_{\text{вх}} f \Big|_{f_1}^{f_2} = \\ &= \frac{E_0 K_0^2}{2\pi\tau_{\text{вх}}} \operatorname{arctg} \frac{2\pi\tau_{\text{вх}}(f_2 - f_1)}{1 + (2\pi\tau_{\text{вх}})^2 f_2 f_1}. \end{aligned}$$

Если $f_1 = 0$, то

$$\overline{u_{\text{ш. вых}}^2} = [E_0 K_0^2 / (2\pi\tau_{\text{вх}})] \operatorname{arctg} 2\pi f_2 \tau_{\text{вх}},$$

если $f_2 = \infty$, то

$$\overline{u_{\text{ш. вых}}^2} = \frac{E_0 K_0^2}{2\pi\tau_{\text{вх}}} \frac{\pi}{2} = \frac{E_0}{4\tau_{\text{вх}}} K_0^2.$$

Когда вводится понятие шумовой полосы пропускания, то

$$\overline{u_{\text{ш. вых}}^2} = E_0 K_0^2 \Delta f_{\text{ш}}.$$

Здесь

$$\Delta f_{\text{ш}} = \int_0^{\infty} k_{\text{вх}}^2(f) k_{\text{ус}}^2(f) df; \quad E_0 = 4kT_{\text{ш}}R_{\text{вх}};$$

$$R_{\text{вх}} = r r_{\text{н}} r_{\text{вх}} / (r r_{\text{н}} + r r_{\text{вх}} + r_{\text{н}} r_{\text{вх}}); \quad T_{\text{ш}} = R_{\text{вх}} (T_1/r + T_2/r_{\text{н}} + T_3/r_{\text{вх}});$$

$$k_{\text{вх}}^2(f) = 1/[1 + (2\pi f\tau_{\text{вх}})^2]; \quad \tau_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} C_{\text{вх}}.$$

Для случая, когда $T_{ш} = T$, а $R_{вх} = r_c r_{вх} / (r_c + r_{вх})$, причем $r_c = r r_H / (r + r_H)$, найдем коэффициент шума. Так как в этом случае дисперсия шума источника сигнала (сопротивления r_c) равна $4kTr_c r_{вх}^2 / (r_c + r_{вх})^2$, а дисперсия дополнительного шума входной цепи равна $4kTr_{вх} r_c^2 / (r_c + r_{вх})^2$, то

$$F = 1 - 4kTr_{вх} r_c^2 / (4kTr_c r_{вх}^2) = 1 - r_c / r_{вх}.$$

Следовательно, для уменьшения коэффициента шума следует увеличивать входное сопротивление усилителя.

§ 18.2. ДРОБОВОЙ ШУМ

Наличие *дробового шума* определяется тем, что электрический ток представляет собой поток дискретных частиц, заряд которых равен или кратен величине $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл (заряду электрона).

Дробовой шум называют также *шумом Шоттки*, который предсказал этот шум в 1918 г., предположив, что в противоположность протеканию тока в проводнике, где поток электронов упорядочен, при протекании тока в электронной лампе электроны эмиттируются катодом случайным образом и достигают анода также случайно, ударяясь о него подобно тому, как капли дождя падают на крышу или дробинки попадают в мишень. По аналогии с шумом от попадающих в мишень дробинок Шоттки назвал рассматриваемый шум дробовым.

Сравнивая количество электронов, протекающих через поперечное сечение лампы за время τ , Шоттки нашел, что вследствие хаотичности эмиссии эти количества в разные промежутки времени различны. Для данного значения постоянной составляющей тока i_0 дисперсия флуктуаций тока i_τ , регистрируемого в процессе измерений в течение времени τ , пропорциональна заряду электрона e и силе тока i_0

$$\overline{i_\tau^2} = ei_0/\tau.$$

Этот результат, полученный Шоттки, почти не используется в его настоящем виде, за исключением случаев применения счетчиков, регистрирующих прохождение отдельных частиц.

Большей частью для практических расчетов используется выражение для спектральной плотности дробового шума $J(f)$, полученное в 1925 г. Фри:

$$J(f) = 2ei_0;$$

$$d\overline{i^2} = J(f) df = 2ei_0 df.$$

Это последнее выражение известно как формула Шоттки. Оно применимо для случая, когда диод работает в режиме насыщения, т. е. когда все испускаемые катодом электроны достигают анода. Именно этот случай имеет место в фотоэмиссионных приемниках излучения, работающих при больших положительных потенциалах на аноде.

При работе диода при низких напряжениях, когда насыщение еще не достигнуто, фактическим катодом является пространственный заряд, который создает потенциальный барьер перед физическим

катодом. Этот барьер должен преодолеть каждый излученный физическим катодом электрон, чтобы достигнуть анода. Только электроны, скорость которых достаточно велика, преодолевают этот барьер. Таким образом, пространственный заряд осуществляет селекцию электронов по скоростям, что уменьшает уровень дробового шума в соответствии с коэффициентом Γ^2 , называемым *коэффициентом депрессии*.

Следовательно, в этом случае

$$J(f) = 2ei_0\Gamma^2.$$

Коэффициент депрессии зависит от конструкции лампы, и его значение может доходить до 0,02—0,1.

Дробовой шум триода, если считать, что ток сетки отсутствует, может рассчитываться по тем же формулам, что и для диода, работающего с пространственным зарядом. Дробовой шум сеточного тока лампы рассчитывается по формуле для диода, работающего в режиме насыщения.

В многоэлектродных лампах, таких как тетроды и пентоды, имеет место еще один вид шума, называемый шумом токораспределения, который создается за счет случайного характера распределения тока между сетками. Эти дополнительные флуктуации уменьшают сглаживающее действие пространственного заряда и шум многоэлектродных ламп в три—пять раз превышает дробовой шум триода.

Таким образом, в соответствии с формулой Шоттки спектральная плотность дробового шума не зависит от частоты. Эта формула хорошо описывает шум для частот выше нескольких килогерц и в то же время более низких, чем величина, обратная времени пролета электрона от катода к аноду. При частотах ниже нескольких килогерц появляется другой вид шума (*фликкер-шум*), спектральная плотность которого быстро изменяется с изменением частоты. Конечное время пролета электрона от катода к аноду вызывает уменьшение спектральной плотности дробового шума на высоких частотах. Время пролета электрона от катода к аноду зависит от геометрии лампы и напряженности электрического поля в междueleктродных промежутках. Оно составляет величину $(1 \div 10) 10^{-10}$ с (заметим, что средняя длительность интервала между вылетом электронов равна $1,6 \cdot 10^{-16}$ с, т. е. за время пролета электрона от катода к аноду из катода вылетает несколько миллионов электронов). Следовательно, уменьшения спектральной плотности дробового шума вследствие конечного времени пролета электроном междueleктродного промежутка можно ожидать на частотах 10^{10} — 10^{11} Гц.

Источники дробового шума — фотоэмиссионные приемники излучения и электронные лампы — удобно представлять в виде генератора шумового тока, дисперсия которого дается формулой Шоттки и ее аналогами. Фотоэмиссионный приемник обычно является источником дробового шума эмиссионного тока и теплового шума сопротивления утечки изоляции. Кроме того, нагрузкой фотоэмиссионного приемника в общем случае является комплексное сопротивление

ние $\dot{z}_H(f)$, состоящее из активного сопротивления r_H и реактивного x_H (рис. 327, а). Активное сопротивление r_H , так же как сопротивление утечки, является источником теплового шума. Эквивалентная шумовая схема фотоэмиссионного приемника и его нагрузки в соответствии с этим имеет вид, представленный на рис. 327, б. В этой схеме реактивное сопротивление jX включает в себя собственную

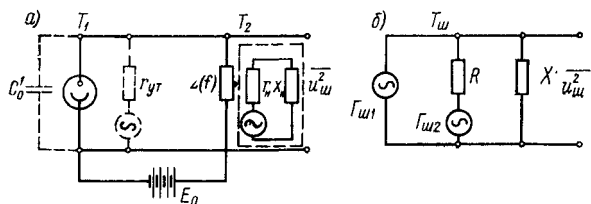


Рис. 327. Схема включения (а) и шумовая эквивалентная схема (б) фотоэмиссионного приемника излучения

емкость фотоэмиссионного приемника C'_0 , а активное сопротивление R и его шумовая температура $T_{ш}$ равны:

$$R = \frac{r_{yT} r_H}{r_{yT} + r_H};$$

$$T_{ш} = T_1 \frac{r_H}{r_{yT} + r_H} + T_2 \frac{r_{yT}}{r_{yT} + r_H} = \frac{T_1 r_H + T_2 r_{yT}}{r_{yT} + r_H},$$

где T_1 и T_2 — температуры сопротивлений утечки и нагрузки.

Генератор $\Gamma_{ш1}$ представляет собой генератор шумового тока

$$di_{ш} = \sqrt{2ei_0 df},$$

а генератор $\Gamma_{ш2}$ — генератор э. д. с. шума

$$de_{ш} = \sqrt{4kT_{ш}R df}.$$

Средний квадрат шумового напряжения на зажимах шумящего двухполюсника, включающего в себя генераторы $\Gamma_{ш1}$ и $\Gamma_{ш2}$, равен сумме двух составляющих, определяемых шумовым током $di_{ш}$ (дробовой шум) и э. д. с. шума $de_{ш}$ (тепловой шум)

$$\overline{du_{ш}^2} = \overline{du_{ш. др}^2} + \overline{du_{ш. т}^2}.$$

В свою очередь,

$$\overline{du_{ш. др}^2} = \overline{di_{ш}^2} |\dot{Z}(f)|^2 = \overline{di_{ш}^2} Z^2(f).$$

Комплексное сопротивление эквивалентной шумовой схемы равно:

$$Z^2(f) = r^2(f) + x^2(f);$$

$$Z^2(f) = r(f)R = X^2 R^2 / (R^2 + X^2),$$

где

$$r(f) = \frac{X^2}{R^2 + X^2} R; \quad x(f) = \frac{R^2}{R^2 + X^2} X.$$

Коэффициент передачи рассматриваемой шумовой схемы для э. д. с. генератора $\Gamma_{ш2}$ равен:

$$\begin{aligned}\dot{K}(f) &= \frac{jX}{R+jX} = \frac{X}{R^2+X^2}X + j\frac{X}{R^2+X^2}R = \\ &= \frac{r(f)}{R} + j\frac{x(f)}{R} = \frac{\dot{Z}(f)}{R}; \\ K^2(f) &= |\dot{K}(f)|^2 = Z^2(f)/R^2.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{du_{ш.т}^2} = \overline{de_{ш}^2} K^2(f) = \overline{de_{ш}^2} \frac{Z^2(f)}{R^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\overline{du_{ш}^2} &= \overline{du_{ш.др}^2} + \overline{du_{ш.т}^2} = Z^2(f) [\overline{di_{ш}^2} + \overline{de_{ш}^2}/R^2] = \\ &= R(2ei_0 + 4kT_{ш}/R) r(f) df.\end{aligned}$$

Вынесем за скобки $4kT_0/R$, где $T_0 = 295$ К, и найдем

$$\overline{du_{ш}^2} = 4kT_0 \left(\frac{e}{2kT_0} i_0 R + \frac{T_{ш}}{T_0} \right) r(f) df.$$

Так как

$$e/(2kT_0) = 1,6 \cdot 10^{-19} / (2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 295) = 19,65 \approx 20B^{-1},$$

то

$$\begin{aligned}\overline{du_{ш}^2} &= 4kT_0 (20i_0 R + T_{ш}/T_0) r(f) df; \\ \overline{u_{ш}^2} &= 4kT_0 (20i_0 R + T_{ш}/T_0) \mathcal{I}_r,\end{aligned}$$

где $\mathcal{I}_r = \int_0^\infty r(f) df$ — интеграл сопротивления.

Если $X = 1/(\omega C)$, то интеграл сопротивления \mathcal{I}_r равен

$$\mathcal{I}_r = \int_0^\infty r(f) df = R \int_0^\infty \frac{X^2}{R^2 + X^2} df = R \int_0^\infty \frac{1}{1 + (2\pi f\tau)^2} df,$$

где $r = RC$, следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_r &= R/(4\tau) = 1/(4C); \\ \overline{u_{ш}^2} &= \frac{kT_0}{C} \left(\frac{T_{ш}}{T_0} + 20i_0 R \right).\end{aligned}$$

Поскольку для составляющей, определяемой только тепловым шумом, $\overline{u_{ш.т}^2} = kT_{ш}/C$, то для составляющей, определяемой дробовым шумом, $\overline{u_{ш.др}^2} = 20i_0 R kT_0/C$.

Так как шум источника сигнала должен преобладать, необходимо обеспечить выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned}\overline{u_{ш.др}^2} &> \overline{u_{ш.т}^2}; \\ 20i_0 R \frac{kT_0}{C} &> \frac{kT_{ш}}{C}; \quad R > \frac{T_{ш}/T_0}{20i_0}.\end{aligned}$$

При $T_{ш} = T_0$ найдем $R > 1/(20i_0)$.

Коэффициент шума для рассматриваемого случая равен

$$F = 1 + \frac{T_{ш}/T_0}{20i_0R}.$$

Минимальное значение силы тока i_0 равно значению темнового тока i_T фотоэмиссионного приемника, который определяется главным образом плотностью тока термоэлектронной эмиссии (А/см²) и для различных типов фотокатодов равен следующим значениям:

Серебряно-кислородно-цезиевый	$10^{-11}—10^{-13}$
Сурьмяно-цезиевый	$10^{-14}—10^{-15}$
Мультищелочной	$10^{-15}—10^{-16}$

Для различной площади фотокатода значение темнового тока может находиться в пределах $10^{-7}—10^{-15}$ А, следовательно, для получения значения $F = 2$ необходимо обеспечить $R = 5 (10^5 \div \div 10^{13})$ Ом.

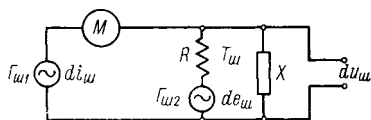


Рис. 328. Шумовая эквивалентная схема для газонаполненного фотоэлемента и фотоумножителя при идеальном (бесшумовом) процессе умножения электронов

Решить эту задачу можно, используя газовое или электронное умножение сигнала (и шума) фотоэмиссионного приемника. В этом случае шумовая эквивалентная схема имеет вид, представленный

на рис. 328, и условие согласования выглядит следующим образом:

$$R > \frac{1}{20} \frac{1}{M^2 i_0},$$

где M — коэффициент умножения.

Для газонаполненного фотоэлемента коэффициент умножения обычно не превышает 10, а для фотоумножителя — достигает $10^5—10^6$.

В этом случае проблемы согласования дробовых и тепловых шумов практически не возникает. Однако любому усилению первичного тока как газовому, так и электронному, присущи дополнительные шумы, связанные с вероятностным характером возбуждения и рекомбинации молекул при газовом умножении или шумом перераспределения электронов между динодами при электронном умножении. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо производить оценку эффективности использования того или иного фотоэмиссионного приемника излучения в схеме прибора. Обычно считают, что при отсутствии засветки (ночью) выгоднее использовать фотоумножитель, а при наличии засветки (сумерки, день) — одиночный фотоэлемент.

Если фотоэмиссионный приемник включен во входную цепь усилителя по схеме, представленной на рис. 329, а, то шумовая эквивалентная схема с генератором э. д. с. шума, изображенная на

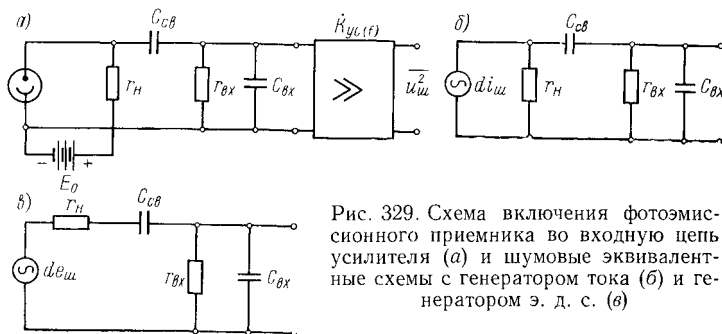
рис. 329, б, позволяет записать следующие соотношения для дисперсии дробового шума на выходе усилителя:

$$\overline{u_{ш.др}^2} = E_0 K_0^2 [r_{вх}/(r_n + r_{вх})]^2 \Delta f_{ш}.$$

Здесь

$$E_0 = 2ei_0 r_n^2,$$

$$\Delta f_{ш} = \int_0^{\infty} \epsilon(f) k_{вх}^2(f) k_{yc}^2(f) df;$$



$r_{вх}/(r_n + r_{вх})$ — максимальное значение коэффициента передачи входной цепи; K_0 — максимальное значение коэффициента усиления усилителя;

$$k_{вх}(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \tau_{вх} - \frac{1}{\omega \tau_{св}} \right)^2}}; \quad \tau_{вх} = \frac{r_n r_{вх}}{r_n + r_{вх}} C_{вх} = R_{вх} C_{вх};$$

$$\tau_{св} = (r_n + r_{вх}) C_{вх} = R_{св} C_{св}.$$

Так как $\epsilon(f) = 1$, то предполагая, что

$$k_{yc}(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } f_1 \leq f \leq f_2; \\ 0 & \text{при } f_1 > f > f_2. \end{cases}$$

найдем

$$\overline{u_{ш.др}^2} = 2ei_0 R_{вх}^2 K_0^2 \Delta f_{ш};$$

$$\Delta f_{ш} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{1 + [\omega \tau_{вх} - 1/(\omega \tau_{св})]^2}.$$

Если на частоте ω_0 имеет место равенство $\omega_0 \tau_{вх} = 1/(\omega_0 \tau_{св})$, а $f_1 \approx f_2 \approx \omega_0/(2\pi)$, то

$$\Delta f_{ш} = f_2 - f_1 = \Delta f; \quad \overline{u_{ш.др}^2} = 2ei_0 R_{вх}^2 K_0^2 \Delta f.$$

Если в диапазоне частот от f_1 до f_2 $\omega\tau_{вх} \gg 1/(\omega\tau_{св})$, то

$$\Delta f_{ш} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{1 + (2\pi f\tau_{вх})^2} = \frac{1}{2\pi\tau_{вх}} \operatorname{arctg} \frac{2\pi\tau_{вх}(f_2 - f_1)}{1 + (2\pi\tau_{вх})^2 f_{1/2}}.$$

Предположим, что, кроме дробового шума фотоэмиссионного приемника излучения, на входе усилителя действуют тепловые шумы входной цепи.

Составляющая выходного шума, определяемая тепловыми шумами активных сопротивлений входной цепи, при $\omega\tau_{вх} \gg 1/(\omega\tau_{св})$ и $r = \infty$ равна

$$\overline{u_{ш.т}^2} = 4kT_{ш}R_{вх}K_0^2\Delta f_{ш},$$

где

$$T_{ш} = R_{вх}(T_2/r_{н} + T_3/r_{вх}); \quad R_{вх} = r_{н}r_{вх}/(r_{н} + r_{вх}).$$

Средний квадрат полного шумового напряжения на выходе усилителя определяется выражением

$$\begin{aligned} \overline{u_{ш}^2} &= \overline{u_{ш.др}^2} + \overline{u_{ш.т}^2} = 2ei_0R_{вх}K_0^2\Delta f_{ш} + 4kT_{ш}R_{вх}K_0^2\Delta f_{ш} = \\ &= 4kT_0 \left(\frac{e}{2kT_0} i_0R_{вх} + \frac{T_{ш}}{T_0} \right) R_{вх}K_0^2\Delta f_{ш} = 4kT_{ш.экв}R_{вх}K_0^2\Delta f_{ш}, \end{aligned}$$

где

$$T_{ш.экв} = (20i_0R_{вх} + T_{ш}/T_0)T_0.$$

Следовательно, совместное действие дробового и теплового шумов на входе усилителя можно заменить действием теплового шума сопротивления $R_{вх}$, находящегося при температуре $T_{ш.экв}$. Вклад дробового шума в эту температуру определяется членом $20i_0R_{вх}T_0$, а вклад теплового шума — членом $T_{ш}$.

Условие согласования шумов имеет вид *:

$$20i_0R_{вх} = T_{ш}/T_0; \quad R_{вх} = (T_{ш}/T_0)/(20i_0).$$

Шум усилителя, построенного на электронных лампах, проявляется в виде дробового эффекта на его выходе. Величина этого шума может быть представлена в виде двух эквивалентных ему дополнительных источников шума во входной цепи (рис. 330).

Во-первых, это источник шума, определяемого эквивалентным сопротивлением $R_{экв.а}$ и генератором э. д. с. его теплового шума $\Gamma_{ш.а}$, включенных последовательно с сеткой электронной лампы. Величина $R_{экв.а}$ выбирается таким образом, чтобы генерируемый тепловой шум Джонсона после усиления лампой был равен шуму дробового

* Следует помнить, что коэффициент 20, входящий в последующие формулы, не является безразмерной величиной; он измеряется в В⁻¹.

вого эффекта анодного тока лампы. Для частот выше 1 кГц, когда фликкер-эффект уже не оказывает влияния,

$$R_{\text{экв. а}} = \frac{2,5}{S} \left(1 + \frac{8\mathcal{I}_{g_2}}{S} \right) \frac{\mathcal{I}_a}{\mathcal{I}_k},$$

где S — крутизна анодно-сеточной характеристики лампы; \mathcal{I}_a , \mathcal{I}_{g_2} , \mathcal{I}_k — постоянные составляющие анодного тока, тока экранной сетки и тока катода соответственно.

Если в схеме используется триод, то $\mathcal{I}_{g_2} = 0$; $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_k$. Минимальное значение $R_{\text{экв. а}}$ для триодов равно 200 Ом, а для пентодов около 700 Ом, однако может достигать 10—50 кОм.

Во-вторых, это источник шума, определяемого генератором шумового тока $\Gamma_{\text{ш. с}}$, включенным параллельно входной цепи. Значение шумового тока этого генератора равно полному дробовому эффекту сеточного тока $\overline{di_{\text{ш. с}}^2} = 2e\mathcal{I}_{g_1} df$.

Так как нагрузкой для этого генератора является комплексное сопротивление входной цепи, измеренное со стороны сетки лампы, $\hat{z}(f)$, то средний квадрат напряжения шума, действующего на входе усилителя из-за наличия сеточного тока, равен

$$\overline{du_{\text{ш. с. вх}}^2} = \overline{\hat{d}i_{\text{ш. с}}^2} |\hat{z}(f)|^2 = 2e\mathcal{I}_{g_1} |\hat{z}(f)|^2 df.$$

На выходе усилителя шум первой лампы дает следующее значение среднего квадрата напряжения шума:

$$\overline{u_{\text{ш. yc}}^2} = 4kT_0 R_{\text{экв. а}} \int_0^\infty K_{\text{yc}}^2(f) df + 2e\mathcal{I}_{g_1} \int_0^\infty |\hat{z}(f)|^2 K_{\text{yc}}^2(f) df.$$

Если влиянием конденсатора $C_{\text{св}}$ в рабочем диапазоне частот пренебречь и считать, что усилитель имеет такую частотную характеристику, что его коэффициент усиления на частотах от f_1 до f_2 равен K_0 , а вне этого диапазона — нулю, можно найти

$$\overline{u_{\text{ш. yc}}^2} = 4kT_0 R_{\text{экв. а}} K_0^2 \Delta f + 2e\mathcal{I}_{g_1} K_0^2 R_{\text{вх}} \int_{f_1}^{f_2} r(f) df.$$

Так как

$$r(f) = \frac{X^2 R_{\text{вх}}}{R_{\text{вх}}^2 + X^2} = \frac{R_{\text{вх}}}{1 + (2\pi f R_{\text{вх}} C_{\text{вх}})^2} = \frac{R_{\text{вх}}}{1 + (2\pi f \tau_{\text{вх}})^2}$$

и

$$\int_{f_1}^{f_2} r(f) df = R_{\text{вх}} \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{1 + (2\pi f \tau_{\text{вх}})^2} = R_{\text{вх}} \Delta f_{\text{ш}},$$

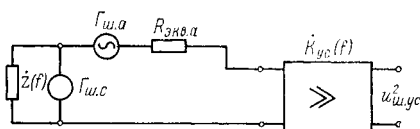


Рис. 330. Шумовая эквивалентная схема входной цепи, учитывающая дробовой шум сеточного и анодного тока первой лампы усилителя

где

$$\Delta f_{\text{ш}} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{1 + (2\pi\tau_{\text{вх}})^2} = \frac{\arctg \frac{2\pi\tau_{\text{вх}}(f_2 - f_1)}{1 + (2\pi\tau_{\text{вх}})^2 f_2 f_1}}{2\pi\tau_{\text{вх}}}.$$

то

$$\overline{u_{\text{ш. ус}}^2} = 4kT_{\text{ш. экв. ус}} R_{\text{вх}} K_0^2 \Delta f_{\text{ш}};$$

$$T_{\text{ш. экв. ус}} = T_0 \left[\frac{R_{\text{экв. а}}}{R_{\text{вх}}} \frac{\Delta f}{\Delta f_{\text{ш}}} + 20\mathcal{J}_{g_1} R_{\text{вх}} \right].$$

Следовательно, совместное действие дробовых шумов сеточного и анодного токов первой лампы усилителя по эффекту на выходе можно заменить действием теплового шума сопротивления $R_{\text{вх}}$, находящегося при температуре $T_{\text{ш. экв. ус}}$.

Оценим вклад сеточного тока. Для того чтобы влияние дробового шума сеточного тока не сказывалось, необходимо обеспечить выполнение условия

$$20\mathcal{J}_{g_1} R_{\text{вх}} < \frac{R_{\text{экв. а}}}{R_{\text{вх}}} \frac{\Delta f}{\Delta f_{\text{ш}}}.$$

Полагая $\Delta f \approx \Delta f_{\text{ш}}$, найдем

$$\mathcal{J}_{g_1} < R_{\text{экв. а}} / (20R_{\text{вх}}^2).$$

Если $R_{\text{экв. а}} = 10^3$ Ом, $R_{\text{вх}} = 10^4$ Ом, то

$$\mathcal{J}_{g_1} < 10^3 / (2 \cdot 10^9) = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ А} = 0,5 \text{ мкА}.$$

Условие $\Delta f \approx \Delta f_{\text{ш}}$ выполняется, если частота среза частотной характеристики входной цепи $f_{\text{ср}} = 1/(2\pi\tau_{\text{вх}})$ выше частот f_1 и f_2 , ограничивающих полосу пропускания усилителя, т. е. $f_{\text{ср}}^2 \gg f_1 f_2$ и $f_{\text{ср}} \gg f_2 - f_1 = \Delta f$. Действительно, в этом случае

$$\Delta f_{\text{ш}} = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{вх}}} \arctg \frac{2\pi\tau_{\text{вх}}(f_2 - f_1)}{1 + (2\pi\tau_{\text{вх}})^2 f_1 f_2} = f_{\text{ср}} \arctg \frac{\Delta f / f_{\text{ср}}}{1 + f_1 f_2 / f_{\text{ср}}^2} \approx$$

$$\approx f_{\text{ср}} \arctg \frac{\Delta f}{f_{\text{ср}}} \approx f_{\text{ср}} \frac{\Delta f}{f_{\text{ср}}} = \Delta f.$$

§ 18.2. ТОКОВЫЙ ШУМ

На низких частотах преобладающим типом шума в полупроводниках является *токовый шум*, который называют также *избыточным*, поскольку он превышает уровень дробового (генерационно-рекомбинационного) шума, также зависящего от протекающего через полупроводник тока. Мощность избыточного токового шума приблизительно обратно пропорциональна частоте и прямо пропорциональна квадрату силы тока. Природа этого шума в настоящее время еще не вполне ясна, несмотря на большое число опубликованных исследований. Одним из препятствий на пути решения этого вопроса является универсальность и общность самого явления избыточного шума, которое впадает в противоречие со слишком специализированными предположениями. Действительно, шум со спектральной

плотностью, обратно пропорциональной частоте, существует не только в полупроводниках, где его называют также *модуляционным*, но и в графитовых сопротивлениях и их электрических контактах — *контактный шум*, в вакуумных лампах — *шум мерцания* или *фликкер-эффект*, и т. д. Частотный диапазон этого шума весьма велик — экспериментально токовый шум наблюдался от частот 10^{-4} Гц до частот 10^7 Гц. Практически же верхняя граница частоты составляет 100—1000 Гц, а на более высоких частотах преобладают дробовые и тепловые шумы.

Какими бы не были теоретические предположения о природе токового шума, этот шум, зависящий от величины $1/f$, не может быть представлен моделью, основанной на процессе с одной временной постоянной. Видимо, существует система флуктуирующих процессов, каждый из которых характеризуется своей постоянной времени τ . Спектр этих постоянных времени широк и дается неким нормированным распределением $g(\tau)$. Если элементарные случайные процессы считать независимыми, то для объяснения справедливости закона $1/f$, необходимо предположить, что и τ подчиняется гиперболическому закону распределения, т. е. $g(\tau) \sim 1/\tau$. Однако справедливость такого распределения вызывает сомнения. Можно, с другой стороны, показать, что спектр $1/f$ является результатом действия множества зависимых элементарных процессов, каждый из которых характеризуется также своим временем жизни τ и в отдельности дает обычный дробовой шум. Наконец, весьма вероятным является предположение о нестационарном характере системы элементарных случайных процессов, когда дисперсия каждого из них зависит от времени. Это предположение также позволяет получить шум со спектральной плотностью $1/f$.

Зависимость спектральной плотности избыточного шума от силы тока, текущего через полупроводник, указывает на то, что токовый шум является результатом флуктуаций проводимости материала. Под термином «модуляционный шум» как раз и подразумевается, что токовый шум создается благодаря явлениям, приводящим к модуляции плотности носителей заряда и соответственно — к модуляции проводимости материала.

В противоположность тепловому шуму спектральная плотность токового шума зависит от размеров полупроводникового материала. Это объясняется, по-видимому, отсутствием пространственной корреляции токового шума, когда флуктуации шума в одной части материала не связаны с флуктуациями в другой его части, или эта связь выражена слабо и действует на очень малых расстояниях.

Таким образом, выражение для среднего квадрата относительного изменения сопротивления полупроводника можно записать в виде

$$\frac{\overline{\Delta r^2}}{r^2} = c \frac{1}{v} \frac{1}{f} df,$$

где $c = \text{const}$; $v = xyz$ — объем полупроводника.

Так как изменение сопротивления r приемника на величину Δr эквивалентно появлению в цепи приемника переменной э. д. с., включенной последовательно с сопротивлением r и равной

$$E_{\sim} = E_0 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \frac{\Delta r}{r},$$

где E_0 — напряжение источника питания цепи, состоящей из сопротивления r и его нагрузки r_n , $\kappa = r/r_n$, то флуктуации относительного сопротивления $\Delta r/r$ очевидно приведут к появлению модуляционной шумовой э. д. с.

$$\overline{de_{ш. м}^2} = E_0^2 \frac{\kappa^2}{(1 + \kappa)^4} \frac{c}{v f} df.$$

Поскольку

$$E_{\sim} = E_0 \frac{\kappa}{(1 + \kappa)^2} \frac{\Delta r}{r} = \frac{E_0}{r + r_n} \frac{r r_n}{r + r_n} \frac{\Delta r}{r} = \mathcal{J}_0 r_i \frac{\Delta r}{r},$$

то можно также записать

$$\overline{de_{ш. м}^2} = \frac{c r_i^2}{v} \frac{\mathcal{J}_0^2}{f} df.$$

Обозначив $C = c r_i^2 / v$ и вычислив спектральную плотность э. д. с. модуляционного шума, найдем

$$E_m(f) = \frac{\overline{de_{ш. м}^2}}{df} = \frac{C \mathcal{J}_0^2}{f}.$$

Экспериментально установленная зависимость имеет вид

$$E_m(f) = \text{const} \frac{\mathcal{J}_0^\alpha}{f^\beta},$$

причем в большинстве случаев значение α близко к 2, а β лежит в диапазоне 0,8—1,5.

Избыточный шум $1/f$ является одним из основных шумов предусилителей, построенных на транзисторах. Плоскостной транзистор с высоким коэффициентом усиления имеет область шумов $1/f$ до 500 Гц, для других типов транзисторов шум $1/f$ простирается до нескольких килогерц. Выше этих частот спектральная плотность шума транзистора приблизительно постоянна до достаточно высоких частот, на которых шум начинает быстро расти. Вообще говоря, в транзисторах имеется несколько источников шума с различной степенью корреляции между ними.

Поэтому шумовая эквивалентная схема для предусилителя на транзисторах более сложна, чем для предусилителя на электронных лампах. Наиболее подходящей схемой для транзистора является Т-образная эквивалентная схема, в которой различные источники шума включены последовательно или параллельно с тремя электродами транзистора, например генераторы напряжения дробового и шума $1/f$ — последовательно с эмиттером, генераторы напряжения теплового шума — последовательно с базой, а генераторы тока дробового шума и шума $1/f$ — параллельно с коллектором.

Однако, если представить предусилитель на транзисторах в виде четырехполюсника, его шумы можно заменить тепловым шумом сопротивления $R_{экв}$, включенного последовательно с входным сигналом, подобно сопротивлению $R_{экв. а}$ в схеме рис. 330.

§ 18.4. ГЕНЕРАЦИОННО-РЕКОМБИНАЦИОННЫЙ ШУМ

Основным видом шума в полупроводниках на промежуточных частотах является *генерационно-рекомбинационный шум*, который связан с флуктуациями процессов генерации и рекомбинации носителей зарядов. Он аналогичен дробовым шумам в вакуумных приборах, поэтому генерационно-рекомбинационный шум называют иногда дробовым. Спектр мощности этого шума плоский от низких частот до частот, примерно равных обратной величине времени жизни свободных носителей; выше этих частот спектр мощности падает примерно на 20 дБ/дек. Это легко видеть из следующих соотношений.

Для простого процесса генерации и рекомбинации, который включает один вид носителей, функция автокорреляции, определяющая степень связи случайного генерационно-рекомбинационного процесса с временем жизни носителей τ , определяется экспоненциальным законом, т. е.

$$K(\Delta t) = \overline{(N - \bar{N})^2} e^{-\Delta t/\tau} = \overline{\Delta N^2} e^{-\Delta t/\tau},$$

где $\overline{\Delta N^2} = \overline{(N - \bar{N})^2}$ — дисперсия числа свободных электронов N , среднее значение которых равно \bar{N} .

В соответствии с преобразованием Хинчина—Винера спектральная плотность шума равна

$$\begin{aligned} E_N(f) &= 4 \int_0^{\infty} K(\Delta t) \cos 2\pi f \Delta t d(\Delta t) = \\ &= 4 \overline{\Delta N^2} \int_0^{\infty} e^{-\Delta t/\tau} \cos 2\pi f \Delta t d(\Delta t). \end{aligned}$$

Интегрирование дает

$$E_N(f) = 4 \overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2} = \frac{4 \overline{\Delta N^2} \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Следовательно, до частоты среза $\omega_{ср} < 1/\tau$ спектральная плотность практически не меняется, а за этой частотой падает на 20 дБ/дек.

Полученное выражение определяет спектральную плотность флуктуации числа носителей заряда. Так как колебания проводимости полупроводника пропорциональны колебаниям числа носителей, то $E_N(f)$ — спектр флуктуаций проводимости. Следовательно, спектральная плотность э. д. с. генерационно-рекомбинационного шума равна

$$E_{г. п}(f) = E_0 / [1 + (2\pi f\tau)^2],$$

причем

$$E_0 = c_1 \mathcal{J}_0^2,$$

а $c_1 = \text{const}$, которая зависит от времени жизни, концентрации и подвижности носителей заряда.

В полупроводниковых приемниках излучения генерационно-рекомбинационный шум может быть доминирующим по сравнению с джонсоновским, так как последний не зависит от силы тока.

§ 18.5. ФОТОННЫЙ ШУМ (ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ)

Фотонный шум, называемый также *радиационным шумом*, связан с флуктуациями потока излучения, падающего на приемник, т. е. с флуктуациями мгновенного числа фотонов, эмиттируемых источником излучения.

В 1900 г. Планк сформулировал гипотезу квантов энергии, в соответствии с которой энергия микроскопических систем (атомов, молекул) может принимать только определенные дискретные значения, являющиеся целыми кратными некоторого наименьшего количества энергии, причем при излучении и поглощении энергия переходит из одного состояния в другое скачком, минуя промежуточные значения. Следовательно, было установлено, что процесс излучения энергии атомами происходит прерывным образом, при переходах между различными стационарными состояниями.

Уже в 1905 г. Эйнштейн высказал соображения о прерывной природе не только процесса излучения, но и самого излучения. Эти соображения основывались на рассмотрении случайных колебаний (флуктуаций) плотности излучения. О наличии подобных флуктуаций любого материального газа, помещенного в замкнутый объем V , было хорошо известно в классической физике. Действительно, если выделить малую часть замкнутого объема v , то можно указать вероятность того, что в этой части окажется всего одна молекула газа $P_1 = v/V$ или n молекул $P_n = (v/V)^n$.

Эйнштейн рассмотрел аналогичную задачу для случая черного излучения, заключенного в замкнутом объеме, считая его своеобразным газом. Это рассмотрение показало, что излучение действительно можно считать состоящим из отдельных атомов величины $h\nu$, которые были названы фотонами.

Как известно, корпускулярные свойства излучения обнаружались прежде всего в явлениях фотоэффекта — освобождения электрона под действием потока излучения. Законы фотоэффекта представлялись непонятными с точки зрения волновой теории, однако были объяснены Эйнштейном, представившим излучение как поток фотонов величины $h\nu$.

Корпускулярные свойства излучения влекут за собой еще одно важное следствие: необходимость существования флуктуации в слабых потоках. Если поток излучения настолько слаб, что число фотонов, попадающих на приемник в единицу времени, измеряется единицами или десятками, а приемник настолько чувствителен, что он реагирует на попадание малого числа фотонов, то неизбежно должны сказаться флуктуации этого числа. Такие флуктуации в потоке излучения, видимого глазом, были блестяще подтверждены

академиком С. И. Вавиловым. Чувствительность глаза, определяемая зрительным ощущением, составляет, по оценке С. И. Вавилова, немного десятков, а может быть и несколько фотонов. Кроме того, глаз имеет резкий порог зрительного ощущения: если энергия излучения, попадающего в глаз, меньше некоторой предельной величины, то глаз совсем не ощущает света. Именно этими свойствами глаза воспользовался С. И. Вавилов в своих опытах, которые, по его выражению, «действительно воочию позволяют убедиться в квантовой, прерывной структуре света».

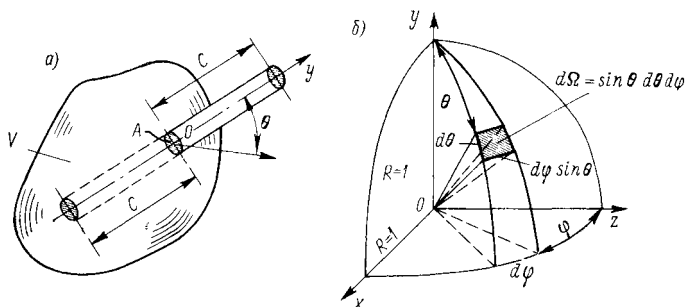


Рис. 331. К расчету связи между объемной и поверхностной плотностями излучения: а — излучение из объема \$V\$ через отверстие \$A\$; б — геометрия излучения с поверхности \$A\$

Рассмотрим некоторые количественные соотношения, позволяющие рассчитать фотонный шум приемников излучения.

Исходным выражением для расчета дисперсии флуктуаций потока излучения является известная из статистической термодинамики формула Эйнштейна—Фаулера для среднего квадрата отклонения $\overline{\Delta E^2}$ средней энергии \overline{E} (вывод этой общей формулы можно найти в книге Э. В. Шпольского «Атомная физика»)

$$\overline{\Delta E^2} = (\overline{E - \bar{E}})^2 = \overline{E^2} - (\bar{E})^2 = kT^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial T},$$

где k — постоянная Больцмана.

Средняя энергия черного излучения, находящегося внутри замкнутого объема \$V\$, приходящаяся на единицу этого объема, и интервал частот от \$\nu\$ до \$\nu + d\nu\$ равна

$$\bar{E} = \rho_\nu d\nu,$$

где \$\rho_\nu\$, Дж·см⁻³·Гц⁻¹ — спектральная объемная плотность излучения, определяемая формулой Планка

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Эта формула легко преобразуется в знакомый вид формулы Планка для поверхностной плотности излучения. Действительно, рассмотрим замкнутую полость \$V\$, в которой заключено излучение с плотностью \$\rho_\nu\$. Если в полости \$V\$ имеется малое отверстие с пло-

щадью A , то по обе стороны от этого отверстия — источника излучения распространяется в течение 1 с равное количество энергии, содержащееся в элементарном объеме — цилиндре с площадью основания A и высотой, равной скорости света c (путь, проходимый излучением в течение 1 с). Следовательно, в направлении θ (рис. 331) в элементарный телесный угол $d\Omega$ испускается поток излучения

$$d\Phi(v) = \frac{c}{4\pi} A \rho_v dv \cos \theta d\Omega,$$

а в полусферу

$$\Phi_{2\pi}(v) = \frac{c}{4\pi} A \rho_v dv \int_{2\pi} \cos \theta d\Omega.$$

Так как

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

а

$$\int_{2\pi} \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi,$$

то

$$\Phi_{2\pi}(v) = (c/4) A \rho_v dv.$$

Спектральная поверхностная плотность потока, излучаемого в полусферу — спектральная энергетическая светимость M_v , Вт · см⁻² · Гц⁻¹ — равна

$$M_v = \frac{\Phi_{2\pi}(v)}{A dv} = \frac{c}{4} \rho_v,$$

т. е.

$$M_v = \frac{2\pi h v^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta E^2} &= kT^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \right] = \\ &= \frac{8\pi h^2 v^4}{c^3} \frac{e^{h\nu/(kT)}}{(e^{h\nu/(kT)} - 1)^2} dv. \end{aligned}$$

Так как

$$\bar{E} = \rho_v dv = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} dv,$$

то

$$\overline{\Delta E^2} = \bar{E} h v e^{h\nu/(kT)} / (e^{h\nu/(kT)} - 1).$$

С другой стороны, поскольку

$$e^{h\nu/(kT)} / (e^{h\nu/(kT)} - 1)^2 = 1 / (e^{h\nu/(kT)} - 1) + 1 / (e^{h\nu/(kT)} - 1)^2,$$

то можно также записать

$$\overline{\Delta E^2} = \bar{E} h v [1 + 1 / (e^{h\nu/(kT)} - 1)].$$

Применим формулу Эйнштейна—Фаулера для вычисления дисперсии флуктуаций спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, которая в соответствии с законом Планка равна:

$$M_v = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}, \quad M_\lambda = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1},$$

где частота оптического излучения ν выражена в Гц, длина волны λ — в см, M_v — в Вт·см⁻²·Гц⁻¹, M_λ — в Вт·см⁻²·см⁻¹.

Пользуясь формулой Эйнштейна—Фаулера, найдем:

$$\overline{\Delta M_v^2} = (\overline{M_v} - \overline{M_v})^2 = [(2\pi h^2 \nu^4 / c^2) / (e^{h\nu/(kT)} - 1)] \mathcal{D}(\nu);$$

$$\overline{\Delta M_\lambda^2} = (\overline{M_\lambda} - \overline{M_\lambda})^2 = [(2\pi h^2 c^3 / \lambda^6) / (e^{hc/(\lambda kT)} - 1)] \mathcal{D}(\lambda),$$

где

$$\mathcal{D}(\nu) = e^{h\nu/(kT)} / (e^{h\nu/(kT)} - 1),$$

$$\mathcal{D}(\lambda) = e^{hc/(\lambda kT)} / (e^{hc/(\lambda kT)} - 1);$$

$\overline{\Delta M_v^2}$ выражена в Вт²·с·см⁻²·Гц⁻¹, $\overline{\Delta M_\lambda^2}$ — в Вт²·с·см⁻²·см⁻¹.

Полученные значения дисперсии флуктуаций спектральной плотности представляют собой средние квадраты отклонения от среднего значения энергии, излучаемой в единичном спектральном интервале (1 Гц или 1 см), единичной площадью источника (1 см²) в единицу времени (1 с) в полусферу (2π).

Установим связь между этими величинами и спектральной плотностью мощности фотонного шума, т. е. дисперсией, приходящейся на единичный интервал частот электрических сигналов.

Предположим, что за время T , достаточно большое по сравнению с длительностью излучения фотона, излучается в единичном спектральном интервале N_v (или N_λ) фотонов. В этом случае суммарный поток излучения в момент времени t можно представить в виде

$$\Phi_v(t) = \sum_{k=1}^{N_v} \Phi_1(t - t_k),$$

где $\Phi_1(t - t_k)$ — поток, определяемый излучением одного фотона, в момент времени t_k .

Случайные моменты времени излучения фотонов будем пока считать равновероятными в интервале 0, T .

Определим среднее значение потока излучения

$$\overline{\Phi_v(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi_v(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^{N_v} \Phi_1(t - t_k) dt.$$

Учитывая, что независимо от момента вылета фотона $\int_0^T \Phi_1(t - t_k) dt = h\nu$, найдем

$$\overline{\Phi_v(t)} = \Phi_0 = h\nu \overline{N_v},$$

где $\bar{N}_\nu = \lim_{T \rightarrow \infty} (N_\nu/T)$ представляет собой среднее за единицу времени число фотонов, излучаемых в единичном спектральном интервале, центрированном относительно частоты ν .

Рассмотрим спектр излучения одного фотона

$$\tilde{\Phi}_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(t - t_k) e^{-j2\pi f t} dt.$$

Предполагая, что испускание фотона есть мгновенный процесс т. е.

$$\Phi_1(t - t_k) = h\nu \delta(t - t_k),$$

где $\delta(t - t_k)$ — дельта функция в момент времени $t = t_k$, получим, вводя новое значение текущего времени $t' = t - t_k$,

$$\tilde{\Phi}_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\nu \delta(t') e^{-j2\pi f (t' + t_k)} dt' = h\nu e^{-j2\pi f t_k}.$$

В соответствии с равенством Парсеваля интеграл от квадрата потока, излучаемого в момент времени t , когда в момент времени t_k происходит акт испускания одного фотона, вычисленный для всех значений времени t от $-\infty$ до $+\infty$, равен интегралу от квадрата модуля временного спектра излучения одного фотона, вычисленного для всех частот f от $-\infty$ до $+\infty$.

Следовательно, введя обозначение

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1^2(t - t_k) dt,$$

найдем

$$\mathcal{E}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\Phi}_1(f)|^2 df.$$

Если за время T испускается N_ν фотонов, то суммарный квадрат потока излучения за это время можно найти, умножив значение \mathcal{E}_1 для одного фотона на число фотонов N_ν , а не на N_ν^2 в силу случайности фаз составляющих спектра от излучения каждого фотона. Кроме того, необходимо учесть постоянную составляющую потока, определяемую N_ν фотонами, квадрат которой в единицу времени составляет Φ_0^2 , а за время T — $\Phi_0^2 T$.

Обозначив суммарный квадрат потока излучения за время T через \mathcal{E}_T , найдем

$$\mathcal{E}_T = N_\nu \mathcal{E}_1 + \Phi_0^2 T,$$

причем первое слагаемое правой части равенства учитывает флуктуации потока излучения, а второе — его постоянную составляющую.

Следовательно, можно записать

$$\mathcal{E}_T = \int_{-\infty}^{+\infty} N_\nu |\tilde{\Phi}_1(f)|^2 df + \Phi_0^2 T.$$

Средний квадрат флуктуаций потока излучения, очевидно, равен

$$\overline{\Phi_v^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}_1}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} N_v |\tilde{\Phi}_1(f)|^2 df + \Phi_v^2,$$

а дисперсия

$$\overline{\Delta \Phi_v^2(t)} = \overline{\Phi_v^2(t)} - \Phi_v^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_v}{T} \right] |\tilde{\Phi}_1(f)|^2 df.$$

Так как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_v}{T} = \overline{N}_v,$$

то

$$\overline{\Delta \Phi_v^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{N}_v |\tilde{\Phi}_1(f)|^2 df.$$

Сравнивая это выражение с общей формулой для дисперсии, определяющей ее зависимость от спектральной плотности — спектра Хинчина—Винера

$$\overline{\Delta \Phi_v^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_v(f) df,$$

найдем

$$E_v(f) = \overline{N}_v |\tilde{\Phi}_1(f)|^2,$$

но

$$|\tilde{\Phi}_1(f)|^2 = |h\nu e^{-j2\pi f t_k}|^2 = (h\nu)^2,$$

следовательно,

$$E_v(f) = \overline{N}_v (h\nu)^2.$$

В полученную формулу должна быть внесена существенная поправка, связанная с тем, что при ее выводе предполагалось, что случайные события (отдельные акты излучения фотонов) появляются независимо друг от друга. В этом случае справедлив закон Пуассона, описывающий распределение числа появлений рассматриваемых случайных событий в единицу времени

$$P(N_v) = \frac{(\overline{N}_v)^{N_v}}{N_v!} e^{-\overline{N}_v},$$

где $P(N_v)$ — вероятность того, что в течение времени произойдет ровно N_v актов излучения; \overline{N}_v — среднее число актов излучения в единицу времени.

Как известно, дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна среднему значению

$$\overline{\Delta N_v^2} = \overline{N}_v.$$

Это свойство распределения Пуассона, называемое *законом среднеквадратического отклонения*, является критерием того — правдоподобна ли гипотеза о распределении случайной величины по закону Пуассона.

Закон среднеквадратического отклонения может быть, например, использован для расчета отклонения от среднего числа атомов, находящихся в некотором объеме газа, а также многих других физических явлений, характеризующихся равномерным распределением энергии по степеням свободы (классическая статистика Больцмана).

Рассмотрим, справедлив ли закон среднеквадратического отклонения для *фотонного газа*. Для этого найдем выражение для дисперсии флуктуаций числа фотонов

$$\overline{\Delta N_v^2} = \overline{(N_v - \bar{N}_v)^2} = \overline{N_v^2} - (\bar{N}_v)^2.$$

Так как

$$\bar{E}_v = \bar{N}_v h\nu, \quad \overline{\Delta E_v^2} = \overline{\Delta N_v^2} (h\nu)^2,$$

то

$$\overline{\Delta N_v^2} = \overline{\Delta E_v^2} / (h\nu)^2,$$

где $\overline{\Delta E_v^2}$ — средний квадрат отклонения энергии от среднего значения \bar{E}_v .

Из формулы Эйнштейна—Фаулера для флуктуаций потока излучения следует, что

$$\overline{\Delta E_v^2} = \bar{E}_v h\nu [1 + 1/(e^{h\nu/(kT)} - 1)],$$

откуда искомая дисперсия флуктуации числа фотонов будет равна

$$\overline{\Delta N_v^2} = \bar{N}_v [1 + \delta_v(\nu)] = \bar{N}_v \mathcal{D}(\nu),$$

где

$$\delta_v(\nu) = 1/(e^{h\nu/(kT)} - 1);$$

$$\mathcal{D}(\nu) = 1 + \delta_v(\nu) = e^{h\nu/(kT)} / (e^{h\nu/(kT)} - 1) = 1/(1 - e^{-h\nu/(kT)}).$$

Как видим, полученное выражение отличается от закона среднеквадратического отклонения, т. е. рассматриваемое распределение не является распределением Пуассона.

Флуктуации в фотонном газе несколько больше — на величину $\delta_v(\nu)$, называемую *параметром вырождения*. Это является следствием учета вынужденного излучения атома, помещенного во внешнее поле. Поглощение атомом энергии внешнего поля, связанное с переходом его из низшего квантового состояния в высшее, не изменяет чисто случайный характер флуктуаций собственного излучения атома. Однако существует определенная вероятность перехода атома из высшего состояния в низшее, сопровождающегося излучением энергии. Вынужденное (под действием внешнего поля) излучение определяет возможность одновременного излучения нескольких фотонов, испускаемых с одинаковыми энергиями в одном направлении (эффект *слипания*). Таким образом, существует некоторая корреляция излучения фотонов и отдельные акты излучения нельзя считать независимыми. Это обстоятельство учитывается *стати-*

стикой Бозе—Эйнштейна, в которой в отличие от статистики Больцмана вводится коэффициент корреляции $\mathcal{D}(\nu)$, определяемый через параметр вырождения $\delta_\nu(\nu)$. У тепловых источников излучения до температур примерно 10^4 К параметр вырождения очень мал. Действительно, например, для комнатной температуры при длине волны 10 мкм он равен 0,008. Однако у нетепловых (лазерных) источников параметр вырождения может быть очень большим.

Учитывая статистику Бозе—Эйнштейна, спектр Хинчина—Винера для потока, излучаемого единицей поверхности абсолютно черного тела в единичном спектральном интервале в полусферу, можно представить в виде

$$E_\nu(f) = (h\nu)^2 \bar{N}_\nu \mathcal{D}(\nu) = (h\nu)^2 \bar{N}_\nu [1 + \delta_\nu(\nu)],$$

или

$$E_\lambda(f) = (hc/\lambda)^2 \bar{N}_\lambda \mathcal{D}(\lambda) = (hc/\lambda)^2 \bar{N}_\lambda [1 + \delta_\nu(\lambda)],$$

причем

$$\bar{N}_\nu = \frac{R_\nu}{h\nu} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \delta_\nu(\nu);$$

$$\delta_\nu(\nu) = 1/(e^{h\nu/(kT)} - 1); \quad \mathcal{D}(\nu) = 1 + \delta_\nu(\nu);$$

$$\bar{N}_\lambda = \frac{R_\lambda}{hc/\lambda} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \delta_\nu(\lambda);$$

$$\delta_\nu(\lambda) = 1/(e^{hc/(\lambda kT)} - 1); \quad \mathcal{D}(\lambda) = 1 + \delta_\nu(\lambda).$$

Легко убедиться, что полученные ранее по формуле Эйнштейна—Фаулера значения дисперсии флуктуаций спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела $\overline{\Delta M_\nu^2}$ и $\overline{\Delta M_\lambda^2}$ представляют собой спектры Хинчина—Винера, т. е.

$$\overline{\Delta M_\nu^2} = E_\nu(f); \quad \overline{\Delta M_\lambda^2} = E_\lambda(f).$$

Если использовать только положительные частоты, то соответствующие спектры равны:

$$E_\nu(f_+) = 2E_\nu(f); \quad E_\lambda(f_+) = 2E_\lambda(f).$$

Дисперсия флуктуаций в шумовой полосе пропускания электронного тракта $\Delta f_{ш}$

$$[\overline{\Delta M_\nu^2}]_{\Delta f_{ш}} = 2\overline{M_\nu^2} \Delta f_{ш}, \quad [\overline{\Delta M_\lambda^2}]_{\Delta f_{ш}} = 2\overline{M_\lambda^2} \Delta f_{ш},$$

причем $[\overline{\Delta M_\nu^2}]_{\Delta f_{ш}}$ измеряется в Вт²·см⁻²·Гц⁻¹, а $[\overline{\Delta M_\lambda^2}]_{\Delta f_{ш}}$ — в Вт²·см⁻²·см⁻¹.

Наличие в единицах измерения этих величин Гц⁻¹ и см⁻¹ говорит о том, что они по-прежнему отнесены к единичному спектральному интервалу оптических частот ν в Гц или длин волн λ в см.

Расчет фотонного шума различен для тепловых приемников излучения, реагирующих на среднее значение потока, и фотонных приемников, сигнал которых определяется количеством носителей заряда, освобожденных квантами излучения и либо покидающих

вещество (фотоэмиссия), либо остающихся в нем, увеличивая проводимость (фоторезистора) или создавая э. д. с. (фотовольтаические приемники).

§ 18.6. ФОТОННЫЙ ШУМ ТЕПЛОВЫХ ПРИЕМНИКОВ

Предположим, что тепловой приемник взаимодействует с окружающей средой лишь путем излучения, т. е. не происходит обмена энергией вследствие конвекции и теплопроводности; приемник имеет температуру T_1 , окружен со стороны одной полусферы равномерно излучающей средой с температурой T_2 и имеет излучательную способность ε , которая не зависит от температуры и длины волны. Поток излучения, падающий на приемник и поглощенный им, в этом случае равен (пользуемся только шкалой частот)

$$\Phi = \int_0^{\infty} \varepsilon A \pi L_{\nu} d\nu,$$

где L_{ν} — спектральная плотность энергетической яркости абсолютно черного тела, имеющего температуру T_2 ; A — площадь приемника.

Так как излучает вся полусфера, то $L_{\nu} = M_{\nu}/\pi$, где M_{ν} — спектральная плотность энергетической светимости, следовательно,

$$\Phi = \varepsilon A \int_0^{\infty} M_{\nu} d\nu = \varepsilon A \sigma T^4 \approx 5,67 \cdot 10^{-12} \varepsilon A T^4.$$

Если M_{ν} флуктуирует относительно своего среднего значения, то и поток излучения, падающий на приемник, испытывает соответствующие флуктуации.

Дисперсия этих флуктуаций в полосе частот электронного тракта $\Delta f_{ш}$, очевидно, равна

$$\overline{\Delta \Phi^2} = 2 \Delta f_{ш} \varepsilon A \int_0^{\infty} E_{\nu} d\nu,$$

где E_{ν} — спектр Хинчина—Винера для спектральной плотности энергетической яркости, т. е.

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \Phi^2} &= 2 \Delta f_{ш} \varepsilon A \int_0^{\infty} h\nu M_{\nu} \mathcal{D}(\nu) d\nu \\ &= 2 \Delta f_{ш} \varepsilon A \int_0^{\infty} \frac{2\pi h^2 \nu^4}{c^2} \frac{e^{h\nu/(kT_2)}}{(e^{h\nu/(kT_2)} - 1)^2} d\nu = \frac{4\pi h^2 \varepsilon A}{c^2} \mathcal{I}_1 \Delta f_{ш}, \end{aligned}$$

где интеграл

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\infty} \frac{\nu^4 e^{h\nu/(kT_2)}}{(e^{h\nu/(kT_2)} - 1)^2} d\nu.$$

Если $h\nu \gg kT_2$, то

$$\mathcal{I}_1 \approx \int_0^{\infty} \nu^4 e^{h\nu/(kT_2)} d\nu.$$

Этот интеграл можно вычислить по формуле

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\mu x} dx = \frac{n!}{\mu^{n+1}}.$$

Тогда найдем

$$\mathcal{I}_1 \approx 24 (kT_2/h)^5,$$

следовательно,

$$\overline{\Delta\Phi^2} \approx \frac{4\pi h^2 \epsilon A}{c^2} 24 \left(\frac{kT_2}{h} \right)^5 \Delta f_{\text{ш}}.$$

Учитывая, что постоянная закона Стефана—Больцмана

$$\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15c^2 h^3),$$

найдем дисперсию флуктуаций, выраженную в Вт²

$$\overline{\Delta\Phi^2} \approx 7,39 k \sigma \epsilon A \Delta f_{\text{ш}} T_2^5.$$

Точное значение интеграла \mathcal{I}_1 , позволяет получить несколько иную величину

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 8k\sigma\epsilon A \Delta f_{\text{ш}} T_2^5 \approx 62,62 \cdot 10^{-35} \epsilon A \Delta f_{\text{ш}} T_2^5.$$

Так как приемник излучает как серое тело, имеющее температуру T_1 и излучательную способность ϵ , то флуктуации излучаемой им мощности будут проявляться как фотонный шум с дисперсией

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 8k\sigma\epsilon A \Delta f_{\text{ш}} T_1^5.$$

Поскольку флуктуации падающего и излучаемого потоков излучения независимы, суммарная дисперсия

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 8k\sigma\epsilon A \Delta f_{\text{ш}} (T_1^5 + T_2^5).$$

Если приемник находится при той же температуре, что и окружающая его среда, т. е. $T_1 = T_2 = T$, то

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 16k\sigma\epsilon A \Delta f_{\text{ш}} T^5 \approx 125,24 \cdot 10^{-35} \epsilon A \Delta f_{\text{ш}} T^5.$$

Если тепловой приемник излучения представляет собой пластинку, площадь каждой стороны которой равна A при излучательной способности сторон ϵ_1 и ϵ_2 , то общий уровень фотонного шума такого приемника определяется выражением

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 16k\sigma A (\epsilon_1 + \epsilon_2) \Delta f_{\text{ш}} T^5.$$

Во всех предыдущих расчетах имелось в виду, что $\epsilon_1 = \epsilon$, а $\epsilon_2 = 0$.

Если же тепловой приемник представляет собой плоское абсолютно черное тело, имеющее температуру T_1 , площадь каждой стороны A и окруженное со всех сторон другими абсолютно черными телами, имеющими различную температуру, распределенную по

закону $T_2(\theta, \varphi)$, то дисперсия полной флуктуации определяется выражением

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 16k\sigma A \Delta f_{\text{ш}} \left[T_1^5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} T_2^5(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \right],$$

где интегрирование проводится по полусфере, так что угол θ изменяется от 0 до $\pi/2$, а угол φ — от 0 до 2π .

Если приемник окружен со всех сторон абсолютно черным телом, имеющим одинаковую температуру T_2 , то $T_2(\theta, \varphi) = T_2 = \text{const}$,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \pi \quad \text{и} \quad \overline{\Delta\Phi^2} = 16k\sigma A \Delta f_{\text{ш}} (T_1^5 + T_2^5).$$

Если приемник окружен со всех сторон абсолютно черным телом, имеющим температуру T_1 всюду, кроме малого телесного угла внутри одной полусферы, где она равна T_2 , т. е. $T_2(\theta, \varphi) = T_2$ в телесном угле Ω , $T_2(\theta, \varphi) = T_1$ в остальном угле $\pi - \Omega$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} T_2^5(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\Omega}{\pi} T_2^5 + T_1^5 - \frac{\Omega}{\pi} T_1^5$$

и

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 16k\sigma A \Delta f_{\text{ш}} [(2 - \Omega/\pi) T_1^5 + (\Omega/\pi) T_2^5].$$

При $T_1 = T_2 = T$

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 32k\sigma A \Delta f_{\text{ш}} T^5,$$

что естественно следует из предыдущего выражения, когда $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$.

Во всех последующих расчетах за основу будет принята формула для теплового приемника, имеющего $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = 0$, т. е.

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 8k\sigma A \epsilon (T_1^5 + T_2^5) \Delta f_{\text{ш}}.$$

Для полосы пропускания электрических сигналов $\Delta f_{\text{ш}} = 1$ Гц и площади приемника $A = 1$ см² среднеквадратическое значение полной флуктуации при $T_1 = T_2 = T$ равно

$$\Phi_n^* = \sqrt{\overline{\Delta\Phi^2}/(\Delta f_{\text{ш}} A)} = \sqrt{16k\sigma \epsilon T^5} \approx 3,54 \cdot 10^{-17} \sqrt{\epsilon T^5}.$$

Эту величину называют *удельным пороговым потоком* или *эквивалентной мощностью фотонного шума* теплового приемника, так как она определяет величину потока излучения, воздействие которого на приемник, имеющий площадь 1 см², в полосе пропускания 1 Гц, вызывает сигнал, равный шуму.

Если $\epsilon = 1$, а $T = 295$ К, то

$$\Phi_n^* \approx 3,54 \cdot 10^{-17} \cdot 1,495 \cdot 10^6 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1/2}.$$

Вычисления уровня фотонного шума могут помочь следующие коэффициенты (для $\epsilon = 1$):

$$\psi_1 = \Phi_n^{*2}/M_{\lambda m} \approx 10^{-22} \text{ Вт} \cdot \text{см} \cdot \text{Гц}^{-1},$$

где $M_{\lambda m} = \mathcal{B}T^5 = 128,62 \cdot 10^{-13} T^5$ — максимальное значение спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела, Вт·см⁻³;

$$\psi_2 = \Phi_n^{*2} / M \approx 2,2 \cdot 10^{-22} T,$$

где $M = \sigma T^4 = 566,97 \cdot 10^{-14} T^4$, M выражается в Вт/см², а ψ_2 — в Вт/Гц.

Кроме того, можно воспользоваться графиками, приведенными в книге Круза и др. «Основы инфракрасной техники». Воениздат, 1964 г. Эти графики воспроизведены на рис. 332. По оси ординат отложена величина $D^* = 1/\Phi_n^*$, по оси абсцисс — температура фона T_2 , а на каждой кривой указано значение температуры приемника T_1 .

Из графиков, в частности, следует, что для $T_2 = T_1 = 295$ К $D^* \approx 2 \cdot 10^{10}$, т. е. $\Phi_n^* \approx 5 \cdot 10^{-11}$ Вт·см⁻¹·Гц^{-1/2}. Если же приемник охлажден до температуры абсолютного нуля, эквивалентная мощность фотонного шума уменьшается всего в $\sqrt{2}$ раза по сравнению со случаем, когда приемник имеет комнатную температуру.

§ 18.7. ФОТОННЫЙ ШУМ ФОТОННЫХ ПРИЕМНИКОВ

Фотонные или квантовые приемники отличаются от тепловых тем, что в них имеет место прямое взаимодействие между падающими фотонами и электронами материала приемника. Поэтому, если чувствительность тепловых приемников пропорциональна поглощенной энергии, то чувствительность фотонных приемников — числу поглощенных фотонов. Вследствие прямого взаимодействия между фотонами и электронами инерционность фотонных приемников очень мала, а чувствительность их в условиях глубокого охлаждения обычно на один-два порядка выше, чем чувствительность тепловых приемников. Спектральная чувствительность фотонных приемников зависит от длины волны, в то время как спектральная чувствительность теплового приемника от длины волны не зависит, если процесс чернения его поверхности достаточно совершенный. Так как энергия фотона изменяется с длиной волны, фотонные приемники характеризуются длинноволновой границей чувствительности, т. е. длиной волны (мкм) $\lambda_0 = 1,242/\varphi$, за пределами которой энергия фотона либо меньше работы выхода для фотоэмиссионных приемников, либо недостаточна для создания пары электрон—дырка для фоторезисторов и фотовольтаических приемников.

Для фотоэмиссионных приемников φ есть задерживающий потенциал в электронвольтах $\varphi = \omega/e$, где ω — работа выхода, e — заряд электрона. Предельно низкую величину задерживающего

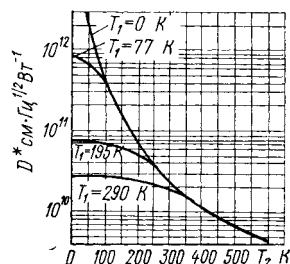


Рис. 332. Обнаружительная способность идеального теплового приемника, имеющего температуру T_1 , К, в зависимости от температуры фона T_2 , К, окружающего его со стороны всей передней полусферы

потенциала имеют серебрянокислородноцезиевые эмиттирующие поверхности, у которых $\phi = 0,98$ эВ, т. е. $\lambda_0 = 1,25$ мкм.

Для полупроводниковых приемников $\phi = \Delta E_0$, где ΔE_0 — ширина запрещенной зоны, выраженная в электрон-вольтах.

Все известные полупроводники с собственной проводимостью имеют ширину запрещенной зоны не менее 0,18 эВ, т. е. работают в области до 7 мкм. При охлаждении ширина запрещенной зоны сужается, сузить ее можно и за счет введения примесей легирования. В этом случае наибольшая граничная длина волны достигает 140 мкм (германий, легированный бором) и даже 8000 мкм (легированный антимонид индия).

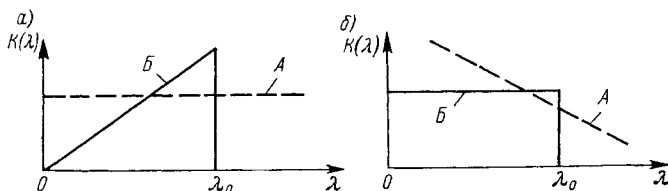


Рис. 333. Идеализированные спектральные характеристики приемников излучения: а — поток излучения, приходящийся на единичный интервал длин волн (величина постоянна); б — число фотонов, приходящееся на единичный интервал длин волн (постоянно):

А — тепловые приемники; Б — фотонные приемники

Идеализированные спектральные характеристики тепловых и фотонных приемников, построенные исходя из постоянной величины потока излучения на единичный интервал длин волн, представлены на рис. 333. Там же приведены спектральные характеристики, построенные по другому принципу, исходя из постоянного числа фотонов на единичный интервал длин волн.

Действие излучения на фотонные приемники характеризуется *коэффициентом квантовой эффективности*, равным отношению числа фотонов, активно поглощенных фотослоем, т. е. фотонов, освободивших фотоэлектроны, к общему числу фотонов. Часть падающих на приемник фотонов является неэффективной как за счет процессов отражения и пропускания, так и за счет тех процессов поглощения, при которых не возникает фотоэлектронов. Считая, что каждый эффективный фотон создает один фотоэлектрон, найдем значение квантовой эффективности $\eta(\nu) = \bar{n}(\nu)/\bar{N}(\nu)$, где $\bar{n}(\nu)$ — среднее число фотоэлектронов, освобождаемых падающим излучением в спектральном интервале от ν до $\nu + d\nu$ в единицу времени (средняя скорость генерации фотоэлектронов), $\bar{N}(\nu)$ — среднее число фотонов, падающих на приемник в спектральном интервале от ν до $\nu + d\nu$ в единицу времени (средняя скорость поступления фотонов).

В фотоэмиссионных приемниках между средней скоростью генерации фотоэлектронов и постоянной составляющей фототока суще-

ствуется простая зависимость $\overline{i(v)} = e \overline{n(v)}$, где $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ А·с — заряд электрона.

Для полупроводниковых приемников эта зависимость более сложна, но в простейшем случае она может быть получена следующим образом.

При тепловом возбуждении носителей — электронов и дырок — полупроводник имеет среднюю проводимость

$$\bar{\sigma} = e(\bar{n}\mu_e + \bar{p}\mu_h)$$

где e — заряд электрона, \bar{n} и \bar{p} — средние значения концентрации электронов и дырок, вызванные тепловым возбуждением, μ_e и μ_h — подвижности электронов и дырок.

В результате воздействия активных фотонов, приходящих со скоростью $n(v)$, проводимость полупроводника изменяется в среднем на величину

$$\Delta\sigma(v) = e(\Delta n(v)\mu_e + \Delta p(v)\mu_h),$$

где $\Delta n(v)$ и $\Delta p(v)$ — средние значения изменения концентрации электронов и дырок в результате действия излучения.

В установившемся состоянии

$$\overline{\Delta n(v)} = \overline{\Delta p(v)} = \overline{n(v)}\tau,$$

где τ — время жизни носителей в зоне проводимости.

Следовательно,

$$\overline{\Delta\sigma(v)} = e \overline{n(v)}\tau(\mu_e + \mu_h).$$

Обозначая $b = \mu_e/\mu_h$, найдем

$$\overline{\Delta\sigma(v)}\bar{\sigma} = [(b+1)\tau(b\bar{n} + \bar{p})] \overline{n(v)},$$

т. е. среднее значение относительного изменения проводимости (или сопротивления $\Delta r(v)/r$) у полупроводникового фотонного приемника, так же как фототок фотоэмиссионного приемника, пропорционально средней скорости генерации фотоэлектронов.

Установим соотношение между квантовой эффективностью и крутизной преобразования (чувствительностью) приемника излучения.

Если ввести понятие обобщенного сигнала $U(v)$, равного в одном случае $i(v)$, в другом — $\Delta r(v)/r$ и т. д., иначе говоря, равного эффекту воздействия потока излучения на приемник, то можно записать

$$\overline{U(v)} = \gamma \overline{n(v)} = \gamma \eta(v) \overline{N(v)},$$

где $\overline{U(v)}$ — среднее значение обобщенного сигнала; γ — постоянная, не зависящая от длины волны падающего излучения. Поскольку

$$\overline{U(v)} = S(v) \overline{\Phi(v)},$$

где $\overline{\Phi(v)}$ — среднее значение потока излучения, падающего на приемник; $S(v)$ — крутизна преобразования (чувствительность) приемника излучения, найдем

$$\gamma \eta(v) \overline{N(v)} = S(v) \overline{\Phi(v)},$$

т. е.

$$\eta(v) = \frac{1}{\gamma} S(v) \frac{\overline{\Phi(v)}}{\overline{N(v)}},$$

но

$$\overline{\Phi(v)} = h\nu \overline{N(v)},$$

следовательно,

$$\eta(v) = (h/\gamma) \nu S(v).$$

Для частоты излучения, соответствующей максимуму чувствительности (у идеального приемника — это граничное значение частоты $\nu_0 = c/\lambda_0$), найдем

$$\eta(\nu_m) = \eta_m = (h/\gamma) \nu_m S(\nu_m) = (h/\gamma) \nu_m S_m,$$

или

$$\eta(v)/\eta_m = (\nu/\nu_m) [S(v)/S_m] = (\nu/\nu_m) k(v),$$

где

$$k(v) = S(v)/S_m$$

Окончательно получим

$$\eta(v) = (\eta_m/\nu_m) \nu k(v),$$

или в масштабе длин волн

$$\eta(\lambda) = \eta_m \lambda_m k(\lambda)/\lambda.$$

Вычислим пороговый поток (эквивалентную мощность шума) для фотонного приемника, чувствительность которого ограничена флуктуациями числа фотонов среды, имеющей температуру T_2 и окружающей приемник со стороны всей передней полусферы.

Дисперсия флуктуации числа фотонов, падающих на приемник с площадью A в течение 1 с в спектральном интервале 1 Гц, равна

$$\overline{\Delta N_v^2} = A \bar{N}_v \mathcal{D}(v),$$

где

$$N_v = \frac{R_v}{h\nu} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1};$$

$$\mathcal{D}(v) = e^{h\nu/(kT)} / (e^{h\nu/(kT)} - 1).$$

Величина \bar{N}_v выражается в $\text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$, а величина $\overline{\Delta N_v^2}$ — в $\text{с}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$.

Так как только $\eta(v) \bar{N}_v$ фотонов вызовут появление фотоэлектронов, то средний квадрат флуктуаций *эффективных фотонов*

$$\overline{\Delta n_v^2} = A \eta(v) \bar{N}_v \mathcal{D}(v).$$

Аналогично предыдущему (см. § 18.5), можно показать, что величина $\overline{\Delta n_v^2}$ представляет собой спектр Хинчина—Винера. Следовательно, для вычисления дисперсии флуктуаций числа эффективных фотонов в шумовой полосе пропускания электронного тракта $\Delta f_{ш}$ нужно умножить $\overline{\Delta n_v^2}$ на $2 \Delta f_{ш}$, т. е.

$$(\overline{\Delta n_v^2})_{\Delta f_{ш}} = 2 \overline{\Delta n_v^2} \Delta f_{ш}.$$

Полученная величина измеряется в $\text{с}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$, в единицы измерения входит Гц^{-1} , так как дисперсия флуктуаций отнесена к единичному спектральному интервалу оптических частот ν (Гц).

В шкале длин волн соответствующее равенство имеет вид

$$(\overline{\Delta n_\lambda^2})_{\Delta f_{ш}} = 2 \overline{\Delta n_\lambda^2} \Delta f_{ш},$$

причем в этом случае дисперсия флуктуаций выражается в $\text{с}^{-2} \cdot \text{см}^{-1}$, т. е. относится к единичному спектральному интервалу длин волн λ (см).

Дисперсия флуктуаций для всего оптического диапазона, очевидно, равна

$$(\overline{\Delta n^2})_{\Delta f_{ш}} = 2 \Delta f_{ш} \int_0^\infty \overline{\Delta n_v^2} dv.$$

Величина $(\overline{n^2})_{\Delta f_{ш}}$ измеряется в с^{-2} . Соответствующее среднеквадратическое значение

$$\sqrt{(\overline{\Delta n^2})_{\Delta f_{ш}}} = \sqrt{2 \Delta f_{ш} \int_0^\infty \overline{\Delta n_v^2} dv}$$

определяет флуктуацию числа эффективных фотонов, падающих на приемник в течение 1 с от рассматриваемого источника излучения.

Сравним полученное выражение с числом эффективных фотонов, падающих на приемник в течение 1 с от монохроматического источника, излучающего в области максимума спектральной характеристики приемника ($\nu_m = c/\lambda_m$),

$$n_{\nu_m} = \eta(\nu_m) \Phi(\nu_m) / (h\nu_m).$$

Следовательно, если $n_{\nu_m} = \sqrt{(\overline{\Delta n^2})_{\Delta f_{ш}}}$, то

$$\Phi(\nu_m) = [h\nu_m / \eta(\nu_m)] \sqrt{(\overline{\Delta n^2})_{\Delta f_{ш}}},$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(\nu_m) &= \frac{h\nu_m \sqrt{2 \Delta f_{ш} A}}{\eta(\nu_m)} \left[\int_0^\infty \eta(\nu) \bar{N}_\nu \mathcal{D}(\nu) d\nu \right]^{1/2} = \\ &= 2 \sqrt{\pi} \frac{h}{c} \frac{\nu_m}{\eta(\nu_m)} \sqrt{\Delta f_{ш} A} \left[\int_0^\infty \eta(\nu) \frac{\nu^2 e^{h\nu/(kT_2)}}{(e^{h\nu/(kT_2)} - 1)^2} d\nu \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Удельный пороговый поток фотоприемника ($A = 1 \text{ см}^2$, $\Delta f_{\text{ш}} = 1 \text{ Гц}$) в максимуме спектральной чувствительности

$$\Phi_{\text{п}}^*(\nu_m) = \frac{\Phi(\nu_m)}{\sqrt{A \Delta f_{\text{ш}}}} = \frac{\sqrt{2} \hbar \nu_m}{\eta(\nu_m)} \left[\int_0^\infty \eta(\nu) \bar{N}_\nu \mathcal{D}(\nu) d\nu \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{2 \sqrt{\pi} \hbar}{c} \frac{\nu_m}{\eta(\nu_m)} \left[\int_0^\infty \eta(\nu) \frac{\nu^2 e^{h\nu/(kT_2)}}{(e^{h\nu/(kT_2)} - 1)^2} d\nu \right]^{1/2},$$

или

$$\Phi_{\text{п}}^*(\lambda_m) = \frac{\sqrt{2} \hbar c}{\lambda_m \eta(\lambda_m)} \left[\int_0^\infty \eta(\lambda) \bar{N}_\lambda \mathcal{D}(\lambda) d\lambda \right]^{1/2} =$$

$$= 2 \sqrt{\pi} \hbar c \frac{1}{\lambda_m \eta(\lambda_m)} \left[\int_0^\infty \eta(\lambda) \frac{e^{hc/(\lambda kT_2)}}{\lambda^4 (e^{hc/(\lambda kT_2)} - 1)^2} d\lambda \right]^{1/2}.$$

Полагая, что в идеальном случае квантовая эффективность равна нулю в области длины волн $\lambda > \lambda_0$ ($\nu < \nu_0$) и не зависит от длины волны для $\lambda < \lambda_0$ ($\nu > \nu_0$), где она равна своему максимальному значению $\eta(\nu_m) = \eta(\nu_0) = \eta$, найдем

$$\Phi_{\text{п}}^*(\nu_0) = \frac{2 \sqrt{\pi} \hbar}{c} \frac{\nu_0}{\sqrt{\eta}} \left[\int_{\nu_0}^\infty \nu^2 \frac{e^{h\nu/(kT_2)}}{(e^{h\nu/(kT_2)} - 1)^2} d\nu \right]^{1/2}.$$

Если $e^{h\nu/(kT_2)} \gg 1$ (например: $e^{h\nu/(kT_2)} \geq 10$, т. е. $h\nu/(kT_2) \geq 2,3$, следовательно, $\nu \geq 2,3 kT_2/h$, а при $T_2 = 295 \text{ К}$, $\nu \geq 141,53 \cdot 10^{11} \text{ Гц}$, или $\lambda \leq 21,2 \text{ мкм}$), то

$$\Phi_{\text{п}}^*(\nu_0) \approx \frac{2 \sqrt{\pi} \hbar}{c} \frac{\nu_0}{\sqrt{\eta}} \left[\int_{\nu_0}^\infty \nu^2 e^{-h\nu/(kT_2)} d\nu \right]^{1/2}.$$

Поскольку

$$\int x^2 e^{-ax} dx = -e^{-ax} \left[\frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right],$$

то

$$\Phi_{\text{п}}^*(\nu_0) \approx \frac{2 \sqrt{\pi \hbar k T_2}}{c \sqrt{\eta}} \nu_0^2 \left[1 + 2 \frac{kT_2}{h\nu_0} + 2 \left(\frac{kT_2}{h\nu_0} \right)^2 \right]^{1/2} e^{-h\nu_0/(2kT_2)},$$

а

$$\Phi_{\text{п}}^*(\lambda_0) \approx \frac{2 \sqrt{\pi \hbar k T_2}}{c \sqrt{\eta}} \frac{c^2}{\lambda_0^2} \left[1 + 2 \frac{kT_2}{\hbar c} \lambda_0 + 2 \left(\frac{kT_2}{\hbar c} \right)^2 \lambda_0^2 \right]^{1/2} e^{-\frac{\hbar c}{2kT_2 \lambda_0}}.$$

Если $T_2 = 295 \text{ К}$, то можно найти

$$\Phi_{\text{п}}^*(\nu_0) \approx \frac{1,94 \cdot 10^{-37}}{\sqrt{\eta}} \nu_0^2 \left(1 + \frac{1,23 \cdot 10^{13}}{\nu_0} + \frac{7,56 \cdot 10^{25}}{\nu_0^2} \right)^{1/2} e^{-\nu_0/(1,23 \cdot 10^{13})},$$

или

$$\Phi_{\text{п}}^*(\lambda_0) \approx \frac{174 \cdot 10^{-10}}{\lambda_0^2 e^{24/\lambda_0} \sqrt{\eta}} (1 + 4 \cdot 10^{-2} \lambda_0 + 8 \cdot 10^{-4} \lambda_0^2)^{1/2},$$

где λ_0 выражена в микрометрах. Для $\lambda_0 = 10$ мкм Φ_n^* (10 мкм) $\approx 2 \cdot 10^{-11}$ Вт·см $^{-1}$ ·Гц $^{-1/2}$.

На рис. 334 приведены графики зависимости $D^*(\lambda_0) = 1/\Phi_n^*(\lambda_0)$ для температур $T = 77 \div 500$ К и длин волн $\lambda_0 = 1 \div 1000$ мкм. На рис. 335 даны кривые для температуры фона 290 К для теплового и фотонного приемников.

Наличие минимума на кривых (рис. 334) объясняется тем, что

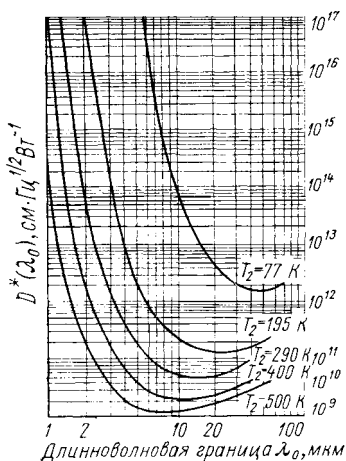


Рис. 334. Зависимость удельной обнаружительной способности фотонного приемника от длинноволновой границы при различных температурах фона T_2 , К (квантовая эффективность равна единице; поле зрения $2\pi_{\text{ср}}$)

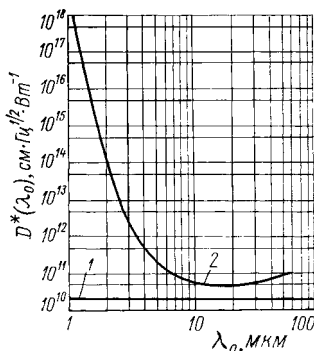


Рис. 335. Удельная обнаружительная способность идеального приемника в зависимости от длинноволновой границы λ_0 при температуре фона 290 К и поле зрения $2\pi_{\text{ср}}$: 1 — тепловой приемник; 2 — фотонный приемник

по мере увеличения λ_0 рост дисперсии фотонного шума с избытком компенсируется увеличением числа фотонов, приходящихся на каждый ватт мощности сигнала.

Если на приемник излучения, кроме окружающего его фона, имеющего температуру $T_2 = T_{\text{ф}}$, поступает излучение от источника сигнала

$$\Phi = \int_0^{\infty} \Phi_{\nu} d\nu,$$

эффективная величина которого равна

$$\Phi_{\text{эф}} = \xi \Phi,$$

где $\xi = \int_0^{\infty} k(\nu) \Phi(\nu) d\nu / \int_0^{\infty} \Phi(\nu) d\nu$; $k(\nu) = S(\nu)/S_m$ — относительная спектральная характеристика чувствительности приемника, то

число эффективных фотонов, падающих на приемник в течение 1 с и освобождающих фотоэлектроны, очевидно, равно

$$n_{\text{эф}} = \eta_m \frac{\Phi_{\text{эф}}}{h\nu_m} = \eta_m \frac{\xi\Phi}{h\nu_m},$$

поскольку излучение $\Phi_{\text{эф}}$ можно рассматривать как поток, сосредоточенный в максимуме спектральной характеристики приемника.

Приравнивая полученную величину $n_{\text{эф}}$ среднеквадратическому значению спектра Хинчина—Винера $\sqrt{[\Delta n^2]_{\Delta f_{\text{ш}}}}$, найдем

$$\eta_m \frac{\xi\Phi}{h\nu_m} = \sqrt{2\Delta f_{\text{ш}} \int_0^\infty \overline{\Delta n_v^2} dv}$$

или

$$\Phi = \frac{h\nu_m}{\xi\eta_m} \sqrt{2\Delta f_{\text{ш}} A} \left[\int_0^\infty \eta(v) \bar{N}_v \mathcal{D}(v) dv \right]^{1/2}.$$

Соответствующее выражение для монохроматического источника сигнала имеет вид

$$\Phi(v_m) = \frac{h\nu_m}{\eta_m} \sqrt{2\Delta f_{\text{ш}} A} \left[\int_0^\infty \eta(v) \bar{N}_v \mathcal{D}(v) dv \right]^{1/2}.$$

Следовательно, минимальная обнаруживаемая мощность немонохроматического источника Φ связана с минимальной обнаруживаемой мощностью $\Phi(v_m)$ монохроматического источника соотношением

$$\Phi = \Phi(v_m)/\xi.$$

Очевидно, что аналогичные выражения справедливы для удельных пороговых потоков (эквивалентных мощностей шума)

$$\Phi_n^* = \Phi_n^*(v_m)/\xi$$

и для обратных им величин

$$D^* = \xi D^*(v_m).$$

Так как ξ всегда меньше единицы, то величина D^* — удельная обнаружительная способность для немонохроматического излучения — всегда меньше $D^*(v_m)$ — удельной обнаружительной способности для монохроматического излучения.

Коэффициент ξ для случая, когда источником сигнала является абсолютно черное тело, имеющее температуру T_c , можно найти следующим образом: так как

$$k(v) = \frac{\eta(v)}{\eta_m} \frac{\nu_m}{\nu}; \quad \Phi_c(v) = h\nu \bar{N}_v,$$

то

$$\xi = \frac{\nu_m}{\eta_m} \frac{\int_0^\infty \eta(v) \bar{N}_v dv}{\int_0^\infty \nu \bar{N}_v dv}.$$

Полагая, что при $\nu \geq \nu_0$ $\eta(\nu) = \eta(\nu_m) = \eta$, а при $\nu < \nu_0$ $\eta(\nu) = 0$, и имея в виду, что

$$\bar{N}_\nu = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_c} - 1},$$

найдем

$$\xi = \nu_0 \int_0^\infty \frac{\nu^2}{e^{h\nu/(kT_c)} - 1} d\nu \bigg/ \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/(kT_c)} - 1} d\nu.$$

Обозначим $x = h\nu/(kT_c)$; тогда

$$\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/(kT_c)} - 1} d\nu = \left(\frac{kT_c}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Входящий в полученное выражение интеграл можно вычислить, пользуясь известным выражением

$$\mathcal{I}_n = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = n! \zeta(1 + n),$$

где $\zeta(1 + n)$ — табулированная функция Римана. Значения интеграла \mathcal{I}_n для разных n следующие:

n	...	2	3	4	5
\mathcal{I}_n	...	2,4041	$\frac{\pi^4}{15} = 6,4939$	24,886	122,08

Пользуясь значением $\mathcal{I}_3 = \pi^4/15$, найдем

$$\xi = \frac{15}{\pi^4} x_0 \int_{x_0}^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx,$$

где $x_0 = h\nu_0/(kT_c)$.

Если $x_0 \ll 1$ (большие температуры источника сигнала T_c , так как $T_c \gg h\nu_0/k$), то полагая $x_0 \rightarrow 0$, найдем

$$\int_{x_0}^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \rightarrow \mathcal{I}_2 = \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx 2,4,$$

т. е. $\xi \rightarrow 0,37x_0 = 0,37h\nu_0/(kT_c)$. Следовательно, при $x_0 \ll 1$ $\xi \approx 0,37x_0$.

Если $x_0 \geq 5 \div 10$, т. е. $h\nu_0 \geq (5 \div 10) kT_c$, то

$$\int_{x_0}^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx \int_{x_0}^\infty x^2 e^{-x} dx = e^{-x_0} \left(1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}\right) x_0^2$$

и, следовательно, при $x_0 \geq 5 \div 10$

$$\xi \approx \frac{15}{\pi^4} x_0^{-3} e^{-x_0} \left(1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0^2}\right).$$

Круз и др. дают в своей книге графики зависимости коэффициента ξ от температуры T_c и длинноволновой границы $\lambda_0 = 1/\nu_0$, а также величины D^* для случаев, когда $T_c = 290$ К и 500 К, а $T_\phi = 290$ К. Эти графики представлены на рис. 336 и 337.

Неожиданным является ход кривых на рис. 337 для граничных длин волн, превышающих 18 мкм. В этом диапазоне источник с температурой $T_c = 290$ К обнаруживается лучше, чем источник с температурой $T_c = 500$ К. Поскольку шум в обоих случаях одинаков (фотонный шум фона с температурой $T_\phi = 290$ К), ход кривых

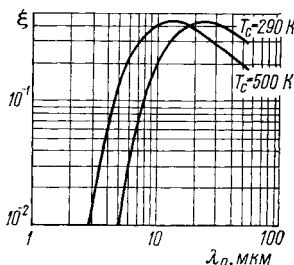


Рис. 336. Зависимость коэффициента ξ от температуры абсолютно черного тела — источника сигнала T_c и длинноволновой границы λ_0 (поле зрения $2\pi_{ср}$)

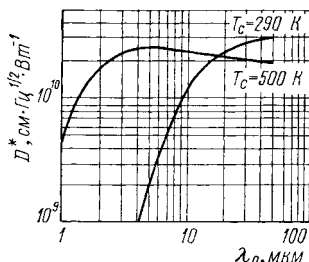


Рис. 337. Зависимость удельной обнаружительной способности идеального фотонного приемника от длинноволновой границы его спектральной чувствительности λ_0 для случая, когда источником сигнала является абсолютно черное тело с температурой T_c , а температура абсолютно черного фона равна 290 К (квантовая эффективность равна единице; поле зрения $2\pi_{ср}$)

объясняется тем, что тело с температурой 290 К испускает в диапазоне длин волн от нуля до λ_0 , когда $\lambda_0 > 18$ мкм, больше фотонов на 1 Вт полной мощности излучения, чем тело с температурой 500 К. Для длин волн $\lambda_0 < 18$ мкм наблюдается обратная зависимость.

При решении задачи обнаружения слабонагретых объектов, имеющих температуру, близкую к 290 К, на фоне фотонных шумов, приходящих от фона с температурой 290 К, на основании графиков рис. 337 следует использовать приемник с максимальным значением длинноволновой границы. Однако ослабление атмосферы в диапазоне длин волн, входящих за пределы окна прозрачности 8—14 мкм, вносит существенные поправки. Сигнал в этом случае соответствует излучению, ограниченному диапазоном 8—14 мкм. Шумы приходят от излучающего фона на всех длинах волн, меньших длинноволновой границы приемника. До 8 мкм шумы есть, но сигнал практически отсутствует, а за длиной волны 14 мкм, сигнал остается постоянным, а шумы растут. Таким образом, оптимальным для обнаружения является диапазон 8—14 мкм.

В заключение найдем отношение эквивалентных мощностей фотонного шума фотонного и теплового приемников излучения. Вводя безразмерную величину $x_0 = h\nu_0/(kT_2) = hc/(\lambda_0 kT_2)$, используя фор-

Значения отношения эквивалентных мощностей фотонного шума фотонного и теплового приемников излучения (y_0) для длины волны λ_0 , соответствующей максимуму спектральной чувствительности фотонного приемника, температуры фона $T_2 = 295$ К и $\varepsilon = \eta = 1$

λ_0 , мкм	0,5	0,7	1,0	1,2	1,5	—
y_0	$2,8 \cdot 10^{-18}$	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$8,0 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	—
λ_0	2,0	3,0	4,0	5,0	7,0	10,0
y_0	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	0,115	0,23	0,35

мулы § 18.6 для Φ_n^* , § 18.7 для $\Phi_n^*(\nu_0)$, $\Phi_n^*(\lambda_0)$ и учитывая, что $\sigma = 2\pi^5 k^4 / (15c^2 h^3)$, получим

$$y_0 = \frac{\Phi_{\text{пф}}^{*-}(x)}{\Phi_{\text{пт}}^*} = \left[\frac{15x_0^4 e^{-x_0}}{8\pi^4 \varepsilon \eta} \left(1 + \frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_2} \right) \right]^{1/2}.$$

В табл. 26 приведены значения y_0 для приемников, имеющих $\varepsilon = 1$ и $\eta = 1$, при температуре фона $T_2 = 295$ К и различных $\lambda_0 = c/\nu_0 = hc/(kT_2 x_0)$.

При вычислении приведенных значений y_0 предполагалось, что тепловой приемник представляет собой абсолютно черное тело, площадь каждой стороны которого равна A , излучательные способности каждой стороны равны соответственно $\varepsilon_1 = \varepsilon = 1$, $\varepsilon_2 = 0$. Температура теплового приемника равна температуре равномерно излучающего фона T_2 . Фотонный приемник имеет постоянную квантовую эффективность $\eta = 1$ для всех длин волн от 0 до $\lambda = \lambda_0$, а при $\lambda > \lambda_0$ его квантовая эффективность равна нулю. Шум фотонного приемника ограничен только флуктуациями падающего на него излучения окружающей среды со стороны передней полусферы (телесный угол 2π , эффективный телесный угол π стерадиан). Окружающая среда излучает как абсолютно черное тело при температуре фона T_2 .

На основании данных табл. 26 можно легко найти значение эквивалентной мощности фотонного шума фотонного приемника для различных длин волн λ_0 , так как известно (§ 18.6), что эквивалентная мощность фотонного шума теплового приемника для температуры фона 295 К равна $5,29 \cdot 10^{-11}$ Вт·см⁻¹·Гц^{-1/2}.

Например, для $\lambda_0 = 5$ мкм

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{пф}}^*(5) &= y_0(5) 5,29 \cdot 10^{-11} = 0,115 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11} = \\ &= 6,1 \cdot 10^{-12} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1/2}; \end{aligned}$$

для $\lambda_0 = 10$ мкм

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{пф}}^*(10) &= y_0(10) 5,29 \cdot 10^{-11} = 0,35 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11} = \\ &= 1,85 \cdot 10^{-11} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \Gamma_{\text{ц}}^{-1/2}.\end{aligned}$$

Соответствующие значения удельной обнаружительной способности равны:

$$D^*(5) = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ см} \cdot \Gamma_{\text{ц}}^{1/2} \cdot \text{Вт}^{-1};$$

$$D^*(10) = 5,4 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \Gamma_{\text{ц}}^{1/2} \cdot \text{Вт}^{-1}.$$

Удельную обнаружительную способность для монохроматического излучения с длиной волны $\lambda \ll \lambda_0$ для идеальных фотонных приемников излучения можно найти из соотношения

$$D^*(\lambda) = (\lambda/\lambda_0) D^*(\lambda_0).$$

Для немонохроматического излучения соответственно

$$D^* = \xi D^*(\lambda_0),$$

где коэффициент ξ можно найти по графикам на рис. 336.

В зависимости от типа фотонного приемника и его конструкции в основную формулу необходимо ввести поправки. Эти поправки сводятся к умножению величины $\Phi_{\text{пф}}^*(x_0)$ на некоторый коэффициент β , который имеет различные значения в каждом из следующих случаев.

1. Если квантовая эффективность η в диапазоне длин волн от нуля до λ_0 отличается от единицы, необходимо умножить удельный пороговый поток (эквивалентную мощность шума) на величину $\beta_1 = 1/\sqrt{\eta}$.

Квантовая эффективность хорошего серебрено-кислородно-цезиевого фотокатода в максимуме длинноволновой чувствительности, который находится в области 0,8 мкм (длинноволновая граница составляет 1,2 мкм), равна примерно 0,01 (1 %). Большей частью она не превышает 0,003—0,005 (0,3—0,5 %). Для многощелочных сурьмяноцезиевых фотокатодов в максимуме спектральной характеристики, лежащем в области 0,4 мкм (длинноволновая граница простирается до 0,87—0,9 мкм), квантовая эффективность достигает 0,3—0,4 (30—40 %). Теоретический предел квантовой эффективности у фотоэмиссионных приемников фактически равен 50 %, так как половина фотоэлектронов, получивших избыточную энергию от фотона, будет двигаться в направлении от поверхности и не сможет участвовать в фотоэмиссии.

Квантовая эффективность современных приемников излучения с внутренним фотоэффектом может приближаться к единице, поскольку в отличие от внешнего фотоэффекта все освобожденные действием фотонов фотоэлектроны могут стать носителями тока. Однако обычно значение η лежит в пределах 0,1—0,4 (10—40 %).

2. Спектральная характеристика реальных фотонных приемников не имеет резкой длинноволновой границы. Обычно существует уменьшение квантовой эффективности вблизи длины волны λ_0 и более

равномерный спад ее в сторону длинных волн. Так, например, у приемников с внутренним фотоэффектом можно считать, что спектральная чувствительность спадает по экспоненте после того, как достигается длина волны λ_0 , при которой чувствительность уменьшается вдвое. Это обстоятельство может быть учтено поправочным коэффициентом, значение которого лежит между 1 и 2. Следует умножать эквивалентную мощность шума (ЭМШ) на этот поправочный коэффициент. Например, для идеального фотонного приемника, имеющего длинноволновую границу чувствительности $\lambda_0 = 8$ мкм при $T = 295$ К, $\Phi_{\text{пф}}^*(8) = 0,3\Phi_{\text{пт}}^*$, а для фоторезистора из селенистого свинца при температуре слоя 20 К, когда длина волны, на которой чувствительность падает вдвое, $\lambda_0 = 8$ мкм, имеем при той же температуре фона 295 К, $\Phi_{\text{пф}}^*(8) = 0,58\Phi_{\text{пт}}^*$, т. е. ухудшение ЭМШ в 1,9 раза. В обоих случаях $\Phi_{\text{пт}}^* = 5,29 \cdot 10^{-11}$ Вт·см⁻¹·Гц^{-1/2}. Следовательно, равномерный спад спектральной характеристики приемника вблизи длинноволновой границы учитывается коэффициентом $\beta_2 = 1 \div 2$, точные значения которого можно вычислить пользуясь методикой, изложенной в книге Смита и др. «Обнаружение и измерение инфракрасного излучения».

3. При выводе уравнения для $\Phi_{\text{пф}}^*(x_0)$ рассматривались только фотоны, прибывающие со стороны передней полусферы. Это условие подтверждается при расчете фотонного шума для фотоэмиссионных и фотовольтаических приемников. В фотоэмиссионных приемниках с непрозрачным фотокатодом только фотоны, прибывающие на фронтальную поверхность, участвуют в образовании шумов. В фотовольтаических приемниках с диффузионным переходом фотоны, приходящие со стороны передней полусферы, достигнут перехода и примут участие в фотовозбуждении, тогда как фотоны из задней полусферы будут поглощаться прежде чем они достигнут перехода. В противоположность этому в фоторезисторах фотоны, приходящие с любого направления, будут производить свободные носители зарядов. Таким образом, для неохлаждаемых фоторезисторов величину $\Phi_{\text{пф}}^*(x_0)$ нужно умножать на $\beta_3 = \sqrt{2}$. При охлаждении этим множителем можно пренебречь.

4. В фотоэмиссионных и фотовольтаических приемниках источниками фотонных шумов являются только флуктуации излучения фона, падающего на приемник. Однако в фоторезисторах большую роль играют изменения концентрации носителей при облучении, которые подвергаются как спонтанному, так и вынужденному фотовозбуждению и рекомбинации. При равновесии процессов фотовозбуждения и рекомбинации суммарная мощность фотонных и генерационно-рекомбинационных шумов может достигать не менее удвоенного значения мощности одних фотонных шумов. Следовательно, для фоторезисторов величину $\Phi_{\text{пф}}^*(x_0)$ нужно умножить на $\beta_4 = \sqrt{2}$.

5. При наблюдении монохроматического источника можно уменьшить величину $\Phi_{\text{пф}}^*(x_0)$ за счет использования узкополосного оптического фильтра, пропускающего поток только вблизи длины волны

излучения источника. Конечно, фильтр должен быть охлажден, чтобы его излучение в области непрозрачности не создало дополнительного шума. Выигрыш $\beta_s < 1$ за счет применения охлаждаемого фильтра может достигать нескольких порядков.

Определенное улучшение может быть получено и при наблюдении серого или черного источника. В этом случае охлаждаемый фильтр позволяет эффективно сузить пределы спектральной характеристики приемника и ограничить воздействие на приемник флуктуаций излучения окружающего фона.

6. Уровень фотонного шума можно снизить, ограничивая поле зрения фотоприемника путем помещения его фоточувствительного элемента в охлаждаемую полость с отверстием, через которое воспринимается излучение объекта наблюдения.

Эффективное поле зрения фотоприемника (ГОСТ 19852—74, термин 39) определяется телесным углом

$$\Omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{S_{\theta=0}} \int_{\theta=0}^{\theta} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} S(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi,$$

где S — чувствительность фотоприемника; θ — угол между направлением падающего излучения и нормалью к фоточувствительному элементу; φ — азимутальный угол.

Следовательно, для $S(\theta, \varphi) = S_{\theta=0}$ можно найти

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{эфф}} &= \int_0^{\theta} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \\ &= \left(-\frac{\cos 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1 - \cos 2\theta}{4} 2\pi = \pi \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Так как эффективное *полусферическое* поле зрения фотоприемника ($\theta = \pi/2$) равно π , то для приемника, поле зрения которого ограничено круглым отверстием в холодном экране, имеющем угловой размер $2\theta_s$, значение удельного порогового потока фотонного приемника $\Phi_{\text{пф}}^*(x_0)$ может быть уменьшено путем умножения его на коэффициент

$$\beta_s = \sqrt{\Omega_{\text{эфф}}/\pi} = \sqrt{\pi \sin^2 \theta_s/\pi} = \sin \theta_s,$$

очевидно, что $\beta_s < 1$.

Минимальное поле зрения приемника $\Omega_{\text{эфф. min}}$ определяется относительным отверстием объектива, собирающего излучение объекта наблюдения на приемник $\ddot{O} = D/f'$, где D — диаметр входного зрачка; f' — заднее фокусное расстояние объектива. В этом случае $\sin \theta = D/2f' = \ddot{O}/2$, т. е.

$$\Omega_{\text{эфф. min}} = \pi (\ddot{O}/2)^2.$$

Введем в рассмотрение *коэффициент эффективности экранирования* приемника охлаждаемой диафрагмой

$$\eta_{\text{эфф}} = \Omega_{\text{эфф. min}}/\Omega_{\text{эфф}},$$

и запишем выражение для плотности падающего на приемник со стороны передней полусферы потока фотонов в диапазоне длин волн от 0 до λ_Φ в виде

$$N_\Phi = \frac{\Omega_{\text{эфф}}}{\pi} \int_0^{\lambda_\Phi} \bar{N}_\lambda(T_\Phi) d\lambda,$$

где $\bar{N}_\lambda(T_\Phi)$ — спектральная плотность потока фотонов от фона, имеющего температуру T_Φ , определяемая законом Планка в единицах фотон/(с·см²·Гц^{1/2}), т. е.

$$\bar{N}_\lambda(T_\Phi) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{1}{e^{hc/(\lambda k T_\Phi)} - 1} = \frac{c_3}{\lambda^4 (e^{c_2/(\lambda T_\Phi)} - 1)},$$

где $c_2 = 1,4388 \cdot 10^4$ мкм·К, $c_3 = 1,8837 \cdot 10^{23}$ мкм³·с⁻¹·см⁻², λ — длина волны, мкм.

Так как $\Omega_{\text{эфф}} = \Omega_{\text{эфф, min}}/\eta_{\text{эфф}}$, то $N_\Phi = \frac{(\ddot{O}/2)^2}{\eta_{\text{эфф}}} \int_0^{\lambda_0} \bar{N}_\lambda(T_\Phi) d\lambda$.

Учитывая эти соотношения, запишем выражение для порогового потока (эквивалентной мощности шума) фотонного приемника в виде

$$\Phi_{\text{пф}}^*(\lambda_0) = \frac{\sqrt{2}hc}{\lambda_0} \left[\frac{N_\Phi}{\eta} \right]^{1/2},$$

где

$$N_\Phi = \frac{\Omega_{\text{эфф}}}{\pi} \int_0^{\lambda_0} \bar{N}_\lambda(T_\Phi) d\lambda; \quad \Omega_{\text{эфф}} = \frac{\Omega_{\text{эфф, min}}}{\eta_{\text{эфф}}} = \frac{\pi (\ddot{O}/2)^2}{\eta_{\text{эфф}}}.$$

Так как удельная обнаружительная способность фотоприемника $D^*(\lambda) = 1/\Phi_{\text{п}}^*(\lambda)$, а для идеального фотонного приемника

$$D_\Phi^*(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_0} D_\Phi^*(\lambda_0) = \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{1}{\Phi_{\text{п}}^*(\lambda_0)},$$

то можно найти

$$D_\Phi^*(\lambda) = 2D_\Phi^{**}(\lambda) \sqrt{\eta_{\text{эфф}}/\ddot{O}},$$

где

$$D_\Phi^{**}(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}hc} \frac{1}{\left[\int_0^{\lambda_0} \bar{N}_\lambda(T_\Phi) d\lambda \right]^{1/2}},$$

т. е. $D_\Phi^{**}(\lambda)$ — удельная обнаружительная способность фотонного приемника, имеющего квантовую эффективность $\eta = 1$ и полусферическое поле зрения $\Omega_{\text{эфф}} = \pi$; $\ddot{O} = D/f'$;

$$\eta_{\text{эфф}} = \Omega_{\text{эфф, min}}/\Omega_{\text{эфф}} = \left(\frac{D}{2f' \sin \theta} \right)^2.$$

Для идеального фоторезистора за счет суммирования фотонного и генерационно-рекомбинационного шумов

$$D_{\Phi, p}^{**}(\lambda) = \sqrt{2} D_{\Phi}^{**}(\lambda)$$

При использовании охлаждаемого фильтра в пределах телесного угла $\Omega_{\text{эфф}}$ спектральный коэффициент пропускания оптической системы $\tau_0(\lambda)$ обычно представляется в виде двух частей, характеризующих неохлаждаемую и охлаждаемую части оптики, т. е.

$$\tau_0(\lambda) = \tau_{0, \text{неохл}}(\lambda) \tau_{0, \text{охл}}(\lambda).$$

В этом случае плотность падающих на приемник фотонов определяется интегралом

$$\int_0^{\lambda_{\text{max}}} \tau_{0, \text{охл}}(\lambda) \bar{N}_{\lambda}(T_{\Phi}) d\lambda,$$

который и следует использовать при вычислении $D_{\Phi}^{**}(\lambda)$.

§ 18.8. ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ШУМ

Температурный шум наблюдается только в тепловых приемниках. Его причина — флуктуации температуры приемника, возникающие вследствие статистической природы теплового обмена с окружающей средой. Тепловой обмен может осуществляться главным образом путем излучения и теплопроводности. Если обмен за счет теплопроводности незначителен по сравнению с обменом путем излучения, температурные шумы идентифицируются с фотонными, т. е. избыточного температурного шума не существует. Следовательно, если приемник имеет температуру T при площади поверхности A и излучательной способности $\epsilon = 1$, то за счет теплообмена путем излучения со средой, имеющей температуру T_2 и окружающей приемник со стороны передней полусферы, дисперсия флуктуаций в полосе частот электронного тракта $\Delta f_{\text{ш}}$ равна

$$\overline{\Delta \Phi^2} = 8k\sigma A (T_1^5 + T_2^5) \Delta f_{\text{ш}}.$$

Со стороны задней полусферы чувствительный слой приемник излучения имеет непосредственный контакт с термостатом. Если теплопроводность между приемником и термостатом обозначить через \mathcal{G} (Вт·К⁻¹), а температуру термостата через T_3 , то поток тепла, идущего от термостата к приемнику при условии, что разность температур $\Delta T = T_3 - T_1$ невелика, равен

$$\Delta \Phi = \mathcal{G} \Delta T = \Delta T / \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R} = 1/\mathcal{G}$ — тепловое сопротивление между слоем и термостатом.

Очевидно, что если бы обмен теплом происходил только за счет излучения, то при $T_3 \approx T_1$

$$\mathcal{G} = 1/\mathcal{R} = 4\sigma AT_1^3.$$

Дисперсия флуктуаций потока тепла $\overline{\Delta\Phi^2}$ следовательно, будет

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \overline{\Delta T^2} / \mathcal{R}^2.$$

Теперь нам необходимо найти дисперсии флуктуаций потока тепла и температуры, отнесенные к единичной полосе частот, т. е. спектральные плотности флуктуаций, которые обозначим для удобства в виде $\overline{\Delta\Phi_f^2}$ и $\overline{\Delta T_f^2}$, причем очевидно, что

$$\overline{\Delta\Phi_f^2} = \overline{\Delta T_f^2} / \mathcal{R}^2,$$

поскольку тепловое сопротивление \mathcal{R} от частоты не зависит.

В соответствии с формулой Эйнштейна — Фаулера средний квадрат отклонения $\overline{\Delta E^2}$ средней энергии \bar{E} приемника равен

$$\overline{\Delta E^2} = kT_1^2 (\overline{\Delta E} / \Delta T).$$

но

$$\Delta E = \mathcal{C} \Delta T,$$

где \mathcal{C} — теплоемкость приемника, следовательно, $\overline{\Delta E^2} = kT_1^2 \mathcal{C}$. Поскольку непосредственно из формулы $\Delta E = \mathcal{C} \Delta T$ следует, что $\overline{\Delta E^2} = \mathcal{C}^2 \overline{\Delta T^2}$, то

$$\overline{\Delta T^2} = kT_1^2 / \mathcal{C}.$$

Для облегчения дальнейшего расчета спектральной плотности $\overline{\Delta T_f^2}$ используем аналогию между тепловыми и электрическими явлениями.

Нам известно, что в том случае, когда спектральная плотность флуктуаций электродвижущей силы равна $4kTR$, дисперсия флуктуаций напряжения на емкости C , соединенной с источником флуктуаций через сопротивление R , равна

$$\overline{\Delta u^2} = 4kTR [1/(4\tau)],$$

причем $1/(4\tau)$ представляет собой шумовую полосу пропускания аperiodического звена с постоянной времени $\tau = RC$, следовательно,

$$\overline{\Delta u^2} = kT/C.$$

Решим обратную задачу. Если дисперсия флуктуаций $\overline{\Delta T^2}$ температуры приемника, имеющего теплоемкость \mathcal{C} , определяется некоторым источником флуктуаций со спектральной плотностью $\overline{\Delta T_f^2}$ соединенным с приемником через тепловое сопротивление \mathcal{R} , то

$$\overline{\Delta T^2} = \overline{\Delta T_f^2} [1/(4\tau)],$$

где в данном случае $\tau = \mathcal{R}\mathcal{C}$, следовательно,

$$\overline{\Delta T_f^2} = 4\tau \overline{\Delta T^2} = 4\mathcal{R}\mathcal{C} \overline{\Delta T^2}.$$

Так как $\overline{\Delta T^2} = kT_1^2 / \mathcal{C}$, то $\overline{\Delta T_f^2} = 4kT_1^2 \mathcal{R}$.

Заметим, что тепловая флуктуация имеет множителем T^2 , в то время как электрическая флуктуация имеет множителем просто T .

Это обстоятельство можно объяснить следующим образом. На основании общих статистических соображений используемая для получения работы энергия флуктуаций пропорциональна kT — энергии, приходящейся на одну степень свободы. В случае электрических флуктуаций вся энергия флуктуаций $C\overline{\Delta u^2}$ пригодна для работы, т. е.

$$C\overline{\Delta u^2} \sim kT.$$

В то же время из термодинамики известно, что если разность температур между телами равна ΔT , то для получения работы используется только величина $\Delta T/T$, являющаяся коэффициентом полезного действия обратимого процесса. Следовательно, для тепловых флуктуаций имеем

$$(\Delta T/T) C \Delta T \sim kT,$$

т. е.

$$\overline{\Delta T^2} \sim kT^2/C,$$

а это и следует из формулы Эйнштейна—Фаулера. Следовательно,

$$\overline{\Delta \Phi_i^2} = \overline{\Delta T_i^2} / \mathcal{R}^2 = 4kT_1^2 / \mathcal{R} = 4kT_1^2 \mathcal{G},$$

или в полосе частот электронного тракта $\Delta f_{\text{ш}}$

$$\overline{\Delta \Phi^2} = 4kT_1^2 \mathcal{G} \Delta f_{\text{ш}}.$$

Учитывая это выражение, найдем общую дисперсию флуктуаций для теплового приемника, испытывающего со стороны передней полусферы флуктуации потока излучения, испускаемого окружающей средой с температурой T_2 , а со стороны задней полусферы — флуктуации теплообмена с термостатом, имеющим температуру $T_3 \approx T_1$. Очевидно, что для полосы частот $\Delta f_{\text{ш}}$ общая дисперсия равна

$$\overline{\Delta \Phi^2} = 8k\sigma A (T_1^5 + T_2^5) \Delta f_{\text{ш}} + 4kT_1^2 \mathcal{G} \Delta f_{\text{ш}}.$$

Если приемник не охлаждается, т. е. термостат отсутствует, то $T_1 = T_2 = T$, $\mathcal{G} = 0$ и

$$\overline{\Delta \Phi^2} = 16k\sigma A T^5 \Delta f_{\text{ш}}.$$

Если для уменьшения влияния окружающего фона приемник, охлаждаемый термостатом до температуры T_1 , защищен диафрагмой, имеющей температуру T_1 и ограничивающей поле зрения приемника до малого телесного угла $\Omega_{\text{эфф}}$, то

$$\frac{\overline{\Delta \Phi^2}}{\Delta f_{\text{ш}}} = 8k\sigma A \left[\left(2 - \frac{\Omega_{\text{эфф}}}{\pi} \right) T_1^5 + \frac{\Omega_{\text{эфф}}}{\pi} T_2^5 \right] + 4kT_1^2 \mathcal{G}.$$

Обычно

$$(2 - \Omega_{\text{эфф}}/\pi) T_1^5 \ll (\Omega_{\text{эфф}}/\pi) T_2^5,$$

так как мощность, излучаемая охлаждаемым приемником, мала по сравнению с мощностью $A\sigma T_2^4 \Omega_{\text{эфф}}/\pi$, получаемой им от фона.

В этих условиях температура приемника определяется балансом теплообмена между системами фон—приемник, с одной стороны, и приемник—термостат, с другой стороны, т. е.

$$A\sigma T_2^4 (\Omega_{эфф}/\pi) = \mathcal{G} \Delta T = \mathcal{G} (T_1 - T_3).$$

Следовательно,

$$\mathcal{G} = \frac{A\sigma T_2^4}{\Delta T} \frac{\Omega_{эфф}}{\pi},$$

и

$$\overline{\Delta\Phi^2} = 8k\sigma A T_2^5 \frac{\Omega_{эфф}}{\pi} \left[1 + \frac{T_1^2}{2T_2(T_1 - T_3)} \right] \Delta f_{ш}.$$

Удельный пороговый поток или эквивалентная мощность шума фотоприемника

$$\Phi_{п}^* = \sqrt{\frac{\overline{\Delta\Phi^2}}{A \Delta f_{ш}}} = \left[8k\sigma T_2^5 \frac{\Omega_{эфф}}{\pi} \left(1 + \frac{T_1^2}{2T_2 \Delta T} \right) \right]^{1/2}.$$

Избыточный температурный шум вносит составляющую

$$\Phi_{п}^{*''} = \left[8k\sigma T_2^5 \frac{\Omega_{эфф}}{\pi} \frac{T_1^2}{2T_2 \Delta T} \right]^{1/2} = 2T_2^2 T_1 \sqrt{\frac{k\sigma}{\Delta T} \frac{\Omega_{эфф}}{\pi}},$$

тогда как составляющая, определяемая флуктуациями потока излучения

$$\Phi_{п}^{*'} = \left[8k\sigma T_2^5 \frac{\Omega_{эфф}}{\pi} \right]^{1/2}.$$

Коэффициент шума

$$F = 1 + \Phi_{п}^{*''}/\Phi_{п}^{*'} = 1 + \sqrt{T_1^2/(2T_2 \Delta T)}.$$

Если $T_1 = 77$ К, $T_2 = 295$ К, $\Delta T = 2^\circ$, то $F = 1 + 2,24 = 3,24$.

§ 18.9. МИКРОФОННЫЙ ШУМ

Микрофонный шум является следствием механических воздействий на приемник излучения и усилитель, приводящих к вибрациям электродов, монтажных проводов и корпуса (подложки) приемника излучения. Эти вибрации в свою очередь вызывают изменения межэлектродных и монтажных емкостей, а также сопротивления полупроводника, если последний используется в качестве приемника излучения. Микрофонный шум состоит из ряда резонансных выбросов, спектр которых лежит в диапазоне частот 100—7000 Гц. Для уменьшения микрофонного эффекта следует применять специальные вибростойкие лампы и транзисторы, вводить в конструкцию амортизацию предусилителя, использовать заливку монтажа расплавленной смолой, увеличивать жесткость крепления чувствительного элемента приемника излучения в корпусе и на подложке и т. д.

Проблема уничтожения или ослабления микрофонного шума является весьма важной, требующей пристального внимания разработчика аппаратуры.

Прежде чем приступить к вычислению дисперсии общего шума на выходе усилителя и решению вопроса о необходимых мероприятиях, обеспечивающих оптимальное согласование шумов различных элементов тракта оптико-электронного прибора, необходимо внимательно рассмотреть условия работы прибора и определить виды шумов, которые необходимо учитывать при анализе и расчете.

Одним из важных обстоятельств при этом рассмотрении является распределение спектральной плотности шума по частотам, так как в различных областях спектра электрических сигналов определя-

ющими являются шумы различной природы. Например, для фоторезисторов на самых низких частотах (150—200 Гц) преобладает токовый шум со спектром $1/f$, на промежуточных частотах основным является генерационно - рекомбинационный (Г—Р) шум, а на сравнительно высоких частотах спектральная плотность шума определяется шумом Джонсона. Соответствующая зависимость представлена на рис. 338. Для разных типов приемников излучения и при разных температурах чувствительного слоя имеет значение та

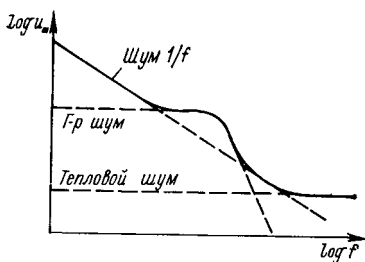


Рис. 338. Распределение шумов по спектру электрического сигнала

или иная часть этой общей зависимости. Благодаря наличию всякого рода избыточных шумов эквивалентная мощность шума фотоприемников превышает эквивалентную мощность фотонного шума. Для глубокоохлаждаемых фоторезисторов из примесного германия это превышение на частотах выше 150 Гц незначительно. Для фоторезисторов на основе халькогенидов свинца (PbS , $PbSe$, $PbTe$) при охлаждении превышение составляет 4—5 раз, а при отсутствии охлаждения (PbS) увеличивается до 15—25 раз. Близкие значения коэффициента превышения имеют фоторезисторы из антимонида индия, а эквивалентная мощность шума фотовольтаических приемников на основе $InSb$ приближается к теоретическому пределу.

Некоторые типы тепловых приемников излучения имеют характеристики, близкие к пределу чувствительности, определяемому фотонным шумом, большей частью при очень глубоком охлаждении (3—4 К). К этим приемникам относятся, в частности, германиевые болометры при температуре жидкого гелия.

Для термоэлемента преобладающим шумом является шум Джонсона его омического сопротивления и флуктуации напряжения, вызванные температурным шумом.

Болометр, кроме этих шумов, генерирует токовый шум, характерный для полупроводников, но появляющийся также и в том случае, когда ток проходит через очень тонкую металлическую проволоку или пленку.

Для фотоэмиссионных приемников основным шумом является дробовой шум фототока, который существенно больше фотонного шума, если катод не охлаждается. Предел чувствительности определяется, таким образом, дробовым шумом темнового тока. Темновой ток полностью обусловлен термоэлектронной эмиссией. При охлаждении жидким воздухом темновой ток серебряно-кислородно-цезиевого фотокатода может уменьшиться до величины $5 \cdot 10^{-17}$ А. Дробовой шум этого тока лишь несколько больше фотонного шума излучения окружающей среды, находящейся при комнатной температуре. Однако для устранения шума Джонсона в этом случае требуется сопротивление нагрузки, превышающее 10^{15} Ом, что практически невыполнимо. Джонсоновский шум сопротивления $2,5 \times 10^{13}$ Ом примерно на порядок превышает дробовой шум темнового тока. Эта проблема решается в фотоумножителе, коэффициент умножения у которого достигает 10^4 — 10^6 .

Процесс умножения вносит дополнительные шумы, однако превышение шума фотоумножителя над дробовым составляет примерно 15 %, т. е. этим превышением можно пренебречь. При охлаждении до 195 К (-78° С) было достигнуто значение темнового тока с фотокатода ФЭУ порядка 10^{-19} А.

Решение вопроса об оптимальном сочетании шумов приемника излучения с усилителем и входной цепью требует вычисления дисперсии шума в одной и той же точке схемы, например на выходе усилителя. Выше уже рассматривались методы вычисления дисперсии различных шумов, генерируемых приемником излучения, входной цепью и самим усилителем на выходе.

В дополнение к этому следует обратить внимание на расчет дисперсии фотонного шума.

Если известна мощность монохроматического источника излучения, эквивалентная мощность фотонного шума, причем длина волны, на которой задана эта мощность, соответствует максимуму спектральной чувствительности приемника $S(\lambda_{\max}) = S_{\max}$, то дисперсия напряжения фотонного шума на выходе усилителя

$$\overline{u_{\text{ш. ф}}^2} = S_{\max}^2 K_0^2 \Phi^2(\lambda_{\max}) = S_{\max}^2 K_0^2 [\Phi_{\text{п}}^*(x_0)]^2 A \Delta f_{\text{ш}},$$

где S_{\max} — максимальное значение спектральной чувствительности приемника излучения, В·Вт $^{-1}$; K_0 — максимальное значение коэффициента усиления усилителя и входной цепи; A — площадь приемника излучения, см 2 ; $\Delta f_{\text{ш}}$ — шумовая полоса пропускания усилителя и входной цепи, Гц; $\Phi_{\text{п}}^*(x_0) = \beta \Phi_{\text{пф}}^*(x_0)$; $x_0 = hc \cdot 10^4 / (kT\lambda_{\max})$; $x_0 \approx 48/\lambda_{\max}$ для $T = 295$ К; λ_{\max} — длина волны, соответствующая максимуму чувствительности, мкм; $\beta > 1$ — коэффициент, учитывающий увеличение эквивалентной мощности шума для реальных условий работы приемника относительно мощности шума идеального фотонного приемника;

$$\Phi_{\text{пф}}^*(x_0) = [(15x_0^4 e^{-x_0} / 8\pi^4) (1 + 2/x_0 + 2/x_0^2)]^{1/2} \Phi_{\text{пт}}^*,$$

$$\Phi_{\text{пт}}^* = \sqrt{16k\sigma T^5}; \quad \Phi_{\text{пт}}^* \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1/2}$$

для $T = 295$ К.

Если в случае фотоэмиссионного приемника значение чувствительности S'_{\max} задано в А/Вт, то

$$S_{\max} = r_n S'_{\max},$$

где r_n — сопротивление нагрузки, Ом.

Если задано интегральное значение чувствительности S в А/лм, то

$$S_{\max} = S \frac{683 \xi_{\text{гл}}}{\xi_{\text{пр}}} r_n,$$

где $\xi_{\text{гл}}$ и $\xi_{\text{пр}}$ — коэффициенты использования излучения эталонного источника глазом и данным приемником излучения соответственно. Причем

$$\xi = \int_0^\infty \varphi(\lambda) k(\lambda) d\lambda \bigg/ \int_0^\infty \varphi(\lambda) d\lambda,$$

где $\varphi(\lambda)$ — относительное спектральное распределение излучения источника; $k(\lambda)$ — относительная спектральная чувствительность приемника [для глаза $k(\lambda) = v(\lambda)$ — световая эффективность излучения для стандартного наблюдателя МКО].

В последующих параграфах приведены дополнительные разъяснения некоторых вопросов, вызывающих часто неверные суждения.

§ 18.11. ПОДАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ШУМА ВХОДНОЙ ЦЕПИ. ШУМ ПРИ КОРРЕКЦИИ ИНЕРЦИОННОСТИ

Уже отмечалось, что формула для дисперсии теплового или джонсоновского шума, действующего на входе усилителя

$$\overline{u_{\text{ш. т. вх}}^2} = k T_{\text{ш}} / C_{\text{вх}},$$

не может служить основанием для рекомендаций методов его подавления, так как при $C_{\text{вх}} \rightarrow \infty$ уменьшается не только шум, но и сигнал.

Совершенно иной подход к подавлению теплового шума имеет место при рассмотрении совместного действия дробового шума фотоэмиссионного приемника — источника сигнала и теплового шума входной цепи. Действительно, в этом случае суммарная дисперсия шума на выходе усилителя равна

$$\overline{u_{\text{ш}}^2} = \overline{u_{\text{ш. др}}^2} + \overline{u_{\text{ш. т.}}^2} = 4k T_{\text{ш. экв}} R_{\text{вх}} K_0^2 \Delta f_{\text{ш}},$$

т. е. совместное действие дробового и теплового шума заменено действием теплового шума сопротивления $R_{\text{вх}}$, находящегося при температуре $T_{\text{ш. экв}}$.

Так как

$$T_{\text{ш. экв}} = T_0 (20 i_0 r_n + T_{\text{ш}} / T_0),$$

причем вклад дробового шума определяется членом $20 i_0 r_n$, а вклад теплового шума — членом $T_{\text{ш}} / T_0$, то, увеличивая сопротивление нагрузки r_n , можно добиться существенного превышения доли дробового шума — шума источника сигнала, т. е. добиться эффекта подавления теплового шума. При этом нужно обратить внимание на

то, что общая частотная характеристика входной цепи и усилителя должна остаться неизменной, так как

$$\Delta f_{ш} = \int_0^{\infty} k_{вх}^2(f) k_{yc}^2(f) df = \text{const.}$$

Между тем, коэффициент передачи входной цепи (по мощности)

$$k_{вх}^2(f) = \frac{1}{1 + [2\pi f \tau_{вх} - 1/(2\pi f \tau_{св})]^2}$$

в высокочастотной области спектра электрических сигналов, когда $2\pi f \tau_{вх} \gg 1/(2\pi f \tau_{св})$, равен

$$k_{вх}^2(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f \tau_{вх})^2} = \frac{1}{1 + \left(2\pi f \frac{r_{н'вх}}{r_{н} + r_{вх}} C_{вх}\right)^2},$$

а если $r_{вх} \gg r_{н}$, то

$$k_{вх}^2(f) = 1/[1 + (2\pi f r_{н} C_{вх})^2],$$

т. е. увеличение $r_{н}$ приводит к уменьшению сигнала на входе усилителя в области высоких частот.

Для компенсации этого уменьшения, т. е. соблюдения условия $\Delta f_{ш} = \text{const}$, в усилитель должна быть введена соответствующая цепь коррекции, например дифференцирующее звено с коэффициентом передачи

$$K_{диф}^2(f) = \frac{1 + (2\pi f \tau_{вх})^2}{1 + (2\pi f \tau_{вх}/a)^2} \frac{1}{a^2}.$$

Такое звено было рассмотрено в § 10.2. Его совместное действие с входной цепью дает новое значение коэффициента передачи

$$K_{вх. диф}^2(f) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + (2\pi f \tau_{вх}/a)^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + [2\pi f (r_{н}/a) C_{вх}]^2}.$$

Следовательно, если увеличить сопротивление нагрузки в a раз, т. е. выбрать $r_{н'} = ar_{н}$, то

$$K_{вх. диф}^2(f) = k_{вх}^2(f) (1/a^2).$$

Постоянный множитель a^2 всегда может быть скомпенсирован соответствующим увеличением коэффициента усиления. Условие подавления теплового шума оказывается выполненным, так как при $\Delta f_{ш} = \text{const}$

$$T_{ш. экв} = T_0 (20i_0 r_{н} a + T_{ш}/T_0) = 20i_0 r_{н} a T_0,$$

поскольку всегда можно выбрать коэффициент a из соотношения

$$20i_0 r_{н} a \gg T_{ш}/T_0.$$

Необходимо иметь в виду, что наличие корректирующего звена в усилителе приводит к относительному увеличению влияния шумов тех элементов схемы, которые включены за входной цепью, например шумов предусилителя.

Действительно, в простейшем случае дисперсия шума на выходе усилителя, определяемая шумом первого каскада, имеет вид

$$\overline{u_{ш. у.с}^2} = 4kT_0 R_{э.кв. а} K_0^2 \Delta f_{ш},$$

где $R_{э.кв. а}$ — эквивалентное шумовое сопротивление,

$$\Delta f_{ш} = \int_0^{\infty} k_{ус}^2(f) df.$$

Если усилитель имеет прямоугольную частотную характеристику с коэффициентом усиления, равным K_0 в диапазоне частот от f_1 до f_2 и равным нулю вне этого диапазона, то при отсутствии корректирующего звена

$$\Delta f_{ш. у.с} = \Delta f = f_2 - f_1.$$

В случае коррекции найдем:

$$\overline{u_{ш. у.с. к}^2} = 4kT_0 R_{э.кв. а} (K_0/a)^2 \Delta f_{ш. у.с. к};$$

$$\Delta f_{ш. у.с. к} = \int_{f_1}^{f_2} \frac{1 + (2\pi f \tau_{вх})^2}{1 + (2\pi f \tau_{вх}/a)^2} df.$$

Вычисление этого интеграла осуществляется по формуле

$$\int \frac{1+x^2}{a^2+x^2} dx = x - \frac{a^2-1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$$

что дает

$$\Delta f_{ш. у.с. к} = a^2 \Delta f - \frac{a^2-1}{2\pi \tau_{вх}/a} \operatorname{arctg} \frac{(2\pi \tau_{вх}/a) \Delta f}{1 + (2\pi \tau_{вх}/a)^2 f_1 f_2}.$$

Если предположить, что $a^2 \gg 1$, $f_2 = 1/(2\pi \tau_{вх}/a)$, $f_1 \ll f_2$, то найдем

$$\Delta f_{ш. у.с. к} = \Delta f a^2 (1 - \pi/4) = 0,2 a^2 \Delta f.$$

Следовательно,

$$\Delta f_{ш. у.с. к} / \Delta f_{ш} = 0,2 a^2,$$

если $a = 10$, то $\Delta f_{ш. у.с. к} / \Delta f_{ш} = 20$, т. е. дисперсия шума на выходе усилителя, связанная с шумом первого каскада, возрастает при коррекции в 20 раз.

В некоторых случаях это вполне допустимо, так как речь идет о возрастании дисперсии шума за счет высокочастотной части спектра. Например, для телевидения видность помех на экране существенным образом зависит от их спектрального состава: высокочастотные компоненты в силу падения контрастной чувствительности глаза на мелких деталях и по другим причинам менее заметны, чем низкочастотные. Видность шумовой помехи на экране убывает с возрастанием частоты по экспоненте. Тем не менее, даже в этом случае приходится переносить цепь коррекции непосредственно на вход усилителя, т. е. использовать так называемую сложную противошумовую коррекцию, предложенную Г. В. Брауде.

Итак, с вопросом подавления теплового шума дело обстоит куда более сложно, чем это иногда пытаются представить. Например, относительно подавления теплового шума можно встретить следующие рассуждения. Как известно, дисперсия теплового шума на выходе усилителя равна

$$\overline{u_{ш. т. вых}^2} = \frac{4kT_{ш} R_{вх} K_0^2}{2\pi\tau_{вх}} \arctg \frac{2\pi\tau_{вх} (f_2 - f_1)}{1 + (2\pi\tau_{вх})^2 f_1 f_2},$$

следовательно, можно найти

$$\overline{u_{ш. т. вых}^2} = \frac{4kT_{ш} K_0}{2\pi C_{вх}} \arctg \frac{2\pi C_{вх} (f_2 - f_1)}{1/R_{вх} + R_{вх} (2\pi C_{вх})^2 f_1 f_2}.$$

Если $R_{вх} \rightarrow \infty$, то $\overline{u_{ш. т. вых}^2} \rightarrow 0$, т. е. осуществляется подавление теплового шума.

Однако в данном случае суть подавления совершенно иная. Оно осуществляется при неизменной частотной характеристике усилителя за счет сужения полосы пропускания входной цепи, равной $1/(4\tau_{вх}) = 1/(4C_{вх} R_{вх})$. В этом случае, когда $R_{вх} \rightarrow \infty$, сигнал любой частоты, отличной от нуля, равен нулю.

§ 18.12. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИЕМНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ И ЕГО НАГРУЗКИ

Этот вопрос имеет непосредственное отношение к сочетанию фоторезистора с усилителем. При расчете амплитуды гармонического сигнала на выходе усилителя в схеме с фоторезистором было найдено, что максимальная амплитуда сигнала может быть достигнута, если сопротивление нагрузки равно сопротивлению приемника $r_n = r$ при условии, что входное сопротивление усилителя $r_{вх} \gg r$. Если это условие не выполняется, то в общем случае

$$\kappa_{opt} = \sqrt{\xi + 1},$$

где $\xi = r_{вх}/r$, а $r_{н. opt} = \kappa_{opt} r$.

В эти выводы должны быть внесены определенные поправки, учитывающие, что важно не большое абсолютное значение амплитуды сигнала, а высокое отношение сигнала к шуму.

Если усилитель идеальный, т. е. его шумом можно пренебречь по сравнению с шумами приемника излучения и входной цепи, то основной задачей сочетания приемника с усилителем является оценка роли теплового шума входной цепи и определения условий, когда эти шумы заметно не увеличивают шума источника сигнала — фоторезистора и его нагрузки.

Для выполнения необходимого расчета введем следующие допущения. Во-первых, предположим, что выбор оптимальных условий сочетания приемника с усилителем проводится в области средних частот электрического сигнала, когда влияние емкостей $C_{св}$ и $C_{вх}$ можно не учитывать. Во-вторых, будем считать, что приемник излучения и его нагрузка характеризуются шумами Джонсона, так как эти шумы определяют предельную чувствительность системы и,

следовательно, их учет предъявляет наиболее жесткие условия сочетания. Шумовая схема для этого случая представлена на рис. 339, а.

Дисперсия шума источника сигнала на выходе усилителя определяется шумом генератора $\Gamma_{ш1}$ и равна

$$\overline{u_{ш.с}^2} = 4kT_i r_i [r_{вх}^2 / (r_i + r_{вх})^2] \Delta f_{ш.у} K_0^2.$$

Дисперсия дополнительного шума, определяемого генератором $\Gamma_{ш2}$,

$$\overline{u_{ш.доп}^2} = 4kT_{вх} r_{вх} [r_i^2 / (r_i + r_{вх})^2] \Delta f_{ш.у} K_0^2.$$

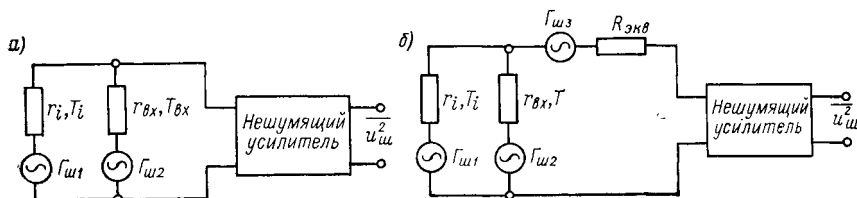


Рис. 339. К расчету согласования приемника излучения с усилителем: а — идеальный шумящий усилитель; б — шум усилителя представлен генератором шума $\Gamma_{ш3}$ и сопротивлением $R_{экв}$

Коэффициент шума

$$F = 1 + \overline{u_{ш.доп}^2} / \overline{u_{ш.с}^2} = 1 + T_{вх} r_i / (T_i r_{вх}),$$

если $T = T_{вх} = T_0$, то

$$F = 1 + r_i / r_{вх}.$$

Для уменьшения коэффициента шума необходимо, чтобы входное сопротивление усилителя было максимальным, т. е.

$$r_{вх} \gg r_i,$$

где $r_i = r_n / (r + r_n)$.

При согласовании шумов, когда $r_{вх} = r_i$, коэффициент шума $F = 2$. Путем рассогласования, когда $r_{вх} > r_i$, коэффициент шума можно уменьшить, однако даже в совершенно шумящих усилителях он больше единицы, если величиной r_i нельзя пренебречь по сравнению с $r_{вх}$.

Если с шумами усилителя приходится считаться, расчет усложняется. Предположим, что шум усилителя можно представить в виде эквивалентного сопротивления $R_{экв}$, которое выбрано таким образом, чтобы генерируемый им шум Джонсона был равен шуму дробового эффекта, наблюдаемому на выходе первого каскада. Это сопротивление учитывает в основном дробовой шум анодного тока лампы, так как предполагается, что дробовой шум сеточного тока, тепловой шум нагрузки, фликкер-эффект, микрофонный шум и т. д. доведены до возможного минимума, существенно не увеличивающего составляющую дробового шума анодного тока. Для предусилителей на транзисторах джонсоновский шум сопротивления $R_{экв}$ также может

быть аналогом сложной физической картины шумов транзистора, только величина $R_{\text{эКВ}}$ должна выбираться исходя из иных соображений, чем для лампы.

Эквивалентная шумовая схема для шумящего усилителя может быть, следовательно, представлена в виде, показанном на рис. 339, б. Усилитель на этой схеме вновь предполагается идеальным (нес шумящим), а его шум генерируется источником шума $\Gamma_{\text{шз}}$.

Для этой схемы справедливы следующие соотношения.
Коэффициент шума входного сопротивления

$$F_1 = 1 + \frac{P_{\text{ш1}}}{P_{\text{ш. вх}}} = 1 + \frac{4kT_{\text{вх}}r_{\text{вх}}[r_i/(r_i + r_{\text{вх}})]^2 \Delta f_{\text{ш. ус}} K_0^2}{4kT_i r_i [r_{\text{вх}}/(r_i + r_{\text{вх}})]^2 \Delta f_{\text{ш. ус}} K_0^2} =$$

$$= 1 + \frac{T_{\text{вх}} r_i}{T_i r_{\text{вх}}},$$

если $T_{\text{вх}} = T_i = T_0$, то

$$F_1 = 1 + r_i/r_{\text{вх}}.$$

Коэффициент шума усилителя

$$F_2 = 1 + \frac{P_{\text{ш2}}}{P_{\text{ш. вх}}} = 1 + \frac{4kT_0 R_{\text{эКВ}} \Delta f_{\text{ш. ус}} K_0^2}{4kT_i r_i [r_{\text{вх}}/(r_i + r_{\text{вх}})]^2 \Delta f_{\text{ш. ус}} K_0^2} =$$

$$= 1 + \frac{T_0 R_{\text{эКВ}}}{T_i r_i} \left(1 + \frac{r_i}{r_{\text{вх}}}\right)^2,$$

если $T_i = T_0$, то

$$F_2 = 1 + (R_{\text{эКВ}}/r_i) (1 + r_i/r_{\text{вх}})^2.$$

Общий коэффициент шума можно найти, учитывая, что все шумы были отнесены к одной точке — выходу усилителя, в виде суммы

$$F = 1 + (P_{\text{ш1}} + P_{\text{ш2}})/P_{\text{ш. вх}} = 1 + P_{\text{ш1}}/P_{\text{ш. вх}} + P_{\text{ш2}}/P_{\text{ш. вх}} =$$

$$= F_1 + (F_2 - 1),$$

т. е.

$$F = 1 + r_i/r_{\text{вх}} + (R_{\text{эКВ}}/r_i) (1 + r_i/r_{\text{вх}})^2.$$

Для уменьшения коэффициента шума требуется низкая величина $R_{\text{эКВ}}$ и высокая $r_{\text{вх}}$. При согласованном входе, когда $r_{\text{вх}} = r_i$, коэффициент шума $F > 2$.

Найдем оптимальную величину r_i путем дифференцирования выражения для F и приравнивания результата нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = \frac{1}{r_{\text{вх}}} - \frac{R_{\text{эКВ}}}{r_i^2} + \frac{R_{\text{эКВ}}}{r_{\text{вх}}^2} = 0,$$

откуда

$$r_{i \text{ опт}} = r_{\text{вх}} \sqrt{R_{\text{эКВ}}/(r_{\text{вх}} + R_{\text{эКВ}})}.$$

Подставляя это значение в выражение для F , найдем минимальное значение коэффициента шума при несогласованном входе

$$F_{\text{min}} = 1 + \frac{2R_{\text{эКВ}}}{r_{\text{вх}}} + 2 \sqrt{\frac{R_{\text{эКВ}}}{r_{\text{вх}}} \left(1 + \frac{R_{\text{эКВ}}}{r_{\text{вх}}}\right)}.$$

Для ламповых предусилителей можно считать $r_{вх} = 10^6$ Ом, $R_{экв\min} = 200$ Ом (триод), $R_{экв\min} = 700$ Ом (пентод), т. е.

$$r_{i\text{opt}} = 10^6 \sqrt{(200 \div 700)/10^6} = (1,4 \div 2,6) 10^4 \text{ Ом.}$$

Для предусилителей на полевых транзисторах благодаря их низкому шуму и высокому значению $r_{вх}$ можно получить аналогичное значение $r_{i\text{opt}}$, в других случаях для транзисторных предусилителей $r_{i\text{opt}} = 10^2 \div 10^4$ Ом.

Поскольку

$$r_i = rr_{\text{н}}/(r + r_{\text{н}})$$

то, определив r_i и зная из паспорта приемника r , можно найти

$$r_{\text{н}} = rr_i/(r - r_i);$$

если $r \gg r_i$, то $r_{\text{н}} = r_i$.

В этом случае отношение сигнала к шуму сохраняется, но абсолютные значения сигнала и шума могут оказаться слишком малыми, что вызывает целый ряд практических затруднений. Если сопротивление нагрузки уменьшается до 1/10 от сопротивления приемника, а напряжение питания E_0 и первичный сигнал $\Delta r/r$ неизменны, то напряжение сигнала падает до 1/3 той величины, которую вырабатывает приемник в условиях точного согласования, так как

$$E_{\sim} = E_0 \frac{rr_{\text{н}}}{(r + r_{\text{н}})^2} \frac{\Delta r}{r}.$$

Скомпенсировать это падение можно, увеличивая напряжение источника питания E_0 . Однако при этом увеличивается мощность $\mathcal{P}_0^2 r$, рассеиваемая приемником. Ориентировочно можно считать, что предельная рассеиваемая мощность для приемников не превышает 0,1 Вт/см²; значит, если площадь приемника равна A (см²), то можно найти

$$\mathcal{P}_0^2 = E_0^2/(r + r_{\text{н}})^2; \mathcal{P}_0^2 r \leq 0,1 A,$$

следовательно,

$$E_{0\text{max}} = (r + r_{\text{н}}) \sqrt{0,1 A/r}.$$

Эти и некоторые другие дополнительные соображения, относящиеся к выбору параметров приемника и входной цепи, можно найти в книге Хадсона «Инфракрасные системы».

§ 18.13. ПОРОГ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ДРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИЕМНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ЕГО СПОСОБНОСТЬ ОБНАРУЖИТЬ СЛАБЫЙ СИГНАЛ

Для того чтобы оценить способность приемника излучения обнаружить слабый сигнал, вводится специальная величина, называемая порогом чувствительности. Порог чувствительности $\Phi_{\text{пор}}$ (Вт) равен той наименьшей мощности излучения, которая еще может быть обнаружена данным приемником излучения. Эта мощность, воздействуя на приемник, вызывает появление сигнала $U_{\text{пор}}$, превыша-

ющего среднеквадратическое значение шума $\sqrt{\Delta U_{\text{ш}}^2}$ в определенное число раз p , обеспечивающее уверенное обнаружение сигнала. Так как

$$U_{\text{пор}} = S(\lambda, f) \Phi_{\text{пор}},$$

где $S(\lambda, f)$ — чувствительность (крутизна преобразования), зависящая при прочих равных условиях от длины волны падающего излучения λ и частоты модуляции потока f , а по определению

$$U_{\text{пор}} = p \sqrt{\Delta U_{\text{ш}}^2} = p \sqrt{E(f) \Delta f_{\text{ш}}},$$

где $E(f)$ — спектральная плотность шума; $\Delta f_{\text{ш}}$ — шумовая полоса пропускания, то

$$\Phi_{\text{пор}} = p [V E(f) / S(\lambda, f)] \sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}.$$

Коэффициент запаса p может быть самым различным, в частности иногда его полагают равным 1,7, а иногда 6. Все зависит от того, как понимать содержащуюся в определении порога чувствительности неопределенность, выраженную словами *мощность, которая еще может быть обнаружена*, или *уверенное обнаружение наличия сигнала*. Действительно, если предполагается, что используя прибор, измеряющий действующие значения, мы в состоянии заметить, что совместное действие сигнала и шума увеличило показания в два раза, т. е.

$$\sqrt{U_{\text{пор}}^2 + U_{\text{ш}}^2} / \sqrt{U_{\text{ш}}^2} = 2,$$

то легко найти, что

$$U_{\text{пор}}^2 = 3U_{\text{ш}}^2.$$

и

$$U_{\text{пор}} = \sqrt{3U_{\text{ш}}^2} \approx 1,7 \sqrt{U_{\text{ш}}^2},$$

следовательно, $p = 1,7$.

Если же наблюдение *шумовой «дорожки»* осуществляется на экране электронно-лучевой трубки так, как это показано на рис. 340, то можно считать, что уверенное обнаружение появления сигнала произойдет, если его величина равна толщине шумовой «дорожки». Предполагая, что эта толщина равна удвоенному значению отдельных выбросов (пиков) шума, а при нормальном законе распределения выброс шума практически не превышает 3σ , где $\sigma = \sqrt{\Delta U_{\text{ш}}^2}$ (вероятность превышения уровня 3σ равна $1,35 \cdot 10^{-3}$), найдем

$$U_{\text{пор}} = 2 \cdot 3\sigma = 6 \sqrt{U_{\text{ш}}^2},$$

т. е. $p = 6$.

Для того чтобы исключить неопределенность в выборе p , обычно полагают $p = 1$, т. е. определяют порог чувствительности как минимальный поток излучения, вызывающий на зажимах приемника сигнал, равный среднеквадратическому значению шума. В этом случае порог чувствительности называют *пороговым потоком фотоприемника в заданной полосе частот* ($\Phi_{\text{п}}$). По ГОСТ 19852—74 он

определяется как *среднеквадратическое значение действующего на фотоприемник синусоидально-модулированного потока излучения, при котором среднеквадратическое значение фотосигнала равно среднеквадратическому значению шума в заданной полосе частот*. Поскольку пороговый поток представляет собой мощность, эквивалентную мощности шума, его иногда называют *эквивалентной мощностью шума (ЭМШ)* *:

$$\Phi_{\Pi} = [V \overline{E(f) / S(\lambda, f)}] / V \overline{\Delta f_{\Pi}} = \text{ЭМШ}.$$

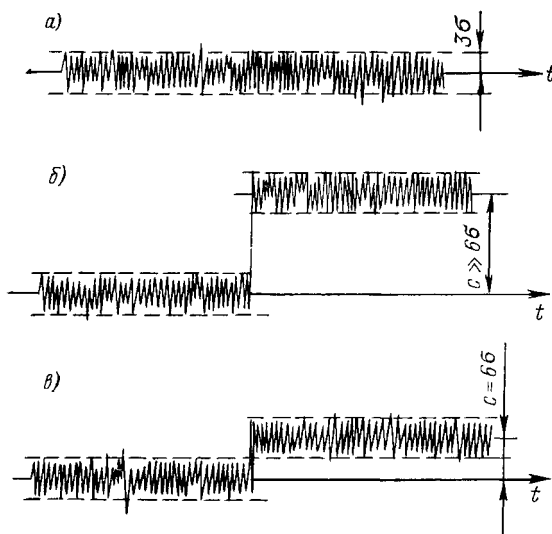


Рис. 340. Появление сигнала S на фоне шумов при наблюдении на экране электронно-лучевого индикатора с амплитудной отметкой: а — шум; б — сигнал, значительно превышающий шум; в — пороговый сигнал (σ — среднеквадратическое значение шума)

Чтобы внести еще большую определенность полагают, что $\Delta f_{\Pi} = 1$ Гц, т. е. задают значение

$$\Phi_{\Pi 1} = \Phi_{\Pi} / V \overline{\Delta f_{\Pi}},$$

выраженное в Вт/Гц^{1/2}.

Многочисленные исследования показали, что для большинства приемников излучения, в широком интервале условий их использования и геометрических размеров, пороговый поток (эквивалентная мощность шума) прямо пропорционален корню квадратному из площади чувствительного слоя приемника A (см²), т. е.

$$\Phi_{\Pi 1} = \Phi_{\Pi}^* / V \overline{A},$$

где

$$\Phi_{\Pi}^* = \Phi_{\Pi 1} / V \overline{A} = \Phi_{\Pi} / V \overline{A \Delta f_{\Pi}},$$

выражается в Вт/см²·Гц^{1/2}.

* В иностранной литературе используется обозначение NEP от сочетания слов Noise Equivalent Power.

Величину Φ_{Π}^* называют *удельным пороговым потоком фотоприемника*, который представляет собой *пороговый поток в единичной полосе частот, отнесенный к единичному по площади фоточувствительному элементу* (ГОСТ 19852—74).

Поскольку пороговый поток (эквивалентная мощность шума) зависит от длины волны падающего излучения и частоты модуляции потока, всегда указывается, для какой длины волны монохроматического излучения и какой частоты модуляции он задан.

Длина волны обычно выбирается соответствующей максимуму спектральной характеристики приемника λ_{\max} , а частота модуляции может быть различной, но обычно она составляет 10, 90, 400, 800, 900, 1000 Гц или находится вблизи этих значений (частота модуляции 800 ± 20 Гц установлена ГОСТ 17772—79).

Если пороговый поток определяется не для монохроматического излучения с длиной волны λ , а по отношению к излучению абсолютно черного тела, имеющего температуру T (K), то он называется интегральным. Соотношение между интегральным и спектральным пороговыми потоками определяется коэффициентом использования потока излучения фотоприемником данного типа

$$\xi = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) k(\lambda) d\lambda / \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) d\lambda$$

и его относительной спектральной характеристикой $k(\lambda)$, т. е.

$$\xi \Phi_{\Pi} = k(\lambda) \Phi_{\Pi}(\lambda);$$

для $\lambda = \lambda_{\max}$, когда $k(\lambda_{\max}) = 1$,

$$\Phi_{\Pi}(\lambda) = \xi \Phi_{\Pi}.$$

Температура абсолютно черного тела, по излучению которого определяется пороговый поток, обычно стандартизуется, однако в разных случаях она может составлять 100 °C (373 K), 300 °C (573 K) и 500 K (227 °C) (ГОСТ 17772—79 рекомендует использовать следующие типы источников оптического излучения: источник типа А — светоизмерительную лампу накаливания при цветовой температуре 2856 ± 100 K по ГОСТ 8.023—74; черное тело с температурой полости 500 ± 2 K по ГОСТ 8.196—76; черное тело с температурой полости 1273 ± 15 K по ГОСТ 8.196—76).

Пороговый поток или эквивалентная мощность шума являются вполне полными параметрами, описывающими пороговую чувствительность приемника излучения. Единственный недостаток состоит в том, что чем лучше приемник, тем меньше пороговый поток и ЭМШ, т. е. их значения находятся как бы в обратной зависимости от качества приемника. Учитывая это, Кларк Джонс, много сделавший в области феноменологического описания и исследования характеристик приемников, ввел величину, обратную эквивалентной мощности шума, которую он назвал способностью к обнаружению или *обнаружительной способностью* (Detectivity). Эта величина

Основные параметры приемников излучения и сопоставление их обна

						Параметр
Тип приемника		Температура приемника T , К	Поле зрения приемника Ω , ср	Частота модуляции f , Гц	Постоянная времени τ , с	Максимум спектральной характеристики $\lambda_{\text{шх}}$, мкм
Термо-элемент	металлический	295	π	5—10	$30 \cdot 10^{-3}$	—
	полупроводниковый	295	π	5—10	$30 \cdot 10^{-3}$	—
Боло-метр	металлический	295	π	10	$20 \cdot 10^{-3}$	—
	полупроводниковый	295	π	10	$(1 \div 15) 10^{-3}$	—
	сверхпроводящий	3,7	$\frac{\pi}{30}$	10	$10 \cdot 10^{-3}$	—
	германиевый глубоко-охлаждаемый	4,3	$\frac{\pi}{15}$	10	$2 \cdot 10^{-3}$	—
Оптико-акустический (пневматический)		295	π	10—20	$(20 \div 40) 10^{-3}$	—
Фотоум-ножи-тель	с серебряно-кислородно-цезиевым фотокатодом	295	π	$\leq 10^6$	10^{-7}	$0,8 \pm 0,1$
	с сурьмяно-цезиевым фотокатодом	295	π	10^6	10^{-8}	$0,38 \pm 0,05$
Фото-вольтаи-ческий (фотоди-од в вен-тильном режиме)	кремниевый (Si)	295	π	10^3	$5 \cdot 10^{-7}$	0,9
	германиевый (Ge)	295	π	10^3	$1 \cdot 10^{-7}$	1,5
	на основе арсенида гал-лия (GaAs)	295	π	10^3	$1 \cdot 10^{-6}$	0,85
Фоторе-зистор на ос-нове	сульфида свинца (PbS)	295	π	$0,4 \cdot 10^3$	$(50 \div 150) 10^{-6}$	2,5—2,6
	сульфида свинца (PbS)	195	π	$0,4 \cdot 10^3$	$(250 \div 800) 10^{-6}$	2,6—2,7
	селенида свинца (PbSe)	77	π	$0,4 \cdot 10^3$	$(10 \div 25) 10^{-6}$	4,8—5,2
	теллурида свинца (PbTe)	77	π	$0,4 \cdot 10^3$	$(10 \div 25) 10^{-6}$	4,6—5,0
	антимонида индия (InSb)	77	$\frac{\pi}{3}$	$0,4 \cdot 10^3$	$(5 \div 10) 10^{-6}$	5,3
Фотовольтаический приемник на основе антимонида индия (InSb)		77	$\frac{\pi}{3}$	$0,4 \cdot 10^3$	10^{-6}	5,1

ружительной способности с пределом, ограниченным фотонным шумом

приемника					
Длиноволновая граница (50 %), мкм	Темновое сопротивление r , Ом	Темновой ток i_{Γ} , А	Удельная обнаружительная способность $D^* (\lambda_{\max})$, см \cdot Гц $^{1/2} \cdot$ Вт $^{-1}$	Предел $D^* (\lambda_{\max})$, ограниченный фотонным шумом (295 К, Ω) $D_{\text{ОФ}}^* \lambda_{\max}$	Примечание
40 40	10 50	— —	$(2 \div 3) 10^8$ $(1 \div 3) 10^9$	$1,9 \cdot 10^{10}$ $1,9 \cdot 10^{10}$	— —
40 40 2000	200 $3 \cdot 10^6$ 15	— — —	10^8 $(0,5 \div 1,5) 10^9$ 10^{11}	$1,9 \cdot 10^{10}$ $1,9 \cdot 10^{10}$ 10^{12}	— — —
50 2000	$2,5 \cdot 10^5$ $1,5 \cdot 10^6$	— —	$0,6 \cdot 10^{11}$ $2,9 \cdot 10^{11}$	$7,5 \cdot 10^{11}$	$D_{\text{ОФ}}^* (\lambda_{\max})$ с учетом реального поля зрения Ω
2000	—	—	$(2 \div 5) 10^9$	$1,9 \cdot 10^{10}$	—
1,0 0,55	— —	10^{-8} $3 \cdot 10^{-9}$	$10^{12} \div 10^{13}$ $(3 \div 5) 10^{14}$	$6 \cdot 10^{16}$ 10^{28}	$D_{\text{ОФ}}^* (\lambda_{\max})$ с учетом $\eta_m = 0,01$, $\beta_2 = 2$ $D_{\text{ОФ}}^* (\lambda_{\max})$ с учетом $\eta_m = 0,3$ и $\beta_2 = 2$
1,0 1,7 0,95	$1 \cdot 10^6$ $2 \cdot 10^5$ $1 \cdot 10^6$	— — —	$2 \cdot 10^{12}$ $5 \cdot 10^{10}$ $8 \cdot 10^{11}$	10^{14} $2 \cdot 10^{14}$ $\sim 10^{18}$	— — —
2,8—3,0 3,2 5,8—6,3 5,3 5,4	$(0,2 \div 2) 10^6$ $(1,0 \div 10,0) 10^6$ $(1,0 \div 10,0) 10^6$ $(1,0 \div 5,0) 10^6$ $1 \cdot 10^4$	— — — — —	$(1,0 \div 4,0) 10^{10}$ $(1,0 \div 2,0) 10^{11}$ $(0,8 \div 1,5) 10^{10}$ $(1,0 \div 2,0) 10^{10}$ $8 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{12}$ $7 \cdot 10^{11}$ $7 \cdot 10^{10}$ $1 \cdot 10^{11}$ $2 \cdot 10^{11}$	$D_{\text{ОФ}}^* (\lambda_{\max})$ с учетом рекомбинации ($\beta_4 = \sqrt{2}$) То же » » $D_{\text{ОФ}}^* (\lambda_{\max})$ с учетом рекомбинации ($\beta_4 = \sqrt{2}$) и поля зрения Ω
5,4	$1 \cdot 10^5$	—	$1 \cdot 10^{11}$	$1,4 \cdot 10^{11}$	$D_{\text{ОФ}}^* (\lambda_{\max})$ с учетом отсутствия рекомбинации, для поля зрения Ω

						Параметр
Тип приемника		Температура приемника T , К	Поле зрения приемника Ω , ср	Частота модуляции f , Гц	Постоянная времени τ , с	Максимум спектральной характеристики λ_{max} , мкм
Фоторезистор на основе кристалла германия, легированного	золотом (Ge : Au)	60	$\frac{\pi}{3}$	$0,4 \cdot 10^3$	10^{-7}	5,0
	ртутью (Ge : Hg)	30	$\frac{\pi}{3}$	$0,4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-7}$	10,0
	кадмием (Ge : Cd)	12	$\frac{\pi}{3}$	$0,4 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^{-7}$	16,0
	цинком (Ge : Zn)	5	$\frac{\pi}{3}$	$0,4 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-8}$	34,0
	медью (Ge : Cu)	4,2	$\frac{\pi}{3}$	10^3	$5 \cdot 10^{-7}$	23,0
Фотовольтаический приемник (фотодиод в вентильном режиме) на основе тройного соединения (CdHgTe)		77	$\frac{\pi}{3}$	10^3	$\leq 1 \cdot 10^{-8}$	10,6
Фотомагнитный приемник на основе антимонида индия (InSb)		295	π	10^3	$2 \cdot 10^{-7}$	6,0
Фотовольтаический приемник (фотодиод в вентильном режиме) на основе арсенида индия (InAs)		195	$\frac{\pi}{3}$	10^3	$\leq 1 \cdot 10^{-6}$	3,2

$D = 1/\Phi_n$, измеряемая в Вт^{-1} , получила широкое распространение, особенно в виде

$$D^* = 1/\Phi_n^* = \sqrt{A\Delta f_{\text{ш}}}/\Phi_n.$$

Так как D^* равна отношению сигнала к шуму, когда поток в 1 Вт падает на приемник площадью 1 см^2 , а шум измерен в полосе 1 Гц, она называется *удельной обнаружительной способностью*. В настоящее время выдвигаются предложения назвать единицу ее измерения ($\text{Вт}^{-1} \cdot \text{см} \cdot \text{Гц}^{1/2}$) джонсом.

Поскольку для приемников, порог чувствительности которых ограничен фотонным шумом (ОФ-приемники), величина D^* зависит от поля зрения, иногда вводится D^{**} , так, что для приемников с квантовой эффективностью, равной единице,

$$D^{**} = (\Omega_{\text{эфф}}/\pi)^{1/2} D^*,$$

где $\Omega_{\text{эфф}}$ — пространственный угол поля зрения приемника излучения.

Если D^* постоянна внутри конуса с половинным углом при вершине θ , т. е. если $\Omega_{\text{эфф}} = \pi \sin^2 \theta$, то

$$D^{**} = D^* \sin \theta.$$

Величина D^{**} измеряется в $\text{см} \cdot \text{Гц}^{1/2} \cdot \text{Вт}^{-1} \cdot \text{ср}^{1/2}$. Она была также введена Джонсом, однако еще не нашла широкого распространения. Для приемников, чувствительность которых ограничена фоном (ОФ-приемники), чаще пользуются соотношением

$$D_{\text{ОФ}}^*(\Omega) = D_{\text{ОФ}}^*(2\pi)/\sin \theta.$$

приемника					
Длиноволновая граница (50 %), мм	Темновое сопротивление r , Ом	Темновой ток I_T , А	Удельная обнаружительная способность D^* (λ_{\max}), см·Гц ^{1/2} ·Вт ⁻¹	Предел D^* (λ_{\max}), ограниченный фотонным шумом (295 К, Ω) $D_{\text{OF}}^*(\lambda_{\max})$	Примечание
7,5	$1 \cdot 10^5$	—	$1 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{11}$	$D_{\text{OF}}^*(\lambda_{\max})$ с учетом рекомбинации ($\beta_4 = \sqrt{2}$) и поля зрения Ω
14,0	$6 \cdot 10^5$	—	$3 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{10}$	То же
25,0	$0,4 \cdot 10^6$	—	$2,5 \cdot 10^{10}$	$7,3 \cdot 10^{10}$	»
40,0	$0,5 \cdot 10^6$	—	$2,5 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{11}$	»
27,0	10^6	—	$3 \cdot 10^{10}$	$7,5 \cdot 10^{10}$	»
13,0	2,5	—	$5 \cdot 10^9$	$8,5 \cdot 10^{10}$	$D_{\text{OF}}^*(\lambda_{\max})$ без учета рекомбинации для поля зрения Ω
7,0	1,0	—	$2 \cdot 10^8$	$8 \cdot 10^{10}$	То же
3,4	$5 \cdot 10^4$	—	$2 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{12}$	»

До сих пор нет окончательно согласованной терминологии, касающейся приемников. Например, Хадсон приводит следующее описание приемника, сделанное Джонсом: «Приемник имеет максимальное значение отношения максимальной величины сигнала к среднеквадратическому значению шума, равное 23 дБ, при 45 В на нагрузочном сопротивлении и при температуре излучателя 500 К, имеющего диаметр 25 мм и расположенного на расстоянии 40 см от приемника с чувствительной поверхностью 9 мм²; излучение прерывается вращающимся со скоростью 450 об/с диском с квадратными отверстиями, а шум имеет полосу частот 9 Гц».

Несмотря на громоздкость приведенного описания, в нем нет ничего лишнего и многого не хватает для грамотного выбора и сравнения приемников излучения. Изготовители приемников редко сообщают о них информацию, достаточную для разработчика. Практически разработчик производит предварительный выбор приемника по имеющимся данным, а затем непосредственными измерениями у себя в лаборатории должен получить необходимую информацию о приемнике применительно к своей конкретной схеме.

§ 18.14. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ ПРИЕМНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

В табл. 27 сообщаются характеристики некоторых приемников излучения. Таблица не может служить основанием для заказа приемника, но позволяет ориентироваться при предварительном выборе

**Предельные характеристики некоторых приемников
(поле зрения охлаждаемых приемников ограничено углом $\pi/3$)**

Тип приемника	$D^* (\lambda_{\max})$	Тип приемника	$D^* (\lambda_{\max})$
PbS (295 K)	$1,5 \cdot 10^{11}$	InSb (295 K)	$2 \cdot 10^8$
PbS (195 K)	$7 \cdot 10^{11}$	InSb (77 K)	$1 \cdot 10^{11}$
InAs ⁺ (295 K)	$1 \cdot 10^{10}$	InSb ⁺ (77 K)	$1,4 \cdot 10^{11}$
ZnAs ⁺ (195 K)	$3,5 \cdot 10^{11}$	Ge : Au (60 K)	$2 \cdot 10^{10}$
InAs ⁺ (77 K)	$7 \cdot 10^{11}$	Ge : Hg (30 K)	$5 \cdot 10^{10}$
PbSe (295 K)	$2 \cdot 10^{10}$	Ge : Cd (12 K)	$4 \cdot 10^{10}$
PbSe (195 K)	$5 \cdot 10^{10}$	Ge : Zn (5 K)	$5 \cdot 10^{10}$
PbSe (77 K)	$5 \cdot 10^{10}$		

подходящего для решения данной задачи типа приемника излучения. Конструктивные особенности приемников излучения практически не нашли отражения в таблице. Ответы на такие важные для конструктора вопросы, как возможная форма и размеры чувствительного слоя, число и расположение слоев мозаичного приемника, конструкция корпуса и системы охлаждения и т. д., должны быть получены в специальной литературе по приемникам излучения. Таблица не содержит также сведений о телевизионных приемниках излучения — вакуумных передающих трубках — вследствие большой специфики этого вопроса, особенно, когда речь идет об использовании трубок не для получения изображения ярко освещенного предмета, а об их предельной чувствительности.

При составлении таблицы были использованы сведения, содержащиеся в отечественной и иностранной литературе. Во всех случаях в таблицу не включались такие параметры приемников, которые представлялись сомнительными или рекордными. Тем не менее необходимо отметить, что в литературе содержатся некоторые сведения о достигнутых предельных значениях обнаружительной способности приемников с внутренним фотоэффектом. Эти сведения приведены в табл. 27а (знаком «плюс» отмечены приемники, работающие в фотовольтаическом режиме).

При обсуждении пороговой чувствительности тепловых приемников иногда упоминается *критерий* или *предел Хэвенса*. Оценка Хэвенса минимальной эквивалентной мощности шумов болометра и термопары при комнатной температуре не является принципиальным пределом — это чисто экспериментальная величина. Однако она оказалась удачной: ни один из болометров или термоэлементов, работающих при комнатной температуре, не превзошел этот предел.

В своем современном выражении (с учетом терминологии, введенной Джонсом) предел Хэвенса ($\text{см} \cdot \text{Гц}^{1/2} \cdot \text{Вт}^{-1}$) имеет вид

$$D^* = 1,67 \cdot 10^{10} \sqrt{\tau},$$

где τ — постоянная времени приемника, с.

Глава 19

ШУМ ОБЪЕКТА НАБЛЮДЕНИЯ И ФОНА

В зависимости от задачи, решаемой оптико-электронным прибором, излучающие тела являются либо *объектами наблюдения (целями)*, либо *фонами*, причем одно и то же тело может быть иногда объектом, а иногда фоном. Так, звезды являются объектами наблюдения при астронавигации и элементами фона при наблюдении за ИСЗ.

Объект наблюдения и окружающий его фон образуют поле излучения, характеристики которого изменяются в пространстве и во времени. Наличие изменяющегося фона является одной из причин, препятствующих наблюдению.

Рассмотрим некоторые наиболее типичные примеры сочетания объекта наблюдения с окружающим его фоном.

В качестве небесных ориентиров — объектов наблюдения для астронавигационных систем — чаще всего используются наиболее яркие звезды, иногда называемые навигационными. Эти звезды необходимо выделить на фоне других, более слабых звезд, туманностей и рассеянного в атмосфере солнечного света. Если бы визирование звезды производилось при отсутствии световых помех, то задача навигации по звезде была несложной. Однако в большинстве случаев звезда должна визироваться либо на фоне других звезд, либо на фоне дневного неба, либо на фоне темного неба за пределами атмосферы, но при наличии боковой засветки оптической системы Солнцем, отраженным светом от Земли или иной близко расположенной планеты.

Звездный фон состоит из мириадов звезд, туманностей и галактик. Средняя яркость звездного фона равна примерно $4 \cdot 10^{-14} \text{ Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{град}^2)$ в диапазоне длин волн от 0,25 до 3,25 мкм. Число навигационных звезд на небе ограничено; так, на площади 227 град^2 в среднем нет звезд ярче третьей величины. Звездный фон в поле зрения 1 град^2 создается в среднем звездами от восьмой величины и слабее *. Однако на некоторых участках неба звездный фон может создавать существенные световые помехи в работе системы слежения за звездой. Чем меньше поле зрения и поле обзора прибора и чем ярче навигационная звезда, тем меньше вероятность нарушения нормальной работы за счет попадания в поле зрения соседней звезды.

Значительно более сильные помехи работе оптико-электронных приборов создает *атмосфера Земли*. Такие явления, как рефракция, поглощение и рассеяние света атмосферой, свечение ночного

* Вся сфера содержит $41\,253 \text{ град}^2$, а один стерадиан — 3283 град^2 .

неба и т. д., оказывают существенное влияние на работу систем астронавигации и астроориентации. При наблюдении из космоса атмосфера Земли является одним из источников ошибок. Направления на центр теплового излучения Земли и на ее геометрический центр не совпадают. Колебание высоты тропопавзы, асимметрия облачного покрова и другие явления в атмосфере вызывают ошибки измерения.

При прохождении света звезды через атмосферу в вертикальном направлении ее визуальная звездная величина уменьшается примерно на 0,21. Так как плотность атмосферы с высотой уменьшается, то вследствие рефракции кажется, что звезды находятся ближе к зениту, чем в действительности. Аномалии плотности воздуха и воздушные потоки приводят к дрожанию изображения звезд при наблюдении через атмосферу. Дифракционные явления, возникающие в слоях атмосферы, расположенных выше тропосферы, вызывают частые изменения яркости звезд — мерцания.

Однако наиболее трудной задачей является обеспечение работы оптико-электронного прибора на *фоне дневного неба*. Значение спектральной яркости дневного неба в стороне, противоположной Солнцу, находится в пределах $0,1 \cdot 10^{-3} \div 4 \times 10^{-3}$ Вт/(см²·ср·мкм). Эта величина в очень большой степени зависит от положения Солнца на небе и высоты места наблюдения над уровнем моря. Участки неба, противоположные Солнцу, ярче участков, удаленных от него на 90°. Очень трудно обнаруживать звезды и следить за ними в той части неба, где находится Солнце. С увеличением высоты места наблюдения яркость фона неба падает из-за уменьшения воздушной массы, рассеивающей солнечный свет. Наибольшее значение имеют градиенты яркости неба, наличие которых в поле зрения может привести к потере навигационной звезды.

Фон ночного неба состоит из света звезд, галактического свечения (света Млечного пути) и зодиакального света (свет Солнца, рассеянный скоплением окружающих его пылевых частиц). Спектральная яркость ночного неба (без учета отдельных линий) составляет примерно 10^{-10} Вт/(см²·ср·мкм) в видимой части спектра. Свечение атмосферы существует также и днем, причем его яркость выше яркости ночного свечения. Полярные сияния, наблюдаемые в высоких широтах, ярче свечения ночного неба.

Распределение яркости природных образований имеет случайный характер и создает неоднородный фон, препятствующий обнаружению объекта наблюдения. В процессе сканирования (пространственной развертки) неравномерности излучения фона преобразуются приемником в электрический сигнал и выделяются на его зажимах в виде временных флуктуаций, которые принято называть *шумом фона*.

При некоторых условиях, например для наблюдений в космосе, когда температура фона приближается к абсолютному нулю, а приемник идеальный, т. е. ограничен флуктуациями излучения, способность системы обнаруживать сигнал будет зависеть от статистического характера поступления фотонов самого сигнала — *шума объекта наблюдения (цели)*.

§ 19.1. ШУМ ОБЪЕКТА НАБЛЮДЕНИЯ

Для обнаружения цели нужно, чтобы по крайней мере один фотон достиг приемника и был им поглощен. Предполагая, что справедлив закон Пуассона, т. е. что вероятность обнаружения фотона пропорциональна времени наблюдения, можно получить следующие выражения.

Когда среднее число фотонов сигнала за время t равно \bar{N} , вероятность обнаружения N фотонов равна

$$P(N) = e^{-\bar{N}} \bar{N}^N / N!$$

Если с вероятностью 99 % в течение времени t необходимо обнаружить хотя бы один фотон (в этом случае с вероятностью 1 % ни один фотон не обнаруживается), можно записать

$$P(0) = 0,01 = e^{-\bar{N}},$$

т. е.

$$\bar{N} = \ln 100 = 4,61.$$

Следовательно, если среднее число фотонов сигнала за время t равно 4,61, то с вероятностью 99 % в течение этого времени будет обнаружен 1 фотон.

Минимальная мощность сигнала (Вт) равна

$$\Phi_{\min} = \frac{4,61}{t} \frac{hc}{\lambda} 10^4,$$

где t выражено в с; λ — в мкм; $h \approx 6,6 \cdot 10^{-34}$ Вт·с²; $c \approx 3 \times 10^{10}$ см·с⁻¹.

Если полоса пропускания для электрических сигналов, определяющая время измерения, равна Δf Гц, то

$$1/t = 2\Delta f$$

и

$$\Phi_{\min} = 9,22 \cdot 10^4 \frac{hc}{\lambda} \Delta f,$$

т. е.

$$\frac{\Phi_{\min}}{\Delta f} \lambda = 1,8 \cdot 10^{-18} \text{ Вт} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{мкм},$$

или

$$\Phi_{\min} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Вт для } \lambda = 0,9 \text{ мкм и } \Delta f = 10^6 \text{ Гц.}$$

Полученную величину следует сравнивать с минимальной обнаруживаемой мощностью монохроматического сигнала, определяемой фотонным шумом. Эта мощность имеет минимум в ближней инфракрасной и видимой областях спектра. Именно здесь могут сказаться флуктуации сигнала. Малое время наблюдения (широкая полоса Δf) также может служить причиной преобладающего влияния флуктуаций сигнала по сравнению с шумами от фона.

§ 19.2. ШУМ ФОНА

Пусть $L(x, y)$ представляют собой случайную функцию, описывающую распределение яркости фона по пространственным координатам. Ее функция корреляции $K(x, y, \xi, \zeta)$, показывающая,

насколько быстро уменьшается зависимость значений случайной функции от ее предыдущего хода, может быть вычислена как статистическое среднее, т. е. среднее по ансамблю реализаций, произведения отклонений случайной функции $L(x, y)$ от среднего значения в точках (x, y) и $(x + \xi, y + \zeta)$:

$$K(x, y, \xi, \zeta) = \overline{\Delta L(x, y) \Delta L(x + \xi, y + \zeta)};$$

$$\Delta L(x, y) = L(x, y) - \overline{L(x, y)};$$

$$\Delta L(x + \xi, y + \zeta) = L(x + \xi, y + \zeta) - \overline{L(x + \xi, y + \zeta)}.$$

Следовательно, можно найти

$$K(x, y, \xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta L(x, y) \Delta L(x + \xi, y + \zeta) \times \\ \times p[L(x, y) L(x + \xi, y + \zeta)] dL(x, y) dL(x + \xi, y + \zeta),$$

т. е. для вычисления функции корреляции в общем случае нужно знать закон совместного распределения плотности вероятностей функции $L(x, y)$ соответственно в точках (x, y) и $(x + \xi, y + \zeta)$, равный $p[L(x, y), L(x + \xi, y + \zeta)]$.

Если функция $L(x, y)$ стационарна, то средние значения ее одинаковы во всех точках пространства. Кроме того, в этом случае функция корреляции не зависит от координат x и y , так как статистические свойства случайной функции $L(x, y)$ везде одинаковы т. е.

$$K(x, y, \xi, \zeta) = K(\xi, \zeta) = \overline{\Delta L(x, y) \Delta L(x + \xi, y + \zeta)};$$

$$\Delta L(x, y) = L(x, y) - \bar{L};$$

$$\Delta L(x + \xi, y + \zeta) = L(x + \xi, y + \zeta) - \bar{L};$$

$$\bar{L} = \overline{L(x, y)} = \overline{L(x + \xi, y + \zeta)}.$$

Будем считать также, что действует условие эргодичности, т. е. статистические средние по ансамблю равны средним по координатам. Тогда двумерная функция корреляции определяется выражением

$$K(\xi, \zeta) = \lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ Y \rightarrow \infty}} \frac{1}{2X2Y} \int_{-X}^{+X} \int_{-Y}^{+Y} \Delta L(x, y) \Delta L(x + \xi, y + \zeta) dx dy.$$

Функцию корреляции можно выразить через спектры Фурье функций $L(x, y)$ и $L(x + \xi, y + \zeta)$. Так как

$$\Delta L(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}(v', \mu') e^{j2\pi(v'x + \mu'y)} dv' d\mu';$$

$$\Delta L(x + \xi, y + \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}(v, \mu) e^{j2\pi [v(x+\xi) + \mu(y+\zeta)]} dv d\mu,$$

то

$$\begin{aligned} K(\xi, \zeta) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ Y \rightarrow \infty}} \frac{\tilde{L}(v, \mu) \tilde{L}(v', \mu')}{2X2Y} \left[\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{+X} e^{j2\pi (v+v')x} dx \right] \times \\ & \times \left[\lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{-Y}^{+Y} e^{j2\pi (\mu+\mu')y} dy \right] e^{j2\pi (v\xi + \mu\zeta)} dv d\mu dv' d\mu', \end{aligned}$$

причем

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{+X} e^{j2\pi (v+v')x} dx = \delta(v + v');$$

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{-Y}^{+Y} e^{j2\pi (\mu+\mu')y} dy = \delta(\mu + \mu').$$

Поскольку дельта-функция $\delta(v + v') \neq 0$ только при $v = -v'$, дельта-функция $\delta(\mu + \mu') \neq 0$ только при $\mu = -\mu'$, а $\tilde{L}(v', \mu') = \tilde{L}(-v, -\mu) = \tilde{L}^*(v, \mu)$, то, пользуясь фильтрующим свойством дельта-функций, можно найти

$$K(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ Y \rightarrow \infty}} \frac{|\tilde{L}(v, \mu)|^2}{2X2Y} \right] e^{j2\pi (v\xi + \mu\zeta)} dv d\mu.$$

Величину

$$E_L(v, \mu) = \lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ Y \rightarrow \infty}} \frac{|\tilde{L}(v, \mu)|^2}{2X2Y}$$

называют *энергетическим спектром* или *спектром Хинчина—Винера пространственного распределения яркости поля излучения*. Следовательно,

$$K(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_L(v, \mu) e^{j2\pi (v\xi + \mu\zeta)} dv d\mu,$$

т. е. функция корреляции представляет собой обратное преобразование Фурье от функции $E_L(v, \mu)$.

Справедливо и прямое преобразование

$$E_L(v, \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi, \zeta) e^{-j2\pi (v\xi + \mu\zeta)} d\xi d\zeta.$$

При $\xi = \zeta = 0$ функция корреляции равна дисперсии случайной функции, т. е. $K(0, 0) = [\overline{\Delta L(x, y)}]^2$.

Дисперсия определяется равенством

$$\overline{[\Delta L(x, y)]^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_L(v, \mu) dv d\mu,$$

или

$$\overline{[\Delta L(x, y)]^2} = \lim_{\substack{X \rightarrow \infty \\ Y \rightarrow \infty}} \int_{-X}^{+X} \int_{-Y}^{+Y} [\Delta L(x, y)]^2 dx dy,$$

где $\Delta L(x, y) = L(x, y) - \bar{L}$.

Если функция корреляции может быть представлена как произведение функций, зависящих от разных аргументов, то и спектр Хинчина—Винера будет равен произведению спектров, зависящих от соответствующих аргументов. Например, если

$$K(\xi, \zeta) = K(\xi) K(\zeta),$$

то

$$E_{1L}(v, \mu) = E_L(v) E_L(\mu).$$

В случае изотропного поля, когда функция корреляции имеет вид

$$K(\xi, \zeta) = K(\xi^2 + \zeta^2) K(\rho),$$

спектр также будет изотропным, зависящим от одной частоты

$$\kappa = \sqrt{v^2 + \mu^2}.$$

Величины, характеризующие случайное распределение яркости по полю излучения, измеряются в следующих единицах: $L(x)$ в Вт/(см²·ср); $K(\xi)$ в [Вт/(см²·ср)]²; $E_{1L}(v)$ в [Вт/(см²·ср)]²·рад, если ξ измеряется в рад, или в [Вт/(см²·ср)]²·см, если ξ измеряется в см; $L(x, y)$ — в [Вт/(см²·ср)]; $K(\xi, \zeta)$ — в [Вт/(см²·ср)]²; $E_{1L}(v, \mu)$ — в [Вт/(см²·ср)]²·рад² или в [Вт/(см²·ср)]²·см².

Зная пространственные спектры Хинчина—Винера, можно определить соответствующие временные спектры, получающиеся при движении оптической оси прибора вдоль некоторой линии наблюдения, яркость вдоль которой меняется случайным образом.

Если $\Delta L(x)$ есть одномерная случайная функция распределения флуктуаций яркости, то при равномерном движении вдоль оси x со скоростью v будем получать функцию $\Delta L_1(t) = \Delta L(vt)$.

Функция корреляции в этом случае равна

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= \overline{\Delta L_1(t) \Delta L_1(t + \tau)} = \overline{\Delta L(vt) \Delta L[v(t + \tau)]} = \\ &= \overline{\Delta L(x) \Delta L(x + v\tau)} = K(v\tau), \end{aligned}$$

а энергетический спектр

$$E_{1L}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Воспользовавшись подстановкой $v\tau = \xi$, найдем

$$E_{1L}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(v\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi) e^{-j2\pi (f/v) \xi} d\xi,$$

следовательно,

$$E_{1L}(f) = \frac{1}{v} E_{1L}\left(\frac{f}{v}\right).$$

Таким образом, чтобы найти спектр шума фона на входе системы с малым полем зрения, нужно знать пространственный спектр $E_{1L}(v)$. Заменяя аргумент v на f/v и разделив $E_{1L}(v)$ на скорость движения, мы получим искомый временной спектр Хинчина—Винера для шума фона.

При решении практических задач, связанных с вычислением спектра шума, вырабатываемого приемником излучения при сканировании им неоднородного фона, приходится учитывать распределение чувствительности по полю зрения оптической системы.

Освещенность в произвольной точке x, y плоскости изображения связана с яркостью произвольной точки x_1, y_1 известным соотношением

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma_A' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) h(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1,$$

где $h(x - x_1, y - y_1)$ — функция рассеяния изопланарной системы. Если освещенность $E(x, y)$ оказывается зависящей от времени вследствие сканирования вдоль оси x со скоростью v , т. е.

$$E(x, y, t) = E(x - vt, y),$$

то пространственный спектр сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником, равен

$$\tilde{U}_0(v) = \pi T_0 \sin^2 \sigma_A' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(v, \hat{y}) \tilde{h}(v, y \frown y_1) \tilde{L}^*(v, \hat{y}_1) dy dy_1,$$

где

$$\tilde{S}(v, \hat{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, y) e^{-j2\pi vx} dx;$$

$$\tilde{h}(v, y \frown y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x - x_1, y - y_1) e^{-j2\pi v(x - x_1)} d(x - x_1);$$

$$\tilde{L}^*(v, \hat{y}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) e^{+j2\pi vx_1} dx_1,$$

$S(x, y)$ — пространственное распределение чувствительности приемника излучения, установленного в плоскости изображения, а пространственная частота v связана со скоростью движения и частотой f соотношением $v = f/v$.

Для безабберационной системы

$$\tilde{U}_{00}(v) = \pi T_0 \sin \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(v, \hat{y}) \tilde{L}^*(v, \hat{y}) dy.$$

Если чувствительность приемника постоянна в пределах рабочей площадки, размер которой вдоль оси y равен y_0 , и равна нулю вне этой площадки, то

$$\tilde{U}_{00}(v) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \tilde{S}(v) \int_{-y_0/2}^{+y_0/2} \tilde{L}^*(v, \hat{y}) dy.$$

Предполагая, что высота приемной площадки y_0 мала по сравнению с размером пространственной длины волны, т. е. $\tilde{L}^*(v, \hat{y}) = \tilde{L}^*(v)$ в интервале $\pm y_0/2$, найдем

$$\tilde{U}_{00}(v) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A y_0 \tilde{S}(v) \tilde{L}^*(v).$$

В этом случае спектр Хинчина—Винера обобщенного сигнала (для безабберационной системы и безынерционного приемника излучения) равен

$$E_{iL_{00}}(v) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|U_{00}(v)|^2}{2X} = (\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A)^2 y_0^2 |\tilde{S}(v)|^2 E_L(v),$$

где

$$E_{iL}(v) = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{L}^*(v)|^2}{2X} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{|\tilde{L}(v)|^2}{2X}.$$

Так как справедливо соотношение

$$E_{iU}(v) dv = E_{iU}(f) df,$$

то

$$E_{iU_{00}}(f) = \frac{E_{iU_{00}}(v)}{v} = \frac{(\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A)^2}{v} y_0^2 \left| \tilde{S}\left(\frac{f}{v}\right) \right|^2 E_{iL}\left(\frac{f}{v}\right).$$

Спектр Хинчина—Винера обобщенного сигнала, вырабатываемого инерционным приемником, соответственно равен

$$E_{iU_0}(f) = |\dot{k}_{\text{пр}}(f)|^2 E_{iU_{00}}(f),$$

где квадрат модуля коэффициента передачи приемника $|\dot{k}_{\text{пр}}(f)|^2$ учитывает его инерционные свойства.

Цель включения приемника осуществляет преобразование обобщенного сигнала \dot{U} в электрическое напряжение \dot{E}_\sim , действующее во входной цепи, которая передает его к усилителю, вызывая появление напряжения \dot{u} на входных зажимах последнего (см. рис. 227).

Следовательно, имеют место преобразования:

$$\dot{E}_\sim = S_{\text{вкл. х. х}} \dot{U};$$

$$\dot{u} = \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{E}_\sim = S_{\text{вкл. х. х}} \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{U},$$

где $S_{\text{вкл. х. х}}$ — крутизна цепи включения приемника на «холостом ходу», $\dot{K}_{\text{вх}}(f)$ — комплексный коэффициент передачи входной цепи.

С учетом этих преобразований спектр Хинчина—Винера электрического напряжения \dot{u} , действующего на входе усилителя, равен

$$E_{u_0}(f) = |S_{\text{вкл. х. х}} \dot{K}_{\text{вх}}(f)|^2 E_{U_0}(f),$$

причем наличие цифры в качестве индекса при u и U по-прежнему указывает на то, что речь идет о безаберрационной системе.

В итоге можно записать

$$E_{u_0}(f) = \frac{(\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'})^2}{v} y_0^2 \left| \tilde{S}\left(\frac{f}{v}\right) k_{\text{пр}}(f) S_{\text{вкл. х. х}} \dot{K}_{\text{вх}}(f) \right|^2 E_L\left(\frac{f}{v}\right).$$

Спектр распределения крутизны приемника по пространственной координате $v = f/v$ равен

$$\tilde{S}(v) = S_0 \tilde{T}_d(v),$$

где S_0 — крутизна преобразования (чувствительность) безынерционного приемника; $\tilde{T}_d(v)$ — одномерный спектр Фурье вдоль направления сканирования для коэффициента пропускания полевой диафрагмы, совпадающей по своим размерам, форме и положению с чувствительной площадкой приемника излучения или проецируемой на эту площадку соответствующей оптической системой.

Так как

$$S_0 = (\dot{S})_{\omega \rightarrow 0} = (\dot{U}/\dot{\Phi})_{\omega \rightarrow 0}; \quad \tilde{T}_d(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_d(x) e^{-i2\pi vx} dx,$$

то S_0 выражается в единицах измерения обобщенного сигнала, приходящегося на 1 Вт падающего эффективного потока излучения; $T_d(x)$ — безразмерная, а $\tilde{T}_d(v)$ выражается в см.

Поскольку можно воспользоваться обозначением

$$S_{\text{фпу}}(f) = S_0 S_{\text{вкл. х. х}} \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{K}_{\text{вх}}(f),$$

окончательно найдем

$$E_{u_0}(f) = \frac{(\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'})^2}{v} y_0^2 |\dot{S}_{\text{фпу}}(f)|^2 \left| \tilde{T}_d\left(\frac{f}{v}\right) \right|^2 E_L\left(\frac{f}{v}\right).$$

Проверим соответствие единиц измерения величин, входящих в левую и правую части полученного равенства

$$\text{В}^2 \cdot \text{с} = (\text{ср}^2) (\text{см}^{-1} \cdot \text{с}) (\text{см}^2) (\text{В}^2 \cdot \text{Вт}^{-2}) (\text{см}^2) (\text{Вт}^2 \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{ср}^{-2}) = \text{В}^2 \cdot \text{с}!$$

В общем случае, когда изопланарная оптическая система обладает заметными аберрациями, а приемник излучения (диафрагма поля) имеет произвольные размеры и форму, можно найти спектр Хинчина—Винера электрического напряжения u , действующего на входе усилителя при сканировании неравномерного фона вдоль оси x с постоянной скоростью v , в следующем виде:

$$E_u(f) = \frac{(\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'})^2}{v} |\dot{S}_{\text{фпу}}(f)|^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} E_L\left(\frac{f}{v}, \mu\right) \left| \tilde{h}\left(\frac{f}{v}, \mu\right) \tilde{T}_d\left(\frac{f}{v}, \mu\right) \right|^2 d\mu,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}\left(\frac{f}{v}, \mu\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-x_1)(y-y_1) e^{-j2\pi[(f/v)(x-x_1) + \mu(y-y_1)]} \times \\ &\quad \times d(x-x_1) d(y-y_1); \\ \tilde{T}_d\left(\frac{f}{v}, \mu\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_d(x, y) e^{-j2\pi[(f/v)x + \mu y]} dx dy; \end{aligned}$$

$h(x-x_1, y-y_1)$ — функция рассеяния изопланарной оптической системы; $T_d(x, y)$ — коэффициент пропускания диафрагмы поля; $\tilde{T}_d(f/v, \mu)$, измеряется в см^2 , а $\tilde{h}(f/v, \mu)$ — величина безразмерная.

Проверим соответствие единиц измерения величин, входящих в левую и правую части выражения для $E_{iu}(f) : [\text{В}^2 \cdot \text{с}] = (\text{ср})^2 \times \times (\text{см}^{-1} \cdot \text{с}) (\text{В}^2 \cdot \text{Вт}^{-2}) (\text{Вт}^2 \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{ср}^{-2}) (\text{см}^4) (\text{см}^{-1}) = \text{В}^2 \cdot \text{см}^2$

Таким образом, спектр Хинчина—Винера напряжения шума, вырабатываемого приемником, при сканировании вдоль одной оси в пространстве изображений с постоянной скоростью пропорционален интегралу, взятому в бесконечных пределах по пространственной частоте, соответствующей направлению, перпендикулярному направлению сканирования, от произведения спектра Хинчина—Винера яркости фона на квадрат модулей амплитудных спектров функции рассеяния объектива и коэффициента пропускания диафрагмы, соответствующей форме, размерам и положению чувствительной площадки приемника излучения.

В отличие от спектра внутренних шумов приемника и усилителя этот спектр называется шумом фона и в последующем изложении соответствующая величина обозначается через $E_{i\Phi}(f)$.

ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛА К ШУМУ И ОСНОВЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПАССИВНЫХ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ВЫДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

Глава 20 ОСНОВЫ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Главной задачей энергетического расчета оптико-электронного прибора является определение основных параметров его оптической и электронной схемы по заданным значениям дальности действия (чувствительности), скорости поиска цели в определенном поле обзора и углового разрешения.

К основным параметрам относятся: диаметр, относительное отверстие, рабочий спектральный диапазон и качество изображения объектива; тип приемника излучения и его размеры; структура, коэффициент усиления, амплитудно- и фазочастотная характеристики электронного усилителя. Дальность действия и чувствительность оптико-электронного прибора всегда ограничены из-за наличия фона случайных помех или шумов. Поэтому обнаружить наличие цели на заданной дальности или воспроизвести ее изображение с заданной чувствительностью и детальностью (разрешением) можно лишь с определенной вероятностью, так как любой признак или свойство в той или иной степени присущи как цели, так и фону. В связи с этим должны быть заданы значения вероятностей правильного обнаружения цели и ложной тревоги, т. е. возможности принять элемент фона за цель. Обнаружение цели на фоне случайных помех невозможно без знания их отличительных признаков, зависящих не только от того, что собой представляет цель, но и от условий обнаружения: времени года и суток, участия человека в процедуре обнаружения, способа индикации сигнала и т. д. Следовательно, условия обнаружения должны быть также детально определены перед началом энергетического расчета.

Обычно различают два основных случая расчета:

1. Обнаружение цели на *неизлучающем* фоне, когда чувствительность прибора ограничивается его внутренними шумами или шумом цели.
2. Обнаружение цели на *излучающем* фоне, когда чувствительность прибора ограничивается фотонным шумом приемника излучения или пространственным шумом фона.

Для обнаружения и наблюдения цели может использоваться как ее *собственное излучение*, так и *отраженное от цели излучение* естественных или искусственных источников. При этом *цель* может быть *точечной*, когда ее размеры не разрешаются оптической системой прибора; *малоразмерной*, когда основное значение имеют общие размеры цели, а детали ее формы играют второстепенную роль; и *протяженной*, когда речь идет о наблюдении детального изображения. Излучение окружающего цель *фона* может распределяться в пространстве *равномерно, неравномерно* и быть *нестационарным*.

Основное внимание в последующем изложении будет уделено проблеме обнаружения точечной цели на неизлучающем фоне, поскольку в этом случае определяются максимальные габариты оптической системы прибора.

§ 20.1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

На рис. 341 приведена типовая структурная схема оптикоэлектронного прибора, которую будем иметь в виду, при выполнении энергетического расчета. Схема включает в себя сканирующее зеркало $З$, объектив $Об$, приемник излучения $Пр$, усилитель $Ус$ и пороговое устройство $ПорУ$.

В этой схеме анализ смеси сигнала с шумом, производимый с целью принятия решения о наличии или отсутствии сигнала, осуществляется пороговым устройством, которое вырабатывает электрическое напряжение на выходе только в том случае, когда напряжение на его

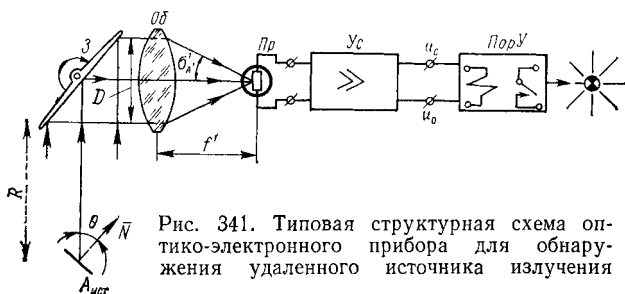


Рис. 341. Типовая структурная схема оптико-электронного прибора для обнаружения удаленного источника излучения

входе превысит некоторое значение u_0 , называемое порогом срабатывания. Это решение может быть правильным или ошибочным, а при определении параметров сигнала (амплитуды, частоты, фазы, момента его поступления и т. д.) решение может быть в той или иной степени неточным. Поэтому проведение энергетического расчета всегда предусматривает определенные значения вероятности правильного обнаружения, вероятности ложной тревоги или среднеквадратической ошибки.

Предполагается, что источник излучения находится на бесконечности и поэтому его изображение создается в задней фокальной плоскости оптической системы, где установлен приемник. Ось визи-

рования составляет угол θ с нормалью к излучающей поверхности источника, подчиняющейся закону Ламберта.

Поток излучения в Вт, падающий на объектив прибора, определяется выражением

$$\Phi_0 = L \frac{A_{\text{ист}} A_{\text{об}}}{R^2} \cos \theta,$$

где L — яркость источника излучения, Вт·см⁻²·ср⁻¹; $A_{\text{ист}}$, $A_{\text{об}}$ — площади источника и входного зрачка объектива, см²; R — расстояние до источника, см.

В выражении для потока излучения Φ_0 не учитывается ослабление излучения в промежуточной среде и предполагается, что яркость источника выражена в эффективных величинах, т. е.

$$L = \xi L_e,$$

где энергетическая яркость

$$L_e = \int_0^\infty L_\lambda d\lambda,$$

а коэффициент использования излучения

$$\xi = \int_0^\infty \varphi(\lambda) k(\lambda) \tau_a(\lambda) \tau_o(\lambda) d\lambda \left/ \int_0^\infty \varphi(\lambda) d\lambda \right.,$$

причем $\varphi(\lambda)$, $k(\lambda)$, $\tau_a(\lambda)$, $\tau_o(\lambda)$ — относительные спектральные характеристики излучения источника, чувствительности приемника, прозрачности атмосферы (промежуточная среда) и оптической системы соответственно.

Поток излучения, падающий на приемник, оказывается различным в зависимости от соотношения между размерами изображения источника и приемника. Площадь изображения источника излучения (объекта наблюдения, цели и т. д.) равна

$$A'_{\text{ист}} = A_{\text{ист}} \cos \theta \frac{f'^2}{R^2},$$

где f' — заднее фокусное расстояние объектива.

Если площадь изображения источника $A'_{\text{ист}}$ больше площади приемника $A_{\text{пр}}$, т. е. $A'_{\text{ист}} > A_{\text{пр}}$, то поток излучения, падающий на приемник, ограничивается размерами приемника и его величина пропорциональна квадрату относительного отверстия объектива и не зависит от его диаметра. Действительно, в этом случае

$$\Phi_0 = L T_0 A_{\text{пр}} \frac{A_{\text{об}}}{f'^2} = \pi L T_0 \frac{A_{\text{пр}}}{4} \bar{O}^2,$$

где T_0 — произведение максимальных значений спектральных коэффициентов пропускания оптической системы и промежуточной среды,

$$T_0 = [T_o(\lambda)]_{\text{max}} [T_a(\lambda)]_{\text{max}};$$

$T_o(\lambda)$, $T_a(\lambda)$ — спектральные (монохроматические) коэффициенты пропускания оптической системы и промежуточной среды

атмосферы); $\tau_o(\lambda) = T_o(\lambda)/[T_o(\lambda)]_{\max}$, $\tau_a(\lambda) = T_a(\lambda)/[T_a(\lambda)]_{\max}$ — относительные спектральные коэффициенты пропускания оптической системы и промежуточной среды (атмосферы); $\ddot{O} = D/f'$ — относительное отверстие объектива.

Так как для параксиальной оптики

$$\ddot{O}^2/4 = (D/2f')^2 = \sin^2 \sigma'_A,$$

где σ'_A — задний апертурный угол объектива, то

$$\Phi_0 = \pi L A_{\text{пр}} T_0 \sin^2 \sigma'_A.$$

Если изображение меньше приемника, т. е. $A'_{\text{ист}} < A_{\text{пр}}$, то поток излучения, падающий на приемник, ограничивается размерами входного зрачка, его величина пропорциональна квадрату диаметра объектива и не зависит от относительного отверстия (фокусного расстояния). Действительно, в этом случае

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{4} T_0 I \frac{D^2}{R^2},$$

где $I = L A_{\text{ист}} \cos \theta$ — сила излучения источника.

Полученные соотношения достаточно хорошо известны. Основываясь на них, часто считают, что при обнаружении точечных или малоразмерных целей имеет значение лишь диаметр оптической системы, а при обнаружении излучения объектов большого размера существенно лишь относительное отверстие. Эти рассуждения справедливы, однако, лишь в случае достаточно сильных сигналов, когда можно не считаться с шумами приемника излучения.

Условием обнаружения падающего на приемник потока излучения является превышение им в p раз некоторого порогового значения

$$\Phi_0 = p \Phi_{\text{п}},$$

причем $\Phi_{\text{п}}$ представляет собой среднеквадратическое значение действующего на приемник синусоидально-модулированного потока излучения, вызывающего на зажимах приемника сигнал, среднеквадратическое значение которого равно среднеквадратическому значению шума в заданной полосе частот. По существу, это есть пороговый поток приемника с площадью $A_{\text{пр}}$ в полосе пропускания $\Delta f_{\text{ш}}$ на фиксированной частоте модуляции f_0 , т. е.

$$\Phi_{\text{п}} = \Phi_{\text{п}}^*(f_0) \sqrt{A_{\text{пр}} \Delta f_{\text{ш}}},$$

где $\Phi_{\text{п}}^*(f_0)$ — удельный пороговый поток фотоприемника, т. е. пороговый поток в единичной полосе частот 1 Гц, отнесенный к единичному по площади (1 см²) фоточувствительному элементу, выраженный так же, как и падающий поток излучения, в эффективных величинах, т. е. отнесенный к максимуму спектральной чувствительности приемника.

Если пользоваться понятием удельной обнаружительной способности, то

$$D^*(f_0) = 1/\Phi_{\text{п}}^*(f_0).$$

Таким образом, для *точечного источника* минимальное обнаруживаемое значение силы излучения (силы света)

$$I = \frac{4}{\pi} p \frac{\Phi_n^*(f_0)}{T_0} \frac{\delta}{D\ddot{\delta}} R^2 \sqrt{\Delta f_{\text{ш}}},$$

где $\delta = \sqrt{A_{\text{пр}}}/f'$ — мгновенное поле зрения прибора (угловая разрешающая способность), а для *протяженного источника* минимальная яркость соответственно определяется выражением

$$L = \frac{4}{\pi} p \frac{\Phi_n^*(f_0)}{T_0} \frac{1}{D\ddot{\delta}} \sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}.$$

Следовательно, если пороговый поток приемника пропорционален корню квадратному из его площади, то при заданном угловом разрешении *необходимо обеспечивать максимальные значения диаметра и относительного отверстия объектива*. Полученные выражения требуют двух существенных разъяснений: как определить p для обеспечения заданных вероятностей правильного обнаружения и ложных тревог и как выбрать $\Delta f_{\text{ш}}$ для обеспечения оптимальных соотношений между чувствительностью (дальностью действия) и временем обнаружения (наблюдения, измерения).

Дать эти разъяснения — главная цель последующего изложения. Формулы для I и L можно также представить в виде выражений, определяющих величины p и R :

$$\begin{aligned} p &= \frac{(\pi/4) I T_0}{\Phi_n^*(f_0)} \frac{D\ddot{\delta}}{\delta} \frac{1}{R^2 \sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}}; \\ R^2 &= \frac{(\pi/4) I T_0}{\Phi_n^*(f_0)} \frac{D\ddot{\delta}}{\delta} \frac{1}{p \sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}}; \\ p &= \frac{(\pi/4) L T_0}{\Phi_n^*(f_0)} \frac{D\ddot{\delta}}{\delta} \frac{1}{\sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}}. \end{aligned}$$

Если с пороговым значением сопоставляется разность яркостей двух последовательно визируемых участков объекта и фона, то минимальное значение этой разности, еще обнаруживаемое прибором,

$$\Delta L = \frac{4}{\pi} p \frac{\Phi_n^*(f_0)}{T_0} \frac{1}{D\ddot{\delta}} \sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}.$$

Для диффузного излучения $\Delta L = \Delta M/\pi$, а разность плотностей излучения

$$\Delta M = \int_0^\infty \Delta M_\lambda(\lambda, T) k(\lambda) \tau_a(\lambda) \tau_o(\lambda) d\lambda.$$

Контрастное излучение двух близких по температуре абсолютно черных тел

$$\Delta M_\lambda^2(\lambda, T) = \frac{c_2}{\lambda T} \left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}\right)^{-1} M_\lambda^2(\lambda, T) \frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1,439 \cdot 10^4}{\lambda T^2} M_{\lambda_m}^2(\lambda) \Delta T,$$

так как $M_{\lambda_m}^0 \approx 1,286 \cdot 10^{-15} T^5$, то

$$\Delta M_{\lambda}^0(\lambda, T) = 18,5 \cdot 10^{-12} T^3 \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} \Delta T,$$

следовательно,

$$\Delta M^0 = 18,5 \cdot 10^{-12} T^3 \Delta T (\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}},$$

где

$$(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) k(\lambda) \tau_a(\lambda) \tau_0(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Если $\tau_a(\lambda) = \tau_0(\lambda) = 1$ и приемник — неселективный, т. е. $k(\lambda) = 1$, то $(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф.тепл}} \approx 1,22$, и $\Delta M^0 \approx 22,6 \cdot 10^{-12} T^3 \Delta T$, что практически совпадает с известной формулой, получаемой путем дифференцирования формулы закона Стефана — Больцмана: $\Delta M = 4\sigma T^3 \Delta T$, поскольку $4\sigma = 4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-12} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-4} \approx 22,7 \cdot 10^{-12} \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$.

Регистрируемая разность температур двух абсолютно черных тел

$$\Delta T = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{\rho \Phi_{\Pi}^*(f_0)}{T_0} \frac{1}{D \dot{O} \delta} \frac{\sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}}.$$

§ 20.2. ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛА К ШУМУ НА ВЫХОДЕ УСИЛИТЕЛЯ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА УРАВНЕНИЯ ДАЛЬНОСТИ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Найдем отношение максимального (пикового) значения напряжения электрического сигнала к среднеквадратическому напряжению шума на выходе усилителя

$$\rho = u_{\text{с max}} / \sqrt{u_{\text{ш}}^2} = u_{\text{с max}} / u_{\text{ш}}.$$

Максимальное значение сигнала равно

$$u_{\text{с max}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{\text{с}}(f) e^{j2\pi f t_0} df,$$

где t_0 — момент времени, когда сигнал на выходе усилителя достигает своего максимального значения; $\tilde{u}_{\text{с}}(f)$ — спектральная плотность напряжения сигнала на выходе усилителя — спектр сигнала.

Спектр сигнала на выходе усилителя можно определить из выражения

$$\tilde{u}_{\text{с}}(f) = \tilde{U}_0(f) \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f),$$

где $\tilde{U}_0(f)$ — комплексный спектр обобщенного сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником излучения; $\dot{k}_{\text{пр}}(f)$ — комплексный относительный коэффициент передачи приемника излучения; $\dot{S}_{\text{вх}}(f)$ — комплексная крутизна преобразования входной цепи; $\dot{K}_{\text{ус}}(f)$ — комплексный коэффициент усиления усилителя.

Кратко рассмотрим все эти сомножители. В общем случае при линейном сканировании со скоростью v

$$\tilde{U}_0(f) = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L^* \left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1 \right) \tilde{S} \left(\frac{f}{v}, y \right) \tilde{h}^* \left(\frac{f}{v}, \widehat{y - y_1} \right) dy dy_1.$$

Значения величин, входящих в выражение для $\tilde{U}_0(f)$, были подробно рассмотрены в гл. 15. Это рассмотрение позволяет, в частности, записать следующие соотношения.

Для идеальной оптической системы

$$\tilde{U}_{00}(f) = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^* \left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1 \right) \tilde{S} \left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1 \right) dy_1.$$

Соответственно для точечной цели и системы с аберрациями

$$\tilde{U}_0^1(f) = \frac{\pi T_0 [D/(2R)]^2}{v} I \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S} \left(\frac{f}{v}, \hat{y} \right) \tilde{h}^* \left(\frac{f}{v}, \hat{y} \right) dy.$$

Для идеальной оптической системы, визирующей точечную цель,

$$\tilde{U}_{00}^1(f) = \frac{\pi T_0 [D/(2R)]^2}{v} I \tilde{S} \left(\frac{f}{v} \right).$$

Если задан закон набегания изображения цели на чувствительную площадку приемника излучения $\Phi(t) = \Phi_0 \gamma(t)$, где Φ_0 — полный поток излучения, падающий на приемник, когда оптическая ось прибора точно направлена на цель в момент $t = 0$, тогда

$$U_0(t) = U_0 \gamma(t); \quad \tilde{U}_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t) e^{-j2\pi f t} dt,$$

или

$$\tilde{U}_0(f) = U_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f); \quad \tilde{\gamma}(f) = \frac{1}{t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t) e^{-j2\pi f t} dt,$$

причем $t_{\text{вх}}$ — длительность входного импульса произвольной формы, отсчитанная на заранее обусловленном уровне.

Для импульса прямоугольной формы

$$\tilde{\gamma}_{\text{пр}}(f) = \text{Sinc}(f t_{\text{вх}});$$

для косинус-квадратного импульса

$$\tilde{\gamma}_{\text{к.к}}(f) = \frac{\text{Sinc}(f t_{\text{вх}})}{1 - (f t_{\text{вх}})^2}.$$

Отсчет длительности прямоугольного и косинус-квадратного импульсов производится на уровне, равном нулю.

Далее, можно найти

$$U_0 = S_0 \Delta \Phi,$$

где S_0 — чувствительность приемника излучения для такой частоты модуляции, когда инерционность его не сказывается, поскольку U_0 — сигнал, вырабатываемый безынерционным приемником, т. е. $S_0 = \lim_{f \rightarrow 0} S(f)$, а $\Delta\Phi$ — абсолютное значение изменения потока излучения, падающего на приемник при визировании им вначале фона Φ_Φ , а затем цели Φ_Π , т. е.

$$\Delta\Phi = \Phi_\Pi - \Phi_\Phi.$$

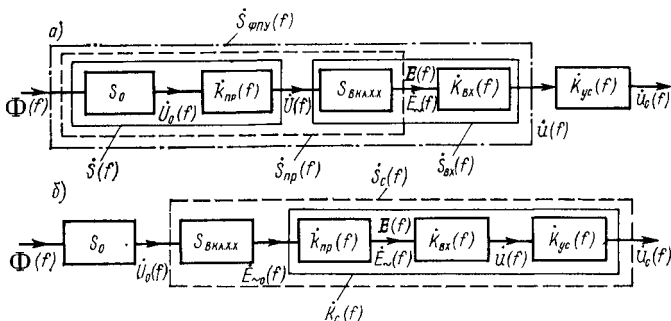


Рис. 342. Общая схема прохождения сигнала и шума: а — обычный порядок включения элементов; б — группировка элементов по принципу частотной зависимости коэффициентов передачи и крутизны

Для случая, когда фон не излучает, т. е. $\Phi_\Phi = 0$, а $\Phi_\Pi = \Phi_0$,

$$\Delta\Phi = \Phi_0 = LT_0 \frac{A_{\text{ист}} A_{\text{об}}}{R^2} \cos \theta$$

и

$$U_0 = S_0 \Phi_0.$$

Если же фон излучает, то $\Delta\Phi = \Delta LT_0 \frac{A_{\text{ист}} A_{\text{об}}}{R^2} \cos \theta$, где ΔL — разность яркостей объекта наблюдения (цели) и фона.

Следовательно, для заданного закона набегания изображения при $\Phi_\Phi = 0$

$$\tilde{u}_c(f) = \Phi_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f) S_0 \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f).$$

Рассмотрим произведение

$$\dot{S}_{\text{ФПВ}}(f) = S_0 \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f),$$

обратив внимание на рис. 342, а.

На схеме рис. 342, а, являющейся модификацией схем, представленных на рис. 227 и 230, показано *, что поток излучения, комплекс-

* На схемах рис. 227, 230 и 342 в целях упрощения не всегда указана функциональная зависимость комплексных амплитуд и коэффициентов передачи от частоты модуляции. В некоторых случаях аналогичные упрощения записи используются на других рисунках и в тексте.

ная амплитуда которого равна $\dot{\Phi}(f)$, преобразуется приемником излучения в обобщенный сигнал $\dot{U}(f)$ (напряжение, ток, сопротивление и т. д.), так что

$$\dot{U}(f) = \dot{S}(f) \dot{\Phi}(f).$$

Этот сигнал цепью включения приемника в свою очередь преобразуется в э. д. с. $\dot{E}_{\sim}(f)$, являющуюся источником сигнала во входной цепи, причем

$$\dot{E}_{\sim}(f) = \dot{S}_{\text{вкл. х. х}}(f) \dot{U}(f),$$

где $\dot{S}_{\text{вкл. х. х}}(f)$ — крутизна преобразования цепи включения приемника без нагрузки (на холостом ходу).

Для фоторезистора и болометра, когда $\dot{U} = \Delta r/r$,

$$\dot{S}_{\text{вкл. х. х}} = \dot{E}_{\sim}/\dot{U} = \dot{E}_{\sim}(\Delta r/r) = E_0 \kappa / (1 + \kappa)^2,$$

где $\kappa = r/r_{\text{н}}$.

Для фотоэмиссионного приемника $\dot{U} = \dot{\mathcal{J}}$, т. е.

$$\dot{S}_{\text{вкл. х. х}} = \dot{E}_{\sim}/\dot{\mathcal{J}} = r_{\text{н}}.$$

Для фотовольтаического приемника и термоэлемента, вырабатывающих э. д. с. с комплексной амплитудой $\dot{\mathcal{E}}$, $\dot{U} = \dot{\mathcal{E}} = \dot{E}_{\sim}$; следовательно,

$$\dot{S}_{\text{вкл. х. х}} = \dot{E}_{\sim}/\dot{E}_{\sim} = 1.$$

Обратим внимание, что во всех рассмотренных случаях $\dot{S}_{\text{вкл. х. х}}$ представляет собой действительную величину: $S_{\text{вкл. х. х}} = |\dot{S}_{\text{вкл. х. х}}|$.

Анализируя схему рис. 342, а, заметим, что входная цепь преобразует э. д. с. $\dot{E}_{\sim}(f)$ в напряжение $\dot{u}(f)$, действующее на входе усилителя, т. е.

$$\dot{u}(f) = \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{E}_{\sim}(f).$$

Все фотоприемное устройство характеризуется крутизной

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\text{ФПУ}}(f) &= \dot{u}(f)/\dot{\Phi}(f) = \dot{S}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) = \dot{S}(f) S_{\text{вкл. х. х}} \dot{K}_{\text{вх}}(f) = \\ &= S_0 k_{\text{пр}}(f) S_{\text{вкл. х. х}} \dot{K}_{\text{вх}}(f). \end{aligned}$$

Крутизна $\dot{\Phi}_{\text{ФПУ}}(f)$ фотоприемного устройства непосредственно связана с его чувствительностью, вносимой в паспорт приемника излучения; например, для фоторезистора ранее было найдено

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{\text{ФПУ}}(f) &= S_{\text{пасп}} \frac{4\kappa}{(1 + \kappa)(1 + \kappa + \chi)} \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f \tau_{\text{пр}})^2}} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{1 + [2\pi f \tau_{\text{вх}} - 1/(2\pi f \tau_{\text{св}})]^2}}. \end{aligned}$$

Действительно, если при проведении измерений с целью заполнения паспорта выбрать частоту модуляции потока излучения f_0 так, что $2\pi f_0 \tau_{\text{вх}} = 1/(2\pi f_0 \tau_{\text{св}})$; $2\pi f_0 \tau_{\text{пр}} \ll 1$, то

$$\dot{S}_{\text{ФПУ}}(f) = S_{\text{ФПУ}} = S_{\text{насп}} 4\kappa/(1 + \kappa)(1 + \kappa + \chi),$$

если при этом согласовать входные сопротивления, т. е. обеспечить

$$\xi = r/r_{\text{вх}} \ll 1; \quad \kappa = r/r_{\text{н}} = 1,$$

то

$$S_{\text{ФПУ}} = S_{\text{насп}}.$$

Однако часто удобно ввести в рассмотрение крутизну

$$\dot{S}_{\text{пр}}(f) = \dot{E}_{\sim}(f)/\dot{\Phi}(f),$$

т. е.

$$\dot{S}_{\text{пр}}(f) = S_0 S_{\text{вкл. х. х}} \dot{k}_{\text{пр}}(f) = S_{\text{пр}0} \dot{k}_{\text{пр}}(f),$$

где

$$S_{\text{пр}0} = S_0 S_{\text{вкл. х. х}} = \lim_{f \rightarrow 0} S_{\text{пр}}(f),$$

причем для фоторезистора

$$S_{\text{пр}0} = S_{\text{насп}} 4\kappa/(1 + \kappa)^2,$$

и в большинстве случаев

$$\dot{k}_{\text{пр}}(f) = 1/(1 + j2\pi f \tau_{\text{пр}}).$$

Вводя в рассмотрение крутизну $\dot{S}_{\text{пр}}(f)$, мы считаем приемником излучения совокупность из собственно приемника и цепи его включения, работающей без нагрузки (на холостом ходу). Кроме того обычно неудобно пользоваться крутизной преобразования приемника для постоянной составляющей потока излучения $S_{\text{пр}0}$. Предпочтительнее задавать значение модуля $|\dot{S}_{\text{пр}}(f)|$ на некоторой фиксированной и заранее обусловленной частоте f_0 , т. е. $S_{\text{пр}}(f_0) = |\dot{S}_{\text{пр}}(f)|_{f=f_0}$. Тогда можно найти

$$\dot{S}_{\text{пр}}(f) = S_{\text{пр}}(f_0) \dot{K}'_{\text{пр}}(f);$$

где

$$\dot{K}'_{\text{пр}}(f) = \dot{S}_{\text{пр}}(f)/S_{\text{пр}}(f_0) = [S_{\text{пр}0}/S_{\text{пр}}(f_0)] \dot{k}_{\text{пр}}(f) = \dot{k}_{\text{пр}}(f)/k_{\text{пр}}(f_0),$$

$$k_{\text{пр}}(f_0) = S_{\text{пр}}(f_0)/S_{\text{пр}0}.$$

Если приемник эквивалентен аperiodическому звену, то

$$\dot{S}_{\text{пр}}(f) = S_{\text{пр}0}/(1 + j2\pi f \tau_{\text{пр}}); \quad S_{\text{пр}}(f_0) = S_{\text{пр}0}/\sqrt{1 + (2\pi f_0 \tau_{\text{пр}})^2};$$

$$\dot{k}_{\text{пр}}(f) = 1/(1 + j2\pi f \tau_{\text{пр}});$$

$$\dot{K}'_{\text{пр}}(f) = \sqrt{1 + (2\pi f_0 \tau_{\text{пр}})^2}/(1 + j2\pi f \tau_{\text{пр}}) = \dot{k}_{\text{пр}}(f) \sqrt{1 + (2\pi f_0 \tau_{\text{пр}})^2}.$$

Для частот модуляции, удовлетворяющих условию $2\pi f \tau_{\text{пр}} \ll 1$, $\dot{K}'_{\text{пр}}(f) = \dot{k}_{\text{пр}}(f)$.

В основу дальнейших расчетов положим две основные формулы для спектра сигнала на выходе усилителя:

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{U}_0(f) \dot{S}_c(f); \quad \tilde{u}_c(f) = \tilde{E}_{\sim 0}(f) \dot{K}_c(f).$$

Формулы соответствуют блок-схеме, представленной на рис. 342,б, которая получена из схемы рис. 342, а для случая, когда справедливо линейное приближение.

При этом легко установить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_0(f) &= U_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f) = S_0 \Phi_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f); \\ \tilde{E}_{\sim 0}(f) &= \tilde{U}_0(f) S_{\text{вкл. х. х}} = S_0 S_{\text{вкл. х. х}} \Phi_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f); \\ \tilde{E}_{\sim 0}(f) &= S_{\text{пр}0} \Phi_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f) = S_{\text{пр}}(f_0) \sqrt{1 + (2\pi f_0 \tau_{\text{пр}})^2} \Phi_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f) = \\ &= \frac{S_{\text{пр}}(f_0)}{k_{\text{пр}}(f_0)} \Phi_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f).\end{aligned}$$

Кроме того, будем иметь в виду, что

$$\begin{aligned}\dot{S}_c(f) &= S_{\text{вкл. х. х}} \dot{K}_c(f); \quad \dot{S}_c(f) = S_{\text{вкл. х. х}} \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f); \\ \dot{K}_c(f) &= \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f).\end{aligned}$$

Если обозначить

$$|\dot{S}_c(f)|_{\text{max}} = S_{\text{max}}; \quad |\dot{K}_c(f)|_{\text{max}} = K_{\text{max}},$$

причем

$$S_{\text{max}} = S_{\text{вкл. х. х}} K_{\text{max}},$$

то относительное значение крутизны и коэффициента передачи электронного тракта прибора

$$\dot{k}_c(f) = \dot{S}_c(f) / S_{\text{max}} = \dot{K}_c(f) / K_{\text{max}}.$$

В этом случае исходные выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_c(f) &= \tilde{U}_0(f) S_{\text{max}} \dot{k}_c(f); \\ \tilde{u}_c(f) &= \tilde{E}_{\sim 0}(f) K_{\text{max}} \dot{k}_c(f),\end{aligned}$$

где $\tilde{E}_{\sim 0}(f)$ представляет собой спектральную плотность э. д. с., действующую во входной цепи сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником.

Очевидно, что

$$\tilde{E}_{\sim 0}(f) = \tilde{E}_{\sim 0}(f) \dot{k}_{\text{пр}}(f).$$

Заметим, что в хорошо согласованной схеме величины K_{max} и S_{max} определяются в основном максимальным значением коэффициента усиления усилителя и во всяком случае задаются на той частоте, где усилитель обеспечивает наибольшее усиление. Действительно, пусть на частоте f_m усилитель имеет максимальное усиление $K_{\text{ус max}}$. Входная цепь должна быть рассчитана таким образом, чтобы на этой частоте ее коэффициент передачи был также максимальным, равным обычно отношению $r_{\text{вх}} / (r_i + r_{\text{вх}})$, где $r_{\text{вх}}$ — входное сопротивление усилителя, r_i — внутреннее сопротивление источника сигнала (приемника излучения и его цепи включения). Инерционность приемника в рабочей области спектра электрических

сигналов и, в частности, на частоте f_m также не должна оказывать влияния, т. е. $|\dot{k}_{\text{пр}}(f_m)| = 1$, следовательно, как правило,

$$K_{\text{max}} = [r_{\text{вх}}/(r_i + r_{\text{вх}})] K_{\text{ус max}},$$

соответственно

$$S_{\text{max}} = S_{\text{вкл. х. х}} K_{\text{max}}.$$

Крутизна $S_{\text{вкл. х. х}}$ — определяется схемой включения приемника. Максимальное значение сигнала на выходе усилителя равно

$$\begin{aligned} u_{\text{с max}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_{\text{с}}(f) e^{j2\pi f t_0} df = K_{\text{max}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{\sim 0}(f) \dot{k}_{\text{с}}(f) e^{j2\pi f t_0} df = \\ &= \Phi_0 t_{\text{вх}} \frac{S_{\text{пр}}(f_0)}{k_{\text{пр}}(f_0)} K_{\text{max}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) \dot{k}_{\text{с}}(f) e^{j2\pi f t_0} df. \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\Delta f_{\text{с}}(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) \dot{k}_{\text{с}}(f) e^{j2\pi f t_0} df,$$

найдем

$$u_{\text{с max}} = \Phi_0 t_{\text{вх}} \frac{S_{\text{пр}}(f_0)}{k_{\text{пр}}(f_0)} K_{\text{max}} \Delta f_{\text{с}}(t_0).$$

В свою очередь, дисперсия шума на выходе усилителя может быть вычислена, если известна величина $E(f_0)$ — спектральная плотность шума на входе электронной схемы прибора, определенная на заранее выбранной частоте f_0 (рис. 342). Действительно, дисперсия шума на выходе в элементарной полосе частот df равна

$$\begin{aligned} \overline{du_{\text{ш}}^2} &= E(f) |\dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f)|^2 df = E(f_0) \varepsilon(f) |\dot{K}_{\text{с}}(f)/\dot{k}_{\text{пр}}(f)|^2 df = \\ &= E(f_0) K_{\text{max}}^2 \varepsilon(f) |\dot{k}_{\text{с}}(f)/\dot{k}_{\text{пр}}(f)|^2 df. \end{aligned}$$

Полученное выражение можно записать также в другом виде, введя в него коэффициент передачи приемника излучения для частоты f_0 , на которой определены значения $E(f_0)$ и $S_{\text{пр}}(f_0)$. Так как

$$\dot{k}_{\text{пр}}(f) = k_{\text{пр}}(f_0) \dot{K}'_{\text{пр}}(f),$$

то

$$\overline{du_{\text{ш}}^2} = \frac{E(f_0)}{k_{\text{пр}}^2(f_0)} K_{\text{max}}^2 \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}'_{\text{пр}}(f)|^2} |\dot{k}_{\text{с}}(f)|^2 df.$$

Следовательно, можно найти

$$\overline{u_{\text{ш}}^2} = \frac{E(f_0)}{k_{\text{пр}}^2(f_0)} K_{\text{max}}^2 \Delta f_{\text{ш}},$$

где

$$\Delta f_{\text{ш}} = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}'_{\text{пр}}(f)|^2} |\dot{k}_{\text{с}}(f)|^2 df.$$

Если использовать отрицательные частоты, когда спектральная плотность шума и модули коэффициентов передачи электронных схем являются четными функциями частоты, то можно определить шумовую полосу пропускания в виде

$$\Delta f_{ш1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}_{np}(f)|^2} |k_c(f)|^2 df,$$

где

$$\varepsilon(f) = E_1(f)/E_1(f_0) = E(f)/E(f_0).$$

В этом случае

$$\overline{u_{ш}^2} = \frac{E_1(f_0)}{k_{np}^2(f_0)} K_{max}^2 \Delta f_{ш1},$$

причем

$$E_1(f_0) = E(f_0)/2,$$

а

$$\Delta f_{ш1} = 2\Delta f_{ш}.$$

Отношение максимума (пики) сигнала к среднеквадратическому значению шума

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{u_{c \max}}{\sqrt{\overline{u_{ш}^2}}} = \frac{\Phi_0 t_{вх} \frac{S_{np}(f_0)}{k_{np}(f_0)} K_{max} \Delta f_c(t_0)}{\frac{K_{max}}{k_{np}(f_0)} \sqrt{E_1(f_0) \Delta f_{ш1}}} = \\ &= \frac{\Phi_0}{\sqrt{E(f_0)/S_{np}(f_0)}} \sqrt{2t_{вх}} \frac{t_{вх} \Delta f_c(t_0)}{\sqrt{t_{вх} \Delta f_{ш1}}}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi_{ш1}(f_0) = \sqrt{E(f_0)/S_{np}(f_0)}; \quad \rho_0 = \frac{t_{вх} \Delta f_c(t_0)}{\sqrt{t_{вх} \Delta f_{ш1}}}.$$

Очевидно, что $\Phi_{ш1}(f_0)$ представляет собой пороговый поток фотоприемника (эквивалентную мощность шума) на частоте f_0 в единичной полосе частот 1 Гц. Значение коэффициента ρ_0 будет выявлено позже.

Тогда найдем

$$\rho = \rho_0 \frac{\Phi_0}{\Phi_{ш1}(f_0)} \sqrt{2t_{вх}},$$

причем $\Phi_{ш1}(f_0) = \Phi_n^*(f_0) \sqrt{A_{np}}$.

Отсюда следует, что в лучшем случае отношение сигнала к шуму на выходе усилителя достигает величины, равной отношению полного потока излучения от цели Φ_0 к пороговому потоку фотоприемника в полосе 1 Гц. Оно пропорционально корню квадратному из времени измерения.

Установим связь ранее введенного в рассмотрение коэффициента запаса $p = \Phi_0/\Phi_n$ с величиной $\rho = u_{c \max}/u_{ш}$. Так как

$$p = \Phi_0/[\Phi_n^*(f_0) \sqrt{A_{ш} \Delta f_{ш}}], \text{ а } \rho = \rho_0 \Phi_0 \sqrt{2t_{вх}}/[\Phi_n^*(f_0) \sqrt{A_{ш}}],$$

то можно найти

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho_0 \sqrt{2t_{вх} \Delta f_{ш}}} = \frac{\sqrt{t_{вх} \Delta f_{ш1}}}{t_{вх} \Delta f_c(t_0) \sqrt{2t_{вх} \Delta f_{ш}}},$$

так как $\Delta f_{ш1} = 2\Delta f_{ш}$, то

$$p = \rho/[t_{вх} \Delta f_c(t_0)].$$

Смысл полученного соотношения совершенно ясен. Поскольку коэффициент запаса p представляет собой отношение мощности сигнала к мощности шума, он не учитывает длительности и спектрального состава сигнала, т. е. его определение относится только к длительным стационарным сигналам, например постоянному по величине потоку излучения, подвергнутому модуляции. Второе же определение отношения сигнала к шуму, обозначенного через ρ , применимо к импульсным сигналам, имеющим конечную длительность и форму импульса, характеризующиеся временем $t_{вх}$ и полосой пропускания $\Delta f_c(t_0)$.

Уравнение дальности при обнаружении точечного источника можно, следовательно, представить в виде

$$R = \left[\frac{\pi}{4} I T_0 \frac{D \ddot{O}}{\delta} \frac{D^*(f_0)}{\rho} \rho_0 \sqrt{2t_{вх}} \right]^{1/2},$$

где $I = LA_{ист} \cos \theta$ — сила света (излучения) источника, угловые размеры которого малы по сравнению с мгновенным полем зрения оптической системы прибора.

Чувствительность прибора для малоразмерного и протяженного источников соответственно равна:

$$I = \frac{4}{\pi} \frac{\rho}{D^*(f_0) T_0} \frac{\delta}{D \ddot{O}} \frac{R^2}{\rho_0 \sqrt{2t_{вх}}};$$

$$L = \frac{4}{\pi} \frac{\rho}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D \ddot{O} \delta} \frac{1}{\rho_0 \sqrt{2t_{вх}}},$$

$$\Delta T = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{\rho}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D \ddot{O} \delta} \frac{1}{\rho_0 \sqrt{2t_{вх}}} \frac{1}{(\Delta \ln \lambda)_{эф}}.$$

Все величины измеряются в следующих единицах: I в Вт/ср, L в Вт/(см²·ср), $D^*(f_0)$ в см·Гц^{1/2}/Вт, D в см, R в см, δ в рад (для I и L вычисляются эффективные значения).

§ 20.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДАЛЬНОСТИ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННОГО ПРИБОРА

Полученные в предыдущем разделе уравнения дальности и чувствительности оптико-электронного прибора требуют для их решения вычисления двух величин

$$\rho = u_{c \max}/u_{ш} \text{ и } \rho_0 = t_{вх} \Delta f_c(t_0) / \sqrt{t_{вх} \Delta f_{ш1}}.$$

Запишем выражение для ρ_0^2 в развернутом виде

$$\rho_0^2 = t_{\text{вх}} \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) \dot{k}_c(f) e^{i2\pi f t_0} df \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} |\dot{k}_c(f)|^2 df}.$$

Воспользуемся неравенством Шварца—Буняковского, устанавливающим связь между квадратом модуля интеграла произведения двух произвольных комплексных чисел $\dot{A}(f)$ и $\dot{B}(f)$ и произведением интегралов квадратов модулей этих чисел

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}(f) \dot{B}(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{A}(f)|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{B}(f)|^2 df.$$

Так как $\dot{A}(f)$ и $\dot{B}(f)$ — произвольные комплексные числа, положим

$$\dot{A}(f) = \dot{k}_c(f) e^{i2\pi f t_0} \frac{V \sqrt{\varepsilon(f)}}{\dot{K}'_{\text{np}}(f)}; \quad \dot{B}(f) = \tilde{\gamma}(f) \frac{\dot{K}'_{\text{np}}(f)}{V \varepsilon(f)}.$$

Вычислим отдельно левую и правую части неравенства Шварца—Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{A}(f) \dot{B}(f) df \right|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{k}_c(f) e^{i2\pi f t_0} \frac{V \sqrt{\varepsilon(f)}}{\dot{K}'_{\text{np}}(f)} \tilde{\gamma}(f) \frac{\dot{K}'_{\text{np}}(f)}{V \varepsilon(f)} df \right|^2 = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) \dot{k}_c(f) e^{i2\pi f t_0} df \right|^2; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{A}(f)|^2 df &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} |\dot{k}_c(f)|^2 df; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{B}(f)|^2 df &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f) |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} df. \end{aligned}$$

Подставляя в неравенство Шварца—Буняковского при принятых значениях $\dot{A}(f)$ и $\dot{B}(f)$ выражение для ρ_0^2 , можно найти

$$\rho_0^2 \leq t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f) |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} df.$$

Если инерционность приемника излучения мала, то $|\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2 = 1$ и

$$\rho_0^2 \leq t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f)} df = \mu_0^2.$$

Отсюда видно, что для получения максимального значения коэффициента $\rho_0 = (\rho_0)_{\max} = \mu_0$, т. е. максимума отношения сигнала к шуму $\rho_{\max} = \mu$, неравенство должно превратиться в равенство.

Легко убедиться, что знак равенства можно обеспечить, если

$$\dot{K}_c(f) = \dot{K}_{\text{opt}}(f) = K_0 \frac{\tilde{\gamma}^*(f)}{\varepsilon(f) |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} e^{-j2\pi f t_0},$$

причем относительное значение

$$\dot{k}_c(f) = \dot{k}_{\text{opt}}(f) = \dot{K}_{\text{opt}}(f) / |\dot{K}_{\text{opt}}(f)|_{\max}.$$

Относительный коэффициент передачи (усиления) системы, состоящей из инерционного звена, эквивалентного приемнику излучения, входной цепи и усилителя, можно найти следующим образом:

$$\dot{k}_c(f) = \dot{K}_c(f) / K_{\max} = \dot{k}_{\text{np}}(f) \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f) / |\dot{k}_{\text{np}}(f) \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f)|_{\max},$$

причем частота f_m , для которой имеет место равенство

$$|\dot{K}_c(f_m)| = |\dot{K}_c(f)|_{\max} = K_{\max},$$

нам неизвестна. Поэтому максимальное значение модуля коэффициента передачи оптимальной системы $|\dot{K}_{\text{opt}}(f)|_{\max}$ в общем случае не равно K_0 .

Вычислим значение относительного коэффициента передачи $\dot{k}_c(f)$, при котором неравенство Шварца—Буняковского превращается в равенство

$$\dot{k}_c(f) = \dot{k}_{\text{opt}}(f) = \frac{K_0}{|\dot{K}_{\text{opt}}(f)|_{\max}} \frac{\gamma^*(f)}{\varepsilon(f) |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} e^{-j2\pi f t_0}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) \dot{k}_c(f) e^{j2\pi f t_0} df \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} |\dot{k}_c(f)|^2 df} t_{\text{BX}} = \\ &= \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) \frac{K_0}{|\dot{K}_{\text{opt}}(f)|_{\max}} \frac{\tilde{\gamma}^*(f)}{\varepsilon(f)} |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t_0} df \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} \frac{K_0^2}{|\dot{K}_{\text{opt}}(f)|_{\max}^2} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon^2(f)} |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^4 df} t_{\text{BX}} = \\ &= \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f)} |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2 df \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f)} |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2 df} t_{\text{BX}} = t_{\text{BX}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f) |\dot{K}'_{\text{np}}(f)|^2} df = \mu_0^2. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\dot{k}_c(f) = \dot{k}_{\text{opt}}(f)$, коэффициент ρ_0^2 достигает максимального значения, обозначенного через μ_0^2 , равного

$$\mu_0^2 = t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f) |\dot{K}'_{\text{пр}}(f)|^2} df \approx t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\gamma}(f)|^2}{\varepsilon(f)} df.$$

Обратим внимание на то, что выражение для μ_0^2 содержит спектр сигнала $\tilde{\gamma}(f)$ и спектр шума $\varepsilon(f)$, действующих на *входе* системы, следовательно, оно характеризует *приходящую* смесь сигнала с шумом, т. е. потенциальные возможности выделения сигнала. *Оптимальная система* реализует эти возможности полностью, а при неоптимальной фильтрации, когда $\dot{k}_c(f) \neq \dot{k}_{\text{opt}}(f)$, эти возможности не реализуются.

Вычислим μ_0^2 для двух случаев, соответствующих действию на входе белого и гиперболического шума.

1. Для белого шума $\varepsilon(f) = 1$ и $\mu_0^2 = t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\gamma}(f)|^2 df$. Так как

$$\tilde{U}_0(f) = U_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f); \quad U_0(t) = U_0 \gamma(t),$$

то

$$\mu_0^2 = \frac{t_{\text{вх}}}{U_0^2 t_{\text{вх}}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{U}_0(f)|^2 df.$$

Поскольку в соответствии с равенством Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{U}_0(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0^2(t) dt,$$

найдем

$$\mu_0^2 = \frac{1}{U_0^2 t_{\text{вх}}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0^2(t) dt = \frac{1}{t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t) dt.$$

Если импульс имеет косинус-квадратную форму, т. е.

$$\gamma(t) = \begin{cases} \cos^2(\pi/2) t/(t_{\text{вх}}/2) & \text{при } |t| \leq t_{\text{вх}}/2, \\ 0 & \text{при } |t| > t_{\text{вх}}/2, \end{cases}$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t) dt = \int_{-t_{\text{вх}}/2}^{+t_{\text{вх}}/2} \cos^4 \frac{\pi}{2} \frac{t}{t_{\text{вх}}/2} dt.$$

Так как

$$\int \cos^4 ax dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4a} \sin 2ax + \frac{1}{32a} \sin 4ax,$$

можно найти

$$\int_{-t_{\text{вх}}/2}^{+t_{\text{вх}}/2} \cos^4 \frac{\pi}{2} \frac{t}{t_{\text{вх}}/2} dt = \frac{3}{8} t_{\text{вх}}$$

и

$$\mu_0^2 = \frac{1}{t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t) dt = \frac{3}{8}.$$

При любой форме импульса для белого шума

$$\mu_0^2 = k_{\text{и}},$$

где $k_{\text{и}}$ — коэффициент формы импульса. Для прямоугольного импульса $k_{\text{и пр}} = 1$, для косинус-квадратного $k_{\text{и.к}} = \frac{3}{8}$ и т. д.

Уравнение дальности при белом шуме

$$R^2 = \frac{\pi}{4} I T_0 \frac{D \ddot{O}}{\delta} \frac{D^*(f_0)}{\mu} \sqrt{2 k_{\text{и}} t_{\text{вх}}},$$

где μ — отношение сигнала к шуму на выходе оптимальной системы, когда $\rho_0 = \mu_0$, а $\rho = \mu$.

Чувствительность для малоразмерного I ($\text{Вт} \cdot \text{ср}^{-1}$) и протяженного L ($\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$) источников излучения равна

$$I = \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{D^*(f_0) T_0} \frac{\delta}{D \ddot{O}} \frac{R^2}{\sqrt{2 k_{\text{и}} t_{\text{вх}}}};$$

$$L = \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D \ddot{O} \delta} \frac{1}{\sqrt{2 k_{\text{и}} t_{\text{вх}}}};$$

$$\Delta T = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{\mu}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D \ddot{O} \delta} \frac{1}{\sqrt{2 k_{\text{и}} t_{\text{вх}}}} \frac{1}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}}.$$

Следовательно, при белом шуме дальность действия и чувствительность прибора зависят от длительности импульса (скорости сканирования).

2. Для гиперболического шума $\varepsilon(f) = f_0/|f|$ и

$$\mu_0^2 = \frac{t_{\text{вх}}}{f_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f| |\tilde{\gamma}(f)|^2 df.$$

Поскольку спектр косинус-квадратного импульса равен

$$\tilde{\gamma}(f) = \text{sa}(\pi f t_{\text{вх}}) / [1 - (f t_{\text{вх}})^2],$$

можно найти

$$\mu_0^2 = \frac{t_{\text{вх}}}{f_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f| \left| \frac{\text{sa}(\pi f t_{\text{вх}})}{1 - (f t_{\text{вх}})^2} \right|^2 df = \frac{1}{\pi^2 f_0 t_{\text{вх}}} \mathcal{I}_x,$$

где

$$\mathcal{I}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{|x| [1 - (x/\pi)^2]^2} dx, \\ x = \pi f t_{\text{вх}}.$$

Интеграл \mathcal{J}_x можно вычислить, разлагая дробь $1/\{x [1 - (x/\pi)^2]^2\}$ на простейшие, что и выполнено в работе [156]. Таким образом, можно найти

$$\mathcal{J}_x = 2,2\pi,$$

следовательно,

$$\mu_0^2 = 2,2\pi/(\pi^2 f_0 t_{\text{вх}}) = 0,7/f_0 t_{\text{вх}},$$

или

$$\mu_0 = 0,837/\sqrt{f_0 t_{\text{вх}}}.$$

Уравнение дальности при гиперболическом шуме

$$R^2 = \frac{\pi}{4} I T_0 \frac{D\ddot{O}}{\delta} \frac{D^*(f_0)}{\mu} \frac{1,18}{V\bar{f}_0}.$$

Чувствительность для малоразмерного I ($\text{Вт} \cdot \text{ср}^{-1}$) и протяженного L ($\text{Вт} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$) источников излучения равна

$$I = \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{D^*(f_0) T_0} \frac{\delta}{D\ddot{O}} R^2 \frac{V\bar{f}_0}{1,18};$$

$$L = \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D\ddot{O}\delta} \frac{V\bar{f}_0}{1,18};$$

$$\Delta T = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{\mu}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D\ddot{O}\delta} \frac{V\bar{f}_0}{1,18} \frac{1}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}}$$

или

$$I = \frac{\mu V\bar{f}_0}{D^*(f_0) T_0} \frac{\delta}{D\ddot{O}} R^2; \quad L = \frac{\mu V\bar{f}_0}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D\ddot{O}\delta};$$

$$\Delta T = \frac{18,3 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{\mu V\bar{f}_0}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D\ddot{O}\delta} \frac{1}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}}.$$

Следовательно, при гиперболическом шуме дальность действия и чувствительность прибора не зависят от длительности импульса (скорости сканирования).

Необходимое отношение сигнала к шуму

В уравнения дальности и чувствительности входит коэффициент ρ , представляющий собой необходимое отношение максимума сигнала к среднеквадратическому значению шума на выходе усилителя. Для оптимальной системы ρ принимает максимальное значение, равное μ . Для нормального закона распределения вероятностей эту величину можно выразить через вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги следующим образом.

Вероятность обнаружения сигнала $P_{\text{обн}}$ равна вероятности того, что пик сигнала $u_{\text{с max}}$, сложившись с выбросом шума u , превысит порог срабатывания порогового устройства u_0 , т. е.

$$P_{\text{обн}} = P(u_{\text{с max}} + u > u_0).$$

Очевидно, что

$$P(u_{\text{с max}} + u > u_0) = P(u > u_0 - u_{\text{с max}}).$$

Введем обозначения

$$z = u / \sqrt{u_{\text{ш}}^2} = u/u_{\text{ш}}, \quad y = u_0/u_{\text{ш}};$$

$$\rho = u_{\text{с max}}/u_{\text{ш}}, \quad z_0 = y - \rho,$$

тогда

$$P_{\text{обн}} = P(z > z_0).$$

Для нормального закона

$$P(z > z_0) = 0,5 [1 - \Phi(z_0)],$$

где $\Phi(z_0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_0} e^{-z^2/2} dz$ — табулированный интеграл вероятности Лапласа (рис. 270). Следовательно,

$$P_{\text{обн}} = 0,5 [1 - \Phi(y - \rho)],$$

или

$$\Phi(y - \rho) = 1 - 2P_{\text{обн}}.$$

Это же выражение можно получить более строго. Рассмотрим плотность распределения вероятностей $p(u)$ случайной величины u — сечения случайной функции $u(t)$ — в момент $t = t_0$, когда имеет место максимум (пик) сигнала. Если это распределение подчиняется нормальному закону, то

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u_{\text{ш}}^2}} e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2u_{\text{ш}}^2}}.$$

Так как напряжение шума на выходе усилителя не имеет постоянной составляющей, очевидно, что \bar{u} определяется сигналом, который в момент t_0 достигает максимального значения $u_{\text{с max}}$. Найдем вероятность того, что $u > u_0$:

$$P(u > u_0) = \int_{u_0}^{\infty} p(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi u_{\text{ш}}^2}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-\frac{(u-\bar{u})^2}{2u_{\text{ш}}^2}} du.$$

Обозначая, $z_0 = (u_0 - \bar{u})/\sigma$ и $z = (u - \bar{u})/\sigma$; $\sigma = \sqrt{u_{\text{ш}}^2}$, найдем

$$P_{\text{обн}} = P(z > z_0) = 0,5 [1 - \Phi(z_0)],$$

но

$$z_0 = (u_0 - \bar{u})/\sigma = u_0/\sigma - \bar{u}/\sigma = u_0/u_{\text{ш}} - u_{\text{с max}}/u_{\text{ш}} = y - \rho,$$

где

$$y = u_0/u_{\text{ш}}, \quad \rho = u_{\text{с max}}/u_{\text{ш}},$$

следовательно,

$$\Phi(y - \rho) = 1 - 2P_{\text{обн}}.$$

Пусть, например, $P_{\text{обн}} = 0,9$, тогда $\Phi(y - \rho) = 0,8$, но $\Phi(-z_0) = -\Phi(z_0)$, т. е. $\Phi(\rho - y) = 0,8$. По таблицам или графику (см рис. 270) находим $\rho - y = 1,3$, или $\rho = 1,3 + y$.

Вероятность ложной тревоги $P_{л.т}$ можно найти аналогичным образом, хотя далее будет дано несколько иное определение. Действительно, в отсутствии сигнала, когда $\bar{u} = 0$, вероятность превышения уровня u_0 только шумом u равна

$$P_{л.т} = 0,5 [1 - \Phi(y)],$$

или

$$\Phi(y) = 1 - 2P_{л.т}.$$

Если воспользоваться обратными функциями Лапласа $\bar{\Phi}$, можно найти

$$\bar{\Phi}(1 - 2P_{л.т}) = y; \quad \bar{\Phi}(1 - 2P_{обн}) = y - \rho,$$

т. е.

$$\bar{\Phi}(1 - 2P_{обн}) = \bar{\Phi}(1 - 2P_{л.т}) - \rho.$$

В оптимальной системе $\rho = \mu$.

Таким образом, мы можем определить величины y и ρ , т. е. порог ограничения и отношение сигнала к шуму, задаваясь значениями вероятностей обнаружения и ложной тревоги. Однако остается невыясненным один крайне важный вопрос: как часто в системе с порогом y будут иметь место ложные тревоги? Следовательно, нужно установить связь между порогом ограничения y и временем между ложными тревогами $T_{л.т}$ при заданной вероятности ложных тревог $P_{л.т}$.

При нормальном законе распределения среднее число выбросов шума в секунду за уровень u_0 равно:

$$N(u_0) = f_{ш} e^{-u_0^2 / (2\bar{u}_{ш}^2)}; \quad N(y) = f_{ш} e^{-y^2 / 2},$$

где $f_{ш} = \sqrt{\bar{f}_{ш}^2}$; $f_{ш}$ — среднеквадратическое значение частоты шума; $\bar{f}_{ш}^2$ — дисперсия частоты шума.

Дисперсию частоты шума можно найти через спектральную плотность шума $E(f)$. Действительно, спектральная плотность электрического напряжения шума представляет собой мощность шума, приходящуюся на единичный интервал частот

$$E(f) = \frac{d\bar{u}_{ш}^2}{df}.$$

Очевидно, что эта величина [в нормализованном виде, т. е. $E(f)/\bar{u}_{ш}^2$] определяет плотность вероятности случайной величины f — частоты шума, т. е. вероятность того, что f лежит в диапазоне частот от f до $f + df$. Чем больше $E(f)$, т. е. чем большая дисперсия $d\bar{u}_{ш}^2$ приходится на элементарный интервал частот от f до $f + df$, тем больше вероятность наличия данной частоты f в общем шумовом спектре.

Следовательно, плотность вероятности случайной частоты шума равна

$$\rho(f) = E(f)/\bar{u}_{ш}^2,$$

а дисперсия

$$\overline{f_{\text{ш}}^2} = \int_0^{\infty} f^2 p(f) df = \int_0^{\infty} f^2 \frac{E(f)}{u_{\text{ш}}^2} df = \frac{\int_0^{\infty} f^2 E(f) df}{u_{\text{ш}}^2} = \frac{\int_0^{\infty} f^2 E(f) df}{\int_0^{\infty} E(f) df}.$$

Так как относительная спектральная плотность шума

$$\varepsilon(f) = E(f)/E(f_0),$$

то

$$\overline{f_{\text{ш}}^2} = \int_0^{\infty} f^2 \varepsilon(f) df / \int_0^{\infty} \varepsilon(f) df.$$

Например, если белый шум, для которого $\varepsilon(f) = 1$, действует в ограниченной полосе частот от 0 до $f_{\text{в}}$, то

$$\overline{f_{\text{ш}}^2} = \int_0^{f_{\text{в}}} f^2 df / \int_0^{f_{\text{в}}} df = f_{\text{в}}^2/3, \quad f_{\text{ш}} = \sqrt{\overline{f_{\text{ш}}^2}} = f_{\text{в}}/1,7,$$

что примерно равно средней частоте полосы пропускания $f_0 = f_{\text{в}}/2$.

Так как среднее время между двумя выбросами шума

$$\overline{T} = 1/N(y) = 1/(f_{\text{ш}} e^{-y^2/2}) = e^{y^2/2}/f_{\text{ш}},$$

то

$$y = \sqrt{2 \ln(f_{\text{ш}} \overline{T})}.$$

Н. С. Шестов определяет выброс шума как участок кривой $u(t)$, на котором она идет выше уровня u_0 . При таком определении для выброса характерно наличие одного пересечения уровня u_0 с положительным наклоном кривой (начало выброса) и одного — с отрицательным наклоном кривой (конец выброса). Это определение устраняет неточность, возможную при определении выброса как максимума кривой при условии, что этот максимум превысил порог u_0 , так как выброс может иметь несколько максимумов (рис. 343). В этом случае им получено

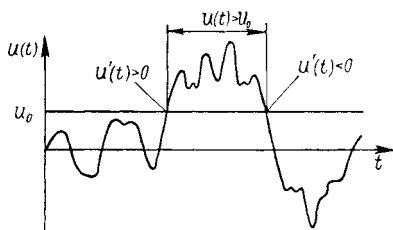


Рис. 343. Определение выброса шума по методу Н. С. Шестова

выражение для y , точно совпадающее с приведенным выше, в котором $\overline{f_{\text{ш}}^2}$ имеет смысл среднего квадрата частоты выходного процесса.

Далее необходимо установить связь между \overline{T} и произвольным заранее заданным временем, в течение которого не допускается выбросов шума за уровень u_0 , временем ложной тревоги $T_{\text{л. т.}}$.

Среднее число выбросов шума в течение произвольного времени $T_{л.т}$ равно

$$\bar{n} = T_{л.т} N(y) = T_{л.т} / \bar{T},$$

т. е.

$$\bar{T} = T_{л.т} / \bar{n}.$$

Так как за уровнем u_0 (или $y = u_0/u_{ш}$) появляются лишь редкие выбросы шума, то их распределение описывается законом редких явлений — законом Пуассона.

Поэтому вероятность появления k выбросов шума за заданный уровень равна

$$P(k) = [(\bar{n})^k / k!] e^{-\bar{n}}.$$

Когда $k = 0$, т. е. нет ни одного выброса,

$$P(0) = e^{-\bar{n}}, \quad \bar{n} = -\ln P(0).$$

Вероятность появления хотя бы одного выброса шума — вероятность ложной тревоги, в свою очередь,

$$P_{л.т} = 1 - P(0),$$

следовательно,

$$\bar{n} = -\ln(1 - P_{л.т}),$$

$$\bar{T} = T_{л.т} / \bar{n} = T_{л.т} / -\ln(1 - P_{л.т}).$$

Окончательно получим

$$y = \{2 \ln [f_{ш} \bar{T}]\}^{1/2} = \left\{ 2 \ln \left[\frac{T_{л.т}}{-\ln(1 - P_{л.т})} \left(\int_0^\infty f^2 \epsilon(f) df \int_0^\infty \epsilon(f) df \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}.$$

Например, при $P_{л.т} = 0,5$ $\bar{T} = T_{л.т} / -\ln(1 - 0,5) = T_{л.т} / \ln 2 = 1,44 T_{л.т}$. Если $T_{л.т} = 15$ ч $= 5,4 \cdot 10^4$ с, а $f_{ш} = 2000$ Гц, то

$$y = \sqrt{2 \ln(2000 \cdot 1,44 \cdot 5,4 \cdot 10^4)} = 6,142.$$

Следовательно, необходимое отношение сигнала к шуму для условий предыдущего примера (см. с. 548) равно $\rho = 1,3 + y = 1,3 + 6,142 = 7,44$.

Напряжение срабатывания порогового устройства (порог ограничения)

$$u_0 = y u_{ш} = 6,142 u_{ш},$$

а

$$u_{с max} = \rho u_{ш} = 7,44 u_{ш}.$$

Глава 21

ОПТИМАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР, ЕГО СТРУКТУРА И СПОСОБЫ РЕАЛИЗАЦИИ

§ 21.1. СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА И ЕГО ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Оптимальным фильтром называют такую линейную систему обнаружения сигнала с полнотью известными параметрами, которая осуществляет обнаружение наилучшим образом, т. е. обеспечивает максимум отношения сигнала к шуму на выходе при заданных вероятностях обнаружения и ложной тревоги.

Структура оптимального фильтра

В предыдущей главе было установлено, что для получения максимума отношения пика сигнала к среднеквадратическому значению шума необходимо, чтобы коэффициент

$$\rho_0^2 = [t_{\text{вх}} \Delta f_c(t_0) / \sqrt{t_{\text{вх}} \Delta f_{\text{ш}}}]^2$$

имел максимальное значение $\rho_0^2 = \mu_0^2$, равное

$$\mu_0^2 = t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{y}(f)|^2}{\varepsilon(f) |\dot{K}_{\text{пр}}(f)|^2} df.$$

В свою очередь $\rho_0^2 = \mu_0^2$, если произведение коэффициентов передачи приемника, входной цепи и усилителя $\dot{K}_c(f)$ равно некоторой оптимальной величине

$$\dot{K}_{\text{опт}}(f) = K_0 \frac{\tilde{y}^*(f)}{\varepsilon(f) |\dot{K}_{\text{пр}}(f)|^2} e^{-j2\pi f t_0},$$

которая и определяет структуру оптимального фильтра. Так как амплитудно-частотная характеристика (модуль коэффициента передачи) приемника излучения $|\dot{K}_{\text{пр}}(f)|$ лишь корректирует спектральное распределение шума приемника $\varepsilon(f)$, приводя его к той же точке тракта прибора, в которой определен спектр сигнала $\tilde{y}(f)$, а сам спектр $\varepsilon(f)$ мы полагаем произвольным, не будет большой ошибки, если в последующих расчетах примем $|\dot{K}_{\text{пр}}(f)| = 1$, т. е. предположим, что в рабочем диапазоне частот инерционность приемника не имеет значения ($2\pi f \tau_{\text{пр}} \ll 1$). Тогда выражения для μ_0 и $\dot{K}_{\text{опт}}(f)$ упрощаются:

$$\mu_0^2 = t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{y}(f)|^2}{\varepsilon(f)} df; \quad \dot{K}_{\text{опт}}(f) = K_0 [\tilde{y}^*(f)/\varepsilon(f)] e^{-j2\pi f t_0}.$$

Исследуем структуру оптимального фильтра, имея в виду, что

$$\dot{K}_{\text{опт}}(f) = |\dot{K}_{\text{опт}}(f)| e^{j\varphi_R(f)},$$

где $|K_{\text{opt}}(f)| = K_{\text{opt}}(f) = K_0 |\tilde{\gamma}^*(f)| / \varepsilon(f)$ — амплитудно-частотная (амплитудная) характеристика фильтра; $\varphi_h(f)$ — фазо-частотная (фазовая) характеристика фильтра.

Амплитудно-частотная характеристика

Для белого шума $\varepsilon(f) = 1$ и амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра равна

$$K_{\text{opt}}(f) = K_0 |\tilde{\gamma}^*(f)| = K_0 |\tilde{\gamma}(f)|.$$

В частности, для косинус-квадратного импульса имеем

$$K_{\text{opt}}(f) = \frac{\text{sa}(\pi f t_{\text{BX}})}{1 - (f t_{\text{BX}})^2} K_0, \quad k_{\text{opt}}(f) = K_{\text{opt}}(f) / K_0.$$

Форма относительной амплитудно-частотной характеристики представлена на рис. 344 (кривая 1), кроме того, необходимые сведения об этой характеристике могут быть получены из графиков на рис. 273—275. Легко убедиться, что относительная амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра соответствует спектру сигнала, т. е. она лишь незначительно искажает его форму, так как уменьшение коэффициента передачи фильтра имеет место для тех спектральных составляющих сигнала, относительный вклад которых меньше, вплоть до того, что коэффициент передачи равен нулю только на тех частотах, на которых сигнал отсутствует. В то же время она существенно ослабляет шум, спектр которого на выходе фильтра соответствует спектру входного сигнала, т. е. дисперсия шума резко уменьшается, так как на входе дисперсия белого шума бесконечно велика.

Для окрашенного (гиперболического) шума $\varepsilon(f) = f_0 / |f|$ и амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра равна

$$K_{\text{opt}}(f) = K_0 |\tilde{\gamma}(f)| / f_0.$$

В частности, для косинус-квадратного импульса имеем

$$K_{\text{opt}}(f) = \frac{K_0}{f_0} \left| f \frac{\sin(\pi f t_{\text{BX}})}{(\pi f t_{\text{BX}})(1 - f^2 t_{\text{BX}}^2)} \right| = \frac{K_0}{\pi f_0 t_{\text{BX}}} \frac{|\sin \pi f t_{\text{BX}}|}{1 - (f t_{\text{BX}})^2}.$$

Обозначим $\pi f t_{\text{BX}} = x$, тогда

$$K_{\text{opt}}(x) = \frac{K_0}{\pi f_0 t_{\text{BX}}} \frac{|\sin x|}{1 - (x/\pi)^2}.$$

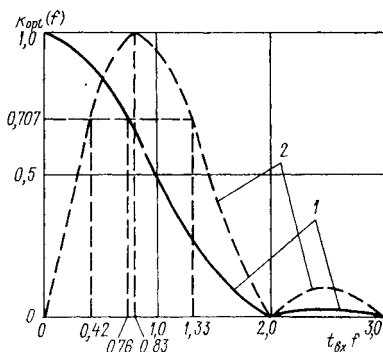


Рис. 344. Амплитудно-частотные характеристики оптимального фильтра для косинус-квадратного импульса на фоне белого (1) и гиперболического (2) шума

Найдем $x = x_0$, при котором величина $K_{\text{opt}}(x)$ максимальна. Из выражения

$$\frac{\partial K_{\text{opt}}(x)}{\partial x} = \frac{K_0}{\pi f_0 t_{\text{вх}}} \left[\frac{\cos x (1 - x^2/\pi^2) + 2x \sin x}{(1 - x^2/\pi^2)^2} \right] = 0$$

можно найти

$$\cos^2 x_0 = 4x_0^2 / [(x_0^2 - x_0^2)^4 + 4x_0^2],$$

отсюда

$$x_0 = (5/6) \pi \approx 2,62, \text{ или } f_0 t_{\text{вх}} \approx 0,83.$$

Следовательно,

$$[K_{\text{opt}}(x)]_{\text{max}} = K_{\text{opt}}(x_0) = 1,636 K_0 / (\pi f_0 t_{\text{вх}});$$

$$k_{\text{opt}}(x) = \frac{K_{\text{opt}}(x)}{K_{\text{opt}}(x_0)} = \frac{0,61 |\sin x|}{[1 - (x/\pi)^2]}.$$

Форма относительной амплитудно-частотной характеристики представлена на рис. 344 (кривая 2). В этом случае амплитудно-частотная характеристика «вынуждена» уменьшать спектральную плотность сигнала там, где она существенна — на низких частотах, а при $f = 0$ коэффициент передачи фильтра равен нулю. Это связано с необходимостью наилучшим образом подавить шум, так как при $f \rightarrow 0$ его спектральная плотность $\varepsilon(f) \rightarrow \infty$. Следовательно, и в этом случае главная «обязанность» амплитудно-частотной характеристики оптимального фильтра — уменьшение уровня шума.

Поскольку $\rho_0 = t_{\text{вх}} \Delta f_c(t_0) / \sqrt{t_{\text{вх}} \Delta f_{\text{ш}}}$, а при белом шуме и прямоугольном импульсе для оптимального фильтра $\rho_0 = \mu_0 = 1$, $t_{\text{вх}} \Delta f_c(t_0) = 1$, то в этом случае

$$\Delta f_{\text{ш}} = 2 \Delta f_{\text{ш}} = 1/t_{\text{вх}}.$$

Фазо-частотная или фазовая характеристика

Представим безразмерный спектр сигнала в виде

$$\tilde{\gamma}(f) = |\tilde{\gamma}(f)| e^{i\varphi_{\gamma}(f)},$$

где $|\tilde{\gamma}(f)|$ — амплитудно-частотная характеристика спектра сигнала; $\varphi_{\gamma}(f)$ — фазовая характеристика спектра сигнала.

Комплексный коэффициент передачи оптимального фильтра, в свою очередь, равен

$$\dot{K}_{\text{opt}}(f) = |\dot{K}_{\text{opt}}(f)| e^{i\varphi_k(f)},$$

где $|\dot{K}_{\text{opt}}(f)|$ — амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра; $\varphi_k(f)$ — фазовая характеристика оптимального фильтра.

Так как

$$\dot{K}_{\text{opt}}(f) = K_0 [\tilde{\gamma}^*(f)/\varepsilon(f)] e^{-j2\pi f t_0},$$

то, учитывая, что

$$\tilde{\gamma}^*(f) = |\tilde{\gamma}(f)| e^{-j\varphi_{\gamma}(f)},$$

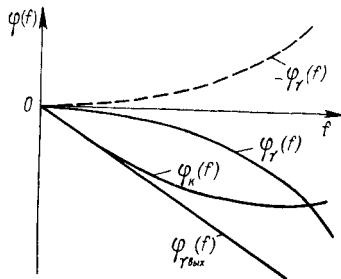
можно найти

$$\dot{K}_{\text{opt}}(f) = K_0 [|\tilde{\gamma}(f)|/\varepsilon(f)] e^{-j[2\pi f t_0 + \varphi_{\gamma}(f)]}.$$

Следовательно, фазовая характеристика оптимального фильтра может быть представлена в виде

$$\varphi_k(f) = -\varphi_{\gamma}(f) - 2\pi f t_0.$$

Анализ полученного выражения показывает, что первое слагаемое его правой части — $\varphi_{\gamma}(f)$ осуществляет компенсацию начальных фаз в спектре сигнала, т. е. каждая компонента спектра сигнала, имеющая фазу $+\varphi_{\gamma}(f)$, компенсируется фильтром. Если бы не второе слагаемое, то сложение всех составляющих спектра с нулевыми начальными фазами должно было привести к образованию пика сигнала в момент $t = 0$, поскольку именно при $t = 0$ и нулевых начальных фазах совпадают амплитуды всех гармонических составляющих спектра. Однако второе слагаемое — $2\pi f t_0$ сдвигает фазы гармоник пропорционально их частоте так, что амплитуды всех гармоник совпадут в момент времени $t = t_0$, где и образуется пик сигнала. Фазовые характеристики спектра входного сигнала, фильтра и спектра выходного сигнала показаны на рис. 345.



Фазовая характеристика спектра выходного сигнала равна

$$\begin{aligned}\varphi_{\gamma_{\text{вых}}}(f) &= \varphi_{\gamma}(f) + \varphi_k(f) = \\ &= \varphi_{\gamma}(f) - \varphi_{\gamma}(f) - 2\pi f t_0 = -2\pi f t_0.\end{aligned}$$

Рис. 345. Фазовые характеристики оптимального фильтра. $\varphi_k(f)$ и спектров сигнала на его входе $\varphi_{\gamma}(f)$ и выходе $\varphi_{\gamma_{\text{вых}}}(f)$

Таким образом, если амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра в основном подавляет шум и лишь незначительно изменяет форму сигнала, то его фазовая характеристика совершенно не оказывает влияния на дисперсию выходного шума, в силу случайного характера фаз отдельных составляющих шума, но обеспечивает максимизацию сигнала путем такого сдвига фаз гармоник, что это обеспечивает появление пика сигнала в момент времени $t = t_0$.

§ 21.2. СИГНАЛ И ШУМ НА ВЫХОДЕ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Найдем выражения для сигнала и шума на выходе прибора с оптимальным фильтром, пользуясь представлениями о комплексном коэффициенте передачи, амплитудно-частотной и фазовой характеристиках фильтра.

Сигнал на выходе равен

$$u_c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_c(f) e^{j2\pi f t} df.$$

Спектр сигнала

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{E}_{\sim 0}(f) \dot{K}_c(f) = \tilde{E}_{\sim 0}(f) K_{\max} \dot{k}_c(f),$$

где

$$\tilde{E}_{\sim 0}(f) = \tilde{U}_0(f) S_{\text{вкл. х. х}} = S_{\text{пр } 0} \Phi_0 t_{\text{вх}} \tilde{\gamma}(f).$$

При использовании оптимального фильтра

$$\dot{K}_c(f) = \dot{K}_{opt}(f) = K_0 \frac{\tilde{Y}^*(f)}{\varepsilon(f)/|\dot{K}'_{np}(f)|^2} e^{-j2\pi f t_0},$$

т. е.

$$\tilde{u}_{c, opt}(f) = \Phi_0 t_{вх} S_{np0} K_0 \tilde{Y}(f) \frac{\tilde{Y}^*(f)}{\varepsilon(f)/|\dot{K}'_{np}(f)|^2} e^{-j2\pi f t_0},$$

и

$$u_{c, opt}(t) = \Phi_0 t_{вх} S_{np0} K_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{Y}(f)|^2}{\varepsilon(f)/|\dot{K}'_{np}(f)|^2} e^{+j2\pi f(t-t_0)} df.$$

Поскольку

$$\mu_0^2 = t_{вх} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{Y}(f)|^2}{\varepsilon(f)/|\dot{K}'_{np}(f)|^2} df,$$

то максимальное значение сигнала на выходе оптимального фильтра, имеющее место при $t = t_0$, равно

$$u_{c, opt \max} = u_{c, opt}(t_0) = \Phi_0 S_{np0} K_0 \mu_0^2.$$

Входящие в полученное выражение величины имеют следующий смысл: Φ_0 — поток излучения, падающий на приемник, когда оптическая ось сканирующего прибора точно направлена на цель (начало отсчета времени сканирования); S_{np0} — вольтовая чувствительность приемника для постоянной составляющей потока излучения

$$S_{np0} = \lim_{f \rightarrow 0} S_{np}(f),$$

K_{\max} — максимальное значение модуля коэффициента усиления электронного тракта прибора $\dot{K}_c(f)$, являющееся коэффициентом пропорциональности в соотношении

$$\dot{K}_c(f) = K_{\max} \dot{k}_c(f),$$

K_0 — коэффициент пропорциональности в выражении для коэффициента усиления оптимального фильтра

$$\dot{K}_{opt}(f) = K_0 \frac{\tilde{Y}^*(f)}{\varepsilon(f)} e^{-j2\pi f t_0}$$

[предполагается, что $K'_{np}(f) = 1$].

Обозначив произведение $\Phi_0 S_{np0} K_0 = u_{c, opt0}$, найдем

$$u_{c, opt \max} = u_{c, opt0} \mu_0^2.$$

Отсюда видно, что пиковое значение сигнала на выходе оптимального фильтра пропорционально μ_0^2 и зависит только от энергии входного сигнала (форма входного сигнала не имеет значения). Кроме того, с точностью до постоянного множителя коэффициент μ_0^2 может трактоваться как максимальное значение сигнала на выходе оптимального фильтра при белом шуме.

Найдем дисперсию шума на выходе оптимального фильтра. Так как независимо от спектрального распределения шума

$$\overline{u_{\text{ш. опт}}^2} = u_{\text{с. опт max}}^2 / \mu^2; \quad u_{\text{с. опт max}} = \Phi_0 S_{\text{пр } 0} K_0 \mu_0^2;$$

$$\mu = \frac{\Phi_0}{\sqrt{E(f_0)}} S_{\text{пр}}(f_0) \mu_0 / \sqrt{2t_{\text{вх}}}; \quad S_{\text{пр}}(f_0) = k_{\text{пр}}(f_0) S_{\text{пр } 0},$$

то

$$\overline{u_{\text{ш опт}}^2} = \frac{E(f_0)}{2t_{\text{вх}} k_{\text{пр}}^2(f_0)} K_0^2 \mu_0^2.$$

Если обозначить $\frac{E(f_0)}{2t_{\text{вх}} k_{\text{пр}}^2(f_0)} K_0^2 = \overline{u_{\text{ш опт } 0}^2}$, то

$$\overline{u_{\text{ш опт}}^2} = \overline{u_{\text{ш опт } 0}^2} \mu_0^2.$$

Отсюда следует, что коэффициент μ_0^2 равен не только пику сигнала, но и с точностью до постоянного множителя дисперсии шума на выходе оптимального фильтра.

§ 21.3. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Найдем импульсную функцию оптимального фильтра, представляющую собой преобразование Фурье от его коэффициента передачи

$$K_{\text{опт}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{K}_{\text{опт}}(f) e^{j2\pi f t} df = K_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\gamma}^*(f)}{\varepsilon(f)} e^{j2\pi f (t-t_0)} df.$$

При белом шуме

$$K_{\text{опт}}(t) = K_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}^*(f) e^{j2\pi f (t-t_0)} df,$$

но

$$\tilde{\gamma}^*(f) = \tilde{\gamma}(-f),$$

следовательно,

$$K_{\text{опт}}(t) = K_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(-f) e^{j2\pi f (t-t_0)} df.$$

Обозначим $f = -f$; тогда

$$K_{\text{опт}}(t) = K_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) e^{j2\pi f (t_0-t)} df.$$

Знак перед интегралом не изменился, так как одновременно с изменением знака при df изменились знаки у пределов интегрирования. Так как

$$\gamma(t) = t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) e^{j2\pi f t} df; \quad \gamma(t_0 - t) = t_{\text{вх}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\gamma}(f) e^{j2\pi f (t_0-t)} df,$$

то

$$K_{\text{opt}}(t) = K_0 \gamma(t_0 - t)/t_{\text{вх}}.$$

Относительная импульсная функция

$$k_{\text{opt}}(t) = (t_{\text{вх}}/K_0) K_{\text{opt}}(t)$$

является безразмерной величиной, а $K_{\text{opt}}(t)$ выражается в с^{-1} .

Построение импульсной функции оптимального фильтра показано на рис. 346. Штриховая кривая $\gamma(-t)$ является зеркальным отображением заданного сигнала $\gamma(t)$ с осью ординат в качестве оси симметрии. Функция $\gamma(t_0 - t)$, сдвинутая относительно $\gamma(-t)$ на величину t_0 вправо, также зеркальна по отношению к исходному сигналу $\gamma(t)$, но с осью симметрии, проходящей через точку $t_0/2$ на оси абсцисс.

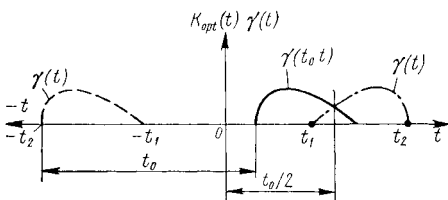


Рис. 346. Построение импульсной функции оптимального фильтра

Таким образом, импульсная функция оптимального фильтра при белом шуме имеет вид сигнала в обратном ходе времени со сдвигом на t_0 . Она сопряжена с сигналом, в связи с чем оптимальный фильтр называют иногда *сопряженным* или *согласованным*. Это с еще

большой очевидностью следует из выражения для коэффициента передачи оптимального фильтра, который пропорционален $\tilde{y}^*(f)$ — сопряженному спектру сигнала.

Импульсная функция оптимального фильтра, установленного в электронном тракте прибора, как и импульсная функция любого четырехполюсника, должна отвечать следующим *двум условиям*, называемым условиями *физической осуществимости*: при $t \leq 0$ функция $k_{\text{opt}}(t)$ должна равняться нулю, а при $t \rightarrow \infty$ функция $k_{\text{opt}}(t)$ должна стремиться к нулю.

Первое условие является следствием того, что $k_{\text{opt}}(t)$ представляет собой отклик фильтра на единичный импульс (дельта-функцию) в момент $t = 0$. Поскольку отклик не должен опережать воздействие, необходимо, чтобы $k_{\text{opt}}(t) = 0$ при $t \leq 0$. Это условие совершенно не обязательно для оптических систем: единичный импульс в точке x_1, y_1 может дать отклик в любой точке x, y плоскости изображения.

Так как $k_{\text{opt}}(t) = \gamma(t_0 - t)$, *первое условие* означает, что $t_0 \geq t_{\text{вх}}$, если импульс начался при $t \geq 0$. Действительно, в этом случае пока не закончился импульс, действующий на входе, невозможно собрать всю его энергию для обеспечения максимального отношения сигнала к шуму на выходе. Исходя из этого необходимо, чтобы длительность входного импульса была конечна, поскольку при $t_{\text{вх}} = \infty$ невозможно обеспечить $t_0 \leq t_{\text{вх}}$. По существу, это есть уже *второе условие* физической осуществимости, в соответствии с которым при $t \rightarrow \infty$ функция $k_{\text{opt}}(t)$ должна стремиться к нулю.

Таким образом, из общих свойств импульсной функции следует, что применение оптимальной фильтрации возможно только для

сигналов ограниченной длительности, т. е. для импульсных сигналов или ограниченной по длительности группы (пачки) импульсов.

Найдем сигнал на выходе оптимального фильтра, пользуясь импульсной функцией. По определению сигнал на выходе любого четырехполюсника представляет собой свертку сигнала на входе и импульсной функции. Пусть обобщенный сигнал, вырабатываемый безынерционным приемником, равен

$$U_0(t) = U_0 \gamma(t).$$

Тогда соответствующий ему электрический сигнал, действующий на входе схемы рис. 342, б,

$$E_{\sim 0}(t) = S_{\text{вкл. х. х}} U_0(t) = S_{\text{вкл. х. х}} U_0 \gamma(t),$$

где $S_{\text{вкл. х. х}}$ — крутизна цепи включения приемника в режиме холостого хода;

$$U_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_0(f) e^{j2\pi ft} df;$$

$$E_{\sim 0}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{\sim 0}(f) e^{j2\pi ft} df;$$

$$\tilde{E}_{\sim 0}(f) = \tilde{U}_0(f) S_{\text{вкл. х. х}}; U_0 = S_0 \Phi_0.$$

Так как

$$S_{\text{пр 0}} = S_0 S_{\text{вкл. х. х}},$$

то

$$E_{\sim 0}(t) = \Phi_0 S_{\text{пр 0}} \gamma(t),$$

т. е.

$$E_{\sim 0}(t) = E_{\sim 0} \gamma(t),$$

где $E_{\sim 0} = \Phi_0 S_{\text{пр 0}}$.

Комплексный коэффициент передачи рассматриваемой схемы равен

$$\dot{K}_c(f) = K_{\text{max}} \dot{k}_c(f),$$

причем при использовании оптимального фильтра

$$\dot{K}_c(f) = \dot{K}_{\text{opt}}(f).$$

Следовательно, если импульсная функция оптимального фильтра равна $K_{\text{opt}}(t)$, то четырехполюсник с коэффициентом передачи $\dot{K}_{\text{opt}}(f)$ характеризуется импульсной функцией

$$K_{\text{opt}}(t) = \frac{K_0}{t_{\text{вх}}} \gamma(t_0 - t).$$

Соответственно,

$$K_{\text{opt}}(t - t') = \frac{K_0}{t_{\text{вх}}} \gamma(t_0 - t + t') = \frac{K_0}{t_{\text{вх}}} \gamma[t' - (t - t_0)],$$

тогда

$$u_{c \text{ opt}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\sim 0}(t') K_{\text{opt}}(t - t') dt' = \\ = \frac{E_{\sim 0} K_0}{t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t') \gamma[t' - (t - t_0)] dt'.$$

Можно легко проверить правильность полученного результата, так как при $t = t_0$ сигнал достигает максимума, величина которого нам известна. Между тем, из последнего выражения следует

$$u_{c. \text{ opt}}(t_0) = \frac{E_{\sim 0} K_0}{t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t') dt',$$

но при белом шуме

$$\mu_0^2 = \frac{1}{t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t') dt',$$

т. е.

$$u_{c. \text{ opt}}(t_0) = E_{\sim 0} K_0 \mu_0^2 = \Phi_0 S_{\text{пр}0} K_0 \mu_0^2,$$

что совпадает с ранее полученными выражениями для $u_{c \text{ opt max}}$.

Далее известно, что для детерминированного сигнала единичной амплитуды и конечной длительности $\gamma(t)$ корреляционная функция определяется выражением:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t') \gamma(t' - \tau) dt'.$$

Эта функция характеризует степень связи сигнала с его копией, сдвинутой по оси времени на величину τ . При $\tau = 0$ функция корреляции достигает максимума, равного полной энергии сигнала

$$K(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t') dt'.$$

Возвращаясь к выражению для сигнала $u_{c. \text{ opt}}(t)$, можно найти

$$u_{c. \text{ opt}}(t) = \frac{E_{\sim 0} K_0}{t_{\text{вх}}} K(t - t_0),$$

где $K(t - t_0)$ — корреляционная функция входного сигнала единичной амплитуды для времени задержки $\tau = t - t_0$.

Таким образом, сигнал на выходе оптимальной системы с точностью до постоянного множителя совпадает с корреляционной функцией входного сигнала. Его можно всегда построить по заданной корреляционной функции $K(\tau)$ для $\tau = t - t_0$.

Естественно, что при $\tau = 0$, т. е. $t = t_0$, когда

$$K(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t') dt' = t_{\text{вх}} \mu_0^2,$$

получаем максимальную величину сигнала

$$u_{c. \text{ opt max}} = u_{c. \text{ opt}}(t_0) = (E_{\sim 0} K_0 / t_{\text{вх}}) t_{\text{вх}} \mu_0^2 = E_{\sim 0} K_0 \mu_0^2 = \Phi_0 S_{\text{пр}0} K_0 \mu_0^2.$$

Относительно импульсной функции оптимального фильтра необходимо сделать еще ряд замечаний, относящихся к общим свойствам электрических цепей.

Выражение для вычисления сигнала на выходе четырехполюсника через его импульсную функцию

$$u_c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\sim 0}(t') K_c(t - t') dt'$$

может быть изменено с учетом условия физической осуществимости, в соответствии с которым $K_c(t - t') = 0$ при $t' > t$, так как отклик не может опережать воздействия. Следовательно, верхний предел интегрирования можно заменить на t . Нижний предел интегрирования также может быть выбран конечным, если сигнал при достаточно большом отрицательном аргументе обращается в нуль. Обычно предполагается, что при аргументе $t - T$, где T — длительность исследуемой реализации, сигнал пренебрежимо мал.

Следовательно,

$$u_c(t) = \int_{-\infty}^{+t} E_{\sim 0}(t') K_c(t - t') dt' = \int_{t-T}^t E_{\sim 0}(t') K_c(t - t') dt'.$$

Кроме того, часто производится замена переменных $\theta = t - t'$, тогда

$$u_c(t) = \int_0^T E_{\sim 0}(t - \theta) K_c(\theta) d\theta.$$

Полученное выражение называется *интегралом Дюамеля*. Входящая в него импульсная функция $K_c(\theta)$ связана с комплексным коэффициентом передачи цепи $\dot{K}_c(f)$ следующими двумя преобразованиями Фурье:

$$\dot{K}_c(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_c(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta; \quad K_c(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{K}_c(f) e^{j2\pi f\theta} df.$$

Например, для аperiodического RC -звена можно найти

$$\dot{K}_c(f) = 1/(1 + j2\pi fRC);$$

$$K(\theta) = [1/(RC)] e^{-\theta/(RC)}.$$

Если сигнал задавать в виде $E_{\sim 0}(t - \theta) = E_{\sim 0} \gamma(t - \theta)$, то импульсная функция оптимального фильтра

$$K_{\text{opt}}(\theta) = (K_0/t_{\text{вх}}) \gamma(t_0 - \theta).$$

§ 21.4. СПОСОБЫ РЕАЛИЗАЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА

Математическое выражение для коэффициента передачи оптимального фильтра может быть настолько сложным, что высказать даже ориентировочные предположения о схеме фильтра крайне затруднительно. В общем виде определить схему фильтра по заданному уравнению невозможно.

Тем не менее, может встретиться ограниченное число случаев, когда выражение для коэффициента передачи оптимального фильтра распадается на ряд множителей простого типа, и фильтр синтезируется как последовательное соединение четырехполюсников, реализующих каждый множитель.

Существует два главных способа осуществления оптимальных фильтров: 1) создание линейного фильтра с сосредоточенными постоянными; 2) реализация оптимального фильтра в виде коррелометра.

Рассмотрим эти способы.

Оптимальный линейный фильтр с сосредоточенными постоянными

Пусть сигнал $E_{\sim 0}(t) = E_{\sim 0} \gamma(t)$ представляет собой прямоугольный импульс, т. е.

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq t_{\text{вх}}/2, \\ 0 & \text{при } |t| > t_{\text{вх}}/2. \end{cases}$$

Четырехполюсник, включающий в себя оптимальный фильтр, в этом случае должен иметь импульсную функцию

$$K_{\text{opt}}(t) = K_0 k_{\text{opt}}(t).$$

Если

$$k_{\text{opt}}(t) = \gamma(t_0 - t),$$

то

$$K_{\text{opt}}(t) = (K_0/t_{\text{вх}}) \gamma(t_0 - t).$$

Условие физической осуществимости при заданной форме входного сигнала имеет место при $t_0 \geq t_{\text{вх}}/2$, так как в этом случае $\gamma(t_0 - t) = 0$ для $t \leq 0$.

Примем $t_0 = t_{\text{вх}}/2$, т. е. будем считать, что сигнал на выходе оптимального фильтра достигает максимума сразу же, как закончился импульс на входе. В этом случае можно записать

$$k_{\text{opt}}(t) = \gamma(t_0 - t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < t_{\text{вх}}; \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Импульсная функция $k_{\text{opt}}(t)$ представлена на рис. 340. Дальнейшая задача сводится к отысканию структуры физической цепи, обладающей импульсной функцией $k_{\text{opt}}(t)$.

Одна из возможных функциональных схем подобного устройства представлена также на рис. 347. При подаче на вход этой схемы единичного импульса электродвижущей силы $\delta(t)$ на выходе первого элемента — интегратора развивается постоянное напряжение, начи-

нающееся от момента поступления импульса $t = 0$. Это напряжение постоянно и равно единице

$$u_{\text{вых } 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Напряжение $u_{\text{вых } 1}$ подается на вычитающее устройство (—) по двум каналам: непосредственно и через линию задержки $t_{\text{вх}}$.

На выходе вычитающего устройства получается напряжение в виде разности двух единичных скачков напряжения, сдвинутых один относительно другого на время $t_{\text{вх}}$ (рис. 347). В результате

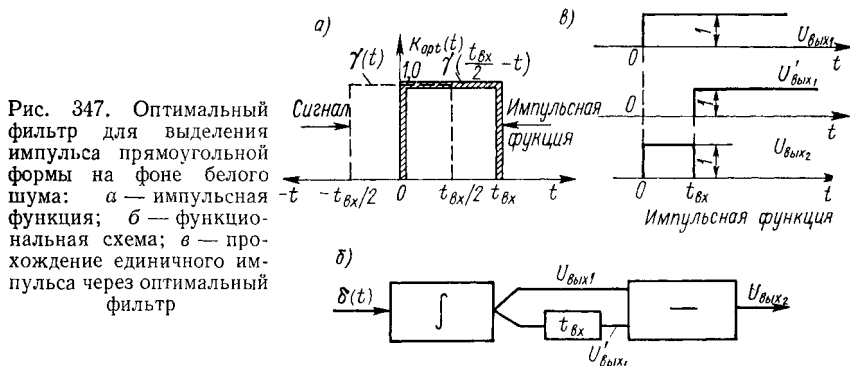


Рис. 347. Оптимальный фильтр для выделения импульса прямоугольной формы на фоне белого шума: а — импульсная функция; б — функциональная схема; в — прохождение единичного импульса через оптимальный фильтр

отклик рассматриваемой системы на дельта-функцию $u_{\text{вых } 2}$ имеет вид импульса прямоугольной формы в соответствии с требуемой импульсной характеристикой.

Найдем напряжение на выходе оптимального фильтра для прямоугольного импульса, действующего на входе.

Корреляционная функция входного сигнала единичной амплитуды

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t') \gamma(t' - \tau) dt'.$$

Для прямоугольного импульса ее можно легко найти графически, перемещая копию импульса относительно самого импульса вдоль оси времени и определяя для каждого положения копии, характеризующегося временем τ , площадь взаимного наложения фигур. Эта процедура показана на рис. 348. Если амплитуда импульса равна $E_{\sim 0}$, а длительность $t_{\text{вх}}$, то функция корреляции $K(\tau)$ имеет вид равнобедренного треугольника с основанием $2t_{\text{вх}}$ и высотой, равной полной энергии импульса $E_{\sim 0}^2 t_{\text{вх}}$. Если $E_{\sim 0} = 1$, то $E_{\sim 0}^2 t_{\text{вх}} = t_{\text{вх}}$.

Следовательно, в этом случае можно записать

$$K(\tau) = \begin{cases} 2\tau + t_{\text{вх}} & \text{при } -t_{\text{вх}}/2 < \tau < 0; \\ t_{\text{вх}} - 2\tau & \text{при } 0 < \tau < t_{\text{вх}}/2. \end{cases}$$

Напряжение на выходе фильтра равно соответственно

$$u_c(t) = (E_0 K_0 / t_{\text{вх}}) K(t - t_0),$$

где $K(t - t_0)$ — корреляционная функция входного сигнала $K(\tau)$ при $\tau = t - t_0$.

Сигнал на выходе достигает максимума в момент времени $t = t_0 = t_{\text{вх}}/2$, т. е. сразу же, как закончился импульс на входе.

Значение этого максимума

$$u_{c \text{ max}} = E_0 K_0 \mu_0^2 = \frac{E_0 K_0}{t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \times \\ \times \gamma^2(t) dt = E_0 K_0 = \Phi_0 S_{\text{пр}} K_0.$$

Этот результат легко понять, так как для прямоугольного импульса длительностью $t_{\text{вх}} \mu_0^2 = 1$.

Реализация изображенного на рис. 347 устройства, которое обеспечивало бы точное интегрирование и задержку входного сигнала без искажения его формы, практически неосуществима. Можно, однако, получить достаточно хорошее приближение к требуемым свойствам при использовании реального интегрирующего устройства в виде RC -цепи с постоянной времени $RC = \tau \gg t_{\text{вх}}$.

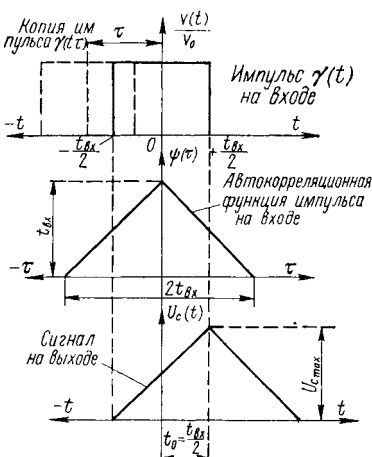


Рис. 348. Сигнал на выходе оптимального фильтра для входного сигнала прямоугольной формы

При действии единичного импульса на такую цепь напряжение на выходе является разностью двух экспонент (рис. 349) и может быть сделано достаточно близким к заданной импульсной характеристике. Критерием для оценки степени приближенности фильтра к оптимальному может служить отношение пика сигнала к среднеквадратическому значению шума ρ на выходе данного фильтра и сопоставление этого значения с μ . Однако такие расчеты обычно достаточно сложны и для облегчения оценки степени оптимальности вычисляют отношение сигнала к шуму на выходе данного фильтра в тот момент времени, когда на выходе оптимального фильтра сигнал достигает максимального значения.

Если сигнал на входе появляется в момент времени $t = t_c$, то максимум сигнала на выходе оптимального фильтра достигается в момент времени $t = t_c + t_0$. Для того чтобы обеспечить наилучшее приближение данного фильтра к оптимальному, его параметры следует выбрать так, чтобы

$$\rho^2 = u_c^2(t_c + t_0) / \overline{u_{\text{ш}}^2} = \text{max}.$$

Исходя из этого критерия можно установить требования к импульсным и амплитудно-частотным характеристикам фильтров.

Пусть рассматриваемая нами система — тракт оптико-электронного прибора — характеризуется импульсной функцией $K_c(\theta)$. На вход системы в момент времени t_c поступает сигнал $E_{\sim 0}(t - t_c)$. Сигнал на выходе системы определяется сверткой

$$u_c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\sim 0}[(t - t_c) - \theta] K_c(\theta) d\theta.$$

В момент времени $t = t_c + t_0$, когда оптимальный фильтр обеспечивает получение максимума сигнала, рассматриваемая система выдаст сигнал

$$u_c(t_c + t_0) = \int_0^{+\infty} E_{\sim 0}(t_0 - \theta) K_c(\theta) d\theta.$$

Нижний предел интегрирования в полученном выражении равен нулю в связи с тем, что при $\theta < 0$ импульсная функция $K_c(\theta) = 0$.

Поскольку

$$\begin{aligned} E_{\sim 0}(t_0 - \theta) &= E_{\sim 0} \gamma(t_0 - \theta) = \\ &= E_{\sim 0} \frac{t_{\text{вх}}}{K_0} K_{\text{опт}}(\theta), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} u_c(t_c + t_0) &= \\ &= \frac{E_{\sim 0} t_{\text{вх}}}{K_0} \int_0^{\infty} K_{\text{опт}}(\theta) K_c(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Дисперсия шума на выходе усилителя рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{ш}}^2} &= \frac{E_1(f_0)}{k_{\text{пр}}^2(f_0)} K_{\text{max}}^2 \Delta f_{\text{ш1}}; \\ \Delta f_{\text{ш1}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon(f)}{|\dot{K}_{\text{пр}}(f)|^2} |\dot{K}_c(f)|^2 df. \end{aligned}$$

Полагая, что инерционностью приемника в рабочем диапазоне частот можно пренебречь, т. е. $|\dot{K}_{\text{пр}}(f)| = 1$ и $k_{\text{пр}}(f_0) = 1$, а шум — белый, т. е. $\varepsilon(f) = 1$, можно найти

$$\Delta f_{\text{ш1}} = \frac{1}{K_{\text{max}}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\dot{K}_c(f)|^2 df = \frac{1}{K_{\text{max}}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} K_c^2(\theta) d\theta,$$

что следует из равенства Парсеваля, т. е.

$$\overline{u_{\text{ш}}^2} = E_1(f_0) \int_0^{\infty} K_c^2(\theta) d\theta.$$

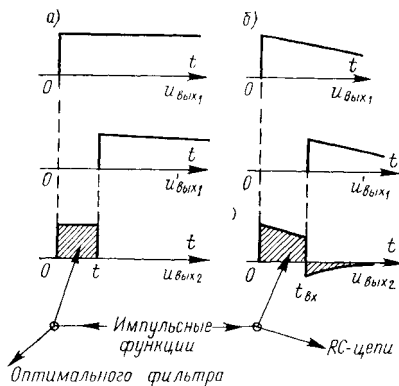


Рис. 349. Прохождение единичного импульса через оптимальный фильтр и его приближенную реализацию в виде RC-цепи (см. рис. 340): а — оптимальный фильтр; б — RC-цепь

Нижний предел интегрирования равен нулю по тем же причинам, что и в выражении для $u_c(t_c + t_0)$. Следовательно,

$$\rho_0^2 = \frac{\left(\frac{E_{\sim 0} t_{BX}}{K_0}\right)^2}{E_1(f_0)} \frac{\left[\int_0^\infty K_{opt}(\theta) K_c(\theta) d\theta\right]^2}{\int_0^\infty K_c^2(\theta) d\theta}.$$

Нам необходимо найти максимум полученного выражения для тех параметров рассматриваемой системы, которые подлежат оптимизации. Допустим, имеется n таких параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, т. е.

$$K_c(\theta) = K_c(\theta, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

По каждому из этих параметров нужно найти производную $\frac{\partial \rho_0^2}{\partial \alpha_i}$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$, приравнять ее нулю и из полученной системы $n + 1$ уравнений отыскать оптимальные значения параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Прежде чем приступить к этому, обратим внимание на следующие обстоятельства. Во-первых, в процессе дифференцирования и составления уравнений окажутся несущественными абсолютные значения входящих в уравнения величин, так как они определяют не форму подбиаемой импульсной функции, а ее масштаб. Следовательно, можно перейти к относительным значениям импульсных функций, т. е. заменить $K_{opt}(\theta)$ на $k_{opt}(\theta)$, а $K_c(\theta)$ на $k_c(\theta)$. Во-вторых, можно считать, что оптимальный фильтр выдает информацию сразу же по завершении исследуемой реализации, т. е. $k_{opt}(\theta) = 0$ при $\theta > T$, где T — длительность реализации.

И, наконец, поскольку импульсная функция оптимального фильтра не зависит от параметров α_i , подлежащих оптимизации, то производная $\frac{\partial k_{opt}(\theta)}{\partial \alpha_i} = 0$.

Учитывая все это, можно найти

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k_c(\theta) \frac{\partial k_c(\theta)}{\partial \alpha_i} d\theta & \left| \int_0^T k_{opt}(\theta) \frac{\partial k_c(\theta)}{\partial \alpha_i} d\theta = \right. \\ & = \int_0^\infty k_c^2(\theta) d\theta \left| \int_0^T k_{opt}(\theta) k_c(\theta) d\theta. \right. \end{aligned}$$

Н. С. Шестовым, предложившим рассмотренный метод оценки степени оптимальности системы, показано, что выбор ее параметров в соответствии с критерием получения максимума ρ_0^2 в момент t_0 равносильно обеспечению условия

$$\int_0^\infty [k_{opt}(\theta) - k_c(\theta)]^2 d\theta = \min,$$

т. е. условию минимального различия импульсных функций оптимальной и рассматриваемой систем.

Из этого условия следует, что если один из параметров рассматриваемой системы является просто множителем, например α_0 в выражении

$$k_c(\theta) = \alpha_0 k_{c1}(\theta) = \alpha_0 k_{c1}(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

то с этим множителем можно не считаться, так как он определяет лишь масштаб, а не форму импульсной функции. Следовательно, все расчеты, связанные с оценкой степени оптимальности фильтра, можно проводить, пользуясь относительной импульсной функцией $k_{c1}(\theta)$.

Рассмотрим в качестве примера RC -фильтр, используемый вместо оптимального для выделения прямоугольного импульса на фоне белого шума.

Импульсная функция оптимального фильтра в этом случае равна

$$k_{opt}(\theta) = \gamma(t_0 - \theta).$$

Если $t_0 = t_{вх}/2$, то $k_{opt}(\theta) = 1$ при $0 < \theta < t_{вх}$ и $k_{opt}(\theta) = 0$ при $\theta > t_{вх}$.

Импульсная функция RC -фильтра

$$k_c(\theta) = [1/(RC)] e^{-\theta/(RC)},$$

а ее относительное значение

$$k_{c1}(\theta) = e^{-\theta/(RC)}.$$

Постоянная времени RC -фильтра $\tau = RC$ является единственным параметром, подлежащим оптимизации. Полагая $\alpha_1 = 1/(RC)$ и составляя условие

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 \theta} \frac{\partial e^{-\alpha_1 \theta}}{\partial \alpha_1} d\theta \left/ \int_0^{t_{вх}} 1 \frac{\partial e^{-\alpha_1 \theta}}{\partial \alpha_1} d\theta \right. = \int_0^\infty e^{-2\alpha_1 \theta} d\theta \left/ \int_0^{t_{вх}} 1 \cdot e^{-\alpha_1 \theta} d\theta \right.,$$

можно найти трансцендентное уравнение

$$1 + 2\alpha_1 t_{вх} = e^{\alpha_1 t_{вх}}$$

и методом последовательных приближений определить параметр α_1 , т. е. найти

$$\tau = RC = 1/\alpha_1 = t_{вх}/1,256.$$

Квадрат отношения сигнала к шуму в момент времени $t = t_c + t_0$ для рассматриваемой системы, выраженный в относительных (условных) единицах, равен

$$\rho_{отн}^2 = \left[\int_0^T k_{opt}(\theta) k_{c1}(\theta) d\theta \right]^2 \left/ \int_0^\infty k_{c1}^2(\theta) d\theta \right.$$

Если $k_{c1}(\theta) = k_{opt}(\theta)$, т. е. для оптимального фильтра

$$\mu_{отн}^2 = \int_0^T k_{opt}^2(\theta) d\theta.$$

Следовательно, сопоставление рассматриваемого фильтра с оптимальным можно произвести, вычислив коэффициент $\kappa^2 = \rho_{\text{отн}}^2 / \mu_{\text{отн}}^2$. Это дает

$$\kappa^2 = \frac{\rho_{\text{отн}}^2}{\mu_{\text{отн}}^2} = \left[\int_0^T k_{\text{opt}}(\theta) k_{\text{cl}}(\theta) d\theta \right]^2 \bigg/ \int_0^\infty k_{\text{cl}}^2(\theta) d\theta \int_0^T k_{\text{opt}}^2(\theta) d\theta.$$

Так как

$$\int_0^T k_{\text{opt}}(\theta) k_{\text{cl}}(\theta) d\theta = \int_0^T 1 \cdot e^{-\alpha_1 \theta} d\theta = \frac{1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 T});$$

$$\int_0^\infty k_{\text{cl}}^2(\theta) d\theta = \int_0^\infty e^{-2\alpha_1 \theta} d\theta = \frac{1}{2\alpha_1};$$

$$\int_0^T k_{\text{opt}}^2(\theta) d\theta = T,$$

то при $\alpha_1 = 1,256/t_{\text{вх}}$, $t_{\text{вх}} = T$ найдем $\kappa^2 = 0,815$.

Таким образом, подобранный простой фильтр уступает оптимальному весьма незначительно.

Если на вход системы приходит не один импульс, а группа из N одинаковых импульсов, то спектр такого сигнала

$$\tilde{y}(f) = \tilde{y}_1(f) [1 + e^{-j2\pi f T_1} + e^{-j2\pi f T_2} + \dots + e^{-j2\pi f T_{N-1}}],$$

где $\tilde{y}_1(f)$ — спектр первого импульса, начинающегося в момент $t = 0$; $\tilde{y}_1(f) e^{-j2\pi f T_1}$ — спектр второго импульса, сдвинутого на время T_1 от первого, и т. д.

При белом шуме оптимальный фильтр должен иметь коэффициент передачи

$$\dot{K}_{\text{opt}}(f) = K_0 \tilde{y}^*(f) e^{-j2\pi f (t_{\text{вх}} + T_{N-1})},$$

где $t_{\text{вх}} + T_{N-1}$ — полная длительность всей пачки импульсов, или

$$\begin{aligned} \dot{K}_{\text{opt}}(f) &= K_0 \tilde{y}_1^*(f) e^{-j2\pi f t_{\text{вх}}} e^{-j2\pi f T_{N-1}} [1 + e^{-j2\pi f T_1} + \\ &+ e^{-j2\pi f T_2} + \dots + e^{-j2\pi f T_{N-1}}] = K_0 \tilde{y}_1^* e^{-j2\pi f t_{\text{вх}}} [1 + e^{-j2\pi f (T_{N-1} - T_{N-2})} + \\ &+ e^{-j2\pi f (T_{N-1} - T_{N-3})} + \dots + e^{-j2\pi f (T_{N-1} - T_1)} + e^{-j2\pi f T_{N-1}}]. \end{aligned}$$

Поскольку предполагается, что к моменту окончания первого импульса система выдает максимум соответствующего сигнала, то коэффициент передачи оптимального фильтра для одиночного импульса, начинающегося в момент $t = 0$, равен

$$\dot{K}_{1\text{opt}}(f) = K_0 \tilde{y}_1^*(f) e^{-j2\pi f t_{\text{вх}}}.$$

Схема всего фильтра представлена на рис. 350.

Этот фильтр содержит звено с передаточной функцией $\dot{K}_{1\text{opt}}(f)$, обеспечивающее оптимальную внутриимпульсную обработку сигнала и набор линий задержек. Величины этих задержек должны нарастать в порядке, обратном расстановке импульсов в пакке на входе фильтра.

Максимальный импульс на выходе сумматора получается, когда первый импульс входной последовательности, прошедший через задержку T_{N-1} , суммируется со вторым импульсом, прошедшим через задержку $T_{N-1} - T_1$, с третьим, задержанным на $T_{N-1} - T_2$, и т. д. вплоть до последнего импульса, проходящего через систему без дополнительной задержки.

Если входной сигнал представляет собой последовательность одинаковых равноотстоящих импульсов, т. е.

$$T_1 = T, T_2 = 2T, T_3 = 3T, \dots, \\ T_{N-1} = (N-1)T,$$

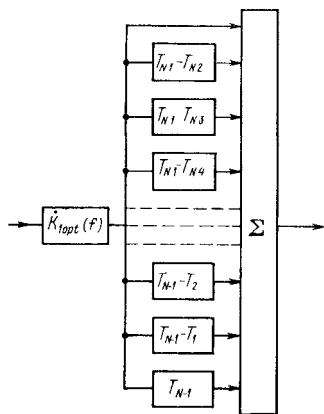


Рис. 350. Схема оптимального фильтра для группы из N одинаковых импульсов

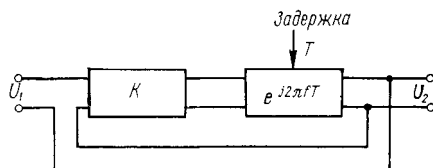


Рис. 351. Схема с обратной связью — «гребенчатый» фильтр

то

$$\dot{K}_{\text{opt}}(f) = \dot{K}_{1\text{opt}}(f) [1 + e^{-j2\pi f T} + e^{-j2\pi f 2T} + \dots + e^{-j2\pi f (N-1)T}].$$

При достаточно большом значении N выражение в квадратных скобках представляет собой геометрическую прогрессию, сумма которой равна

$$\dot{K}_2(f) = 1/(1 - e^{-j2\pi f T}).$$

Следовательно, в этом случае

$$\dot{K}_{\text{opt}}(f) = \dot{K}_{1\text{opt}}(f) \dot{K}_2(f),$$

т. е. система может быть осуществлена в виде двух четырехполюсников, соединенных последовательно, один из которых реализует схему оптимального фильтра, а второй — схему с обратной связью, позволяющую осуществить коэффициент передачи $\dot{K}_2(f)$. Действительно, если в схеме с обратной связью коэффициент передачи прямой цепи $Ke^{-j2\pi f T}$, то общий коэффициент передачи (рис. 351)

$$\dot{K}_{\text{oc}}(f) = \dot{u}_2/\dot{u}_1 = Ke^{j2\pi f T}/(1 - Ke^{-j2\pi f T}).$$

Для обеспечения устойчивости системы необходимо выполнить условие $K < 1$. Передаточная функция $e^{-j2\pi f T}$ соответствует «идеаль-

ной» линии задержки. Амплитудно-частотная характеристика четырехполюсника с задержкой и обратной связью имеет вид гребенки. Фильтры с такими характеристиками получили название гребенчатых фильтров.

Общая функциональная схема системы, реализующей эффект повторения импульсов в пакке, представлена на рис. 352.

При одинаковых по форме и амплитуде импульсах пик выходного сигнала возрастет в N раз, но одновременно вырастают и шумы на выходе, где складываются дисперсии шума N каналов, следовательно, среднеквадратическое напряжение шума растет в \sqrt{N} раз. Таким

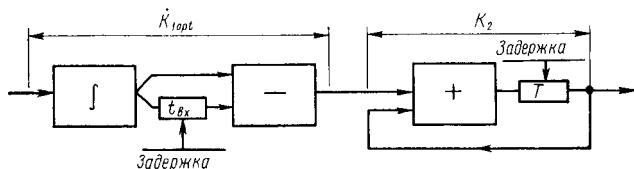


Рис. 352. Оптимальный фильтр для пачки из N одинаковых равноотстоящих импульсов — сочетание оптимального фильтра для одиночного импульса длительностью $t_{вх}$ и «гребенчатого» фильтра, настроенного на период повторения импульсов в пачке T

образом, общий выигрыш в отношении сигнала к шуму при оптимальной фильтрации пачки из N импульсов, по сравнению с фильтрацией одного импульса, оказывается равным \sqrt{N} . Этот выигрыш имеет место только при белом (некоррелированном) шуме и неперекрывающихся сигналах ($T > t_{вх}$). В остальных случаях могут иметь место иные соотношения.

Оптимальный фильтр в виде коррелометра

Пусть на вход системы с коэффициентом передачи $K_c(f)$ поступает внешнее возмущение $E(t)$, представляющее собой либо один шум, либо шум с сигналом импульсного характера. Учитывая, что момент прихода сигнала неизвестен, процесс обнаружения сигнала ведется непрерывно путем анализа реализации в интервале времени от $t - T$ до t , где T — длительность исследуемой реализации. В момент времени t при условии мгновенной обработки реализации должен быть дан ответ о наличии известного по форме сигнала.

В общем случае на выходе системы действует возмущение

$$u(t) = \int_{t-T}^t E(t') K_c(t-t') dt'.$$

Если система построена так, что на выходе ее обеспечивается максимальное значение отношения пика сигнала к среднеквадратическому значению шума, то ее импульсная функция при белом шуме

$$K_{opt}(t-t') = (K_0/t_{вх}) \gamma[t' - (t-t_0)].$$

Следовательно, в оптимальной системе

$$u(t) = \frac{K_0}{t_{\text{вх}}} \int_{t-T}^t E(t') \gamma[t' - (t - t_0)] dt'.$$

Для дальнейшего удобно записать это выражение, пользуясь временем θ , которое определяется следующим образом:

$$\theta = t' - (t - t_0) = t' - t + t_0,$$

т. е. $t' = \theta + t - t_0$, когда

$$t' = \begin{cases} t, & \theta = t_0; \\ t - T, & \theta = t_0 - T. \end{cases}$$

В этом случае

$$E(t') = E(\theta + t - t_0),$$

когда

$$\theta = \begin{cases} t_0, & E(\theta + t - t_0) = E(t); \\ t_0 - T, & E(\theta + t - t_0) = E(t - T). \end{cases}$$

Выходное возмущение имеет вид

$$u(t) = \frac{K_0}{t_{\text{вх}}} \int_{t_0-T}^{t_0} E(\theta + t - t_0) \gamma(\theta) d\theta.$$

Создадим прибор, в памяти которого хранится форма сигнала, подлежащего обнаружению, описываемая функцией $\gamma(\theta)$. Обеспечим выполнение следующих операций в этом приборе. Значения реализации входного возмущения для данных t и t_0 и различных θ от $\theta = t_0 - T$ до $\theta = t_0$, т. е. за период от $t - T$ до текущего момента t , умножаются на соответствующие ординаты образа сигнала, хранящегося в памяти. Все полученные для каждого θ произведения суммируются и поступают на вход порогового устройства, имеющего порог срабатывания u_0 . Если происходит срабатывание порогового устройства, следовательно, порог был превзойден и можно с определенной вероятностью $P_{\text{обн}}$ утверждать, что в исследованной реализации имеется сигнал, поступивший в момент времени $t = t_0$.

Если сигнал не обнаружен, изменяется относительное положение образа сигнала и реализации за счет изменения времени t_0 и процедура повторяется до тех пор, пока не будет проанализирована вся реализация T .

Приборы подобного типа называются коррелометрами. Пример схемы коррелометра с записью на магнитную ленту приведен на рис. 353. На записывающую магнитную головку 1 коррелометра поступает входное возмущение. Длительность T подлежащей исследованию реализации определяется положением стирающей головки 2.

Две снимающие головки 3 и 4 периодически быстро проходят по соответствующим лентам, на одной из которых A записан образ искомого сигнала C , а на другой ленте B — исследуемая реализация. После перемножения напряжений, вырабатываемых снимающими

головками, и интегрирования результата за один прогон выдается величина $u(t_1)$. К следующему прогону снимающих головок относительное положение образа сигнала должно измениться путем перемещения магнитной ленты A относительно ленты B . Исследование данной реализации заканчивается после того, как образ сигнала переместится на всю ее длину T . Практически реализация и сигнал могут быть записаны на магнитных барабанах, вращающихся с разными скоростями относительно подвижных снимающих головок. Разность угловых скоростей вращения барабанов должна быть значительно меньше скорости их вращения.

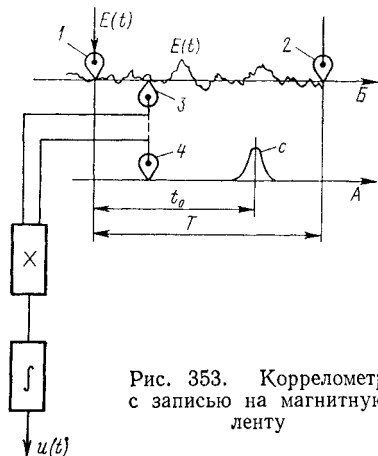


Рис. 353. Коррелометр с записью на магнитную ленту

Коррелометр может быть построен также на основе оптической схемы, в которой выполняется преобразование Фурье исходного пространственного распределения сигнала и помехи, записанного на входном TRANSPARANTE, освещаемом когерентным светом. Помещая в Фурье-плоскости второй транспарант, прозрачность которого описывается функцией, сопряженной со спектром сигнала, можно получить произведение этой функции на исходный спектр и судить о наличии сигнала в заданном пространственном распределении по наличию свет-

лого пятна в плоскости наблюдения. Синтез комплексного сопряженного фильтра на втором транспаранте осуществляется методами голографии.

Оптический коррелометр (согласованный фильтр) дает возможность не только обнаружить сигнал, но и точно указать его положение на плоскости. В нем можно реализовать почти любую передаточную функцию, так как условие физической осуществимости на оптические системы не распространяется. Более подробные сведения об оптических системах фильтрации можно найти в специальной литературе.

Оптимальная фильтрация при окрашенном шуме

В случае шума с произвольным спектром $\varepsilon(f)$, когда все полученные зависимости, определяющие способы реализации оптимального фильтра, недействительны, тем не менее возможны пути создания фильтра, приближающегося к оптимальному. Наиболее простой путь заключается в приведении заданного шума к белому шуму. Вначале подбирают фильтр, передаточная характеристика которого удовлетворяет условию

$$|\hat{k}_1(f)|^2 \varepsilon(f) = \text{const.}$$

На выходе этого фильтра шум будет белым, и тогда можно применить рассмотренные выше способы оптимальной фильтрации. При этом следует иметь в виду, что спектр сигнала, на который необходимо рассчитывать оптимальный фильтр, изменится. Он уже будет определяться не спектральной плотностью $\tilde{y}(f)$, а спектральной плотностью $\tilde{y}'(f) = \tilde{y}(f) k_1(f)$.

Глава 22

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО СИГНАЛА НА ФОНЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

В настоящее время основными способами выделения оптического сигнала на фоне случайных помех являются *пространственная и спектральная фильтрации*. Пространственная фильтрация основана на различии размеров и формы объекта наблюдения (цели) и фона, а спектральная фильтрация — на различии их оптических спектров излучения. Несмотря на большое число исследований, посвященных методам фильтрации, нельзя считать, что сегодня существует полная ясность в этих вопросах. Это связано, главным образом, с двумя обстоятельствами. Во-первых, многие фоновые ситуации не могут быть описаны нормальным законом распределения яркости фона, который обычно предполагается заданным при вычислении дисперсии напряжения шума на выходе усилителя по двумерному спектру Хинчина—Винера. Однако только при нормальном законе распределения линейный оптимальный фильтр является наилучшим из всех возможных, в то время как при иных законах распределения это положение может не соблюдаться и нелинейная фильтрация может дать больший эффект. Это обстоятельство хорошо иллюстрируется рис. 354, где показан сигнал от цели в виде прямоугольного импульса среди случайных выбросов шума. Пропуская сигнал и шум через дифференцирующее устройство и нелинейный элемент — ограничитель амплитуды, можно получить любое произвольное улучшение отношения сигнала к шуму по сравнению с линейным оптимальным фильтром. К сожалению, такие часто встречающиеся фоновые ситуации, как небо, покрытое редкими облаками, края которых освещены Солнцем, солнечная дорожка на поверхности моря и т. д., не могут быть описаны нормальным законом распределения. Во многих случаях их нельзя считать стационарными и эргодическими процессами, а в большинстве случаев распределение яркости природных образований анизотропно.

Второе обстоятельство, определяющее принципиальные затруднения при разработке оптимальных методов фильтрации, заключается в существовании связи между пространственным и спектральным распределением яркости поля излучения. Например, ширина солнечной дорожки на поверхности моря оказывается различной в зависимости от того, в какой области спектра она измеряется. Собственное

излучение любого объекта, имеющего низкую температуру, является длинноволновым, а отраженное, обусловленное солнечной подсветкой, — коротковолновым, и если отдельные части поверхности объекта по-разному участвуют в формировании этих двух составляющих его излучения, то образ объекта будет различным в разных спектральных диапазонах. Еще большие трудности возникают при очень быстром сканировании поля излучения многоканальной приемной системой, каждый канал которой работает в своем спектральном диапазоне. Ограниченное число фотонов, приходящих от данной точки анализируемого пространства, может оказаться определяющим при вычислении взаимной корреляции излучения в соседних спектральных диапазонах. Все эти ограничения большей частью не учитываются, прежде всего вследствие громоздкости математического аппарата, необходимого для их описания. Между тем, в ряде случаев результаты упрощенного анализа оказываются не только неточными, но и принципиально неверными. Известно, в частности, что если вычислять максимум отношения сигнала к шуму, считая, что спектры излучения цели и фона полностью определены (детерминированы), то результат приводит к парадоксальному выводу о целесообразности использования фильтра с бесконечно узкой полосой пропускания.

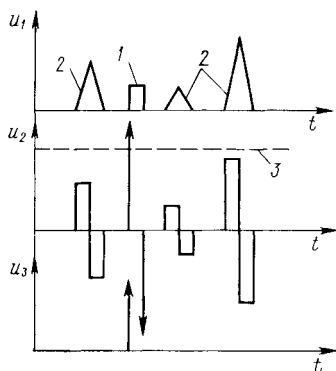


Рис. 354. Идеализированный пример выделения сигнала из шума в нелинейном устройстве:

u_1 — импульсы сигнала и шума; u_2 — сигнал и шум на выходе идеального дифференцирующего устройства; u_3 — сигнал на выходе порогового устройства, следующего за дифференцирующим устройством; 1 — сигнал; 2 — шум; 3 — порог ограничения

Тем не менее некоторые полезные рекомендации, направленные на оптимизацию способов выделения оптического сигнала из случайных помех, могут быть сделаны на основании приближенных методов при условии критического анализа полученных результатов на основе экспериментальных данных.

Влияние излучения фона на работу оптико-электронного прибора оказывается различным в зависимости от характера распределения яркости фона в пространстве. Яркость фона может распределяться равномерно и неравномерно. Она может определяться внешними источниками излучения и источниками, расположенными внутри прибора.

§ 22.1. РАВНОМЕРНЫЙ ФОН

Равномерно излучающий фон вызывает засветку приемника и снижает контраст объекта по отношению к окружающему пространству. Пороговый поток (эквивалентная мощность шума) любого приемника ухудшается (возрастает) при наличии засветки, причем это ухудшение можно оценить некоторым коэффициентом $q_1 \geq 1$,

являющимся функцией постоянного потока излучения фона Φ_{ϕ}

$$q_1 = q_1(\Phi_{\phi});$$

$$\Phi_{\phi} = \pi L_{\phi} \sin^2 \sigma'_A T_0 A_{\text{пр}},$$

где L_{ϕ} — яркость фона; $A_{\text{пр}}$ — эффективная площадь чувствительной площадки приемника излучения; σ'_A , T_0 — задний апертурный угол и коэффициент пропускания оптической системы.

Следовательно, если Φ_n^* (Φ_{ϕ}) представляет собой удельный пороговый поток фотоприемника при облучении его потоком Φ_{ϕ} , а Φ_n^* — удельный пороговый поток при отсутствии засветки, то

$$\Phi_n^*(\Phi_{\phi}) = q_1 \Phi_n^*.$$

Наряду с ухудшением параметров приемника излучения поток излучения от фона уменьшает полезный сигнал. Действительно, при наличии в поле зрения прибора объекта наблюдения и фона на приемник будет поступать поток излучения, представляющий собой сумму двух составляющих: потока от объекта и потока от части фона, которая не экранируется объектом. Поэтому прибор будет реагировать не на весь поток излучения объекта, а лишь на его приращение над уровнем фонового потока. Действительно, можно найти эффективный поток излучения от объекта наблюдения (цели)

$$\Phi_{\text{ц}} = L_{\text{ц}} (A_{\text{ц}} A_{\text{об}} / R^2),$$

и эффективный поток излучения от фона

$$\Phi_{\phi} = L_{\phi} (A_{\phi} A_{\text{об}} / R^2),$$

где $A_{\text{ц}}$ — площадь цели, A_{ϕ} — площадь, занимаемая фоном в поле зрения прибора.

Площадь фона при отсутствии цели

$$A_{\phi} = A_{\text{пр}} (R/f')^2,$$

где f' — заднее фокусное расстояние объектива.

При наличии цели площадь, занимаемая фоном, определяется выражением

$$A'_{\phi} = A_{\text{пр}} (R/f')^2 - A_{\text{ц}}.$$

Суммарный поток излучения от цели и фона (при наличии цели) равен

$$\begin{aligned} \Phi'_{\text{ц}} = \Phi_{\text{ц}} + \Phi'_{\phi} &= L_{\text{ц}} \frac{A_{\text{ц}} A_{\text{об}}}{R^2} + L_{\phi} \frac{A'_{\phi} A_{\text{об}}}{R^2} = \frac{A_{\text{об}}}{R^2} \left[A_{\text{ц}} (L_{\text{ц}} - L_{\phi}) + \right. \\ &\quad \left. + L_{\phi} \left(\frac{R}{f'} \right)^2 A_{\text{пр}} \right]. \end{aligned}$$

Изменение потока излучения в процессе сканирования (полезный сигнал)

$$\Delta \Phi = \Phi'_{\text{ц}} - \Phi_{\phi} = (L_{\text{ц}} - L_{\phi}) A_{\text{ц}} A_{\text{об}} / R^2 = \Delta L A_{\text{ц}} A_{\text{об}} / R^2.$$

Последнее выражение определяет превышение потока излучения от цели над уровнем фона, на которое необходимо ориентироваться при расчете параметров прибора.

Если в приборе используется модуляция излучения, конструкция модулятора (рисунок растра) должна обеспечивать подавление сигнала от равномерного фона. Эта задача является самой простой и может быть решена при правильном выборе конструкции фазирующей (непрозрачной) части растра. Если модулирующая часть растра состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных секторов, а фазирующая часть является непрозрачным полукругом, то в результате модуляции образуются несимметричные пачки чередующихся импульсов потока излучения (рис. 147, а) и в спектре сигнала будет

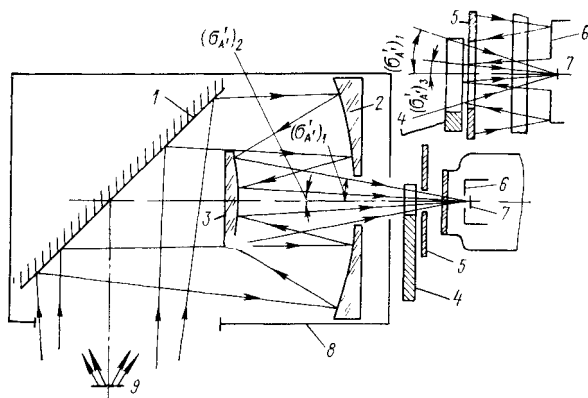


Рис. 355. Оптическая схема радиометра без эталонного источника. К вычислению побочного измерения:

1 — сканирующее зеркало; 2, 3 — зеркало объектива; 4 — модулятор (прерыватель) излучения; 5 — диафрагма; 6 — охлаждаемый экран; 7 — приемник излучения; 8 — внутренняя полость оптической головки; 9 — исследуемый объект

существовать составляющая частоты вращения растра, определяемая излучением равномерного фона. Если обеспечить постоянство среднего значения потока излучения, проходящего через растр за его полный оборот, пачки импульсов будут симметричны относительно оси времени, как показано на рис. 147, б, и гармоника сигнала, связанная с равномерным фоном, будет отсутствовать. Это достигается изготовлением фазирующей части растра с прозрачностью, равной средней прозрачности модулирующего полукруга (50 %). Такой растр не будет модулировать равномерный фон. Его конструкции показаны на рис. 148.

При измерении с помощью ИК-радиометров излучения тел, температура которых близка к температуре окружающей среды, необходимо считаться с влиянием дополнительных — побочных потоков излучения, падающих на приемник. Эти потоки обусловлены, во-первых, собственным излучением элементов оптической системы, во-вторых, излучением, отраженным или рассеянным оптическими элементами внутренней полости оптической головки радиометра, объектов и фона, находящихся вне поля зрения прибора.

Величина побочных потоков излучения изменяется с изменением температуры окружающей среды, следовательно, результаты измерений будут также зависеть от нее.

Одна из возможных оптических схем сканирующего ИК-радиометра приведена на рис. 355. Рассматриваемая схема отличается тем, что в ней отсутствует эталонный источник излучения. При наличии эталонного излучателя, как, например, в ранее упомянутой камере Барнса, на приемник поочередно направляется поток излучения от объекта и эталонного излучателя, что дает возможность производить измерения потоков методом компенсации, не заботясь о стабильности чувствительности приемника излучения и коэффициента усиления электронного тракта. В случае отсутствия излучателя сравнения повышаются требования к стабильности этих элементов, но зато облегчается возможность достижения более высокого быстродействия радиометра. Эта возможность определяется тем, что для увеличения быстродействия необходимо расширение полосы пропускания электронного тракта несущей частоты сигнала, которая равна частоте прерывания модулятором потока излучения объекта.

Повышение несущей частоты в основном должно достигаться путем увеличения скорости вращения диска модулятора, а не числа его ламелей, так как всегда имеет место паразитная модуляция, основная гармоника которой равна частоте вращения диска.

Последующее подавление этой модуляции возможно при условии, если ее частота больше высших частот спектра сигнала, определяемых динамикой регистрируемых процессов.

Для достижения высоких скоростей вращения диска модулятора, при практически приемлемых затратах мощности, последний должен иметь небольшие размеры. Существенно уменьшить их удастся лишь при установке модулятора как можно ближе к приемнику излучения, где диаметр прерываемого потока излучения минимален. По этим соображениям в ряде случаев приходится отказываться от использования в оптической схеме эталонного излучателя сравнения и строить радиометр по схеме, приведенной на рис. 355.

Следует отметить, что излучатель сравнения не избавляет ИК-радиометр от влияния побочных потоков излучения и необходим либо учет этого влияния, либо принятие специальных мер, его устраняющих.

§ 22.2. ВЛИЯНИЕ ПОБОЧНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА РАБОТУ РАДИОМЕТРА

Оценим степень влияния побочного излучения на работу радиометра, построенного по схеме, приведенной на рис. 355. Напряжение сигнала на зажимах приемника излучения при вращении модулятора пропорционально разности потоков, падающих на приемник в моменты, когда модулятор пропускает поток излучения объекта и когда этот поток перекрыт ламелью модулятора.

Рассмотрим, из каких компонентов складывается эта разность, принимая во внимание только потоки, падающие на приемник в пределах апертурного угла (σ'_d)₁, так как излучение, приходящее под

углами, большими $(\sigma'_A)_1$, не участвует в создании сигнала, вырабатываемого приемником, а действует как постоянная засветка, снижая его чувствительность.

Когда модулятор пропускает излучение объекта, поток излучения, падающий на приемник, равен

$$\Phi_1 = \Phi_{об} + \Phi_{о.с} + \Phi_{о.о},$$

где $\Phi_{об}$ — подлежащий измерению поток излучения, испускаемый той частью объекта наблюдения, которая находится в поле зрения радиометра; $\Phi_{о.с}$ — поток излучения, определяемый собственным излучением сканирующего зеркала, а также большого и малого зеркал объектива; $\Phi_{о.о}$ — падающий на приемник поток излучения, обусловленный зеркальным и диффузным отражением элементов оптической системы излучения, объектов и фона, находящихся вне поля зрения радиометра, а также зеркальным и диффузным отражением излучения внутренней полости прибора.

Если излучение объекта наблюдения перекрыто ламелью модулятора, то поток, падающий на приемник, равен

$$\Phi_2 = \Phi_{м.с} + \Phi_{м.о},$$

где $\Phi_{м.с}$ — поток, определяемый собственным излучением модулятора; $\Phi_{м.о}$ — поток излучения, отраженный модулятором.

Разность потоков Φ_1 и Φ_2 (сигнал на зажимах приемника излучения пропорционален этой разности) равна

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_{об} + \Phi_{о.с} + \Phi_{о.о} - \Phi_{м.с} - \Phi_{м.о}.$$

Напишем последнее выражение в виде

$$\Phi = \Phi_{об} + \Phi_{доп},$$

где

$$\Phi_{доп} = \Phi_{о.с} + \Phi_{о.о} - \Phi_{м.с} - \Phi_{м.о}.$$

Слагаемые правой части могут быть представлены в следующем виде:

$$\Phi_{об} = A_{пр} T_0 \epsilon_{об} M_{об} [\sin^2(\sigma'_A)_1 - \sin^2(\sigma'_A)_2],$$

где $A_{пр}$ — площадь чувствительного элемента приемника излучения; T_0 — коэффициент пропускания оптической системы; $\epsilon_{об}$ — коэффициент излучения объекта; $M_{об}$ — эффективная энергетическая светимость черного тела, температура которого равна температуре объекта, применительно к выбранному приемнику:

$$\Phi_{о.с} = A_{пр} M_3 \{\epsilon_3 \sin^2(\sigma'_A)_2 + 3\epsilon_3 [\sin^2(\sigma'_A)_1 - \sin^2(\sigma'_A)_2]\},$$

где M_3 — эффективная энергетическая светимость черного тела, температура которого равна температуре зеркала; ϵ_3 — коэффициент излучения зеркала;

$$\Phi_{о.о} = A_{пр} \rho_3 \epsilon_{п} M_{п} \sin^2(\sigma'_A)_2,$$

где $\rho_3 = (1 - \epsilon_3)$ — коэффициент отражения зеркала; $\epsilon_{п}$ — коэффициент излучения полости прибора; $M_{п}$ — эффективная энергетичес-

ская светимость черного тела, температура которого равна температуре внутренней полости прибора;

$$\Phi_{\text{м.с}} = A_{\text{пр}} \epsilon_3 M_{\text{м}} \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1,$$

где $M_{\text{м}}$ — эффективная энергетическая светимость черного тела, температура которого равна температуре модулятора;

$$\Phi_{\text{м.о}} = A_{\text{пр}} \epsilon_{\text{д}} \rho_3 M_{\text{д}} [\sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1 - \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_3],$$

где $\epsilon_{\text{д}}$ — коэффициент излучения диафрагмы; ρ_3 — коэффициент отражения экрана; $M_{\text{д}}$ — эффективная энергетическая светимость абсолютно черного тела, температура которого равна температуре диафрагмы.

Выражения для $\Phi_{\text{об}}$, $\Phi_{\text{о.с}}$, $\Phi_{\text{о.о}}$, $\Phi_{\text{м.с}}$, $\Phi_{\text{м.о}}$ получены при следующих допущениях:

а) коэффициенты излучения объекта, зеркал и внутренней полости оптической головки в диапазоне чувствительности приемника постоянны;

б) расстояние между радиометром и объектом не превышает нескольких метров и поглощением атмосферы можно пренебречь;

в) потоками, попадающими на приемник излучения вследствие диффузного рассеяния зеркальными поверхностями излучения внешних и внутренних источников, можно пренебречь;

г) поток, отраженный модулятором на приемник излучения, определяется энергетической светимостью поверхности диафрагмы.

В результате можно найти:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{доп}} = & A_{\text{пр}} \{ \epsilon_3 \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_2 + 3\epsilon_3 [\sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1 - \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_2] \} M_3 + \\ & + \rho_3 \epsilon_{\text{п}} M_{\text{п}} \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_2 - \epsilon_3 M_{\text{м}} \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1 - \epsilon_{\text{д}} \rho_3 M_{\text{д}} [\sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1 - \\ & - \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_3] \}. \end{aligned}$$

Допустим, что температура всех элементов оптической головки одинакова и равна температуре окружающей среды. Такое допущение возможно в том случае, если теплоемкости этих элементов близки, а температура окружающей среды изменяется медленно.

В этом случае

$$M_3 = M_{\text{п}} = M_{\text{м}} = M_{\text{д}};$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{доп}} = & A_{\text{пр}} M_3 \{ [\epsilon_3 + \rho_3 \epsilon_{\text{п}}] \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_2 + 3\epsilon_3 [\sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1 - \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_2] - \\ & - \epsilon_3 \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1 - \epsilon_{\text{д}} \rho_3 [\sin^2(\sigma'_{\text{А}})_1 - \sin^2(\sigma'_{\text{А}})_3] \}. \end{aligned}$$

Чтобы оценить влияние изменения температуры окружающей среды, найдем отношение приращений потоков $\Phi_{\text{об}}$ и $\Phi_{\text{доп}}$, если температура окружающей среды и объекта одинакова и изменяется на одну и ту же величину, т. е.

$$M_{\text{об}1} = M_{31}, M_{\text{об}2} = M_{32}.$$

Так как

$$\Delta\Phi_{об} = \Phi_{об2} - \Phi_{об1} = A_{пр} T_0 \varepsilon_{об} [\sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \sin^2(\sigma'_{A'})_2] (M_{об2} - M_{об1});$$

$$\Delta\Phi_{доп} = \Phi_{доп2} - \Phi_{доп1} = A_{пр} \{(\varepsilon_3 + \rho_3 \varepsilon_n) \sin^2(\sigma'_{A'})_2 + 3\varepsilon_3 [\sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \sin^2(\sigma'_{A'})_2] - \varepsilon_3 \sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \varepsilon_d \rho_3 \rho_3 [\sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \sin^2(\sigma'_{A'})_3]\} (M_{32} - M_{31});$$

$$\frac{\Delta\Phi_{доп}}{\Delta\Phi_{об}} = \frac{(\varepsilon_3 + \rho_3 \varepsilon_n) \sin^2(\sigma'_{A'})_2 + 3\varepsilon_3 [\sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \sin^2(\sigma'_{A'})_2] - \varepsilon_3 \sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \varepsilon_d \rho_3 \rho_3 [\sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \sin^2(\sigma'_{A'})_3]}{T_0 \varepsilon_{об} [\sin^2(\sigma'_{A'})_1 - \sin^2(\sigma'_{A'})_2]}.$$

Для рассматриваемого случая примем

$$\varepsilon_{об} = 1, \quad \varepsilon_3 = 0,1, \quad \rho_3 = 1 - \varepsilon_3 = 0,9, \quad T_0 = \rho_3^3 = 0,73,$$

$$\rho_3 = 0,9, \quad \varepsilon_n = 0,8, \quad (\sigma'_{A'})_1 = 22^\circ, \quad (\sigma'_{A'})_2 = 11^\circ, \quad (\sigma'_{A'})_3 = 3^\circ.$$

Тогда, если $\varepsilon_d = 0,8$, то $\Delta\Phi_{доп}/\Delta\Phi_{об} = -0,55$; при $\varepsilon_d = 0,1$ $\Delta\Phi_{доп}/\Delta\Phi_{об} = 0,47$.

Из полученного следует, что чувствительность радиометра к изменению температуры окружающей среды в том и другом случаях всего лишь в два раза меньше, чем чувствительность к изменению температуры объекта, т. е. изменение температуры окружающей среды на 10° внесет ошибку в показания прибора, равную $\sim 5^\circ$. При $\varepsilon_d = 0,8$ увеличение температуры окружающей среды вызовет изменение показаний прибора, эквивалентное уменьшению температуры объекта, а при $\varepsilon_d = 0,1$ — возрастанию температуры объекта.

Таким образом, наличие в ИК-радиометре побочных потоков, излучаемых или отражаемых на приемник излучения элементами оптической системы, может обуславливать зависимость результатов измерений потоков ИК-излучения низкотемпературных объектов от температуры окружающей среды. Эту зависимость необходимо учитывать или принимать меры, устраняющие ее.

§ 22.3. НЕРАВНОМЕРНЫЙ ФОН

Значительно более сложно осуществить выделение цели на неравномерном фоне, так как действие такого фона равносильно облучению приемника флуктуирующим потоком излучения.

Если спектр Хинчина—Винера распределения яркости неравномерного фона неизвестен, общее представление о характере процесса можно получить на основе следующих соотношений.

Пусть $\overline{\Delta L^2}$ — дисперсия пространственного распределения яркости фона (или просто квадрат перепада яркости ΔL двух соседних фоновых образований, например, освещенное облако — безоблачное небо). Тогда дисперсия флуктуаций потока излучения, падающего на приемник,

$$\overline{\Delta\Phi^2} = [\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'} A_{пр}]^2 \overline{\Delta L^2}.$$

Дисперсия флуктуаций электрического сигнала, вырабатываемого приемником и его цепью включения, определяется внутренними шумами приемника и шумом фона

$$\overline{u_{ш}^2} = \overline{u_{ш. вн}^2} + \overline{\Delta\Phi^2 S_{пр}^2}.$$

Удельная эквивалентная мощность шума приемника (площадь приемника 1 см², полоса пропускания 1 Гц) с учетом воздействия неравномерного потока излучения $\Phi_{\phi} \pm \Delta\Phi$ равна

$$\Phi_{п}^*(\Phi_{\phi} + \Delta\Phi) = \sqrt{\overline{u_{ш}^2}/S_{пр}} = \sqrt{\overline{u_{ш. вн}^2}/S_{пр}^2 + \overline{\Delta\Phi^2}}.$$

Так как $\overline{u_{ш. вн}^2}$ и $S_{пр}$ должны определяться с учетом воздействия на приемник засветки Φ_{ϕ} , то

$$\Phi_{п}^*(\Phi_{\phi}) = \sqrt{\overline{u_{ш. вн}^2}/S_{пр}},$$

следовательно,

$$\Phi_{п}^*(\Phi_{\phi} + \Delta\Phi) = \Phi_{п}^*(\Phi_{\phi}) \sqrt{1 + \overline{\Delta\Phi^2}/\Phi_{п}^{*2}(\Phi_{\phi})},$$

или

$$\Phi_{п}^*(\Phi_{\phi} + \Delta\Phi) = q_2 \Phi_{п}^*(\Phi_{\phi}),$$

где

$$q_2 = q_2(\Phi_{\phi} + \Delta\Phi) = \sqrt{1 + \overline{\Delta\Phi^2}/\Phi_{п}^{*2}(\Phi_{\phi})} = \sqrt{1 + \overline{\Delta\Phi^2}/q_1^2 \Phi_{п}^{*2}}.$$

Множитель q_2 учитывает увеличение порогового потока приемника, связанное с неравномерным излучением фона. В итоге, учитывая влияние засветки и неравномерного фона, найдем

$$\Phi_{п}^*(\Phi_{\phi} + \Delta\Phi) = q_1 q_2 \Phi_{п}^*,$$

где $\Phi_{п}^*$ — удельный пороговый поток фотоприемника, реализуемый при поиске и обнаружении цели на неизлучающем фоне.

Так как в уравнения дальности и чувствительности прибора входит значение обнаружительной способности D^* , обратное удельному пороговому потоку, то с учетом действия засветки и неравномерного фона можно записать

$$D_{\phi}^* = D^*/(q_1 q_2).$$

Можно несколько по-другому подойти к решению задачи учета неравномерного фона. Пусть поле зрения прибора Ω , яркость равномерного фона L_{ϕ} , сила света малоразмерной цели I , яркость цели $L_{ц}$, пространственный угол цели $\Omega_{ц}$.

Освещенность входного зрачка прибора при отсутствии цели равна $L_{\phi}\Omega$. При появлении цели она изменяется на величину $L_{ц}\Omega_{ц}$ — $L_{\phi}\Omega_{ц} \approx L_{ц}\Omega_{ц} = I/R^2$. Следовательно, условием обнаружения цели на равномерном фоне является превышение величины I/R^2 над величиной $L_{\phi}\Omega$. Для улучшения условия обнаружения, очевидно, необходимо уменьшать поле зрения прибора Ω до угловых размеров цели $\Omega_{ц}$.

При неравномерном распределении фона в пространстве задача обнаружения изменяется. Максимальное значение измерения освещенности

ценности от фона в процессе сканирования равно $\Omega L_{\max} - \Omega L_{\min} \ll \Omega L_{\max}$, причем знак равенства относится к случаю, когда $L_{\min} \rightarrow 0$. С другой стороны, минимальная разница в освещенностях при наличии цели равна $I/R^2 - \Omega L_{\max}$. Следовательно, можно найти, что в худшем случае условием обнаружения является

$$I/R^2 - \Omega L_{\max} \geq \Omega L_{\max},$$

т. е.

$$I/R^2 \geq 2\Omega L_{\max} = (c/\text{ш}) 2\Omega L_{\max},$$

где $c/\text{ш}$ — необходимое отношение сигнала к шуму.

Следовательно,

$$\Omega = [I/(2R^2 L_{\max})] (c/\text{ш}).$$

Вычисление поля зрения из полученной формулы предъявляет излишне высокие требования к системе, так как формула не учитывает пространственного спектра неравномерностей фона и того, что прибор пропускает не все составляющие этого спектра.

Если двумерный спектр Хинчина—Винера для пространственного распределения яркости фона известен, то расчет спектральной плотности шума на входе электронной части прибора может проводиться по формуле

$$E(f) = E_{\text{вн}}(f) + E_{\text{ф}}(f),$$

где $E_{\text{вн}}(f)$ — спектральная плотность шума приемника излучения, задаваемая паспортом приемника; $E_{\text{ф}}(f)$ — спектральная плотность шума фона, расчет которой производится по данным § 19.2.

При наличии только внутреннего шума модуляция потока излучения может обеспечить выигрыш лишь при окрашенном шуме. Для белого шума модуляция всегда ведет к потере в отношении сигнала к шуму. Для окрашенного шума на частоте модуляции спектральная плотность шума может оказаться много меньше, чем в области спектра немодулированного сигнала. Выигрыш будет существенно зависеть от спектров шума и сигнала, а также от глубины модуляции.

При наличии шума фона модуляция является одним из эффективных средств предварительного выделения сигнала. Растры Бибермана (см. рис 148) позволяют осуществить пространственную фильтрацию при небольших градиентах фона. Конструкция этих растров учитывает, что резкие перепады яркости фона встречаются редко, поэтому в сигнале от фона почти отсутствуют гармоники выше восьмой, хотя в то же время экспериментальные исследования характера сигналов от целей типа самолетов показали, что в состав этих сигналов входят гармоники с частотой в 20 раз большей основной частоты. Поэтому растры Бибермана сконструированы с таким расчетом, чтобы сигнал от цели состоял из гармоник выше восьмой (от частоты вращения раstra), чем и обеспечивается подавление сигнала от фона. Как уже было рассмотрено, растр состоит из двух полукругов, причем

одна половина для модуляции сигнала от цели состоит из чередующихся прозрачных и непрозрачных секторов одинакового размера. Вторая половина является полупрозрачной и служит для отсчета фазы огибающей.

На графиках рис. 356 показано, как выглядят спектр шума фона и спектр сигнала от цели для растров этой конструкции.

Протяженный градиент фона (горизонт, ровный край облака) радиальным растром не подавляется. Поэтому пришлось секторную

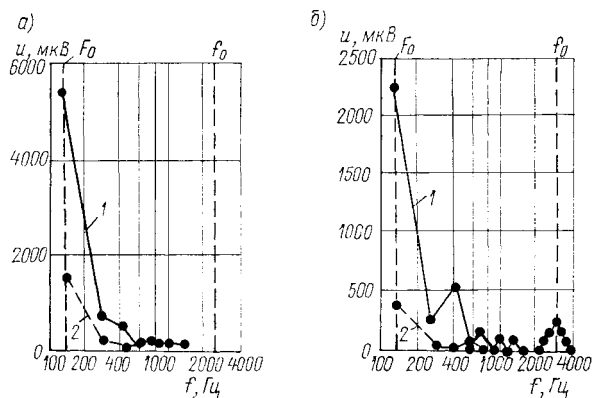


Рис. 356. Спектр сигнала от фона (а) и от фона при наличии цели (б) для секторного раstra с модулирующим и фазирующим полудисками:

1 — при непрозрачном фазирующем полудиске; 2 — при полупрозрачном фазирующем полудиске; F_0 — частота вращения раstra; f_0 — частота модуляции; u — выходное напряжение

модулирующую часть раstra изготовить в виде чередующейся структуры типа шахматной доски (см. рис. 151). Характеристики такого раstra для точечного изображения цели не отличаются от характеристик секторного раstra. Однако растр в виде шахматной доски не будет модулировать протяженную деталь фона, поскольку смежные клетки будут давать сигналы в противофазе. Если же изображение цели попадает на линию раздела чередующихся клеток, глубина модуляции потока уменьшается. В связи с этим Дэвис предложил растр с зигзагообразными секторами (рис. 150), обладающий многими свойствами раstra типа шахматной доски. В целом метод выбора раstra является полуэмпирическим, так как исчерпывающие статистические данные о фоне в большинстве случаев отсутствуют.

Сущность *спектральной фильтрации* чаще всего состоит в выборе такого участка оптического спектра, для которого отношение сигнала от цели к сигналу от фона является наибольшим. Другим средством спектральной фильтрации является образование отношения двух сигналов, полученных в различных участках спектра от одной и той

же точки поля излучения. Если это отношение для объекта наблюдения известно, можно выделить его на фоне других излучателей.

Наиболее часто возникает задача выделения излучения слабо-нагретых объектов на фоне отраженного солнечного света. В этом случае прежде всего используют отрезающие фильтры, обеспечивающие подавление мощного коротковолнового излучения. В длинноволновой области спектра сигнал от цели оказывается уже соизмеримым с сигналом от фона. Для дальнейшей селекции используются двухканальные системы, построенные так, что в одном канале существуют сигналы и от цели, и от фона (например, в спектральном диапазоне 7,5—12 мкм), а в другом канале — только от фона (например, в области 2—3 мкм). При наличии хорошей корреляции сигналов от фона в двух каналах возможно осуществить их вычитание, что позволяет существенно увеличить отношение сигнала от цели к сигналу от фона. В простейших случаях оценку качества спектральной фильтрации можно проводить сравнивая значения эффективной спектральной ширины полосы пропускания прибора $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}$ для цели и для фона. При введении в схему прибора оптического фильтра с заданными спектральными характеристиками изменяются значения $(\Delta\lambda)_{\text{эф}}$ не только для фона, но и для цели. Задача заключается в том, чтобы путем выбора фильтра добиться максимального уменьшения сигнала от фона при небольшом уменьшении сигнала от цели. Однако необходимо всегда иметь в виду, что использование любой фильтрации приводит к уменьшению абсолютной величины сигнала и система, рассчитанная на работу в сложных фоновых условиях, должна иметь запас чувствительности, который будет израсходован средствами подавления помех фона.

Самым распространенным средством спектральной фильтрации являются оптические фильтры, поскольку спектральная избирательность других оптических элементов прибора, как правило, не удовлетворяет условию оптимизации рабочего спектрального диапазона прибора. Фильтры бывают двух типов: абсорбционные, использующие эффект поглощения в красителях, пластмассах и оптических материалах, и отражательные, или интерференционные фильтры, не поглощающие, а отражающие излучение нежелательных длин волн. Современные интерференционные фильтры могут иметь почти любую требуемую характеристику пропускания. Фильтры могут быть полосовые и отрезающие. Полосовые фильтры хорошо пропускают излучение в пределах определенной полосы длин волн, окруженной областями, где излучение практически не пропускается. Центр полосы пропускания характеризуется длиной волны λ_0 , расположенной в середине полосы. Полуширина полосы — это область длин волн, в которой пропускание превышает 50 % максимального пропускания фильтра. Отрезающие фильтры пропускают излучение всех длин волн, которые короче или длиннее данной, называемой граничной $\lambda_{\text{гр}}$. Обычно $\lambda_{\text{гр}}$ определяют по 5 %-ному пропусканию от максимального, которое, в свою очередь, определяется в процентах, причем за 100 % принимают пропускание подложки, на которую нанесен фильтр. Крутизну кривой пропускания на границе характеризуют

разностью между $\lambda_{\text{тр}}$ и $\lambda'_{\text{тр}}$, соответствующей 80 %-ному пропусканию от максимального, и выражают в десятичных долях $\lambda_{\text{тр}}$. Отрезающие абсорбционные фильтры имеют пологую границу пропускания с типичной крутизной наклона $0,7\lambda_{\text{тр}}$. Интерференционные фильтры могут иметь крутизну наклона порядка $0,05\lambda_{\text{тр}}$.

Для спектральной области 1—13 мкм можно получить полосовые фильтры с полушириной $(0,02 \div 0,5) \lambda_0$ и максимальным пропусканием свыше 80 %. В области 1—5 мкм можно получить полуширину до $0,01\lambda_0$, но при меньшем максимальном пропускании, ограниченном 35—40 %. Отрезающие фильтры могут быть изготовлены с любым значением $\lambda_{\text{тр}}$ в диапазоне 1—30 мкм с крутизной до $0,05\lambda_{\text{тр}}$. Максимальное пропускание в области 1—10 мкм около 65 %.

Необходимо иметь в виду, что интерференционные фильтры имеют вторичные полосы пропускания, которые можно уменьшить при изготовлении до 1 %.

Абсорбционные фильтры поглощают излучение в тех областях спектра, в которых они его не пропускают, и вследствие этого могут сильно нагреваться во время работы. Поток излучения, не пропускаемый интерференционными фильтрами, отражается, и нагрева фильтра не происходит.

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ
ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

Глава 23

ТЕПЛОВИДЕНИЕ. *Определение, основные принципы,
первые разработки и результаты*

Среди новых областей применения оптико-электронных приборов наибольший интерес в последние годы вызывает *тепловидение*, прежде всего благодаря тому, что тепловизоры обеспечивают значительное расширение возможностей человека наблюдать и исследовать картину окружающего мира в ранее недоступной для его зрения инфракрасной области спектра, в том числе и в полной темноте.

Тепловидение — это научно-техническое направление, изучающее физические основы, методы и приборы (тепловизоры), обеспечивающие возможность наблюдения слабонагретых объектов, главным образом, по их собственному тепловому излучению в инфракрасной области спектра путем преобразования невидимого глазом человека излучения в электрический сигнал, который подвергается усилению и автоматической обработке, а затем вновь преобразуется в видимое излучение — изображение объекта для его визуального обнаружения и распознавания.

§ 23.1. ОСНОВЫ ТЕПЛОВИДЕНИЯ

В отличие от изображений в видимой области спектра, получаемых в основном за счет отраженного излучения и различий в отражательной способности, тепловые (инфракрасные) изображения создаются главным образом за счет собственного излучения и различий в излучательной способности. В общем случае поток излучения тела, испускаемый по направлению к наблюдателю, определяется совместным действием температуры и отражательной и излучательной способностей его поверхности. Однако обычно при получении теплового изображения механизм излучения не играет роли и возможность наблюдения определяется величиной эффективной температуры элемента поверхности, равной температуре абсолютно черного тела, излучение которого вызывает ту же реакцию системы, создающей изображение, что и наблюдаемый элемент с учетом ослабления, вносимого атмосферой. Изменение эффективной температуры поверхности тела в определенной мере соответствует деталям визуально наблюдаемой картины, поэтому создаваемый тепловизором видимый аналог теплового изображения обычно отвечает нашим представлениям о форме и размерах окружающих тел, хотя это внешнее сходство имеет иногда весьма отдаленный характер.

Возможности тепловидения исследовались еще в довоенный период, однако лишь в послевоенные годы благодаря резкому повыше-

нию чувствительности и уменьшению инерционности приемников ИК-излучения удалось создать аппаратуру, позволяющую видеть малоразмерные объекты, температура которых отличается от температуры окружающей среды на сотые и даже тысячные доли градуса.

Первым тепловизионным прибором был *эвапорограф*, в котором разность температур объекта и фона преобразовывалась в разность толщин масляной пленки, неравномерно испаряющейся в процессе нагрева.

Эвапорография (регистрация путем испарения) ведет свое начало с опытов Д. Гершеля, который в 1840 г. использовал для этих целей тонкую фильтровальную бумагу, смоченную спиртом и закопченную со стороны, обращенной к объекту. В 1927 г. Черни в Берлине развил метод Д. Гершеля, используя вместо испарения спирта возгонку нафталина и камфары. Последующие работы Вилленберга, а также Черни и Молле позволили настолько усовершенствовать эвапорографию, что во время второй мировой войны в Берлинском университете был создан первый прибор — эвапорограф EVA. В 1950 г. в Кембридже (США) построен аналогичный прибор фирмой «Берд ассошиэте инкорпорейшн». Этот прибор предназначался для военных целей, но в 1956 г. он был использован в промышленности.

В Советском Союзе сотрудниками Государственного оптического института им. С. И. Вавилова Г. П. Фаерманом, В. Н. Синцовым и др. был разработан эвапорограф ЭВ-84, внешний вид которого показан на рис. 10.

Эвапорограф не нашел широкого применения в тепловидении из-за присущих ему недостатков. Время, требующееся для получения изображения в эвапорографе, колеблется от долей до десятков секунд. Прибор позволяет различать объекты при разности температур около 1 °C.

Основной путь развития тепловидения в последние годы базировался на создании приборов с оптико-механическим сканированием, что определялось недостаточной чувствительностью ИК-видиконов и отсутствием матричных полупроводниковых приемников ИК-излучения с хорошими фотоэлектрическими характеристиками. Сканирующие тепловизоры разрабатывались еще во время второй мировой войны. В Потсдамской астрофизической обсерватории был создан тепловизор с болометром для наблюдения картины местности в ИК-лучах. Во Франции аналогичный прибор с термоэлементом для наземного применения был построен Бейлем и усовершенствован Дельбордом. В Англии разработан сканирующий пирометр «Пироскан», в США — инфракрасная сканирующая камера «Термограф Барнса». В 1955 г. Розенбергом (США) опубликовано описание сканирующего самолетного оптико-электронного прибора для целей фотограмметрии, а в 1956 г. в Чикагском университете был создан самолетный смотрящий вниз тепловизор для получения тепловых карт местности. После 1960 г. начинают появляться тепловизоры с быстрой кадровой разверткой для самолетных систем переднего обзора и различных наземных применений. Эти приборы в иностранной литературе получили наименование FLIR по первым буквам

английского термина «Forward Looking Infra-Red» — инфракрасная система переднего обзора.

Непрерывно расширяется область невоенных применений тепловизоров. К ним относятся приборы для получения изображений местности с самолетов и искусственных спутников Земли в интересах ледовой разведки, обнаружения лесных пожаров, охраны окружающей среды и исследований природных ресурсов, для медицинской диагностики, неразрушающего контроля качества продукции, спасательных работ, определения мест утечки тепла в зданиях и сооружениях, профилактического обследования электроэнергетического оборудования и т. д.

К концу 50-х годов успехи тепловидения стали уже настолько значительными, что автору, работавшему в этой области, было предоставлено почетное право выступить на XV чтениях имени академика Д. С. Рождественского, состоявшихся 18 мая 1961 г., с обзорным докладом «Новое направление инфракрасной техники — тепловидение», который затем был опубликован в Трудах Государственного оптического института им. С. И. Вавилова [83].

Наличие большого числа публикаций по различным вопросам тепловидения, появившихся в последние годы, и особенно превосходной монографии Д. Ллойда «Системы тепловидения», изданной на русском языке в 1978 г. [73], позволяет ограничиться весьма кратким изложением основных принципов и достижений. К этому автора обязывает и общая направленность книги, предусматривающая рассмотрение практических приложений лишь в качестве примера использования теоретических расчетов и выводов.

Хорошо известно, что в любом теле, имеющем температуру, отличную от абсолютного нуля, происходит постоянное хаотическое перемещение электрических зарядов, вызывающее излучение в пространство электромагнитной энергии.

В зависимости от температуры тела излучаемая им электромагнитная энергия имеет не только разные значения, но и характеризуется разной длиной волны колебаний, т. е. имеет многообразные свойства, проявляемые в процессе дальнейшего взаимодействия с веществом. В частности, при определенном уровне нагрева тело начинает излучать видимый свет — электромагнитную энергию, диапазон длин волн которой соответствует области чувствительности человеческого глаза. Максимум излучения живых тканей, имеющих температуру около 37°C , расположен вблизи длины волны 10 мкм, т. е. в невидимой области спектра, где каждый квадратный сантиметр живой ткани излучает около 50 мВт — величину, весьма значительную для ее обнаружения.

Чувствительность человека к теплу очень высока: наша кожа может уловить разницу температур меньше 1°C , что соответствует плотности мощности излучения $0,7 \text{ мВт/см}^2$, однако возможности человеческого глаза наблюдать слабонагретые объекты весьма ограничены. После достаточной адаптации наблюдателя к темноте можно различить тело, нагретое до температуры 420°C , а тела, имеющие более низкую температуру, абсолютно невидимы.

Регистрировать собственное излучение слабонагретых объектов и тем более наблюдать малые перепады температуры на их поверхности в настоящее время не позволяют ни специальные фоточувствительные материалы, ни телевизионные трубки с полупроводниковой мишенью, ни системы с матричными полупроводниковыми приемниками.

Наиболее распространенными приборами, обеспечивающими наблюдение слабонагретых объектов, являются тепловизоры с оптико-механическим сканированием, в которых осуществляется последовательное преобразование ИК-излучения в видимое за счет пространственной развертки наблюдаемого изображения.

Основной элемент тепловизора — высокочувствительный приемник ИК-излучения — установлен в плоскости изображения, создаваемого объективом, и улавливает энергию, излучаемую элементом нагретого тела внутри малого телесного угла, называемого мгновенным полем зрения прибора. Благодаря перемещению мгновенного поля зрения в пространстве, происходящему за счет прокачки всей системы или движения ее отдельных элементов (зеркал, призм или клиньев), осуществляется последовательный анализ общего поля обзора. Если это поле имеет неоднородную температуру, то поток излучения, падающий на приемник при данном положении мгновенного поля зрения, изменяется и это изменение преобразуется приемником в электрический сигнал, который усиливается и воспроизводится на экране индикатора подобно тому, как воспроизводятся телевизионные и радиолокационные сигналы.

Высокая чувствительность тепловизоров с оптико-механическим сканированием, достигающая сотых и даже тысячных долей градуса перепада температур, реализуется благодаря наличию высокочувствительных полупроводниковых приемников излучения из сернистого свинца PbS, селенистого свинца PbSe, теллуристого свинца PbTe, антимонида индия InSb, кристалла германия, легированного ртутью Ge: Hg, или тройных соединений свинец—олово—теллур (COT) Pb—Sn—Te, кадмий—ртуть—теллур (KPT) Cd—Hg—Te и др.

В зависимости от типа приемника излучения в тепловизорах используется тот или иной диапазон ИК-спектра, преимущественно 3,0—5,5 мкм или 7,5—12,5 мкм, совпадающих с «окнами» прозрачности атмосферы для ИК-лучей.

Контрастное излучение от слабонагретого объекта в длинноволновом диапазоне 7,5—12,5 мкм на порядок превышает излучение в диапазоне 3,0—5,5 мкм (интегральное значение контрастного излучения в диапазоне 3—5,5 мкм при температуре фона 300 К равно $2,2 \cdot 10^{-5}$ Вт·см⁻²·К⁻¹, а в диапазоне 7,5—12,5 мкм равно $2,6 \cdot 10^{-4}$ Вт·см⁻²·К⁻¹), однако чувствительность соответствующих фотоприемников, например InSb и Pb—Sn—Te, различается также примерно на порядок: ниже в более длинноволновом диапазоне. Поэтому выбор рабочего диапазона зависит от многих дополнительных условий: уровня радиационных помех, типа используемого объектива.

Регистрация видимого аналога инфракрасного изображения — *термограммы* (ТМГ) — обычно осуществляется на экране

электронно-лучевой трубки, с которого производится фотографирование на фотопленку или фотоматериал с одноступенным процессом проявления и фиксации изображения.

Непосредственное наблюдение термограммы на экране индикатора в ряде случаев не позволяет осуществить ее анализ и расшифровку, даже если соответствующее изображение воспроизводится в темпе телевизионного стандарта, так как процесс анализа связан с опознаванием изображений температурных пятен, определением их взаимного расположения и перепада температур между симметричными точками. Кроме того, если наблюдателем является врач, осуществляющий диагностику, он всегда заинтересован в сохранении термограммы в истории болезни для последующего анализа динамики процесса.

Дешевым и удобным способом регистрации термограмм является запись изображения на электрохимическую бумагу (ЭХБ), используемую в фототелеграфии. Степень потемнения бумаги зависит от проходящей через нее силы тока, управляемого сигналом фотоприемника. Поскольку изображение образуется в толще бумаги, можно обеспечить значительное число градаций яркости (до 30—40), особенно если рассматривать термограмму на просвет.

Непосредственная запись изображения на ЭХБ возможна только при достаточно медленной скорости записи (около 5 строк в 1 с). Такая скорость допустима, например, с точки зрения динамики происходящих на поверхности тела человека тепловых процессов. Однако в ряде случаев желательно увеличить скорость записи, что требует введения в схему тепловизора специальных элементов, изменяющих темп записи до допустимых значений, которые определяются инерционностью регистратора.

Наличие в окружающем нас мире радиационных контрастов, являющихся источниками тепловизионных сигналов, определяется различными причинами. Температуры земных покровов всегда несколько различны. Нагреваясь днем за счет солнечного излучения, предметы на местности остывают в течение ночи с различной скоростью, а растения стремятся сохранить постоянную температуру. Если два соседних участка земной поверхности имеют температуру T и $T + \Delta T$ соответственно, то при $T = 300$ К и площади каждого участка, равной 1 м^2 , разность потоков излучения, испускаемых этими участками в полусферу, равна примерно $6\Delta T$ Вт, т. е. для $\Delta T = 1$ К разность потоков составляет 6 Вт.

Излучательная способность земных покровов также неодинакова. Если два соседних участка земной поверхности различаются по своей излучательной способности на 1 %, то это эквивалентно разности их температур примерно в 1 К.

Сопоставление приведенных данных с достигнутой чувствительностью тепловизоров позволяет сделать заключение о возможности воспроизведения средствами тепловидения панорамы местности в ее собственном тепловом излучении. Применяя тепловизор для картографирования или обзора местности, можно получить тепловое изображение осматриваемой местности на экране индикатора, причем

это изображение будет более детальным, чем картины, даваемые обзорными радиолокаторами. Различные предметы на тепловой фотографии воспроизводятся в соответствии с их температурами. Это дает возможность наблюдать не только ландшафты, но и такие объекты, как электростанции, суда, локомотивы и т. д.

Некоторые вопросы применения тепловизоров при изучении природных ресурсов с воздуха, а также описание их принципа действия рассмотрены в § 4.2. Подробное изложение этого материала, а также обширная библиография приведены в работе [157].

Тепловидение приобрело большое значение при решении ряда промышленных и медицинских задач. В частности, получение тепловой картины блоков радиоэлектронной аппаратуры позволяет определить эффективность ее охлаждения. Всевозможные дефекты в слоистых материалах могут быть выявлены путем наблюдения температурных неоднородностей на их поверхности, образующихся за счет неравномерной теплопередачи сквозь материал при нагреве. Таким же образом могут быть обнаружены опасные области перегрева у высоковольтных изоляторов и других деталей на расстоянии.

При производстве и эксплуатации мощных электрических генераторов встречается дефект в виде разогрева статора в местах, где нарушена лаковая изоляция между листами активной стали. Для обнаружения подобных дефектов в статорах турбогенераторов и синхронных компенсаторов в процессе их изготовления и при профилактических ремонтах на тепловых электростанциях создан тепловизор-дефектоскоп «Статор-1».

Он имеет следующие технические характеристики:

Пороговая чувствительность к перепаду температур при +20 °С	1°
Линейное разрешение при диаметрах статора:	
до 1,5 м	не более 5 мм
до 3,0 м	не более 10 мм
Диапазон фокусировки	0,45—1,5 м
Скорость сканирования	2 об/с
Средняя скорость перемещения	10 мм/с
Потребляемая мощность	не более 300 В·А

Тепловизионный метод неразрушающего контроля качества статоров электрических машин был впервые разработан в Советском Союзе (а. с. № 412825). Внедрение, а также отработка метода и технических требований, предъявляемых к тепловизору-дефектоскопу «Статор-1», осуществлялись на основе специально разработанной аппаратуры. Функциональная схема прибора представлена на рис. 357.

Поэлементное сканирование внутренней поверхности статора визирным лучом производится по спирали за счет вращения зеркала 2 и одновременного перемещения оптической головки с помощью самоходного шасси вдоль статора с заданной скоростью. Поток излучения с элемента поверхности фокусируется объективом 4 на чувствительную площадку приемника излучения 3. При наличии разности температур между двумя соседними элементами поверхности на зажи-

мах приемника вырабатывается электрический сигнал, пропорциональный этой разности. В предусилителе 6 осуществляются усиление сигнала и по командам с датчика строчных синхроимпульсов 1 привязка его к уровню сигнала от черного тела 17, имеющего определенную температуру. Привязка производится один раз за каждый оборот сканирующего зеркала в тот промежуток времени, когда на

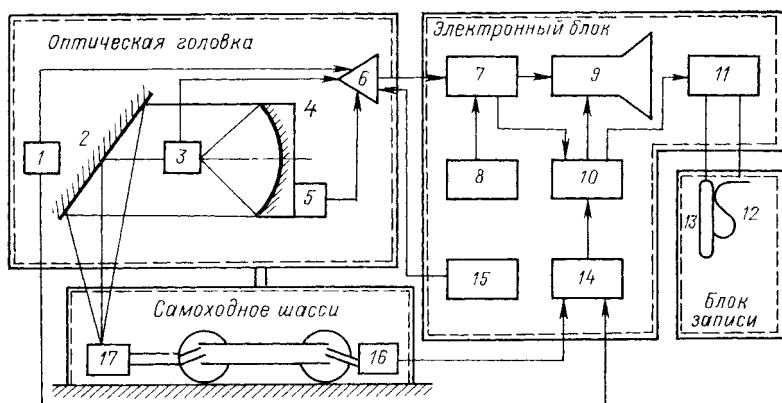


Рис. 357. Функциональная схема тепловизора-дефектоскопа «Статор-1»

приемник попадает излучение черного тела. Кроме того, в предусилителе происходит компенсация дрейфа выходного сигнала при введении некоторой постоянной составляющей от датчиков 5, 15, определяющих как изменение температуры окружающей среды, так и выбор диапазона исследуемых температур. С предусилителя сигнал передается на видеоусилитель 7, который осуществляет его дальнейшее усиление, передачу постоянной составляющей и формирование с помощью декадного делителя 8 динамического диапазона усилительного тракта.

С видеоусилителя сигнал попадает на селектор 10, который по командам с формирователя управляющих сигналов 14 осуществляет запуск строчной и кадровой разверток электронно-лучевой трубки 9, предназначенной для наблюдения построчных сигналов, поступающих с видеоусилителя. Одновременно селектор формирует профилограмму, несущую информацию о средней температуре внутренней поверхности статора за один оборот зеркала (за одну строку) и генерирует импульсы координатной привязки от датчика пакетов 16.

Снимаемые с селектора сигналы подаются на нелинейный усилитель записи 11 и далее на электроды записывающего блока 12, 13, где происходит построчная регистрация черно-белого полутонового теплого изображения внутренней поверхности статора на электрохимическую бумагу с профилограммой и координатными метками синхронно с частотой вращения сканирующего зеркала. На рис. 358

приведена термограмма внутренней поверхности статора, полученная с помощью тепловизора-дефектоскопа.

Конструктивно прибор выполнен в виде четырех отдельных блоков: оптической головки, самоходного шасси, электронного блока и блока записи. На самоходное шасси при производственных испытаниях устанавливаются съемное черное тело и датчик пакетов. Все

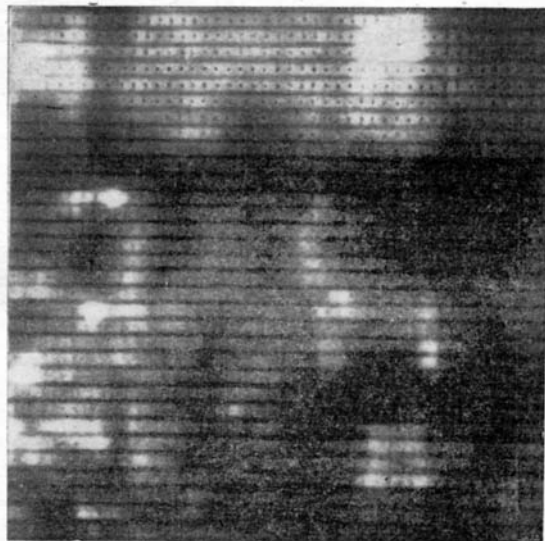


Рис. 358. Термограмма внутренней поверхности статора турбогенератора

блоки и датчики электрически соединены между собой с помощью кабелей. Внешний вид тепловизора представлен на рис. 359 (см. вклейку).

Инфракрасные лучи давно применяются в медицине благодаря их возможности проникать в ткани человека значительно глубже, чем видимые лучи. Это обстоятельство дает возможность фотографировать в ИК-лучах венозную систему, расположенную близ кожных покровов. Другой пример применения ИК-фотографии в медицине — съемка внутренней поверхности глаза через его замутненную оболочку.

Тепловидение значительно расширяет области применения ИК-техники в медицине, так как позволяет не просто фотографировать освещенную ИК-лучами поверхность тела человека и расположенные вблизи от нее сосуды, а наблюдать его собственное излучение.

Изучение оптических свойств кожного покрова человека показало, что в ИК-области спектра они близки к характеристикам абсолютного черного тела. Существует мнение, что даже кожа, сгоревшая до

обугливания, не дает изменения в величине излучательной способности. Это обстоятельство позволяет большинству исследователей считать, что зарегистрированные тепловизором изменения потока излучения с различных участков тела человека определяются исключительно распределением температур этих участков. Тем не менее, некоторое отличие коэффициента излучения кожи от единицы, зависящее от ее влажности, кровенаполнения и подкожной клетчатки, обуславливает необходимость учета этого обстоятельства при исследованиях, поскольку различие коэффициентов излучения двух участков кожи в 1 % эквивалентно перепаду температур $\sim 1\text{K}$ (1°C).

Причины возникновения температурных перепадов на поверхности тела человека продолжают широко обсуждаться и исследоваться, однако уже не вызывает никаких сомнений глубокая связь поверхностных температурных эффектов с нормальными и патологическими процессами, происходящими в организме. Очевидно также, что наряду с чисто физической природой возникновения температурных перепадов на поверхности тела (теплопередача) они зависят от работы вегетативной нервной системы, вызывающей при любых изменениях тепловой энергии внутренних органов эффект изменения кровенаполнения в сопряженной с ними подкожной сосудистой сети в рефлексогенной зоне, соответствующей данному органу, и, как следствие, перепады температуры.

Еще в 1942 г. профессор Н. Н. Красногорский детально исследовал ИК-излучение у здоровых и больных детей и его связь с вегетативными реакциями организма. Создание высокочувствительной тепловизионной аппаратуры в послевоенные годы позволило в 1956 г. канадскому врачу Р. Лоусону установить значение поверхностных температур в диагностике рака молочной железы.

В начале 60-х гг. автором и его сотрудниками совместно с профессором М. А. Собакиным были впервые в отечественной и зарубежной физиологии выполнены работы по визуализации ИК-излучения эпигастральной области и установлены зависимости его величины и распределения от функциональных состояний желудка. В работе использовалась одна из первых экспериментальных моделей отечественного тепловизора с оптико-механическим сканированием. Прибор позволял обнаружить перепад температур в $0,3^\circ\text{C}$, полный цикл сканирования занимал 15 мин, исследования проводились на двух спектральных диапазонах: 3—14 мкм и 7—14 мкм. Эти исследования, наряду с пионерскими работами доктора Р. Лоусона, послужили основой широкого применения тепловидения в различных областях клинической медицины и разработки соответствующих оптических приборов (тепловизоров) в нашей стране.

Абсолютно безвредный для больного тепловизионный метод обследования используется в онкологии для обнаружения и дифференциальной диагностики опухолей молочной и щитовидной желез, меланобластомы кожи, саркомы костей и других заболеваний. Наибольшее число исследований посвящено тепловизионной диагностике опухолей молочной железы как самого распространенного ракового заболевания среди женщин. Основным признаком наличия опухоли

считается очаговая гипертермия, наряду с которой в различных сочетаниях наблюдаются общая гипертермия, асимметрия структуры изображения за счет избыточной и беспорядочной гипертермической пятнистости на стороне поражения, ареолярная гипертермия и «срезанность» контура железы. Определенные сочетания патологических симптомов позволяют отнести термограмму к одной из следующих категорий: «подозрительной на рак», «сомнительной» и «нормальной».

Несмотря на широкое распространение тепловидения в онкологии, в настоящее время все еще нет согласованного представления о точности термографической диагностики при патологии молочных желез. Это обуславливается прежде всего тем, что отсутствуют согласованные стандартные и объективные критерии, позволяющие однозначно ответить на вопрос, находится ли термограмма в пределах нормы или отличается от нее. Оставляют желать лучшего устойчивость воспроизведения термограмм и точность первоначальной калибровки. Искусство оператора и опыт врача имеют существенное значение. Наряду с отличными результатами, когда правильная термографическая диагностика рака молочной железы была зафиксирована в 92—93 % случаев, встречаются и менее оптимистические отзывы о методе. Точность выявления рака, по данным японских авторов, составляет 78,6 %. В ряде работ приводятся сведения о наличии 29 % ложноотрицательных и 55 % ложноположительных термографических заключений. По нашим данным, для точности термографической диагностики имеет значение тип общего фона термографического изображения молочных желез, который определяется возрастом и гормональным статусом исследуемой. При относительно равномерном гипотермичном фоне молочных желез рак по термограммам удалось диагностировать в 77 % случаев, причем ложноположительные и сомнительные заключения в группе больных с доброкачественными процессами были сделаны у 29 % обследуемых. При наличии фона, состоящего из множественных светлых пятен и тяжей за счет сосудистого рисунка, эти показатели составили 63 и 12 % соответственно.

Особое значение тепловизионная методика имеет при проведении массовых профилактических осмотров больших групп населения на предмет выявления ранних форм рака молочной железы с обязательным дополнением маммографическими и клиническими данными. Комплексная диагностика с использованием клинического и термографического исследований позволяет более чем в 97 % случаев поставить правильный диагноз до операции. Соответствующие работы, выполненные в Ленинграде, показали большую перспективу термографического метода для выявления рака молочной железы в ранней стадии [137].

Для уменьшения числа ложноотрицательных и ложноположительных заключений весьма перспективной оказалась машинная обработка термографической информации. Выяснено, что даже использование только трех термографических патологических признаков: общей, очаговой и ареолярной гипертермии — обеспечивает повышение диагностической точности термографического метода. Так,

Основные параметры тепловизоров

Тип тепловизора	Страна	Поле обзора, °	Время обзора, с	Угловое разрешение, ...	Пороговая чувствительность к перепаду температур, ... °С	Приемник излучения	Способ воспроизведения изображения
«Филин»	СССР	20×10	720	3,5	0,4	Болометр	Фото- пленка
«Рубин-1»	СССР	20×10	60	7	0,05	InSb	ЭХБ
«Рубин-2»	СССР	20×15	60	7	0,1	InSb	ЭХБ
«Рубин-3»	СССР	20×20	40	6	0,1	InSb	ЭХБ
«Янтарь»	СССР	5×4	1/25	5	0,2	InSb	ЭЛТ
ТВ-03	СССР	4,5×4,5	1/16	4	0,2	InSb	ЭЛТ
АТИ-12М	СССР	11×15	5	4	0,15	InSb	ЭЛТ
«Радуга» МТ	СССР	20×17	1/25	7	0,2	InSb	ЭЛТ
Термограф Барнса Т-4	США, Голландия	20×10	240	3,4	0,1	Болометр	Фото- пленка
Термограф Барнса Т-6	США	10×10	30	6	0,1	Пироэлектрический	То же
Термограф Барнса Т-101, «Бофорс»	США, Швеция	25×12,5	0,25	6	0,15	InSb	ЭЛТ
Спектротерм 800	США, Швейцария	30×30	2	4,5	0,2	Cd—Hg—Te	ЭЛТ
АГА-661	Швеция	5×5	1/16	3	0,2	InSb	ЭЛТ
АГА-680	Швеция	10×10	1/16	4,5	0,2	InSb	ЭЛТ
АГА-750	Швеция	12×12 20×20	1/25	6,5 11,7	0,15	InSb	ЭЛТ
АГА-780 СВ АГА-780 ЛВ	Швеция	12×12 20×20	1/25	6,5 12	0,1	InSb Cd—Hg—Te	ЭЛТ
АГА-780 Д: канал СВ канал ЛВ	Швеция	12×12 20×20	1/25 1/25	6,5 12	0,1	InSb Cd—Hg—Te	ЭЛТ
Термоскан	Англия	6×13	1	4,5	0,2	InSb	ЭЛТ
Пироскан Смита	Англия	25×25	30	7	0,2	InSb	ЭХБ
ИР-815 ЦСФ	Франция	12×15	4	3,5	0,3	InSb	ЭЛТ
					0,1	Ge : Hg	ЭЛТ
«Инфра-Ай 103»	Япония	20×15	10	7	0,1	Cd—Hg—Te	ЭЛТ
Термовьюэр МБ «Джеол»	Япония	20×25	2; 4; 8	5,5	0,03	Cd—Hg—Te	ЭЛТ

Примечание. Тепловизор АГА-680 снабжен дополнительными объективами, расширяющими поле обзора до 25×25° и 45×45°. Может комплектоваться также объективами с углом обзора 2×2°, 8×8° и 15×15°. Тепловизоры АГА-780 СВ и АГА-780 Д (канал СВ) комплектуются дополнительными объективами с углом обзора 3,5×3,5°, 7×7°, 20×20° и 40×40°. Тепловизоры АГА-780 ЛВ и АГА-780 Д (канал ЛВ) комплектуются дополнительными объективами с углом обзора 3,5×3,5° и 7×7°.

установлено, что признаком рака является наличие как небольших по площади (6—15 % от площади всей железы), но сильно разогретых (на 1,5 °C и более по сравнению с симметричным участком) очагов, так и слабо разогретых (около 1 °C), но обширных (30—40 %) очагов. Перепад температур между ареолами у здоровых женщин не превышает 0,3 °C, при наличии доброкачественной опухоли — около 0,6 °C, а в группе рака — 1,3—2,3 °C. Вообще, наличие перепадов температуры более 2 °C всегда является тревожным симптомом.

Наряду с различными онкологическими применениями, тепловидение дает хорошие результаты в травматологической клинике при переломах, остеомиелите, ушибах, артритах, определении границ ожогов и обморожений и т. д.

Важной областью применения термографии являются сосудистые заболевания. Различные поражения вен и артерий, диабетическая ангиопатия, спазм сосудов головного мозга хорошо выявляются при тепловизионном наблюдении и термографии.

Высокая диагностическая ценность тепловизионного метода подтверждена при острых воспалительных процессах в брюшной полости: остром холецистите, панкреатите, аппендиците, абсцессах и воспалительных инфильтратах. При хронических, и особенно опухолевых, поражениях желудка, печени, поджелудочной железы и т. д. информативность тепловизионной картины пока невелика.

Весьма полезным оказалось использование тепловидения в акушерско-гинекологической практике, хотя надежды на очень высокую эффективность тепловизионной техники при определении локализации плаценты и наличия плода оказались слишком оптимистичными; в этой области тепловидение может рассматриваться лишь как совершенно безвредный вспомогательный способ диагностики. Самостоятельное и даже особое диагностическое значение тепловидение приобретает в акушерстве и гинекологии при динамическом наблюдении процесса развития беременности и послеродовых состояний.

В табл. 28 приведены основные параметры ряда тепловизоров, выпускаемых в СССР и за рубежом. Как правило, это приборы с оптико-механическим сканированием, в которых изменение направления визирной оси в пространстве осуществляется подвижными элементами оптической системы.

Основным типом тепловизора, серийно выпускаемого в Советском Союзе, является тепловизор «Рубин», который благодаря ряду ценных свойств нашел широкое применение и стал базовой моделью, подвергающейся периодической модернизации («Рубин-1, -2, -3»). Тепловизор представляет собой ИК-радиометр с узким полем зрения, которым с помощью оптико-механической системы осуществляется построчное сканирование объекта. Воспроизведение теплового поля объекта производится путем его записи в виде изображения на ЭХБ. Структурная схема одной из первых моделей тепловизора «Рубин» приведена на рис. 360. Приемником излучения служит фоторезистор из InSb с чувствительной площадкой $0,3 \times 0,3$ мм², охлаждаемый жидким азотом. Объектив состоит из двух зеркал. Поверхность первого зеркала эллипсоидальная, второго — сферическая. Фокусное

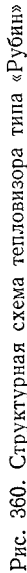


Рис. 360. Структурная схема тепловизора типа «Рубин»

расстояние составляет 115 мм. Кружок рассеяния объектива в пределах рабочих расстояний до объекта не превышает размеров чувствительной площадки приемника, а для расстояний до объекта 1,2 м составляет 0,1 мм. Сканирование визирным лучом осуществляется с помощью плоского зеркала, установленного перед объективом. Строчное сканирование происходит вследствие поворота зеркала на 20° относительно вертикальной оси, кадровое сканирование — за счет поворота зеркала на $\pm 5^\circ$ относительно горизонтальной оси, лежащей в его плоскости. Модулятор, расположенный в непосредственной близости к окну приемника излучения, периодически прерывает путь потоку излучения объекта к приемнику. Модулятор представляет собой диск с четырьмя вырезами, вращающийся с частотой 20 500 об/мин, и, таким образом, частота прерывания потока излучения равна 1360 Гц. Сигнал несущей частоты, вырабатываемый приемником, пропорционален разности потоков излучения, падающих на приемник от объекта и модулятора. В процессе сканирования она меняется в зависимости от изменения температуры объекта. На вход предусилителя помимо сигнала, вырабатываемого приемником, поступает напряжение компенсации из блока, формирующего опорное напряжение. Напряжение компенсации устанавливается оператором таким, чтобы сигнал на выходе предусилителя для средней температуры исследуемого объекта был равен нулю. При этом по положению соответствующей ручки управления можно оценить эту температуру. Далее сигнал проходит через полосовой фильтр, в котором выделяется основная гармоника несущей частоты, и после дополнительного усиления в главном усилителе поступает на синхронный детектор и низкочастотный фильтр. На выходе фильтра возникает напряжение постоянного тока, по значению и знаку соответствующее отклонению температуры сканируемых точек объекта от среднего уровня, по которому произведена компенсация. Это напряжение поступает на усилитель постоянного тока, к которому подключены электроды системы записи изображения. Лента из ЭХБ равномерно движется между двумя электродами. Один электрод выполнен в виде линейки, а второй — в виде витка спирали. Электроды касаются бумаги в одной точке, но с разных сторон, и эта точка касания перемещается поперек бумажной ленты. В результате на бумаге электроды прочерчивают растр, подобный растру, создаваемому сканирующим визирным лучом. Протекание через бумагу тока приводит к ее почернению, причем плотность почернения пропорциональна прошедшей в этом месте силе тока, и на бумаге возникает изображение — ТМГ, на которой теплые места выглядят светлыми, а холодные — темными. В 1976 г. была создана вторая модель этого тепловизора — «Рубин-2». Основной целью ее разработки было улучшение конструкции узлов и прибора в целом, внешний вид которого показан на рис. 40 (см. вклейку). В 1978 г. изготовлена следующая модель тепловизора — «Рубин-3» (или «Факел»). В этой модели на ТМГ наносятся: цифровая информация о среднем уровне температуры и диапазоне регистрируемых температур; калиброванный оптический клин и вертикальный термопрофиль с линией его выборки; изотермы и порядковый номер кадра.

Тепловизор «Рубин-3» (рис. 41, см. вклейку) вносит в диагностику улучшенные метрологические данные результатов.

На базе тепловизоров типа «Рубин» в настоящее время создается комплекс «Тепловизор—ЭВМ» [133]. В некоторых клиниках и лабораториях уже используется система обработки тепловых изображений либо с помощью комплекса «Гамма-11» без регистрации на ЭХБ, либо путем вторичной обработки ТМГ, которая вводится с ЭХБ

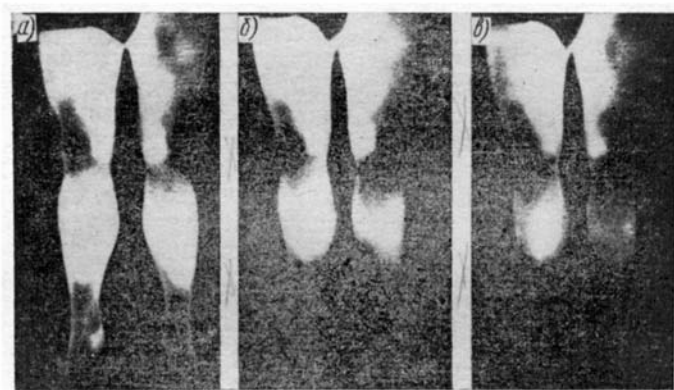


Рис. 364. Термограммы ног больного сахарным диабетом до (а) и после (б, в) холодной пробы — охлаждения ног водой, имеющей температуру $+16^{\circ}\text{C}$, в течение 3 мин: контроль через 5 мин (б) и 30 мин (в) (у здоровых людей через 30 мин после холодной пробы термографическая картина полностью восстанавливается)

в цифровую ЭВМ и подвергается в ней обработке по заранее избранным алгоритмам. Степень совпадения данных, получаемых при машинной обработке и анализе ТМГ опытным дешифровщиком, обычно высокая — более 95 %, при этом скорость обследования пациента существенно возрастает.

Для наблюдения и контроля нестационарных и быстроменяющихся тепловых полей, а также экспресс-диагностики при массовых осмотрах и в особых случаях, когда необходимо оперативное предварительное наблюдение (приемные покои хирургических клиник, детские болезни, инфаркт миокарда и т. п.), в Советском Союзе разработаны и выпускаются быстродействующие тепловизоры типа «Янтарь», ТВ-03 и др. В тепловизоре «Янтарь» (рис. 103, см. вклейку и § 6.3) в качестве сканирующего устройства используется диск Нипкова с конденсорными линзами в каждом отверстии экрана. В этом случае конденсор изображает на приемнике входной зрачок объектива не для всего поля обзора, а лишь для мгновенного поля зрения, что позволяет уменьшить линейные размеры приемника излучения и, следовательно, повысить его чувствительность.

Наряду с перечисленными приборами в стране осуществляется промышленный выпуск еще некоторых моделей тепловизоров — ТВ-03ЦФ, АТП-12М, «Радуга» и др. На рис. 361 (см. вклейку) приведена фотография цветной тепловизионной системы «Радуга-МТ». Она обеспечивает получение цветного или черно-белого изображения объекта (в 10 цветах или 5 черно-белых градациях) и цифровую обработку видеосигнала в любой точке исследуемой поверхности объекта. Долговременное хранение сигналов позволяет наблюдать на экране ЭЛТ устойчивое изображение. Характеристики системы приведены в табл. 28.

Тепловизионная аппаратура для медицинских исследований и диагностики широко рекламируется и выпускается за рубежом — в США, Англии, Франции, Швеции, Японии и других странах. Наибольшую известность среди зарубежных моделей в последние годы получили тепловизоры шведской фирмы АГА. Их краткое описание дано в § 5.2. Внешний вид тепловизора АГА-780 представлен на рис. 88 (см. вклейку).

Новыми направлениями в развитии тепловизионной техники за рубежом являются использования жидкокристаллических преобразователей изображения, пироэлектрических видиконов и мозаичных приемников излучения. Так, в 1979 г. во Франции был создан портативный тепловизор «Кристотермограф», основанный на применении гранулированного жидкокристаллического преобразователя изображения, который выполнен в виде легкой рамки, приводимой в контакт с исследуемой частью тела больного. Цветная термограмма воспроизводится камерой Ленда с одноступенным фотографическим процессом (рис. 362, см. вклейку).

Достаточно широкое распространение тепловизионной аппаратуры и успешное ее применение в различных областях медицины являются залогом дальнейшего развития этого нового, безвредного и эффективного метода диагностики различных заболеваний. Общий вид тепловизионного диагностического кабинета представлен на рис. 363 (см. вклейку). На рис. 89—92 (рис. 91 и 92, г, д см. на вклейке) и рис. 364—366 приведены примеры термограмм, полученных в различных клиниках Ленинграда. Более полное изложение медицинских применений тепловидения можно найти в книге М. М. Мирошникова, В. И. Алипова, М. Л. Гершановича,

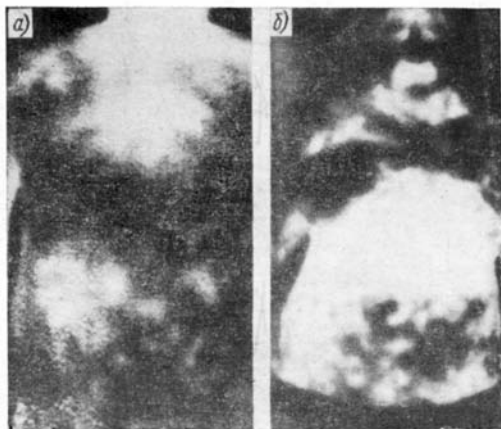


Рис. 365. Термограммы больных острым холециститом (а) и острым панкреатитом (б)

В. П. Мельниковой, В. Ф. Сухарева «Тепловидение и его применение в медицине» [137].

Особенность наблюдения в ИК-области спектра состоит в отсутствии темного фона. Плотность фотонов с длиной волны около 10 мкм, попадающих на наблюдаемую поверхность с окружающих предметов, имеющих комнатную температуру, сравнима с плотностью фотонов

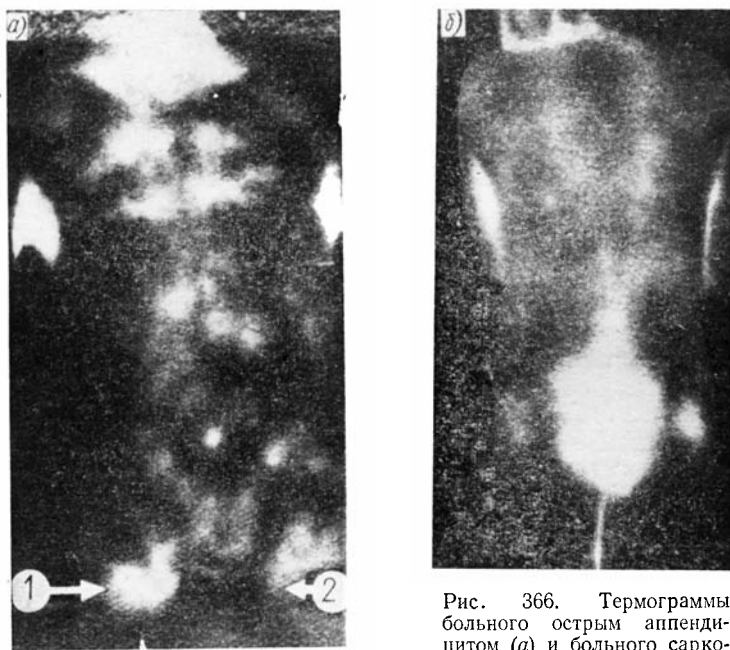


Рис. 366. Термограммы больного острым аппендицитом (а) и больного саркомой крестца (б)

в видимой области спектра, соответствующих яркому солнечному свету. Следовательно, если бы глаз человека имел чувствительность в ИК-области спектра, он был бы ослеплен излучением окружающих его тканей и тел. Кроме того, радиационные контрасты были бы недостаточны для их непосредственного наблюдения, поскольку разность температур даже в 1 °С создает при длине волны около 10 мкм контраст, примерно равный 1 %, что ниже предела Вебера—Фехнера, соответствующего минимальному наблюдаемому глазом контрасту в 2 %.

Контраст определяется выражением

$$K = (L_{об} - L_{ф})/L_{ф},$$

где $L_{об}$ и $L_{ф}$ — яркости объекта и окружающего фона.

Для двух близких по температуре абсолютно черных тел контраст равен

$$K \approx \frac{h\nu}{kT} \frac{\Delta T}{T} = \frac{hc}{k} \frac{1}{\lambda T} \frac{\Delta T}{T},$$

где в соответствии с приведенными в п. 2.4 значениями постоянных

$$\frac{hc}{k} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{1,4 \cdot 10^{-23}} = 1,4 \text{ см К} = 1,4 \cdot 10^4 \text{ мкм} \cdot \text{К}.$$

Следовательно,

$$K = \frac{1,4 \cdot 10^4}{\lambda T} \frac{\Delta T}{T},$$

т. е. при $T = 300 \text{ К}$, $\lambda = 10 \text{ мкм}$, $\Delta T = 1^\circ \text{С}$ $K = 1,6 \%$.

Если контраст определить в виде

$$K_1 = (L_{об} - L_{\phi}) / (L_{об} + L_{\phi}),$$

то $K_1 = K/2$ и при тех же условиях $K_1 = 0,8 \%$.

Для обеспечения наблюдения предельно малых контрастов средняя величина яркости картины в тепловизорах обычно подавляется и наблюдателю предъявляются только изменения яркости относительно среднего уровня, что позволяет получить высокие значения контраста в изображении при весьма малых перепадах температур между отдельными участками поверхности наблюдаемого объекта.

Действительно, если до вычитания фона контраст объекта определялся выражением

$$K = (L_{об} - L_{\phi}) / L_{\phi},$$

то после вычитания на уровне, соответствующем яркости $L'_{\phi} < L_{\phi}$, контраст изображения объекта равен

$$K_{и} = (L_{об} - L_{\phi}) / (L_{\phi} - L'_{\phi}).$$

В результате коэффициент усиления контраста

$$\eta = \frac{K_{и}}{K} = \frac{1}{1 - L'_{\phi} / L_{\phi}} = \frac{1}{1 - (T'_{\phi} / T_{\phi})^4},$$

где T_{ϕ} — температура абсолютно черного тела, излучение которого соответствует излучению фона; T'_{ϕ} — температура абсолютно черного тела, излучение которого вычитается из излучения фона.

Если $T_{\phi} = 300 \text{ К}$, а $T'_{\phi} = 290 \text{ К}$, то

$$\eta = \frac{1}{1 - (290/300)^4} = 7,9.$$

Следовательно, исходный контраст $K = 1,6 \%$ усиливается до значения $K_{и} = 12,6 \%$, что вполне достаточно для наблюдения.

Препятствиями для дальнейшего увеличения степени компенсации фона являются его нестационарность и наличие шума в изображении, поскольку средний уровень фона, оставшегося после вычитания, не должен изменять картину внутренних шумов прибора и собственного шума фона во избежание потерь информации.

Кроме обычных видов шума в тепловизорах с матричными приемниками излучения, которые, по-видимому, получают широкое распространение в связи с успехами полупроводниковой технологии, может существовать так называемый «геометрический» шум приемника, природа которого связана с разбросом чувствительности отдельных элементов многоэлементной приемной матрицы.

Пусть, например, ИК-излучение преобразуется в видимое линейной системой, характеризующейся коэффициентом преобразования, среднее значение которого \bar{s} , разброс которого по элементам матрицы задается среднеквадратическим значением $\sqrt{\overline{\Delta s^2}}$. В этом случае, наряду с сигналом $\bar{s}\Delta E$, существует шум $\sqrt{\overline{\Delta s^2}}E$, следовательно, отношение сигнала к шуму

$$\frac{c}{u} = \frac{\Delta E/E}{\sqrt{\overline{\Delta s^2}}/\bar{s}},$$

где E — плотность излучения (энергетическая освещенность) от фона; ΔE — превышение плотности излучения сигнала над фоном.

Для оценки контраста положим

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta M}{M} = \frac{4\sigma T^3 \Delta T}{\sigma T^4} = 4 \frac{\Delta T}{T},$$

где M , ΔM — энергетическая светимость и ее изменение.

Следовательно,

$$\frac{\sqrt{\overline{\Delta s^2}}}{\bar{s}} = \frac{\Delta E/E}{c/u} = 4 \frac{\Delta T/T}{c/u}.$$

Если требуемое отношение сигнала к шуму $c/u = 5$, а $T = 300$ К, то $\sqrt{\overline{\Delta s^2}}/\bar{s} = 2,7 \cdot 10^{-3} \Delta T$; для $\Delta T = 0,2$ К $\sqrt{\overline{\Delta s^2}}/\bar{s} \approx 0,5 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, среднеквадратическое отклонение чувствительности отдельных элементов матричного приемника от среднего значения их чувствительности не должно превышать 0,05 %, чтобы при уровне излучения фона, соответствующего излучению абсолютно черного тела при температуре 300 К, можно было бы обнаружить на этом фоне наличие перепада температур в 0,2 К при отношении сигнала к шуму, равном 5.

Обеспечить столь малые отклонения чувствительности отдельных элементов матрицы от среднего значения совершенно нереально, поэтому решение задачи наблюдения малых температурных перепадов на значительном фоне с помощью матричных систем обнаружения возможно лишь при условии использования специальных способов обработки фотоэлектрических сигналов.

Эта проблема по понятным причинам не возникает в сканирующих тепловизорах с одноэлементным приемником излучения, а также в системах с последовательным сканированием. При использовании же многоэлементных приемников в виде одномерных линеек, расположенных перпендикулярно к направлению сканирования, необходимая равномерность чувствительности обеспечивается легче, а возникающие из-за неодинаковой чувствительности элементов шума проще отфильтровываются при наблюдении, так как они проявляются в строчной структуре изображения.

В тепловизорах происходит не только усиление контраста между объектом и фоном, но и изменяются угловые размеры наблюдаемой сцены, а также соответствующие пространственные частоты. Схема этого процесса представлена на рис. 367, где показано пространство объектов, излучающих в ИК-области спектра и визируемых тепловизионной камерой (ИК — глаз), и пространство изображений, рассматриваемых глазом наблюдателя.

Отношение поля обзора $\varphi_{\text{и}}$ и мгновенного поля зрения $\delta_{\text{и}}$ в пространстве изображений (на экране индикатора) к соответствующей величине φ и δ в пространстве предметов определяет *угловое увеличение тепловизора*

$$\Gamma = \varphi_{\text{и}}/\varphi = \delta_{\text{и}}/\delta.$$

Выраженная в угловой мере (град^{-1} , рад^{-1} , мрад^{-1}) пространственная частота в пространстве изображений $\nu'_{\text{и}}$ связана с простран-

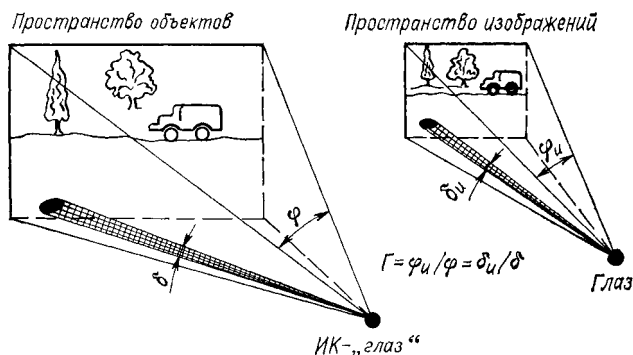


Рис. 367. Преобразование угловых размеров в тепловизоре

ственной частотой в пространстве объектов ν' через угловое увеличение

$$\Gamma = \nu'/\nu'_{\text{и}}.$$

Например, если угловое увеличение $\Gamma = 4$, а угловой размер экрана индикатора $\varphi_{\text{и}} = 9^\circ = 157,1$ мрад, т. е. при наблюдении с расстояния 1 м ширина экрана равна 157,1 мм, то поле обзора тепловизора в пространстве предметов $\varphi = 2,25^\circ$ или 39,3 мрад. Соответственно, если мгновенное поле зрения в пространстве предметов $\delta = 0,25$ мрад (линейный размер элемента разложения — чувствительной площадки приемника излучения — 50 мкм, а фокусное расстояние объектива 200 мм), то в пространстве изображений $\delta_{\text{и}} = \delta\Gamma = 0,25 \cdot 4 = 1$ мрад. Для пространственной частоты $\nu' = 1/\delta = 4$ мрад^{-1} $\nu'_{\text{и}} = \nu'/\Gamma = 4/4 = 1$ мрад^{-1} . Пространственная частота ν в пространстве предметов, выраженная в мм^{-1} , равна $\nu = (10^3/f')$ ν' , где f' — заднее фокусное расстояние объектива тепловизора, мм.

В тепловизионном изображении содержится огромное количество информации. Тепловизор, имеющий поле обзора $20 \times 10^\circ$ и мгновенное поле зрения $3'$, обеспечивает получение изображения, содержащего $\frac{20 \cdot 10}{(3/60)^2} = 8 \cdot 10^4$ элементов. Если при этом динамический диапазон сигналов, характеризуемый отношением максимального сигнала к минимальному, равен 10^3 или 60 дБ ($20 \log_{10} 1000 = 60$), т. е. около 10 бит ($\log_2 1000 \approx 10$), то общее количество

информации, заключенной в тепловизионном изображении, равно $8 \cdot 10^4 \cdot 10 = 0,8 \cdot 10^6$ бит или 10^5 байтов. Для 256 градаций яркости имеем $8 \cdot 10^4 \cdot 8 = 0,64 \cdot 10^6$ бит или $8 \cdot 10^4$ байтов соответственно, т. е. человек не может воспринять и эффективно использовать всю информацию, содержащуюся в тепловизионном изображении, особенно когда необходимо принимать на ее основе ответственные решения в реальном масштабе времени. Поэтому усилия разработчиков тепловизионной аппаратуры не ограничиваются только техническими проблемами.

Они в не меньшей степени направлены на изучение и использование возможностей наблюдателя, в первую очередь определяемых законами зрительного восприятия, которые зависят не только от оптических характеристик глаза, но и от функционирования центральной нервной системы.

По-видимому, наиболее рациональный путь создания тепловизионных систем, работающих в реальном масштабе времени, состоит в разработке полуавтоматизированной аппаратуры, когда решение о присутствии необходимых сведений в тепловизионном кадре принимается автоматически с минимальной вероятностью пропуска при наличии ложных тревог, а наблюдателю предъявляются для анализа лишь те кадры, по которым автомат принимает положительное решение. В этом случае любая обработка тепловизионного изображения должна осуществляться прежде всего в интересах последующего визуального анализа, т. е. задачей обработки является приведение изображения к виду, наиболее удобному для его восприятия.

Для систем, в которых необходимость автоматической обработки не очевидна, решению этой задачи должны быть подчинены выбор и способы реализации основных характеристик и элементов тепловизора: его оптической и электронной схем, системы отображения информации и т. д. Самая современная тепловизионная аппаратура может не обеспечить принятие наблюдателем правильного решения задач измерения необходимых характеристик и опознавания образов без введения в ее состав простейших устройств для обработки изображения. Причина этого состоит в особенностях зрительного восприятия человека, который, например, отлично обнаруживает локальные изменения яркости картины, но не может дать количественную оценку яркости изображения в целом и достаточно точно сравнить площади его несмежных участков. В полностью автоматизированной тепловизионной аппаратуре, где обработка поступающих сигналов (их обнаружение, опознавание, отбор и т. д.) осуществляется автоматом, алгоритмы обработки также должны учитывать законы зрительного восприятия, поскольку высокое совершенство зрительного аппарата человека предопределяет возможность оптимального принятия решения.

Таким образом, тепловидение представляет собой то направление оптико-электронного приборостроения, где в наибольшей мере органически взаимосвязаны характеристики прибора и зрительного восприятия человека.

В последние годы анализ и методика обработки изображений, учитывающие законы зрительного восприятия, обрели общую методологическую основу и прочный научный фундамент в рамках новой дисциплины — иконики. Этому новому направлению исследований посвящена специальная глава книги. Однако некоторые простейшие законы зрения будут рассмотрены при определении основных параметров тепловизионной аппаратуры.

§ 23.2. ПОРОГ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ (Пороговая чувствительность) ТЕПЛОВИЗОРА

В гл. 20 были получены формулы, определяющие пороговую чувствительность оптико-электронного прибора, т. е. минимальные обнаруживаемые им сила света, яркость, разность яркостей или температур и т. д., при условии, что принятие решения о наличии или отсутствии сигнала осуществляется в приборе пороговым устройством, которое вырабатывает электрическое напряжение на выходных клеммах только в том случае, когда напряжение на его входе превысит порог срабатывания.

Условием обнаружения сигнала являлось, следовательно, получение такого отношения его мощности к мощности шума, при котором обеспечивались заданные вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги. Это условие обнаружения, конечно, не учитывает специфики наблюдения и опознавания тепловизионного изображения и его фрагментов человеком. Тем не менее, пороговые характеристики оптико-электронного прибора, рассчитанные исходя из принятых в гл. 20 правил, дают возможность в первом приближении оценить чувствительность тепловизионной системы и выбрать основные параметры оптического и электронного трактов усиления и преобразования тепловизионного сигнала.

Разность температур двух абсолютно черных тел, последовательно визируемых прибором, может быть обнаружена, если она определяется выражением

$$\Delta T = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{\rho \Phi_{\Pi}^*(f_0)}{T_0} \frac{1}{D \ddot{O} \delta} \frac{V \Delta \bar{f}_{\Pi}}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}}.$$

Все входящие в это выражение величины были определены и рассчитаны в гл. 20. Существенно, что коэффициент запаса ρ представляет собой отношение мощности сигнала к мощности шума, т. е. в общем случае он не учитывает длительности и спектрального состава сигнала. Применительно к импульсным сигналам вводится другая величина коэффициента запаса ρ , равная отношению пика сигнала к среднеквадратическому значению шума на выходе усилителя, причем было найдено, что

$$\rho = u_{c \max} / u_{\Pi} = \rho l_{\text{вх}} \Delta f_c(t_0),$$

где

$$\Delta f_c(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{y}(f) \tilde{k}_c(f) e^{j2\pi f t_0} df.$$

Входящее в подынтегральное выражение для $\Delta f_c(t_0)$ произведение безразмерных величин, характеризующих спектр сигнала $\tilde{\gamma}(f)$ и передаточную функцию электронного тракта прибора $k_c(f)$, при определенных условиях может быть преобразовано следующим образом:

$$\tilde{\gamma}(f) k_c(f) = \tilde{u}_c(f) / (\Delta\Phi_0 S_{\text{пасп}} K_{\text{ус max}} t_{\text{вх}}),$$

где $\tilde{u}_c(f)$ — спектральная плотность напряжения сигнала на выходе усилителя; $\Delta\Phi_0$ — разность потоков излучения, падающих на объектив прибора в процессе последовательного визирирования двух источников излучения (объекта и фона); $t_{\text{вх}}$ — длительность входного импульса излучения; $K_{\text{ус max}} = K_{\text{ус}}(f_0)$ — максимальное зна-

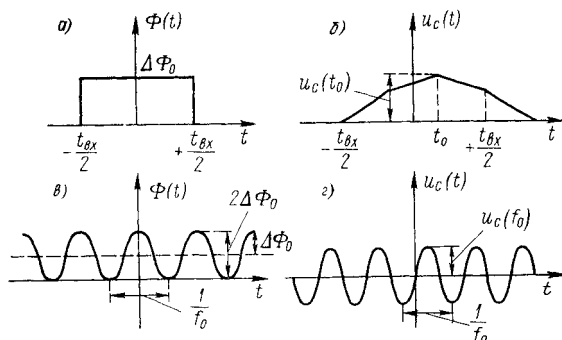


Рис. 368. Прохождение сигнала по тракту тепловизора: а — импульс потока излучения; б — импульс напряжения на выходе усилителя; в — модулированный поток излучения; г — гармонический сигнал на выходе усилителя

чение коэффициента усиления, которое имеет место на частоте $f = f_0$; $S_{\text{пасп}}$ — крутизна преобразования приемника излучения, заданная его паспортом.

При этом предполагается, что на частоту f_0 еще не влияют инерционные свойства приемника излучения и входной цепи усилителя, параметры которых согласованы в соответствии с требованиями § 11.2.

Введем обозначение

$$u_c(f_0) = \Delta\Phi_0 S_{\text{пасп}} K_{\text{ус}}(f_0),$$

тогда получим

$$\Delta f_c(t_0) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_c(f) e^{j2\pi t_0 f} df}{t_{\text{вх}} u_c(f_0)}.$$

Числитель полученного выражения представляет собой напряжение на выходе усилителя в момент времени $t = t_0$

$$u_c(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_c(f) e^{j2\pi t_0 f} df,$$

следовательно,

$$\Delta f_c(t_0) = u_c(t_0) / [t_{\text{вх}} u_c(f_0)]; \quad \rho = p t_{\text{вх}} \Delta f_c(t_0) = \rho u_c(t_0) / u_c(f_0).$$

Здесь $u_c(f_0)$ — амплитуда напряжения на выходе усилителя, которая получается при облучении объектива прибора синусоидально-модулированным потоком излучения $\Phi_1 = 2\Delta\Phi_0$ (рис. 368).

Если коэффициент передачи электронного тракта прибора выбран так, что в момент t_0 на выходе усилителя появляется пик сигнала и обеспечивается максимум отношения пика сигнала к среднеквадратическому значению шума, т. е. осуществляется оптимальная фильтрация, то

$$\dot{k}_c(f) = [\tilde{Y}^*(f)/\epsilon(f)] e^{-j2\pi f t_0}.$$

Следовательно,

$$\Delta f_c(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{Y}(f) \dot{k}_c(f) e^{j2\pi f t_0} df = \frac{1}{\epsilon(f)} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{Y}(f)|^2 df.$$

В соответствии с теоремой Парсеваля (см. § 12.3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{U}_0(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} U_0^2(t) dt,$$

поэтому

$$U_0^2 t_{\text{вх}}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{Y}(f)|^2 df = U_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t) dt,$$

откуда найдем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{Y}(f)|^2 df = \frac{1}{t_{\text{вх}}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t) dt;$$

$$\Delta f_c(t_0) = \frac{1}{\epsilon(f) t_{\text{вх}}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t) dt.$$

Для белого шума и прямоугольного импульса (см. § 20.3)

$$\frac{1}{\epsilon(f) t_{\text{вх}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2(t) dt = 1,$$

следовательно,

$$\Delta \dot{f}_c(t_0) = 1/t_{\text{вх}};$$

$$\rho = p t_{\text{вх}} \Delta \dot{f}_c(t_0) = p$$

В этом случае

$$u_c(t_0)/[u_c(f_0)] = \rho/p = 1; \quad u_c(t_0) = u_c(f_0),$$

т. е. пик сигнала на выходе оптимальной системы равен амплитуде гармонического сигнала, появляющегося на выходе усилителя, когда на объектив прибора поступает модулированный поток излучения, действующее значение первой гармоники которого равно $0,707 \Delta \Phi_0$.

Таким образом, с учетом формул, позволяющих установить связь пороговой чувствительности тепловизора с общими соотношениями энергетического расчета оптико-электронного прибора, найдем

$$\Delta T = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{\rho \Phi_{\Pi}^*(f_0)}{T_0} \frac{1}{D \bar{O} \delta} \frac{1}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}} \frac{\sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}}{1}.$$

Разность температур объекта и фона, вызывающая появление сигнала, пик которого равен среднеквадратическому значению шума, называется *порогом температурной чувствительности* (ПТЧ по ОСТ 3-4408—82), *порогом разности температур* или *пороговой разностью температур* $\Delta T_{\text{пор}}$. В иностранной технической литературе $\Delta T_{\text{пор}}$ обозначается через NETD — по первым буквам английского наименования Noise Equivalent Temperature Difference, т. е. разность температур, эквивалентная шуму, по аналогии с обозначением мощности, эквивалентной шуму, — Noise Equivalent Power (NEP).

Следовательно,

$$\Delta T_{\text{пор}} = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{1}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D \bar{O} \delta} \frac{1}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}} \frac{\sqrt{\Delta f_{\text{ш}}}}{1},$$

где удельная обнаружительная способность приемника на частоте модуляции f_0 равна $D^*(f_0) = 1/\Phi_{\Pi}^*(f_0)$.

Шумовая полоса пропускания для оптимального фильтра при белом шуме равна (см. § 20.3)

$$\Delta f_{\text{ш}} = 1/(2t_{\text{вх}}),$$

поэтому получим

$$\Delta T_{\text{пор}} = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{T^3} \frac{1}{D^*(f_0) T_0} \frac{1}{D \bar{O} \delta} \frac{1}{\sqrt{2t_{\text{вх}}}} \frac{1}{(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}}.$$

Рассмотрим способы расчета логарифмической спектральной ширины полосы пропускания (см. § 10.1). Прежде всего для самых приближенных оценок можно принять, что спектральные коэффициенты $\tau_a(\lambda)$ и $\tau_o(\lambda)$, характеризующие прозрачность атмосферы и оптической системы, равны единице и используется неселективный приемник излучения, т. е. $k(\lambda) = 1$. В этом случае

$$(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) k(\lambda) \tau_a(\lambda) \tau_o(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = 1,22.$$

Вычисления показывают, что даже при очень небольших расстояниях между источником, имеющим температуру 300 К, и приемником за счет поглощения излучения в атмосфере происходит уменьшение величины $(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}$ на 30 %, а 400-метровый слой атмосферы снижает ее значение до 0,53.

Селективные свойства оптической системы, обычно включающей в себя полосовой фильтр, можно учесть, ограничив длинами волн λ_1 и λ_2 рабочий диапазон спектра, внутри которого относительный

Т а б л и ц а 29

Значения эффективной логарифмической спектральной ширины
полосы пропускания для различных спектральных интервалов
и температур

λ_1 , мкм	λ_2 , мкм	$[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot 10^2$				λ_1 , мкм	λ_2 , мкм	$[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot 10^2$			
		280 К	290 К	300 К	310 К			280 К	290 К	300 К	310 К
3	5	2,7	3,4	4,2	5,1	8	10	21	21	22	22
3	5,5	4,9	6,1	7,2	8,5	8	12	39	39	39	39
3,5	5	2,3	3,3	4,0	4,8	8	14	53	53	52	52
3,5	5,5	4,8	5,9	7,0	8,3	10	12	18	18	18	17
4	5	2,6	2,8	3,4	4,0	10	14	32	32	31	30
4	5,5	4,5	5,4	6,4	7,5	12	14	14	14	13	13

Т а б л и ц а 30

Значения $(\Delta \lambda)_{\text{эф}}$ и $(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}$ для различных температур
и трех типов приемников излучения

Т. К	$(\Delta \lambda)_{\text{эф}} \cdot 10 / [(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}} \cdot 10^2]$			Т. К	$(\Delta \lambda)_{\text{эф}} \cdot 10 / [(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}} \cdot 10^2]$		
	Ge : Hg	Cd—Hg—Te	Ge : Zn		Ge : Hg	Cd—Hg—Te	Ge : Zn
280	$\frac{56}{56}$	$\frac{38}{35}$	$\frac{81}{52}$	300	$\frac{56}{57}$	$\frac{37}{35}$	$\frac{73}{50}$
290	$\frac{56}{57}$	$\frac{38}{35}$	$\frac{77}{51}$	310	$\frac{56}{57}$	$\frac{37}{35}$	$\frac{70}{48}$

спектральный коэффициент пропускания оптической системы $\tau_0(\lambda) = 1$. Это позволяет иметь выражение для $(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}$ в виде

$$[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} d\lambda.$$

Значения логарифмической спектральной ширины полосы пропускания для неселективного приемника излучения и различных спектральных интервалов и температур приведены в табл. 29, а для некоторых типов приемников излучения даны в табл. 14, 30 и 31.

При расчете значения $[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$ для селективного приемника излучения можно воспользоваться также уравнением для спектральной характеристики идеального фотонного приемника

$$k(\lambda) = \begin{cases} \lambda/\lambda_0 & \text{при } \lambda \leq \lambda_0; \\ 0 & \text{при } \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

Значения $[(\Delta\lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$ и $[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$ для различных спектральных интервалов, температур и приемников излучения

Приемники излучения	λ_1 , мкм	λ_2 , мкм	$\{(\Delta\lambda)_{\text{эф}}\}_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot 10 / \{[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cdot 10^2\}$			
			280 К	290 К	300 К	310 К
Cd—Hg—Te	8	14	$\frac{34}{30}$	$\frac{33}{30}$	$\frac{33}{29}$	$\frac{32}{28}$
	8	20	$\frac{35}{31}$	$\frac{34}{30}$	$\frac{34}{30}$	$\frac{33}{29}$
	8	40	$\frac{35}{31}$	$\frac{34}{30}$	$\frac{34}{30}$	$\frac{33}{29}$
Ge : Zn	8	14	$\frac{23}{20}$	$\frac{23}{20}$	$\frac{22}{20}$	$\frac{21}{19}$
	8	20	$\frac{48}{35}$	$\frac{46}{34}$	$\frac{44}{33}$	$\frac{42}{31}$
	8	40	$\frac{77}{46}$	$\frac{72}{45}$	$\frac{68}{42}$	$\frac{65}{40}$
Ge : Hg	8	14	$\frac{45}{42}$	$\frac{45}{41}$	$\frac{44}{41}$	$\frac{43}{40}$
	8	20	$\frac{56}{56}$	$\frac{56}{57}$	$\frac{56}{57}$	$\frac{56}{57}$
	8	40	$\frac{56}{56}$	$\frac{56}{57}$	$\frac{56}{57}$	$\frac{56}{57}$

Если $\lambda_0 \ll \lambda_2$, найдем

$$[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_0} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_0} \varphi(\lambda) k(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \int_{\lambda_1}^{\lambda_0} \varphi(\lambda) d\lambda,$$

где

$$\varphi(\lambda) = \frac{291 \cdot 10^{17}}{(\lambda T)^5} [e^{1,44 \cdot 10^4 / (\lambda T)} - 1]^{-1},$$

а максимальное значение $\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} \varphi(\lambda) d\lambda$, равное $\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda$, представляет собой эффективную спектральную ширину полосы пропускания для неселективного (теплого) приемника излучения

$$(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}} = \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda \approx 4400/T.$$

Для температуры источника 300 К $(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}} = 14,7$ мкм, а для спектральных диапазонов 3,5—5 мкм и 8—14 мкм имеем

$[(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}}]_{3,5}^5 = 0,18$ мкм, $[(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}}]_8^{14} = 5,46$ мкм соответственно. Если $\lambda_1 = 8$ мкм, а $\lambda_0 = 11,5$ мкм, то при $T = 300$ К можно найти $[(\Delta\lambda)_{\text{эф. тепл}}]_8^{11,5} = 3,38$ мкм, а $[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_8^{11,5} = 3,38/11,5 \approx 0,3$.

В качестве примера вычислим пороговую разность температур для следующих параметров тепловизора: $D = 2$ см; $f' = 5$ см; $\bar{O} = 0,4$; $\delta = 10^{-3}$; $T_0 = 0,8$; $t_{\text{вх}} = 27 \cdot 10^{-6}$ с; $D^* (f_0) = 2 \cdot 10^{10}$ Вт $^{-1}$ ·см·Гц $^{1/2}$. При температуре источника (абсолютно черного тела), имитирующего фон, $T = 300$ К для спектрального интервала 8—11,5 мкм величина $(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}} = 0,3$. Следовательно,

$$\Delta T_{\text{пор}} = \frac{21,6 \cdot 10^{10}}{(300)^3} \frac{1}{2 \cdot 10^{10} \cdot 0,8} \frac{1}{2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 27 \cdot 10^{-6}}} \frac{1}{0,3} = 0,28 \text{ К.}$$

Практическая реализация оптимального фильтра при решении задачи выделения одиночного (например, прямоугольного) импульса на фоне белого шума может осуществляться с помощью RC-фильтра (аперийодического звена, см § 10.2), если его постоянную времени выбрать в соответствии с рекомендациями § 21.4, т. е. принять $\tau = RC = t_{\text{вх}}/1,256$. В этом случае отношение сигнала к шуму на выходе усилителя будет отличаться от максимально возможного на 10 %. За время действия импульса сигнал на выходе системы с таким фильтром достигнет значения, равного $1 - e^{-t_{\text{вх}}/\tau} = 1 - e^{-1,256} = 0,715$ от установившегося.

Для системы, создающей изображение, желательно обеспечить быстрое нарастание сигнала на выходе, так как это позволит более точно воспроизвести форму входного сигнала. Задаваясь значением частоты среза RC-фильтра $f_c = 1/(2t_{\text{вх}})$, получим $\tau = RC = 1/(2\pi f_c) = t_{\text{вх}}/\pi$, т. е. за время действия импульса сигнал на выходе нарастет до $1 - e^{-t_{\text{вх}}/\tau} = 1 - e^{-\pi} = 0,96$ установившегося значения. Шумовая полоса такого фильтра $\Delta f_{\text{ш}} = 1/(4\tau) = (\pi/2) f_c = (\pi/2) [1/(2t_{\text{вх}})] = 1,57/(2t_{\text{вх}})$ в 1,57 раза шире, чем шумовая полоса оптимального фильтра. Поэтому тепловизор, в схеме которого используется RC-фильтр с частотой среза $1/(2t_{\text{вх}})$, характеризуется пороговой разностью температур в $\sqrt{1,57}$ большей, чем тепловизор с оптимальным фильтром. Следовательно, при тех же, что и в предыдущем расчете, параметрах тепловизора найдем

$$\Delta T_{\text{пор}} = 0,28\sqrt{1,57} = 0,28 \cdot 1,25 = 0,35 \text{ К.}$$

Значение, близкое к этому, получено в работе Д. Ллойда [73], где используется иной вид формулы для $\Delta T_{\text{пор}}$. Можно, однако, убедиться в идентичности формул, если при их сопоставлении учесть следующие соотношения: коэффициент $4/(c_2 \mathcal{B}) = 21,6 \cdot 10^{10}$, где c_2 — вторая постоянная формулы Планка; \mathcal{B} — постоянная в формуле для максимальной спектральной плотности светимости абсолютно черного тела (см. § 9.3); площадь входного зрачка $A_{\text{об}} = \pi D^2/4$; $\delta = \sqrt{\alpha\beta}$, где α и β — угловые размеры чувствительного элемента приемника; $f' = \sqrt{ab/\alpha\beta}$, где a и b — линейные размеры приемника;

$$[(\Delta \ln \lambda)_{\text{эф}}]_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{M_{\lambda}(\lambda, T)}{\lambda} k(\lambda) d\lambda}{\mathcal{B} T^3}; \quad k(\lambda) = \frac{D^*(\lambda)}{D^*(\lambda_0)}.$$

Используя эти соотношения, можно получить формулу Ллойда

$$\Delta T_{\text{пор}} = \frac{\pi \sqrt{ab \Delta f_{\text{ш}}}}{\alpha \beta A_{\text{об}} T_0 \mathbf{D}^*(\lambda_0)} \frac{1}{\left[\frac{c_2}{T_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{M_{\lambda}(\lambda, T) \mathbf{D}^*(\lambda)}{\lambda \mathbf{D}^*(\lambda_0)} d\lambda \right]}.$$

§ 23.3. РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ТЕПЛОВИЗОРА

Возможность раздельного наблюдения и идентификации формы небольших деталей тепловизионного изображения ограничивается реальными характеристиками тепловизора, обладающего конечной *разрешающей способностью* вследствие влияния различных элементов тракта передачи и преобразования сигнала.

Объективу всегда присуще дифракционное рассеяние или аберрации, т. е. он преобразует точечный излучатель в пятно конечных размеров. Приемник излучения имеет ограниченные размеры чувствительной площадки и, следовательно, преобразует в процессе сканирования точечное изображение в электрический импульс конечной длительности, соответствующей уже не точечному, а протяженному источнику излучения. Более того, этот импульс растягивается во времени из-за инерционности приемника излучения и усилителя. Аналогичное влияние оказывают система обработки видеосигнала и система воспроизведения изображения — видео-контрольное устройство, что еще больше увеличивает протяженность наблюдаемого изображения нагретого объекта по сравнению с его истинными размерами и препятствует раздельному наблюдению двух рядом расположенных источников излучения.

Разрешающая способность тепловизора может характеризоваться *угловым разрешением* — *наименьшим углом между двумя точечными источниками излучения, которые воспроизводятся раздельно в тепловизионном изображении*. Теоретический предел разрешения оптической системы в этом случае, как известно, определяется критерием Релея, согласно которому два точечных источника разрешаются дифракционно ограниченной оптической системой, если центр светлого пятна (диска Эри) изображения одной из точек совпадает с нулем первого порядка (первым темным кольцом) изображения другой точки, т. е. предел разрешения равен радиусу первого темного кольца $\rho_0 = 1,22 \times \lambda f' / D$, где D — диаметр входного зрачка объектива, см; f' — заднее фокусное расстояние, см; λ — средняя длина волны, см. Если λ выразить в микрометрах, угол $\alpha_0 = \rho_0 / f'$ — в миллирадианах, D — в сантиметрах, то *угловое разрешение (или предел разрешения)*

$$\alpha_0 \approx \lambda / (10D).$$

Разрешающая способность (разрешающая сила) оптической системы или ее предельная пространственная частота κ_0 , мрад⁻¹, обратно пропорциональна угловому разрешению (пределу разрешения)

$$\kappa_0 \approx 10D / \lambda,$$

Например, если $D = 15$ см, $\lambda = 10$ мкм, то $\alpha_0 = 15$ мрад⁻¹.

Контрастность в изображении двух точек, разрешаемых по Релею, равна 27 %, что оказывается более чем достаточным для их последующего раздельного восприятия с обычных расстояний наблюдения за изображением.

Трудность практической реализации точечных источников ИК-излучения, неравномерность чувствительности тепловизоров в пределах мгновенного поля зрения оптической системы и наличие шумов обуславливают использование при определении и измерении разрешающей способности тепловизионных приборов в целом источников излучения конечных размеров, обеспечивающих достаточный уровень отношения сигнала к шуму.

В 1970 г. автором в работе, выполненной совместно с В. Н. Синцовым и Ю. С. Черняевым и опубликованной в четвертом номере журнала «Оптико-механическая промышленность» за 1971 г. [89], определено, что *угловое (пространственное) разрешение тепловизора есть минимальное значение плоского угла (или расстояния) между центрами одинаково излучающих элементов тест-объекта, отделенных друг от друга элементом, равным им по размеру и отличающимся по радиационному контрасту, при котором эти элементы раздельно воспроизводятся в выходном изображении.*

В соответствии с этим определением, вошедшем в ОСТ 3-4408—82, была предложена методика экспериментального измерения разрешения, которая заключалась в том, что перед тепловизором на фиксированном расстоянии устанавливался источник фоновой излучения, представляющий собой металлическую пластину — переднюю стенку плоской кюветы, через которую непрерывно прокачивалась вода из термостата. Коэффициент излучения пластины, на которую наносились специальные покрытия, приближался к единице ($0,98 \pm \pm 0,02$) в спектральном интервале от 2,5 до 15 мкм, а расстояние от пластины до тепловизора выбиралось так, чтобы источник фоновой излучения — нагретая водой пластина — заполнял все поле обзора прибора (или его большую часть). Непосредственно перед источником излучения фона устанавливались тест-объекты — миры различной конфигурации с радиальными, прямыми, прямоугольными и более сложной формы отверстиями в металлической пластине, температура поверхности которой отличалась от ее значения для поверхности источника фоновой излучения. Определение разрешающей способности сводилось к нахождению расстояния между прямоугольными элементами той миры, при наблюдении которой они раздельно воспроизводятся в изображении, создаваемом тепловизором. Полученное значение разрешения, естественно, зависит от температурного контраста между миром и фоном и температуры фона.

Эксперимент по измерению разрешающей способности тепловизора может быть выполнен таким образом, что в результате устанавливается зависимость между пространственной частотой прямоугольной миры и перепадом температур, который необходимо создать, чтобы изображение миры стало явно различимым для наблюдателя на экране тепловизионного индикатора. В этом случае

перепад температур между тест-объектом и фоном называется *минимальной разрешаемой разностью температур* $\Delta T_{\text{разр}}$, а соответствующая зависимость этой разности от пространственной частоты κ имеет вид, представленный на рис. 369. Методы измерения величины $\Delta T_{\text{разр}}$, которая получила в английской литературе сокращенное обозначение MRTD (Minimum Resolvable Temperature Difference) подробно рассмотрены в книге Д. Ллойда «Основы тепловидения», а также в отраслевом стандарте ОСТ 3-4408—82.

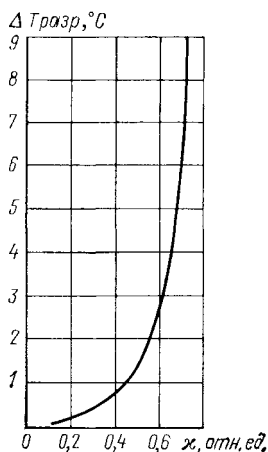


Рис. 369. Зависимость минимальной разрешаемой разности температур от пространственной частоты

Кратко содержание методов сводится к следующему. Тест-объект в виде набора трех- или четырех-штриховых прямоугольных мир (рис. 370) устанавливается перед протяженным источником фонового излучения либо непосредственно перед тепловизором (на конечном расстоянии), либо, что предпочтительнее, в фокальной плоскости инфракрасного коллиматора. Приемное устройство тепловизора, отрегулированного таким образом, что шумы ясно видны на экране индикатора, находится на пути пучка лучей из коллиматора и соответствующим образом фокусируется. В поле зрения располагают тест-объект самой низкой частоты и разность температур между ним и фоном делают равной нулю. Затем увеличивают разность температур до тех пор, пока наблюдатель начинает разрешать штрихи тест-объекта на экране тепловизионного индикатора. Процедура повторяется для более высоких пространственных частот мира до того момента, когда ее штрихи становится невозможно различить при любой разности температур.

В ряде случаев измерение разрешающей способности тепловизионной системы рекомендуется осуществлять не с помощью набора тест-объектов в виде прямоугольных мир различной пространственной частоты,

а в процессе последовательной регистрации видеосигнала, возникающего при визировании прямоугольной щели переменной ширины. Щель, сквозь которую видна нагретая стенка термостатированной кюветы, устанавливается перпендикулярно направлению сканирования, и ее ширина изменяется от значения, при котором сигнал максимален, до значения, когда он составляет 50 % (или другую долю) от максимума. Разрешающая способность (угловое разрешение) определяется угловым размером щели, понижающим видеосигнал до заранее установленного значения, например до 50 % от максимального. Такая методика измерения рекомендуется, в частности, шведской фирмой АГА для измерения разрешающей способности тепловизора АГА-750. Можно показать, что полученные в таком эксперименте угловые размеры щели позволяют вычислить разрешение, определяемое по миру, состоящей из двух прямоугольных элементов тест-объекта, разделенных промежутком, равным их ширине. Однако характеристики индикатора и особенности зрительного восприятия наблюдателя должны в этом случае специально учитываться.

Необходимую информацию о разрешающей способности тепловизора можно извлечь из его оптической передаточной функции (ОПФ), которая в условиях практического отсутствия шумов является мерой способности любой изображающей системы воспроизводить пространственные частоты, содержащиеся в наблюдаемой картине. Поскольку во многих тепловизионных системах условия существования ОПФ во всех направлениях не выполняются, например, из-за строчной структуры изображения, определение ОПФ часто заменяется измерением *функции рассеяния линии* (ФРЛ), которая представляет собой реакцию системы на источник излучения в виде длинной тонкой линии. Линейный источник содержит пространственные частоты только в направлении, перпендикулярном длине линии, причем в идеальном случае присутствуют все частоты от нуля до бесконечности. Длинная узкая прямоугольная щель аналогична такому линейному источнику, но содержит ограниченное количество пространственных частот. Чтобы это обстоятельство не влияло на точность

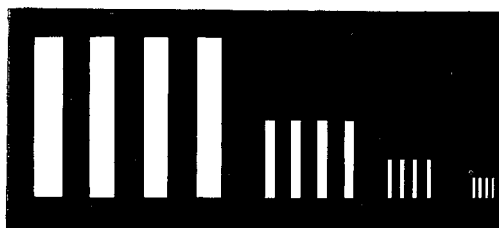


Рис. 370. Штриховые прямоугольные миры

эксперимента, излучающая щель должна быть намного уже, чем пространственное разрешение системы, однако не настолько узкой, чтобы нельзя было получить излучение, достаточное для обеспечения высокого отношения сигнала к шуму. Щель, вытравленная в непрозрачной маске, устанавливается перед источником фонового излучения в фокальной плоскости ИК-коллиматора. Изображение щели на экране индикатора тепловизора анализируется фотометром, перемещающемся относительно этого изображения. Полученное распределение яркости (ФРЛ) расчетным путем преобразуется в ОПФ, состоящую из модуля — функции передачи модуляции (ФПМ), или, что то же, модуляционной передаточной функции (МПФ) — и аргумента — функции передачи фазы (ФПФ). В полученную ОПФ вносят поправки, учитывающие ошибки измерений, определяемые ОПФ измерительной аппаратуры и конечным спектром линейного источника излучения.

Существенный вклад в разрешающую способность тепловизора вносит конечный угловой размер чувствительной площадки приемника излучения. Поэтому разрешающую способность иногда задают в единицах отношения линейного размера приемника к фокусному расстоянию объектива.

Угловой размер элемента нагретого объекта, форму которого необходимо воспроизвести с помощью тепловизора, должен превышать угловое разрешение в несколько раз. Более точной характеристикой возможного уровня видения объекта и его элементов

является *разрешение штриховых мир, эквивалентных объекту*. При использовании этой характеристики каждому объекту приписывается *критический размер*, определяемый размерами его деталей, существенных для видения объекта. Обычно это минимальный габаритный размер проекции изображения объекта на плоскость, перпендикулярную линии наблюдения. Штриховые миры, эквивалентные объекту, представляют собой набор прямоугольных мир, в которых равные полосы и промежутки излучают, как черные тела с различной температурой, причем ширина мир, определяемая суммарным размером всех полос и промежутков (обычно — 4 полосы и 4 промежутка), равна критическому размеру объекта, а длина мир (длина полос и промежутков) соответствует размеру объекта в направлении, перпендикулярном критическому. Предполагается, что качество видения объекта можно предсказать, определив максимальную разрешаемую частоту эквивалентной миры, имеющей разность температур между ее полосами и промежутками, равную эффективной разности температур объекта относительно фона. Если для *обнаружения* наличия объекта достаточно, чтобы на его критическом размере уместилось 1—2 штриха миры (2—4 строки раstra на критический размер, то для *опознавания* (отношения объекта к узкому подклассу, например здание, автомашина и т. д.) необходимо от 2 до 12 штрихов миры (от 4 до 24 строк раstra) в зависимости от требуемой вероятности опознавания.

Процесс опознавания объектов при наличии шумов в изображении наиболее полно описывается минимально разрешаемой разностью температур $\Delta T_{\text{рлзр}}$, поскольку она определяет разность температур штрихового тест-объекта, которая обеспечивает необходимое отношение сигнала к шуму для разрешения критического размера объекта с заданной вероятностью. Воспринимаемое наблюдателем отношение сигнала к шуму зависит от полосы пропускания тракта тепловизора для сигнала и его шумовой полосы пропускания, а также законов зрительного восприятия сигнала и шума на экране индикатора. В отсутствие шумов возможности обнаружения и опознавания определяются общей передаточной функцией тепловизора.

Вопросы определения разрешающей способности тепловизоров достаточно полно рассмотрены в работе Д. Ллойда [73], а также в ряде статей под редакцией Н. Д. Куртева [138].

§ 23.4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ВИДЕОКОНТРОЛЬНОГО (ИНДИКАТОРНОГО) УСТРОЙСТВА И ЕЕ СПЕКТР. СПЕКТР СИГНАЛА И ШУМА НА ЭКРАНЕ ИНДИКАТОРА

В качестве видеоконтрольного устройства (индикатора) в тепловизионных системах используются электронно-лучевые трубки (ЭЛТ) с яркостной отметкой, формирование изображения на экране которых осуществляется путем модуляции электронного луча выходным напряжением усилителя и развертывания луча во времени синхронно со сканированием визирной оси объектива.

Обычно яркость свечения люминесцентного экрана ЭЛТ, достигающая значений 50—250 кд/м² при заданной энергии электронов

(10—20 кэВ, т. е. $16 \cdot 10^{-18} - 32 \cdot 10^{-16}$ Дж) почти линейно зависит от плотности тока возбуждения лишь до некоторого ее значения, равного 100—200 мкА/см², после чего на кривой $L = f(j)$ наступает насыщение. Основной характеристикой трубки является *статическая модуляционная характеристика*, представляющая собой зависимость яркости экрана от напряжения на модуляторе (управляющем электроде). Эта зависимость имеет отклонения от линейности и по форме близка к зависимости силы тока электронного луча от напряжения на модуляторе. Рабочий интервал характеристики ограничен напряжением запирающего луча (30—80 В) и напряжением, при котором становятся заметными расфокусировка луча и нелинейность. Максимальная амплитуда сигнала, подводимого к модулятору, составляет в среднем 20—30 В, а диапазон изменения яркости примерно в 2—3 раза больше диапазона напряжений подводимого сигнала.

Светящееся пятно, возникающее на экране ЭЛТ при воздействии электронного луча, не имеет резко очерченных границ. Распределение яркости в пятне достаточно точно описывается гауссоидой вращения, т. е. гауссоидой с круговой симметрией,

$$h_{\Pi}(\rho) = [1/(2\pi r_0^2)] e^{-r^2/(2r_0^2)},$$

где $2r_0$ — диаметр пятна на уровне 0,606 от максимального значения (диаметр пятна на уровне 0,1 от максимального значения равен $2,14 \cdot 2r_0$); $r^2 = x^2 + y^2$.

В ряде случаев для описания функции рассеяния может использоваться эллиптически симметричная гауссоида

$$h_{\Pi}(x, y) = \frac{1}{2\pi r_{0x} r_{0y}} e^{-x^2/(2r_{0x}^2)} e^{-y^2/(2r_{0y}^2)},$$

где $2r_{0x}$, $2r_{0y}$ — малая и большая оси эллипса, образующегося в сечении гауссоиды плоскостью, перпендикулярной ее оси симметрии, на уровне 0,606 от максимального значения.

Соответствующие нормированные передаточные функции вдоль осей x и y равны

$$\tilde{h}_{\Pi}(v) = e^{-(2\pi r_{0x} v)^2/2}; \quad \tilde{h}_{\Pi}(\mu) = e^{-(2\pi r_{0y} \mu)^2/2},$$

причем для гауссоиды с круговой симметрией $r_{0x} = r_{0y} = r_0$. Часто обозначают $r_0 = \sigma$, имея в виду аналогию с нормальным законом распределения вероятности, который описывается гауссоидой с параметром σ , равным среднеквадратическому отклонению.

Рассмотрим две точки на экране индикатора (рис. 371): точку с координатами x'_1, y'_1 , в которую направлен центр электронного луча в момент времени t_1 , и точку с координатами x, y , в окрестность

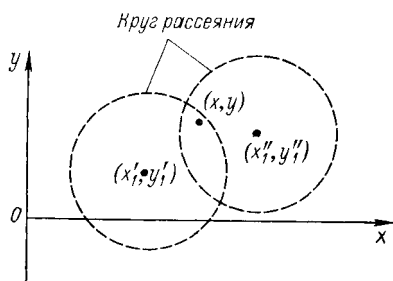


Рис. 371. Расположение точек (x'_1, y'_1) , (x''_1, y''_1) и (x, y) на экране видеоконтрольного устройства (индикатора)

которой в тот же момент времени t_1 попадает часть электронов луча за счет рассеяния. В следующий момент времени t_2 центр электронного луча за счет развертки сместится и будет направлен в новую точку (x_1'', y_1'') , а в окрестность точки с координатами x, y за счет рассеяния вновь попадет часть электронов. Таким образом, суммарная плотность тока электронного луча в точке с координатами x, y является результатом его перемещения в различные точки (x_1, y_1) , каждой из которых соответствует свой момент времени t и свое значение напряжения на управляющем электроде $u(t)$.

Предположим, что величина $h(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1$ представляет собой яркость в окрестности точки (x, y) , когда в окрестности точки x_1, y_1 яркость равна единице. В этом случае яркости $L_m(x_1, y_1)$ в точке с координатами x_1, y_1 соответствует яркость в точке с координатами x, y

$$dL(x, y) = L_m(x_1, y_1) h_n(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Полную яркость в точке с координатами x, y можно найти как сумму элементарных яркостей $dL(x, y)$, возникающих из-за рассеяния электронов электронного луча, направляемого в различные моменты времени t последовательно во все точки совокупности с координатами x_1, y_1 . Следовательно,

$$L(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_m(x_1, y_1) h_n(x, y, x_1, y_1) dx_1 dy_1.$$

Для инвариантной системы $h(x, y, x_1, y_1) = h(x - x_1, y - y_1)$ и

$$L(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L_m(x_1, y_1) h(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

Функция рассеяния

$$h_n(x - x_1, y - y_1) = \frac{1}{2\pi r_0^2} e^{-(x-x_1)^2/(2r_0^2)} e^{-(y-y_1)^2/(2r_0^2)},$$

так как в данном случае

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Условием нормировки функции $h_n(x - x_1, y - y_1)$, см^{-2} или рад^{-2} (мрад^{-2}), является

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = 1,$$

где $\xi = x - x_1$; $\zeta = y - y_1$. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(2r_0^2)} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(2r_0^2)} d\zeta = \sqrt{2\pi r_0^2},$$

условие нормировки выполняется.

Двумерный спектр яркости $L(x, y)$ найдем как спектр свертки

$$\mathcal{F}\{L(x, y)\} = \mathcal{F}\left\{\iint_{-\infty}^{+\infty} L_m(x_1, y_1) h_n(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1\right\} = \\ = \mathcal{F}\{L_m(x, y) \otimes h_n(x, y)\} = \mathcal{F}\{L_m(x, y)\} \mathcal{F}\{h_n(x, y)\},$$

или

$$\tilde{L}(v, \mu) = \tilde{L}_m(v, \mu) \tilde{h}_n(v, \mu).$$

Спектр сечения функции $L(x, y)$ вдоль оси x соответственно равен

$$\tilde{L}(v, \hat{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}_m(v, y_1) \tilde{h}(v, \hat{y} - y_1) dy_1.$$

Если функция $L_m(x_1, y_1)$, определяющая яркость в центре светящегося пятна на экране индикатора, одномерна, что имеет место, например, при линейной развертке пятна по оси x и анализе распределения яркости в окрестности этой оси в пределах диаметра пятна рассеяния, т. е. $L_m(x_1, y_1) = L_m(x_1)$, то $\tilde{L}_m(v, \hat{y}_1) = \tilde{L}_m(v)$ и спектр сечения функции $L(x, y)$ вдоль оси x равен

$$\tilde{L}(v, \hat{y}) = \tilde{L}_m(v) \int_{-\infty}^{+\infty} h(v, \hat{y} - y_1) dy_1.$$

Поскольку

$$\tilde{h}_n(v, \hat{y} - y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x - x_1, y - y_1) e^{-j2\pi v(x - x_1)} d(x - x_1) = \\ = \frac{1}{2\pi r_0 x r_{0y}} e^{-(y - y_1)^2 / (2r_{0y}^2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x - x_1)^2 / (2r_{0x}^2)} e^{-j2\pi v(x - x_1)} d(x - x_1).$$

Вычисление полученного интеграла, выполненное способом, использованным в § 12.9, приводит к выражению

$$\tilde{h}_n(v, \hat{y} - y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r_{0y}} e^{-(y - y_1)^2 / (2r_{0y}^2)} e^{-(2\pi r_{0x} v)^2 / 2}$$

или для функции рассеяния с круговой симметрией

$$\tilde{h}_n(v, \hat{y} - y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} r_0} e^{-(y - y_1)^2 / (2r_0^2)} e^{-(2\pi r_0 v)^2 / 2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{L}(v, \tilde{y}) &= \tilde{L}_m(v) \tilde{h}_n(v) \frac{1}{\sqrt{2\pi}r_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-y_1)^2/(2r_0^2)} dy_1 = \\ &= \tilde{L}_m(v) \tilde{h}_n(v) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz,\end{aligned}$$

где $z = (y - y_1)/r_0$; $\tilde{h}_n(v) = e^{-(2\pi r_0 v)^2/2}$.

Таким образом, окончательно получим

$$\tilde{L}(v, \hat{y}) = \tilde{L}_m(v) \tilde{h}_n(v),$$

поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = 1.$$

Пространственный спектр яркости в центре пятна рассеяния найдем, полагая, что осуществляется линейная развертка электрон-

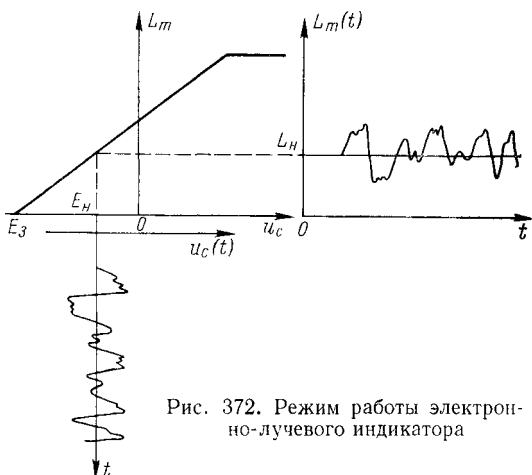


Рис. 372. Режим работы электронно-лучевого индикатора

ного луча индикатора, приводящая к движению светящегося пятна рассеяния на люминесцентном экране вдоль оси x со скоростью v_n . В этом случае

$$\begin{aligned}L_m(x) &= L_m(v_n t) = \\ &= L_m(t) = S_n u_c(t),\end{aligned}$$

где S_n — крутизна преобразования в линейной части статической модуляционной характеристики индикатора, (кд/м²)/В. Здесь не учитывается нелинейность статической модуляционной характеристики индикатора, а также постоянные значения

яркости экрана, которые определяются начальной яркостью линии развертки L_n , зависящей от напряжения смещения E_n , устанавливаемого на модуляторе, и внешними источниками света, создающими на экране дополнительную яркость. Кроме того, имеется в виду, что напряжение $u_c(t)$ не содержит постоянной составляющей, а режим работы индикатора выбран так, что соблюдается условие $E_n < E_z$, где E_z — потенциал запирающего луча (рис. 372).

Связь пространственного спектра функции $L(x)$ с временным спектром функции $u_c(t)$ можно найти, пользуясь следующим очевидным соотношением:

$$\tilde{L}_m(v) dv = S_n \tilde{u}_c(f) df,$$

откуда

$$\tilde{L}_m(v) = S_n \tilde{u}_c(f) df/dv.$$

Связь между пространственными и временными частотами установим на основании следующих рассуждений. Предположим, что модуляция электронного луча индикатора осуществляется синусоидальной волной напряжения с временным периодом T . Тогда при движении пятна по экрану индикатора со скоростью v_n в направлении оси x происходит модуляция яркости пятна с пространственным периодом λ_n , причем между временным и пространственным периодами существует зависимость $T = \lambda_n/v_n$.

Поскольку временная частота $f = 1/T$, пространственная частота $v_n = 1/\lambda_n$, то можно найти:

$$f = v_n v_n; \quad v_n = f/v_n.$$

Следовательно,

$$df = v_n dv_n; \quad \tilde{L}_m(v_n) = S_n v_n \tilde{u}_c(f).$$

Спектр сечения функции $L(x, y)$ в итоге равен

$$\tilde{L}(v_n, \hat{y}) = \tilde{L}(v_n) = \tilde{L}_m(v_n) \tilde{h}_n(v_n) = S_n v_n \tilde{h}_n(v_n) \tilde{u}_c(f),$$

причем $f = v_n v_n$, а передаточная функция

$$\tilde{h}_n(v_n) = e^{-(\pi^2/2)(2r_0)_n^2 v_n^2}.$$

Для подавления строчной структуры кадра, вызывающей неприятные ощущения у наблюдателя, диаметр сканирующего пятна $(2r_0)_n$ должен несколько (на 5—10 %) превышать расстояние b_n между центрами соседних строк на экране индикатора, т. е. $(2r_0)_n = (1,05 \div 1,1) b_n \approx 1,08 b_n$ или $(r_0)_n \approx 0,54 b_n$. Подавление строчной структуры изображения без ухудшения его общей четкости может осуществляться и другими методами, например вобуляцией (качанием) пучка электронов в вертикальном направлении либо расширением строк с помощью маски из цилиндрических линз, устанавливаемой перед экраном кинескопа. В этих случаях размер сканирующего пятна вдоль строки может быть и меньше, чем расстояние между центрами строк.

Если дистанция между наблюдателем и экраном индикатора равна R_n , то угловой размер светлого сканирующего пятна на экране индикатора вдоль строки $(2\alpha_0)_n = (2r_0)_n/R_n$, а пространственная частота, выраженная в угловой мере, $v'_n = R_n v_n$. Следовательно,

$$\tilde{h}_n(v'_n) = e^{-(\pi^2/2)(2\alpha_0)_n^2 (v'_n)^2}.$$

Через угловое увеличение Γ можно перейти к углам и пространственным частотам в пространстве объектов. Так как $(2\alpha_0)_n = \Gamma(2\alpha_0)$; $v'_n = v'/\Gamma$, то

$$\tilde{h}_n(v') = e^{-(\pi^2/2)(2\alpha_0)^2 (v')^2}.$$

Угловой размер сканирующего пятна $2\alpha_0$ обычно представляют в долях углового размера чувствительного элемента приемника излучения: $(2\alpha_0) = q_n \alpha_{np} = q_n \delta_\lambda$, где коэффициент $q_n \leq 1$. В этом случае

$$\tilde{h}_n(v') = e^{-(\pi^2/2)q_n^2 (\delta_\lambda v')^2}.$$

В заключение найдем соотношение между пространственным спектром Хинчина—Винера и спектральной плотностью шума на выходе усилителя. Пусть спектральная плотность шума на выходе усилителя равна $E_{u \text{ вых}}(f) = 2E_{1u \text{ вых}}(f)$. Тогда энергетический спектр или спектр Хинчина—Винера пространственного распределения яркости вдоль строки развертки на экране индикатора равен

$$\begin{aligned} E_{1L}(v_n) &= S_n^2 v_n |\tilde{h}_n(v_n)|^2 E_{1u \text{ вых}}(v_n v_n) = \\ &= S_n^2 v_n e^{-\pi^2 (2r_0)_n^2 v_n^2} E_{1u \text{ вых}}(v_n v_n). \end{aligned}$$

Проверим соответствие единиц физических величин, входящих в левую и правую части последнего равенства: $(\text{кд} \cdot \text{м}^{-2})^2 \cdot \text{см} = (\text{кд} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{В}^{-1})^2 \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с} = (\text{кд} \cdot \text{м}^{-2})^2 \cdot \text{см}$. Если пространственная частота измеряется не в см^{-1} , а в рад^{-1} или мрад^{-1} , то спектр Хинчина—Винера $E_{1L}(v)$ измеряется в $(\text{кд} \cdot \text{м}^{-2})^2 \cdot \text{рад}$ или $(\text{кд} \cdot \text{м}^{-2})^2 \cdot \text{мрад}$, скорость сканирования обозначается через Ω и измеряется в $\text{рад} \cdot \text{с}^{-1}$ или $\text{мрад} \cdot \text{с}^{-1}$.

Дисперсия электрического шума на выходе усилителя равна

$$\overline{u_{\text{ш}}^2} = \int_0^{\infty} E_{u \text{ вых}}(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{1u \text{ вых}}(f) df$$

или

$$\overline{u_{\text{ш}}^2} = \frac{E_u(f_0)}{k_{\text{пр}}^2(f_0)} K_{\text{max}}^2(\Delta f)_{\text{ш}},$$

где

$$(\Delta f)_{\text{ш}} = \int_0^{+\infty} \frac{\epsilon_u(f)}{|\dot{k}_{\text{пр}}(f)|^2} |\dot{k}_c(f)|^2 df; \quad \epsilon_u(f) = \frac{E_u(f)}{E_u(f_0)},$$

а все остальные обозначения соответствуют принятым в § 20.2. Дисперсию шума можно выразить через шумовую полосу $(\Delta f_{\text{ш1}} = 2(\Delta f_{\text{ш}}))$. В этом случае

$$\begin{aligned} \overline{u_{\text{ш}}^2} &= \frac{E_{1u}(f_0)}{k_{\text{пр}}^2(f_0)} K_{\text{max}}^2(\Delta f)_{\text{ш1}}; \\ (\Delta f)_{\text{ш1}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_u(f)}{|\dot{k}_{\text{пр}}(f)|^2} |\dot{k}_c(f)|^2 df, \quad \epsilon_u(f) = E_{1u}(f)/E_{1u}(f_0) \end{aligned}$$

Дисперсия пространственного шума яркости на экране индикатора равна

$$\overline{\Delta L^2} = \int_0^{\infty} E_L(v_n) dv_n = S_n^2 v_n \int_0^{\infty} E_{u \text{ вых}}(v_n v_n) dv_n,$$

где $E_{u \text{ вых}}(v_n v_n) = E_{u \text{ вых}}(f)$ — спектральная плотность шума на выходе электронной схемы прибора.

Если известна спектральная плотность шума на входе электронной схемы прибора $E_u(f_0) = E_u(v_{0н}v_{н})$, определенная на заранее выбранной частоте $f_0 = v_{0н}v_{н}$, то спектральная плотность шума на выходе

$$E_{1u \text{ вых}}(f) = \frac{E_{1u}(f_0)}{k_{нр}^2(f_0)} K_{\max}^2 \varepsilon_u(f) \left| \frac{\dot{k}_c(f)}{\dot{K}_{нр}(f)} \right|^2$$

или

$$E_{1u \text{ вых}}(v_{н}v_{н}) = \frac{E_{1u}(v_{0н}v_{н})}{k_{нр}^2(v_{0н}v_{н})} K_{\max}^2 \varepsilon_u(v_{н}v_{н}) \left| \frac{\dot{k}_c(v_{н}v_{н})}{\dot{K}_{нр}(v_{н}v_{н})} \right|^2.$$

Следовательно, можно найти

$$\overline{\Delta L^2} = S_{н}^2 v_{н} \frac{E_{1u}(v_{0н}v_{н})}{k_{нр}^2(v_{0н}v_{н})} K_{\max}^2 \int_0^{\infty} \varepsilon_u(v_{н}v_{н}) \left| \frac{\dot{k}_c(v_{н}v_{н}) \bar{h}_н(v_{н})}{\dot{K}_{нр}(v_{н}v_{н})} \right|^2 dv_{н}.$$

Вводя обозначение

$$(\Delta v_{н})_{ш} = \int_0^{\infty} \varepsilon_u(v_{н}v_{н}) \left| \frac{\dot{k}_c(v_{н}v_{н}) \bar{h}_н(v_{н})}{\dot{K}_{нр}(v_{н}v_{н})} \right|^2 dv_{н},$$

имеем

$$\overline{\Delta L^2} = S_{н}^2 v_{н} \frac{E_{1u}(v_{0н}v_{н})}{k_{нр}^2(v_{0н}v_{н})} K_{\max}^2 (\Delta v_{н})_{ш}.$$

Можно упростить полученные выражения, полагая, что инерция приемника излучения не изменяет существенно общую передаточную функцию системы. В этом случае

$$\begin{aligned} \overline{\Delta L^2} &= E_{1u}(v_{0н}v_{н}) S_{н}^2 K_{\max}^2 v_{н} (\Delta v_{н})_{ш}; \\ (\Delta v_{н})_{ш} &= \int_0^{\infty} \varepsilon_u(v_{н}v_{н}) |\dot{k}_c(v_{н}v_{н}) \bar{h}_н(v_{н})|^2 dv_{н}. \end{aligned}$$

§ 23.5. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЧАСТОТНО-КОНТРАСТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕПЛОВИЗОРА

Расчет передаточной функции тепловизора можно осуществить по формулам, полученным в гл. 13—15. Для инвариантной системы с линейным сканированием вдоль оси x со скоростью v (в плоскости изображения, создаваемого объективом) спектр сигнала на выходе электронной системы обработки (на выходе усилителя) равен

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{U}_0(f) \dot{k}_{нр}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{yc}}(f),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(f) &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) dy = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{A'}}{v} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}^*\left(\frac{f}{v}, \hat{y}_1\right) \tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \hat{y}\right) \tilde{h}^*\left(\frac{f}{v}, \widehat{y - y_1}\right) dy dy_1; \\ \dot{k}_{нр}(f) &= [1 + (f/f_c)^2]^{-1/2}; \quad f_c = 1/(2\pi\tau_{нр}). \end{aligned}$$

Значения всех входящих в вышеприведенные выражения величин были подробно рассмотрены в §§ 15.1 и 15.2.

Если приемник и источник излучения имеют прямоугольную форму с размерами a и l в направлении сканирования, b и m — в направлении, перпендикулярном сканированию, то сечения спектров приемника и источника равны:

$$\tilde{S}\left(\frac{f}{v}, \widehat{y}\right) = S_0 S(y) a \operatorname{Sinc}\left(\frac{f}{v} a\right);$$

$$\tilde{L}^*\left(\frac{f}{v}, \widehat{y}_1\right) = L_0 L(y_1) l \operatorname{Sinc}\left(\frac{f}{v} l\right);$$

$$S(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y/b| \leq 1/2; \\ 0 & \text{при } |y/b| > 1/2; \end{cases}$$

$$L(y_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } |y_1/m| \leq 1/2; \\ 0 & \text{при } |y_1/m| > 1/2. \end{cases}$$

Функцию рассеяния объектива представим гауссоидой

$$h(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho_0^2} e^{-\rho^2/(2\rho_0^2)},$$

соответствующий спектр сечения и сопряженное с ним значение равны

$$\tilde{h}\left(\frac{f}{v}, \widehat{y - y_1}\right) = \tilde{h}^*\left(\frac{f}{v}, \widehat{y - y_1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_0^2}} e^{-\left(\frac{2\pi f}{v\rho_0}\right)^2/2} e^{-(y-y_1)^2/(2\rho_0^2)}.$$

Обобщенный сигнал, вырабатываемый безынерционным приемником, можно представить в виде произведения нормированных спектров (оптических передаточных функций) источника, приемника и объектива:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(f) &= \tilde{U}_{\max} \tilde{h}_{\text{ист}}(f/v) \tilde{h}_{\text{пр}}(f/v) \tilde{h}_{\text{об}}(f/v); \\ \tilde{U}_{\max} &= \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_A}{v} L_0 S_0 a l \frac{1}{2} \left[(b+m) \Phi\left(\frac{b+m}{2\rho_0}\right) - \right. \\ &\quad \left. - (b-m) \Phi\left(\frac{b-m}{2\rho_0}\right) - \sqrt{\frac{V^2}{2\pi}} e^{-(b^2+m^2)/(8\rho_0^2)} \operatorname{sh}\left(\frac{bm}{4\rho_0^2}\right) \right], \end{aligned}$$

где интеграл вероятности

$$\Phi\left(\frac{b \pm m}{2\rho_0}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(b \pm m)/(2\rho_0)} e^{-z^2/2} dz,$$

a гиперболический синус

$$\operatorname{sh}\left(\frac{bm}{4\rho_0^2}\right) = \frac{e^{bm/(4\rho_0^2)} - e^{-bm/(4\rho_0^2)}}{2}.$$

Одномерные спектры сечений равны:

$$\tilde{h}_{\text{ист}}\left(\frac{f}{v}\right) = \text{Sinc}\left(\frac{f}{v} l\right); \quad \tilde{h}_{\text{пр}}\left(\frac{f}{v}\right) = \text{Sinc}\left(\frac{f}{v} a\right);$$

$$\tilde{h}_{\text{об}}\left(\frac{f}{v}\right) = e^{-\left(2\pi \frac{f}{v} \rho_0\right)^2 / 2}.$$

Если размер источника излучения в направлении, перпендикулярном направлению сканирования, много больше размера приемника в том же направлении $m \gg b$, а диаметр кружка рассеяния объектива $2\rho_0 \leq b$, то

$$\Phi\left(\frac{b \pm m}{2\rho_0}\right) \approx \pm 1; \quad e^{-(b^2+m^2)/(8\rho_0^2)} \text{sh}\left(\frac{bm}{4\rho_0^2}\right) \ll 1;$$

$$\tilde{U}_{\text{max}} = \frac{\pi T_0 \sin^2 \sigma'_{\Lambda'}}{v} L_0 S_0 a l b.$$

Таким образом, можно найти

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{U}_{\text{max}} \tilde{h}_{\text{ист}}\left(\frac{f}{v}\right) \tilde{h}_{\text{об}}\left(\frac{f}{v}\right) \tilde{h}_{\text{пр}}\left(\frac{f}{v}\right) \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{S}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f).$$

В § 20.2 были введены следующие обозначения, которые и здесь будут приняты за основу последующих выкладок:

$$\dot{S}_{\text{вх}}(f) = E_0 \frac{\kappa}{(1+\kappa)^2} \dot{K}_{\text{вх}}(f); \quad \kappa = r/r_n;$$

$$\dot{K}_c(f) = \dot{k}_{\text{пр}}(f) \dot{K}_{\text{вх}}(f) \dot{K}_{\text{ус}}(f);$$

$$\dot{k}_c(f) = \dot{K}_c(f)/K_{\text{max}}; \quad \tilde{u}_{\text{max}} = \tilde{U}_{\text{max}} \tilde{K}_{\text{max}} E_0 \kappa / (1+\kappa)^2.$$

С учетом этих обозначений спектр сигнала (электрического напряжения) на выходе усилителя имеет вид

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{U}_{\text{max}} \tilde{h}_{\text{ист}}(f/v) \tilde{h}_{\text{об}}(f/v) \tilde{h}_{\text{пр}}(f/v) \dot{k}_c(f).$$

Вычисление спектра сигнала на экране тепловизионного индикатора — видеоконтрольного устройства — требует учета еще одного сомножителя — передаточной функции индикатора.

Для пространственной частоты на экране индикатора v_n спектр сечения распределения яркости свечения экрана $L(x, y)$ плоскостью $y = 0$ равен (см. § 23.4)

$$\tilde{L}(v_n) = S_n v_n \tilde{h}_n(v_n) \tilde{u}_c(f),$$

где

$$\tilde{h}_n(v_n) = e^{-(\pi^2/2)(2r_0)_n^2 v_n^2}.$$

Перейдем к определению зависимостей от пространственных частот в пространстве объектов $v = \Gamma v_n$, где Γ — угловое увеличение, и используем выражение для линейной скорости движения луча по экрану индикатора

$$v_n = \Gamma v R_n / f',$$

которое следует из очевидного соотношения $\Omega_{\text{и}} = \Gamma\Omega$. Здесь v — линейная скорость сканирования в плоскости изображения объектива; f' — заднее фокусное расстояние объектива; $R_{\text{и}}$ — расстояние от глаза наблюдателя до экрана индикатора; $\Omega_{\text{и}} = v_{\text{и}}/R_{\text{и}}$ — угловая скорость движения луча по экрану индикатора; $\Omega = v/f'$ — угловая скорость сканирования.

В результате получим

$$\tilde{L}(v/\Gamma) = S_{\text{и}}\Gamma v (R_{\text{и}}/f') \tilde{h}_{\text{и}}(v/\Gamma) \tilde{u}_c(f).$$

Так как

$$\tilde{u}_c(f) = \tilde{U}_{\text{max}} \tilde{h}_{\text{ист}}(v) \tilde{h}_{\text{об}}(v) \tilde{h}_{\text{пр}}(v) \dot{k}_c(vv),$$

где $v = f/v$, то найдем:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(v/\Gamma) &= \tilde{L}_{\text{max}} \tilde{h}_{\text{ист}}(v) \tilde{h}_{\text{об}}(v) \tilde{h}_{\text{пр}}(v) \dot{k}_c(vv) \tilde{h}_{\text{и}}(v/\Gamma); \\ \tilde{L}_{\text{max}} &= (\pi L_0 T_0 \sin^2 \sigma'_A) S_0 E_0 \frac{\kappa}{(1+\kappa)^2} K_{\text{max}} S_{\text{и}} \Gamma \frac{R_{\text{и}}}{f'} \text{ alb.} \end{aligned}$$

Общая передаточная функция тепловизора, выраженная в относительных единицах, имеет вид

$$\tilde{h}_{\text{общ}}(v) = \frac{\tilde{L}(v/\Gamma)/\tilde{L}_{\text{max}}}{\tilde{h}_{\text{ист}}(v)} = \tilde{h}_{\text{об}}(v) \tilde{h}_{\text{пр}}(v) \dot{k}_c(vv) \tilde{h}_{\text{и}}\left(\frac{v}{\Gamma}\right).$$

Учитывая, что нас интересует зависимость всех сомножителей — передаточных функций отдельных элементов тракта — от пространственной частоты, окончательно получим

$$\tilde{h}_{\text{общ}}(v) = \tilde{h}_{\text{об}}(v) \tilde{h}_{\text{пр}}(v) \dot{k}_c(v) \tilde{h}_{\text{и}}(v).$$

Рассмотрим пример расчета модуля общей передаточной функции тепловизора — его частотно-контрастной характеристики (ЧКХ) или функции передачи модуляции (ФПМ).

1. Найдем модуль коэффициента передачи тракта усиления и обработки электрического сигнала $|\dot{k}_c(f)| = |\dot{k}_c(vv)|$, считая, что выделение этого сигнала на фоне аддитивных шумов осуществляется апериодическим звеном с постоянной времени $\tau = q_c t_{\text{вх}}$, где $t_{\text{вх}}$ — длительность входного импульса; коэффициент $q_c \leq 1$, причем для оптимальной системы $q_c = 1/1,256$. Так как $t_{\text{вх}} = \delta_x/\Omega = f'\delta_x/v$, где δ_x — угловой размер чувствительного элемента приемника в направлении сканирования, то имеем

$$|\dot{k}_c(f)|^2 = 1 + (f/f_c)^2 = 1 + (2\pi\tau f)^2 = 1 + (2\pi q_c t_{\text{вх}} f)^2 = 1 + (2\pi q_c f' \delta_x/v)^2,$$

а при $f = vv$ $|\dot{k}_c(vv)|^2 = 1 + (2\pi q_c f' \delta_x v)^2$.

Выразим пространственную частоту в угловой мере град⁻¹, рад⁻¹, мрад⁻¹, обозначив ее v' . Так как $v' = f'v$, где f' — заднее фокусное расстояние объектива тепловизора, то

$$|\dot{k}_c(vv)|^2 = \left| \dot{k}_c\left(\frac{v'}{f'} v\right) \right|^2 = |\dot{k}_c(v'\Omega)|^2.$$

где $\Omega = v/f'$ — угловая скорость сканирования.

Следовательно,

$$|\dot{k}_c(v')|^2 = |\dot{k}_c(v'\Omega)|^2 = 1 + (2\pi q_c \delta_x v')^2$$

Если угловой размер чувствительного элемента приемника в направлении сканирования $\alpha_{np} = \delta_x$ выразить в мрад, то v' получим в мрад⁻¹, а Ω — в мрад/с.

2. Найдем частотно-контрастную характеристику объектива $|\tilde{h}_{об}(v)|$, которая при гауссовой аппроксимации его функции рассеяния определяется выражением

$$|\tilde{h}_{об}(v)| = e^{-(2\pi\rho_0 v)^2/2}.$$

Здесь также определим пространственную частоту в угловой мере, выразив диаметр пятна рассеяния объектива, измеренного на уровне 0,606 от максимального значения, $2\rho_0$ в угловой мере. Обозначив эту величину через $2\alpha_{об}$, найдем $2\alpha_{об} = 2\rho_0/f'$, т. е.

$$|\tilde{h}_{об}(v)| = e^{-(2\pi\alpha_{об}f'v)^2/2},$$

но $f'v = v'$, следовательно,

$$|\tilde{h}_{об}(v')| = e^{-(\pi\alpha_{об}v')^2/2} = e^{-(\pi^2/2)(2\alpha_{об})^2(v')^2}.$$

Выразим угловой размер кружка рассеяния объектива $2\alpha_{об}$ через угловой размер приемника излучения в направлении сканирования $\alpha_{np} = \delta_x$. Вводя в рассмотрение коэффициент $q_{об} = 2\alpha_{об}/\delta_x$, найдем

$$|\tilde{h}_{об}(v')| = e^{-(\pi^2/2)q_{об}^2(\delta_x v')^2}.$$

3. Найдем частотно-контрастную характеристику полевой диафрагмы — чувствительной площадки приемника излучения — в направлении сканирования $|\tilde{h}_{np}(v)|$.

Если чувствительный элемент приемника излучения имеет прямоугольную форму с размером a вдоль направления сканирования, то

$$|\tilde{h}_{np}(v)| = \text{Sinc}(av) = \sin(\pi av)/(\pi av).$$

Если обозначить $\alpha_{np} = \delta_x = a/f'$, то с учетом соотношения $v' = f'v$ найдем

$$|\tilde{h}_{np}(v')| = \text{Sinc}(\delta_x v') = \sin(\pi\delta_x v')/(\pi\delta_x v').$$

4. Найдем частотно-контрастную характеристику индикатора, которая, по данным предыдущего параграфа, имеет вид

$$\tilde{h}_и(v') = e^{-(\pi^2/2)q_{и}^2(\delta_x v')^2}.$$

Таким образом, ЧКХ (ФПМ или МПФ) тепловизора равна

$$\text{ЧКХ} = |\tilde{h}_{обит}(v')| = |\tilde{h}_{об}(v')| |\tilde{h}_{np}(v')| |\tilde{k}_c(v')| |\tilde{h}_и(v')|,$$

где

$$|\tilde{h}_{об}(v')| = e^{-(\pi^2/2)q_{об}^2(\delta_x v')^2};$$

$$|\tilde{h}_{np}(v')| = \text{Sinc}(\delta_x v') = \sin(\pi\delta_x v')/(\pi\delta_x v');$$

$$|\tilde{k}_c(v')| = [1 + (2\pi q_c \delta_x v')^2]^{-1/2};$$

$$|\tilde{h}_и(v')| = e^{-(\pi^2/2)q_{и}^2(\delta_x v')^2}.$$

Причем

$q_{об} = 2\alpha_{об}/\delta_x = 2\rho_0/a$; $q_c = \tau/t_{вх} = RC/t_{вх}$; $q_{и} = 2\alpha_0/\delta_x = 2r_0/a$,
где $2\rho_0$ — диаметр кружка рассеяния объектива; a — размер чувствительного элемента приемника излучения в направлении сканирования; RC — постоянная времени апериодического звена — эквивалента электронного тракта усиления и обработки сигнала; $t_{вх}$ — длительность импульса на входе электронного тракта; $2r_0$ — диаметр пятна рассеяния на экране индикатора (в единицах измерения в плоскости изображения объектива); $(2r_0)_и = q_{и}\delta_x\Gamma R_{и}$ — истинный диаметр пятна рассеяния на экране индикатора.

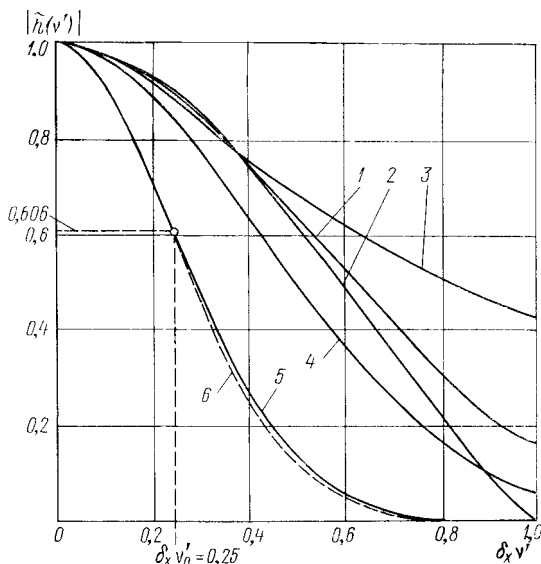


Рис. 373. Частотно-контрастная характеристика тепловизора и ее составляющие:

1 — ЧКХ объектива; 2 — ЧКХ полевой диафрагмы — чувствительной площадки приемника излучения; 3 — ЧКХ тракта усиления и обработки электрического сигнала; 4 — ЧКХ индикатора; 5 — общая ЧКХ тепловизора; 6 — идеальная гауссоида

На рис. 373 представлены зависимости общей передаточной функции тепловизора и ее составляющих от пространственной частоты в пространстве объектов, выраженной в миллирадианах.

При расчете приняты следующие значения параметров тепловизора.

1. Угловой размер чувствительного элемента приемника излучения в направлении сканирования $\delta_x = 0,25$ мрад.
2. Линейный размер чувствительного элемента приемника излучения в направлении сканирования $a = 50$ мкм.
3. Заднее фокусное расстояние объектива $f' = 200$ мм.
4. Диаметр пятна рассеяния объектива, на уровне 0,606 от максимального значения распределенной в нем энергии, $2\rho_0 = q_{об}a = 0,6 \cdot 50 = 30$ мкм. Соответствующий угловой размер $2\alpha_{об} = 0,6 \cdot 0,25 = 0,15$ мрад.
5. Минимальная длительность импульса (время элемента разложения) $\tau_{мин} = t_{вх} = \tau/q_c = \tau/0,33 = 3\tau = 3RC$ или $\tau_{мин} = a/v = 3\tau$, т. е. $\tau v = a/3 = 17$ мкм.
6. Угловое увеличение $\Gamma = 4$.
7. Дистанция от наблюдателя до экрана индикатора $R_{и} = 600$ мм.
8. Угловой размер пятна рассеяния (на уровне 0,606) на экране индикатора $(2\alpha_0)_и = (2\alpha_0)\Gamma = q_{и}\delta_x\Gamma = 0,75 \cdot 0,25 \cdot 4 = 0,75$ мрад. Соответствующий линейный размер $(2r_0)_и = (2\alpha_0)_и R_{и} = 0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 600 = 0,45$ мм.

Уравнения для сомножителей общей ЧКХ с учетом приведенных параметров имеют вид:

$$\begin{aligned} |h_{об}(\nu')| &= e^{-1,76(\delta_x \nu')^2} = e^{-0,11(\nu')^2}; \\ |h_{np}(\nu')| &= \frac{\sin(\pi \delta_x \nu')}{\pi \delta_x \nu'} = \frac{4}{\pi} \frac{\sin[(\pi/4)\nu']}{\nu'}; \\ |h_c(\nu')| &= 1/\sqrt{1+4,38(\delta_x \nu')^2} = 1/\sqrt{1+0,274(\nu')^2}; \\ |h_n(\nu')| &= e^{-2,72(\delta_x \nu')^2} = e^{-0,17(\nu')^2}; \\ q_{об} &= 0,6; \quad q_c = 0,33; \quad q_n = 0,75. \end{aligned}$$

На рис. 373 построена также зависимость $|h(\nu')| = e^{-0,5(\nu'/\nu_0')^2}$, где ν_0' — пространственная частота, на которой $|h_{общ}(\nu')| = 0,606$.

Практическое совпадение модуля общей передаточной функции тепловизора $|h_{общ}(\nu')|$ с гауссоидой $|h(\nu')|$ подтверждает тот факт, что произведение нескольких передаточных функций стремится к гауссовой форме. Для удобства по оси абсцисс на рис. 373 отложено значение произведения $\delta_x \nu'$, которое в данном случае равно $0,25\nu'$.

§ 23.6. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАКОНЫ ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ РАЗРАБОТКЕ СКАНИРУЮЩИХ ТЕПЛОВИЗОРОВ

Острота зрения

Простейшей мерой визуального разрешения является *острота зрения* или *острота различения* — величина, обратная угловому размеру разрешаемой глазом детали, выраженному в угловых минутах. Максимальная острота зрения обычно принимается равной одной обратной угловой минуте, что соответствует предельному разрешению, определяемому диском Эри при минимальном размере диаметра зрачка глаза примерно 2 мм. Действительно, радиус первого темного дифракционного кольца в изображении бесконечно удаленного точечного источника света, создаваемом линзой, имеющей диаметр $D = 2$ мм и фокусное расстояние $f' = 16$ мм, для средней длины волны $\lambda = 0,5$ мкм равен

$$\rho_{01} = \frac{1,22\lambda}{Df'} = \frac{1,22 \cdot 0,5}{2/16} = 4,88 \text{ мкм.}$$

На сетчатке глаза, хрусталик которого имеет фокусное расстояние также 16 мм, линейный размер 4,88 мкм в угловой мере составляет $(4,88/16) \cdot 57,3 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 1,05'$.

Сетчатка или *сетчатая оболочка* — световоспринимающий аппарат глаза — представляет собой многослойную структуру, светочувствительный слой которой состоит из отдельных светочувствительных клеток, называемых по их внешнему виду *палочками* и *колбочками*. Длина палочек около 60 мкм, колбочек около 35 мкм. Диаметр палочек составляет около 2 мкм, колбочек около 6 мкм. Общее число колбочек в светочувствительном слое сетчатки, имеющем площадь 10 см², приблизительно 7 млн., палочек — 130 млн. Колбочки и палочки имеют в своем составе вещества, сильно поглощающие свет (у колбочек это родопсин, у палочек — родопсин). Поглощенный этими веществами фотон вызывает изменение конфигурации их молекул, оказывающее на окружающий биохимический материал каталитическое действие, которое уменьшается при увеличении интенсивности света или числа возбужденных молекул, так как при этом уменьшается количество катализируемого

материала, приходящегося на одну молекулу. Биохимический усилитель, имеющий благодаря такому механизму изменяющийся коэффициент усиления, максимальное значение которого превосходит 10^6 , превращает малую энергию падающих фотонов в значительно большую энергию зрительных нервных импульсов, передаваемых в мозг по нервным волокнам от палочек и колбочек.

Палочки и колбочки расположены в светочувствительном слое сетчатки неравномерно. В центральной части сетчатки преобладают колбочки, а «центральная ямка» (fovea centralis) — углубление диаметром около 0,4 мм или $1,3^\circ$ — заполнена только ими. По мере удаления от центральной ямки сетчатки все больше преобладают палочки.

Колбочки работают при средних и высоких освещенностях и передают цветовые ощущения. Они являются рецепторами *дневного зрения*, т. е. функционируют преимущественно при яркостях рассматриваемой картины, превышающей 10 кд/м^2 , вплоть до яркости 10^5 кд/м^2 — допустимого предела по болевым ощущениям.

Палочки обеспечивают только черно-белое зрение, но работают при низких уровнях освещенности сетчатки. Они являются рецепторами *ночного зрения*, т. е. функционируют преимущественно при яркостях рассматриваемой картины менее $0,01 \text{ кд/м}^2$. Именно палочки определяют абсолютный порог световой чувствительности зрения, который представляет собой величину, обратную минимальной яркости светового пятна с угловым размером $\geq 50^\circ$ и обеспечивающую возможность обнаруживать с достаточной вероятностью это пятно на фоне, яркость которого практически равна нулю. Минимальная обнаруживаемая яркость (абсолютный световой порог) численно равна 10^{-6} кд/м^2 . Она не изменяется при увеличении углового размера светового пятна более 50° . В сумерках по мере изменения яркости от 10 кд/м^2 до $0,01 \text{ кд/м}^2$ происходит постепенное переключение аппарата зрения с колбочкового на палочковый. Полный диапазон яркостей, которые воспринимает глаз, составляет перепад почти в 10^{12} раз (от менее 10^{-6} кд/м^2 до более 10^5 кд/м^2), а в диапазоне с перепадом в 10^8 раз глаз, благодаря механизму автоматической регулировки усиления энергии кванта, практически сохраняет свою способность считать каждый поглощенный сетчаткой фотон (до сетчатки доходит примерно половина света, падающего на роговицу, а коэффициент поглощения света сетчаткой составляет 10—20 %).

Можно показать, что предельная острота зрения, равная одной обратной угловой минуте, в принципе реализуется только при высокой яркости рассматриваемой картины. Действительно, освещенность сетчатки глаза равна (лк)

$$E_v = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \cdot L_v = (\pi/4) T_0 \bar{O}^2 L_v,$$

где T_0 — коэффициент пропускания стекловидного тела глаза, примерно равный 0,5; σ'_A , \bar{O} — задний апертурный угол и относительное отверстие хрусталика глаза соответственно; L_v — яркость рассматриваемого светлого пятна, кд/м^2 .

Найдем среднее значение поверхностной плотности фотонов \bar{N} , падающих на сетчатку глаза в единицу времени. Если площадь изображения на сетчатке рассматриваемого глазом светлого пятна равна a , то

$$\bar{N}a = \frac{\Phi_e(\lambda_{\max})}{hc/\lambda_{\max}}.$$

Здесь $\Phi_e(\lambda_{\max})$ — монохроматический поток излучения, падающий на сетчатку и сосредоточенный на длине волны $\lambda_{\max} = 0,555 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, соответствующей максимуму чувствительности глаза, Вт; $\Phi_e(\lambda_{\max}) = V\Phi_e$, где Φ_e — полный (энергетический) поток, излучаемый рассматриваемым глазом светлым пятном во всем спектральном диапазоне, Вт; V — относительная световая эффективность или коэффициент использования глазом падающего излучения.

Так как световой поток равен (лм)

$$\Phi_v(\lambda_{\max}) = 680\Phi_e(\lambda_{\max}),$$

то

$$\begin{aligned} \bar{N}a &= \frac{\Phi_v(\lambda_{\max})}{hc/\lambda_{\max}} = \frac{\lambda_{\max}}{680hc} \Phi_v(\lambda_{\max}) = \\ &= \frac{0,555 \cdot 10^{-4}}{680 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \Phi_v(\lambda_{\max}) \approx 0,4 \cdot 10^{16} \Phi_v(\lambda_{\max}), \end{aligned}$$

следовательно, средняя плотность фотонов, выраженная в $\text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, равна

$$\bar{N} = 0,4 \cdot 10^{16} \frac{\Phi_v(\lambda_{\max})}{a} = 0,4 \cdot 10^{16} E_v = 0,4 \cdot 10^{16} \frac{\pi}{4} T_0 \ddot{O}^2 L_v = 10^{15} \pi T_0 \ddot{O}^2 L_v.$$

Чтобы выразить \bar{N} в $\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, нужно умножить полученное выражение на 10^{-4} , т. е. в этом случае

$$\bar{N} = 10^{11} \pi T_0 \ddot{O}^2 L_v.$$

Далее вычислим плотность фотонов, падающих на сетчатку в течение времени τ

$$\bar{N}_\tau = \bar{N} \tau = 10^{11} \pi T_0 \tau \ddot{O}^2 L_v,$$

и общее число фотонов, падающих на светлое пятно площадью a ,

$$\bar{N}_{\tau, a} = \bar{N}_\tau a = 10^{11} \pi T_0 \tau a \ddot{O}^2 L_v.$$

Среднее число эффективных фотонов, т. е. фотонов, поглощаемых веществом сетчатки (на площади a за время τ) и вызывающих появление нервных импульсов, равно

$$\bar{n} = \eta \bar{N}_{\tau, a} = 10^{11} \pi T_0 \tau a \eta \ddot{O}^2 L_v,$$

где $\eta \approx 0,1$ — квантовая эффективность глаза*.

Так как процесс испускания фотонов светлым пятном случаен, то наряду с полезным сигналом, который определяется средним числом эффективных фотонов, зрительное восприятие сопровождается шумом, т. е. среднеквадратическим отклонением от среднего, равным по закону Пуассона корню квадратному из среднего числа фотонов. Следовательно, отношение сигнала к шуму, определяющее вероятность обнаружения светлого пятна, равно

$$(c/w) = \bar{n} / \sqrt{\bar{n}} = \sqrt{\bar{n}} = 5,6 \cdot 10^5 \ddot{O} l \sqrt{T_0 \tau \eta L_v},$$

где $l = \sqrt{a}$ — линейный размер изображения светлого пятна на сетчатке глаза. Соответствующий ему угловой размер

$$\delta = l/f' = (c/w) / (5,6 \cdot 10^5 \ddot{O} \sqrt{T_0 \tau \eta L_v} f') = (c/w) / (5,6 \cdot 10^5 D \sqrt{T_0 \tau \eta L_v}),$$

где D — диаметр зрачка глаза, см; f' — фокусное расстояние хрусталика глаза, см. Если $c/w = 5$, $D = 0,2$ см, $T_0 = 0,5$, $\tau = 0,2$ с, $\eta = 0,1$, то

$$\delta = 5 / (5,6 \cdot 10^5 \cdot 0,2 \sqrt{0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,1} \sqrt{L_v}) = 45 \cdot 10^{-5} / \sqrt{L_v};$$

$$L_v = (45 \cdot 10^{-5} / \delta)^2 = 2 \cdot 10^{-7} / \delta^2.$$

Для $\delta \leq 1' = 2,9 \cdot 10^{-4}$ рад

$$L_v \geq 2 \cdot 10^{-7} / (2,9 \cdot 10^{-4})^2 = 2 \cdot 10^{-7} / (8,4 \cdot 10^{-8}) = 2,4 \text{ кд/м}^2.$$

Так как при изменении яркости от 1 до 10 кд/м² диаметр зрачка глаза равен не 2 мм, а изменяется от 4,6 мм до 3,5 мм (см. далее), то в полученные соотношения необходимо внести поправку. Полагая $D = 0,4$ мм, найдем:

$$\delta = 22,5 \cdot 10^{-5} \sqrt{L_v}; \quad L_v = 0,5 \cdot 10^{-7} / \delta^2,$$

т. е. для $\delta \leq 2,9 \cdot 10^{-4}$ рад $L_v \geq 0,6 \text{ кд/м}^2$.

Эти результаты можно сопоставить с данными А. Роузом [119], по наблюдениям которого квантовые флуктуации становятся практически незаметными при яркости, превышающей 0,03 кд/м². При этой и более высокой яркостях белая поверхность кажется ровной и свободной от шумов, а разрешение ограничивается дифракционными явлениями и конечными размерами колбочек и палочек.

* Квантовая эффективность глаза меняется от 10% при низких освещенностях сетчатки до нескольких процентов при высоких освещенностях.

Ниже приведены значения зрачкового рефлекса, рекомендованные И. А. Забелиной [34] для практических расчетов:

L_v , кл·м ²	10^{-5}	10^{-4}	10^{-1}	1,0	10^1	10^2	10^3	10^4
D , мм	7,0	6,6	5,7	4,6	3,5	2,9	2,6	2,3

Если светлое пятно рассматривается не на черном, а на сером фоне (или серое пятно — на черном фоне), то при вычислении углового размера и яркости рассматриваемого пятна следует учитывать еще и контраст $K = \Delta L_v / L_v$. В этом случае:

$$\delta = (c/u) / (5,6 \cdot 10^5 \cdot DK \sqrt{T_0 \tau \eta L_v});$$

$$L_v = (c/u)^2 / (31,36 \cdot 10^{10} D^2 K^2 T_0 \tau \eta \delta^2).$$

Если $(c/u) = 5$, $D = 0,4$ см, $T_0 = 0,5$, $\tau = 0,2$ с, $\eta = 0,1$, то

$$L_v = 5 \cdot 10^{-8} / (K^2 \delta^2),$$

для $\delta = 1' = 2,9 \cdot 10^{-4}$ рад, $K = 0,2$

$$L_v = 5 \cdot 10^{-8} / (0,04 \cdot 8,4 \cdot 10^{-8}) = 15 \text{ кл/м}^2.$$

Таким образом, в этом случае только при яркости серого пятна, превышающей 15 кл/м², реализуется геометрическое разрешение глаза.

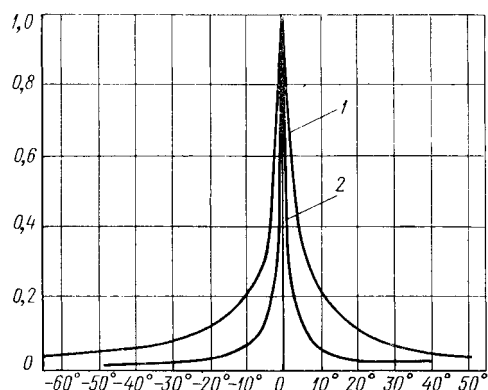


Рис. 374. Острота дневного зрения (1) и относительное распределение колбочек на 1 мм² сетчатки (2) в зависимости от угла отклонения от зрительной оси

Интересно также заметить, что если яркость соответствует абсолютному световому порогу, т. е. $L_v \leq 10^{-6}$ кл/м², а диаметр зрачка глаза максимален ($D = 0,8$ см), то при $K = 1$ и прочих равных предыдущим примерам условиях

$$\begin{aligned} \delta &\geq 5 / (5,6 \cdot 10^5 \times \\ &\times 0,8 \sqrt{0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}) = \\ &= 0,11 \text{ или } \delta \geq 6,4^\circ. \end{aligned}$$

Острота зрения достаточно резко снижается, когда объект смещается с линии зрения (рис. 374, кривая 1). Это связано с тем, что по мере удаления от центра сетчатки уменьшается плотность светочувствительных эле-

ментов — колбочек (рис. 374, кривая 2), определяющих предел разрешающей способности при высоких уровнях освещенности. Палочки, занимающие большую часть сетчатки и действующие до самых малых уровней освещенности, по мере удаления от центра глаза объединяются во все большие и большие группы, вплоть до нескольких тысяч элементов каждая.

Очень хорошая острота зрения обеспечивается в пределах fovea centralis, где расположены преимущественно колбочки. Угловой размер центральной ямки равен примерно 1,3°. Хорошее видение имеется в пределах желтого пятна сетчатки (около 9°), а удовлетворительное — сохраняется в пределах поля зрения глаза, равного примерно 30° по углу места и 40° по азимуту.

Острота зрения для любого места сетчатки тем выше, чем больше контраст. Она убывает с уменьшением времени экспозиции. Для центрального зрения уменьшение времени экспозиции в 200 раз (от 2 до 0,001 с) приводит к падению остроты зрения в 4 раза. Острота бинокулярного зрения выше остроты монокулярного зрения примерно в $\sqrt{2}$ раз. Все эти результаты были впервые получены Н. П. Травниковой в ГОИ [143].

Угловой размер экрана индикатора тепловизионной системы обычно выбирается не превышающим 9° , что соответствует на расстоянии 1 м размеру около 160 мм, а на расстоянии 600 мм — около 100 мм.

Частотно-контрастная характеристика глаза

Изучению частотно-контрастных характеристик (ЧКХ) глаза или его реакции на синусоидальную волну (РСВ), т. е. на тест-объект с синусоидальным распределением яркости по пространственной координате, посвящен ряд работ, выполненных в СССР, США, ФРГ, Франции, Японии и других странах. Один из лучших обзоров этих работ сделан М. А. Островской [105].

Форма частотно-контрастной характеристики глаза такова, что его чувствительность мала при наблюдении поля постоянной яркости и очень низких пространственных частот, резко возрастает до максимума и спадает примерно по гауссову закону на высоких частотах (рис. 375).

Положение максимума кривой ЧКХ глаза зависит от уровня яркости. При очень низких яркостях, соответствующих яркости объектов в сумерках (ниже 10 кд/м^2), максимума на кривой ЧКХ не наблюдается, так как в этом случае зрачок глаза расширен до диаметра 3,5 мм и более и преобладают aberrации светосильной оптической системы глаза ($\bar{O} \geq 1:4,6$), а при яркостях ниже $0,03 \text{ кд/м}^2$ значительное влияние имеет фотонный шум. На средних яркостях (около 100 кд/м^2), соответствующих освещению в квартире, вид ЧКХ определяется свойствами сетчатки глаза (размерами палочек и колбочек) и мозгом, а на очень высоких уровнях яркости, когда зрачок глаза сужен до диаметра 2 мм (относительное отверстие $1:8$), вид ЧКХ определяется дифракционными явлениями.

В диапазоне обычных яркостей экранов тепловизионных индикаторов (до 250 кд/м^2) максимум ЧКХ соответствует частотам $0,1\text{--}0,4 \text{ мрад}^{-1}$. Наиболее высокая пространственная частота, разрешаемая глазом, составляет $3,44 \text{ мрад}^{-1}$, что соответствует угловому разрешению $1/3,44 \text{ мрад} = 0,291 \text{ мрад} \approx 1'$.

Фактически ЧКХ глаза является как огибающей множества узкополосных резонансных фильтров пространственных частот,

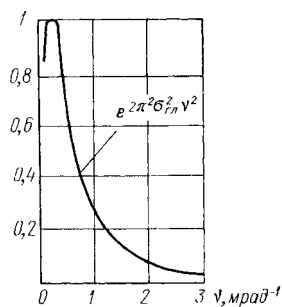


Рис. 375. Частотно-контрастная характеристика глаза: для средней величины $\sigma_{гл} = 0,25 \text{ мрад}$, $e^{-2\pi^2 \sigma_{гл}^2 \nu^2} = e^{-1,23 \nu^2}$; при этом, если $\nu = 1 \text{ мрад}$, то $e^{-1,23 \nu^2} = 0,29$

т. е. суммой реакции нескольких параллельных каналов, имеющих свой узкополосный фильтр. В каждом конкретном случае мозг использует фильтр, являющийся оптимальным для решения данной задачи. Например, при наблюдении яркой светлой полосы шириной Δx , глаз осуществляет узкополосную пространственную фильтрацию, используя согласованный фильтр, передаточная функция которого соответствует спектру прямоугольного импульса

$$\text{Sinc}(\Delta x v) = \sin(\pi \Delta x v) / (\pi \Delta x v).$$

Приближенное аналитическое выражение для ЧКХ глаза на частотах, превышающих $0,2 \text{ мрад}^{-1}$, по О. Шаде (JOSA, 1956, v. 46, p. 721—739) имеет вид

$$H_{\text{гд}}(v) = e^{-(2\pi\sigma_{\text{гд}}v)^2/2} = e^{-2\pi^2\sigma_{\text{гд}}^2v^2},$$

где $\sigma_{\text{гд}} = 0,2 \div 0,3 \text{ мрад}$.

К. Беннет, С. Винтерштейн и Р. Кент экспериментально установили (Human Factors, 1967, v. 9, p. 5—32), что увеличение размера элемента разрешения до значений, превышающих $0,873 \text{ мрад}$ ($3'$), ухудшает условия поиска и опознавания. Исходя из этого, пространственная частота в пространстве предметов, наблюдаемых тепловизором, не должна быть менее $\Gamma/0,873 \approx 1,1\Gamma$, где Γ — угловое увеличение. Иначе говоря, угловое увеличение тепловизора не должно превышать предела, при котором элемент разрешения имеет для глаза угловой размер $3'$ (около 1 мрад). Например, если разрешение системы в пространстве предметов равно $0,25 \text{ мрад}$, то увеличение не должно превышать значения $\Gamma = 0,873/0,25 \approx 3,5$.

Случайный поиск изображения объекта на экране индикатора

В гл. 1 были рассмотрены основные принципы случайного поиска и аналитические зависимости вероятности обнаружения объекта от времени, полученные Н. И. Пинегиным и Н. Г. Болдыревым в 1953 г. в ГОИ. Последующие многочисленные исследования этого важного в практическом отношении процесса подтвердили и дополнили первые результаты.

Процедура случайного поиска представляется следующим образом (рис. 376). Три—пять раз в секунду глаз совершает *большой саккадический скачок* длительностью $0,04 \text{ с}$ на угол $6—8^\circ$ при поле обзора 30° и на угол около 2° при поле обзора 9° . Затем в течение примерно $0,3 \text{ с}$ происходит *фиксация взгляда* (точки 1, 2, 3 и т. д. на рис. 376), во время которой глаз не остается неподвижным, а совершает *микродвижения*: *тремор*, *дрейф* и *микросаккады*. *Тремор* имеет частоту около 100 Гц и амплитуду, равную диаметру фоторецептора центральной ямки, т. е. около $1'$. *Дрейф* представляет собой плавные смещения зора на величину, не превосходящую диаметра центральной ямки ($1,3^\circ$). *Микросаккады* — это резкие скачки в пределах центральной ямки.

Д. Энох установил (JOSA, 1959, v. 49, p. 280—286), что при поле обзора $\geq 9^\circ$ число точек фиксации, лежащих за пределами этого поля, не превышает 10% , однако, если поле больше 9° , число

точек фиксации на периферии уменьшается по сравнению с числом точек фиксации в центре, что снижает эффективность поиска объекта, находящегося внутри поля. Эффективность поиска падает и при размере поля наблюдения меньше 9° , так как в этом случае увеличивается число точек фиксации за пределами поля (при поле 6° таких точек уже 50 %, а при поле 3° — 75 %). Таким образом, оптимальный угловой размер картины на экране индикатора составляет 9° .

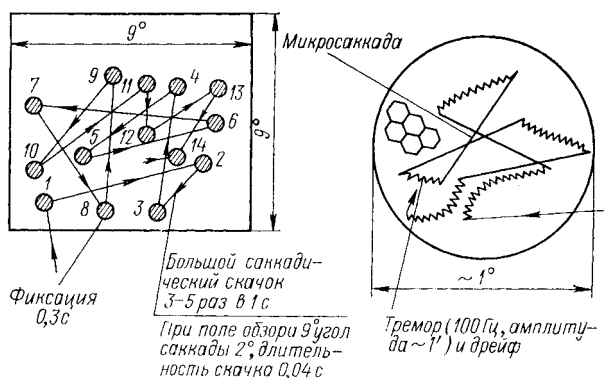


Рис. 376. Траектория случайного поиска

Зависимость вероятности обнаружения одиночного объекта от времени поиска на фоне, свободном от шумов, имеет вид (см. гл. 1)

$$P_{\text{обн}} = 1 - e^{-\alpha T},$$

где T — время обнаружения (время, затраченное на n случайных саккадических движений и фиксаций глаза); α — коэффициент, зависящий от площади изображения объекта на экране и контраста.

В соответствии с результатами исследований Н. И. Пинегина

$$\lg \alpha \approx -4,3 + 5,6K + 1,6 \lg (\gamma')^2,$$

где $K = (L_{\text{э}} - L_0)/L_{\text{э}}$ — контраст ($L_{\text{э}}$, L_0 — яркости экрана и изображения объекта); γ' — угловой размер изображения объекта на экране.

Если $K = 0,3$, $\gamma = 3'$, то $\lg \alpha = -1$, $\alpha = 0,1$ и при вероятности обнаружения $P_{\text{обн}} = 90\%$ время обнаружения равно

$$T = -(2,3/\alpha) \lg (1 - P_{\text{обн}}) = -(2,3/0,1) \lg 0,1 = 23 \text{ с.}$$

Для движущегося по экрану изображения объекта с угловой скоростью $\Omega \leq 5$ град/с

$$T = -[2,3/(\alpha\kappa)] \lg (1 - P_{\text{обн}}),$$

где $\kappa \approx 0,4 (1 + 0,45\Omega^2)$.

Следовательно, при $\Omega = 5$ град/с $\kappa = 0,4 (1 + 0,45 \cdot 25) = 4,9$; $T = 23/4,9 = 4,7$ с, когда $P_{\text{обн}} = 90\%$, $\alpha = 0,1$.

Время поиска уменьшается при увеличении скорости движения изображения объекта относительно фона. Этот результат получили Г. Петерсен и Д. Дугас (Human Factors, 1972, v. 14, p. 207—216).

Интегрирующие свойства глаза
(законы пространственной и временной суммации)

В результате многочисленных исследований установлено, что сигнал и шум на экране индикатора интегрируются по площади изображения объекта. Иначе говоря, большой объект воспринимается при более низкой пороговой яркости, чем маленький объект. *Пороговая яркость в определенных пределах обратно пропорциональна корню квадратному из площади изображения наблюдаемого объекта.*

Это явление получило название *пространственного интегрирования или пространственной суммации глаза*. Пространственная суммация прекращается для площадей, угловой размер которых превышает $40'$ (около 12 мрад). Этому размеру соответствует пространственная частота 0,025 обратной угловой минуты или $0,086 \text{ мрад}^{-1}$. При угловом увеличении прибора Γ в пространстве предметов соответствующий угловой размер объекта равен $40'/\Gamma$. Если $\Gamma = 4$, то $40'/\Gamma = 10'$ или 2,9 мрад, т. е. на дистанции 5000 м линейный размер объекта, по площади которого еще осуществляется интегрирование шума, равен 14,5 м. Пределы пространственной суммации были определены Ф. Баграшем, Л. Керром и Д. Томасом (Vision Research, 1971, v. 11, p. 625—634).

Если пространственная суммация является результатом пространственно-частотной фильтрации, осуществляемой глазом, т. е. возникает вследствие параллельного действия резонансных пространственных фильтров, то *временная суммация — следствие инерции зрения*, в результате которой глаз сохраняет и накапливает сигналы, разделенные малыми интервалами времени.

Интегрирование глазом сигналов во времени определяется соотношением

$$L = L_{\infty} (1 - \tau_{\text{гл}}/T),$$

где L — пороговая яркость объекта, наблюдаемого в течение времени T ; L_{∞} — пороговая яркость объекта, наблюдаемого бесконечно долго; $\tau_{\text{гл}}$ — постоянная времени глаза.

Постоянная времени глаза согласована с реакцией человека на внешнее раздражение, которая определяется временем прохождения нервных импульсов от глаза к мозгу и обратно к соответствующей конечности, а также временем, необходимым для преодоления механической инерции этой конечности. В общей сложности время реакции составляет 0,1—0,2 с и примерно равно постоянной времени глаза.

Наиболее часто используется значение $\tau_{\text{гл}} = 0,2 \text{ с}$. Временное суммирование оказывает существенное влияние до интервалов времени наблюдения $T = 0,5 \text{ с}$. Фундаментальные исследования инерции зрения были выполнены А. В. Луизовым [75].

Из закона пространственной суммации следует, что глаз воспринимает отношение сигнала к шуму на экране индикатора, характерное для площади изображения объекта в целом, а не его элементарного участка, площадь которого равна площади корреляции шума в изображении. Следовательно, воспринимаемое глазом отношение сигнала к шуму пропорционально корню квадратному из отношения площади изображения объекта к площади корреляции шума, т. е. пропорционально отношению соответствующих линейных или угловых размеров

$$(c/u)_в = (c/u)_к \sqrt{A_0/A_k} = (c/u)_к (l_0/l_k) = (c/u)_к (\alpha_0/\alpha_k),$$

где $(c/u)_в$ — воспринимаемое глазом отношение сигнала к шуму; $(c/u)_к$ — отношение сигнала к шуму «в точке» (для элементарного участка, площадь которого равна площади корреляции шума); A_0, A_k — площадь изображения объекта и площадь корреляции шума на экране индикатора соответственно; $l_0, l_k, \alpha_0, \alpha_k$ — соответствующие линейные и угловые размеры.

Таким образом, само понятие отношения сигнала к шуму при наблюдении картины на экране видеоконтрольного устройства (индикатора) имеет смысл только в том случае, если указан размер рассматриваемого объекта. Шум «в точке» — это шум, вычисленный для элементарного участка, соответствующего площади корреляции.

Рассмотрим способы вычисления площади корреляции шума в изображении. Предположим, что угловой размер приемника излучения в направлении, перпендикулярном сканированию, равен $\beta_{пр}$, а в направлении вдоль сканирования — $\alpha_{пр}$. Если угловое расстояние между центрами соседних строк на экране видеоконтрольного устройства выбрано равным $\beta_{пр.л} = \Gamma\beta_{пр}$, где Γ — увеличение тепловизионной системы, а размер пятна, сканирующего по экрану видеоконтрольного устройства, обеспечивает восприятие раstra развертки на пороге различения отдельных линий, то длина корреляции шума на экране в направлении, перпендикулярном сканированию $\beta_{к.л}$, может быть принята равной $\beta_{пр.л}$ или в масштабе величин пространства объектов — $\beta_{пр}$, т. е. $\beta_k = \beta_{пр}$.

Значительно сложнее найти длину корреляции шума в направлении сканирования (вдоль строки). В принципе эту задачу можно решить, вычислив корреляционную функцию выходного шума и соответствующее время корреляции, а затем, зная скорость сканирования, — длину корреляции. Однако можно упростить вычисления, полагая, что в правильно спроектированной системе время корреляции шума не превосходит длительности полезного сигнала. Соответственно, и выраженная в угловой мере длина корреляции шума на экране видеоконтрольного устройства не будет превосходить углового размера наименьшей детали, воспроизводимой системой.

В простейшем случае длина корреляции в направлении сканирования α_k равна угловому размеру чувствительного элемента приемника излучения $\alpha_{пр}$. Если же угол $\alpha_{пр}$ не определяет углового

разрешения тепловизионной системы, можно воспользоваться эквивалентным угловым разрешением $\alpha_{\text{ЭВ}}$, которое выражается через эквивалентную полосу частот или эквивалентное число линий N_e (по всей высоте кадра). Определение N_e дано О. Шаде, который установил, что интеграл, взятый по всей области частот от квадрата модуляционной передаточной функции (МПФ) или, что то же, от квадрата частотно-контрастной характеристики (ЧКХ), описывает видимую резкость телевизионного изображения. Этот интеграл и есть эквивалентная полоса частот:

$$N_e = \int_0^{\infty} |\tilde{h}_{\text{общ}}(\nu)|^2 d\nu,$$

где $\tilde{h}_{\text{общ}}(\nu)$ — передаточная функция системы в направлении сканирования, а ее модуль $|\tilde{h}_{\text{общ}}(\nu)| = \text{ЧКХ} = \text{МПФ}$.

По определению Р. Сенделла эквивалентное разрешение системы равно

$$\alpha_{\text{ЭВ}} = 1/(2N_e).$$

Вначале применим это определение для расчета эквивалентного разрешения в том случае, когда угловой размер чувствительного элемента приемника определяет разрешение всей системы. Поскольку пространственное распределение чувствительности приемника в направлении сканирования выражается прямоугольной функцией рассеяния линии (ФРЛ) с угловым размером $\alpha_{\text{пр}}$

$$\text{Rect}\left(\frac{x}{\alpha_{\text{пр}}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x/\alpha_{\text{пр}}| \leq 1/2; \\ 0 & \text{при } |x/\alpha_{\text{пр}}| > 1/2, \end{cases}$$

где x — текущее значение угловой координаты в направлении сканирования, то ЧКХ приемника равна

$$|\tilde{h}_{\text{пр}}(\nu)| = \text{Sinc}(\alpha_{\text{пр}}\nu).$$

Если общая передаточная функция системы определяется приемником, т. е. $\tilde{h}_{\text{общ}}(\nu) = \tilde{h}_{\text{пр}}(\nu)$, то эквивалентная полоса частот

$$N_e = \int_0^{\infty} |\tilde{h}_{\text{пр}}(\nu)|^2 d\nu = \int_0^{\infty} \text{Sinc}^2(\alpha_{\text{пр}}\nu) d\nu = \frac{1}{2\alpha_{\text{пр}}},$$

а эквивалентное разрешение системы по Р. Сенделлу

$$\alpha_{\text{ЭВ}} = 1/(2N_e) = \alpha_{\text{пр}},$$

что соответствует случаю, когда угловой размер чувствительного элемента приемника ограничивает разрешение всей системы.

Если ФРЛ тепловизионной системы аппроксимируется гауссовой со среднеквадратическим отклонением σ , т. е. $\text{ФРЛ} = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, то можно найти:

$$(\text{ЧКХ})_{\text{общ}} = |\tilde{h}_{\text{общ}}(\nu)| = e^{-(2\pi\sigma\nu)^2/2};$$

$$N_e = 1/(4\sigma\sqrt{\pi}) = 0,141/\sigma; \quad \alpha_{\text{ЭВ}} = 1/(2N_e) = \sigma/0,282 = 3,54\sigma.$$

Значения ЧКХ систем или их элементов,

имеющих гауссовы функции рассеяния $e^{-\left(2\pi \frac{\sigma}{\alpha_{\text{пр}}} \frac{v}{v_{\text{пр}}}\right)^2 / 2}$,
для различных значений отношений $v/v_{\text{пр}}$ и $\sigma/\alpha_{\text{пр}}$

$v/v_{\text{пр}} = \alpha_{\text{пр}} v$	$\sigma/\alpha_{\text{пр}}$			$v/v_{\text{пр}} = \alpha_{\text{пр}} v$	$\sigma/\alpha_{\text{пр}}$			$v/v_{\text{пр}} = \alpha_{\text{пр}} v$	$\sigma/\alpha_{\text{пр}}$		
	0,125	0,25	0,5		0,125	0,25	0,5		0,125	0,25	0,5
0,00	1,000	1,000	1,000	0,35	0,963	0,859	0,546	0,70	0,859	0,546	0,089
0,05	0,999	0,997	0,987	0,40	0,952	0,821	0,454	0,75	0,841	0,500	0,062
0,10	0,997	0,987	0,952	0,45	0,939	0,779	0,368	0,80	0,821	0,454	0,042
0,15	0,993	0,973	0,894	0,50	0,925	0,735	0,291	0,85	0,800	0,410	0,028
0,20	0,987	0,952	0,821	0,55	0,911	0,689	0,225	0,90	0,779	0,368	0,018
0,25	0,981	0,925	0,735	0,60	0,894	0,641	0,169	0,95	0,757	0,328	0,012
0,30	0,973	0,894	0,641	0,65	0,878	0,594	0,124	1,00	0,735	0,291	0,007

Когда основной вклад в ФРЛ и МПФ (ЧКХ) дает конечный угловой размер приемника излучения $\alpha_{\text{пр}}$, то значения σ целесообразно выражать в единицах $\alpha_{\text{пр}}$, так же как пространственные частоты — в единицах $v_{\text{пр}} = 1/\alpha_{\text{пр}}$. В этом случае соответствующие формулы для ЧКХ, N_e и $\alpha_{\text{экв}}$ имеют вид:

$$|\bar{h}_{\text{обш}}(v)| = e^{-[(2\pi\sigma/\alpha_{\text{пр}})(v/v_{\text{пр}})]^2/2};$$

$$N_e = \frac{0,141}{\alpha_{\text{пр}}} \frac{1}{(\sigma/\alpha_{\text{пр}})}; \quad \alpha_{\text{экв}} = 3,54 (\sigma/\alpha_{\text{пр}}) \alpha_{\text{пр}}.$$

В табл. 32, заимствованной из работы [75], приведены полезные для практических расчетов значения ЧКХ систем или их элементов, имеющих гауссовы функции рассеяния, для трех значений отношения $\sigma/\alpha_{\text{пр}}$, равных 0,125; 0,25; 0,5.

Длину корреляции в направлении сканирования можно также найти, пользуясь понятием *шумовой полосы пропускания*. Как известно (см. § 17.2), действие шума с любым заданным распределением мощности по спектру на входе системы, имеющей произвольную передаточную функцию, по эффекту на выходе может быть заменено действием белого шума с постоянной спектральной плотностью на систему с прямоугольной передаточной функцией, ширина которой равна шумовой полосе пропускания, а коэффициент передачи постоянен в пределах полосы пропускания и равен нулю вне этой полосы частот. Таким образом, если шумовая полоса пропускания тепловизионной системы, выраженная в пространственных частотах, равна $(\Delta v)_{\text{ш}}$, то можно с достаточной точностью утверждать, что в спектре шума на выходе системы практически отсутствуют частоты выше $(\Delta v)_{\text{ш}}$, так как нижняя частота полосы пропускания обычно близка к нулю. Следовательно, длина корреляции шума в направлении сканирования на выходе системы (на экране индикатора) $\alpha_{\text{к.ш}} = 1/(\Delta v_{\text{ш}})_{\text{ш}}$, а в пространстве объектов $\alpha_{\text{к}} = 1/(\Delta v)_{\text{ш}}$.

Для пространственных частот $(\Delta v_n)_{ш}$, см⁻¹, на экране индикатора было найдено

$$(\Delta v_n)_{ш} = \int_0^{\infty} \varepsilon(v_n v_n) |k_c(v_n v_n) \tilde{h}_n(v_n)|^2 dv_n.$$

Переходя к пространственным частотам в пространстве объектов $v = \Gamma v_n$, где Γ — угловое увеличение, и обозначая угловую скорость сканирования в пространстве объектов $\Omega = \Omega_n/\Gamma$, мрад/с, найдем

$$(\Delta v)_{ш} = \int_0^{\infty} \varepsilon(v\Omega) |k_c(v\Omega) \tilde{h}_n(v/\Gamma)|^2 dv.$$

Длина корреляции в направлении сканирования

$$\alpha_k = \frac{1}{(\Delta v)_{ш}} = \frac{1}{\int_0^{\infty} \varepsilon(v\Omega) |k_c(v\Omega) \tilde{h}_n(v/\Gamma)|^2 dv}.$$

Применим полученную формулу для случая, когда шум на входе в пределах диапазона используемых частот спектра белый, т. е. $\varepsilon(v\Omega) = 1$, а передаточная функция системы совпадает с передаточной функцией оптимального фильтра, амплитудно-частотная характеристика которого согласована со спектром сигнала $\tilde{y}(f) = \tilde{y}(v\Omega)$. Если на входе действует прямоугольный импульс сигнала длительностью $t_{вх} = \alpha_{пр}/\Omega$, где $\alpha_{пр}$ — угловой размер чувствительного элемента приемника излучения в направлении сканирования, то можно найти

$$|k_c(v\Omega) \tilde{h}_n(v/\Gamma)| = |k_{opt}(v\Omega)| = |\tilde{y}(v\Omega)|.$$

Так как

$$|\tilde{y}(v\Omega)| = \text{Sinc}(\alpha_{пр}v) = \sin(\pi\alpha_{пр}v)/(\pi\alpha_{пр}v),$$

то

$$(\Delta v)_{ш} = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\pi\alpha_{пр}v)}{(\pi\alpha_{пр}v)^2} dv = \pi\alpha_{пр} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz,$$

где $z = \pi\alpha_{пр}v$.

Учитывая, что по таблицам [25] $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = \frac{\pi}{2}$ (интеграл

№ 3.741.3), получим

$$(\Delta v)_{ш} = 1/\alpha_{пр},$$

следовательно, длина корреляции в направлении сканирования

$$\alpha_k = 1/(\Delta v)_{ш} = \alpha_{пр}.$$

В свою очередь, из закона временной суммации следует, что глаз воспринимает не мгновенные значения случайного шума, а его среднеквадратическую величину, усредненную за конечный период времени, равный постоянной времени глаза $\tau_{гз}$, т. е. при одинаковой от кадра к кадру дисперсии шума отношение сигнала к шуму увеличивается пропорционально корню квадратному из числа незави-

симых кадров, укладываемых в интервале $\tau_{г.л.}$. Следовательно, воспринимаемая шумовая полоса пропускания для системы с кадровой разверткой равна $(\Delta\nu)_{ш}/(\tau_{г.л.}F)$, где F — частота кадров; $(\Delta\nu)_{ш}$ — шумовая полоса пропускания при наблюдении одного кадра; $\tau_{г.л.}F$ — число кадров, подвергающихся временной суммации.

При совместном действии пространственной и временной суммации для изображения, воспринимаемого глазом, имеет место увеличение отношения сигнала к шуму в $\left(\frac{c}{ш}\right)_в / \left(\frac{c}{ш}\right)_к =$

$$= \sqrt{\frac{A_0}{A_k} \tau_{г.л.} F} \text{ раз.}$$

А. Роуз в работе [119] дает следующий пример использования приведенного соотношения в телевидении: «Обычно отношение сигнал/шум телевизионной системы определяется для полосы пропускания усилителя, составляющей около 5 МГц. Эта величина относится к наименьшему элементу изображения, составляющему примерно 1/500 величины всего изображения, и к длительности одного кадра, то есть 1/30 с. Определенное таким образом отношение сигнала к шуму можно пересчитать для площадей, больших площади наименьшего элемента изображения, умножив его на отношение их диаметров, и для времени экспозиции 0,2 с, соответствующего зрительному процессу, умножая на величину $[(2/10)(1/30)]^{1/2} = 2,5$. И если нам кажется, что отдельные кадры телевизионного изображения или фильма содержат значительно больше шумов, чем фильм в целом, то это объясняется именно этим последним множителем. Обычно глаз воспринимает (как бы интегрирует) примерно шесть кадров телевизионного изображения, добиваясь тем самым соответствующего улучшения отношения сигнала к шуму». Следует, конечно, иметь в виду, что если шум пропорционален \sqrt{F} , то увеличение частоты кадров не оказывает влияния на воспринимаемое отношение сигнала к шуму.

Полученные соотношения для воспринимаемого глазом отношения сигнала к шуму на экране индикатора справедливы, если контраст изображения объекта и фона равен единице. Однако изображение объекта, имеющее контраст $K < 1$, должно по своим линейным размерам в K раз превышать размеры изображения с контрастом $K = 1$, т. е. в этом случае

$$\left(\frac{c}{ш}\right)_в / \left(\frac{c}{ш}\right)_к = \sqrt{\frac{A_0}{A_k} \frac{0,2F}{K^2}}.$$

А. Роуз в уже упомянутой книге исследовал [119] различные методы ослабления шума при наблюдении изображения («картин») на экране индикатора. Учитывая принципиальную важность этих исследований, рассмотрим их результаты (рис. 377).

Прежде всего найдем отношение сигнала к шуму для изображения на сетчатке глаза. Число фотонов, падающих за время экспозиции глаза на элемент площади сетчатки, соответствующий рассматриваемому элементу на экране индикатора, определяет величину сигнала, если учесть квантовую эффективность глаза, равную примерно 10 %.

Шум есть корень квадратный из этого числа. Поэтому отношение сигнала к шуму прямо пропорционально линейному размеру рассматриваемого элемента l_0 . Соответствующая зависимость (кривая «глаз» на рис. 377, а) обрывается при малых размерах элемента изображения l_{01} , как это следует из геометрических пределов разрешения глаза (конечные размеры палочек и колбочек, дифракционные явления). При больших отношениях сигнала к шуму (несколько сотен) ее обрыв (l_{02}) определяется абсолютным пределом различимости контраста равным 0,5—2 % (предел Вебера—Фехнера).

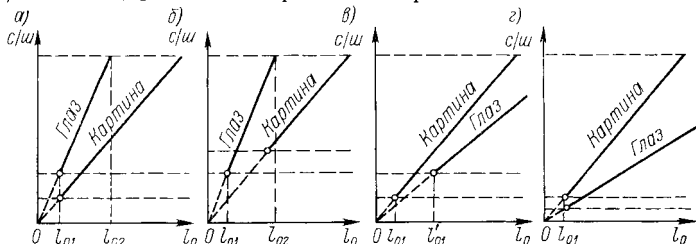


Рис. 377. Уменьшение видности шумов — зависимость отношения сигнала к шуму (c/sh) на экране видеоконтрольного устройства (картина) и на сетчатке (глаз) от линейного размера минимальной обнаруживаемой глазом детали изображения l_0 : а — исходное изображение; б — сужение полосы пропускания электронного тракта; в — увеличение расстояния между наблюдателем и экраном видеоконтрольного устройства; г — нейтральный фильтр перед глазом наблюдателя

Если кривая «глаз» идет выше кривой изображения на экране («картина» на рис. 377, а), глаз замечает шумы в изображении, так как он обладает более тонкой дискриминацией, чем шумовая текстура изображения. Если уменьшить полосу пропускания усилителя (рис. 377, б), глаз по-прежнему видит шум в тех частях изображения, которые содержат крупные детали, т. е. видность шумов сохраняется. Наряду с этим, мелкие детали изображения [слева от точки на кривой «картина» (рис. 377, б)] не воспроизводятся узкополосным усилителем. Это, конечно, имеет место только в том случае, если первоначальная полоса пропускания не была шире, чем это требовалось для передачи деталей картины. Иначе дополнительный шум уменьшает контраст в более темных частях изображения. Увеличение расстояния от наблюдателя до картины на экране (рис. 377, в) дает двоякий эффект: часть информации теряется, так как глаз не воспринимает области с самыми мелкими деталями (мельче l_{01}), остальная часть информации воспринимается без шумов, поскольку кривая «глаз» проходит ниже кривой «картина», т. е. дискриминация глазом малых шумовых флуктуаций яркости недостаточна, чтобы их заметить.

При введении нейтрального фильтра между глазом и экраном индикатора (рис. 377, г) отношение сигнала к шуму на сетчатке уменьшается за счет уменьшения числа падающих на нее фотонов. Все детали картины при этом сохраняются, но картина оказывает-

ся свободной от шумов. Таким образом, этот метод ослабления влияния шума является предпочтительным.

Экспериментальные исследования видности шумов на экране позволили сделать также следующие важные выводы (см., например, работу [73]).

1. Маскирующее действие шума зависит в основном от его спектральной плотности, т. е. от мощности, приходящейся на единицу полосы пропускания пространственных частот.

2. Степень воздействия шума различного спектрального состава на глаз характеризуется весовой функцией, вид которой совпадает с частотно-контрастной характеристикой глаза. В диапазоне частот, превышающих $0,1 \text{ мрад}^{-1}$, узкополосный шум на низкой частоте более неприятен, чем шум той же мощности в высокочастотной области.

3. Действие шума особенно неприятно, когда ширина полосы пропускания тепловизионной системы равна примерно $0,7 \text{ мрад}^{-1}$. Раздражающее действие шума уменьшается при сужении или расширении полосы относительно этого значения.

4. Глаз более чувствителен к шумам в узких полосах, центрированных на частотах, кратных частоте строчной развертки, чем к шумам, спектр которых сосредоточен между этими частотами. Шум на кратных частотах проявляется как изменение яркости от строки к строке, в пределах одной строки уровень яркости в этом случае приблизительно постоянен. Следовательно, этот вид шума действует на наблюдателя подобно тому, как действует растровая (строчная) структура изображения.

5. Растровая структура столь основательно разрушает изображение, что при ее наличии значительные изменения передаточной функции тепловизионной системы и отношения сигнала к шуму вызывают лишь небольшое ухудшение качества изображения и возможности опознавания объектов.

Наблюдатель обычно произвольно выбирает такую дистанцию, на которой растровая структура едва заметна, а меньшие дистанции отвергаются из-за видимости раstra. Угловой размер одной строки для глаза должен составлять $0,5—1 \text{ мрад}$ ($1,72—3,44'$), в противном случае характеристики изображения ухудшаются. При общем числе строк, приходящихся на высоту кадра, равном 240, качество изображения оценивается как удовлетворительное, при 180 строках — как недостаточное, при 120 строках — как приемлемое на пределе, при 60 — как недопустимо плохое. Действительно, если угловой размер наблюдаемой на индикаторе картины равен $9^\circ = 540'$, то размер одной строки при 240 строках во всей картине равен $2,25'$, при 180 строках — $3'$, при 120 строках — $4,5'$, а при 60 строках — $9'$.

6. Шум в виде горизонтальных штрихов менее неприятен, чем шум в виде вертикальных штрихов в изображении.

7. Вследствие нелинейности зрительного процесса восприятие резкого края детали высокого контраста сопровождается появлением выбросов (*явление Маха*). На границах черные участки кажутся «чернее черного», а белые — «белее белого». Источник этих выбросов — комбинация небольших колебательных движений глаза и

действия механизма регулировки усиления сигнала в системе «глаз—мозг». Сильные выбросы на резких границах ослабляют способность глаза замечать небольшие различия в яркости вблизи этих границ. Следовательно, видность шумов здесь ослабляется. Если строки развертки очень резки и зашумлены, то с дальнего расстояния шум виден, а на малом расстоянии, когда имеет место явление Маха, он неразличим.

8. Наихудший дефект изображения обнаруживается в случае, когда глаз ощущает, что изображение не непрерывно во времени. Такое восприятие называется *мельканием*.

Восприятие мельканий представляет собой вероятностную функцию с очень резким переходом от видимости к невидимости. Мелькания становятся неразличимыми при превышении частоты кадровой развертки некоторого значения $F_{кр}$ — критической частоты мелькания. Если частота смены кадров превышает $F_{кр}$, то видимая яркость равна усредненной по времени яркости (закон Тальбота)

$$L = \frac{1}{T_K} \int_0^{T_K} L(t) dt.$$

Критическая частота зависит от углового размера изображения на экране индикатора, яркости поля адаптации, закона изменения яркости. Она растет с увеличением угла, отсчитываемого от оси зрения (периферическое зрение более чувствительно к мельканиям, чем центральное).

9. Глаз адаптируется к средней яркости, поэтому попытка обеспечить хорошее восприятие за счет высокой яркости экрана не приведет к желаемым результатам, если окружающий фон будет темным. Отношение яркости окружающего фона к яркости рабочей поверхности должно находиться в пределах от 0,1 до 1. Это отношение никогда не должно быть больше единицы, а уменьшение его до значений, меньших 0,1, также ухудшает зрительное восприятие.

Вероятность обнаружения и вероятность опознавания изображения объекта наблюдения на экране индикатора

Вероятность обнаружения — это вероятность выделения объекта на ярком неоднородном фоне и отнесения его к классам объектов, представляющих потенциальный интерес.

При высокой яркости фона и практическом отсутствии шумов вероятность обнаружения возрастает с увеличением времени наблюдения, углового размера объекта и контраста в соответствии с соотношениями, приведенными выше.

Механизм обнаружения объектов простой формы на фоне случайных шумов практически не связан с природой шума: зависящий от сигнала фотонный шум и не зависящие от сигнала аддитивные электронные шумы системы могут рассматриваться, как процессы, подчиняющиеся нормальному (гауссову) закону. Это важное обстоятельство определяется тем, что на всех уровнях яркости, далеких от абсолютного порога обнаружения, поток фотонов, попадающих в глаз,

достаточно велик и распределение Пуассона, справедливое для фотонного шума, можно аппроксимировать распределением Гаусса.

Вероятность обнаружения является поэтому однозначной функцией воспринимаемого глазом отношения сигнала к шуму $\rho = (c/u)_в$. Она представляет собой вероятность того, что пик сигнала L_{\max} , сложившись со случайным значением шума ΔL , превысит некоторое пороговое значение L_0 . Если среднеквадратическое значение шума $\sqrt{\overline{\Delta L^2}}$, распределенного по нормальному закону, равно σ , то вероятность обнаружения можно представить в виде

$$P_{\text{обн}} = P(z > z_0).$$

Здесь $z = \Delta L/\sigma$; $z_0 = y - \rho$, где $y = L_0/\sigma$; $\rho = L_{\max}/\sigma$. Поскольку для нормального закона распределения вероятности

$$P(z > z_0) = 0,5 [1 - \Phi(z_0)],$$

где интеграл вероятности

$$\Phi(z_0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_0} e^{-z^2/2} dz,$$

то можно найти:

$$P_{\text{обн}} = 0,5 [1 + \Phi(-z_0)];$$

$$-z_0 = \rho - y = (c/u)_в - L_0/\sigma$$

или

$$P_{\text{обн}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\rho-y} e^{-z^2/2} dz,$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-z^2/2} dz = 0,5.$$

Для определения вероятности ложной тревоги необходимо подсчитать вероятность превышения шумовыми флуктуациями порога L_0 . Эта вероятность равна

$$P_{\text{л.т}} = P(\Delta L > L_0) = P(\Delta L/\sigma > L_0/\sigma) = P(z > y) = 0,5 [1 - \Phi(y)].$$

Значения вероятности ложной тревоги при различных y и воспринимаемого отношения сигнала к шуму ρ приведены в табл. 33.

Проведем анализ данных табл. 33, исходя из количества информации, содержащейся в рассматриваемой картине. Если картина содержит 500 элементов, то имеется 500 возможностей возникновения ложного сигнала. Для того чтобы снизить число ложных сигналов до значения меньше единицы, установим порог ограничения $y = 3$. В этом случае вероятность ложной тревоги, т. е. вероятность превышения порога отдельными выбросами шума, $P_{\text{л.т}} = P(z > 3) = 1,35 \cdot 10^{-3}$. Следовательно, $500 \cdot 1,35 \cdot 10^{-3} = 0,675 < 1$.

Таким образом, при пороге $y = 3$ ложные сигналы отсутствуют только в том случае, когда изображение содержит менее 10^3 элементов. Определим значение этого факта. Поскольку речь идет о *воспринимаемом* отношении сигнала к шуму, то под *элементом изображения* следует понимать размер минимального разрешаемого глазом объекта

Вероятность ложной тревоги $P_{л.т}$ и воспринимаемое глазом отношение сигнала к шуму ρ при различных порогах зрительного восприятия y и вероятностях правильного обнаружения $P_{обн}$

$y = L_0/\sigma$	$P_{л.т} = P(z > y)$	$\rho = L_{max}/\sigma$ при $P_{обн}$			
		0,8	0,9	0,95	0,99
1	0,16	1,8	2,3	2,6	3,3
2	0,023	2,8	3,3	3,6	4,3
3	$1,35 \cdot 10^{-3}$	3,8	4,3	4,6	5,3
4	$3 \cdot 10^{-5}$	4,8	5,3	5,6	6,3
5	$3 \cdot 10^{-7}$	5,8	6,3	6,6	7,3
6	$2 \cdot 10^{-9}$	6,8	7,3	7,6	8,3

(пятна), а не элементарного участка изображения, площадь которого равна площади корреляции шума.

При пороге восприятия $y = 3$ и вероятности правильного обнаружения $P_{обн} = 0,9$ из табл. 33 находим значение необходимого отношения сигнала к шуму $\rho = (c/w)_в = 4,3$. Зададимся отношением сигнала к шуму в точке $(c/w)_к = 1$, тогда $\sqrt{A_0/A_k} = \rho = 4,3$, следовательно, $A_0/A_k = 18,5$, что означает необходимость наличия 18,5 точек в пятне $N_{т/п}$ (в изображении объекта). При $P_{л.т} = 1,35 \cdot 10^{-3}$ общее число пятен в кадре $N_{п/к}$ может достигать $1/P_{л.т} = 1/(1,35 \cdot 10^{-3}) = 740$, а точек в кадре $N_{т/к} = 740 \cdot 18,5 = 13\,690$. Если соотношение сторон кадра равно 4 : 3, то число строк на высоту кадра $N_{с/к}$ будет $(3/4) \sqrt{13\,690} = 87,7$. Это изображение низкого качества. Повторим весь расчет для других значений y и результаты его приведем в табл. 34. Из таблицы следует, что для обеспечения удовлетворительного качества изображения целесообразно выбрать пороговое отношение сигнала к шуму не менее, чем 3,5. Это отношение обеспечивает возможность получения 232 строк на высоту кадра, но требует наличия около 23 точек на площади изображения объекта или 4—5 строк на объект. По-видимому, нельзя создавать систему, рассчитывая получить уверенное обнаружение, если число строк на объект менее 4.

В результате выражение для вероятности обнаружения объекта на фоне шумов на экране индикатора можно представить в виде

$$P_{обн} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(c/w)_в - 3,5} e^{-z^2/2} dz.$$

Из этого выражения, графически представленного на рис. 378, следует, что вероятность правильного обнаружения объекта простой формы на экране индикатора равна вероятности того, что воспринимаемое глазом отношение сигнала к шуму превышает пороговое значение 3,5 (иногда это значение принимается равным 3,2).

Вероятность опознавания — это вероятность отнесения обнаруженного объекта к узкому классу объектов, интересующих наблю-

Число строк на высоту кадра в зависимости от вероятности правильного обнаружения, вероятности ложной тревоги и порогового отношения сигнала к шуму при зрительном восприятии

Пороговое отношение сигнала к шуму y	Вероятность ложной тревоги $P_{л.т}$	Необходимое отношение сигнала к шуму $\rho = 1,3 + y$ при $P_{обн} = 90\%$	Число точек в пятне $N_{т/п} = A_0/A_K = \rho^2$ при $(c/w)_K = 1$	Максимальное число пятен (объектов) в кадре $N_{п/к} = 1/P_{л.т}$	Число точек в кадре $N_{т/к} = \rho^2/P_{л.т}$	Число строк на высоту кадра $N_{с.к} = 0,75\rho/\sqrt{P_{л.т}}$
3,0	$1,35 \cdot 10^{-3}$	4,3	18,5	740	13 690	87
3,1	$0,97 \cdot 10^{-3}$	4,4	19,4	1030	19 982	106
3,2	$0,68 \cdot 10^{-3}$	4,5	20,2	1470	29 694	129
3,3	$0,48 \cdot 10^{-3}$	4,6	21,2	2083	44 160	157
3,4	$0,34 \cdot 10^{-3}$	4,7	22,2	2941	64 996	191
3,5	$0,24 \cdot 10^{-3}$	4,8	23,0	4167	95 841	232

деталей, т. е. осуществляя опознавание, наблюдатель переходит от обнаружения к классификации. При рассмотрении вопросов опознавания обычно любой объект характеризуется критическим размером, определяемым размерами тех деталей, которые существенны для классификации. В наиболее простом случае критический размер равен минимальному габаритному размеру проекции изображения объекта на плоскость, перпендикулярную линии наблюдения. Общеизвестно, что наиболее важным параметром, характеризующим возможный уровень видения объекта, является разрешение различных штриховых мир, эквивалентных объекту. Полная ширина таких мир равна критическому размеру объекта, а длина соответствует размеру объекта в направлении, перпендикулярном критическому. Обширный материал по вопросам опознавания и классификации объектов приведен в работе [73]. Вероятность опознавания объектов по данным [73] определяется числом разрешаемых штрихов мира, эквивалентной объекту и имеющей ту же кажущуюся разность температур, что и объект. Для уверенного опознавания с вероятностью 90 % число разрешаемых штрихов на критический размер объекта составляет $4 \pm 0,8$. Это соответствует примерно 8—10 строкам на объект. Натурные исследования систем тепловидения по тем же данным показали, что для обеспечения 50 % вероятности опознавания необходимо иметь 4 ± 1 строку, укладывающихся в размер изображения объекта, а для обеспечения 90 % вероятности — 6 ± 1 строку.

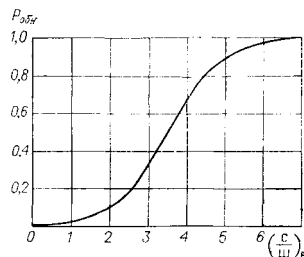


Рис. 378. Зависимость $P_{обн}$ объектов на экране индикатора от воспринимаемого глазом отношения $(c/w)_в$

ИКОНИКА. Определение, основные законы, первые результаты

Под *иконикой* понимают научное направление, предметом исследований в котором является *изображение* — специфическая форма передачи и хранения информации. Различные изображения издавна играли большую роль в повседневной жизни человека, науке и культуре. Неудивительно поэтому, что значительные усилия всегда были направлены на изучение изображений, способов их записи, закономерностей формирования и получения, а также на решение проблемы передачи изображений на большие расстояния. Так родились фотография, кинематография, телевидение и наиболее полная форма регистрации и последующего воспроизведения светового поля и содержащейся в нем информации о картине окружающего мира — *голография*. По мере развития науки к исследованию изображений и их материальных носителей подключались представители различных направлений, причем в наибольшей степени специалисты, занимающиеся оптикой, фотографией, телевидением, а также физиологи, изучающие зрительный анализатор и психофизиологическое воздействие света. Наконец, в ходе этих исследований настал момент, когда нужно было начать изучение изображений вне зависимости от того, как они были получены, имея в виду проникновение в их структуру и решение задачи извлечения максимальной информации.

Письменность, появившаяся позже изображений, с помощью которых еще первобытный человек обменивался информацией, имеет свою теоретическую надстройку — *лингвистику*. Соответствующей надстройкой по отношению к изображениям должно явиться новое научное направление — *иконика*. Она зародилась в ходе развития оптики и фотографии и решительно заявила о себе в наше время, когда уже окрепла *кибернетика* и стал обычным единый подход к различным по характеру процессам с выделением в качестве объекта изучения общего для них существенного звена. В кибернетике таким звеном является *управление*, в иконике — *изображение*, понимаемое как форма передачи или хранения заключающейся в нем информации научного, технического и эстетического содержания.

Иконика как самостоятельное научное направление возникла около 15 лет назад на стыке наук в целях выработки общей точки зрения на изображения, методы их анализа, преобразования, регистрации и т. п., объединив на этом поприще усилия ученых разных научных направлений, имеющих дело с изображениями. Иконика не подменяет и не поглощает конкретных дисциплин, изучающих процессы образования оптического, фотографического, телевизионного, рентгеновского и других видов изображений. Для иконики важны само изображение и его свойства. Конечно, занимаясь изображением и используя результаты исследований в различных областях, насыщающих иконнику конкретными способами получения изображений, иконика оказывает определенное влияние на эти исследования, тесно взаимодействуя с ними и стимулируя оптимизацию процесса получения изображений.

Общая концепция иконики позволяет глубже рассматривать ее основную категорию — изображение. Становление иконики связано с формированием новых взглядов на содержание, казалось бы, давно определившихся понятий и задач. Например, до недавнего времени изображению отводилась лишь роль либо объекта исследований, либо окончательного документа, фиксирующего результаты других исследований. В первом случае над изображением, полученным во время съемки, осуществляются операции (вторичная обработка), которые призваны выявить его свойства либо улучшить качество, устранить дефекты и т. п. Многочисленные примеры документирования результатов в форме изображения не нуждаются в дополнительных разъяснениях.

В рамках же иконики изображению придается более широкое толкование: ему отводится не только пассивная, но и активная роль — роль оператора, совершающего преобразования над другими изображениями. Простейшие преобразования могут осуществлять, например, обыкновенные плоские транспаранты — также изображения, определенным образом включенные в оптическую схему. Трактовка изображения как оператора позволяет надеяться, что его сущность может быть вскрыта в том числе и через свойства математических операторов, позволяющих рационально описать изображения и предложить методы их оптимального воспроизведения.

§ 24.1. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ИКОНИКИ

Первоначально иконика была определена только как «теория оптимальных систем воспроизведения изображений». Впоследствии под этим направлением понимали «комплекс методов и средств получения изображений, объединенных на единой методологической основе».

В 1976 г. В. Ф. Нестеруком было предложено определение иконики, наиболее полно отражающее ее специфику, принятое нами во всех дальнейших работах: *иконика — это научное направление, изучающее общие свойства изображений, определяющее цели и задачи их преобразований, обработки и воспроизведения на основе всех возможных методов и средств.*

К необходимости глубоко заняться иконикой нас привело, в частности, изучение картин, создаваемых за счет собственного теплового излучения тел, наблюдаемых с помощью приборов, преобразующих ИК-излучение в видимое, — тепловизоров. Как это ни странно, но именно в этой области исследования невидимого глазом излучения мы остро осознали огромную роль процесса зрительного восприятия, законы которого необходимо во всех деталях использовать при разработке тепловизионных систем. Характеристики этих систем могут считаться оптимальными только при условии, что преобразование ими невидимого излучения в видимое осуществляется с учетом его последующего восприятия человеком.

Фундамент иконики создавался в течение многих лет. Существенный вклад в эту область был внесен учеными ГОИ им. С. И. Вавилова. Особенно здесь следует отметить работы В. Ф. Нестерука, опублико-

ванные в периодической печати, главным образом в журналах «Оптико-механическая промышленность» и «Оптика и спектроскопия». Существенное значение имели также исследования Н. Н. Порфирьевой, Ю. В. Баталова, А. А. Гурова, В. Н. Кузмичева, Н. П. Морозовой и др. [48].

Результаты наших совместных с этими авторами работ по иконике получили одобрение организаторов и участников Международной конференции по оптике, фотонике и иконике (OPIEM — название, составленное из первых букв английских слов Optics, Photonics, Iconics, Engineering, Meeting), состоявшейся в 1979 г. в г. Страсбуре, Франция), а также ряда Всесоюзных конференций и совещаний.

Когда говорится об изображении, то чаще всего возникает образ того, что можно увидеть глазами человека. Интуитивно используются и критерии оценки качества изображений по их визуальному восприятию. Вместе с тем для получения изображений уже давно используется не только диапазон видимых глазом электромагнитных волн, но и инфракрасные (в тепловидении), рентгеновские и радиоволны. Во всех случаях при восприятии глазом информации, содержащейся в изображении, требуется визуализация невидимого изображения с учетом свойств зрительного анализатора. Общей теории визуализации в настоящее время не существует, хотя практически она применяется повсеместно. Создать такую теорию призвана иконика.

Иконика мыслится как теоретико-экспериментальное научное направление исследовательского и прикладного характера. Необходимость многочисленных экспериментов при исследованиях объясняется тем, что, какой бы заманчивой ни была та или иная обработка изображений по избранному оптимальным критериям, зрительное восприятие результата должно быть хорошим. Последнее же требует экспериментальной проверки и вынесения решения экспертизой. Эксперимент собственно и обеспечивает результат всей работы.

Окончательный перечень вопросов, которые следует относить к иконике, пока не был определен, и ясно, что они всегда будут переплетаться с вопросами, являющимися сферой деятельности и других наук. Тем не менее, в настоящее время крайне необходима правильная методологическая ориентация при проведении любых работ по иконике, что побуждает внести необходимые предложения относительно ее структуры. Структура иконики и перечень вопросов, которые следует к ней относить, в настоящее время находятся в стадии формирования, однако основные ее черты и круг решаемых ею задач были сформулированы М. М. Мирошниковым, В. Ф. Нестеруком и Н. Н. Порфирьевой еще в 1977 г. [86]. В несколько измененном виде она представлена на рис. 379. Кратко рассмотрим содержание отдельных разделов структуры иконики.

К первому разделу следует отнести общие теоретические и экспериментальные исследования, направленные на всестороннее изучение свойств изображений и их зрительного восприятия. Он в наибольшей степени охватывает теоретические вопросы иконики. Необходимо еще раз подчеркнуть, что желание видеть глазами хороший снимок после той или иной обработки изображений автоматически приводит

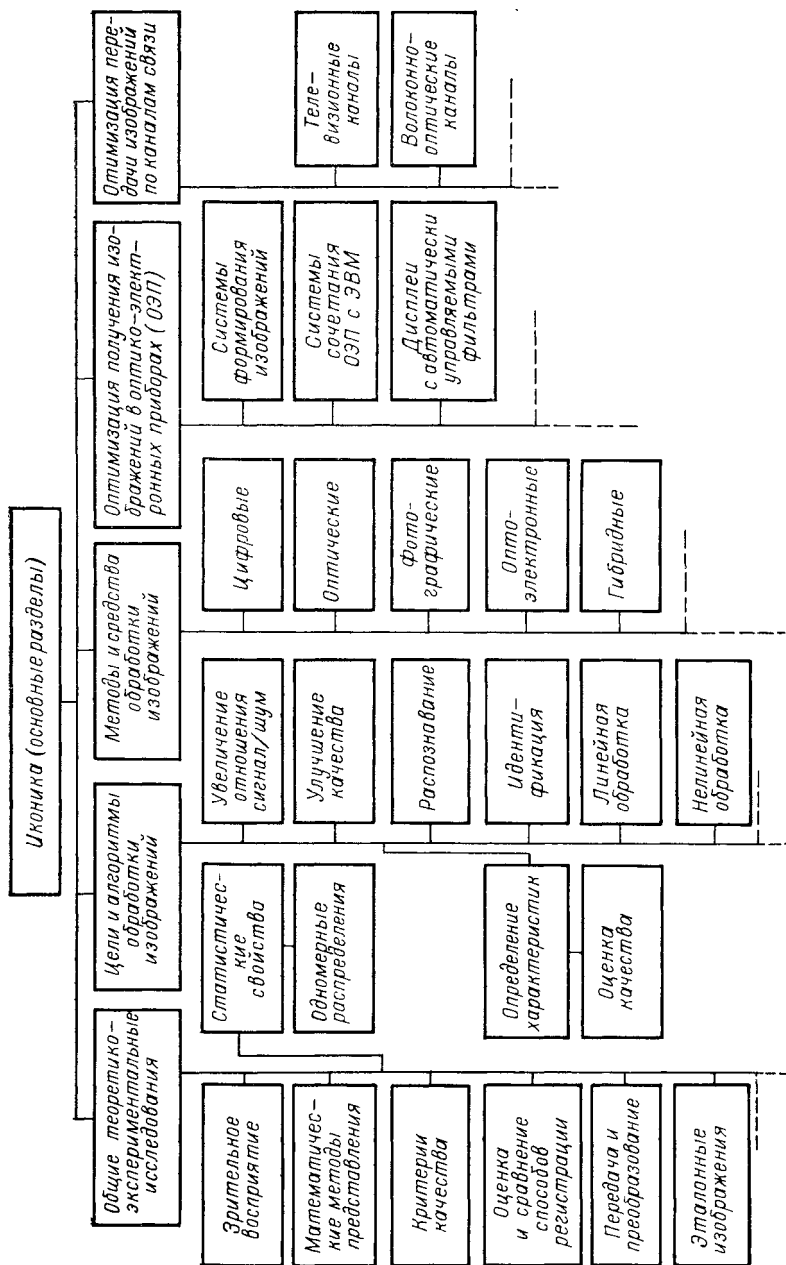


Рис. 379. Структура иконики

к необходимости большого объема экспериментов, в частности, на ЭВМ. Этим и оправдывается название раздела «теоретико-экспериментальный».

К настоящему моменту по теоретико-экспериментальным вопросам иконоики имеется обширная литература, хотя решение многих задач далеко от завершения.

Второй раздел иконоики включает в себя задачи определения целей обработки изображений, расчет алгоритмов и выбор рационального способа их реализации. Исторически сложилось так, что отдельные задачи иконоики решались в процессе исследования ряда проблем оптики, телевидения и т. д., причем до определенного времени не были осознаны общие закономерности обработки и передачи изображений различными системами. По существу одинаковые задачи решались различными методами и между ними не усматривалось общности. Такой этап развития вполне закономерен, ибо иконоика не могла бы зародиться на пустом месте. Однако указанное обстоятельство привело к тому, что классификация задач обработки изображений стала производиться по методу решения задач, а не по достигаемой цели. Это, конечно, временное положение, и в будущем задача обработки должна исходить из цели, а метод — из соображений затрачиваемого времени, экономических и других показателей. Реализация такой методологической установки приводит к необходимости включения в иконоику указанного раздела.

Третий раздел иконоики представляет собой методы и средства обработки изображений. Успешное решение задач двух предыдущих разделов связано с возможностями проведения трудоемких экспериментов, особенно по оценке результатов преобразований изображений, их визуальному восприятию и тем более по распознаванию мало-контрастных и малоразмерных объектов при массовой обработке. Достижение целей обработки изображений может осуществляться различными методами, определяемыми наличием технических средств, экономичностью и т. п. В настоящее время активно используются методы цифровой, оптической, оптоэлектронной, фотографической и гибридной обработок, что нашло отражение в литературе.

Имеются существенные достижения в реализации средств обработки. Освоен выпуск аппаратуры ввода и вывода изображений на ЭВМ, а также специализированных ЭВМ с набором программ. Имеются сведения о создании аналогичных оптических и оптоэлектронных систем.

Цифровая обработка выделена особо, так как она отличается большими возможностями в отношении универсальности. *Основным принципиальным преимуществом обработки изображений на цифровых ЭВМ является то, что к алгоритму обработки предъявляется лишь требование математической корректности.* Реализация же алгоритма на ЭВМ в отличие от любых других методов не зависит от природы физических процессов, сопровождающих обработку, а также от присущих характеру протекания этих процессов недостатков. Это обстоятельство, естественно, позволяет более эффективно использовать потенциальные возможности тех или иных способов обработки.

К четвертому разделу иконики — оптимизация получения изображений в оптико-электронных приборах (ОЭП) — относятся вопросы, связанные с разработкой современных оптико-электронных устройств, предназначенных для получения или формирования изображений в различных участках спектра излучений (например, в видимой, инфракрасной и т. д.) и разнообразных по форме. Последнее подразумевает включение сюда не только сюжетных, но и графических изображений, полученных на специальных приборах, например на спектроанализаторах.

Следует отметить, что здесь вовсе не имеется в виду включить в задачи иконики полный цикл создания того или иного прибора. Однако при разработке приборов должны учитываться и эффективно использоваться достижения иконики в области исследования изображений. Так, изучая тепловизионные изображения медицинских назначений, часто приходится подвергать их последующей обработке для выделения изотерм, подчеркивания контраста или с иной целью по какому-нибудь более сложному алгоритму. Число подобных операций, как правило, невелико или во всяком случае ограничено, и их осуществление можно предусмотреть непосредственно в самом приборе, используя уже апробированные алгоритмы. При этом изображение будет получено сразу в заданной форме. Число аналогичных примеров можно умножить, и даже трудно представить себе открывающиеся здесь возможности. В связи с этим в данной главе приведены лишь несколько задач, иллюстрирующих тематику этого раздела иконики.

В пятый раздел иконики включены вопросы оптимизации процессов передачи изображений по оптическим каналам и радиоканалам.

Основной задачей данного раздела следует считать выработку системного комплексного подхода при дистанционном получении изображений. Так, если при съемке оптическое изображение формируется объективами с аберрациями, то сигналы в канале связи представляют собой лишь искаженное изображение. Кроме того, при дистанционной передаче имеют место различного вида помехи в канале, дополнительно искажающие сигналы на выходе. Восстановление изображения осуществляется после надлежащей обработки принятых сигналов, которая должна предусматривать устранение искажений и максимальное подавление помех. Из вышеизложенного вытекают задачи целесообразного распределения допустимых искажений на каждом этапе передачи изображения и выбора оптимальных для системы в целом допусков при его формировании в оптическом канале, при передаче кодированных сигналов в канале связи, в точке приема, при обработке и окончательном восстановлении изображения. Это типичная задача системного подхода.

Очевидно, к данному разделу также могут быть отнесены проблемы получения высококачественных изображений в телевидении, создания оптической многоканальной связи и т. п.

Деления настоящего раздела на подробные тематические направления здесь не приводится. Это объясняется тем, что из-за многообразия входящих в него научных проблем, связанных с такими

дисциплинами, как телевидение, оптическая связь и т. д., выделение тематических направлений в рамках иконоки требует тщательного отбора соответствующих проблем внутри каждой из примыкающих дисциплин.

Краткий очерк об иконоке, ее основных разделах и задачах, а также о методах и средствах их решения позволяет, на наш взгляд, сделать вывод о наличии внутреннего единства этого научного направления. Иными словами, концепция иконоки, ее теория и методы составляют единое целое. Предложенная структура иконоки в будущем несомненно подвергнется уточнению.

§ 24.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ

Многoletний опыт исследования свойств изображений, количественной оценки показателей их качества, преобразования линейными и нелинейными операторами и рассмотрение других задач показывают, что наибольший успех в теории и постановке экспериментов достигается в том случае, если при решении проблемы эффективно используются существенные для нее закономерности зрительного восприятия. Их учет особенно важен, когда оценка и обработка информации в форме изображений осуществляются человеком. Чем полнее информация на изображениях согласована с ее зрительным восприятием, тем легче и точнее будет вынесено правильное решение.

Наиболее существенные для иконоки законы зрительного восприятия следующие: 1) закон контрастного восприятия света; 2) закон формирования уровня адаптации; 3) закон константности зрительного восприятия; 4) закон зрительного восприятия сюжетного изображения; 5) закон экстремальности зрительного восприятия информации (света или изображения).

Проявление каждого из перечисленных законов известно из физиологии зрения, психологии восприятия и повседневной практики использования изображений. Однако ранее они не были облечены в математическую форму и, следовательно, не представлялось возможности установить их общую взаимосвязь и построить на этой основе теорию изучения изображений.

Закон контрастного восприятия света

Многочисленные экспериментальные данные показывают, что на всех уровнях зрительной системы человека восприятие света хорошо описывается S -образной зависимостью сигнала реакции U от логарифма внешнего светового воздействия L (рис. 380). Такой характер зависимости не может удовлетворительно аппроксимироваться известным законом Вебера—Фехнера, что неоднократно подтверждалось в исследованиях по физиологии зрения.

В работе В. Ф. Нестерука и Н. Н. Порфирьевой, опубликованной в 1970 г. в журнале «Оптика и спектроскопия» [97], предлагается формулировка *дифференциального контрастного закона восприятия света*, суть которого состоит в следующем. Пусть зрительная система сначала адаптирована к значению яркости L_j , а затем яркость

принимает произвольное значение L_i . Тогда в зрительной системе возникает сигнал реакции U_i , пропорциональный обобщенному контрасту K_{ij} ,

$$U_i = U_j + U^* K_{ij},$$

где U_j — ордината центра S-образной кривой; U^* — половина расстояния между асимптотами S-образной кривой.

На рис. 380 показаны U^* , U_i , U_j и соответствующие им величины L_i , L_j .

Определить обобщенный контраст, нормированным сигналом реакции, можно исходя из следующих рассуждений.

Если физиологический объект находится в состоянии адаптации под воздействием стимула L_j и переходит в другое состояние под воздействием стимула L_i , то в силу принципа причинности новое состояние будет зависеть от предыдущего и, следовательно, производную нормированного сигнала реакции u_{ij} , т. е. du_{ij}/dx , где $x = \ln(L_i/L_j)$, нужно отыскивать как функцию самой величины u_{ij} .

В результате анализа природы зрительного восприятия информации (см. § 24.2) можно получить дифференциальное уравнение

$$du_{ij}/dx = \gamma(1 - u_{ij}^2),$$

где γ — параметр, характеризующий физиологический уровень восприятия реакции (на сетчатке, в коре головного мозга, на уровне психофизиологической реакции), которое указывает, что *скорость нарастания нормированного сигнала реакции u_{ij} уменьшается пропорционально его квадрату, т. е. имеет место процесс с квадратичным торможением.*

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$u_{ij} = (U_i - U_j)/U^* := (L_i^{2\gamma} - L_j^{2\gamma})/(L_i^{2\gamma} + L_j^{2\gamma}),$$

в чем легко можно убедиться, вычислив du_{ij}/dL_i и имея в виду, что $dx/dL_i = 1/L_i$.

Таким образом, сигнал реакции по отношению к заданному уровню адаптации пропорционален обобщенному контрасту внешних световых воздействий $K_{ij} = u_{ij} = (L_i^{2\gamma} - L_j^{2\gamma})/(L_i^{2\gamma} + L_j^{2\gamma})$, т. е.

$$U_i = U_j + U^* (L_i^{2\gamma} - L_j^{2\gamma})/(L_i^{2\gamma} + L_j^{2\gamma}).$$

Для ретинограмм человека, которые определяются путем измерения вызванных световым воздействием потенциалов сетчатки, экспериментальные кривые соответствуют $2\gamma = 0,78$, т. е. $\gamma = 0,39$. При $\gamma = 0,5$ формула обобщенного контраста имеет наиболее простой вид.

$$K_{ij} = (L_i - L_j)/(L_i + L_j),$$

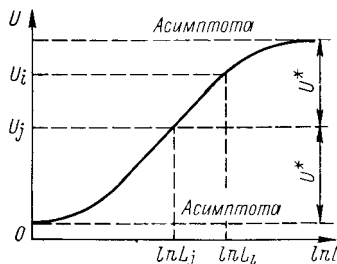


Рис. 380. S-образная зависимость сигнала реакции U от логарифма внешнего светового воздействия L

совпадающий с одним из принятых выражений для контраста, вошедших в Международный светотехнический словарь (термин 25—265) [80], где контраст понимается как восприятие качественного или количественного различия двух частей поля зрения, видимых одновременно или последовательно.

Другое используемое выражение для контраста

$$K_{ij} = (L_i - L_j)/L_j$$

не удовлетворяет условию равноправности элементов наблюдаемого яркостного поля, поскольку контраст в этом случае зависит от условия $L_i > L_j$ или $L_j > L_i$.

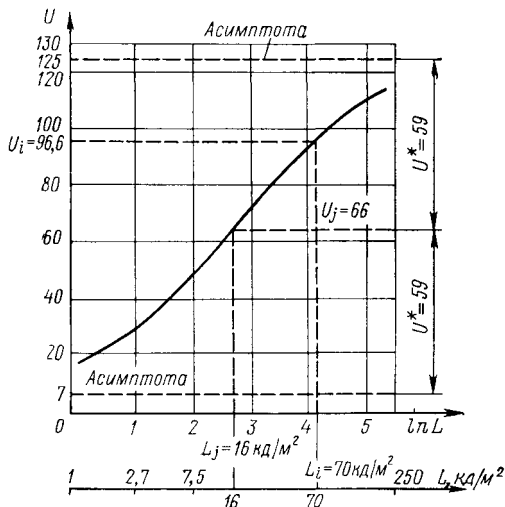


Рис. 381. Зависимость сигнала реакции U от яркости L и $\ln L$ для электроретинограммы человека при уровне адаптации $L_j = 16$ кд/м², $2\gamma = 0,78$, $U^* = 59$ (отн. ед.)

$$U_i = U_j + U^* \frac{L_i^{2\gamma} - L_j^{2\gamma}}{L_i^{2\gamma} + L_j^{2\gamma}} = 66 + 59 \frac{L_i^{0,78} - 8,6}{L_i^{0,78} + 8,6},$$

если $L_i \rightarrow 0$, то $U_i \rightarrow U_j - U^* = 7$; если $L_i \rightarrow \infty$, то $U_i \rightarrow U_j + U^* = 125$; если $L_i = L_j = 16$ кд/м², то $U_i = U_j = 66$; если $L_i = 70$ кд/м², то $U_i = 96,6$.

Разложение функции K_{ij} в ряд по степеням $x = \ln(L_i/L_j)$ показывает, что закон контрастного восприятия света включает в себя закон Вебера—Фехнера в качестве первого приближения:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \gamma \ln \frac{L_i}{L_j} - \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma}{2} \ln \frac{L_i}{L_j} \right)^3 + \dots;$$

$$K_{ij} \approx \frac{\gamma}{2} \ln \frac{L_i}{L_j}.$$

На рис. 381 представлена зависимость сигнала реакции U в относительных единицах от L и $\ln L$ для электроретинограммы человека. Подставляя численные значения, имеем

Закон формирования уровня адаптации

В процессе восприятия сюжетного изображения (картины) зрительная система человека осуществляет сканирование, благодаря которому на ее центральные и периферические отделы воздействует световой поток от всех элементов изображения, создавая на сетчатке глаза среднюю освещенность, пропорциональную средней яркости изображения L_0 .

Вычислить L_0 можно следующим образом (рис. 382). Абстрагируемся от смыслового содержания изображения и будем рассматривать просто набор яркостей его отдельных элементов (гриделей — элементов сетки или матрицы). Если считать их случайными и независимыми, то исчерпывающей характеристикой изображения является функция распределения или плотность распределения вероятности. В случае дискретных выборок, получаемых при матричном представлении изображения (МПИ), можно

построить гистограмму, отложив по оси абсцисс значения яркости отдельных элементов матрицы L от L_{\min} до L_{\max} с шагом

$$\Delta L = (L_{\max} - L_{\min})/m,$$

где m — общее число интервалов округления (разрядов) или число ячеек гистограммы на оси абсцисс. По оси ординат отложим *относи-*

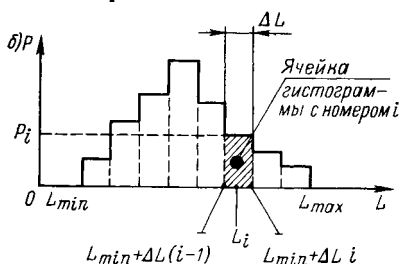
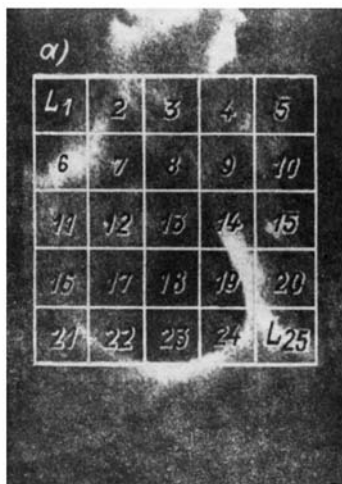


Рис. 382. Матричное представление изображения (а) и гистограмма распределения яркости его элементов (б)

тельную частоту (частость) или *выборочную вероятность* попадания значений L в ячейку гистограммы с номером i $P_i = N_i/N$, где N — общее число элементов матрицы (на рис. 382, а $N = 25$); N_i — *абсолютная частота*, т. е. число элементов матрицы, значения яркости в которых находятся в интервале от $L_{\min} + \Delta L (i - 1)$ до $L_{\min} + \Delta L i$ и, следовательно, попадают в ячейку гистограммы с номером i . Общая площадь гистограммы равна сумме площадей составляющих ее прямоугольников: $\sum_{i=1}^m P_i \Delta L = \Delta L \sum_{i=1}^m N_i/N = \Delta L$, так как $\sum_{i=1}^m N_i/N =$

$= 1$. Если по оси ординат при построении гистограммы отложить значение *относительной плотности* $P'_i = P_i/(\Delta L) = N_i/(N \Delta L)$, то общая площадь гистограммы равна единице, и в этом случае гистограмма является аналогом графика плотности вероятности теоретического распределения $p(L)$. Статистическим аналогом функции распределения $F(L)$ является *накопленная частость*, которую легко вычислить для вариационного и статистического ряда по обычным правилам (см., например, Г. Г. Абезгауз и др. Справочник по вероят-

ностным расчетам, Воениздат, 1970 [131]). Среднее значение яркости L_0 , являющееся функцией яркости отдельных элементов матрицы изображения $L_0 (L_1, L_2, L_3, \dots, L_N)$, определяется начальным моментом первого порядка или математическим ожиданием, равным

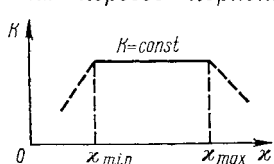


Рис. 383. Явление константности при зрительном восприятии контраста

$\sum_{i=1}^m P_i L_i$, где значение L_i соответствует середине ячейки гистограммы (разряда) с номером i и приписывается всем значениям яркости, попавшим в эту ячейку, т. е.

$$\begin{aligned} L_i &= [L_{\min} + \Delta L (i - 1) + L_{\min} + \Delta L i] / 2 = \\ &= L_{\min} + \Delta L (i - 0,5). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$L_0(L_1, L_2, L_3, \dots, L_N) = \sum_{i=1}^m P_i L_i.$$

Очевидно, что L_0 является однородной функцией первой степени набора значений $L_1, L_2, L_3, \dots, L_N$, а это значит, что для любого $\kappa > 0$ имеет место тождество

$$L_0(\kappa L_1, \kappa L_2, \kappa L_3, \dots, \kappa L_N) = \kappa L_0(L_1, L_2, L_3, \dots, L_N).$$

Таким образом, имеет место эффект увеличения (усиления) яркости *каждого* элемента изображения (например, яркости изображения объекта) в κ раз за счет увеличения *средней* яркости (освещенности) изображения.

Закон константности зрительного восприятия

В физиологии зрения под константностью зрительного восприятия понимается тенденция воспринимать объект наблюдения устойчивым и неизменным, несмотря на разнообразие внешних условий. Следовательно, *константность восприятия яркости и контраста изображения — это тенденция воспринимать их постоянными, несмотря на существенные изменения уровня адаптации — средней яркости или освещенности.*

Если $K(L_1, L_2, L_3, \dots, L_N, L_0)$ — функция, определяющая контраст сюжетного изображения, подвергнутого дискретизации в виде МПИ, то из закона константности следует, что

$$K(\kappa L_1, \kappa L_2, \kappa L_3, \dots, \kappa L_N, \kappa L_0) = K(L_1, L_2, L_3, \dots, L_N, L_0),$$

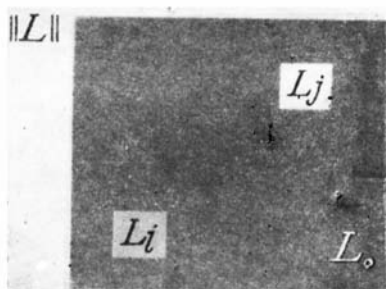


Рис. 384. Матрица $\|L\|$ элементарного двухэлементного изображения с уровнем адаптации L_0 (κ выводу закона зрительного восприятия сюжетного изображения)

т. е. контраст представляет собой однородную функцию нулевой степени. Для таких функций справедливо выражение

$$K(L_1, L_2, L_3, \dots, L_N, L_0) = K_1(L_1/L_0, L_2/L_0, L_3/L_0, \dots, L_N/L_0),$$

откуда следует, что всякая однородная функция нулевой степени представляется в виде функции (другой) отношений всех аргументов к одному из них (в данном случае L_0).

Таким образом, при зрительном восприятии изображения производится как бы отсчет значений яркостей отдельных элементов по отношению к L_0 — уровню адаптации. Любая величина κL_i по отношению к L_i является усиленной (при $\kappa > 1$) или ослабленной (при $\kappa < 1$). При этом контраст в определенных пределах изменения κ не изменяется (рис. 383).

Закон зрительного восприятия сюжетного изображения

Найдем закон восприятия контраста элементарного (двухэлементного) изображения при уровне адаптации L_0 (рис. 384). Уравнение закона константности для этого случая имеет вид

$$K(\kappa L_i, \kappa L_j, \kappa L_0) = K_1(L_i/L_0, L_j/L_0).$$

Каждая из пар набора значений L_i, L_j, L_0 удовлетворяет закону контрастного восприятия света, т. е. обобщенные контрасты (нормированные сигналы реакции) равны

$$K_{i0} = \frac{L_i^{2\gamma} - L_0^{2\gamma}}{L_i^{2\gamma} + L_0^{2\gamma}}; \quad K_{j0} = \frac{L_j^{2\gamma} - L_0^{2\gamma}}{L_j^{2\gamma} + L_0^{2\gamma}}.$$

Воспринимаемый глазом контраст в процессе осмотра такого двухэлементного изображения можно найти по правилу сложения контрастов

$$K_{ij0} = (K_{i0} + K_{j0}) / (1 + K_{i0}K_{j0})$$

Следовательно,

$$K_{ij0} = \frac{(L_i L_j)^{2\gamma} - (L_0^{2\gamma})^2}{(L_i L_j)^{2\gamma} + (L_0^{2\gamma})^2} = \frac{[(L_i/L_0)(L_j/L_0)]^{2\gamma} - 1}{[(L_i/L_0)(L_j/L_0)]^{2\gamma} + 1}.$$

Если $2\gamma = 1$, то

$$K_{ij0} = \frac{L_i L_j - L_0^2}{L_i L_j + L_0^2} = \frac{(L_i/L_0)(L_j/L_0) - 1}{(L_i/L_0)(L_j/L_0) + 1}.$$

Закон восприятия контраста двухэлементного изображения обладает многими замечательными свойствами, из которых отметим одно: формула закона симметрична относительно i и j — $K_{ij0} = K_{ji0}$, т. е. знак контраста не изменяется при перестановке в пространстве элементов с яркостями L_i и L_j . Отсюда следует, что зрительный механизм пространственной ориентации не участвует в процессе восприятия контраста.

Для вычисления контраста сложного сюжетного изображения необходимо рассматривать всю совокупность пар точек L_i и L_j или соответствующих контрастов K_{i0} и K_{j0} . В результате может быть

вычислен набор величин K_{ij0} и построена гистограмма плотности распределения $p(K_{ij0})$, определяющая вероятность того, что данное значение контраста K_{ij0} попадает в некоторый заранее определенный интервал контрастов. Очевидно, что набор значений K_{ij0} образует матрицу, состоящую из N^2 элементов.

Выбирая в качестве числовой оценки контрастности сюжетного изображения K_c математическое ожидание, по гистограмме плотности распределения можно найти

$$K_c = \int_{-1}^{+1} |K_{ij0}| p(K_{ij0}) dK_{ij0}.$$

Расчет гистограммы $p(K_{ij0})$ и контраста K_c требует значительного объема вычислений, т. е. удержания в памяти ЭВМ большого числа данных.

Для упрощения расчета можно выделить в изображении области *одинаковой яркости — эквиденситные поля* — и вычислить их контрасты по отношению к уровню адаптации L_0 . В этом случае все эквиденситные точки (элементы МПИ) следует собрать вместе и положить, что $L_i = L_j = L$; $K_{i0} = K_{j0}$; $K_{ij0} = K_{ii0}$. При этом вычисляется

$$K_{ii0} = K_{i0} = (L^2 - L_0^2)/(L^2 + L_0^2),$$

а для расчета контраста сюжетного изображения используется только гистограмма $p(L_i) = p(L)$, где L изменяется от 0 до ∞ .

Этот контраст сюжетного изображения называется эквиденситным и обозначается $K_{c.э}$. Он равен

$$K_{c.э} = \int_0^{\infty} |(L^2 - L_0^2)/(L^2 + L_0^2)| p(L) dL.$$

На языке матричного представления совокупности контрастов изображения вычисление $K_{c.э}$ означает усреднение лишь по главной диагонали матрицы.

Закон экстремальности зрительного восприятия информации (света или изображения)

Процесс зрительного восприятия информации представляет собой случайный процесс, поскольку возбуждение светом активных нейронов происходит с вероятностью $P(x)$, где $x = \ln(L/L_0)$. Это означает, что число активных нейронов, т. е. нейронов, находящихся в состоянии возбуждения и участвующих в формировании и передаче сигнала реакции, имеет случайное значение, распределение которого можно считать биномиальным, так как нейрон находится лишь в двух состояниях: невозбужденном — статическом и возбужденном — динамическом.

Исходя из этих известных в физиологии положений, В. Ф. Несте-рук и Н. Н. Порфирьева пришли к фундаментальному выводу, что *закон контрастного восприятия света есть экстремаль вариационной задачи на максимум информации, получаемой зрительной системой*

о внешнем сигнале (см. «Оптика и спектроскопия», т. 44, вып. 4, 1978) [96]. Рассмотрим ход их рассуждений.

Пусть случайное число возбужденных (активных) нейронов равно n , а его среднее значение $\bar{n} = P(x) N$, где N — общее число нейронов на данном уровне зрительной системы, а $P(x)$ — вероятность их возбуждения.

Случайный сигнал возбуждения $V(x)$ линейно зависит от числа активных нейронов

$$V(x) = An + A_0,$$

где A и A_0 — постоянные коэффициенты.

Математическое ожидание и дисперсия сигнала возбуждения соответственно равны:

$$\overline{V(x)} = ANP(x) + A_0;$$

$$\overline{V^2(x)} = A^2 NP(x) [1 - P(x)].$$

Сигнал реакции равен среднему значению сигнала возбуждения:

$$U(x) = ANP(x) + A_0.$$

Вычислить постоянные A и A_0 можно следующим образом.

Пусть $P(x) = 1$, тогда $U(x) = U_{\max} = AN + A_0$; если же $P(x) = 0$, то $U(x) = U_{\min} = A_0$. Сопоставляя эти величины с параметрами S-образной кривой на рис. 380, найдем:

$$U_0 = (U_{\max} + U_{\min})/2 = AN/2 + A_0;$$

$$U^* = (U_{\max} - U_{\min})/2 = AN/2.$$

Следовательно, нормированный сигнал реакции

$$u(x) = \frac{U(x) - U_0}{U^*} = \frac{ANP(x) + A_0 - AN/2 - A_0}{(AN/2)} = 2P(x) - 1,$$

т. е. сигнал реакции $u(x)$ полностью определяется вероятностью возбуждения нейрона $P(x)$.

С другой стороны, вся информация, получаемая зрительной системой о световом сигнале $x = \ln(L/L_0)$, содержится в сигнале реакции $u(x)$ и световой сигнал x можно рассматривать как случайную величину, которая с определенной вероятностью вызывает сигнал реакции $u(x)$. В этом смысле выражение $P(x) = [u(x) + 1]/2$ представляет собой функцию распределения $F(x)$ вероятности случайной величины x :

$$P(x) = F(x) = [1 + u(x)]/2.$$

Для того чтобы определить, при каком законе распределения $F(x) = F^*(x)$ информация о световом сигнале x , содержащаяся в сигнале реакции $u(x)$, будет максимальной, нужно решить вариационную задачу на максимум информации, измеряемой энтропией по Шеннону

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} F'(x) \ln F'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx,$$

где плотность вероятности $p(x) = F'(x) = dF(x)/dx$.

Если предположить, что суммарная во всем диапазоне внешних воздействий дисперсия сигнала возбуждения равна заданному значению и конечна

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{V^2(x)} dx = \text{const} < \infty,$$

т. е.

$$A^2 N \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) [1 - F(x)] dx = A^2 N Q = \text{const} < \infty,$$

где

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) [1 - F(x)] dx,$$

и потребовать нормировки для функции распределения плотности вероятности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1,$$

где

$$p(x) = F'(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{u(x) + 1}{2} \right] = \frac{u'(x)}{2},$$

то вариационная задача может быть сформулирована в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{2} \ln \frac{u'(x)}{2} dx = \text{extr};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{2} dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{u(x) + 1}{2} \right] \left[1 - \frac{u(x) + 1}{2} \right] dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - u^2(x)] dx = Q.$$

Решая эту задачу, получим дифференциальное уравнение Эйлера

$$u'(x) = [1/(2Q)] [1 - u^2(x)] = \gamma [1 - u^2(x)],$$

где

$$\gamma = [1/(2Q)] = A^2 N / \left[2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{V^2(x)} dx \right].$$

Уравнение Эйлера совпадает с законом зрительного восприятия в дифференциальной форме. При интегрировании уравнения получаем выражение для нормированного сигнала реакции, соответствующего максимуму информации о световом сигнале,

$$u_{\max}(L) = (L^{2\gamma} - L_0^{2\gamma}) / (L^{2\gamma} + L_0^{2\gamma}),$$

где γ — параметр, значение которого обратно пропорционально суммарной дисперсии случайного сигнала возбуждения.

Совпадение полученного выражения с формулой закона контрастного восприятия света, выведенной на основании анализа экспериментальных данных, означает, что *обработка светового сигнала зрительной системой по алгоритму обобщенного контраста обеспечивает максимум получаемой о нем информации*. Иначе говоря, *восприятие света и изображения происходит при максимальном количестве информации по Шеннону*.

Оптимальное распределение можно найти из соотношения

$$2F^*(L) - 1 = u_{\max}(L) = (L^{2\gamma} - L_0^{2\gamma}) / (L^{2\gamma} + L_0^{2\gamma}),$$

откуда $F^*(L) = L^{2\gamma} / (L^{2\gamma} + L_0^{2\gamma})$ при $L \geq 0$.

В реальных условиях восприятия излучения объектов и их изображений диапазон яркостей ограничен значениями L_{\min} , L_{\max} и, следовательно, значения $x = \ln(L/L_0)$ будут ограничены диапазоном x_{\min} , x_{\max} . Более того, в силу ограниченности мгновенных значений яркости, автоматически будет ограничена и их дисперсия. Если не требовать, чтобы она была равна *заданному значению*, то соотношение

$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{V^2(x)} dx = \text{const} < \infty$ можно исключить из условий решения вариационной задачи, и тогда остается лишь обязательным условие нормировки, принимающее вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{2} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{u'(x)}{2} dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x) dx = 1.$$

В этом случае, как было показано К. Шенноном [155], максимум энтропии обеспечивается равномерным распределением для $x = \ln(L/L_0)$. Производя пересчет на яркость, получаем достаточное экстремальное распределение в виде

$$F^*(L) = \frac{\ln(L/L_{\min})}{\ln(L_{\max}/L_{\min})}$$

или

$$p^*(L) = \frac{dF^*(L)}{dL} = \frac{1}{L \ln(L_{\max}/L_{\min})}.$$

Это распределение можно назвать *логарифмически равномерным* или *гиперболическим* (по виду плотности распределения).

§ 24.3. ИКОНИКА И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Общий алгоритм обработки изображений

Понятие обработки оптического изображения в иконике рассматривается с двух взаимно дополняющих друг друга сторон: с одной стороны, изучение свойств изображений и объективная оценка их характеристик (качества), с другой — преобразование изображений в соответствии с поставленными целями обработки. Обработка осуществляется по следующему общему алгоритму: ввод исходного

изображения, получение его характеристик, преобразование изображения, оценка его характеристик, объективное сравнение исходного и преобразованного изображений на основе сравнения их характеристик, визуальное сравнение и оценка качества изображения человеком (рис. 385).

Остановимся сначала на звеньях этого алгоритма, а затем на методах их реализации. Пусть L — исходное сюжетное черно-белое изображение (фотография, термограмма, рентгенограмма и т. п.), на котором отмечены два элемента с яркостями L_i и L_j . Всего элементов $N = n \times n$.

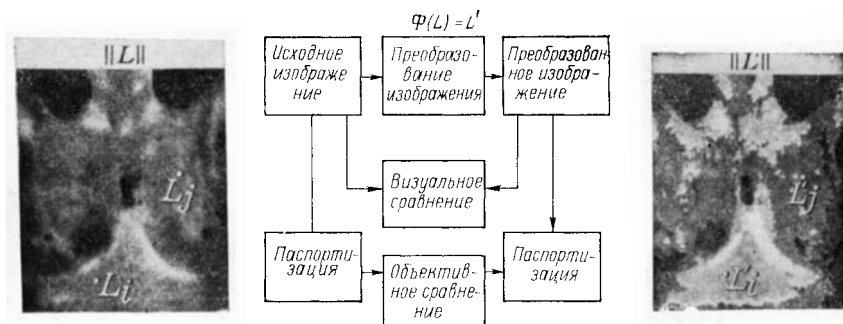


Рис. 385. Структурная схема обработки изображений

Процедура обработки, изображенная на схеме (рис. 385), состоит в том, что сначала исходное изображение L подвергается «вычислительной» обработке для получения гистограммы, функции передачи модуляции, других характеристик и числовых параметров качества. Этим оно «паспортизуется». Затем осуществляется обработка изображения оператором $\Phi(L) = L'$ для получения нового более качественного изображения или подчеркивания тех или иных деталей. Оно паспортизуется тем же порядком.

Описанный выше и представленный на схеме принцип обработки изображений имеет многоплановый характер, требующий для своей реализации одновременного привлечения результатов ряда разделов иконики. Самое главное состоит в том, что иконика открывает возможности осуществить всю процедуру обработки с единых позиций, на основе ее самых общих законов, учитывающих зрительное восприятие объекта.

Оценка качества (паспортизация) изображения

Вопрос о качестве изображений издавна является одним из наиболее дискуссионных. Попытка определить качество оптического изображения аналогично тому, как это делается при оценке качества электрических и акустических сигналов, т. е. по количеству содержащейся в нем информации, не всегда приводит к желаемым результатам, по-видимому, главным образом в связи с психофизиологическим характером восприятия изображения. По этому поводу

в книге «Структура оптического изображения» известных французских ученых-оптиков А. Марешаля и М. Франсона [77] сказано: «Теория информации не в состоянии объяснить, почему несколько штрихов карандаша в руках искусного художника создают однозначное представление о каком-либо объекте, об известном животном и каково при этом количество информации. Оно, очевидно, ниже максимальной величины, которую мы могли бы подсчитать (поскольку имеет место избыточность кода), а с другой стороны, априори непонятна необходимость введения понятия шума».

Наиболее широко распространено определение качества изображения, основанное на его идентификации объекту: *изображение тем более качественно, чем более оно подобно объекту*. В соответствии с этим определением значительное число работ по качеству изображений посвящено изучению различий между объектом и изображением.

Между объектом и изображением, создаваемым линейной оптической системой, существует соотношение свертки, с учетом которого распределение освещенности в изображении $E(x, y)$ связано с распределением яркости в объекте $L(x, y)$ и функцией рассеяния объектива $h(x, y)$ известной формулой

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A L(x, y) \otimes h(x, y)$$

или

$$E(x, y) = \pi T_0 \sin^2 \sigma'_A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} L(x_1, y_1) h(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1.$$

По этой формуле можно, казалось бы, всегда найти объект по его изображению, если известна функция рассеяния (аппаратная функция). Однако здесь существуют непреодолимые препятствия, на которые указал Г. Г. Слюсарев в своем докладе на 22-х чтениях им. Д. С. Рождественского «О возможном и невозможном в оптике» [125]. Они заключаются в том, что сложность выражений для функций $E(x, y)$ и $h(x, y)$ не позволяет найти простые правила, указывающие, в каких случаях определенному $E(x, y)$ соответствует одно единственное распределение $L(x, y)$. Кроме того, если распределение $L(x, y)$ характеризуется спектром пространственных частот, диапазон которых превышает известный предел, его вычисление становится принципиально невозможным, так как число решений интегрального уравнения в этом случае бесконечно велико. Это явление, впервые открытое Аббе для периодических когерентно освещенных структур, было затем распространено на случай любого освещения. Известен парадокс бесконечной разрешающей способности системы, реализуемой при восстановлении изображения двух одинаковых точечных некогерентных источников света (звезды Релея). Здесь объект может быть восстановлен единственным образом при любом расстоянии между точками путем соответствующей обработки результатов измерения, поскольку заранее известна его структура (две одинаковые точки), что налагает весьма существенное (и незаконное с точки зрения общей теории) ограничение. Естественный предел разрешения для звезд Релея определяется уровнем шума, а дискретный характер

света устанавливает абсолютный минимум информации, заключенной в изображении с заранее неизвестной структурой.

Ограниченные рамки книги не позволяют более подробно останавливаться на общих вопросах качества изображений. Нет сомнения лишь в том, что целеустремленная обработка любого изображения может быть проведена только при условии достаточно полного представления об исходных характеристиках изображения, которые в целом определяют его качество. Получить такое представление, как

правило, возможно лишь при проведении над изображением ряда экспериментов, так как обычно анализируемые изображения никак не «паспортизуются». При этом нужно иметь соответствующие математические выражения оценок, алгоритмизировать их и

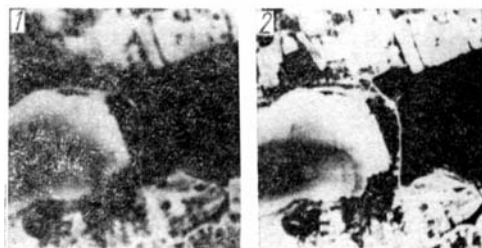
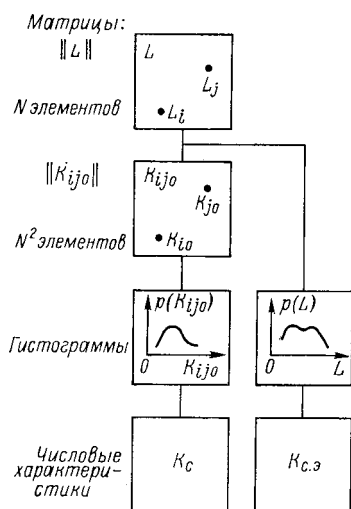


Рис. 386. Паспортизация и оценка контраста сюжетного изображения

реализовать с помощью вычислительной техники, т. е. произвести специфическую обработку изображения. К настоящему времени полностью завершена разработка количественной оценки контраста сюжетных изображений, являющаяся их важнейшей характеристикой. Количественная оценка контраста сюжетных изображений построена на использовании двух положений. Первое основывается на оценке контрастов отдельных элементов изображения. Второе — на законе восприятия контраста элементарного двухэлементного изображения. Контрастность является внутренним свойством изображения, для численного определения которого необходимо знание одномерных статистических характеристик — гистограмм контрастов или яркостей.

Согласно изложенному (§ 24.2), в качестве числовой оценки контраста выбирается математическое ожидание, а на практике — его оценка по гистограмме $p(K_{ij0})$, т. е. величина K_c .

Для сокращения времени и объема вычислений можно использовать методику вычисления среднего эквидиситных полей по отношению к уровню адаптации, расчет контраста которых дается формулой для $K_{c.э}$.

Принципиальное отличие методов расчета контраста по формулам для K_c и $K_{c.э}$ в том, что в них используются различные гистограммы: $p(K_{ij0})$ и $p(L)$. Формула для $K_{c.э}$ была принята за основу, и по ней были рассчитаны значения контраста большого числа различных изображений и их преобразований. В качестве примера можно привести результаты расчета контраста термограмм аэро съемки со значениями $K_{c.э} = 0,09$ и $K_{c.э} = 0,45$ (1 и 2 на рис. 386).

Линейные преобразования изображений

Преобразование изображений всегда осуществляется для достижения одной или нескольких определенных целей. Для большинства изображений это — прежде всего улучшение их качества, обеспечивающее максимальное подобие изображения объекту. Могут быть

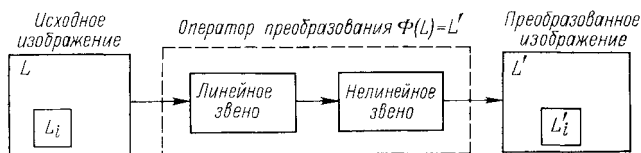


Рис. 387. Структура алгоритма обработки изображения

поставлены и другие задачи, особенно в связи с разработкой автоматизированных устройств распознавания аномалий, идентификации и т. п.

Построение операторов преобразования осуществляется на основе различных принципов: оптимальности зрительного восприятия, получения заранее заданной гистограммы яркостей, представления деталей изображения в полном динамическом диапазоне, выделения эквиденситных полей и т. д.

Общий алгоритм обработки при преобразовании изображений с помощью оператора $\Phi(L) = L'$ включает в себя ряд последовательных линейных и нелинейных звеньев (рис. 387). Фактически любой нелинейной операции всегда сопутствует линейная из-за конечности считывающих апертур, дефокусировки и т. п. Поэтому в теоретическом отношении целесообразно изучение линейной обработки отдельно от нелинейной. Кроме того, линейная обработка может быть реализована самостоятельно, без нелинейных элементов, поэтому ее выделение в виде отдельного блока на рис. 387 вполне закономерно.

Собственно линейные преобразования были впервые применены для различных целей обработки изображений при наличии шумов в первую очередь как фильтры нижних частот. Они являются оптимальными по критерию минимума среднеквадратической ошибки, если шумы гауссовские.

Оператор любого конкретного линейного преобразования выражается в виде свертки, преобразующей изображение по алгоритму (рис. 388, а)

$$L'_i = \sum_{j=1}^N h(i-j) L_j.$$

При этом множество функций рассеяния или импульсных функций h (ядра оператора) бесконечно. Следовательно, класс линейных преобразований содержит бесконечное число вариантов реализации по виду ядра и по значению его параметров.

Если допустимо пренебречь шумами, действие линейного фильтра на исходное изображение выражается в подавлении или подчеркивании низких или высоких частот и режекции. При наличии шумов основной задачей является фильтрация.

Для анализа эффекта действия линейного фильтра на детали изображения или на подавление шумов, а также для его выбора нужно знать двумерные пространственно-частотные спектры изображений, шумов и фильтров. Такие спектры трудно получать и расшифровывать. Поэтому обычно ограничиваются преобразо-

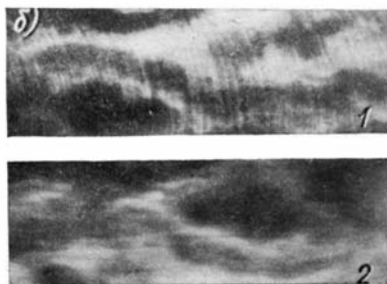
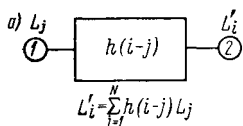


Рис. 388. Линейное преобразование изображения: а — схема преобразования; б — типичный пример линейного преобразования — фильтрация строчной структуры изображения; 1 — исходное изображение; 2 — преобразованное изображение

ванием стандартных изображений в виде периодических структур (мир) либо фильтрацией «фиксированных» искажений сюжетного изображения, вызванных, например, строчной структурой, вследствие сканирования (рис. 388, б). В каждом из этих случаев параметры деталей мира или строчной структуры могут быть точно известны, что позволяет рассчитать характеристики соответствующих фильтров. Эксперименты по использованию линейной пространственной фильтрации для преобразования изображений периодических структур были выполнены еще в 1873 г. Аббе, а в 1906 г. Портером. В. П. Линник в 1932 г., а затем Цернике в 1935 г. предложили использовать принцип пространственной фильтрации для наблюдения прозрачных объектов (фазово-контрастный метод). В начале 50-х годов сотрудники Оптического института Парижского университета, и прежде всего его директор профессор А. Марешаль, начали активно заниматься использованием когерентной пространственной фильтрации для улучшения качества фотографий. При когерентной обработке обычная фотография освещается когерентным светом и в плоскости ее фурье-образа осуществляется воздействие на спектр пространственных частот специальными фильтрами — масками, а затем преобразованное изображение вновь восстанавливается. А. Марешаль и его сотрудники нашли множество различных способов

улучшения качества фотографий: увеличение контраста небольших деталей за счет ослабления низкочастотных компонентов спектра, устранение размытости с помощью фазовой пластинки и устранение периодической структуры в изображении и т. д. Несмотря на успехи оптической обработки изображений, развитие этих методов длительное время сдерживалось практическими трудностями создания пространственных фильтров, способных одновременно изменять амплитуды и фазы на нужных частотах спектра. Только в 1963 г., когда появились фильтры, полученные интерференционными методами, — фильтры Ван дер Люгта, состоящие исключительно из поглощающих элементов, но позволяющие регулировать амплитуду и фазу передаточной функции, удалось преодолеть ряд недостатков методов линейной оптической обработки. В частности, фильтром Ван дер Люгта может осуществляться сложная линейная операция согласованной фильтрации, обработка данных, полученных от радиолокаторов с синтезированной апертурой, и т. д. Не вдаваясь в подробности этого метода, широко освещенного в литературе, отметим, что фильтры Ван дер Люгта, как и любые транспаранты, используемые при оптической обработке, довольно чувствительны к изменению масштаба и поворотам входного изображения. Поиск нужного размера и положения фильтра среди различных размеров и ориентаций представляет собой весьма трудоемкую операцию, однако для ряда задач по затратам времени и относительно простой аппаратуре методы когерентной обработки не имеют себе равных.

Обработка изображений на ЭВМ отличается большими возможностями в отношении универсальности, хотя порой и ограничена из-за большого объема информации, содержащейся в изображении, а также значительных затрат времени. Основное принципиальное преимущество обработки изображений на ЭВМ, как уже указывалось выше, состоит в том, что к алгоритму обработки предъявляются лишь требования математической корректности. Вопросы обработки изображений на ЭВМ методами линейной фильтрации детально рассмотрены А. А. Гуровым и Н. Н. Порфирьевой [48].

Нелинейные преобразования изображений

В общем случае нелинейные преобразования могут осуществляться на основе теории статистических решений, для чего нужны многомерные функции распределения всех элементов изображения, которые, как правило, неизвестны. Поэтому практически почти все нелинейные алгоритмы, описанные в литературе, получены эмпирически и при оценке их эффективности принималась в расчет лишь субъективная оценка улучшения качества изображений. Между тем, как выяснено в самое последнее время, для определенных классов нелинейных преобразований можно построить оптимальные алгоритмы, опираясь на экстремальные свойства законов зрительного восприятия [94]. Важно, что в классе статистических нелинейных преобразований удалось выполнить количественную оценку их эффективности по значению контраста.

Рассмотрим общее нелинейное преобразование изображения L , заданного в виде матрицы $\|L\|$. Матричное описание учитывает дискретизацию при цифровой обработке изображений. Пусть $\Phi(\|L\|)$ — оператор преобразования, тогда в итоге получим новое изображение L' с матрицей

$$\|L'\| = \Phi(\|L\|).$$

Наиболее простым классом нелинейных преобразований являются *стационарные безынерционные преобразования*, т. е. такие, для которых любой элемент L'_i преобразованного изображения L' формируется по определенному (от индекса i не зависящему) закону из единственного элемента L_i изображения L :

$$L'_i = \Phi(L_i),$$

где $\Phi(L_i)$ — одномерная функция — оператор преобразования. В этом случае осуществляется преобразование яркостей элементов (тоноперераспределение) по принципу «точка в точку».

Заметим, что из безынерционности вытекает неизменность сюжета изображения L' при изменении порядка нумерации отсчетов. На практике формирование L' идет в определенном порядке, согласно принятому закону сканирования при считывании и воспроизведении. В теории же это не играет роли и вместо сюжета можно рассматривать эквивалентное по тонораспределению изображение полутонного клина или гистограмму.

Выделим особо самое простое безынерционное преобразование — усиление (ослабление): $L'_i = \kappa L_i$, $\kappa > 0$. Как уже отмечалось, при усилении контраст изображения не меняется, но зрительный эффект усиления может быть значительным, так как за его счет всегда можно добиться, чтобы основная часть значений яркости элементов оказалась в «рабочем» диапазоне зрительной системы.

Операция усиления может осуществляться самостоятельно, но часто она сопутствует другим, более сложным преобразованиям. Важно понимать, что усиление влияет на статистические свойства изображений, так как при $\kappa \neq 1$ изменяются параметры гистограмм. Действительно, пусть $p_L(L)$ — плотность распределения исходного изображения L , которое подвергается усилению; тогда плотность распределения преобразованного изображения L' равна

$$p_{L'}(L') = (1/\kappa) p_L(L'/\kappa),$$

что означает увеличение масштаба распределения яркости в сторону ее больших значений.

Рассмотрим нелинейное стационарное безынерционное преобразование (рис. 389). В принципе функция $\Phi(\|L\|)$ может совершенно не зависеть от свойств исходного и преобразованного изображений. В этом случае выбор $\Phi(\|L\|)$ должен производиться путем перебора многих функций для достижения какого-либо эффекта. Очевидно, такой путь может быть выбран для обработки одного-двух уникальных снимков, но не пригоден для сколько-нибудь широкого их класса. Преобразование должно отражать свойства изображений L и L' . Только тогда можно сознательно добиваться желаемого эффекта.

Прежде всего нужно выбрать простые характеристики исходных изображений — их одномерные функции распределения $F_L(L_i)$ или плотности распределения $p_L(L_i)$. Если это единственная харак-

теристика исходного изображения, используемая в задаче, то естественно и преобразованное изображение L' характеризовать аналогичной функцией $F_{L'}(L'_i)$ или $p_{L'}(L'_i)$.

Потребуем, чтобы оператор $\Phi(\|L\|)$ осуществлял преобразование тонораспределения, заданного функцией распределения $F_L(L_i)$, в желаемое распределение $F_{L'}(L'_i)$. Функции $F_L(L_i)$ и $F_{L'}(L'_i)$ — монотонные и принимают значения в одном и том же интервале от 0

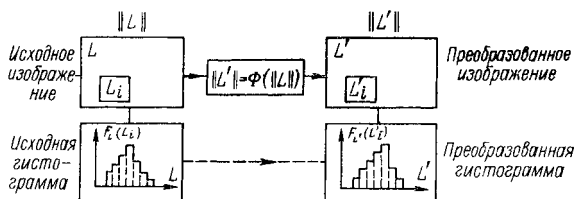


Рис. 389. Нелинейное безынерционное статистическое преобразование изображений (НБСПИ): $L'_i = F_L^{-1}[F_L(L_i)]$

до 1. Тогда, очевидно, всегда найдется пара значений L_i и L'_i таких, что будет выполняться равенство

$$F_{L'}(L'_i) = F_L(L_i).$$

Отсюда находим выражение оператора безынерционного преобразования, которое назовем *статистическим*,

$$L'_i = F_L^{-1}[F_L(L_i)],$$

где $F_L^{-1}[\cdot]$ — обратная функция.

Структура нелинейного статистического безынерционного преобразования и его фундаментальное свойство

Рассмотрим структуру оператора нелинейного статистического безынерционного преобразования $L'_i = F_L^{-1}[F_L(L_i)]$. Заметим, что она состоит из двух четко выделяемых нелинейных звеньев (рис. 390).

Первое звено. Каждому элементу L_i исходного изображения L здесь ставится в соответствие величина $L'_i = F_L(L_i)$, значение которой лежит в интервале от 0 до 1, т. е. в ограниченном динамическом диапазоне. Заметим, что теоретически значения L_i принадлежат бесконечному интервалу $(0, \infty)$. Таким образом, первое звено является *компрессирующим* и L'_i как случайная величина будет распределена равномерно. В этом смысле первое звено неизменно при любом изображении L .

Второе звено. Каждому значению L'_i ставится в соответствие величина $L'_i = F_L^{-1}(L'_i)$, в общем случае принимающая значения в интервале $(0, \infty)$. Структура этого звена может изменяться в зависимости от требований, предъявляемых к некоторым свойствам

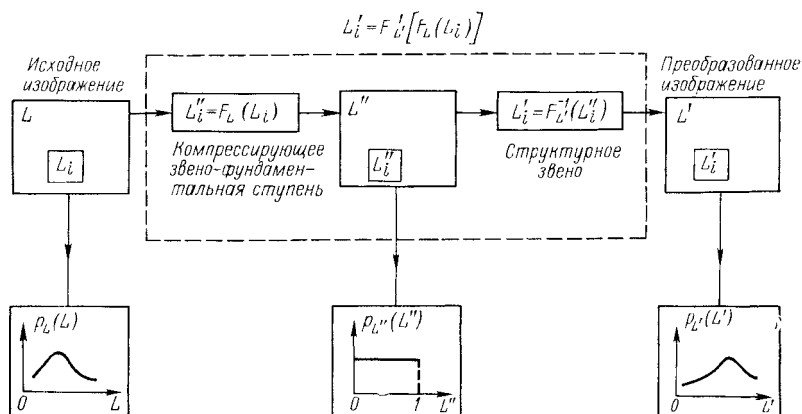


Рис. 390. Структурная схема нелинейного статистического безынерционного преобразования:

$p_L(L)$, $p_{L''}(L'')$, $p_{L'}(L')$ — плотности распределения вероятностей

преобразованного изображения. Ими могут быть требования ограниченного динамического диапазона значений L' , соответствие законам зрительного восприятия по контрасту или максимуму информации или же всем отмеченным требованиям вместе взятым и т. п. Поэтому второе звено можно называть *структурным*.

Наличие компенсирующего звена, преобразующего любое исходное распределение в распределение равномерной плотности (равномерное), придает ему, во-первых, самостоятельное значение, во-вторых, так как оно присутствует в любом статистическом преобразовании, фундаментальное значение. Именно в этом смысле его можно выделять среди всех других.

Первое звено становится ненужным только в случае, когда распределение исходного изображения равномерно. По отношению к нему первое звено дает изоморфное преобразование, т. е. сохраняет равномерность распределения.

Отметим далее, что входным «сигналом» второго звена будут значения функции F_L , играющей роль аргумента для функции $F_{L'}^{-1}$.

В принципе можно расширить класс нелинейных статистических преобразований, если описать действие второго звена некоторой однозначной функцией Ψ , заданной в интервале от 0 до 1 и принимающей значения от 0 до ∞ , т. е. если формировать преобразованное изображение оператором $L'_i = \Psi[F_L(L_i)]$.

Преобразования, соответствующие оператору этого вида, называются *неполными статистическими преобразованиями*.

Построение операторов нелинейных статистических преобразований можно осуществлять, исходя из различных соображений. В этой связи прежде всего необходимо рассмотреть оптимальные преобразования. С учетом закона экстремальности зрительного восприятия по количеству информации, передаваемой в зрительной системе, в § 24.2 были получены оптимальные функции распределения для двух слу-

чаев: ограниченной суммарной дисперсии сигнала зрительного возбуждения и ограниченного диапазона изменений яркости исходного изображения. Найдем алгоритмы нелинейных статистических преобразований для этих случаев [94]. При ограниченной суммарной дисперсии оптимальное распределение имеет вид

$$F_{L'}(L'_i) = L_i^{2\gamma} / (L_i^{2\gamma} + L_0^{2\gamma}).$$

Если принять значение $\gamma = 1$, что позволяет несколько усилить контраст, то $F_{L'}(L'_i) = L_i^2 / (L_i^2 + L_0^2)$, т. е.

$$L'_i = L_0 \sqrt{F_{L'}(L'_i) / [1 - F_{L'}(L'_i)]}.$$

Полагая $F_{L'}(L'_i) = F_L(L_i)$, найдем

$$L'_i = L_0 \sqrt{F_L(L_i) / [1 - F_L(L_i)]}.$$

При ограниченном диапазоне яркостей исходного изображения, когда

$$F_{L'}(L'_i) = \frac{\ln(L'_i / L'_{\min})}{\ln(L'_{\max} / L'_{\min})},$$

имеем

$$L'_i = L_{\min}(L_{\max} / L_{\min}) \dots (L_{\max} / L_{\min})^{F_L(L_i)}$$

Как уже отмечалось, количественная мера информации Шеннона, на основе которой были получены оптимальные функции распределения и вычислены операторы оптимальных преобразований, не отражает семантического аспекта информации, содержащейся в изображениях. Поэтому не исключено, что при некоторых специфических сюжетах, особенно знакомых наблюдателю, могут оказаться более приемлемыми другие преобразования. Пока по этому вопросу в теории не будет твердых установок, целесообразно рассмотреть операторы нелинейных статистических преобразований, полученные из широко распространенных функций распределения. К ним относятся, например, экспоненциальное и релеевское распределения. В табл. 35 приведены результаты вычисления алгоритма преобразования для этих и некоторых других функций распределения. Необходимо отметить, что экспоненциальное распределение приводит к логарифмическому оператору, дающему хороший зрительный эффект — высокую контрастность преобразованного изображения.

Значение контраста для преобразованного изображения можно вычислить на основе закона зрительного восприятия для эквиденситных полей

$$K_{с.з} = \int_0^{\infty} \left| \frac{L_i^2 - M^2 [L'_i]}{L_i^2 + M^2 [L'_i]} \right| p_{L'}(L'_i) dL'_i,$$

причем математическое ожидание $M[L'_i] = L'_{cp}$.

Так как $p_{L'}(L'_i) dL'_i = dF_{L'}(L'_i) = dF_L(L_i)$, где $F_L(L_i)$ — функция распределения исходного изображения, то

$$K_{с.з} = \int_0^1 \left| \frac{F_L^{-1}[F_L(L_i)]^2 - L_{cp}^2}{\{F_L^{-1}[F_L(L_i)]\}^2 + L_{cp}^2} \right| dF_L(L_i).$$

Алгоритмы нелинейных преобразований и значения их контрастов

Распределе- ние преоб- разованного изображения	Функция распределения преобразованного изображения	Алгоритм преобразования функции распределения исходного изображения	Контраст преобразо- ванного изображения
Равно- мерное	$F_{L'}(L'_i) = (1/L'_{\max}) L'_i$	$L'_i = L'_{\max} F_L(L_i)$	$K = 0,464$
Экспонен- циальное	$F_{L'}(L'_i) = 1 - e^{-L'_i/\lambda}$	$L'_i = -\lambda \ln [1 - F_L(L_i)]$	$K = 0,552$
Релеевское	$F_{L'}(L'_i) = 1 - e^{-L'^2_i/(2\sigma^2)}$	$L'_i = \sqrt{-2\sigma^2 \ln [1 - F_L(L_i)]}$	$K = 0,390$
Контраст- ное	$F_{L'}(L'_i) = L'^2_i / (L'^2_i + L_0^2)$	$L'_i = L_0 \sqrt{F_L(L_i) / [1 - F_L(L_i)]}$	$K = 0,548$
Парабо- лическое	$F_{L'}(L'_i) = \frac{1}{2} + \frac{2L'_i - L'_{\max}}{L'^3_{\max}} \times$ $\times \left(\frac{L'^2_{\max} - L'^2_i}{4} + L'_{\max} L'_i \right)$	$L'_i = \begin{cases} L'^{(1)}_{\max} = L'_{\max} \left[-\cos \left(\frac{\pi + \arccos [1 - 2F_L(L_i)]}{3} \right) + 1 \right] \\ \text{при } 0 \leq F_L \leq 1/2; \\ L'^{(2)}_{\max} = L'_{\max} \left[\cos \left(\frac{\pi + \arccos [2F_L(L_i) - 1]}{3} \right) + 1 \right] \\ \text{при } 1/2 \leq F_L \leq 1 \end{cases}$	$K = 0,695$
Гипербо- лическое	$F_{L'}(L'_i) = \frac{\ln(L'_i/L'_{\min})}{\ln(L'_{\max}/L'_{\min})}$	$L'_i = L'_{\min} (L'_{\max}/L'_{\min})^{F_L(L_i)}$	$K = 0,756$ при $L'_{\min} = 1$

Структура полученного выражения такова, что функция распределения $F_L(L_i)$ играет роль независимой переменной в определенном интеграле и, следовательно, он от нее не зависит. Поэтому, обозначая $F_L(L_i) = z$, найдем

$$K_{c.9} = \int_0^1 \left| \frac{[F_L^{-1}(z)]^2 - L_{cp}'^2}{[F_L^{-1}(z)]^2 + L_{cp}'^2} \right| dz.$$

Для всего класса неполных статистических преобразований получим

$$K_{c.9} = \int_0^1 \left| \frac{\Psi^2(z) - L_{cp}'^2}{\Psi^2(z) + L_{cp}'^2} \right| dz.$$

Таким образом, контраст преобразованного изображения не зависит от контраста, гистограммы и сюжета исходного изображения, но является характеристикой вида нелинейного статистического преобразования и может служить мерой его эффективности. Для каждого данного преобразования значение контраста может быть рассчитано раз и навсегда. В табл. 35 даны значения контраста для всех рассмотренных алгоритмов преобразования.

Практическая реализация контрастного распределения

$$F_{L'}(L_i) = L_i'^2 / (L_i'^2 + L_{cp}'^2)$$

и других, подобных ему (имеется в виду неограниченная протяженность «хвоста» функции плотности), требует определенного внимания. Дело в том, что ограниченность динамического диапазона при обработке изображений не позволит реализовать достаточно большие значения их яркости, что приводит к «забеливанию» изображения. Поэтому, во избежание искажений, преобразования нужно строить на основе усеченных распределений в диапазоне от L'_{\min} до L'_{\max} , причем L'_{\min} может быть равно нулю.

При использовании усеченных распределений встает вопрос о принципе выбора рабочего диапазона или границы усечения. Здесь предлагается принцип выбора, чтобы обеспечить попадание значений яркости изображения в рабочий диапазон с заданной вероятностью p . На практике эта величина должна быть достаточно близкой к единице. Из формулы для контрастного распределения при $F_{L'}(L'_{\max}) = p$ найдем отношение L'_{\max}/L'_0 , выраженное через p . Тогда, произведя перенормировку, получим усеченное контрастное распределение

$$F_{L'}(L'_i) = \frac{1}{p} \frac{L_i'^2}{L_i'^2 + L_0'^2}, \quad L'_i \in [0, L'_{\max}].$$

Соответствующий ему алгоритм преобразования изображений имеет вид

$$L'_i = L'_0 \sqrt{p F_{L'}(L'_i) / [1 - p F_{L'}(L'_i)]}.$$

Из последнего выражения легко прослеживается ограниченность значений L'_i . Действительно, даже при $F_{L'}(L'_i) = 1$ получаем конечные значения $L'_i = L'_{\max}$. Заметим, что если для данного p выбрана

величина L'_{\max} , то автоматически находится и L'_0 — свободный параметр преобразования. В единицах квантования $L'_{\max} = 256$. Тогда, при $p = 0,9$ получим

$$L'_0 = [L'_{\max} \sqrt{(1-p)/p}] = 85.$$

Здесь скобками обозначена целая часть числа. Эксперименты показали, что именно такое значение L'_0 соответствует хорошему зрительному восприятию изображений. Аналогично могут быть найдены свободные параметры и при других распределениях и алгоритмах [94].

Примеры обработки изображений и методы реализации алгоритмов обработки в оптико-электронной аппаратуре

Реализация контрастного закона при зрительном восприятии изображения приводит к мысли о целесообразности его использования при улучшении качества малоконтрастных фотографических изображений. В этом случае можно применить алгоритм вида

$$D = D_0 + D^* (L_1^{2\gamma} - L_2^{2\gamma}) / (L_1^{2\gamma} + L_2^{2\gamma}),$$

где D , D_0 , D^* — значения фотографической плотности изображения; γ — параметр контраста.

Схема установки, созданной В. Ф. Нестеруком и В. Н. Кузмичевым для контрастной обработки фотографического изображения, приведена на рис. 391. Оптические сигналы L_1 и L_2 из двух точек изображения L поступают по каналам I и II в оптико-электронные преобразователи $ОЭ$. Расстояние d между точками задается и фиксируется. Сканирующее устройство осуществляет перемещение пары точек по плоскости изображения. По выходным сигналам U_1 и U_2 в блоке K вычисляется контраст $K = (U_1 - U_2) / (U_1 + U_2)$ с параметром контраста $\gamma = 0,5$.

Сигнал, поступающий из блока K , модулируется, усиливается и детектируется в блоках $M-D$, а затем после прохождения электроно-оптического преобразователя $ЭО$ записывается регистрирующим устройством $РУ$. Вращение сканирующих устройств $СУ-I$ и $СУ-II$ осуществляется симметрично. Обработке были подвергнуты слабоконтрастные снимки планеты Марс, переданные советскими авто-

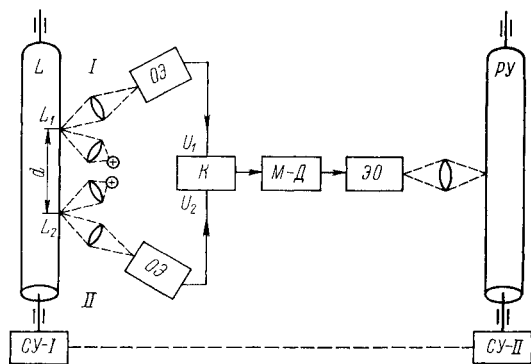


Рис. 391. Структурная схема установки для контрастной обработки фотографических изображений

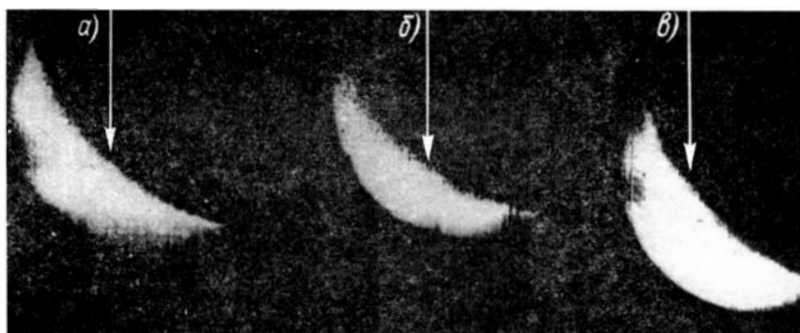
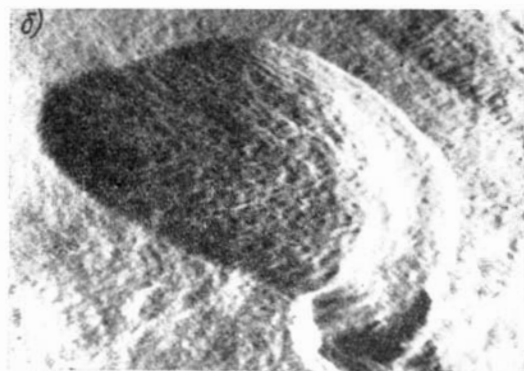


Рис. 392. Черно-белые фотографии планеты Марс, полученные за цветными светофильтрами (а — зеленым, б — синим, в — красным), после их контрастной обработки



Рис. 394. Обработанные рентгенограммы желчного пузыря (холеграммы): а — мелкие конкременты (песок) видны в виде многочисленных полушаровых теней; б — складки слизистой оболочки желчного пузыря видны в виде пересекающихся линейных теней



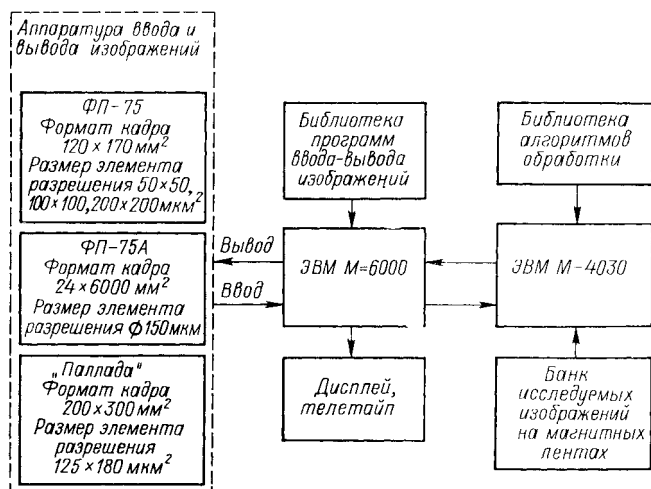


Рис. 395. Схема комплекса аппаратуры для обработки изображений на ЭВМ

матическими станциями «Марс-2» и «Марс-3» в период интенсивной пылевой бури в 1971—1972 гг. Исходные черно-белые снимки, полученные при фотографировании с тремя различными светофильтрами, подвергались обработке с помощью вышеописанной аппаратуры, в результате чего достигалось существенное усиление контраста [3]. После этого было синтезировано цветное изображение поверхности Марса, впервые опубликованное журналом «Оптико-механическая промышленность» в № 1 за 1972 г. Черно-белые фотографии планеты, полученные за зеленым (рис. 392, а), синим (рис. 392, б) и красным (рис. 392, в) фильтрами и подвергнутые контрастной обработке, приведены на рис. 392, а синтезированная цветная фотография — на рис. 393 (см. вклейку). Она была получена В. И. Мордасовым и Г. И. Терегуловым.

Анализ фотографий показал, что метод контрастной обработки позволяет, даже при неизвестной мощности помех, выделить дополнительные детали рельефа поверхности планеты, не различимые или плохо различимые на исходной фотографии.

Аналогичная задача, имеющая целью обнаружение малоконтрастных образований на рентгеновских снимках, решалась Ю. В. Баталовым, М. М. Мирошниковым и Е. В. Филипповым путем преобразования плотности почернения рентгенограмм желчного пузыря в амплитудный рельеф и усиления амплитуд рельефа в аналоговой схеме. Преобразование амплитудного рельефа в изображение позволило в ряде случаев выделить рисунок слизистой оболочки желчного пузыря, а также мелкие (от 0,3 до 1 мм) конкременты (рис. 394).

Для обработки изображений на ЭВМ использовалась специальная аппаратура для ввода изображения в машину М4030. Схема комплекса

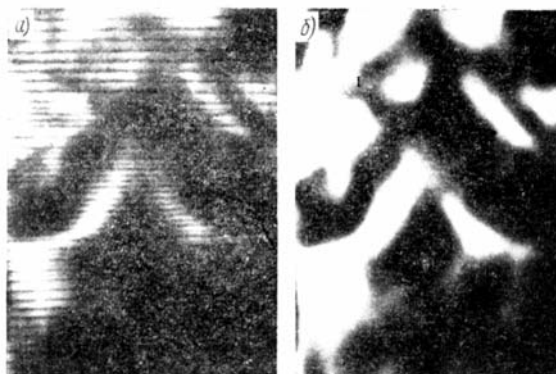


Рис. 396. Ликвидация строчной структуры на термограмме с помощью линейной вторичной обработки: *а* — исходное изображение; *б* — преобразованное изображение

аппаратуры приведена на рис. 395. Результаты обработки не некоторых изображений представлены на рис. 396 и 397 [48].

Рис. 396 иллюстрирует результат фильтрации строчной структуры с помощью линейной вторичной обработки изображения, рис. 397 — усиление контраста с помощью нелинейной вторичной обработки по алгоритму оптимального нелинейного безынерционного преобразования вида $L'_i = L_0 \vee F_L(L'_i) / [1 - F_L(L'_i)]$.

Обработка изображений в оптико-электронной аппаратуре, работающей в реальном масштабе времени, может осуществляться *микропроцессором* по следующему алгоритму (рис. 398). Видеосигнал, преобразованный в цифровую форму в *аналогово-цифровом преобразователе АЦП*, поступает в *буферную память*, откуда он может быть извлечен как для анализа поступающего изображения, так и для записи уже обработанного изображения. Анализ и обработка осуществляются *микропроцессором*, в котором записывается алгоритм

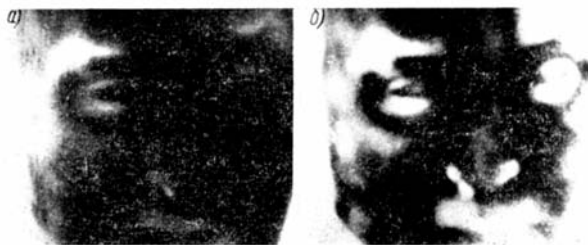


Рис. 397. Усиление изображения с помощью нелинейной вторичной обработки: *а* — исходное изображение; *б* — преобразованное изображение

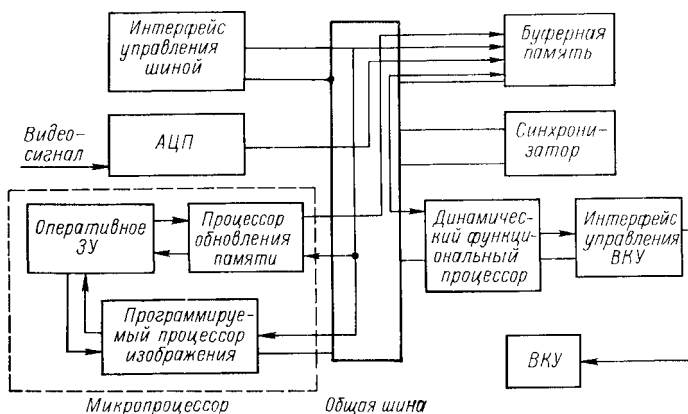


Рис. 398. Структурная схема включения микропроцессора в оптико-электронную аппаратуру

обработки. На схеме он обозначен как *программируемый процессор изображения*. Вся цифровая информация циркулирует по высокоскоростной *общей шине*, а управление шиной, распределение каналов в ней между функциональными блоками осуществляет *интерфейс управления шиной*. Обработанная информация замещает ранее записанную в буферной памяти и считывается для передачи на видеоконтрольное устройство (ВКУ). При этом *динамический функциональный процессор* может осуществлять коррекцию приходящей информации, устраняя погрешности разверток как сканирующего устройства оптико-электронного прибора, так и видеоконтрольного устройства.

Затем видеосигнал проходит *интерфейс управления ВКУ* для координатной привязки соответствующих элементов изображения. Общая *синхронизация* обеспечивается системой единого времени. При таком способе обработки возможна реализация наиболее действенных и проверенных на практике алгоритмов.

Относительно простые алгоритмы: алгоритм покадрового накопления и сравнения (межкадровой обработки), алгоритм низкочастотной фильтрации и т. д., — могут без особенных затруднений использоваться в существующих микропроцессорах. Для реализации алгоритма вида
$$L'_i = L' \sqrt{F_L(L'_i) / [1 - F_L(L'_i)]}$$
 необходимо применять микропроцессор, обеспечивающий обработку каждого элемента изображения за время не более 3—10 мкс, чтобы эффективно использовать эту обработку в схемах медицинских тепловизоров и других оптико-электронных приборов, создающих изображение. Для реализации еще более сложных алгоритмов необходима разработка специальных быстродействующих микропроцессоров.

1. **Арбиб М.** Метафорический мозг/Пер. с англ. Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Мир, 1976. 296 с.
2. **Ащеулов А. Т.** Применение интеграла Фурье к изучению свойств оптического и фотографического изображений. — Журн. науч. и прикл. фотогр. и кинематогр., 1959, т. 4, № 6, с. 465—476; 1960, т. 5, № 2, с. 148—157.
3. **Баталов Ю. В., Мирошников М. М., Порфирьева Н. Н.** О контрастном методе обработки фотографий Марса. — ОМП, 1973, № 9, с. 11—12.
4. **Бегунов Б. Н., Заказнов Н. П.** Теория оптических систем: Учеб. пособие для втузов. М.: Машиностроение, 1973. 488 с.
5. **Биберман Л. М.** Растры в электрооптических устройствах. Пер. с англ. В. И. Проскурякова. М.: Энергия, 1969. 159 с.
6. **Бодэ Г., Шеннон К.** Упрощенное изложение линейной минимально-квадратичной теории сглаживания и предсказания. — В кн.: Теория информации и ее приложения. М., 1959, с. 113—137.
7. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики/Пер. с англ. С. Н. Бреуса; Под ред. Г. П. Мотулевич. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1973. 719 с.
8. **Брамсон М. А.** Инфракрасное излучение нагретых тел. М.: Наука, 1964. 223 с.
9. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 4-е изд., стереотипное. М.: Гостехиздат, 1954. 608 с.
10. **Бутслов М. М., Стеланов Б. М., Фанченко С. Д.** Электронно-оптические преобразователи и их применение в научных исследованиях/Под ред. Е. К. Завойского. М.: Наука, 1978. 431 с.
11. **Вавилов С. И.** Глаз и Солнце: О свете, Солнце и зрении. 9-е изд. М.: Наука, 1976. 127 с. (АН СССР. Сер. Попул. произведения классиков естествознания).
12. **Вавилов С. И.** Микроструктура света: Исследования и очерки. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1950. 197 с. (АН СССР. Сер. Итоги и проблемы современной науки).
13. **Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960. 447 с.
14. **Ван дер Зил А.** Флуктуации в радиотехнике и физике/Пер. с англ.; Под ред. Л. С. Гуткина. М. — Л.: Госэнергоиздат, 1958. 296 с.
15. **Ван дер Люгт.** Когерентная оптическая обработка информации. — Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике, 1974, т. 62, № 10, с. 5—28.
16. **Ван дер Люгт.** Формулы для анализа и расчета систем оптической обработки информации. — Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике, 1966, т. 54, № 8, с. 43—51.
17. **Василенко Г. И.** Голографическое опознавание образов. М.: Сов. радио, 1977. 327 с.
18. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций/Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Ч. 1. 798 с. Ч. 2. 220 с.
19. **Вафиади В. Г.** Фотоэлектрическая автоматика: Учеб. пособие для радиофиз. и радиотехн. спец. вузов. Минск: Высш. школа, 1966. 207 с.
20. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей: Учеб. пособие для втузов. М.: Наука, 1969. 366 с. (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. Задачи и упражнения).
21. **Волосов Д. С.** Фотографическая оптика: Теория, основы проектирования, оптические характеристики: Учеб. пособ. для киновузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Искусство, 1978. 543 с.
22. **Волосов Д. С., Цивкин М. В.** Теория и расчет светооптических систем проекционных приборов: Учеб. пособие для ин-та киноинженеров. М.: Искусство, 1960. 526 с.
23. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей: Учеб. для гос. ун-тов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1965. 400 с.
24. **Гоноровский И. С.** Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1977. 607 с.

25. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений/Перераб. при участии Ю. В. Геронимуса и М. Ю. Цейлина. 5-е изд., стереотипное. М.: Наука, 1971. 1108 с.
26. Грегори Р. Л. Глаз и мозг. Психология зрительного восприятия/Под ред. А. Р. Лурия, В. П. Зинченко; Пер. с англ. Е. Д. Хомской. М.: Прогресс, 1970. 271 с.
27. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику/Пер. с англ. В. Ю. Галицкого, М. П. Головея; Под ред. Г. И. Косоурова. М.: Мир, 1970. 364 с.
28. Гуревич М. М. Введение в фотометрию. Л.: Энергия, 1968. 244 с.
29. Гуревич С. Б. Эффективность и чувствительность телевизионных систем. М. — Л.: Энергия, 1964. 344 с.
30. Денисюк Ю. Н. К вопросу о фотографии, воспроизводящей полную иллюзию действительности изображаемого объекта. — Журн. научн. и прикл. фотогр. и кинематогр., 1966, т. 11, № 1, с. 46—56.
31. Денисюк Ю. Н. Об отображении оптических свойств объекта в волновом поле рассеянного им излучения. — ДАН СССР, 1962, т. 144, № 6, с. 1275—1278.
32. Денисюк Ю. Н. Принципы голографии: Лекции. Л.: Изд. ГОИ, 1978. 125 с.
33. Дитчберн Р. Физическая оптика/Пер. с англ. Л. А. Войштейна, О. А. Шустина; Под ред. И. А. Яковлева. М.: Наука, 1965. 631 с.
34. Забелина И. А. Расчет видимости звезд и далеких огней. — Л.: Машиностроение, 1978. 183 с.
35. Захаренков В. Ф., Филимонов Р. П., Павличук В. А. Измерение спектров Винера фотографических шумов. — ОМП, 1973, № 2, с. 70—71.
36. Зверев В. М., Орлов Е. Ф. Оптические анализаторы: Корреляционный анализ в акустике, оптике и радиофизике с использованием оптических модуляционных схем. М.: Сов. радио, 1971. 240 с.
37. Здор С. Е., Широков В. Б. Оптический поиск и распознавание. М.: Наука, 1973. 239 с.
38. Зоммерфельд А. Оптика/Пер. с нем. Н. В. Родниковой; Под ред. М. А. Ельашевича. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 486 с.
39. Зуев В. Е. Распространение видимых и инфракрасных лучей в атмосфере. М.: Сов. радио, 1970. 496 с.
40. Ивандиков Я. М. Оптико-электронные приборы для ориентации и навигации космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1971. 200 с.
41. Иванов Ю. А., Тяпкин Б. В. Инфракрасная техника в военном деле. М.: Сов. радио, 1963. 360 с.
42. Излучательные свойства твердых материалов. Справочник/Под ред. А. Е. Шейндинна. М.: Энергия, 1974. 471 с.
43. Изнар А. Н. Электронно-оптические приборы. М.: Машиностроение, 1977. 264 с.
44. Изнар А. Н., Павлов А. В., Федоров Б. Ф. Оптико-электронные приборы космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1972. 368 с.
45. Иконика/Под ред. Д. С. Лебедева. М.: Наука, 1968. 135 с.
46. Иконика: Пространственная фильтрация изображений. Фотографические системы/Отв. ред. Д. С. Лебедев. М.: Наука, 1970. 136 с.
47. Иконика: Цифровая голография. Обработка изображений/Отв. ред. Д. С. Лебедев, Г. Г. Вайнштейн. М.: Наука, 1975. 150 с.
48. Иконика — новое направление в изучении изображений/Под ред. М. М. Миронникова — Тр. ГОИ, 1979, т. 44, вып. 178. 152 с.; 1982, т. 51, вып. 185. 146 с.
49. Калитеевский Н. И. Волновая оптика: Учеб. пособие для физ. специальностей ун-тов, 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1978. 384 с.
50. Карженский Е. Я., Мирошников М. М. Сканирующие системы для тепловизоров. — ОМП, 1970, № 9, с. 39—42.
51. Карженский Е. Я., Мирошников М. М., Шилин Б. В. Выбор оптимальных параметров тепловизора для изучения природных ресурсов с воздуха. — ОМП, 1972, № 12, с. 18—20.
52. Карженский Е. Я., Мирошников М. М., Шилин Б. В. Некоторые результаты применения самолетного тепловизора при съемке лесных пожаров. — ОМП, 1974, № 9, с. 29—32.

53. **Кариженский Е. Я., Мирошников М. М., Шилин Б. В.** Тепловая спектроскопическая аэросъемка. Возможности и перспективы. — ОМП, 1979, № 1, с. 18—20.
54. **Катыс Г. П.** Автоматическое сканирование. М.: Машиностроение, 1969. 518 с.
55. **Катыс Г. П.** Оптико-электронная обработка информации/Под. ред. акад. Б. Н. Петрова. М.: Машиностроение, 1973. 447 с.
56. **Квазиус Г., Макэнлесс Ф.** Проектирование систем астронавигации/Пер. с англ.; Под ред. Г. И. Лесева. М.: Мир, 1970. 304 с.
57. **Козелкин В. В., Усольцев И. Ф.** Основы инфракрасной техники. М.: Машиностроение, 1974. 335 с.
58. **Кок У. Е.** Лазеры и голография: Введение в когерентную оптику/Пер. с англ. Г. И. Кузнецова; Под ред. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1971. 137 с.
59. **Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л.** Оптическая голография./Пер. с англ.; Под ред. Ю. И. Островского. М.: Мир, 1973. 686 с.
60. **Кондратенков Г. С.** Обработка информации когерентными оптическими системами. М.: Сов. радио, 1972. 206 с.
61. **Кризе С. Н.** Усилительные устройства. М.: Связь, 1968. 335 с.
62. **Криксунов Л. З.** Справочник по основам инфракрасной техники. М.: Сов. радио, 1978. 400 с.
63. **Криксунов Л. З., Усольцев И. Ф.** Инфракрасные системы обнаружения, пеленгации и автоматического сопровождения движущихся объектов. М.: Сов. радио, 1968. 320 с.
64. **Круз П., Макглоулин Л., Макквистан Р.** Основы инфракрасной техники/Пер. с англ.; Под ред. В. Н. Чернышова, А. Г. Шереметьева. М.: Воениздат, 1964. 463 с.
65. **Лазарев Л. П.** Инфракрасные и световые приборы самонаведения и наведения летательных аппаратов: Учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1976. 567 с.
66. **Ландсберг Г. С.** Оптика: Учеб. пособие для физ. специальностей вузов. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1976. 926 с.
67. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1974—1976. Т. 1. 1974, 550 с. Т. 2. 1975, 391 с. Т. 3. 1976, 285 с.
68. **Левшин В. Л.** Обработка информации в оптических системах пеленгации. М.: Машиностроение, 1978. 168 с.
69. **Левшин В. Л.** Пространственная фильтрация в оптических системах пеленгации. М.: Сов. радио, 1971. 200 с.
70. **Леконт Ж.** Инфракрасное излучение/Пер. с франц.; Под ред. Л. А. Ту-мермана. М.: Физматгиз, 1958. 584 с.
71. **Линник В. П.** Простой интерферометр для исследования оптических систем. — ДАН СССР, 1933, № 5, с. 208.
72. **Литвиненко О. Н.** Основы радиооптики. Киев: Техника, 1974. 206 с.
73. **Ллойд Дж.** Системы тепловидения/Пер. с англ. Н. В. Васильченко; Под ред. А. И. Горячева. М.: Мир, 1978. 414 с.
74. **Ловенталь С., Бельво И.** Пространственная фильтрация и голография — новое в когерентной оптике/Пер. с франц.; Под ред. З. Л. Персика. М.: Энергия, 1970. 72 с.
75. **Луизов А. В.** Инерция зрения. М.: Оборонгиз, 1961. 248 с.
76. **Луизов А. В.** Физика зрения. — Новое в жизни, науке и технике. Сер. Физика, 1976, № 5, 63 с.
77. **Марешаль А., Франсон М.** Структура оптического изображения: Дифракционная теория и влияние когерентности света/Пер. с франц. Н. Н. Губеля; Под ред. Г. Г. Слюсарева. М.: Мир, 1964. 295 с.
78. **Марков М. Н.** Приемники инфракрасного излучения. М.: Наука, 1968. 168 с.
79. **Мартынов В. Н., Шкурский Б. Н.** Модель зрительного анализатора как оптимальной системы обнаружения. — ОМП, 1980, № 8, с. 1—4.
80. **Международный светотехнический словарь**/Под ред. Д. Н. Лазарева. 3-е изд. М.: Русский язык, 1979. 278 с.

81. Методы представления изображений и их обработка./Ю. В. Б а т а л о в, М. М. Мирошников, Н. П. Морозова и др. — ОМП, 1977, № 7, с. 3—6.
82. Мирошников М. М. Выдающийся французский революционер, врач, физик и оптик Жан-Поль Марат. Страницы истории. — ОМП, 1981, № 12, с. 51—52.
83. Мирошников М. М. Новое направление инфракрасной техники — тепловидение. — Тр. ГОИ, 1965, т. 29, вып. 158, с. 30—63.
84. Мирошников М. М. Теоретические основы оптико-электронных приборов. Л.: Машиностроение, 1977. 600 с.
85. Мирошников М. М. Тепловидение в медицине. — Мед. техника, 1980, № 4, с. 13—19.
86. Мирошников М. М., Нестерук В. Ф., Порфирьева Н. Н. Иконика и ее основные задачи. — ОМП, 1977, № 6, с. 3—7.
87. Мирошников М. М., Нестерук В. Ф., Порфирьева Н. Н. Иконика и обработка изображений. — ОМП, 1978, № 12, с. 34—36.
88. Мирошников М. М., Овчаренко Г. М. Влияние побочных потоков излучения на работу ИК-радиометра. — ОМП, 1970, № 10, с. 3—6.
89. Мирошников М. М., Синцов В. Н., Черняев Ю. С. Разработка методики испытаний тепловизионных приборов. — ОМП, 1971, № 4, с. 18—22.
90. Мирошников М. М., Черняев Ю. С. Тепловидение в медицинских исследованиях. — ОМП, 1969, № 12, с. 16—22.
91. Михалков К. В. Основы телевизионной автоматики. Л.: Энергия, 1967. 284 с.
92. Мосягин Г. М., Немтинов В. Б. Преобразование сигналов в оптико-электронных приборах систем управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1980. 175 с.
93. Нестерук В. Ф. Обработка оптического изображения. — В кн.: Тепловидение в медицине. Л., 1970, ч. 1, с. 13—16. (Труды Всесоюз. конференции «Тепловизионные приборы, направления развития и практика применения в медицине» ТеМП-79. Москва, 23—25 окт. 1979 г.).
94. Нестерук В. Ф. Структура статистических преобразований изображений в ограниченном динамическом диапазоне. — Тр. ГОИ, 1982, т. 51, вып. 185, с. 13—22.
95. Нестерук В. Ф. Оптимальное нелинейное контрастно-статистическое преобразование изображений и оценка его эффективности. — ОМП, 1981, № 11, с. 9—11.
96. Нестерук В. Ф., Порфирьева Н. Н. Информационная оценка процесса зрительного восприятия. — Оптика и спектроскопия, 1978, т. 44, вып. 4, с. 801—803.
97. Нестерук В. Ф., Порфирьева Н. Н. Контрастный закон восприятия света. — Оптика и спектроскопия, 1970, т. 29, № 6, с. 1138—1143.
98. Николаев С. М. Оптико-электронные радиометры космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1971. 179 с.
99. Носов Ю. Р. Оптоэлектроника. М.: Сов. радио, 1977. 232 с.
100. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику/Пер. с англ. В. И. Алексеева; Под ред. П. Ф. Паршина. М.: Мир, 1966. 254 с.
101. Оптические материалы для инфракрасной техники. Справочное издание/Е. М. Воронкова, Б. Н. Гречушников, Г. И. Дистлер и др. М.: Наука, 1965. 335 с.
102. Оптические явления в атмосфере по наблюдениям с пилотируемых космических кораблей/Г. Т. Береговой, А. А. Бузников, К. Я. Кондратьев и др. Под ред. чл.-кор. АН СССР К. Я. Кондратьева. Л.: Гидрометеоиздат, 1972. 48 с.
103. Опыт применения инфракрасного сканирующего радиометра для исследования динамики излучения организма человека/М. А. Собакин, М. М. Мирошников, Ю. И. Трапезников, Л. В. Андреев. — Библ. и мед. электроника, 1963, № 5, с. 29—33.
104. Орловский Г. Л. Передача факсимильных изображений. М.: Связь, 1980. 216 с.
105. Островская М. А. Частотно-контрастная характеристика глаза. — ОМП, 1969, № 2, с. 45—54.
106. Островский Ю. И. Голография. Л.: Наука, 1970. 124 с.
107. Островский Ю. И. Голография и ее применение. Л.: Наука, 1973. 179 с.

108. Павлов А. В. Оптико-электронные приборы: Основы теории и расчета. М.: Энергия, 1974. 359 с.
109. Павлов А. В., Черников А. И. Приемники излучения автоматических оптико-электронных приборов. М.: Энергия, 1972. 240 с.
110. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике/Пер. с англ.; Под ред. В. И. Алексеева. М.: Мир, 1971. 495 с.
111. Попов Г. П. Инженерная психология в радиолокации: Система индикатор — оператор. М.: Сов. радио, 1971. 143 с.
112. Порфирьев Л. Ф. Теория оптико-электронных систем. Л.: Машиностроение, 1980. 272 с.
113. Поскачей А. А., Чубаров Е. П. Оптико-электронные системы измерения температуры. М.: Энергия, 1979. 209 с.
114. Приемники инфракрасного излучения/Ж. Шоль, И. Марфан, М. Мюнш и др. Пер. с франц. Н. В. Васильченко; Под ред. Л. Н. Курбатова. М.: Мир, 1969. 282 с.
115. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1962. 883 с.
116. Радиационные измерения температур слабонагретых тел/Под ред. В. Г. Вафиади и М. М. Мирошников. Минск: Изд-во БТУ им. В. И. Ленина, 1969. 195 с.
117. Ратнер Е. С. О пороговой чувствительности приемников излучения. — Оптика и спектроскопия, 1960, т. 9, вып. 1, с. 101—107.
118. Ратнер Е. С., Мацковская Ю. З. О пороговой чувствительности приемников двумерного изображения. — ОМП, 1972, № 2, с. 3—6.
119. Роуз А. Зрение человека и электронное зрение/Пер. с англ. А. А. Гипиуса; Под ред. В. С. Вавилова. М.: Мир, 1977. 216 с. (В мире науки и техники).
120. Сафронов Ю. П., Эльман Р. И. Инфракрасные распознающие устройства. М.: Воениздат, 1976. 207 с.
121. Свет Д. Я. Оптические методы измерения истинных температур. М.: Наука, 1982. 296 с. (АН СССР, Ин-т металлургии им. А. А. Байкова).
122. Свет В. Д. Оптические методы обработки сигналов. М.: Энергия, 1971. 104 с. (Б-ка по автоматике, вып. 444).
123. Свечников С. В. Элементы оптоэлектроники. М.: Сов. радио, 1971. 270 с.
124. Слюсарев Г. Г. Методы расчета оптических систем. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1969. 670 с.
125. Слюсарев Г. Г. О возможном и невозможном в оптике. — Тр. ГОИ, 1968, т. 36, вып. 166, с. 5—17.
126. Смит Р., Джонс Ф., Чеснер Р. Обнаружение и измерение инфракрасного излучения/Пер. с англ. В. И. Алексеева; Под ред. В. А. Фабриканта. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 448 с.
127. Соболева Н. А., Меламид А. Е. Фотоэлектронные приборы: Учеб. пособие для вузов по спец. «Электронные приборы». М.: Высш. школа, 1974. 376 с.
128. Совместная работа автомата и человека-оператора в ситуации поиска/Б. П. Газдайка, Т. Н. Луник, В. В. Руденко и др. — Отбор и передача информации. Киев, 1980, вып. 61, с. 14—19.
129. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971. 616 с.
130. Справочник конструктора оптико-механических приборов/В. А. Панов, М. Я. Кругер, В. В. Кулагин и др. Под ред. В. А. Панова. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Машиностроение, 1980. 742 с.
131. Справочник по вероятностным расчетам/Г. Г. Абезгауз, А. П. Тронь, Ю. Н. Копенкин, И. А. Коровина. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Воениздат, 1970. 536 с.
132. Строук Дж. Введение в когерентную оптику и голографию/Пер. с англ. И. П. Налимова, В. Н. Колесникова; Под ред. Л. М. Сороко. М.: Мир, 1967. 347 с.
133. Тепловидение в медицине/Под ред. М. М. Мирошников, Г. Д. Шушкова. Л.: ГОИ им. С. И. Вавилова, НИИ скорой помощи им. И. И. Джанелидзе, 1972, т. 1, 159 с.; 1973, т. 2, 153 с.; 1980, 41, с. 178 (Труды 1-й науч. конференции по проблеме «Тепловидение в медицине»).

134. **Тепловидение** в медицине/Под ред. М. П. Гвоздева, М. М. Ми рошников а. Л.: ГОИ им. С. И. Вавилова, НИИ скорой помощи им. И. И. Джanelидзе, 1976. 282 с. (Труды Всерос. науч.-практ. конфер. по проблеме «Тепловидение в медицине»).
135. **Тепловидение** в медицине/Под ред. М. М. Ми рошников а. Л.: Изд. ГОИ, 1981. Ч. 1, 189 с.; Ч. 2, 224 с. (Труды Всесоюзной конференции «Тепловизионные приборы, направления развития и практика применения в медицине» ТеМП-79, Москва, 23—28 октября 1979 г.).
136. **Тепловидение** и его некоторые применения/М. М. Ми рошников, В. Г. Вафиади, Р. Н. Иванова и др. — В кн.: Сборник статей, посвященный 80-летию со дня рождения акад. Лебедева А. А. Л. 1973, с. 111—128.
137. **Тепловидение** и его применение в медицине/М. М. Ми рошников, В. И. Алипов, М. А. Гершанович и др. М.: Медицина, 1981. 184 с.
138. **Тепловидение**: Межвузовский сборник научных трудов/Под. ред. Н. Д. Куртева. М.: МИРЭА, 1976, вып. 1, 128 с.; 1978, вып. 2, 230 с.; 1980, вып. 3, 212 с.
139. **Тепловидение** при изучении природных ресурсов с воздуха/М. М. Ми рошников, Е. Я. Кариженский, Б. В. Шилин, Н. А. Гусев. — ОМП, 1971, № 3, с. 3—9.
140. **Тепловизор** — дефектоскоп «Статор-1»/М. М. Ми рошников, Г. А. Падалко, Р. Н. Иванова и др. — ОМП, 1979, № 12, с. 17—18.
141. **Тепловизор** для исследования квазистационарных тепловых полей/М. М. Ми рошников, Г. М. Овчаренко, О. К. Шабашев и др. — ОМП, 1971, № 6, с. 68—69.
142. **Тепловизор** «Рубин-3»/М. М. Ми рошников, Г. А. Падалко, В. П. Светланов и др. — ОМП, 1980, № 8, с. 28—29.
143. **Травникова Н. П.** Зависимость остроты различения от места на сетчатке, контраста и времени наблюдения. — Тр. ГОИ, 1960, т. 28, вып. 157, с. 252—257.
144. **Тудоровский А. И.** Теория оптических приборов. М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1948, Ч. 1. 661 с.; 1952, Ч. 2. 567 с.
145. **Турьгин И. А.** Прикладная оптика. Фотографические проекционные и фотозатраченные системы. Методы абберационного расчета оптических систем: Учеб. пособие для вузов по спец. «Оптические приборы». М.: Машиностроение, 1965, т. 1. 362 с.; 1966, т. 2. 431 с.
146. **Федоров Б. Ф., Эльман Р. И.** Цифровая голография: Синтез голограмм простейших объектов и восстановление изображений. М.: Наука, 1976. 151 с.
147. **Физика и техника инфракрасного излучения**/Дж. Э. Джемисон, Р. Х. Мак-Фи, Дж. Н. Пласс и др. Пер. с англ. Н. В. Васильченко и др.; Под ред. Н. В. Васильченко. М.: Сов. радио, 1965. 642 с.
148. **Франсон М., Сланский С.** Когерентность в оптике/Пер. с франц. Е. М. Шифриной; Под ред. К. С. Шифрина. М.: Наука, 1967. 80 с.
149. **Фукс-Рабинович Л. Н., Епифанов М. В.** Оптико-электронные приборы: Учеб. пособие для оптико-механ. и приборостроит. техникумов. Л.: Машиностроение, 1979. 360 с.
150. **Хадсон Р.** Инфракрасные системы/Пер. с англ. Я. Б. Герчикова и др.; Под ред. Н. В. Васильченко. М.: Мир, 1972. 534 с.
151. **Харкевич А. А.** Борьба с помехами. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1965. 275 с.
152. **Харкевич А. А.** Спектры и анализ. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1962. 236 с.
153. **Хэкфорд Г. Л.** Инфракрасное излучение/Пер. с англ. В. И. Проскуракова. М. — Л.: Энергия, 1964. 336 с.
154. **Шаде О. Г.** Новая система определения и измерения четкости изображения. — В кн.: Оценка качества оптического изображения. М., 1959, с. 243—274.
155. **Шеннон К.** Математическая теория связи. — В кн.: Работы по теории информации и кибернетике. М., 1963, с. 243—332.
156. **Шестов Н. С.** Выделение оптических сигналов на фоне случайных помех/Под ред. А. А. Лебедева. М.: Сов. радио, 1967. 347 с.
157. **Шилин Б. В.** Тепловая аэросъемка при изучении природных ресурсов. Л.: Гидрометеоздат, 1980. 247 с.
158. **Шифрин К. С.** Рассеяние света в мутной среде. М. — Л.: Гостехиздат, 1951. 288 с.

159. Шульман М. Я. Измерение передаточных функций оптических систем. Л.: Машиностроение, 1980. 207 с.
160. Якушенков Ю. Г. Основы оптико-электронного приборостроения: Учеб. для вузов. М.: Сов. радио, 1977. 270 с.
161. Якушенков Ю. Г. Основы теории и расчета оптико-электронных приборов: Учеб. пособие для вузов. М.: Сов. радио, 1971. 336 с.
162. Якушенков Ю. Г. Теория и расчет оптико-электронных приборов: Учеб. для студентов оптических спец. вузов. М.: Сов. радио, 1980. 390 с.
163. Якушенков Ю. Г., Луканцев В. Н., Колосов М. П. Методы борьбы с помехами в оптико-электронных приборах. М.: Радио и связь, 1981. 180 с.
164. Янке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы/Пер. с нем.; Под ред. Л. И. Седова. 3-е изд., стереотипное. М.: Наука, 1977. 342 с.
165. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. М.: Сов. радио, 1979. 312 с.
166. Ярославский Л. П., Мерзляков Н. С. Цифровая голография. М.: Наука, 1982. 219 с.

Дополнительный список литературы

1. Власко-Власов К. А. Фронт в Космосе / Рубежи обороны в Космосе и на Земле. Очерки истории ракетно-космической обороны. М.: Изд-во «Вече», 2003. 752 с.
2. Гаврилин Е. В. Эпоха «классической» ракетно-космической обороны. М.: Техносфера, 2008. 165 с.
3. Иванов В. П., Курт В. И., Овсянников В. А., Филиппов В. Л. Моделирование и оценка современных оптико-электронных приборов. Казань: ФНИЦ НПО ГИПО, типогр. «Образовательные технологии», 2006. 594 с.
4. Клиническое тепловидение / Под ред. В. П. Мельниковой и М. М. Мирошников. СПб.: Изд-во ГОИ, 1999. 124 с.
5. Колосов С. Н., Воловик М. Г., Прилучный М. А. Медицинское теплорадиовидение: современный методический подход. Нижн. Новгород: ФГУ «ННИИТО Росмедтехнологий», 2008. 184 с.
6. Мирошников М. М., Минеев Е. Н., Федоровский А. Д. Физико-технические основы построения высокочувствительных тепловизоров. М.: ЦНИИ Информации, 1973. 183 с.
7. Мирошников М. М., Любарский С. В., Химич Ю. П. Зеркала оптических телескопов. ОМП, 1990. № 9. С. 3–18.
8. Мирошников М. М. Оптические характеристики излучения целей и фонов — физическая основа создания оптико-электронной аппаратуры // Вопросы оборонной техники (ВОТ), серия Х. Л.: Изд-во ГОИ, 1992. № 1. С. 2–10.
9. Мирошников М. М. Иконика // Журнал научной и прикладной фотографии. 1994. Т. 39. № 2. С. 54–72.
10. Мирошников М. М., Захаренков В. Ф., Мирзоева Л. А., Маковцов Г. А., Иозеп Е. А. Роль ГОИ им. С. И. Вавилова в создании бортовой аппаратуры обнаружения космического эшелона системы предупреждения о ракетном нападении // Оптический журнал. 2007. Т. 74. № 10. С. 7–12.
11. Мирошников М. М. Выдающиеся русские ученые В. В. Ломоносов, Д. С. Рождественский, С. И. Вавилов и научная школа Государственного оптического института. СПб.: РИО СПбГУ ИТМО, 2008. 150 с.
12. Оружие и технологии России. Энциклопедия. XXI век. Т. XI: Оптико-электронные системы и лазерная техника / Оптико-электронные системы космического контроля и наблюдения. М.: Изд. дом «Оружие и технологии», 2005. С. 376–397.

13. **Потапов А. С.** Распознавание образов и машинное восприятие. СПб.: Изд-во «Политехника», 2007. 548 с.
14. **Свиридов К. Н.** Оптическая локация космического мусора. М.: Изд-во «Знание», 2006. 487 с.
15. **Свиридов К. Н.** Технологии достижения высокого углового разрешения оптических систем атмосферного «видения». М.: Изд-во «Знание», 2005. 451 с.
16. **Тарасов В. В., Якушенков Ю. Г.** Инфракрасные системы «смотрящего» типа. М.: Логос, 2004. 444 с.
17. **Федосеев В. И., Колосов М. П.** Оптико-электронные приборы ориентации и навигации космических аппаратов. М.: Логос, 2007. 248 с.
18. **Чесноков А. Г.** Фронт проходит через КБ / Рубежи обороны в Космосе и на Земле. Очерки истории ракетно-космической обороны. М.: Изд-во «Вече», 2003. 752 с.

Предисловие к третьему изданию	3
Введение. Основные определения, принципы работы, элементы и характеристики оптико-электронных приборов	7
§ 1. Определение и классификация оптико-электронных приборов	8
§ 2. Обобщенная схема оптико-электронного прибора	8
§ 3. Краткие сведения об элементах обобщенной схемы оптико-электронного прибора	10
Источники излучения и промежуточная среда	—
Оптическая система	11
Приемники излучения (определение и классификация)	14
Усилитель и другие элементы электронного тракта	18
§ 4. Основные характеристики оптико-электронных приборов	20
§ 5. Системы обзора и анализа поля излучения (определение и классификация)	21
§ 6. Несканирующие системы обзора и анализа поля излучения простейшего типа (энергетические)	22
§ 7. Несканирующие системы, создающие изображение	23
§ 8. Обзор и анализ поля излучения за счет сканирования	25
§ 9. Растровые анализаторы поля излучения	26
Часть I. Сканирование	28
Глава 1. Случайный поиск	—
§ 1.1. Вероятность обнаружения при случайном поиске	—
§ 1.2. Среднее время обнаружения объекта при случайном и детерминированном поиске	31
Глава 2. Траектории сканирования при регулярном поиске (типы разверток)	33
§ 2.1. Траектории сканирования при колебательно-вращательном движении сканирующего поля	—
§ 2.2. Траектории сканирования при вращательно-вращательном движении сканирующего поля	36
§ 2.3. Траектории сканирования при колебательных перемещениях сканирующего поля в двух взаимно перпендикулярных направлениях, траектория сканирования «гусеница» и следящая развертка	38
Глава 3. Способы сканирования при регулярном поиске (типы сканирующих устройств)	40
§ 3.1. Сканирование электронным лучом	41
Основные принципы. Системы мгновенного действия и системы с накоплением	—
Диссектор	42
Видикон	44
§ 3.2. Сканирование световым лучом	46
§ 3.3. Оптико-механическое сканирование. Определение, классификация, приборы со сканированием за счет движения всей оптической системы, приборы, сканирующие за счет прецессии гироскопа	47
Глава 4. Сканирование зеркалами	49
§ 4.1. Основные положения	—
Сканирование в пространстве предметов и изображений	—
Типы сканирующих зеркал	51
Траектория сканирования плоским зеркалом	—
Примеры сканирующих устройств — тепловизоры «Рубин», «Филин» и камера Барнса	53
§ 4.2. Сканирование многогранными вращающимися зеркалами в оптико-электронной аппаратуре для картографирования и обзора местности	55
Принцип действия аппаратуры	—

	Поле обзора и угловой размер строки	60
	Скорость сканирования и минимальная длительность импульса	61
	Быстродействие коммутатора	62
§ 4.3.	Коэффициент использования и габаритные размеры многогранного сканирующего зеркала	64
	Сканирующая призма	—
	Сканирующая пирамида	72
§ 4.4.	Двухканальные схемы сканирования	76
§ 4.5.	Траектории сканирования многогранными вращающимися зеркалами	77
§ 4.6.	Чересстрочное сканирование в системе с многоэлементным приемником	80
§ 4.7.	Сканирование зеркалом, вращающимся вокруг оси, перпендикулярной к нему	83
Глава 5.	Сканирование преломляющими элементами: плоскопараллельной пластинкой и призмой	88
§ 5.1.	Соотношения, определяющие закон сканирования	—
§ 5.2.	Примеры сканирующих устройств — тепловизоры фирмы АГА	96
Глава 6.	Сканирование вращающимися объективами и оптическими клиньями, экранирующие системы и системы с изменяющимися оптическими свойствами	100
§ 6.1.	Сканирование вращающимися объективами	101
§ 6.2.	Сканирование оптическими клиньями	104
§ 6.3.	Сканирование отверстием в непрозрачном экране, движущемся в плоскости изображения	106
§ 6.4.	Сканирование путем управления оптическими свойствами деталей, входящих в оптическую систему	111
Часть II.	Растровая модуляция	112
Глава 7.	Измерительные свойства растров (кодирование и декодирование информации в системах с растровыми анализаторами)	—
§ 7.1.	Классификация и принцип действия растровых анализаторов	—
§ 7.2.	Амплитудная модуляция	115
§ 7.3.	Частотная модуляция	118
§ 7.4.	Фазовая модуляция	121
§ 7.5.	Амплитудно-частотная модуляция	130
§ 7.6.	Импульсно-частотная модуляция	133
§ 7.7.	Амплитудно-фазовая модуляция	137
§ 7.8.	Частотно-фазовая модуляция	146
§ 7.9.	Импульсная модуляция	148
Глава 8.	Преобразование растром пространственного распределения излучения в функцию времени	153
§ 8.1.	Структура и спектр модулированного потока излучения	—
§ 8.2.	Гармоническая модуляция излучения. Ошибки модуляции. Модуляция кратковременных импульсов (вспышек) излучения	160
	Идеальный гармонический модулятор	—
	Ошибки изготовления раstra-модулятора излучения	161
	Спектр модулированного излучения с учетом ошибок изготовления раstra	167
	Спектры Фурье вспышек излучения, прошедших через гармонический модулятор	173
§ 8.3.	Модуляция излучения вращающимся секторным растром (общие соотношения)	174
§ 8.4.	Модуляция секторным растром излучения, равномерно распределенного в пределах части сектора раstra	179
§ 8.5.	Модуляция секторным растром излучения, равномерно распределенного в пределах круглой диафрагмы поля	180
§ 8.6.	Модуляция излучения секторным растром при коническом сканировании	198
§ 8.7.	Модуляция излучения растром, имеющим форму барабана или перфорированной ленты	203

Часть III. Сигнал	207
Глава 9. Энергетические характеристики излучения	—
§ 9.1. Энергетические характеристики излучения	208
Поток излучения	—
Энергетическая сила света	209
Поверхностная плотность потока излучения	210
Поверхностно-угловая плотность потока излучения — энергетическая яркость	—
§ 9.2. Соотношения между энергетическими характеристиками излучения	212
Поток излучения в полусферу	—
Энергетическая освещенность от точечных и протяженных источников	213
§ 9.3. Мощность и спектральный состав излучения	218
§ 9.4. Влияние промежуточной среды на мощность и спектральный состав излучения	228
§ 9.5. Ослабление излучения атмосферой	234
Глава 10. Характеристики приемников излучения для сигнала	237
§ 10.1. Амплитудные (энергетические или световые) и спектральные характеристики приемников излучения	239
§ 10.2. Частотные характеристики приемников излучения	252
Аперiodическое звено — простейший эквивалент приемника излучения с точки зрения его частотной характеристики	—
Коррекция частотной характеристики приемника излучения	256
Глава 11. Амплитуда сигнала. Сочетание приемника излучения с усилителем	259
§ 11.1. Расчет амплитуды сигнала на выходе усилителя (общий случай)	261
§ 11.2. Расчет амплитуды сигнала для случая, когда приемник излучения представляет собой генератор изменения сопротивления	265
§ 11.3. Расчет амплитуды сигнала для случая, когда приемник излучения представляет собой генератор электродвижущей силы (ЭДС)	270
§ 11.4. Расчет амплитуды сигнала для случая, когда приемник излучения представляет собой генератор тока	275
Глава 12. Спектр сигнала. Основные определения и теоремы. Расчет спектров	277
§ 12.1. Спектры периодических сигналов	—
Гармонические колебания	278
Сложный периодический процесс	279
Периодическая последовательность прямоугольных импульсов	282
§ 12.2. Спектры непериодических сигналов, заданных одномерными вещественными функциями времени или пространства	286
§ 12.3. Свойства спектров одномерных вещественных функций	292
Теорема о спектре суммы	—
Теорема запаздывания	—
Теорема смещения, или теорема о транспозиции (переносе) спектра	293
Связь между произведениями функций и их спектров (формула Релея). Равенство (теорема) Парсевалю	294
Спектр произведения. Теорема о свертке спектров	295
Теорема о спектре свертки	296
Теорема о спектре производной	297
Теорема о спектре интеграла	—
§ 12.4. Расчет спектров Фурье некоторых импульсов и процессов, заданных одномерными вещественными функциями	298
Единичный скачок (единичная функция Хевисайда)	—
Прямоугольный импульс	299
Единичный импульс (дельта-функция Дирака)	305
Колоколообразный (гауссов) импульс	307
Косинусный и косинус-квадратный импульсы	309

	Гармонические колебания	313
	Сложный периодический процесс	—
§ 12.5.	Связь между спектром периодической последовательности импульсов и спектральной плотностью одиночного импульса той же формы	314
§ 12.6.	Спектры модулированных колебаний	316
	Вводные замечания	—
	Спектр амплитудно-модулированного колебания	317
	Спектр частотно-модулированного колебания	318
	Спектр колебания при фазовой модуляции	320
§ 12.7.	Функции с ограниченным спектром. Теорема Котельникова о дискретном представлении непрерывных сигналов	—
§ 12.8.	Спектры двумерных и многомерных вещественных функций	321
	Основные соотношения	324
	Двумерная дельта-функция Дирака	—
	Редукция преобразования Фурье к меньшему числу переменных	326
	Спектр сечения двумерной функции	327
	Двумерные спектры функций с разделяющимися переменными. Преобразование Фурье — Бесселя, или преобразование Ганкеля нулевого порядка	—
§ 12.9.	Пространственно-частотные характеристики (ПЧХ) объектов наблюдения при некогерентном освещении	328
	Основные соотношения	332
	ПЧХ точечного источника	—
	ПЧХ объекта прямоугольной формы	333
	ПЧХ круглого объекта равномерной яркости	334
	ПЧХ круглого объекта неравномерной яркости	—
	ПЧХ объекта вытянутой формы	335
§ 12.10.	Особые свойства спектров комплексных функций	336
	Спектры взаимно сопряженных комплексных функций	337
	Спектр свертки комплексных функций (теорема о спектре свертки)	339
	Спектр свертки взаимно сопряженных комплексных функций (теорема о спектре функции автокорреляции)	342
	Спектр квадрата модуля комплексной функции (частный случай теоремы о свертке спектров)	343
	Интегральная теорема Фурье	—
Г л а в а 13.	Реакция электрической и оптической систем на входное воздействие. Импульсная характеристика электрического фильтра и функция рассеяния оптической системы	344
§ 13.1.	Реакция электрической системы	—
§ 13.2.	Реакция оптической системы на некогерентное освещение	347
§ 13.3.	Реакция оптической системы на когерентное освещение. Взаимосвязь некогерентной и когерентной передаточных функций	351
Г л а в а 14.	Оптическая система как фильтр пространственных частот	355
§ 14.1.	Функция рассеяния и передаточная функция оптической системы при некогерентном освещении	356
	Пятно рассеяния представляет собой равномерно освещенный круг радиусом ρ_0	—
	Пятно рассеяния представляет собой круг, изменение освещенности внутри которого аппроксимируется гауссоидой вращения	357
	Изображение создается объективом, качество которого ограничивается только дифракцией	359
	Пятно рассеяния имеет квадратную форму, а распределение освещенности в нем аппроксимируется произведением косинусов в n -й степени	360
	ЧКХ оптической системы	364
§ 14.2.	Передаточная функция диафрагм, растров и приемника излучения при некогерентном освещении	368

§ 14.3.	Функция рассеяния и передаточная функция оптической системы при когерентном освещении. Примеры расчета.	370
§ 14.4.	Связь передаточных функций при некогерентном и когерентном освещении с фундаментальными характеристиками оптической системы: размерами и формой зрачка, фокусным расстоянием и качеством изображения.	398
Г л а в а 15.	Спектр сигнала на выходе усилителя оптико-электронного прибора при некогерентном освещении.	409
§ 15.1.	Изопланарная оптическая система и заданный закон сканирования	410
§ 15.2.	Примеры расчета спектра сигнала.	417
	Расчет спектра сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником излучения, установленным в плоскости изображения идеального объектива, когда переменные в функции распределения чувствительности приемника разделяются.	—
	Расчет спектра сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником излучения, установленным в плоскости изображения идеального объектива, когда переменные в функции распределения чувствительности приемника не разделяются	419
	Расчет спектра сигнала, вырабатываемого безынерционным приемником излучения, установленным в плоскости изображения объектива, обладающего аберрациями.	421
	Расчет спектра сигнала для случая, когда задан закон набегания изображения точечной цели на чувствительную площадку приемника излучения.	424
Часть IV.	Шум	428
Г л а в а 16.	Математические методы описания шума.	—
§ 16.1.	Законы распределения вероятностей случайных функций.	429
§ 16.2.	Математическое ожидание случайной функции.	434
§ 16.3.	Дисперсия случайной функции.	435
§ 16.4.	Корреляционная функция случайного процесса.	436
§ 16.5.	Энергетический спектр случайного процесса или спектр Хинчина — Винера.	438
§ 16.6.	Корреляционная функция и спектр Хинчина — Винера на выходе линейной инвариантной системы.	445
Г л а в а 17.	Методы оценки и расчета уровня шумов отдельных участков тракта оптико-электронного прибора.	446
§ 17.1.	Коэффициент шума.	447
§ 17.2.	Шумовая полоса пропускания.	448
§ 17.3.	Шумовые эквивалентные схемы.	450
Г л а в а 18.	Шум приемников излучения и согласование его с усилителем. Порог чувствительности и другие характеристики приемников излучения	453
§ 18.1.	Тепловой шум	—
§ 18.2.	Дробовой шум	460
§ 18.3.	Токовый шум	468
§ 18.4.	Генерационно-рекомбинационный шум.	471
§ 18.5.	Фотонный шум (общие соотношения).	472
§ 18.6.	Фотонный шум тепловых приемников.	480
§ 18.7.	Фотонный шум фотонных приемников.	483
§ 18.8.	Температурный шум.	498
§ 18.9.	Микрофонный шум.	501
§ 18.10.	Вычисление и согласование шумов.	502
§ 18.11.	Подавление теплового шума входной цепи. Шум при коррекции инерционности.	504
§ 18.12.	Выбор оптимального сопротивления приемника излучения и его нагрузки.	507
§ 18.13.	Порог чувствительности и другие характеристики приемников излучения, описывающие его способность обнаружить слабый сигнал	510

§ 18.14. Характеристики некоторых приемников излучения	517
Глава 19. Шум объекта наблюдения и фона	519
§ 19.1. Шум объекта наблюдения	521
§ 19.2. Шум фона	—
Часть V. Отношение сигнала к шуму и основы энергетического расчета пассивных оптико-электронных приборов. Некоторые вопросы теории выделения оптического сигнала на фоне случайных помех	529
Глава 20. Основы энергетического расчета	—
§ 20.1. Общие соотношения	530
§ 20.2. Отношение сигнала к шуму на выходе усилителя оптико-электронного прибора. Уравнения дальности и чувствительности	534
§ 20.3. Решение уравнений дальности и чувствительности оптико-электронного прибора	542
Рассчет коэффициента ρ_0	543
Необходимое отношение сигнала к шуму	547
Глава 21. Оптимальный фильтр, его структура и способы реализации	552
§ 21.1. Структура оптимального фильтра и его основные характеристики	—
Структура оптимального фильтра	—
Амплитудно-частотная характеристика	553
Фазо-частотная или фазовая характеристика	554
§ 21.2. Сигнал и шум на выходе оптимального фильтра	555
§ 21.3. Импульсная характеристика оптимального фильтра	557
§ 21.4. Способы реализации оптимального фильтра	562
Оптимальный линейный фильтр с сосредоточенными постоянными	—
Оптимальный фильтр в виде коррелометра	570
Оптимальная фильтрация при окрашенном шуме	572
Глава 22. Основные принципы выделения оптического сигнала на фоне случайных помех	573
§ 22.1. Равномерный фон	574
§ 22.2. Влияние побочного излучения на работу радиометра	577
§ 22.3. Неравномерный фон	580
Часть VI. Некоторые новые области применения оптико-электронных приборов	586
Глава 23. Тепловидение. Определение, основные законы, первые разработки и результаты	—
§ 23.1. Основы тепловидения	—
§ 23.2. Порог чувствительности (пороговая чувствительность) тепловизора	607
§ 23.3. Разрешающая способность тепловизора	614
§ 23.4. Передаточная функция видеоконтрольного (индикаторного) устройства и ее спектр. Спектр сигнала и шума на экране индикатора	618
§ 23.5. Передаточная функция и частотно-контрастная характеристика тепловизора	625
§ 23.6. Простейшие законы зрительного восприятия и их использование при разработке сканирующих тепловизоров	631
Острота зрения	—
Частотно-контрастная характеристика глаза	635
Случайный поиск изображения объекта на экране индикатора	636
Интегрирующие свойства глаза (законы пространственной и временной суммации)	638
Восприятие шума и отношения сигнала к шуму на экране индикатора	639
Вероятность обнаружения и вероятность опознавания изображения объекта наблюдения на экране индикатора	646
Глава 24. Иконика. Определение, основные законы, первые результаты	650

§ 24.1. Содержание и структура иконки.	651
§ 24.2. Фундаментальные законы зрительного восприятия.	656
Закон контрастного восприятия света.	—
Закон формирования уровня адаптации.	658
Закон константности зрительного восприятия.	660
Закон зрительного восприятия сюжетного изображения.	661
Закон экстремальности зрительного восприятия информации (света или изображения).	662
§ 24.3. Иконика и обработка изображений.	665
Общий алгоритм обработки изображений.	—
Оценка качества (паспортизация) изображения.	666
Линейные преобразования изображений.	669
Нелинейные преобразования изображений.	671
Структура нелинейного статистического безынерционного преобразования и его фундаментальное свойство.	673
Примеры обработки изображений и методы реализации алгоритмов обработки в оптико-электронной аппаратуре.	678
Список литературы	683
Дополнительный список литературы	689

Михаил Михайлович МИРОШНИКОВ
**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ**
Учебное пособие

Издание третье,
исправленное и дополненное

Зав. редакцией
физико-математической литературы *А. П. Погода*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 18.08.10.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 60×90¹/₁₆.
Печать офсетная. Усл. п. л. 44,00. Тираж 1500 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122

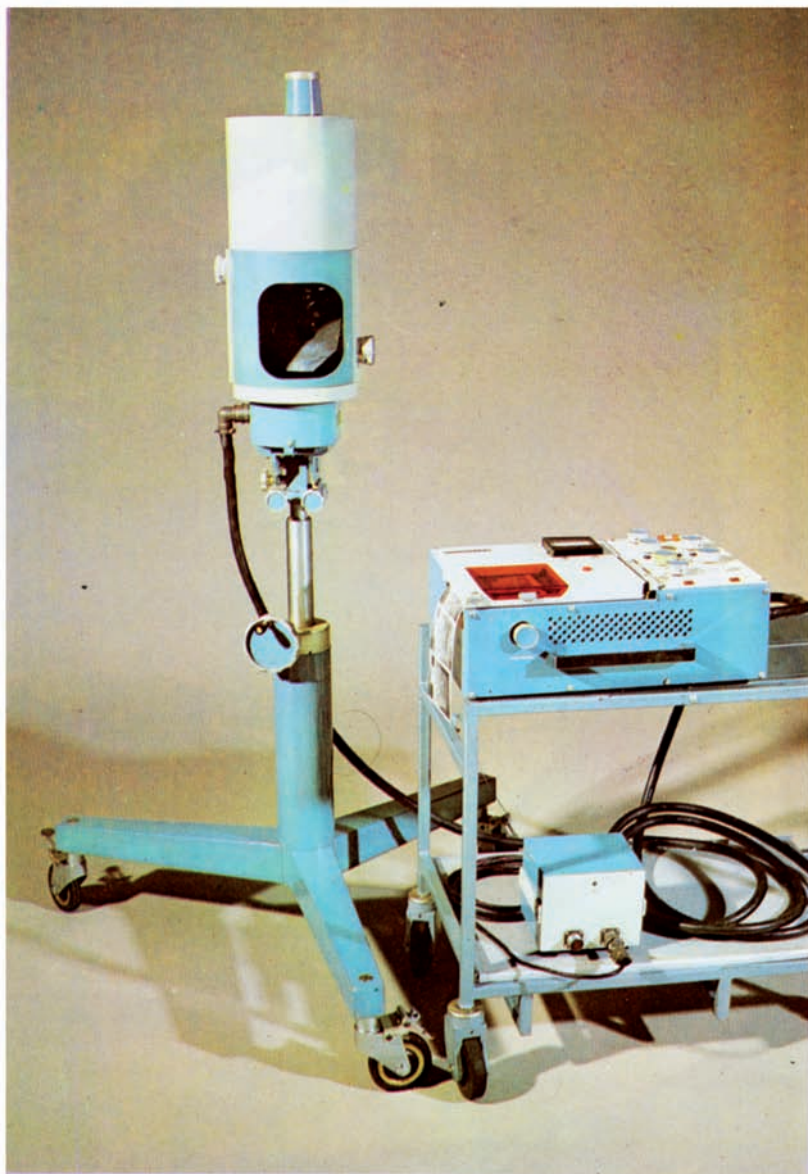


Рис. 40, а. Тепловизор «Рубин-2»

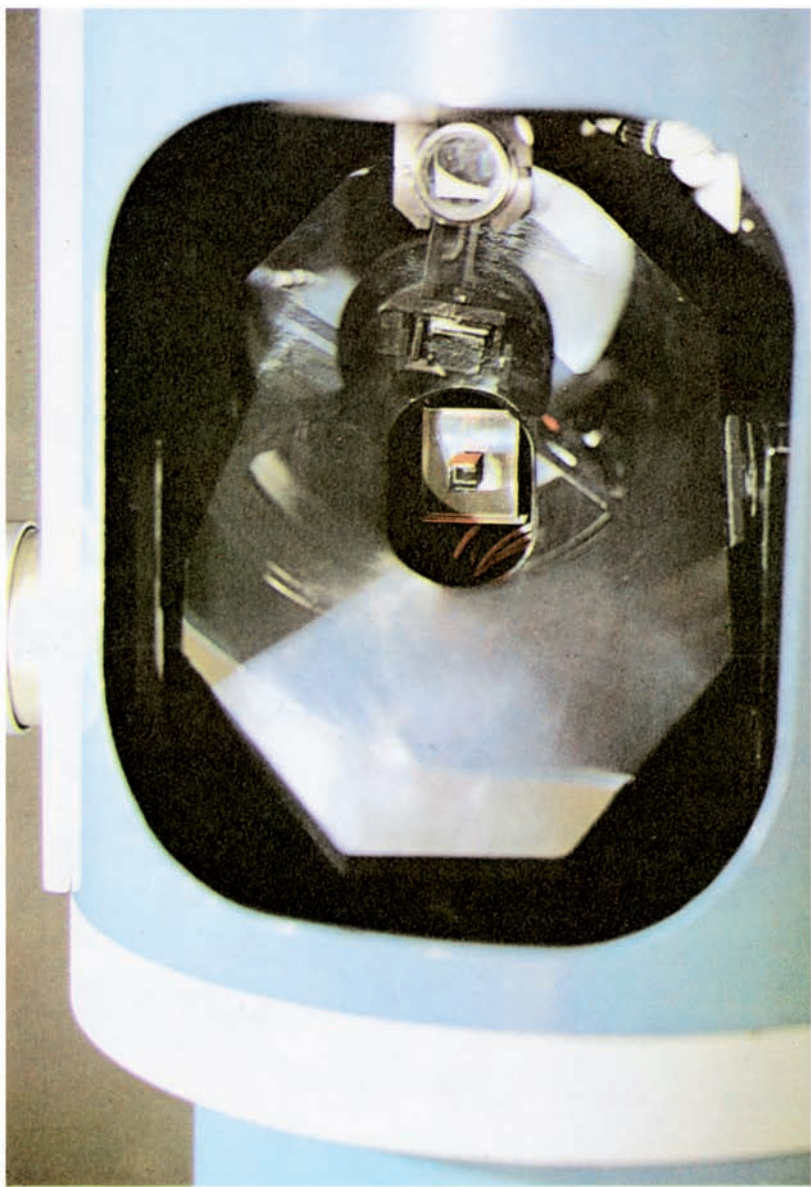


Рис. 40, б. Оптическая головка тепловизора «Рубин-2» (видны сканирующее зеркало и фотоприемное устройство)

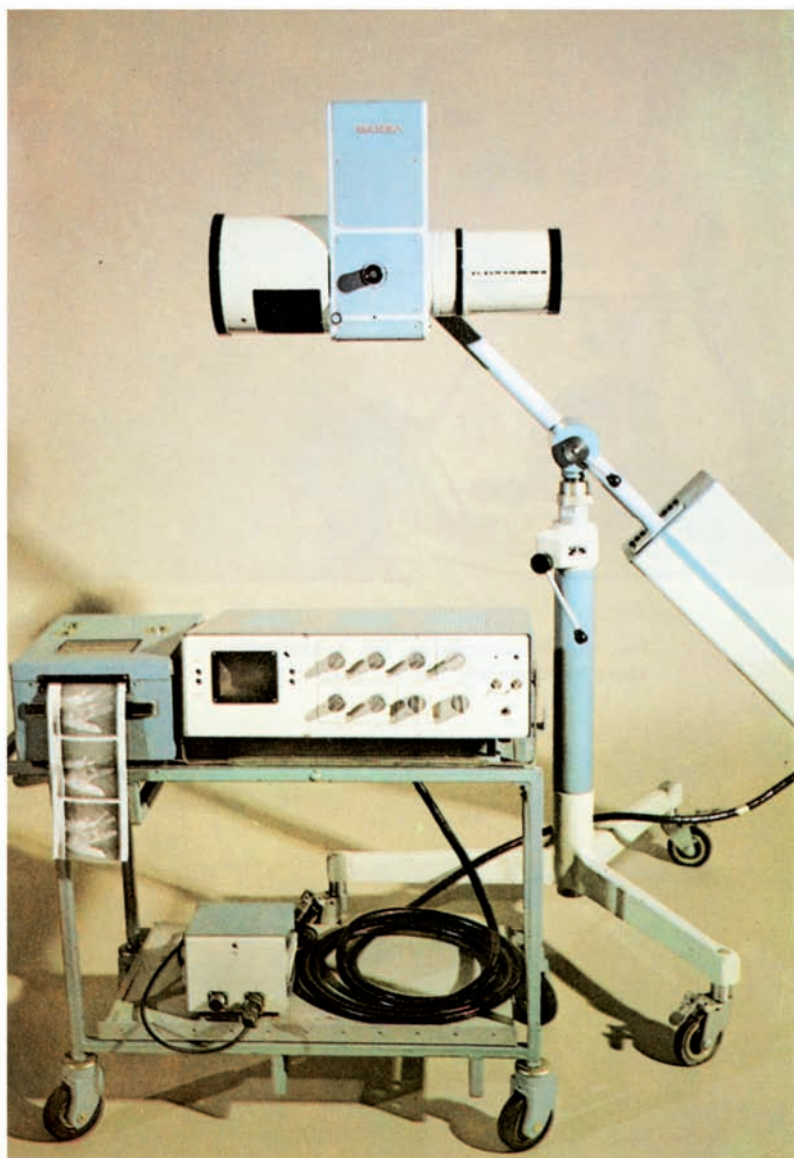


Рис. 41. Тепловизор «Рубин-3» («Факел»)

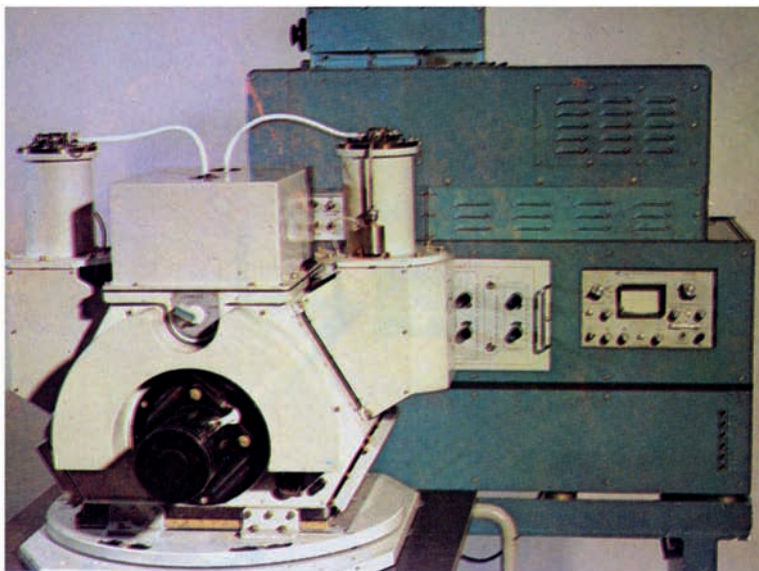


Рис. 45, а. ИК-аппаратура для картографирования и обзора местности с самолета.

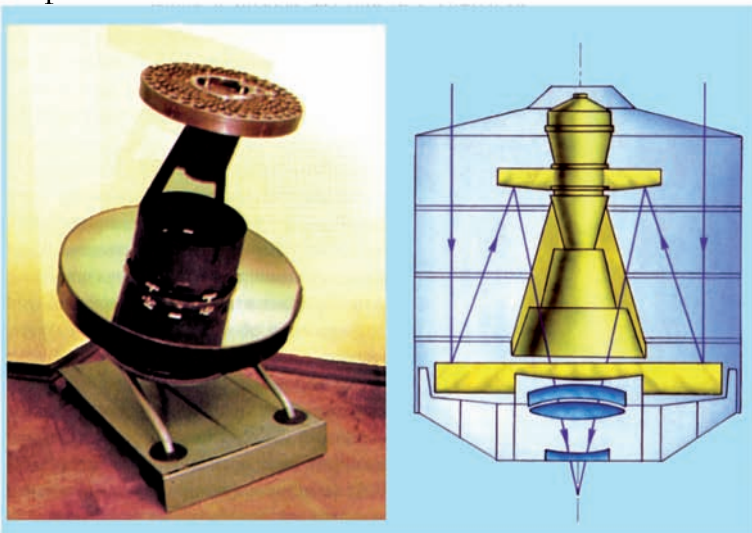


Рис. 45, в. Объектив сканирующего тепловизионного космического телескопа с многоэлементным приемником излучения. В объективе два асферических зеркала из бериллия, главное зеркало имеет $\varnothing 1$ м; конденсор из кристаллов фторидов; масса объектива 90 кг.

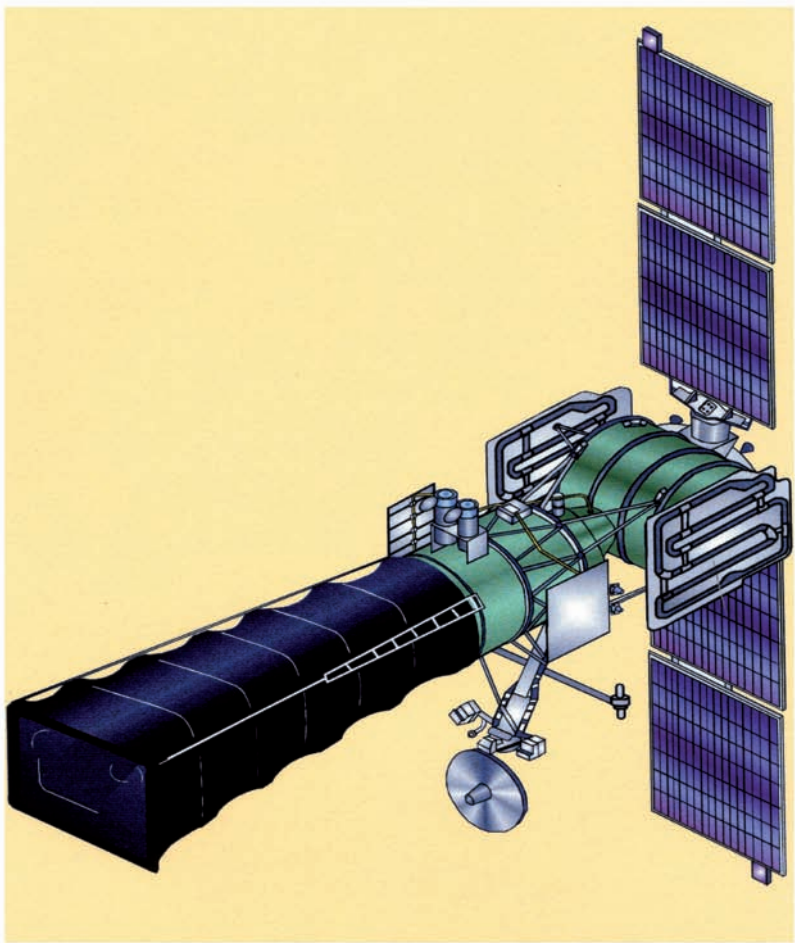


Рис. 45, б. Сканирующий тепловизионный космический телескоп с многоэлементным приемником излучения (фотография с модели телескопа).



Рис. 88, а. Тепловизор «АГА-780»

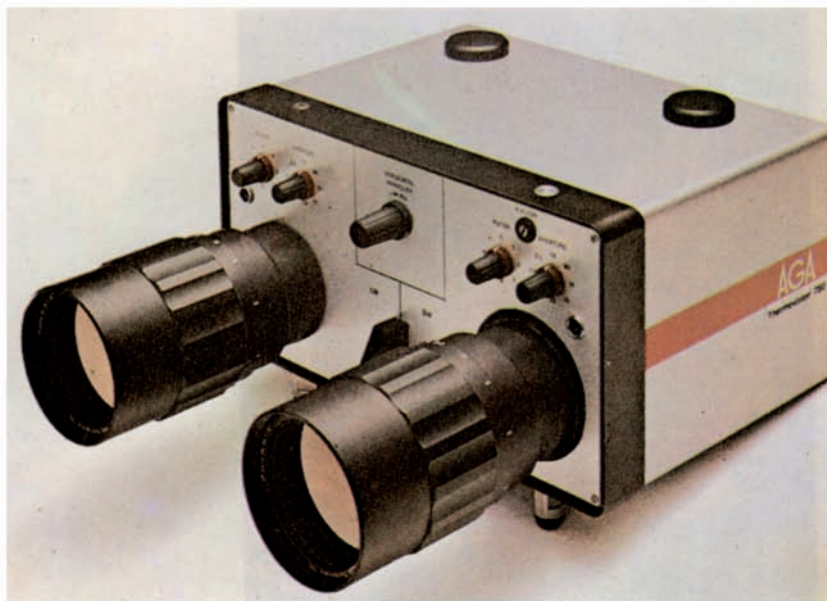


Рис. 88, б. Двухспектральная оптическая головка тепловизора «АГА-780»

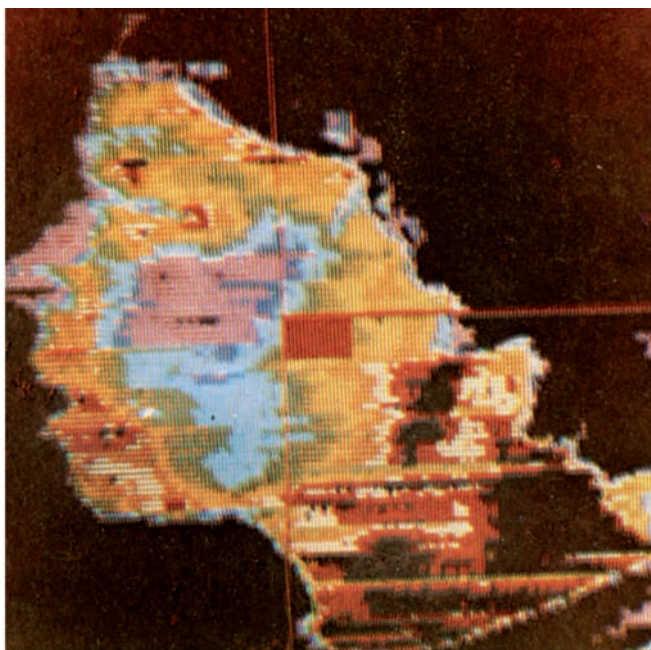


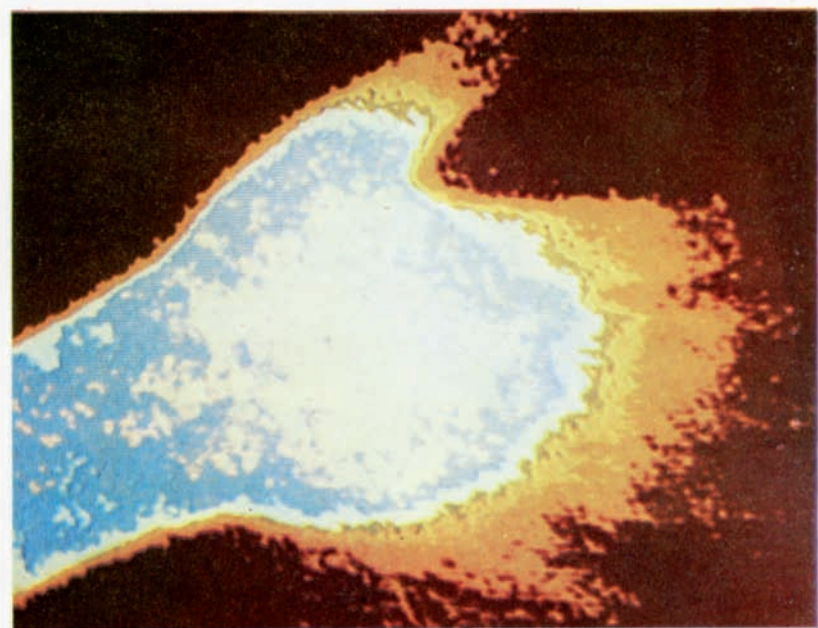
Рис. 91, б. Цветная термограмма лица
(тепловизор «Радуга-МТ»)

Рис. 92, з. Цветная термограмма кисти
руки мужчины до курения.



Рис. 92, д. Цветная термограмма той же
кисти руки через 15 мин. после курения.





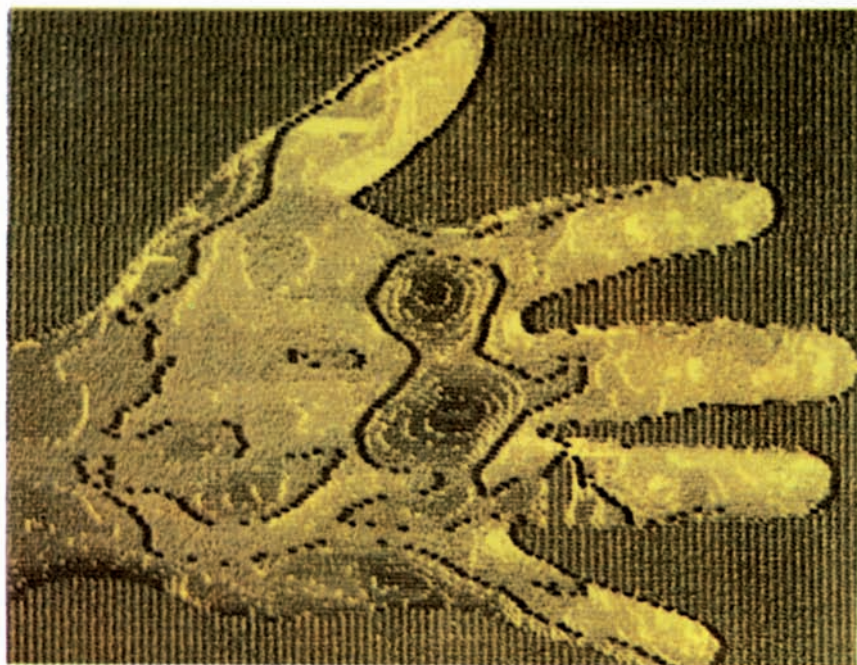


Рис. 92, е. Термограмма кисти руки (хорошо видна строчная структура термографического изображения)



Рис. 103. Тепловизор «Янтарь»



Рис. 359. Тепловизор-дефектоскоп «Статор-1»



Рис. 361. Тепловизионная система «Радуга-МТ»



Рис. 362. Тепловизор «Кристотермограф» с гранулированным жидкокристаллическим преобразователем ИК-изображения

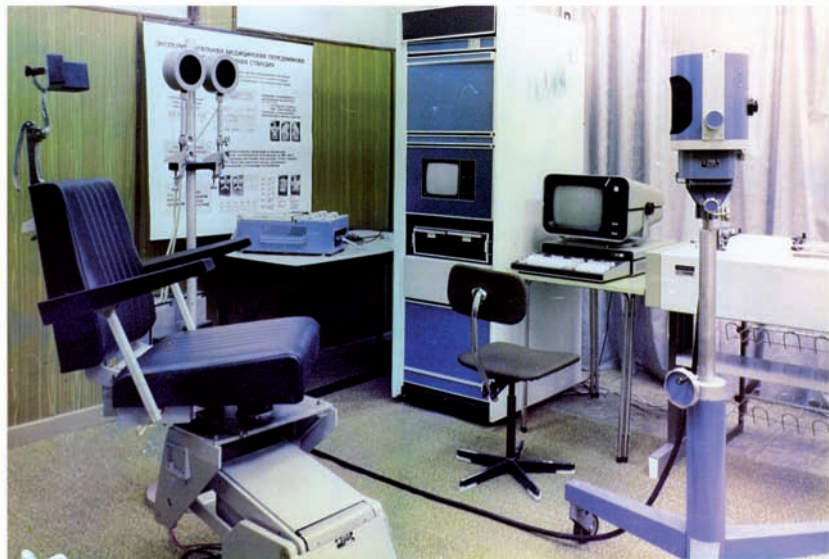


Рис. 363. Процедурный кабинет тепловизионной диагностики, оснащенный тепловизором, автоматизированным местом врача, контрольной аппаратурой и креслом пациента.



Рис. 393. Цветное изображение планеты Марс, синтезированное по черно-белым снимкам, полученным через синий, зеленый, красный фильтры с борта советского космического корабля «Марс-3» в декабре 1971 года.