

И. Е. Тарапов

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

Часть 2

**ОБЩИЕ ЗАКОНЫ КИНЕМАТИКИ
И ДИНАМИКИ**

Харьков
«Золотые страницы»
2002

УДК 531.531.3

ББК 22.25

T19

Тарапов И. Е.

T19 **Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч. 2: Общие законы кинематики и динамики.** — Харьков: Золотые страницы, 2002. — 516 с.

ISBN 966-8032-11-X

Содержание книги составляют основные понятия, законы и методы механики сплошных сред, которые используются для исследования движения жидкостей, газов и деформируемых твердых тел.

Книга состоит из трех частей.

Первая часть «Векторный анализ и начала тензорного исчисления» (в соавторстве с А. И. Борисенко), выдержавшая уже 6 изданий, содержит необходимый математический аппарат, применяемый для описания и изучения движения сплошной среды.

Во второй части излагаются кинематика и теория деформаций сплошной среды в эйлеровом и лагранжевом описаниях, формулируются основные законы динамики и термодинамики, выводятся дифференциальные уравнения движения среды, обсуждаются возможные типы начальных и граничных условий. Рассмотрены вариационные принципы в механике жидкости и газа и в теории упругости, методы теории размерностей и подобия. Теоретический материал сопровождается подборкой задач с решениями в конце каждого параграфа. Приведены также сведения об ученых, создававших механику сплошной среды.

Третья часть содержит некоторые главы гидромеханики.

Книга предназначена студентам, аспирантам, преподавателям, научным сотрудникам университетов и высших технических учебных заведений.

УДК 531.531.3

ББК 22.25

ISBN 966-8032-11-X

© Тарапов И. Е., 2002
© ООО «Золотые страницы», 2002

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книги положено содержание лекций по механике сплошной среды, которые в течение ряда лет читались мною в Харьковском университете для студентов специальности «Механика». Сюда также частично вошли лекции по специальным курсам, таким, как магнитная гидродинамика, гидродинамика поляризующихся и намагничивающихся сред, некоторые задачи аэродинамики разреженных газов, механика сплошной среды переменной массы.

В изложении, отборе материала и в его оценке автор придерживается взглядов, высказанных во «Введении». Содержание любой науки, а фундаментальной особенно, весьма быстро обогащается новыми знаниями, добытыми в научных исследованиях. Поэтому, как всегда, приходится, с одной стороны, не быть консервативным, а с другой — учитывать то вечное правило, что невозможно, как говорил, ничтоже сумняшеся, один администратор, *«обнять необъятное»*.

В то же время, однако, сделана попытка предложить читателю целый ряд результатов исследований последних лет в области механики сплошной среды (или, во всяком случае, отослать к ним читателя путем ссылок), чтобы ими можно было воспользоваться. В этой связи часть материала представлена в основном тексте петитом.

Чтобы в какой-то мере дать представление о времени и о людях, создававших механику сплошной среды, текст снабжен подстрочными примечаниями.

Опыт свидетельствует о том, что в любой науке собственно теоретический материал — это лишь часть для ее познания. Можно утверждать, что только закрепленные в решении задач и в упражнениях теоретические знания превращаются в «силу». Поэтому, по примеру лучших монографий, в книге каждый раздел сопровождается задачами и упражнениями. Здесь же приводятся решения задач, и они часто служат дополнительным материалом к «практической теории».

В формировании книги очень помог конспект моих лекций, составленный доцентом В. И. Легейдой. Рукопись этого конспекта до сих пор «живет» на кафедре теоретической механики университета.

Если бы не коллектив этой кафедры, вряд ли книга была бы написана. Отдельные разделы рукописи были просмотрены сотрудниками: доцентом И. И. Иевлевым, старшим научным сотрудником И. Д. Борисовым, доцентом В. И. Легейдой, доцентом Л. П. Тереховым, доцентом В. И. Ермаковым, старшим научным сотрудником Н. Н. Кизиловой. Их советы и замечания мною учтены при подготовке рукописи к изданию. Много замечаний сделано весьма внимательными и требовательными редакторами — доцентом С. А. Пославским (он внес ряд ценных поправок и исправлений) и заведующим кафедрой доктором физико-математических наук Н. Ф. Пацегоном. Неоценимую помощь в подготовке материала оказала доцент кафедры Л. Н. Попова. В оформлении рукописи очень помогли доцент В. И. Легейда и инженер С. И. Иващенко, а также А. А. Тропина и М. В. Гончаренко. Всем моим коллегам я приношу здесь глубокую благодарность.

Особую признательность я выражаю моему неизменному литературному редактору А. В. Ефименко.

Финансовую поддержку в издании книги оказал мне А. С. Кагановский. Ему я искренне благодарен.

В наше время ученых у нас не балуют, мягко говоря. Издание научных монографий резко сократилось за последние годы. Не издавались и книги по механике сплошной среды. Автор надеется в какой-то степени восполнить этот пробел.

Предполагается, что настоящее издание, в котором изложены лишь общие законы механики сплошной среды, будет продолжено в отдельных частях, в которых излагаются закономерности движения жидкостей, газов и упругопластических тел.

Автор.
2000 – 2001 гг.

ВВЕДЕНИЕ

**Предмет механики
сплошной среды**

*Механика сплошной среды изучает движение
газов, жидкостей и твердых деформируемых
тел.*

Все эти физические тела можно рассматривать как различные агрегатные состояния вещества. Хотя «обычное» твердое тело имеет определенную форму, которую оно изменяет лишь под действием внешних усилий, а любой газ и привычная жидкость весьма легко деформируются, между этими состояниями вещества трудно установить строгие границы.

Так, например, некоторые полимерные растворы в одних условиях ведут себя, как жидкости, в других — как твердые тела; краски, желе обладают свойствами упругого тела, но если их интенсивно перемешать, они начинают течь, как жидкости; струя воды под действием очень краткосрочного удара разрушается, как хрупкое твердое тело; с другой стороны, например, сапожный вар (хвойная смола, очищенная и сгущенная варкой) в обычных условиях — твердое тело, а под влиянием долговременного усилия течет, как обычная жидкость.

Еще меньше различий между жидкостями и газами. Если исходить из обыденных представлений, что газ отличается от жидкости прежде всего тем, что у него больше сжимаемость, то такое утверждение в определенной мере условно: при движении газов со скоростями, значительно меньшими скорости звука, оказывается, что их сжимаемостью можно пренебречь. В то же время нельзя пренебрегать изменением плотности воды на больших океанских глубинах.

Различия в молекулярной структуре газов, жидкостей и твердых тел, конечно, существуют, но и они в основном проявляются в количественной стороне межмолекулярных взаимодействий.

Так, например, между любыми двумя изолированными молекулами всех этих тел действуют межмолекулярные силы, которые (если нет химической связи и ионизации) при малых расстояниях (до $\sim 10^{-8}$ см) являются отталкивающими, но уже при расстояниях между центрами молекул порядка $10^{-7} \div 10^{-6}$ см переходят в слабые силы притяжения, которые убывают с расстоянием r как r^{-8} (на больших расстояниях). Когда молекулы находятся на расстоянии l_0 , при котором межмолекулярная сила меняет

знак, между ними наступает состояние устойчивого равновесия. Для большинства простых молекул $l_0 = (3 \div 4) \cdot 10^{-8}$ см. Для газов из простых молекул среднее межмолекулярное расстояние равно $\sim 10l_0$, а для жидкостей и твердых тел оно порядка l_0 (при нормальной температуре и давлении). Поэтому, если в газах молекулы движутся в основном (кроме случаев столкновения) прямолинейно и равномерно, ибо не взаимодействуют с «соседями», то в жидкостях и твердых телах любая молекула испытывает воздействие силового поля соседних молекул. В жидкостях и твердых телах молекулы настолько плотно «упакованы», насколько допускают силы отталкивания.

В твердых телах молекулы совершают лишь колебательные движения относительно своих устойчивых положений. При повышении температуры, когда твердое тело переходит в жидкое состояние, расположение молекул, по-видимому (кинетическая теория жидкостей еще не завершена), остается лишь отчасти упорядоченным, хотя и непрерывно меняется (вследствие чего жидкости так легко деформируются). Таким образом, по плотности жидкости гораздо ближе к твердым телам, а по способности легко изменять свою форму — к газам. Хотя молекулярные механизмы деформирования жидкостей и газов различны, эти два состояния могут быть описаны, как будет показано дальше, одной и той же формулой деформирования среды, отражающей наличие сил вязкости и давления.

Отмеченные черты физического сродства газов, жидкостей и твердых тел лежат в основе их *двух общих макроскопических свойств*.

Во-первых, все эти тела, изучаемые в привычных для нас масштабах, представляют собой настолько плотные, сплошные вещества, без видимых дыр и пустот, что всегда можно рассматривать их полностью заполняющими занимаемые ими пространственные области. Иными словами, их структура в обычных земных масштабах такова, что естественно считать их *континуумом*, непрерывной средой.

Во-вторых, в процессе своего движения все эти физические тела могут в той или иной степени деформироваться, изменять свою форму и объем. При этом совершаемая при деформировании работа может переходить в тепло, так что приходится рассматривать не только механическую, но и другие (в первую очередь тепловую) формы движения материи.

Эти два общих физических свойства явились исходными для построения механической модели сплошной среды, в рамках которой и изучается движение газов, жидкостей и деформируемых твердых тел.

Механическая модель сплошной среды

Под сплошной средой понимается механическая система, которая непрерывным образом (сплошь) заполняет определенную пространственную область и может деформироваться в процессе движения.

Следует остановиться на тех физических фактах, которые позволяют ввести в рассмотрение модель сплошной среды как некоторой абстракции, совершенно игнорирующей молекулярную структуру физических тел.

На первый взгляд, молекулярное строение не позволяет говорить о том, что вещество сплошь, непрерывным образом, заполняет некоторое пространство, ибо это означает бесконечную делимость такого пространства. Иными словами, какой бы малый элемент пространственной области, заполненной сплошной средой, мы не взяли, он при допущении о бесконечной делимости области должен сохранять все изначальные свойства сплошной среды, скажем, иметь массу, не зависящую от времени (если макропроцессы в среде стационарны), содержать среду того же состава и компонентности, что и среда в целом, и т.п. Но как можно говорить о непрерывном распределении массы вещества, если она сосредоточена в ядрах отдельных атомов с плотностью ядерного вещества порядка 10^{14} г/см³, причем сами ядра имеют размеры порядка 10^{-13} см? Это означает, что если, например, всю массу стометрового металлического куба с удельным весом порядка 10 г/см³ плотно, без промежутков упаковать, то она займет объем, равный объему булавочной головки. А все остальное — это «дырка», пустота, не обладающая массой! Эти пустоты можно очень простым приемом обнаружить, например, в такой уж куда более «сплошной» среде, как вода: если воду сжать до 7000 атм, то она уменьшит свой первоначальный объем более чем на 30%. Мы уже не говорим о сжимаемости газов, где в 1 см³ содержится около 10^{19} молекул, имеющих радиус взаимодействия порядка 10^{-18} см, и если представить себе, что все их можно плотно прижать друг к другу, то они займут всего 10^{-6} см³, т. е. кубик со стороной 0,1 мм.

Таким образом, можно считать, что все физические тела, которые мы хотим моделировать сплошной средой, состоят в основном из пустот и дырок, где нет вещества. И тем не менее, при помощи механической модели сплошной среды можно — и весьма успешно, как показала длительная научная практика, — изучать движение газов, жидкостей, деформируемых твердых тел. Все дело в том, что понимать под бесконечно малым объемом dV пространственной области, заполненной сплошной средой, при предположении о бесконечной делимости этой области.

Дискретная структура реальных физических тел перестанет быть помехой при изучении их движения с помощью модели сплошной среды (говорят «в приближении сплошной среды»), если под dV понимать не математически бесконечно малую величину, а физически достаточно малый объем, обладающий следующими двумя свойствами.

Во-первых, его линейный масштаб L_{dV} значительно меньше характерных размеров (масштабов) рассматриваемых в механике сплошной среды задач.

Во-вторых, объем dV должен быть настолько большим, чтобы в каждый момент времени содержать достаточное (с точки зрения статисти-

ки) число молекул, атомов и других элементарных частиц вещества, позволяющее получить надежные усредненные характеристики вещества и статистическое постоянство числа этих частиц. Иначе говоря, вылет или влет одной, десятка беспорядочно движущихся частиц не должен существенно влиять ни на массу, ни на состав вещества в dV , ни на другие свойства, присущие веществу в целом.

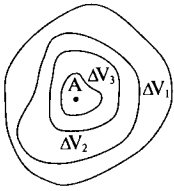


Рис. 1

Только в этом случае малая порция вещества в объеме dV может достаточно полно представлять все вещество и в то же время занимать настолько малую область, чтобы обеспечить делимость пространства в определенном приближении. Этот элемент области называется *макродифференциалом*, а его содержимое — *частицей сплошной среды*.

Таким образом, для характерного размера макродифференциала необходимо выполнение сильного неравенства

$$l \ll L_{dV} \ll L, \quad (0.1)$$

где L — характерный размер (масштаб) задач сплошной среды, l — масштаб микроструктуры вещества, моделируемого сплошной средой. Для газов, например, в качестве l может быть взята длина свободного пробега молекул ($l \sim 10^{-7}$ см при нормальных условиях).

При выполнении (0.1) и принятии dV в качестве геометрической точки можно говорить о возможности введения характеристик сплошной среды в виде непрерывных функций координат и времени.

Представим себе мысленный эксперимент по определению, например, плотности вещества в момент времени t в некоторой точке пространства A (рис. 1), имея в виду введение в рассмотрение функции плотности сплошной среды $\rho(t, \mathbf{r})$. Последующие рассуждения позволяют оценить и размеры макродифференциала dV .

Окружим точку A произвольной замкнутой поверхностью, ограничивающей объем ΔV , и определим массу ΔM вещества в этом объеме. Среднее значение плотности вещества в объеме ΔV по определению равно

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

Возьмем последовательность объемов, стягивающихся в точке A

$$\Delta V_1 > \Delta V_2 > \Delta V_3 > \dots$$

и по соответствующим $\Delta M_1, \Delta M_2, \Delta M_3, \dots$ определим для каждого из объемов среднюю плотность вещества в нем, т. е.

$$(\rho_{\text{ср}})_k = \frac{\Delta M_k}{\Delta V_k}.$$

На графике этой величины как функции от величины объема ΔV (рис. 2) можно отметить характерные участки.

При больших ΔV плавный график $\rho_{\text{ср}}$ зависит от величины ΔV : сказывается неоднородность распределения

вещества в окрестности точки A . По мере стягивания ΔV к точке A эта зависимость исчезает, график, оставаясь плавным до некоторого $(\Delta V)_0$, становится параллельным оси абсцисс. При $\Delta V < (\Delta V)_0$ зависимость становится нерегулярной и даже все более нестационарной. В этой области начинает сказываться молекулярное строение вещества: случайный вылет (влет) некоторого количества молекул придает графику иррегулярность и случайность, размеры их путей между столкновениями становятся сравнимыми с линейным размером $(\Delta V)_0$.

Если же ограничиться рассмотрением объемов $\Delta V > (\Delta V)_0$, а $(\Delta V)_0$ возможно принять за точку, то в этих пределах плотность среды в точке A можно однозначно определить как

$$\rho(A) = \lim_{\Delta V \rightarrow (\Delta V)_0} \rho_{\text{ср}} = \lim_{\Delta V \rightarrow (\Delta V)_0} \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

При попытке проводить измерения вплоть до $\Delta V = 0$ мы не получим однозначного предела

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \rho_{\text{ср}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V},$$

поскольку в рассматриваемый момент стягиваемый объем может по-

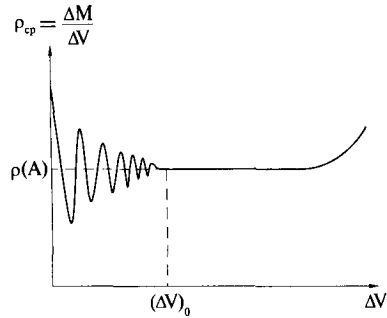


Рис. 2

пасть на ядро атома (и тогда $\lim \rho_{\text{ср}} = \sim 10^{14}$ г/см³) или он не будет содержать ядра (и тогда $\lim \rho_{\text{ср}} = 0$).

Величина $(\Delta V)_0 = dV$ для данного строения вещества может быть принята за макродифференциал, и теперь остается оценить его линейные размеры и то, насколько этот элемент является элементарным, т. е. может ли он быть в каком-то приближении принят за геометрическую точку. При этом распределение плотности вещества по пространству станет возможным считать непрерывной и дифференцируемой функцией, поскольку разность результатов вычисления плотности в соседних точках в близкие моменты времени может быть сделана как угодно малой, если макродифференциал dV рассматривается как точка пространства.

Рассмотрим такую «несплошную» среду, как воздух, в 1 см³ которого при нормальных условиях содержится около $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Длина свободного пробега молекул при этом равна примерно 10^{-7} см, а радиус их взаимодействия порядка 10^{-8} см. В обычных «земных» задачах гидроаэромеханики кубик размером в 1 микрон (10^{-4} см) вполне может быть принят за геометрическую точку, поскольку разницей величин (плотности, скорости, давления и т. д.) на расстояниях менее миллиметра редко кто интересуется. Так что можно считать правую часть неравенства (0.1) выполненной. В то же время этот кубик содержит около 10^7 молекул, которые, по крайней мере в среднем, тысячу раз столкнутся, прежде чем вылететь из него. Следовательно, и левая часть неравенства выполнена, ибо размер кубика в 1000 раз больше длины свободного пробега молекул, а молекул в кубике вполне достаточно, чтобы обеспечить надежные средние (с точки зрения статистики) величины всех механических свойств молекул и статистическое постоянство их в каждый момент времени. Таким образом, если в качестве макродифференциала принимать кубик воздуха размерами 1 микрон, содержащий при нормальных условиях около 10^7 молекул, то можно решать большинство задач аэродинамики в приближении непрерывного распределения физических характеристик воздуха.

Если отыскивать размеры макродифференциала для воздуха на высоте 300 км над уровнем моря, где в 1 см³ содержится примерно $10^{10} \div 10^9$ молекул, то 10^7 молекул будет в кубике порядка 10^{-3} см³, т. е. с ребром около 1 мм. Так что, строго говоря, если оставить ту же степень приближения сплошной среды, то все характерные размеры рассматриваемых задач в такой высотной аэромеханике должны быть в 1000 раз больше.

Но и межзвездный газ, в котором содержится одна частица в 1 см³, можно рассматривать в том же приближении сплошной среды. Только в этом случае объем макродифференциала должен быть примерно 10^7 см³, а его ребро, следовательно, около 1 м, чтобы содержать те же 10^7 молекул. Конечно, такая «сплошная среда» не годится для изучения движения в ней земных ракет и самолетов, но в том же приближении вполне можно решать задачи аэромеханики о движении в ней таких космических тел, характерный размер которых имеет порядок километра.

Аналогично тому, как было введено понятие плотности сплошной среды как функции пространственных координат и времени, можно ввести в качестве непрерывных функций другие механические характеристики сплошной среды: поле скорости среды (как предел средней скорости центра масс вещества в последовательности объемов ΔV_k), поле температуры (как предел термодинамической температуры в ΔV_k), поле сил, действующих в сплошной среде, и др.

Приведенные рассуждения указывают на большие возможности использования модели сплошной среды для изучения движения тел с явно дискретной структурой. Весь вопрос заключается в том, насколько успешно в условиях конкретной задачи удастся удовлетворить двойному сильному неравенству (0.1). Если это неравенство нарушается, то тогда применяют методы статистической механики.

Основные гипотезы механики сплошной среды

Обычно отмечают три основных гипотезы, принимаемые при использовании модели сплошной среды.

1. *Гипотеза сплошности* состоит в предположении о бесконечной делимости пространственной области, занятой сплошной средой.

Мы видели, что путем введения на физическом уровне понятия макродифференциала как бесконечно малой области пространства, занятого сплошной средой, можно считать, что реальные газы, жидкости и твердые тела, рассматриваемые в приближении сплошной среды, удовлетворяют гипотезе сплошности. При ее принятии можно всегда считать, что бесконечно малые частицы сплошной среды (содержимое макродифференциалов dV), являясь «полномочными представителями» всей среды, могут быть выбраны любой объемной формы, лишь бы они сплошь заполняли пространственную область. Таким образом, *частица сплошной среды* как механическая система содержит множество элементарных частиц вещества — атомов, молекул и др., причем чем больше, тем надежнее можно говорить о физических свойствах частицы сплошной среды.

В сплошной среде не допускаются «дырки», пустоты, сравнимые по величине с макродифференциалом. Пустоты или вкрапления другой среды

(фазы) допустимы лишь в таком количестве и таких размеров, чтобы можно было получить соответствующие статистические средние по макродифференциалу для отдельной компоненты или фазы. При этом эти «фазовые» и «компонентные» макродифференциалы должны иметь размеры того же порядка, что и среды в целом (§ 13). Тогда говорят о многокомпонентных или многофазных сплошных средах. Вследствие этого и поскольку частицы сплошной среды, для которых определены значения функций макроскопических характеристик среды, могут быть расположены как угодно близко, эти функции можно рассматривать как непрерывные и дифференцируемые.

В то же время не исключаются из рассмотрения и случаи движения сплошной среды с *разрывами непрерывности*: при некоторых режимах течения в жидкостях и газах могут образовываться поверхности, особые линии и точки, где непрерывные характеристики среды, имея большие градиенты, меняются весьма значительно на малых расстояниях. Так, при сверхзвуковых течениях в газах возникают ударные волны — области, представляющие собой поверхности с толщиной порядка длины свободного пробега молекул (т. е. значительно меньше, чем L_{dV}), где очень резко меняются скорость, плотность, давление (см. § 15). Такие области могут быть рассмотрены как геометрические поверхности разрыва непрерывности. Считается, что при переходе среды через них плотность, давление и др. меняются скачкообразно на конечную величину.

Итак, гипотеза сплошности не исключает рассмотрения движения сплошной среды с геометрическими поверхностями конечных разрывов непрерывности, хотя и не допускает существования в среде пустот размеров, сравнимых с макродифференциалом.

2. В механике сплошной среды движение объектов обычно изучается в евклидовом пространстве. Таким образом, будем всегда предполагать возможность введения декартовой системы координат¹ для математической формулировки всех законов и положений.

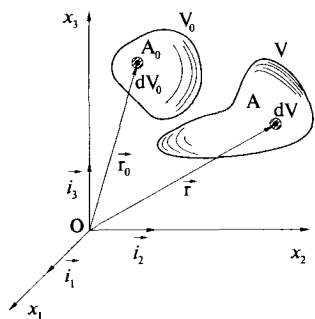


Рис. 3

¹Всюду в дальнейшем изложении будем пользоваться преимущественно прямоугольной декартовой системой координат, а проекции векторов и тензоров обозначать нижними индексами. В то же время в тех случаях, когда это необходимо по существу рассмотрения, будут использованы криволинейные координаты (с верхними индексами), а также ко- и контравариантные компоненты векторов и тензоров (см., например, [7]); ковариант-

Принятие гипотезы евклидовости пространства, в частности, позволяет достаточно просто сформулировать в координатах *условие сохранения сплошности среды*.

Пусть среда, занимающая в некоторый момент времени область V_0 , в другой момент в результате движения и деформирования перешла в область V (рис. 3), причем между координатами точек A и A_0 областей, определяющими положение произвольной частицы в двух состояниях среды, существует взаимно однозначное соответствие, так что существуют однозначные вектор-функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}). \quad (0.2)$$

Вводя декартову систему координат, получаем $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$, $\mathbf{r}_0 = x_{0k} \mathbf{i}_k$, где \mathbf{i}_k — орты системы координат.

Условие взаимной однозначности преобразования (0.2) означает, что якобиан

$$J = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} \right| \equiv \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}} \right\|$$

не обращается в нуль и ограничен. В то же время условие

$$0 < J < \infty \quad (0.3)$$

в «материальном толковании» означает, что частица, находившаяся в точке A_0 , перешла в положение A , не исчезнув как частица. Действительно, учитывая, что элементы объема областей преобразуются по закону $dV = JdV_0$, заключаем, что во время движения и деформации среды при выполнении условия (0.3) на месте частицы, занимающей объем dV_0 , не образовалась «дырка» (или сплюснутый «блин») размером в макродифференциал ($J = 0$) или эта частица не раздулась до бесконечных размеров ($J = \infty$). Можно также говорить, что при выполнении условия (0.3) сплошную среду в конечном объеме невозможно путем деформации перевести в нулевой или в бесконечный объемы. И в том и в другом случае считают, что в тех местах, где $J = 0$ или $J = \infty$, сплошность среды нарушается, и говорят о *нарушении гипотезы сплошности*.

Таким образом, «математическим указанием» на нарушение гипотезы сплошности служит обращение в нуль или в бесконечность якобиана преобразования J для любых двух состояний среды. С физической точки зрения увеличение или уменьшение J по сравнению с единицей на несколько порядков уже свидетельствует о нарушении пределов применимости модели сплошной среды.

ная производная будет обозначаться нижним индексом «;» (точка с запятой) перед указанием номера координаты дифференцирования. Как обычно принято, по дважды повторяющимся индексам всегда (если специально не оговорено иное) подразумевается суммирование от 1 до 3. Векторы обозначены полужирным шрифтом — вектор \mathbf{A} имеет компоненты: A^i — контравариантные, A_i — ковариантные. Тензоры (любого ранга) отмечены полужирным шрифтом со значком « \wedge » над буквой: тензор \mathbf{T} (второго ранга) имеет: компоненты T^{ik} — контравариантные, T_{ik} — ковариантные, T^i_k, T_k^i — смешанные.

3. Во всем дальнейшем изложении механики сплошной среды не будет учитываться связь пространства и времени, так что *релятивистски эффекты при движении сплошной среды не рассматриваются*. В это состоит суть третьей гипотезы.

В связи с этим время в механике сплошных сред рассматривается как абсолютное, ньютоновское время. Допускается существование бесконечного числа инерциальных систем отсчета, в которых все законы механики сплошных сред формулируются одинаковым образом, так что они инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея¹ $t' = t + t_0$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{r}_0$, где \mathbf{V}_0 — постоянная скорость относительно движения двух произвольных инерциальных систем, t_0 , \mathbf{r}_0 — постоянные (принцип относительности Галилея).

Заметим, что в приближении сплошной среды может быть рассмотрено и движение вещества со скоростями, сравнимыми со скоростью света, когда необходимо отражать реальную связь пространства и времени (см., например, [37]).

Наконец, следует отметить, что в механике сплошной среды, как и в других разделах естественных наук, при построении моделей выделяют те признаки, которые существенны для исследуемого явления. При этом сознательно пренебрегают другими его свойствами, предполагая незначительность их влияния. Так, в модели сплошной среды были учтены прежде всего сплошность и способность к деформированию реальных физических тел (газов, жидкостей, твердых тел и др.); при изучении взаимодействий физических тел выделяют главные, определяющие силы, а действием остающегося множества сил пренебрегают, считая их малыми.

Но не всегда малые причины приводят к малым последствиям. Состояние среды, характер ее движения может быть таким, что даже ма

¹ Галилей (*Galilei*) Галилео (1564–1642) — выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей точного естествознания. Основой познания считал опыт. Оказал значительное влияние на развитие научной мысли. Заложил основы современной механики: выдвинул идею об относительности движения, установил законы инерции, свободного падения, сложения движений, первым исследовал прочность балок; открыл изохронность колебаний маятника. Построил (1600 г.) телескоп с 32-кратным увеличением и открыл горы на Луне, 4 спутника Юпитера, фазы у Венеры, пятна на Солнце. Создал (1614 г.) микроскоп, изобрел (1597 г.) первый термометр. Работы по гидростатике и прочности материалов. Активно защищал гелиоцентрическую систему за что был подвергнут суду инквизиции (1633 г.) и объявлен «узником инквизиции». До своей болезни (в 1637 г. окончательно потерял зрение) завершил труд «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки», который подводил итог его исследований.

лые усилия существенно меняют всю картину движения и состояния движущейся среды. В этих случаях говорят о неустойчивости движения, о неустойчивости состояния среды и т. п. Трудно переоценить значение для практики знаний об *устойчивости* и *неустойчивости* данного движения или состояния.

Фундаментальные исследования по устойчивости механического движения были выполнены русским ученым, профессором Харьковского университета А. М. Ляпуновым¹. Предложенные Ляпуновым методы изучения устойчивости широко используются в различных областях механики и физики.

В механике сплошной среды специально исследуется вопрос, насколько и в каких условиях та или иная модель, формы движения реализуются в действительности. Так, например, привычное ламинарное (слоистое) движение жидкости существует не всегда, а при определенных обстоятельствах переходит в другую, качественно отличную форму — движение, называемое турбулентным. Некоторые формы равновесия упругих тел, хотя и удовлетворяют уравнениям равновесия, но в реальности не осуществляются, являясь неустойчивыми. В той или иной мере, но во всех разделах механики сплошной среды важное место занимают проблемы устойчивости равновесия и движения.

Итак, подводя итоги рассмотрению исходных положений механики сплошной среды, можно сделать следующее заключение.

Механика сплошной среды изучает в приближении классической нерелятивистской механики движение (механическое, тепловое и др.) континуума механических частиц среды, представляющего собой механическую деформируемую систему с непрерывным распределением всех ее физических характеристик и возможным существованием геометрических поверхностей, линий, точек разрывов непрерывности.

¹ Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) — выдающийся русский математик и механик. После окончания Петербургского университета с 1885 по 1902 г. работал в Харьковском университете. В связи с избранием в Российскую академию наук в 1902 г. переехал в Петербург. Скончался в Одессе в 1918 г. Создатель математической теории устойчивости равновесия и движения (основная работа «Общая задача об устойчивости движения», 1892 г.), автор центральной предельной теоремы в теории вероятностей (1900 г.), трудов по движению тел в жидкостях, по фигурам равновесия вращающейся жидкости, по теории потенциала. Научные заслуги А. М. Ляпунова получили всемирное признание; он был избран почетным членом многих университетов, членом-корреспондентом Парижской академии наук, иностранным членом Римской академии наук и др.

Методы статистической механики в изучении движения физических тел. Связь с механикой сплошной среды

Описанный выше подход к изучению движения газов, жидкостей и твердых тел при помощи введения механической модели сплошной среды обычно называют феноменологическим (греч. *phainomenon* — являющееся). В его основании, как мы видели, лежит введение не-

обходимых характеристик модели с помощью теоретических предпосылок, базирующихся на данных эксперимента с физическим веществом.

Однако приближение сплошной среды не всегда годится и не всегда может дать удовлетворительные результаты. Такие ситуации возникают, например, при движении разреженных газов по трубкам, диаметр которых сравним с длиной свободного пробега молекул, или при изучении движения ракет «земных» размеров в высоких слоях атмосферы и, тем более, в условиях космического пространства. Во всех таких и подобных случаях сильное неравенство (0.1) нарушается и необходимо учитывать дискретную структуру вещества.

В то же время рассмотрение физических тел как механических систем многих частиц — отдельно движущихся молекул, атомов и др. — конечно, бесперспективно. И не только из-за математических трудностей, связанных с решением задач механики нескольких тел (уже задача трех тел вызывает серьезные математические осложнения), или, скажем, из-за чисто технических трудностей оперирования с $6 \cdot 10^{19}$ значениями скоростей и координат молекул в одном лишь кубическом сантиметре газа. Есть принципиальные трудности, не позволяющие поставить задачу изучения движения газа как задачу механики о движении множества его молекул.

Дело в том, что в связи с беспорядочным и очень быстрым движением (скорость молекулы порядка 1000 м/с) молекула за обычное характерное для задачи механики время (порядка секунды) много раз побывает в любом месте рассматриваемого объема и примет много раз одни и те же значения скорости. Поэтому влияние начальных условий в задаче механики о движении молекулы сглаживается, исчезает, а сама задача вследствие этого теряет смысл как задача классической механики. Тем более, что и само движение молекул носит хаотический, случайный характер, так что механические величины обретают вероятностный смысл. Поэтому для изучения движения таких совокупностей многих частиц применяют методы статистической механики.

Статистическое описание газа осуществляется при помощи функции распределения $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma})$ молекул газа в их фазовом пространстве (см., например, [36, 25]). В фазовом пространстве координатами служат компоненты x_1, x_2, x_3 радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс молекулы и компоненты $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ вектора $\mathbf{\Gamma}$ либо одного, либо совокупности из двух или трех векторов: вектора скорости центра масс молекулы, полного момента ее вращения и интегралов движения атомов внутри молекулы. Элементарный объем фазового пространства обозначим через $d\gamma \equiv dx_1 dx_2 dx_3 d\Gamma_1 d\Gamma_2 d\Gamma_3 \equiv d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{\Gamma}$. Функция распределения молекул газа $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma})$ определяет вероятное число молекул, которые в момент времени t находятся в единице объема фазового пространства. Таким образом, функция распределения определяет вероятное число молекул, находящихся в определенном состоянии, так что $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{\Gamma}$ равно вероятному числу молекул, параметры которых в момент времени t попали в интервалы $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{\Gamma}$ около точки фазового пространства $(\mathbf{r}, \mathbf{\Gamma})$. Очевидно, что вероятное число молекул в единице пространственного объема у точки \mathbf{r} в момент времени t равно

$$N(t, \mathbf{r}) = \int_{\Gamma} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma}, \quad (0.4)$$

где интегрирование распространяется на все возможные значения величин $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Плотность газа $\rho(t, \mathbf{r})$ с молекулами массой m определяется так:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = mN(t, \mathbf{r}) = m \int_{\Gamma} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma}.$$

Статистически среднее значение $\bar{\varphi}(t, \mathbf{r})$ (макропризнак ансамбля молекул) какой-то величины $\varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma})$, характеризующей микропризнак молекул, определяется в виде интеграла

$$\bar{\varphi}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{N(t, \mathbf{r})} \int_{\Gamma} \varphi(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma}) f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma}. \quad (0.5)$$

Если \mathbf{v} — скорость молекулы относительно какой-то неподвижной системы координат и $\mathbf{v}_0 \equiv \bar{\mathbf{v}}$, т. е. $\mathbf{v}_0 \equiv \frac{1}{N} \int \mathbf{v} f d\mathbf{\Gamma}$, то скорость \mathbf{c} молекулы относительно системы координат, имеющей скорость \mathbf{v}_0 , называется относительной скоростью молекулы, так что $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. Очевидно, $\bar{\mathbf{c}} \equiv \mathbf{0}$, хотя $|\bar{\mathbf{c}}| \equiv \bar{c} \neq 0$.

Используя функцию распределения молекул, всегда можно определить любую среднестатистическую величину. Так, например, число ν ударов молекул о единицу площади поверхности с нормалью \mathbf{n} в единицу времени равно

$$\nu = \int_{\Gamma'} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) f(t, \mathbf{r}, \mathbf{\Gamma}) d\mathbf{\Gamma},$$

где Γ' — та часть фазового объема параметров $\mathbf{\Gamma}$, в которое входит пространство скоростей, где $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) > 0$. При этом импульс молекул в направлении орта \mathbf{e} , передаваемый единице площади поверхности с нормалью \mathbf{n} , равен

$$p_e = m \int_{\Gamma'} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) f d\Gamma. \quad (0.6)$$

В связи с этим вектор напряжения \mathbf{p}_n поверхностных сил в газе на площадке с нормалью \mathbf{n} определяется следующим образом:

$$\mathbf{p}_n = \int_{\Gamma} m \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) f d\Gamma = m N \overline{\mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n})} = \rho \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{c} \mathbf{c}}, \quad (0.7)$$

где $\overline{\mathbf{c} \mathbf{c}}$ — среднее от диады из относительных скоростей, так что компоненты тензора напряжений равны $p_{ik} = \rho c_i c_k$.

Точно так же по значению ε — энергии абсолютного движения молекулы — находим плотность потока внутренней энергии газа $\mathbf{q} = \int \varepsilon \mathbf{c} f d\Gamma = N \overline{\varepsilon \mathbf{c}}$ и т. д.

Таким образом, зная соответствующий микропризнак системы молекул, при помощи функции распределения всегда можно найти такие макрохарактеристики газа, как скорость, плотность, давление, температура, тензор напряжений и др., относительно которых формулируются основные механические законы движения.

Функция распределения молекул, как известно из статистической механики, удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана¹

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{d\Gamma_k}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Gamma_k} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}}. \quad (0.8)$$

В правой части этого уравнения стоит так называемый интеграл столкновений, равный

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}} = \iiint (w' f f'_1 - w f f_1) d\Gamma_1 d\Gamma' d\Gamma'_1. \quad (0.9)$$

В этом интеграле учтены только парные столкновения молекул, причем до столкновения одна молекула из пары обладала величинами Γ_1 , другая — Γ , а после столкновения соответственно Γ'_1 и Γ' . Кроме того, $w = w(\Gamma \Gamma_1; \Gamma' \Gamma'_1)$ — вероятность такого парного столкновения молекул, а $w' = w(\Gamma' \Gamma'_1; \Gamma \Gamma_1)$ — вероятность «обратного» парного столкновения, когда до столкновения молекулы имели значения параметров Γ'_1 и Γ' , лежащие в интервалах $d\Gamma'_1$, $d\Gamma'$, а после столкновения обрели значения Γ_1 и Γ из интервалов $d\Gamma_1$, $d\Gamma$. В интеграле столкновений обозначено $f' \equiv f(t, \mathbf{r}, \Gamma')$, $f_1 \equiv f(t, \mathbf{r}, \Gamma_1)$.

Из кинетического уравнения можно получить важное следствие — уравнение переноса. Умножая (0.8) на некоторую функцию $\Phi(t, \mathbf{r}, \Gamma)$ и интегрируя по всем значениям Γ , получаем

¹ *Больцман (Boltzmann) Людвиг* (1844–1906) — выдающийся австрийский физик, один из основателей статистической физики и физической кинетики. Окончил Венский университет (1866 г.), работал в Граце, Вене, Мюнхене, Лейпциге. Вывел (1868 г.) функцию распределения и кинетическое уравнение газов, названное его именем. Дал (1872 г.) статистическое обоснование второго начала термодинамики, связав энтропию системы с вероятностью состояния системы. Впервые применил к теории излучения принципы термодинамики (закон Стефана — Больцмана). Работы по математике, оптике, гидродинамике, теории упругости, теории электромагнетизма, по философии естествознания. Именем Больцмана названа одна из трех универсальных физических постоянных (постоянная Больцмана). Член многих академий наук.

$$\int_{\Gamma} \Phi \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{d\Gamma_k}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \Gamma_k} - \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}} \right\} d\Gamma = 0, \quad (0.10)$$

или после преобразований

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (N\bar{\Phi}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (N(\bar{\Phi}v_k)) - \\ & - N \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_k} + \frac{d\Gamma_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \Gamma_k} \right\} = \int_{\Gamma} \Phi \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ст}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (0.11)$$

Если в качестве Φ выбрать инварианты столкновений, т. е. величины, которые не меняются при столкновении молекул (например, масса, импульс и энергия), то тогда правая часть уравнения переноса (0.11) обращается в нуль и из него следуют основные уравнения механики сплошных сред. Эти уравнения образуют незамкнутую систему, и ее замыкание может быть получено при помощи функции распределения f как решения уравнения Больцмана в различных приближениях.

В кинетической теории газов рассматриваются различные приемы приближенного решения нелинейного интегродифференциального кинетического уравнения (0.8). Все они требуют предположений о законах взаимодействия частиц (молекул), их составе и т. п. Наиболее известный метод — это метод Чэпмена-Энскога (см., например, [25]), в котором начальное приближение определяется из условия равенства нулю интеграла столкновений и представляет собой локально-равновесную функцию Максвелла¹

$$f = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-mc^2/2kT), \quad (0.12)$$

где $N \approx 2,7 \cdot 10^{19} \text{ см}^3$ — для воздуха; $k \approx 1,38 \cdot 10^{-6}$ эрг/град — постоянная Больцмана.

При помощи этого решения из уравнения переноса получается приближение основной системы уравнений сплошной среды, используемое для изучения движения невязких газов и жидкостей. Следующее приближение f служит для вывода уравнений движения вязких газа и жидкости. Отыскивая методом Чэпмена-Энскога третье приближение решения кинетического уравнения, получаем уравнения, с помощью которых можно решать задачи о движении сильно разреженных газов — задачи молекулярной аэродинамики, весьма актуальные для исследования движения ракет и спутников в верхних слоях атмосферы.

Итак, рассмотрение физического тела (в первую очередь газа) в приближении механической системы множества частиц (молекул), движущихся хаотично, т. е. систе-

¹ Максвелл (Maxwell) Джеймс Клерк (Clerk) (1831–1879) — выдающийся английский физик, создатель классической электродинамики, один из основоположников статистической физики. Учился в Эдинбургском и Кембриджском университетах. Первый профессор экспериментальной физики в Кембридже, основатель Кэвендишской лаборатории. Развил идеи М. Фарадея, создал теорию электромагнитного поля (уравнения Максвелла), предсказал существование электромагнитных волн, ввел понятие тока смещения, выдвинул идею электромагнитной теории света. Установил статистическое распределение молекул газа по скоростям (распределение Максвелла); исследовал вязкость, диффузию и теплопроводность газов; в теории упругости сформулировал теорему, названную его именем; установил ряд основополагающих соотношений между термодинамическими параметрами.

мы, подчиняющейся законам статистической механики, необходимо в тех задачах, где сказывается дискретная структура вещества и приближение сплошной среды не годится. В то же время более общее кинетическое описание используется и при условиях, когда приближение сплошной среды справедливо; к нему приходится обращаться, например, при установлении зависимостей феноменологических коэффициентов (вязкости, теплопроводности, диффузии и т. п.) от макроскопических параметров среды, в задачах о структуре ударных волн и др.

Задачи механики сплошной среды

Механика сплошной среды, как и в целом механика, очень часто была своеобразным мостиком, промежуточной ступенью между фунда-

ментальной математикой и чисто инженерными, прикладными дисциплинами, развитие которых непосредственно зависело от запросов практики. Не случайно в первые годы своего становления механика называлась прикладной математикой.

В то же время это отнюдь не означает, что механика исполняла как бы вспомогательную роль среди других наук. Механика всегда была самостоятельной фундаментальной наукой со своими, присущими только ей законами, положениями и научной методикой. Механика всегда имела — и сейчас имеет — свои пути развития, свои методы научного исследования, с одной стороны, опирающиеся на строгие математические обоснования и доказательства, с другой — включающие интуицию и прозрение подлинного естествоиспытателя.

Без этого механика никогда не справилась бы с той ролью, которая ей отведена в ряду других естественных наук. Об этом важнейшем предназначении механики очень точно сказал академик Л. И. Седов:

«Познание природы (астрономия, физика, химия, биология) и создание различных объектов и событий в технике тесным образом связано с введением моделей механических систем, с постановкой и решением разнообразных механических задач».

И далее, отмечая «непосредственные и тесные связи современной механики с термодинамикой, со статистическими физическими теориями, с химией и электродинамикой», Л. И. Седов пишет: «По существу происходит объединение механики и этих разделов науки в одну единую науку».

Следует отметить, что первостепенную роль в познании законов природы механика не утратила и в наше время. Механика отнюдь не уста-

рела, как полагают некоторые. Ее проблемы претерпели существенные изменения, усложнились; расширились и углубились области применения механики. Старые проблемы отошли в историю, их основное и рациональное ядро легло в фундамент современной механики. Новые задачи, возникшие в конечном счете из запросов современной практики, усложнились и вынуждены были вобрать в себя новые и более глубокие разделы математики. В этом особенно преуспела механика сплошной среды, являющаяся по сути более высокой ступенью развития механики системы материальных точек. Именно здесь нашли разнообразные применения уравнения математической физики, вариационное исчисление, функциональный анализ, операционное исчисление, интегральные уравнения и др. От основных ветвей механики сплошной среды, которыми еще совсем недавно были гидродинамика и теория упругости, очень быстро отпочковались и превратились в самостоятельные, в той или иной степени, научные дисциплины: газовая динамика, магнитная гидродинамика, феррогидродинамика, динамика плазмы, аэродинамика разреженных газов, теория тепло- и массопередачи, теория фильтрации, теория пластичности, нелинейная теория упругости, аэроупругость, биомеханика, физико-химическая гидродинамика, гидромеханика многофазных и гетерогенных сред и целый ряд других, важных для практики наук. Если учесть, что методы механики сплошной среды стали основой таких дисциплин, как теория турбулентности, механика композитов, механика сыпучих сред, механика грунтов, теория жидких кристаллов, то станет понятным, что задачи механики сплошной среды сыграли большую роль в развитии современной техники и технологии. И не только их.

Изучение состояния механических и термодинамических систем, далеких от равновесия, привело к появлению в 60-х годах совершенно новой науки — синергетики. Синергетика имеет широкое междисциплинарное звучание: она изучается математиками, физиками, биологами, философами и социологами. Хотя эта наука и отвергает (в определенном смысле) представления о строгой упорядоченности, детерминизме механических явлений, можно утверждать, что она выросла из механики, в частности, из работ по теории устойчивости и др. (см., например, [51]).

Нельзя обойти вниманием тот факт, что многовековой союз фундаментальной математики и механики постоянно углубляется и укрепляется в наше время. Леонардо да Винчи¹ писал, что «механика — рай для математических наук, ибо посредством нее достигают математического плода». Основатель классической механики Исаак Ньютон² не раз утверждал в «Математических началах натуральной философии», что он рассуждает как математик.

Математика всегда находила и сейчас находит для себя поле деятельности не только в доказательствах единственности и существования математических проблем механики, но и в разработке и совершенствовании всевозможных аналитических и особенно приближенных методов решения задач (см., например, [24, 58, 59, 63]).

Знаменательным с этой точки зрения являются труды механиков-математиков последних двух веков, в первую очередь А. М. Ляпунова и Г. Кирхгофа³. Ляпунов известен не только «Общей задачей об устойчивости движения», но и предельной теоремой теории вероятностей, а Кирхгоф одну из основных своих монографий назвал так: «Механика. Лекции по математической физике».

¹ *Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) (1452–1519)* — великий итальянский живописец и ученый. Ему принадлежат такие шедевры мирового искусства, как «Тайная вечеря», портрет Моны Лизы («Джоконда»), а также многочисленные открытия и исследования в области математики, естественных наук, механики и различных отраслей техники (идея парашюта, вертолета, теория полета птиц, заметки о законах рычага и др.).

² *Ньютон (Newton) Исаак (1643–1727)* — великий английский физик, математик, механик и астроном. В фундаментальном исследовании «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) сформулированы основные законы классической механики. Этот труд определил направление всех работ по механике и небесной механике, выполненных в последующие два века. В основу ряда физических теорий легли многие положения «Оптики» (1704 г.) Ньютона. Разработал (независимо от Лейбница) дифференциальное и интегральное исчисления. Открыл закон всемирного тяготения, явление дисперсии света, исследовал интерференцию и дифракцию, высказал гипотезу о сочетании корпускулярных и волновых представлений. Создал основы небесной механики. Его влияние на развитие мировой науки трудно переоценить. «Фигура Ньютона, — писал А. Эйнштейн, — означает больше, чем это вытекает из его собственных заслуг, ибо самой судьбой он был поставлен на поворотном пункте умственного развития человечества».

³ *Кирхгоф (Kirchhof) Густав Роберт (1824–1887)* — известный немецкий физик и механик. Окончил Кенигсбергский университет (1846 г.), профессор университета Бреслау (1850–1853 гг.), Гейдельбергского университета (1854–1874 гг.), Берлинского университета (с 1875 г.). Как физик, известен своим правилом для электрических цепей; заложил основы спектрального анализа (1859 г.), открыл цезий, рубидий, ввел понятие абсолютно черного тела и открыл закон излучения. Работы по механике посвящены вопросам теории деформации (изгиб пластинок и тонких стержней); развил теорию вихревых движений в гидромеханике, метод приближенного решения задач теории дифракции коротких волн. Показал эффективность применения математики к исследованиям в различных областях механики (см. его монографию «Механика. Лекции по математической физике», 1874 г.).

Новые качественные черты объединения математики и механики появились после внедрения в практику современных ЭВМ и персональных компьютеров. Их возможности расширили область практической разрешимости важнейших проблем механики и многих актуальных для современной техники задач. Появилось компьютерное моделирование механических проблем — «компьютерная механика», совершенно новая дисциплина, развитие которой преобразует традиционные взгляды на задачи механики. Многие проблемы, занимавшие в течение долгого времени ученых, не имевших в своем распоряжении нынешнего математического инструментария, потеряли актуальность, другие, наоборот, в связи с открывшимися возможностями вычислительной техники обрели новую жизнь¹.

Если в XIX веке сформировалась классическая механика как передовая для своего времени наука, то XX век ознаменовался бурным развитием физических теорий. Ньютонская теория гравитации, специальная теория относительности, общая теория относительности, релятивистская теория поля, квантовая механика, нерелятивистская квантовая теория и разрабатываемая в наше время общая физическая теория — у всех у них в основании — классическая механика.

Трудно во введении подробно останавливаться на конкретных разделах и проблемах механики сплошной среды. Тем не менее, не изменяя традиции прекрасных монографий (см., например, [28, 34–37, 60, 40, 10]), попытаемся это сделать в надежде, что читатель возвратится к этим страницам после изучения предмета с целью определить для себя поле деятельности.

По-видимому, бесполезно именно здесь сообщить несколько фактов, когда на помощь человеческой практике приходило научное осмысление явления на основании знаний из области механики сплошной среды.

На заре авиации, когда только-только стали строить планеры, оказалось, что выгоднее изгибать плоскость крыла, чтобы в поперечном сечении была дужка, а переднюю кромку крыла делать закругленной. Только разработка теории крыла с применением теории функций комплексного переменного позволила численно оценить и увеличение подъемной силы дужки по сравнению с пластинкой, и обеспечение условий плавного обтекания крыла путем устранения особой точки конформного отображения в задней кромке крыла (О. Лилиенталь, Кутта, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин).

¹ Эти вопросы, как и взаимосвязь механики и современных математических направлений (например, теория катастроф, теории спиральных структур, методы анализа выпучивания оболочек и др.), периодически обсуждаются на международных конгрессах по теоретической и прикладной механике (IUTAM Congress).

Издавна на вершине трубы для увеличения ее тяги приделывали поперечный отрезок сужающейся-расширяющейся трубы (трубка Вентури), поскольку знали из опыта, что там, где больше скорость, там меньше давление; поэтому путем сужения поперечной трубки Вентури увеличивали в ней скорость воздуха, чем уменьшали давление на вершине тяговой трубы. Можно ли, суживая трубку, достигнуть в ней бесконечно больших скоростей? Только из основ газовой динамики стало известно, что увеличить скорость газа в сужающейся трубе до бесконечности нельзя: можно его разогнать лишь до звуковой скорости. И замечательно, что для того, чтобы увеличить скорость в трубе после достижения звуковой скорости, надо трубу расширять! Этот неожиданный вывод теории явился фундаментом для проектирования газовых и паровых турбин (сопло Лавала).

Если же пытаться в сужающемся канале увеличить скорость несжимаемой жидкости, в которой скорость звука очень большая (в воде до 1500 м/с по сравнению с 340 м/с в воздухе), то наступает новое явление, получившее название кавитации: в жидкости начинают образовываться пузырьки, схлопываясь заново, они действуют на твердые поверхности подобно тысячам маленьких бомб, изъязвляя их сетью каверн. С явлением кавитации, по-видимому, впервые, столкнулись при попытках увеличить скорость винтовых судов. Моряки думали, что причиной изъязвления поверхностей винтов были какие-то морские животные. Только теория кавитации, разработанная в гидромеханике, позволила найти правильный ответ и проектировать антикавитационные гребные винты.

Архимедов винт, сегнерово колесо, реактивные снаряды и другие практические «машины», известные с давних времен, сразу или постепенно находили свое научное «обеспечение» в механике, и в связи с этим они постоянно совершенствовались.

С развитием авиации и космонавтики явления, которые могли быть объяснены только в механике сплошной среды, стали возникать чуть ли не ежедневно. То необъяснимым образом возникали периодические колебания крыльев и хвостового оперения самолетов, которые, нарастая по амплитуде, приводили к быстрому разрушению конструкции; была построена теория флаттера и бафтинга (М. В. Келдыш), которая позволила легко избежать этих явлений. То вдруг на больших скоростях взлета и посадки самолетов стали «дрожать» и разрушаться стойки шасси («шимми») и т. д. и т. п. Совершенно новые явления, потребовавшие изучения глубинных проблем гидромеханики, магнитогидродинамики и термодинамики, возникли, когда летательные аппараты стали преодолевать «звуковой барьер», — двигаться со скоростями, большими, чем скорость звука. Здесь и ионизация пристеночных слоев газа, и возникновение ударных волн, и оплавление поверхности ракет, и т. п.

Можно было бы продолжать эти примеры «просвещения» практики авиации, кораблестроения, машиностроения путем разработки законов механики сплошной среды, в первую очередь таких ее разделов, как гидромеханика и теория упругости. Укажем еще на несколько фактов из области машиностроения.

Одним из основных узлов любой машины является подшипник. Однако правильно подобрать зазоры для смазки в подшипниках стало возможным лишь после разработки гидродинамической теории смазки (О. Рейнольдс, Н. П. Петров, А. Зоммерфельд, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин). Побочный результат этой теории дал возможность проектирования судов на воздушной подушке, прецизионных приборов на воздушной смазке и др.

В машиностроении и авиации в середине прошлого века столкнулись с необъяснимым разрушением конструкций под действием весьма малых по величине, но высокочастотных знакопеременных нагрузок. Так было открыто явление усталости материала и выяснено, что разрушение наступает в результате громадной концентрации напряжений у оснований микротрещин. Только теория позволила найти «противоядие» разрушению от усталости.

Всем известно разрушение конструкций в результате потери устойчивости, когда балки при сжатии внезапно деформируются и разрушаются. То же происходит с оболочками, подвергшимися вспучиванию. Спокойное, слоистое (ламинарное) движение воды в трубах, теряя устойчивость, внезапно переходит в турбулентное — новую форму потока жидкости, характеризующуюся хаотическим, беспорядочным движением ее частиц. Со времен Эйлера механики постоянно снабжают практику новыми выводами теории по предотвращению потери устойчивости как упругих конструкций, так и ламинарной формы движения жидкостей.

Наконец, полезно вспомнить о том, как при помощи направленного взрыва огромных масс горных пород в семидесятых годах удалось предотвратить угрозу селевых потоков, готовых обрушиться на Алма-Ату. А ведь схему размещения взрывных зарядов для создания нужной направленности перемещения породы во время взрыва дали ученые во главе с академиком М. А. Лаврентьевым на основе законов гидромеханики.

Это лишь малая часть сведений о «применении» механики сплошной среды на практике. Десятки интересных примеров можно найти в истории развития таких новых отраслей, как биомеханика и магнитная гидромеханика, в научно-популярной литературе по механике, гидромеханике, авиации и машиностроению.

По своему содержанию все многочисленные задачи механики сплошной среды начали формироваться в пределах гидроаэромеханики, теории упругости и теории пластичности. На развитии проблем этих разделов стоит остановиться прежде всего.

1. *Гидроаэромеханика, или механика жидкости и газов*, стала развиваться со времен античности, когда человеческая практика, в частности в области мореплавания, водоснабжения и метания снарядов, поставила вопрос о выяснении силового взаимодействия между движущимся телом и окружающей средой — водой или воздухом.

Задачи и результаты гидроаэромеханики используются в столь многих областях современной техники и производства, что очень трудно их даже просто перечислить.

Вот лишь некоторые из них.

Авиация: обтекание тел газом при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях, управление пограничным слоем, теория винта и крыла конечного размаха, устойчивость полета, движение газов в соплах и турбинах авиадвигателей, нагрев и излучение поверхностей обтекаемых газом тел, деформация конструкций в потоке и ее воздействие на обтекаемый поток, вихревая неустойчивость и явление флаттера.

Кораблестроение: теория движения тела в жидкости, волны и волновое сопротивление на воде, устойчивость плавания, суда на воздушной подушке, явление кавитации, движение в воде с большими скоростями, подводный взрыв, глиссирование, гибкие подводные контейнеры.

Ракетостроение и баллистика: движение тела с большими скоростями в газах, оплавление тел от нагревания при больших скоростях движения, ионизация пограничного слоя, движение тел в условиях большой разреженности и ионизации газа, кумулятивные струи и пробивание среды при космических скоростях внедряемых тел, движение и падение метеоритов.

Машиностроение: движение газа и пара в каналах турбин и вентиляторов, охлаждение двигателей, теория горения в камерах, гидродинамическая и газодинамическая теории смазки, гидравлические насосы, демпферы, умножители давления, гидравлические прессы, пневматика в приборостроении, транспортировка жидкости и газов по трубопроводам и каналам, движение жидкостей и газов с учетом химических реакций, флотации и барботажа в устройствах химического машиностроения (химические колонны и т.п.), задачи фильтрации газа и нефти через пористые среды, задачи литья, сварка взрывом, устойчивость поверхности раздела жидкостей и газов, ветряные двигатели, борьба с шумом, струйная печать, струйные резаки горных пород.

Гидростроительство: движение воды в руслах и каналах, фильтрация через почву, движение воды через плотины и другие водосбросы, движение многокомпонентных жидкостей (примеси ила, песка и др.), турбулентные потоки, стратифицированные потоки, проблемы взрывов в грунте, направленный взрыв, камуфлетный взрыв, проблемы цунами, воздействие волн на берега, использование энергии волн и приливов.

Метеорология: движение и равновесие атмосферы, турбулентность и стратификация, солнечная радиация, перенос примесей, задача предсказания погоды.

Почти во все перечисленные области использования гидроаэромеханики в 50–60-х годах мощным потоком влились исследования по *магнитной гидродинамике*, по теории движения плазмы, а затем — по *движению намагничивающихся и поляризующихся сред*, существенная часть которых известна под названием *феррогидродинамики*.

Еще Фарадей¹ считал, что движение моря можно исследовать путем изучения наблюдаемых возмущений магнитного поля Земли, возникающих при движении масс проводящей соленой воды. И хотя в прошлом

¹ *Фарадей (Faraday) Майкл* (1791–1867) — английский физик, основоположник учения об электромагнитном поле. Учился самостоятельно. Ввел основные понятия электромагнитного поля, высказал идею существования электромагнитных волн. Идею электромагнитного поля А. Эйнштейн рассматривал как самое важное открытие со времен Ньютона и в связи с этим писал: «Надо иметь могучий дар научного предвидения, чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а скорее пространство между зарядами и частицами». Открыл электромагнитную индукцию. Установил законы электролиза, названные его именем, открыл вращение плоскости поляризации света в магнитном поле (эффект Фарадея). Ввел понятие диэлектрической проницаемости, экспериментально доказал закон сохранения электрического заряда.

веке уже существовали первые магнитогидродинамические приборы (см. [79]), первые магнитогидродинамические насосы, *магнитная гидродинамика* как самостоятельная дисциплина оформилась в 40-х годах после опубликования Альфвеном¹ (1942 г.) ряда классических работ, который и предложил название «магнитная гидродинамика». Ядерная энергетика дала значительный импульс к развитию работ по магнитной гидродинамике (электромагнитные насосы для жидких металлических охладителей реакторов, удержание плазмы в магнитном поле и сжатие ее и др.). Поиски новых видов источников энергии привели к разработке и созданию магнитогидродинамических генераторов. В ракетостроении — исследование возможности ускорения движения газообразного топлива, создание ионных двигателей, возможность ионизации воздуха в ударной волне и тепловая защита конструкций за ударной волной. Магнитная гидродинамика позволила продвинуть исследование волн в ионосфере, в солнечной плазме, многих других астрофизических проблем. В машиностроении вопросы магнитной гидродинамики нашли широкое применение в металлургии (проектирование электролизеров), при создании новых жидкостных уплотнителей, управляемых магнитным полем, в проектировании жидкостных подшипников с проводящей смазкой, устойчивой при высоких и низких (космических) температурах.

Важное практическое применение (жидкостные трансформаторы, электропускатели, охлаждение при помощи электроконвекции, изменение структуры феррожидкостей, использование феррожидкостей для транспортирования лекарств в организме и искусственных стимуляторов органов и др.) нашли проблемы механики намагничивающихся и поляризующихся сред.

Следует отметить, что объединение аэрогидродинамики с теорией электромагнетизма, позволившее исследовать взаимодействие сплошной среды с электромагнитным полем, оказалось весьма плодотворным как с теоретической точки зрения, так и в отношении практических применений.

¹Альфвен (*Alfven*) Ханнес (1908–1995) — шведский физик и астрофизик, закончил университет Упсалы, работал в технологическом институте (Стокгольм); в 1967 г. переехал в США, преподавал в Калифорнийском университете (Сан-Диего). Основоположник магнитной гидродинамики; предсказал один из типов волн в плазме (волны Альфвена), существование галактических полей. Основные результаты исследований изложены в «Космической электродинамике» (1950 г., 1967 г.), «Плазме в космосе» (1981 г.). Лауреат Нобелевской премии (1970 г.).

Что касается современных проблем гидроаэромеханики и магнитной гидродинамики, то стоит указать на следующие некоторые направления:

— дальнейшее развитие теории турбулентных движений, в частности диффузия и перенос скалярных и векторных характеристик среды; турбулентность в магнитогидродинамических потоках;

— исследование вопросов существования и единственности решений трехмерных уравнений Навье — Стокса с начальными данными;

— задачи обтекания тел потоком с завихренностью в связи с теорией турбулентности; улучшение условий обтекания наземных транспортных средств в связи с резким возрастанием их скорости;

— некоторые специальные задачи безвихревого и вихревого течения, струйного обтекания твердых тел (например, теория «всплесков», кольцевые вихри, падение капля, подводный взрыв и др.);

— исследование специальных вопросов, связанных с ударными волнами (структура ударных волн, отражение, преломление и дифракция волн; волны в гиперзвуковых потоках, в сверхпроводящих жидкостях, в неоднородных средах; взрывные волны большой амплитуды, ударные волны в астрофизических процессах; влияние электромагнитных полей и лазерного излучения на волновые процессы; приближенные методы расчета ударных волн и взаимодействия скачков, моделирование волновых процессов);

— образование и динамика нелинейных волн; теория солитонов; волновые процессы, описываемые уравнением Кортевега-де Вриза¹; уменьшение волнового сопротивления быстроходных судов, в том числе подводных;

— гидроаэродинамика малых летательных аппаратов, снабженных аккумуляторными двигателями и используемых в качестве «разведчиков» в экстремальных ситуациях (завалы с ограниченным доступом, обрушения и т. п.);

— новые и нетрадиционные устройства для получения энергии, основанные на законах аэродинамики (различного типа роторы и ветряки с вертикальной и горизонтальной осями, волновые двигатели и др.);

— гидроаэродинамика многокомпонентных и многофазных потоков, смесей и потоков переменной массы (с источниками); использование полимерных добавок для снижения жидкостного трения; гидродинамические эффекты в затвердевающих средах; гидромеханика суспензий, теория смешивания в химических промышленных установках;

— микрогидродинамика², в которой характерная длина имеет порядок микрона (10^{-6} м) и изучается поток, обтекающий дискретные частицы таких размеров; в частности, броуновское движение, суспензии, гибкие цепочки полимеров, способные почти вполнину уменьшить трение турбулентных потоков о стенку; эта область имеет широкое применение в задачах биомеханики;

¹ *Кортевег Дидерик Иоханес* (1848–1941) — нидерландский математик и механик. В 1899 г. указал детерминантное уравнение, эквивалентное системе динамических уравнений для неголономной системы в лагранжевых координатах (уравнение Кортевега-де Вриза). Уравнение широко используется в математической физике.

² См., например, «Теоретическая и прикладная механика» (Труды XIV международного конгресса IUTAM).— М.: Мир, 1979.

— гидродинамика структурированных жидкостей и жидких кристаллов, полимеров со сложным строением, реологические соотношения для неньютоновских жидкостей, статистический подход в кинетической теории жидкостей, в частности теория вязкости жидкости;

— гидроаэродинамические исследования, связанные с охраной окружающей среды; научная организация мониторинга в атмосфере и океане; исследование воздушных потоков, вызывающих эрозию почвы; пограничный слой атмосферы; гидродинамика смерчей, ураганов, их образование и движение; гидродинамика наводнений, цунами, приливные волны и наводнения от сильных ветров и муссонов, защитные сооружения; нестационарные и периодические потоки в атмосфере и их разрушительное действие на наземные сооружения; гидроаэродинамика угольных шахт и их взрывобезопасность; возможность рассеяния загрязнений в атмосфере, «тепловая завеса»; загрязнение рек; борьба с загрязнением нефтью водоемов и океана, ядерными отходами морского дна; использование явления конвекции, обусловленной двойной диффузией;

— задачи гидро- и аэроакустики: расчет шума в струях воздушно-реактивных двигателей, в пограничном слое и в слое подводных судов, взаимодействие нестационарных неустойчивых вихревых полей с твердыми границами и внешними вынуждающими возбуждениями.

2. *Теория упругости и пластичности* является основой конструирования и строительства всевозможных машин, механизмов и сооружений. Прикладная часть теории упругости еще на заре технической революции сформировалась в одну из основных инженерных дисциплин — сопротивление материалов.

Теоретические выводы теории упругости и пластичности в сочетании с грамотно поставленными экспериментами стали проникать в последние десятилетия непосредственно в практику машиностроения и индустрии.

Все большее значение приобретают вопросы нелинейной теории упругости, связанные с конечными деформациями. Расширение технологических возможностей привело к постановке задач о поведении реальных конструкций и материалов за пределами упругости и в области возникновения остаточных деформаций. Так появилась самостоятельная область теории деформируемого тела — *теория пластичности*. Она решает задачи, связанные с пластической деформацией в горячем и холодном состояниях (прокатка, ковка, штамповка, волочение), а также вопросы упрочнения материалов за счет уменьшения поверхностной шероховатости и создания заданного распределения остаточных деформаций. При этом возникла необходимость рассмотрения задач о равновесии неизо-

тропного упругого тела, получаемого как из металла в результате прокатки, волочения и т. п., так и из пластических материалов и композитов. Большое практическое значение имеет теория дислокаций и разрушения материала (образование трещин) в области знакопеременных нагрузок (усталость материала). С первых лет возникновения теории упругости наряду с задачами прочностного расчета большое внимание привлекали и проблемы устойчивости конструкций. В последние годы эти задачи связаны с устойчивостью пластин, оболочек, поверхностей (схлопывание поверхностей), с созданием ребер жесткости, приданием упругим конструкциям форм, противостоящих потере устойчивости.

Из современных проблем теории упругости и пластичности отметим:

- общая задача прочности и разрушения упругого тела;
- нестационарные задачи теории упругости, связанные с импульсным нагружением поверхности;
- задачи магнитоупругости и магнитопластичности;
- температурные напряжения тел в упругом и пластическом состоянии;
- вязкоупругое поведение материала, теория ползучести при релаксации нагрузки;
- пластическое течение гранулированных сред; в целом — задачи механики гранулированных сред;
- деформация упругих конструкций в потоке жидкости и газа и обратное влияние деформации на поток (проблема аэроупругости);
- контактные задачи теории упругости, их связь с образованием трещин, с поверхностным упрочением материала и процессами разрушения конструкций;
- деформирование, пластическое и вязкоупругое деформирование тел, взаимодействующих с электромагнитным полем; процессы намагничивания, поляризации при упругих деформациях; магнитострикция и пьезомагнетизм, явление сегнетоэлектричества и анизотропии в упругих средах.

Методы основных трех разделов механики сплошной среды широко используются в других областях механики, имеющих более специализированный характер: биомеханике, механике грунтов и пористых сред, механике гранулированных и сыпучих сред, жидких кристаллов и др. Из них остановимся на биомеханике.

Биомеханика (биологическая механика) стала бурно развиваться в связи с новыми задачами биологии и медицины (см., например, [38, 54, 55, 82, 83] и библиографию в них).

Биомеханика, как это следует из самого названия, — наука, изучающая движение биологических структур, организмов, в том числе живот-

ных и человека. Можно утверждать, что нет биологических систем, изучение которых возможно без использования законов механики.

Трудно указать — и это, видимо, является следствием бесконечного многообразия всего живого — такую область гидроаэромеханики или теории упругости (в частности, в условиях взаимодействия среды и электромагнитного поля), которая не имела бы своего применения в области биомеханики.

Назовем лишь некоторые проблемы биомеханики и отметим их связь с механикой сплошных сред.

Сосудистая система. Это задачи установления реологических свойств крови, прежде всего связанных с агрегационными и диффузионными свойствами форменных элементов крови. Кроме того: теория пульсовых волн в артериях, вынужденные пульсации венозного кровотока; течение жидкостей в деформируемых сосудах с проницаемыми стенками, биомеханические свойства кровеносных сосудов (в частности, в зависимости от возраста и пола человека, воздействия на них лекарств и т. п.), гидромеханическая теория биологических мембран, оптимальная структура ветвящейся кровеносной сети (органа и организма).

Сердечная мышца. Математические модели сердечной мышцы и их использование для создания искусственного сердца, использование деформаций для активации деятельности его клапанов, механизмы сокращения и расслабления сердечной мышцы.

Механика органов дыхания: у млекопитающих, с учетом воздушных мешков — у птиц, жабр — у рыб и земноводных, трахей — у насекомых; затраты энергии на процессы дыхания; деформирование и разрушение бронхов и трахей; оптимальная сеть воздухопроводных путей.

Механика деятельности внутренних органов человека. Механические свойства пищевода, желудка, кишечного тракта; механизм перистальтики, энергетический баланс; механика мочевыводящих путей (почечные лоханки, мочеточники и др.), в частности моделирование процессов в мочеиспускательном канале — отделение механических причин расстройства от нейромышечных и комплексных причин.

Механика костного скелета. Детальное изучение механических свойств костной ткани в зависимости от возраста, воздействия внешних физических и химических факторов; динамика формирования и роста костной ткани; деформируемость и несущая способность костной ткани, ее электромеханические свойства; кровоток и снабжение питательными веществами костного вещества.

Механика сплошной среды в деятельности, развитии и росте биологических тканей. Моделирование, энергетический баланс мышечной деятельности биосистем, в том числе человека; использование математической модели двухфазной, многокомпонентной среды с химическими реакциями для изучения функционирования мышц; механизмы и математические модели роста биологических тканей, использующие уравнения среды с распределенными источниками массы.

Исследование механики биологической клетки. Перенос вещества и волны деформации по телу нервной клетки вслед за нервным (электрическим) импульсом; способ-

ВВЕДЕНИЕ

ность клеточных мембран генерировать электрический сигнал в ответ на механические, тепловые и др. воздействия; установление связи между механическим воздействием и электрическим сигналом, анализ работы чувствительных «волосковых» клеток внутреннего уха и клеток вестибулярного аппарата; «механочувствительность» у одноклеточных механизмов, «сейсмочувствительность» лягушек и других животных; механические свойства эндотелиальных (выстилающих изнутри кровеносные сосуды) клеток и их роль в синтезе физиологически активных веществ, действующих на гладкие мышцы сосудов.

Отметим, что биомеханика интересна и тем, что с единых позиций изучает все функции, присущие рассматриваемой биологической системе. Поэтому, скажем, биомеханика уха включает в себя как акустические и аэродинамические свойства улитки уха (привлекшие внимание такого известного механика, как Дж. Лайтхилл¹, см. [69]), так и изучение «волосковых» клеток внутреннего уха; поэтому, например, исследования деятельности мочевыводящей системы человека содержат и гидродинамическое безоперационное разрушение камней в этой системе; исследования в работах по дыхательным органам рассматривают механизмы речи, пения и вообще «звукопроизводства» системой дыхания, а биомеханика глаза изучает механические свойства и строение стекловидного тела, его оптические качества, условия структурирования и механику глазных мышц, условия «дрожания» и т. п. и т. д.

¹ Лайтхилл Джеймс (*Lighthill, Sir (Michael) James*) (1924–1998) — английский математик и механик, внесший существенный вклад в исследования по механике жидкостей и газов, в частности по биомеханике, астрофизике. Основные труды: «Волны в жидкости», «Физиологическая гидродинамика», «Математическая биогиродинамика».

Глава 1

КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В этой главе рассматривается движение сплошной среды вне зависимости от причин, вызывающих это движение. Особое внимание уделяется новому, по сравнению с кинематикой недеформируемых систем, разделу — теории деформаций.

§ 1. Основные методы описания механического движения сплошной среды

Движение сплошной среды

Движение сплошной среды определяется ее положением относительно системы пространственных координат в любой момент времени.

Поскольку принята гипотеза сплошности, то это равносильно знанию непрерывной вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, определяющей положение любой частицы среды, находящейся в точке M евклидова пространства, где среда занимает переменную область $V(t)$ (рис. 4).

Так как ни одна из задач механики не может быть решена без задания начальных условий, то для описания движения сплошной среды во времени необходимо задать ее положение в некоторый (начальный) момент времени t_0 , т. е. $V(t_0) \equiv V_0$.

Иными словами, чтобы указать, что $\mathbf{r}(t)$ относится к определенной частице, необходимо писать

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0) = \mathbf{i}_k x_k(t, x_{01}, x_{02}, x_{03}),$$

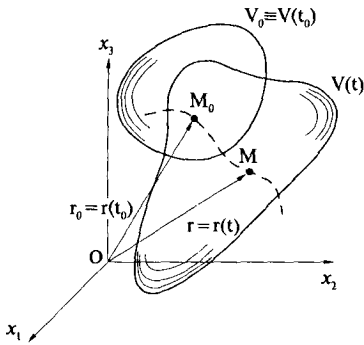


Рис. 4

или

$$x_i = x_i(t, x_{01}, x_{02}, x_{03}), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}_k x_{0k}$ — радиус-вектор точки M_0 , в которой была частица в начальный момент времени t_0 ; x_i, x_{0i} — координаты частицы в моменты времени t и t_0 соответственно (в прямоугольной декартовой системе координат с осями \mathbf{i}_k).

Три скалярных функции (1.1) составляют параметрическое уравнение пространственной кривой, которая проходит через точку (x_{01}, x_{02}, x_{03}) . Эта кривая называется *траекторией* данной частицы среды.

Формула (1.1) является ключевой в кинематике сплошной среды. При фиксированном \mathbf{r}_0 она дает кинематическое уравнение движения частицы, которая при $t = t_0$ находилась в точке M_0 ; фиксируя t и меняя \mathbf{r}_0 , т. е. перебирая все частицы в V_0 , из нее получаем положение всех частиц среды в выбранный момент времени t .

Следует отметить, что описание движения сплошной среды с помощью функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$, когда частицы могут перемещаться на сколь угодно большие расстояния, относится к таким средам, как жидкости и газы. Деформируемые твердые тела разрушаются уже при малых смещениях частиц, и для их кинематики характерны поля смещений, малых по величине.

Функция (1.1) предполагается непрерывной и дважды непрерывно дифференцируемой по времени; для большинства задач этого достаточно. Что касается ее зависимости от \mathbf{r}_0 , то иногда приходится допускать лишь кусочную непрерывность; это происходит тогда, когда в потоке есть так называемые критические точки, где скорость обращается в нуль и в которых две как угодно близкие струйки жидкости могут разойтись на конечное расстояние (обтекание рекой острова). Эти точки являются особыми для дифференциальных уравнений линий тока или траекторий (см. § 3): в них возможно ветвление интегральных кривых уравнений движения.

Ламинарное и турбулентное движения

Следует иметь в виду, что в природе существуют две качественно различных формы движения жидкости (газа). Одна из них называется

ламинарным движением (лат. *lamina* — пластинка, полоска), при котором среда перемещается слоями, без перемешивания. В этом случае зависимость (1.1) от времени t носит регулярный детерминированный характер (рис. 5, а). Другая форма движения среды получила название *турбулентного движения* (лат. *turbulentus* — бурный, беспорядочный), когда частицы движутся по сложным траекториям хаотично, неупорядоченно, а слои жидкости интенсивно и постоянно перемешиваются (рис. 5, б). В случае хаотичного, нестационарного движения жидкости (газа) зависимость (1.1) от времени t носит случайный характер, и эта функция может быть отнесена к случайным функциям (случайным величинам, случайным процессам). Местоположение частицы становится случайной величиной, определенной на дискретных пространствах элементарных событий. При этом движении частиц жидкости можно выделить осредненное по времени движение: средние скорости движения, средние давления и т. п. (см. рис. 5, б, где средние скорости показаны пунктиром).

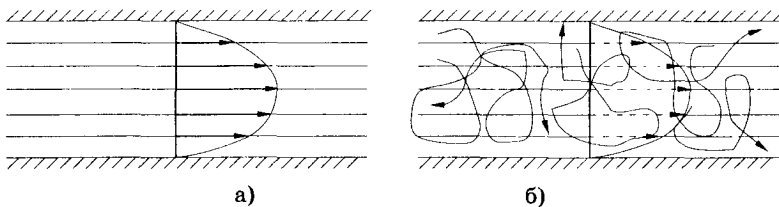


Рис. 5

В природе и технике большинство течений являются турбулентными. Ламинарное движение при определенном соотношении между вязкими и инерционными силами, действующими в жидкости (газе), внезапно теряет устойчивость и переходит в турбулентную форму движения.

В последние десятилетия появился новый мощный математический аппарат, имеющий широкую область применения в естествознании и технике. Речь идет о *теории катастроф* — математическом описании скачкообразных изменений в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Именно так происходит внезапный переход ламинарной формы движения жидкости в турбулентную, и не

случайно, что для изучения этого перехода и самой турбулентности исследователи использовали выводы теории катастроф, теории особенностей и бифуркаций (см., например, [1] и библиографию в книге).

Подробно потеря устойчивости ламинарной формы движения и вопросы турбулентности будут изучаться в гидромеханике.

Выражение (1.1) можно рассматривать как однопараметрическое (с параметром t) преобразование области V_0 в область V . Предполагая, что это преобразование, как и обратное ему, дифференцируемо и однозначно, получаем, что якобиан

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_{01}, x_{02}, x_{03})} \equiv \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}} \right\|$$

не обращается ни в нуль, ни в бесконечность для любого $t > t_0$ (ср. (0.3)). Учитывая требование гипотезы сплошности, приходим к выводу, что условие взаимно-однозначности преобразования (1.1) для любого $t > t_0$ равносильно тому, что сплошная среда из V_0 не нарушает своей сплошности во все время движения.

Наконец, формула (1.1) является исходной для построения двух методов математического описания движения сплошной среды, носящих имена Лагранжа и Эйлера.

Метод Лагранжа

*Метод Лагранжа*¹ наиболее близок к кинематике материальной точки. Он состоит в описании движения отдельных частиц среды, сплошным образом заполняющих рассматриваемую пространственную область. Поскольку в сплошной среде надо «перебрать» все ее частицы, то в качестве независимых переменных метода Лагранжа выбирается не только время, но и величины, однозначно отмечающие каждую частицу. В качестве

¹Лагранж (*Lagrange*) Жозеф Луи (1736–1813) — выдающийся французский математик и механик. В 1754 г. стал профессором артиллерийской школы. Основатель знаменитой Туринской академии. В 1766–1787 гг. преподавал в Берлинской академии наук. В 1787 г. переехал в Париж, где до конца жизни был профессором Нормальной школы и Политехнической школы. В 1788 г. издал знаменитую книгу «Аналитическая механика», которую У. Р. Гамильтон назвал «научной поэмой». Развил основные понятия вариационного исчисления и предложил общий аналитический метод для решения вариационных задач. Придал уравнениям движения форму, названную его именем. В «Аналитической механике» значительное место занимают вопросы механики сплошной среды (гидростатика, гидродинамика, теория упругости). Автор ряда фундаментальных работ по математическому анализу, теории чисел, алгебре, астрономии, картографии и др.

таких «меток» частиц зачастую берут значения их прямоугольных декартовых координат в начальный момент времени x_{01}, x_{02}, x_{03} . Вместо них, если угодно, всегда могут быть выбраны три любые величины ξ^1, ξ^2, ξ^3 , связанные с x_{01}, x_{02}, x_{03} взаимно однозначными зависимостями:

$$\xi^i = \xi^i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) \quad (i = 1, 2, 3).$$

В частности, такими величинами могут быть криволинейные координаты системы (x^1, x^2, x^3) , относящиеся к частице в ее начальном положении, т. е. $\xi^i = x_{0i}^i$, и «не покидающие ее» во время движения среды.

Таким образом, независимыми переменными в методе Лагранжа (*лагранжевыми переменными*) являются величины t, ξ^1, ξ^2, ξ^3 , а для полного описания движения сплошной среды методом Лагранжа необходимо иметь три скалярные функции

$$x_i = x_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad (1.2)$$

составляющие вектор-функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (1.3)$$

Следует иметь в виду, что здесь вектор \mathbf{r} относится к *материальной частице среды*, именно к той частице, которая в момент времени t_0 находилась в точке пространства M_0 с координатами x_{01}, x_{02}, x_{03} . Таким образом, выражения (1.2), (1.3) представляют собой кинематические уравнения движения этой частицы. Но поскольку переменными являются и величины ξ^1, ξ^2, ξ^3 , то они же описывают и траектории *всех частиц среды* из области V_0 . Действительно, как уже отмечалось, изменяя t , мы следим за движением одной частицы (той, что при $t = t_0$ была в точке \mathbf{r}_0), а перебирая возможные значения ξ^1, ξ^2, ξ^3 , можем проследить движение всех частиц среды. Вдоль траектории частицы ее лагранжевы координаты остаются постоянными.

Поскольку лагранжевы координаты относятся к определенной материальной частице, их называют *материальными* (субстанциональными, индивидуальными) координатами. Система лагранжевых координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , таким образом, жестко связана с материальными час-

тицами среды; *частицы относительно нее покоятся*. Эта система как бы «вморожена» в среду, передвигается вместе с ней, и поэтому иногда ее называют *сопутствующей* системой координат. Ее координатные линии все время состоят из одних и тех же частиц и, вообще говоря, меняются с течением времени при движении среды. На рис. 6 схематически изображено, как координатные линии лагранжевой системы координат, будучи в начальный момент выбранными в виде прямых, в другой момент времени не остаются прямыми вследствие разных законов движения материальных частиц, по которым эти линии проходят.

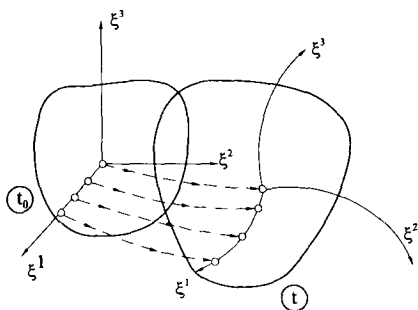


Рис. 6

Если с системой лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 связать координатный базис (материальный базис), то можно проследить, как он будет меняться в зависимости от движения среды. Его векторы \mathbf{e}_i , согласно определению, равны

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^i},$$

причем $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Выясним прежде всего, как можно описать изменение *материальных объектов* — материальной линии, материальной поверхности — при движении среды. Под материальными объектами будем подразумевать такие образования в сплошной среде, которые все время состоят из одних и тех же частиц движущейся среды.

Пусть в фиксированной пространственной системе криволинейных координат x^i задан закон движения среды (1.3) в виде

$$x^i = x^i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3) \equiv x^i(t, x_0^k), \quad (1.4)$$

где $M(x_0^1, x_0^2, x_0^3) \in V_0 \equiv V(t_0)$; $M(x^1, x^2, x^3) \in V(t)$.

В этом рассмотрении в качестве лагранжевых координат ξ^i выбраны для наглядности x_0^i .

Поскольку x_0^i — значения криволинейных пространственных координат x^i в начальный момент времени $t = t_0$, то функции

$$x_0^i = x^i(t_0, \xi^k) \quad (1.5)$$

полностью определяют *исходную (начальную) конфигурацию* среды, в то время, как о совокупности функций (1.4) можно говорить как о задающей *текущую конфигурацию* среды.

Если частица (материальная точка) в начальный момент времени занимала положение $x^i = x_0^i$, то ее положение в момент времени t определится согласно (1.4) координатами $x^i = x^i(t, x_0^k)$.

Если материальная линия в начальный момент времени занимала положение $x_0^i = x_0^i(\theta)$ (параметрическое уравнение пространственной кривой в исходной конфигурации), то в момент времени t ее уравнение будет иметь вид $x^i = x^i(t, x_0^k(\theta))$.

Если материальная поверхность в начальной конфигурации задана параметрическими уравнениями $x_0^i = x_0^i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$), то в любой момент времени ее уравнение можно найти из (1.4) в виде $x^i = x^i(t, x_0^k(u, v))$.

Пример. Пусть закон движения среды (1.4) имеет (в декартовых прямоугольных координатах) вид:

$$x_1 = x_{01}(1+t), \quad x_2 = t^2 x_{03}^2 + x_{02}, \quad x_3 = x_{03}(1+t).$$

Тогда при движении среды имеем: а) частица в начале координат исходной конфигурации ($x_{01} = x_{02} = x_{03} = 0$) останется на месте, а все частицы оси (x_{01}) (для них $x_{02} = x_{03} = 0$) будут формировать новую прямолинейную ось (x_1); б) отрезок координатной оси (x_{03}), а именно: $x_{01} = x_{02} = 0$, $x_{03} = x_{03}(\theta)$ (при $0 \leq \theta \leq \theta_1$) перейдет в параболу $x_1 = 0$, $x_2 = t^2 x_{03}^2(\theta)$, $x_3 = x_{03}(\theta)(1+t)$ или $x_2 = x_3^2 t^2 / (1+t)^2$, которая все время остается в плоскости x_2, x_3 ; в) участок координатной плоскости $x_{03} = 0$, $x_{01} = u$, $x_{02} = v$ перейдет в участок поверхности $x_1 = u(t+1)$, $x_2 = v$, $x_3 = 0$, которая остается все время плоской.

Считая зависимость (1.4) взаимно однозначной, можно выразить базисные векторы \mathbf{a}_i пространственной системы криволинейных координат x^i через базисные векторы \mathbf{e}_i лагранжевой (материальной) системы координат x_0^i .

По определению базисных векторов \mathbf{a}_i пространственной (не связанной с движущейся средой) системой криволинейных координат x^1, x^2, x^3 имеем

$$\mathbf{a}_i(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}(x^m)}{\partial x^i}.$$

Если в точке пространства (x^1, x^2, x^3) находится материальная частица среды, движущаяся согласно закону $x^i = x^i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$, то векторы базиса лагранжевой (сопутствующей) системы координат x_0^1, x_0^2, x_0^3 , связанной с движущейся средой, по определению равны

$$\mathbf{e}_i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3) = \frac{\partial \mathbf{r}(x^m(t, x_0^i))}{\partial x_0^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^i} = \mathbf{a}_k(x^m) \frac{\partial x^k}{\partial x_0^i}.$$

С другой стороны, учитывая тот же закон движения материальных частиц, получаем

$$\mathbf{a}_i(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial \mathbf{r}(x^m(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3))}{\partial x^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_0^k} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i} = \mathbf{e}_k(t, x_0^m) \frac{\partial x_0^k}{\partial x^i}.$$

Заметим, что \mathbf{a}_i не зависят от времени; однако базис лагранжевой системы координат меняется не только от частицы к частице, но и со временем.

В исходной конфигурации среды имеем

$$\mathbf{a}_i(x_0^k) = \mathbf{a}_i(x^k(t_0, x_0^m)) = \mathbf{e}_j(t_0, x_0^k) \left(\frac{\partial x_0^j}{\partial x^i} \right)_{t=t_0},$$

$$\mathbf{e}_i(t_0, x_0^k) = \mathbf{a}_j(x^k(t_0, x_0^m)) \left(\frac{\partial x^j}{\partial x_0^i} \right)_{t=t_0}.$$

Хотя все частицы и покоятся относительно системы лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 , зависимость какой-либо величины от ξ^1, ξ^2, ξ^3 определяет ее распределение по материальным частицам среды, а производные по ξ^i позволяют следить за интенсивностью этого распределения.

Функции (1.2), как уже упоминалось, предполагаются дифференцируемыми по времени. Это позволяет найти скорость \mathbf{v} и ускорение \mathbf{w} любой материальной частицы среды. По определению имеем:

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0) = \mathbf{v}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t, \mathbf{r}_0) - \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{r}_0) = \mathbf{w}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{r}_0) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_0)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}. \quad (1.7)$$

Здесь частные производные по времени иногда записывают в виде

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_{\mathbf{r}_0} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2}\right)_{\mathbf{r}_0},$$

подчеркивая этим, что величина \mathbf{r}_0 , определяющая лагранжевы переменные, при дифференцировании остается неизменной и, следовательно, производные по времени относятся к *материальной частице среды*. В силу этого производные (1.6) и (1.7) иногда называют *материальными* (субстанциональными, индивидуальными).

Отметим, что, в силу независимости лагранжевых переменных, дифференцирование по времени переставимо с дифференцированием по координатам ξ^i .

Очевидно, что хотя (1.6) и (1.7) определяют скорость и ускорение индивидуальной частицы, т. е. той, которая при $t = t_0$ была в M_0 , но, меняя ξ^1, ξ^2, ξ^3 , мы получаем скорости и ускорения всех частиц из V_0 .

Описание движения среды методом Лагранжа, хотя и выглядит как будто просто, таит в себе некоторые сложности и неудобства, обнаруживающиеся на практике. Так, скажем, в случае зависимости сил от координат динамическое уравнение движения частицы становится нелинейным, а его анализ и конструктивное решение — затруднительным.

Действительно, согласно второму закону Ньютона уравнение движения частицы сплошной среды под действием, например, потенциальной силы с компонентами $F_i = -\partial\Pi/\partial x_i$ имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad (1.8)$$

где $x_i = x_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — проекции радиуса-вектора частицы на оси прямоугольной декартовой системы как функции лагранжевых переменных.

Считая, что функция плотности $\rho = \rho(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ и преобразование (1.2) известны, умножим каждое из уравнений (1.8) на $\partial x_i / \partial \xi^k$ и просуммируем по (i) . Получим

$$\rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi^k} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial \xi^k} = -\frac{\partial \Pi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^k}.$$

Из этой системы трех нелинейных уравнений надлежит найти функции $x_i = x_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

В методе Лагранжа описания движения среды отсутствует явное выражение для градиентов скорости, которые приводят к появлению сил вязкости в жидких средах.

С точки зрения использования вычислительных методов лагранжево описание движения в гидромеханике предпочтительно для одномерных задач (распространение плоской и сферической ударных волн, особенно в области развития скачка, положение которого заранее неизвестно), в то время как эйлерово описание широко используется при численных расчетах плоских и пространственных потоков.

В связи с определенными сложностями практического использования метода Лагранжа, при котором, тем не менее, получают исчерпывающую информацию о движении любой частицы среды, в механике сплошной среды широкое распространение получил метод Эйлера¹.

Метод Эйлера

В *методе Эйлера* кинематическое состояние среды задается посредством поля скоростей, т. е. вектор-функции $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, причем радиус-вектор \mathbf{r} относится к *точкам пространства*, где движется сплошная среда.

Таким образом, описывая движение сплошной среды методом Эйлера, не интересуются «судьбой» каждой частицы, прослеживая ее движение при помощи уравнения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$, но следят за *каждой точкой пространства*, куда подходят различные частицы со своими скоростями и, таким образом, формируют поле скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$. Оказывается, как будет показано в дальнейшем, этой информации достаточно, чтобы сформулировать практически удобные дифференциальные уравнения, отражающие динамические законы движения среды.

Итак, в методе Эйлера переменными величинами (*переменными Эйлера*) являются величины

¹ Эйлер (*Euler*) Леонард (1707–1783) — выдающийся математик, механик, физик и астроном. В 1724 г. окончил Базельский университет; в 1727 г. поступил адъюнктом в Петербургский университет. В 1741 г. во время бироновщины из России переехал в Берлин, но в 1766 г. вновь приехал в Петербург, где и работал до конца жизни. Эйлеру принадлежит более 850 фундаментальных исследований, из которых свыше 200 статей и книг посвящены проблемам механики. Наиболее известны двухтомная монография «Механика, т. е. наука о движении, изложенная аналитическим методом» (1753 г.), два тома «Алгебры» и три тома «Интегрального исчисления» (1769–1771 гг.). Впервые сделал аппаратом механики дифференциальные уравнения, дифференциальную геометрию, вариационное исчисление. Устранил неполноту первых вариационных принципов Ферма, Мопертюи и И. Бернулли, обосновав принцип наименьшего действия (1753 г.). В «Началах движения жидкостей» (1757 г.) впервые дал вывод уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости и уравнения изменения количества движения, называемого уравнением Эйлера. Не менее известны работы по баллистике и по движению твердого тела. Работы Эйлера оказали огромное влияние на последующее развитие науки. По образному выражению Лапласа, Эйлер стал «общим учителем всех нас».

$$t, x^1, x^2, x^3,$$

где x^i — координаты точек пространства (вообще говоря, криволинейные), в котором движется сплошная среда.

Для кинематического описания движения среды методом Эйлера достаточно иметь поле скоростей, т. е. три скалярных функции

$$v_i = v_i(t, x^1, x^2, x^3), \quad (1.9)$$

составляющих вектор-функцию

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x^1, x^2, x^3) \equiv \mathbf{v}(t, \mathbf{r}), \quad (1.10)$$

где \mathbf{r} определяет точки пространства, через которые проходят различные частицы среды.

Поле ускорений в методе Эйлера отыскивается несколько сложнее, чем ускорения частиц в методе Лагранжа, поскольку речь идет о *поле ускорений частиц*, которое нужно найти на основании известного поля скоростей в эйлеровых переменных. Прежде всего, следует иметь в виду, что заданное поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ определяет и *скорость частицы*, находящейся в данный момент времени в точке пространства \mathbf{r} ; а поскольку уравнение движения этой частицы имеет вид $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$, то в отношении *скорости частицы* можно писать $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t))$. Если это учесть, то тогда станут понятными следующие выкладки по вычислению ускорения частицы — *материальной (субстанциональной) производной по времени от скорости частицы*:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t, \mathbf{r}(t + \Delta t, \mathbf{r}_0)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}(\mathbf{r}_0))}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}_0} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

поскольку $(\partial \mathbf{r} / \partial t)_{\mathbf{r}_0} = \mathbf{v}$; $(\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r}) = \nabla \mathbf{v}$, где ∇ — векторный оператор «набла»¹.

¹ Предполагается, что читатель знаком с тензорным исчислением хотя бы в пределах пособия [7].

Иногда для материальной производной по времени в эйлеровом описании вводят специальное обозначение. Например, в случае ускорения материальной частицы это выглядит так

$$\mathbf{w} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}.$$

В дальнейшем всюду материальную производную по времени от некоторой тензорной величины, т. е. скорость изменения определенного физического свойства в частице среды, описываемого этой величиной, будем обозначать знаком полной производной по времени, так что в нашем примере

$$\mathbf{w} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

В случае эйлерова описания движения это удобно, поскольку формально материальная производная совпадает с полной производной по времени от сложной функции времени t , которое входит как явным образом, так и через закон движения $x^i = x^i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Так, в случае $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, x^i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3))$ полная производная по времени от этой вектор-функции равна

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t},$$

а поскольку $\partial x^i / \partial t = v^i$ и $\partial\mathbf{v} / \partial x^i = \mathbf{v}_{,i}$, то это выражение совпадает с материальной производной (1.11).

Таким образом, материальная производная от вектора $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, описывающего в эйлеровых переменных некоторое свойство среды, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + v^i \mathbf{A}_{,i}.$$

При этом компоненты материальной производной выражаются через производные от компонент вектора следующим образом:

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_i = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \cdot \mathbf{a}_i = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v^j A_{i,j},$$

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)^i = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \cdot \mathbf{a}^i = \frac{\partial A^i}{\partial t} + v^j A_{,j}^i.$$

Эти выражения основаны на том, что базис пространственной системы координат не меняется с течением времени.

Аналогично для тензора второго ранга $\hat{\mathbf{T}}$, заданного в эйлеровых координатах своими компонентами, имеем материальную производную в виде

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{a}_i \mathbf{a}_k T^{ik}).$$

Отсюда, например, для контравариантных компонент материальной производной в эйлеровом описании получаем

$$\left(\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right)^{ik} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial t} + v^j T_{;j}^{ik}$$

и аналогичные формулы для остальных компонент T_{ik} , T_i^k , T_k^i .

Не так обстоит дело с компонентами материальной производной при лагранжевом описании, поскольку базисные векторы лагранжевой системы координат зависят от времени. Кроме того, в силу независимости лагранжевых переменных t, ξ^1, ξ^2, ξ^3 здесь

$$\frac{DA}{Dt} \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial t}.$$

Материальная производная в лагранжевом описании приводит к понятию верхней и нижней производных Олдройда (§ 13).

Ковариантная и контравариантная компоненты ускорения частицы, т. е. материальной производной по времени от скорости, имеют вид

$$w_i = \left(\frac{dv}{dt}\right)_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v^k v_{i;k}, \quad w^i = \left(\frac{dv}{dt}\right)^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k v^i_{;k}.$$

В выражении (1.11) для материальной производной по времени от скорости частицы различают *локальное ускорение* $\partial \mathbf{v} / \partial t$ и *конвективное ускорение* $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

Локальное ускорение является следствием нестационарности поля скоростей, т. е. явной зависимости \mathbf{v} от t , и равно нулю для *установившегося (стационарного)* движения среды, т. е. когда $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$. Эта часть ускорения характеризует изменение скорости со временем в исходном положении частицы: $\partial \mathbf{v} / \partial t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{v})_{\text{лок}} / \Delta t$ (рис. 7).

Конвективное ускорение равно нулю в тех случаях, когда скорость частицы не меняется (по величине и направлению) вдоль ее траектории, т. е. по направлению вектора скорости \mathbf{v} . В частности, эта часть полного ускорения исчезает во всяком *однородном* поле скоростей, т. е. когда $\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{r} = \nabla \mathbf{v} = 0$. Конвективное ускорение отражает изменение скорости как следствие изменения положения (конвекции) частицы в пространстве: $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta \mathbf{v})_{\text{конв}} / \Delta t$ (см. рис. 7). Заметим, что тензор (диада) $\nabla \mathbf{v}$ является мерой изменения по точкам пространства ско-

ростного поля, подобно тому как $\nabla\varphi$ — мерой изменения скаляра φ . Тогда можно говорить о конвективном ускорении как о *производной скорости по направлению скорости частицы* \mathbf{v} или о проекции $\nabla\mathbf{v}$ на направление скорости \mathbf{v} (с точностью до множителя $|\mathbf{v}|^{-1}$).

В соответствии с двумя слагаемыми ускорения, полное изменение скорости частицы $\Delta\mathbf{v}$ за время Δt при передвижении вдоль траектории на $\Delta\mathbf{r}$ может быть представлено как векторная сумма двух частей: $(\Delta\mathbf{v})_{\text{лок}}$ и $(\Delta\mathbf{v})_{\text{конв}}$ (см. рис. 7).

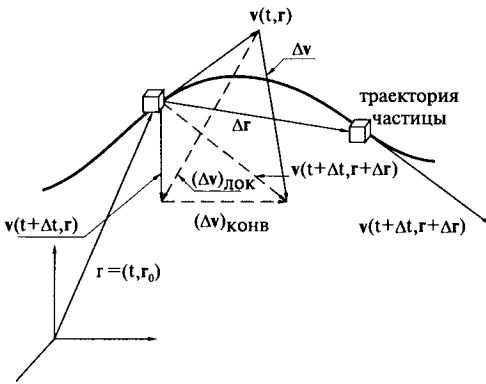


Рис. 7

Два слагаемых — локальное и конвективное — характерны для материальной производной по времени от величины любого тензорного ранга, характеризующей некоторое свойство среды.

Так, например, изменение температуры частицы при ее движении со скоростью $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ в температурном поле $T(t, \mathbf{r})$ характеризуется производной

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T,$$

а малое изменение ΔT температуры за время Δt частицы, прошедшей путь $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$ вдоль траектории, равно (рис. 8)

$$\Delta T = (\Delta T)_{\text{лок}} + (\Delta T)_{\text{конв}} = \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t + \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla T = \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t + (\mathbf{v} \cdot \nabla T) \Delta t.$$

Здесь $(\Delta T)_{\text{лок}} = (\partial T / \partial t) \Delta t$ отражает только ту часть изменения температуры в частице, которая связана с нестационарностью температуры; $(\Delta T)_{\text{лок}}$ будет присутствовать при нестационарном поле температуры даже в неподвижной частице. Но поскольку за Δt частица переместилась на $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$, то в результате этой конвекции она перешла на другую изотерму температурного поля и, так как ∇T направлен по нормали к изотермам, получила приращение температуры, равное $(\Delta T)_{\text{конв}} = \Delta\mathbf{r} \cdot \nabla T = (\mathbf{v} \cdot \nabla T) \Delta t$, так что конвективная часть представляет собой проекцию с точностью до множителя $|\mathbf{v}|^{-1}$ вектора ∇T на направление скорости частицы (см. рис. 8).

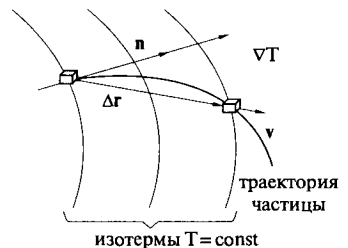


Рис. 8

Аналогично, если тензор любого ранга $A_{ikl\dots}$ описывает некоторое физическое свойство сплошной среды и образует поле $A_{ikl\dots}(t, \mathbf{r})$, то скорость изменения этого свойства в частицах среды характеризуется материальной производной

$$\left(\frac{d\tilde{A}}{dt}\right)_{ikl\dots} = \frac{\partial A_{ikl\dots}}{\partial t} + v^m A_{ikl\dots m}. \quad (1.12)$$

В силу конструкции материальной производной по времени от любого нестационарного и неоднородного поля $A_{ikl\dots} = A_{ikl\dots}(t, \mathbf{r})$, связанного с физическими свойствами среды, выражение (1.12) и называют *полной производной по времени*, чтобы отличить ее от частной производной $\partial A_{ikl\dots}/\partial t$. Если в $A_{ikl\dots}(t, x^m)$ рассматривать величины x^m как функции времени, т. е. $x^m = x^m(t)$, то, конечно, можно о (1.12) говорить как о полной производной по времени; но следует всегда иметь в виду, что в методе Эйлера переменные t, x^1, x^2, x^3 являются независимыми переменными.

Связь между методом Лагранжа и методом Эйлера

Вернемся к основной формуле кинематики сплошной среды $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$, или

$$x^i = x^i(t, x_0^1, x_0^2, x_0^3).$$

Отметим еще раз, что она фактически представляет собой кинематическое уравнение движения частицы, занимавшей при $t = t_0$ положение $\mathbf{r}_0 = (x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Об этой формуле говорят как о *лагранжевом описании движения сплошной среды*, поскольку она относится по сути ко всему континууму частиц, занимавшему при $t = t_0$ некую пространственную область V_0 (область изменения материальных переменных x_0^1, x_0^2, x_0^3), и поскольку при этом независимыми переменными являются лагранжевы переменные t, x_0^1, x_0^2, x_0^3 .

Формула $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$ указывает на точку пространства, в которой в момент времени t находится частица \mathbf{r}_0 . Иными словами, эта формула описывает в момент времени t положение частицы, находившейся в \mathbf{r}_0 при $t = t_0$.

При $J = \det \left\| \partial x^j / \partial x_0^i \right\| \neq 0$ можно разрешить эту зависимость относительно \mathbf{r}_0 и записать

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r}), \quad x_0^i = x_0^i(t, x^1, x^2, x^3).$$

Теперь эта новая формула показывает, какая частица \mathbf{r}_0 находится в точке пространства \mathbf{r} в момент времени t . Иными словами, она определяет движение того же континуума частиц среды; к моменту времени t он займет пространственную область V , являющуюся областью изменения пространственных переменных x^1, x^2, x^3 . Об этой зависимости говорят как об *эйлеровом описании движения сплошной среды*, а независимыми переменными при этом являются переменные Эйлера t, x^1, x^2, x^3 .

Таким образом, лагранжево и эйлерово описание движения сплошной среды эквивалентны в том смысле, что позволяют однозначно определить положение любой частицы среды в произвольный момент времени.

Переход от описания движения среды методом Лагранжа к методу Эйлера осуществляется на основании известных в методе Лагранжа зависимостей (1.2) и (1.6), а именно

$$x_i = x_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad v_i = v_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

В силу гипотезы сплошности якобиан $\det \|\partial x_i / \partial \xi^k\|$ не равен нулю, и поэтому из первых трех зависимостей можно найти функции $\xi^i = \xi^i(t, x_1, x_2, x_3)$, которые при подстановке в выражения для v_i дают $v_i = v_i(t, x_1, x_2, x_3)$ — поле скоростей, которое и является исходным в методе Эйлера.

Для перехода от описания методом Эйлера к описанию методом Лагранжа достаточно воспользоваться определением скорости частицы в методе Лагранжа, приравняв ее выражение заданному полю скоростей, а именно

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}_0} = \mathbf{v}(t, x_1, x_2, x_3).$$

Поскольку $(\partial x_i / \partial t)_{\mathbf{r}_0} \equiv dx_i / dt$ относится к частице, находящейся в точке (x_1, x_2, x_3) , то

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(t, x_1, x_2, x_3).$$

Итак, это соотношение можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно функций $x_i(t)$, определяющих закон движения частиц. Интегрируя эту систему, получаем

$$x_i = x_i(t, x_{01}, x_{02}, x_{03}),$$

где x_{0k} — постоянные интегрирования, которые всегда можно рассматривать как координаты частицы в момент времени $t = t_0$. Полученный интеграл и является исходным уравнением в методе Лагранжа.

Отметим одно важное свойство лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 , о котором ранее уже упоминалось вскользь.

Поскольку они связаны с определенной частицей среды, то остаются неизменными вдоль траектории частицы, так что в эйлеровом описании материальная производная от любой координаты равна нулю, т. е.

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \frac{\partial \xi^i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi^i = 0.$$

Можно говорить, таким образом, что лагранжевы координаты «сохраняются» в каждой движущейся частице.

Задачи с решениями

Задача 1.1. Для движения, заданного полем скоростей $(x_1, x_2, x_3$ — декартовы прямоугольные координаты)

$$\mathbf{v} = \left(\frac{x_1 - vt}{\tau}, -\frac{x_2}{\tau}, 0 \right),$$

где v, τ — положительные постоянные, найти:

- лагранжево и эйлерово описания движения среды,
- скорость и ускорение в лагранжевом и эйлеровом описании,
- локальное и конвективное ускорения,
- остаются оси сопутствующей системы координат прямолинейными или деформируются?
- найти соотношения между векторами материального и пространственного базисов.

Решение. а) Интегрируя уравнения $dx_i/dt = v_i$, получаем лагранжево описание движения

$$x_1 = x_{01} e^{t/\tau} - \frac{v}{2\tau} t^2, \quad x_2 = x_{02} e^{-t/\tau}, \quad x_3 = x_{03}.$$

б) Из предыдущих выражений получаем эйлерово описание

$$x_{01} = \left(x_1 + \frac{v}{2\tau} t^2 \right) e^{-t/\tau}, \quad x_{02} = x_2 e^{t/\tau}, \quad x_{03} = x_3.$$

в) Скорость и ускорение в лагранжевом описании имеют соответственно компоненты $v_i = \partial x_i / \partial t$, $w_i = \partial^2 x_i / \partial t^2$, так что

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{vt}{\tau} + \frac{x_{01}}{\tau} e^{t/\tau}, -\frac{x_{02}}{\tau} e^{-t/\tau}, 0 \right),$$

$$\mathbf{w} = \left(-\frac{v}{\tau} + \frac{x_{01}}{\tau^2} e^{t/\tau}, \frac{x_{02}}{\tau^2} e^{-t/\tau}, 0 \right).$$

В эйлеровом описании вектор \mathbf{V} задан по условию, а ускорение получаем из выражения

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{лок}} + \mathbf{w}_{\text{конв}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Вычисления дают

$$\mathbf{w}_{\text{лок}} = \left(-\frac{v}{\tau}, 0, 0 \right),$$

$$\mathbf{w}_{\text{конв}} = \left(\frac{x_1 - vt}{\tau^2}, \frac{x_2}{\tau^2}, 0 \right).$$

г) Чтобы ответить на вопрос о деформации оси (x_{01}) , надо записать текущую конфигурацию при $x_{02} = 0$, $x_{03} = 0$. Имеем

$$x_1 = x_{01} e^{t/\tau} - \frac{v}{2\tau} t^2, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

Таким образом, ось x_1 (ее уравнение в начальной конфигурации можно записать в параметрической форме $x_{01} = x_{01}(\theta)$; $x_{02} = x_{03} = 0$) остается прямолинейной; это, между прочим, следует и из того, что компонента скорости $v_2 = -x_2/\tau$ не зависит от x_1 и одинакова для всех частиц на оси x_1 . Аналогично, ось x_2 также остается прямолинейной при рассматриваемой деформации.

д) Из формул, связывающих базисы систем, и полученного выше эйлера описания имеем

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_j \frac{\partial x_j}{\partial x_{01}} = \mathbf{i}_1 e^{t/\tau}; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_j \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} = \mathbf{i}_2 e^{-t/\tau}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_j \frac{\partial x_j}{\partial x_{03}} = \mathbf{i}_3.$$

Задача 1.2. Для движения, определяемого полем скорости

$$\mathbf{v} = (\alpha x_2, \beta x_1, 0),$$

найти лагранжево описание движения и выяснить деформацию координатных осей (x_{01}) и (x_{02}) сопутствующей системы координат.

Решение. Для определения уравнений движения частиц надо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = \beta x_1; \quad \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

Интеграл этой системы представляет лагранжево описание движения и имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(x_{01} + x_{02} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) e^{t\sqrt{\alpha\beta}} + \left(x_{01} - x_{02} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) e^{-t\sqrt{\alpha\beta}} \right\},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(x_{01} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + x_{02} \right) e^{t\sqrt{\alpha\beta}} - \left(x_{01} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - x_{02} \right) e^{-t\sqrt{\alpha\beta}} \right\},$$

$$x_3 = x_{03}.$$

§ 1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Ось (x_{02}), уравнение которой в начальной конфигурации можно представить в виде $x_{01} = x_{03} = 0$; $x_{02} = x_{02}(\theta)$, переходит в прямую

$$x_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x_{02}(\theta) \operatorname{sh}(t\sqrt{\alpha\beta}); \quad x_2 = x_{02}(\theta) \operatorname{ch}(t\sqrt{\alpha\beta})$$

или

$$x_2 = x_1 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{cth}(t\sqrt{\alpha\beta}).$$

Ось (x_{01}) деформируется в результате движения среды в прямую

$$x_1 = x_{01}(\theta) \operatorname{ch}(t\sqrt{\alpha\beta}); \quad x_2 = x_{02}(\theta) \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{sh}(t\sqrt{\alpha\beta})$$

или

$$x_2 = x_1 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{th}(t\sqrt{\alpha\beta}).$$

При $t \rightarrow \infty$ эти оси совпадают с прямой $x_2 = x_1 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

Упражнения

1. Для заданного закона движения среды (лагранжево описание)

$$x_1 = x_{01} e^t + x_{03} (e^t - 1); \quad x_2 = x_{03} (e^t - e^{-t}) + x_{02}; \quad x_3 = x_{03}$$

найти: а) эйлерово описание движения, б) убедиться, что движение непрерывно, в) найти компоненты скорости и ускорения в лагранжевом и эйлеровом представлении, г) локальные и конвективные составляющие ускорения, д) соотношения между векторами пространственного и материального базисов.

2. Найти локальную и конвективную части ускорения для следующих полей скорости:

а) $\mathbf{v} = (-x_{02} e^{-t}, -x_{03}, 2t)$,

б) $\mathbf{v} = (x_1/(1+t), 2x_2/(1+t), 3x_3/(1+t))$.

В каких точках равно нулю локальное ускорение? конвективное ускорение?

3. Найти закон движения среды для полей скорости упражнения 2 и компоненты ускорения в лагранжевом описании.

4. Для поля скорости

$$\mathbf{v} = (\alpha x_2 + \beta, \beta x_1 + \gamma, 0)$$

найти эйлерово и лагранжево описания движения и соответствующие базисные векторы.

5. Для заданного закона движения среды в эйлеровом описании

$$x_{01} = x_1 e^t + x_3 (e^t - 1); \quad x_{02} = x_3 (e^t - e^{-t}) + x_2; \quad x_{03} = x_3$$

найти локальную и конвективную составляющие ускорения.

6. Для полей скорости: 1) $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{i}}_1 + \dot{\mathbf{i}}_2$, 2) $\mathbf{v} = a\mathbf{r}$, 3) $\mathbf{v} = -x_1\dot{\mathbf{i}}_2 + x_2\dot{\mathbf{i}}_1$ найти лагранжево описание движения и базисные векторы в лагранжевой системе координат.

7. Для поля скорости

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} (x_{01}\dot{\mathbf{i}}_1 + x_{02}\dot{\mathbf{i}}_2) \sin t$$

найти траектории и выражение скорости в эйлеровых переменных.

§ 2. Теория деформаций

В этом параграфе рассматривается кинематическое описание важнейшего свойства сплошной среды — способности к деформированию, т. е. к изменению формы и величины занимаемого средой объема. Любая деформация является следствием того, что расстояние между двумя произвольными частицами среды может меняться.

Деформация среды связана с *векторным полем смещения* $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, определяющим перемещение частицы, находящейся в точке \mathbf{r} в момент времени t . Бесконечно малое смещение $d\mathbf{u}$, конечно, совпадает с $d\mathbf{r}$, направленным вдоль траектории частицы. Но поскольку в механике сплошной среды исследуются и деформации, связанные с конечными перемещениями частиц независимо от времени перемещения, то в общем случае вектор смещения равен $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, где \mathbf{r} — определяет конечное положение частицы после деформации.

Перемещение среды как целого и ее деформация при заданном поле $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, конечно, «перепутаны», не разделены. Движение сплошной среды обычно сопровождается деформацией, а может в определенных условиях проходить и без деформации. В этом случае говорят о *квазитвердом движении среды*, имея в виду, что она перемещается как твердое тело. Конечно, важно из общего случая движения сплошной среды уметь выделить те кинематические факторы, которые непосредственно связаны с деформацией. Именно они в динамике будут соотнесены с силовыми воздействиями, ответственными за деформацию среды. В этом, по сути, и состоит основная задача теории деформации.

Предварительно заметим, что поскольку в сплошной среде изменение расстояния между двумя частицами может касаться и как угодно близко расположенных частиц, описание деформации должно носить локальный характер. Иными словами, величины, описывающие деформацию среды, должны быть функциями точки. Что касается времени, то оно в теории деформаций рассматривается как параметр до тех пор, пока не возникает вопрос о скорости деформации; тогда наряду с полем перемещений частиц среды надо рассматривать и поле скоростей частиц.

Выделение в общей картине движения среды кинематических характеристик, описывающих собственно деформацию («чисто деформацию»), проил-

люстрируем на примере бесконечно малых перемещений и градиентов перемещений частиц сплошной среды после рассмотрения тензора Леви-Чивита.

Тензор Леви-Чивита

Приведем некоторые сведения об антисимметричном тензоре третьего ранга ε_{ijk} , который назван именем Леви-Чивита¹, имея в виду широкое использование его в дальнейшем изложении. Иногда о нем говорят как о единичном псевдотензоре.

Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис некоторой криволинейной системы координат, то можно проверить, что величины

$$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \quad (1.13)$$

составляют тензор третьего ранга, антисимметричный по отношению к любым парам индексов, т. е.

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}, \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}.$$

Таким образом, отличными от нуля компонентами являются

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321}.$$

При этом $\varepsilon_{123} = \sqrt{g}$, $g = \det \|g_{ik}\|$, $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$.

Для контравариантных компонент имеем $\varepsilon^{123} = 1/\sqrt{g}$. В случае ортогональных декартовых координат

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon^{123} = 1.$$

Произведения компонент тензора Леви-Чивита выражаются через символы Кронекера, или через g_k^i . Имеем (см. [43], [88])

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} &= \begin{vmatrix} g_i^\alpha & g_i^\beta & g_i^\gamma \\ g_j^\alpha & g_j^\beta & g_j^\gamma \\ g_k^\alpha & g_k^\beta & g_k^\gamma \end{vmatrix} = \\ &= g_i^\alpha (g_j^\beta g_k^\gamma - g_j^\gamma g_k^\beta) - g_i^\beta (g_j^\alpha g_k^\gamma - g_j^\gamma g_k^\alpha) + g_i^\gamma (g_j^\alpha g_k^\beta - g_j^\beta g_k^\alpha). \end{aligned} \quad (1.14)$$

¹ Леви-Чивита (Levi-Civita) Туллио (1873–1941) — известный итальянский математик и механик. Окончил Падуанский университет, профессор рациональной механики этого университета (1898–1938 гг.). Основные направления исследований: теория чисел, тензорный анализ, риманова геометрия, аналитическая и небесная механика, гидромеханика, теория упругости. Основополагающие работы в области абсолютного дифференциального исчисления. Совместная с Г. Риччи-Курбастро монография «Методы абсолютного дифференциального исчисления и их приложения» сделала, по словам А. Эйнштейна, возможной математическую формализацию общей теории относительности. Ему принадлежит идея параллельного переноса векторов, идея искривленного пространства, теорема об аналитических функциях комплексного переменного, фундаментальные работы по теории потенциала, по теории поверхностных волн от движения твердого тела, по теории трехмерного пограничного слоя.

Отсюда, полагая $\gamma = k$, имеем

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{\alpha\beta k} = g_i^\alpha g_j^\beta - g_i^\beta g_j^\alpha, \quad (1.15)$$

а для $\gamma = k$ и $\beta = j$, а также и для $\alpha = i$ и $\beta = j$, получаем

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{\alpha jk} = 2\delta_i^\alpha, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 6.$$

Приведем некоторые наиболее часто встречающиеся формулы с использованием компонент тензора Леви-Чивита:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \varepsilon^{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk} a^i b^j \mathbf{e}^k; \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k = \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k;$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \varepsilon^{ijk} a_i (\varepsilon_{\alpha\beta j} b^\alpha c^\beta) \mathbf{a}_k = (a_i c^i b^j - a_i b^i c^j) \mathbf{a}_j;$$

$$\det \|a^i_j\| = \varepsilon_{ijk} a^i_1 a^j_2 a^k_3 = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} a^\alpha_i a^\beta_j a^\gamma_k, \quad (1.16)$$

(здесь $\varepsilon_{123} \cdot \varepsilon^{123} = 1, \dots$).

$$\text{rot } \mathbf{v} = \varepsilon^{ijk} v_{k;j} \mathbf{a}_i; \quad \text{rot rot } \mathbf{v} = \varepsilon^{ijk} g_{kl} (\varepsilon^{l\alpha\beta} v_{\beta;\alpha}) \mathbf{a}_i.$$

Если $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$, то $\omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} v_{k;j} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{kj}$, где $\omega_{ik} = \frac{1}{2} (v_{i;k} - v_{k;i})$; при этом $\omega_{ik} = \varepsilon_{kij} \omega^j$.

$$\text{Заметим, } \omega^i_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \omega^{ik}).$$

Тензор бесконечно малых деформаций

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ — поле бесконечно малого вектора смещения сплошной среды.

Поскольку, как уже говорилось, деформация носит локальный характер, рассмотрим поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в частице сплошной среды, т.е. в окрестности точки O , где находится эта частица.

Тогда, определяя вектор смещения в точке M , отстоящей от точки O на $d\mathbf{r}$ (рис. 9), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(M) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) &= \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \right)_0 dx^k + \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^k \partial x^i} \right)_0 dx^k dx^i + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$

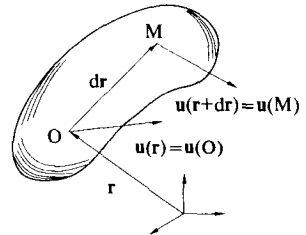


Рис. 9

Ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости, имеем

$$\mathbf{u}(M) - \mathbf{u}(O) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \right)_0 dx^k, \quad (1.18)$$

где значения производных берутся в точке O .

Таким образом, здесь фактически рассматривается предельная форма распределения поля перемещений в частице, когда все величины перемещений и их градиентов бесконечно малы.

Для наглядности будем дальнейшие выкладки вести в декартовой прямоугольной системе координат. Тогда для проекции вектора \mathbf{u} в произвольной точке M рассматриваемой частицы, проводя альтернирование и симметрирование тензора $\partial u_i / \partial x_k$, получаем

$$u_i(M) = u_i(O) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)_0 dx_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)_0 dx_k. \quad (1.19)$$

Нетрудно видеть, что $\theta_{ik} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$ — антисимметричный

тензор второго ранга, которому всегда может быть сопоставлен аксиальный вектор $\boldsymbol{\theta}$ с компонентами (см., например, [7]):

$$\theta_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \theta_{kj} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad (1.20)$$

где ε_{ijk} — тензор Леви-Чивита.

При этом

$$\theta_{ik} = \varepsilon_{ijk} \theta_j. \quad (1.21)$$

Кроме того, из (1.20) имеем

$$\theta_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u})_i \quad (1.22)$$

и, следовательно,

$$\theta_{ik} dx_k = \varepsilon_{ijk} \theta_j dx_k = (\boldsymbol{\theta} \times d\mathbf{r})_i = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u} \times d\mathbf{r})_i.$$

Таким образом, поле перемещений в частице (в окрестности точки O) может быть представлено в следующем виде

$$u_i(M) = u_i(O) + (\boldsymbol{\theta} \times d\mathbf{r})_i + u_{ik} dx_k. \quad (1.23)$$

В этом разложении первые два слагаемых представляют перемещение $\mathbf{u}(O)$ полюса и поворот $(\boldsymbol{\theta} \times d\mathbf{r})$ частицы как целого вокруг полюса. Такой характер перемещения в самом общем случае был бы у частицы, если бы она «мгновенно затвердела». Поэтому это движение является квазитвердым; о поле скоростей этого движения подробно будет идти речь в § 7. Здесь же важно отметить два обстоятельства. Во-первых, представление поля перемещения (1.23) следует относить к *бесконечно малым перемещениям*, ибо именно это позволяет рассматривать поворот (бесконечно малый!) на угол θ как вектор $\boldsymbol{\theta}$. Во-вторых, квазитвердое движение имеет в деформируемой среде локальный характер, т. е. оно «свое» («свой» угол поворота и «свое» перемещение полюса) для каждой частицы.

Главная ценность представления (1.23) заключается в том, что в нем из поля перемещений выделено поле *собственно деформации* частицы — это третье слагаемое. Именно оно и отражает способность среды к деформированию.

Итак, собственно деформационное перемещение в сплошной среде описывается симметричным тензором второго ранга:

$$u_{ik} = u_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (1.24)$$

который называется тензором деформаций.

Поскольку разложение (1.23) относится к бесконечно малым перемещениям, то и о тензоре u_{ik} обычно говорят как о *тензоре бесконечно малых деформаций* или просто — *тензоре малых деформаций* (иногда — линейном тензоре деформаций).

В дальнейшем изложении остановимся на этой важнейшей кинематической величине, сняв ограничение на малость перемещений и их градиентов в среде. В этом случае речь будет идти о *тензоре конечных деформаций* (иногда — нелинейном тензоре деформаций).

Тензоры конечных деформаций. Эйлерово и лагранжево описания деформации

Описание деформаций можно проводить в эйлеровом и в лагранжевом представлении, которые непосредственно связаны с методами Эйлера и Лагранжа описания движения среды.

Эйлерово описание деформации. Пусть сплошная среда до деформации (в начальном состоянии) занимает пространственную область V_0 , а после деформации (в конечном состоянии) — область V .

Пусть введена фиксированная в пространстве, не связанная со средой, система пространственных криволинейных координат (x_0^1, x_0^2, x_0^3) с базисом $(\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \mathbf{a}_3^0)$, так что если \mathbf{r}_0 — радиус-вектор некоторой точки A_0 , то $\mathbf{a}_i^0 = \partial \mathbf{r}_0 / \partial x_0^i$ (рис. 10).

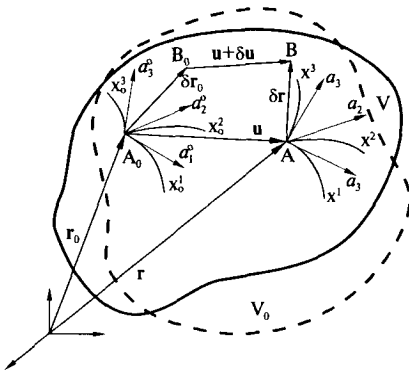


Рис. 10

Обозначим через B_0 точку, где находится частица сплошной среды, сколь угодно близко расположенная до деформации к частице в точке A_0 , так что расстояние между ними было $|\delta \mathbf{r}_0|$.

В результате деформирования среды частица из точки A_0 переместилась по направлению вектора смещения \mathbf{u} в точку A , а частица из B_0 —

в точку B в соответствии с вектором смещения $\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$. Вся деформированная среда заняла область V .

Система координат (x_0^1, x_0^2, x_0^3) может оказаться неудобной для описания деформации (например, цилиндрическая система координат, в то время как область V деформированной среды стала сферической). Поэтому введем другую пространственную систему криволинейных координат (x^1, x^2, x^3) , «приспособленную» к конечному состоянию среды, так что, если \mathbf{r} — радиус-вектор точки A , то новый координатный базис $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ определяется как $\mathbf{a}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$. Эта пространственная система также не связана с деформируемой средой.

Таким образом, хотя вид этих двух пространственных систем выбирается произвольно и они не связаны с деформируемой средой, т. е. не являются материальными, тем не менее, поскольку $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{u}$, они отражают начальное и конечное состояние среды при ее деформировании.

После деформации среды расстояние между рассматриваемыми двумя произвольными частицами стало $|\delta \mathbf{r}|$, и по изменению его величины можно судить о деформации среды в произвольной точке A . Поскольку (см. рис. 10) $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{u}$, то имеем

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{u} - (\delta \mathbf{u})^2, \quad (1.25)$$

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\delta \mathbf{r}_0 \cdot \delta \mathbf{u} + (\delta \mathbf{u})^2, \quad (1.26)$$

где обозначено $ds^2 = |\delta \mathbf{r}|^2$, $ds_0^2 = |\delta \mathbf{r}_0|^2$.

Для описания деформации в системе координат (x^1, x^2, x^3) , замечая, что в этой системе $\delta \mathbf{r} = \mathbf{a}_i dx^i$; $\delta \mathbf{u} = \mathbf{a}_i u_{i;k}^l dx^k$, из (1.25) получаем

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= 2(\mathbf{a}_i dx^i \cdot \mathbf{a}_k u_{i;l}^k dx^l) - \mathbf{a}_i u_{i;k}^l dx^k \cdot \mathbf{a}_l u_{l;m}^i dx^m = \\ &= 2g_{ik} u_{i;l}^k dx^i dx^l - g_{il} u_{i;k}^l dx^k dx^m, \end{aligned}$$

где введены компоненты метрического тензора $g_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k$ в выбранной системе координат. Учитывая, что ковариантная производная от тензора g_{ik} равна нулю, отсюда получаем, воспользовавшись правилом опускания индексов при помощи компонент g_{ik} и меняя обозначения немых индексов:

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= 2u_{i;l}^k dx^i dx^l - u_{l;k}^i u_{i;m}^l dx^k dx^m = \\ &= (u_{i;k} + u_{k;i} - u_{l;k}^l u_{i;l}^l) dx^i dx^k \equiv 2u_{ik} dx^i dx^k. \end{aligned}$$

Девять величин

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i;k} + u_{k;i} - u_{l;k}^l u_{i;l}^l) \quad (1.27)$$

образуют тензор второго ранга, который называется *тензором конечных деформаций* (в эйлеровом описании).

Здесь компоненты тензора записаны в пространственной системе координат (x^1, x^2, x^3) , отнесенной к конечному (деформированному) состоянию среды, а компоненты вектора смещения вычисляются по базису $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

Совершенно аналогично, выбирая для описания деформации систему координат (x_0^1, x_0^2, x_0^3) , так что в ней векторы $\delta \mathbf{r}_0$ и $\delta \mathbf{u}$ имеют вид

$\delta \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}_i^0 dx_0^i$, $\delta \mathbf{u} = \mathbf{a}_i^0 u_{0;k}^i dx_0^k$, из (1.26) получаем компоненты тензора конечных деформаций в системе координат начального состояния:

$$\dot{u}_{ik} = \frac{1}{2} (u_{0i;k} + u_{0k;i} + u_{0l;k} u_{0;i}^l). \quad (1.28)$$

В этом случае \dot{u}_{ik} выражены через компоненты u_{0i} вектора смещения, отнесенного к базису $(\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \mathbf{a}_3^0)$. Если обе системы координат являются прямоугольными декартовыми, то

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right), \quad (1.29)$$

$$\dot{u}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_{0i}} + \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_{0k}} \cdot \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_{0i}} \right). \quad (1.30)$$

В случае малых деформаций, когда вектор смещения и его градиенты считаются малыми, нелинейными членами в u_{ik} и \dot{u}_{ik} можно пренебречь, и тогда формулы (1.27) и (1.28) приобретают вид

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i;k} + u_{k;i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - 2\Gamma_{ik}^j u_j \right),$$

$$\dot{u}_{ik} = \frac{1}{2} (u_{0i;k} + u_{0k;i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial x_0^k} + \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_0^i} - 2\overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j u_{0j} \right), \quad (1.31)$$

где $\Gamma_{ik}^j = g^{lj} \Gamma_{l,ik} = g^{lj} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right)$ — символы Кристоффеля¹ второго рода для системы координат конечного состояния, а $\overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j$ — те же величины для системы координат начального состояния, т. е.

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j = \overset{\circ}{g}^{lj} \overset{\circ}{\Gamma}_{l,ik} = \overset{\circ}{g}^{lj} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\circ}{g}_{il}}{\partial x_0^k} + \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{kl}}{\partial x_0^i} - \frac{\partial \overset{\circ}{g}_{ik}}{\partial x_0^l} \right),$$

где $\overset{\circ}{g}_{ik} = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{a}_k^0$.

¹Кристоффель (Christoffel) Эльвин Бруно (1829–1900) — немецкий математик. Окончил Берлинский университет, работал (с 1859 г.) там же. Основные исследования относятся к римановой геометрии, теории инвариантов, теории поверхностей (теорема Гаусса — Кристоффеля) и конформному отображению (теорема Шварца — Кристоффеля). Разрабатывал идеи, положенные в основу тензорного анализа (1869 г.); ввел символы Кристоффеля, а также символы Римана — Кристоффеля.

В случае прямоугольных декартовых координат ($g_{ik} = \overset{\circ}{g}_{ik} = \delta_{ik}$, $\Gamma_{ik}^j = \overset{\circ}{\Gamma}_{ik}^j = 0$, $u_i = u_{0i} = x_i - x_{0i}$), если системы координат начального и конечного состояния не различаются, то выражения для u_{ik} и $\overset{\circ}{u}_{ik}$ при малых деформациях совпадают и дают (1.24):

$$u_{ik} = \overset{\circ}{u}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Лагранжево описание деформации. Несмотря на наглядность и простоту, эйлерово описание деформации сплошной среды не всегда удобно. Так случается, когда анализ деформаций необходимо вести, опираясь на конечное состояние среды, которое, однако, можно определить только после решения задачи. Например, при рассмотрении виртуальных состояний деформированного тела, при силах, существенно зависящих от величины деформаций, и др. Такие ситуации всегда возникают, когда необходимо учитывать эффект конечности деформации и отличие начального положения среды от деформированного. В этих случаях прибегают к лагранжевому описанию деформаций, вводя систему координат, *жестко связанную с деформирующейся средой*. Эта система является системой лагранжевых координат, о которой мы уже говорили в предыдущем параграфе. В ней координаты каждой частицы не меняются при деформации, а сама система, будучи связанной со средой (ее потому и называют иногда «вмороженной»), изменяется, следуя деформации среды: меняется ее базис, метрика, определяемая метрическим тензором, изменяются координатные линии и др. Эти изменения происходят вследствие различия вектора смещений в частицах среды, так что, скажем, прямая координатная линия может стать кривой (см. рис. 6).

Пусть $(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0)$ — начальное положение базиса такой *жестко связанной с деформируемым телом* лагранжевой системы координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , а $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ — базис системы лагранжевых координат в конечном состоянии среды, т. е. после деформации (рис. 11). Тройки чисел (ξ^1, ξ^2, ξ^3) определяют каждую частицу в среде. Хотя они каждый раз обозначают одну и ту же материальную частицу в обеих системах координат, но если она находится в начальной недеформированной об-

ласти, то это отмечается индексом «0» (например, частицу, определяемую вектором $\delta \mathbf{r}_0$), а та же частица, перейдя в конечную область, теряет индекс «0» (рассмотренная для примера частица определяется вектором $\delta \mathbf{r}$).

Если положение частиц деформируемой среды определять по отношению к *фиксированной* пространственной системе координат (x^1, x^2, x^3) с базисом $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ — на рис. 11 она лишь обозначена осями у начала векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 , — то

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_i x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}_i x^i(t_0, \xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Итак, если рассматривать деформацию как движение, описываемое в лагранжевых переменных t, ξ_1, ξ_2, ξ_3 , то можно говорить о двух неподвижных системах $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ и $(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0)$ и подвижной системе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

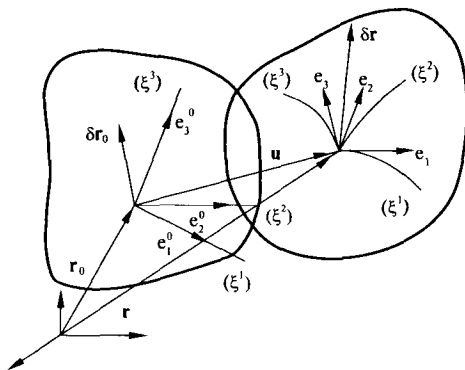


Рис. 11

Пусть исходная (начальная, недеформированная) конфигурация среды задана вектор-функцией

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t_0, \xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

определяющей положение любой точки (частицы) в этой конфигурации, а текущая (деформированная) конфигурация — вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

так что перемещение любой точки (ξ^1, ξ^2, ξ^3) среды в результате деформации равно

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

При этом векторы базиса лагранжевой системы координат в исходном (\mathbf{e}_i^0) и конечном (\mathbf{e}_i) состояниях среды, как известно, имеют выражение:

$$\mathbf{e}_i^0 = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i}; \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i}.$$

Тогда, вычисляя квадраты расстояния между как угодно близкими частицами до и после деформации среды, получаем

$$ds_0^2 = \delta \mathbf{r}_0 \cdot \delta \mathbf{r}_0 = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^k} d\xi^i d\xi^k = \mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_k^0 d\xi^i d\xi^k = \mathring{g}'_{ik} d\xi^i d\xi^k,$$

$$ds^2 = \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} d\xi^i d\xi^k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k d\xi^i d\xi^k = g'_{ik} d\xi^i d\xi^k.$$

Таким образом,

$$ds^2 - ds_0^2 = (g'_{ik} - \mathring{g}'_{ik}) d\xi^i d\xi^k \equiv 2\varepsilon'_{ik} d\xi^i d\xi^k, \quad (1.32)$$

где величины $g'_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$, $\mathring{g}'_{ik} = \mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_k^0$ определяют метрику пространства в лагранжевой системе координат исходного и конечного состояний, а $\varepsilon'_{ik} = (g'_{ik} - \mathring{g}'_{ik})/2$.

Из этого выражения следует, что девять функций ε'_{ik} преобразуются по законам преобразования ковариантных компонент симметричного тензора второго ранга при повороте системы координат с метрическим тензором \mathring{g}'_{ik} и базисом $(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0)$; эти же функции являются ковариантными компонентами тензора и в системе координат с базисом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, где метрическим тензором являются величины g'_{ik} . Используя диадные обозначения, тензор в начальной конфигурации можно записать в виде $\hat{\mathbf{E}}_0 = \mathring{\varepsilon}'_{ik} \mathbf{e}^{0i} \mathbf{e}^{0k}$, а в конечной области V — в виде $\hat{\mathbf{E}} = \varepsilon_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k$, $\mathring{\varepsilon}'_{ik} = \varepsilon_{ik} = \varepsilon'_{ik}$.

Таким образом, тензоры $\hat{\mathbf{E}}_0$ и $\hat{\mathbf{E}}$ — два различных тензора, ибо их компоненты ($\mathring{\varepsilon}'_{ik}$ и ε_{ik}) отнесены к разным базисам, хотя и оба — симметричные. Их ковариантные компоненты совпадают, но остальные компоненты образуются при помощи разных метрических тензоров. Операция ковариантного дифференцирования и поднятия-опускания индексов для компонент тензора $\hat{\mathbf{E}}_0$ совершается при помощи \mathring{g}'_{ik} , а для $\hat{\mathbf{E}}$ — с помощью g'_{ik} . Например,

$$\varepsilon_{ik} g'^{kl} = \varepsilon_i^{\cdot l}; \quad \varepsilon_{ik} g'^{kl} g'^{im} = \varepsilon^{ml}; \quad \mathring{\varepsilon}'_{ik} \mathring{g}'^{kl} = \mathring{\varepsilon}'_{\cdot k}; \quad \mathring{\varepsilon}'_{ik} \mathring{g}'^{kl} \mathring{g}'^{im} = \mathring{\varepsilon}'^{ml}.$$

Тензор $\hat{\mathbf{E}}_0$ иногда называют *лагранжевым тензором конечных деформаций* (или тензором конечных деформаций Грина¹), а тензор $\hat{\mathbf{E}}$ — *эйлеровым тензором конечных деформаций* (или тензором конечных деформаций Альманси).

Отметим, что компоненты ε'_{ik} всегда могут быть выражены через u_{ik} , если известны взаимно однозначные зависимости между эйлеровыми и лагранжевыми переменными, а именно

$$\xi^i = \xi^i(t, x^1, x^2, x^3); \quad x^i = x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Тогда, поскольку выражение $ds^2 - ds_0^2$ является инвариантом, то, записывая его в двух системах координат, получаем

$$\begin{aligned} ds^2 - ds_0^2 &= 2u_{ik} dx^i dx^k = 2u_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} d\xi^i d\xi^k = \\ &= 2\varepsilon'_{ik} d\xi^i d\xi^k = 2\varepsilon'_{lm} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} dx^i dx^k. \end{aligned}$$

Отсюда имеем формулы, выражающие зависимость между компонентами обоих тензоров:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ik}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) &= u_{lm}(t, x^1, x^2, x^3) \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k}, \\ u_{ik}(t, x^1, x^2, x^3) &= \varepsilon'_{lm}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Если наряду с лагранжевой системой координат введена *фиксированная* система пространственных координат (x^1, x^2, x^3) , никак не связанная с деформируемой средой, и известна метрика этого пространства $ds^2 = g_{ik}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^k$, то компоненты тензоров ε_{ik} и $\hat{\varepsilon}_{ik}$ можно выразить через компоненты метрического тензора g_{ik} и закон преобразования координат.

¹Грин (Green J.) Джордж (1793-1841) — английский математик. До 40 лет работал мельником, самостоятельно изучал математику. Окончил Кембриджский университет в 1837 г. Основная работа «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (1828 г.), где ввел понятие потенциала, доказал ряд теорем (в частности, формулы Грина). Работы по теории электро- и магнетостатики, теории упругости.

Поскольку ds^2 является инвариантом, то

$$ds^2 = g'_{ik} d\xi^i d\xi^k = g_{ik} dx^i dx^k = g_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} d\xi^i d\xi^k.$$

Подставляя в (1.32)

$$g'_{ik} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} = g_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k},$$

получаем компоненты тензора ε'_{ik} относительно начального базиса (и теперь их обозначим $\dot{\varepsilon}_{ik}$) в виде

$$2\dot{\varepsilon}_{ik} = g_{lm} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} - \dot{g}'_{ik}.$$

В том случае, когда пространственная система координат используется для описания начального состояния среды, так что известными считаются зависимости $x_0^i = x_0^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, аналогично получаем

$$ds_0^2 = \dot{g}'_{ik} d\xi^i d\xi^k = \dot{g}_{ik} dx_0^i dx_0^k = \dot{g}_{lm} \frac{\partial x_0^l}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_0^m}{\partial \xi^k} d\xi^i d\xi^k.$$

Следовательно, из (1.32) можно частично выразить через \dot{g}'_{ik} компоненты ε_{ik} (компоненты тензора ε'_{ik} относительно конечного базиса), а именно

$$2\varepsilon_{ik} = g'_{ik} - \dot{g}_{lm} \frac{\partial x_0^l}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial x_0^m}{\partial \xi^k}.$$

Однако компоненты \dot{g}'_{ik} в первом случае и g'_{ik} — во втором не выражаются через g_{ik} (через \dot{g}_{ik}).

Если же пространственные и лагранжевы системы координат являются прямоугольными декартовыми, то тогда $\dot{g}'_{ik} = g'_{ik} = \delta_{ik}$.

В этом, удобном во многих приложениях случае компоненты тензора Грина ($\dot{\varepsilon}_{ik}$) и тензора Альманси (ε_{ik}) приобретают вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_l}{\partial x_{0i}} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x_{0k}} - \delta_{ik} \right),$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} - \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \right).$$

При этом закон перемещения среды можно записать либо в форме

$$x_i = x_i(t, x_{01}, x_{02}, x_{03}), \quad x_{0i} = x_{0i}(t, x_1, x_2, x_3),$$

либо через вектор смещения $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$:

$$u_i = x_i - x_{0i}(t, x_1, x_2, x_3) = x_i(t, x_{01}, x_{02}, x_{03}) - x_{0i}.$$

Основная метрическая формула (1.32) в лагранжевых (x_{0i}) и пространственных (x_i) декартовых прямоугольных координатах приобретает вид:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \varepsilon_{ik}^{\circ} dx_0^i dx_0^k = 2 \varepsilon_{ik} dx_i dx_k.$$

Для того чтобы выразить компоненты эйлера и лагранжева тензоров деформаций через вектор смещения \mathbf{u} в произвольной системе координат, воспользуемся определением вектора смещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_i^0.$$

Выражая $\partial \mathbf{u} / \partial \xi^i$ через ковариантные производные от компонент u_0^i вектора \mathbf{u} в начальном базисе и в конечном базисе (u^i), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} = u_{0l;i} \mathbf{e}^{0l} = u_{l;i} \mathbf{e}^l,$$

где \mathbf{e}^{0i} , \mathbf{e}^i — векторы взаимных начального и конечного базисов соответственно.

Тогда

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^0 + u_{0l;i} \mathbf{e}^{0l}, \tag{1.34}$$

$$\mathbf{e}_i^0 = \mathbf{e}_i - u_{l;i} \mathbf{e}^l. \tag{1.35}$$

Теперь можно выразить компоненты $\mathring{\varepsilon}_{ik}$ лагранжева тензора $\hat{\mathbf{E}}_0$ в системе начального базиса; для этого в выражении для величин ε'_{ik} (см. (1.32)) надо использовать только векторы начального базиса и компоненты u_0^i , что можно сделать при помощи (1.34). Имеем

$$\begin{aligned} 2\mathring{\varepsilon}_{ik} &= (\mathbf{e}_i^0 + u_{0l;i}\mathbf{e}^{0l}) \cdot (\mathbf{e}_k^0 + u_{0m;k}\mathbf{e}^{0m}) - \mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_k^0 = \\ &= u_{0l;i}u_{0m;k}\mathring{g}^{lm} + u_{0l;i}\mathring{g}_k^l + u_{0m;k}\mathring{g}_i^m = u_{0i;k} + u_{0k;i} + u_{0l;i}u_{0l;k}^l. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Аналогично получим компоненты ε_{ik} эйлерова тензора $\hat{\mathbf{E}}$, используя выражения \mathbf{e}_i^0 через \mathbf{e}_i из формулы (1.35):

$$2\varepsilon_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k - (\mathbf{e}_i - u_{l;i}\mathbf{e}^l) \cdot (\mathbf{e}_k - u_{m;k}\mathbf{e}^m) = u_{i;k} + u_{k;i} - u_{l;i}u_{l;k}^l. \quad (1.37)$$

Следует учитывать, что в эти выражения для компонент ε_{ik} и $\mathring{\varepsilon}_{ik}$ (в отличие от выражений (1.29) и (1.30) для u_{ik} и \mathring{u}_{ik}) входят компоненты \mathbf{u} и их производные относительно лагранжевой системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 , так что

$$\mathbf{u} = u_0^i\mathbf{e}_i^0 = u_{0i}\mathbf{e}^{0i} = u^i\mathbf{e}_i = u_i\mathbf{e}^i;$$

$$u_{i;k} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi^k} - u_j \Gamma_{ik}^j; \quad u_{0i;k} = \frac{\partial u_{0i}}{\partial \xi^k} - u_{0j} \mathring{\Gamma}_{ik}^j;$$

$$\Gamma_{ik}^j = g^{lj} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^l} \right); \quad \mathring{\Gamma}_{ik}^j = \mathring{g}^{lj} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathring{g}_{il}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial \mathring{g}_{kl}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \mathring{g}_{ik}}{\partial \xi^l} \right),$$

причем здесь $g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$, $\mathring{g}_{ik} = \mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_k^0$.

Физическая интерпретация компонент тензоров деформаций

преобразовались в $\delta \mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{R}$, так что

Пусть в частице сплошной среды, окружающей точку O , элементы $\delta \mathbf{r}_0$ и $\delta \mathbf{R}_0$ (рис. 12), взятые произвольно, в результате деформации

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \delta \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{u}, \\ \delta \mathbf{R} &= \delta \mathbf{R}_0 + \delta \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

и пусть $\mathbf{n}, \mathbf{n}_0, \mathbf{N}, \mathbf{N}_0$ — орты, так что

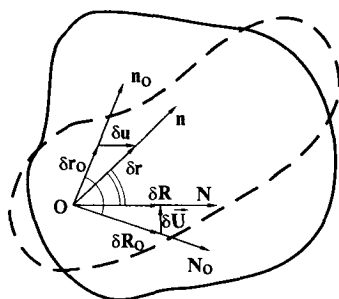


Рис. 12

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 &= \frac{\delta \mathbf{r}_0}{|\delta \mathbf{r}_0|}, & \mathbf{N}_0 &= \frac{\delta \mathbf{R}_0}{|\delta \mathbf{R}_0|}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\delta \mathbf{r}}{|\delta \mathbf{r}|}, & \mathbf{N} &= \frac{\delta \mathbf{R}}{|\delta \mathbf{R}|}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Назовем *относительным удлинением* среды в точке O в направлении \mathbf{n}_0 величину

$$\varepsilon_{n_0} = \frac{|\delta \mathbf{r}| - |\delta \mathbf{r}_0|}{|\delta \mathbf{r}_0|},$$

а в направлении \mathbf{N}_0 — величину

$$\varepsilon_{N_0} = \frac{|\delta \mathbf{R}| - |\delta \mathbf{R}_0|}{|\delta \mathbf{R}_0|}.$$

Используя (1.38), получаем

$$\delta \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{R}_0 \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{R}_0 + \delta \mathbf{U} \cdot \delta \mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{U}.$$

Отсюда, разделив на $|\delta \mathbf{r}_0| \cdot |\delta \mathbf{R}_0|$ обе части, имеем

$$\begin{aligned} &(1 + \varepsilon_{n_0})(1 + \varepsilon_{N_0}) \cos(\mathbf{N}, \mathbf{n}) = \\ &= \cos(\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0) + \frac{\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_0}{|\delta \mathbf{r}_0|} + \frac{\delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_0}{|\delta \mathbf{R}_0|} + \frac{\delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{U}}{|\delta \mathbf{r}_0| \cdot |\delta \mathbf{R}_0|}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Эйлерово описание. Если мы рассматриваем деформацию среды в фиксированной пространственной системе координат с базисом $(\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \mathbf{a}_3^0)$, то в силу того, что в этой системе

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{a}_i^0 u_{0;k}^i dx_0^k, \quad \delta \mathbf{U} = \mathbf{a}_i^0 u_{0;k}^i dX_0^k,$$

где dx_0^k — компоненты $\delta \mathbf{r}_0$, а dX_0^k — компоненты $\delta \mathbf{R}_0$, из (1.40) получаем

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_{n_0})(1 + \varepsilon_{N_0}) \cos(\mathbf{N}, \mathbf{n}) &= \cos(\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0) + u_{0;k}^i n_0^k N_{0i} + u_{0;k}^i n_{0i} N_0^k + \\ &+ u_{0l;i} u_{0;k}^l n_0^k N_0^i = \cos(\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0) + 2\dot{u}_{ik} n_0^i N_0^k, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где \dot{u}_{ik} имеет выражение (1.28).

Аналогично этому, описывая деформацию в пространственной системе координат с базисом $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, получаем из (1.40)

$$(1 + \varepsilon_n)(1 + \varepsilon_N) \cos(\mathbf{N}, \mathbf{n}) = \cos(\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0) + 2u_{ik} n^i N^k, \quad (1.42)$$

где u_{ik} определяется выражением (1.27).

Из соотношений (1.41) и (1.42) следуют выражения для компонент тензора деформаций через относительные удлинения и угловые деформации.

Так, полагая в выражении (1.41) $\mathbf{n}_0 = \mathbf{N}_0 = \mathbf{a}_1^0$, $\mathbf{n} = \mathbf{N}$, получаем

$$\left(1 + \dot{\varepsilon}_1\right)^2 = 1 + 2\dot{u}_{11}.$$

Отсюда и из (1.28) имеем

$$\dot{u}_{11} = u_{01;1} + \frac{1}{2} u_{0m;1} u_{0;1}^m = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \dot{\varepsilon}_1\right)^2 - 1 \right].$$

Аналогично, в другой системе координат из (1.42) и (1.27) при $\mathbf{n}_0 = \mathbf{N}_0$, $\mathbf{n} = \mathbf{N} = \mathbf{a}_1$, имеем

$$u_{11} = u_{1;1} - \frac{1}{2} u_{m;1} u_{;1}^m = \frac{1}{2} \left[1 - (1 - \varepsilon_1)^2 \right].$$

Таким образом, для относительного удлинения $\dot{\varepsilon}_1$ вдоль оси (x_0^1) и относительного удлинения ε_1 вдоль оси (x^1) пространственных систем координат, не связанных с деформируемой средой, имеем

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{1 + 2\dot{u}_{11}} - 1, \quad \varepsilon_1 = 1 - \sqrt{1 - 2u_{11}}$$

и, следовательно, они определяются производными по x_0^1 (по x^1) от всех компонент вектора \mathbf{u} .

В декартовой системе прямоугольных координат

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_{01}}{\partial x_{01}} + \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_{01}} \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_{01}}} - 1, \quad \varepsilon_1 = 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_1} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_1}}.$$

В случае малых деформаций, пренебрегая нелинейными слагаемыми, получаем

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{u}_{11} = \frac{\partial u_{01}}{\partial x_0^1} - u_{0l} \dot{\Gamma}'_{11}; \quad \varepsilon_1 = u_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - u_l \Gamma'_{11},$$

а в прямоугольных декартовых координатах

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

Аналогично можно получить выражения для остальных диагональных компонент тензора деформаций через относительные удлинения по соответствующим направлениям базисных векторов. Итак:

Диагональные компоненты тензора деформаций (в приближении малых деформаций) равны относительным удлинениям элемента среды по соответствующим координатным осям, т. е.

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{u}_{ii}; \quad \varepsilon_i = u_{ii} \quad (i = 1, 2, 3).$$

В прямоугольной декартовой системе координат для тензора малых деформаций имеем

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Чтобы выяснить смысл недиагональных компонент тензора u_{ik} , положим в (1.42) в случае ортогонального базиса ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$):

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{a}_i; \quad \mathbf{N}_0 = \mathbf{a}_k.$$

При этом углы (в радианах) между соответствующими ортами имеют значение

$$(\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0) = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) = \frac{\pi}{2} \quad (i \neq k), \quad (\mathbf{N}, \mathbf{n}) = \frac{\pi}{2} - \gamma_{ik}.$$

Здесь γ_{ik} — изменение прямого угла в плоскости (x_i, x_k) в результате деформации — носит название *угловой деформации*.

Тогда из (1.42) имеем:

$$(1 + \varepsilon_i)(1 + \varepsilon_k) \sin \gamma_{ik} = 2u_{ik} n^i N^k \quad (i \neq k).$$

Здесь нет суммирования по i и по k .

В случае малых деформаций отсюда получим

$$\gamma_{ik} = 2u_{ik} = u_{i;k} + u_{k;i} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} - 2\Gamma_{ik}^j u_j.$$

Следовательно:

Недиагональные компоненты тензора деформаций равны (в приближении малых деформаций) половине угловой деформации элемента среды в плоскости, определяемой соответствующими векторами базиса.

В прямоугольной декартовой системе координат имеем для компонент тензора малых деформаций

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}; \\ \gamma_{13} = \gamma_{31} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}; \\ \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Лагранжево описание. Для тензоров деформаций при лагранжевом описании деформации рассмотрение проводится следующим образом. Из определения тензоров $\hat{\mathbf{E}}_0$ и $\hat{\mathbf{E}}$ имеем согласно (1.32):

$$2\varepsilon'_{ik} = g'_{ik} - \dot{g}'_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_k^0 = |\mathbf{e}_i| \cdot |\mathbf{e}_k| \cos \theta_{ik} - |\mathbf{e}_i^0| \cdot |\mathbf{e}_k^0| \cos \dot{\theta}_{ik}, \quad (1.44)$$

где введены обозначения углов между соответствующими векторами базиса в начальном (недеформированном) состоянии ($\dot{\theta}_{ik}$) и в конечном состоянии (θ_{ik}).

Рассмотрим описание деформации при помощи тензора $\hat{\mathbf{E}}_0$, т. е. в базисе, относящемся к начальному состоянию среды. Изменение длины векторов базиса в лагранжевом описании связано с относительным удлинением $\dot{\varepsilon}_i$ вдоль i -той координатной оси в базисе $(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0)$ следующим образом (по определению $\dot{\varepsilon}_i$):

$$|\mathbf{e}_i| = \left(1 + \dot{\varepsilon}_i\right) |\mathbf{e}_i^0| \quad (i = 1, 2, 3),$$

причем $|\mathbf{e}_i| = \sqrt{g'_{ii}}$; $|\mathbf{e}_i^0| = \sqrt{\dot{g}'_{ii}}$.

Таким образом, для компонент $\dot{\varepsilon}_{ik}$ тензора $\hat{\mathbf{E}}_0$ из (1.44) получаем, разделив обе части на $|\mathbf{e}_i^0||\mathbf{e}_k^0| = \sqrt{\dot{g}'_{ii}} \sqrt{\dot{g}'_{kk}}$:

$$\frac{2\dot{\varepsilon}_{ik}}{\sqrt{\dot{g}'_{ii}} \cdot \sqrt{\dot{g}'_{kk}}} = (1 + \dot{\varepsilon}_i)(1 + \dot{\varepsilon}_k) \cos \theta_{ik} - \cos \dot{\theta}_{ik} \quad (1.45)$$

(без суммирования по i и k !).

Из этой общей формулы, полагая $i = k$ и учитывая, что $\theta_{ii} = \dot{\theta}_{ii} = 0$, имеем для относительных удлинений вдоль координатных осей

$$\dot{\varepsilon}_i = \sqrt{1 + \frac{2\dot{\varepsilon}_{ii}}{\dot{g}'_{ii}}} - 1 \quad (1.46)$$

(без суммирования по i !).

В случае $i \neq k$, считая, что \mathbf{e}_i^0 и \mathbf{e}_k^0 — орты прямоугольного базиса, так что $\theta_{ik} = \pi/2$, $|\mathbf{e}_i^0| = |\mathbf{e}_k^0| = 1$, полагая $\theta_{ik} = \pi/2 - \dot{\gamma}_{ik}$, из (1.45) получим

$$\sin \dot{\gamma}_{ik} = \frac{2\dot{\varepsilon}_{ik}}{(1 + \dot{\varepsilon}_i)(1 + \dot{\varepsilon}_k)} = \frac{2\dot{\varepsilon}_{ik}}{\sqrt{(1 + 2\dot{\varepsilon}_{ii})(1 + 2\dot{\varepsilon}_{kk})}}. \quad (1.47)$$

Совершенно аналогично, вводя относительное удлинение ε_i вдоль i -той координатной оси в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ в виде

$$|\mathbf{e}_i^0| = (1 - \varepsilon_i)|\mathbf{e}_i| \quad (i = 1, 2, 3),$$

разделив обе части на $|\mathbf{e}_i||\mathbf{e}_k|$, для компонент ε_{ik} тензора $\hat{\mathbf{E}}$ из (1.44) имеем:

$$\frac{2\varepsilon_{ik}}{\sqrt{g'_{ii}} \cdot \sqrt{g'_{kk}}} = \cos \theta_{ik} - (1 - \varepsilon_i)(1 - \varepsilon_k) \cos \dot{\theta}_{ik}. \quad (1.48)$$

И точно так же, как из (1.45) получены выражения для относительно удлинения и угловой деформации в начальном базисе, из (1.48) получаем в системе координат деформированного состояния

$$\varepsilon_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_{ii}}{g'_{ii}}}, \quad \sin \gamma_{ik} = \frac{2\varepsilon_{ik}}{\sqrt{(1 - 2\varepsilon_{ii})(1 - 2\varepsilon_{kk})}}, \quad (1.49)$$

где второе выражение получено при выборе $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i$ в виде ортов прямо-угольного базиса, т. е. $|\mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}_k| = 1$, так что $\theta_{ik} = \pi/2$, а $\gamma_{ik} = \dot{\theta}_{ik} - \pi/2$.

В случае малых деформаций и декартовых ортогональных координатных систем, в которых рассматриваются деформации (т. е. $g'_{ii} = \dot{g}'_{ii} = 1$), когда $2\dot{\varepsilon}_{ii}/\dot{g}'_{ii} \ll 1$ и $2\varepsilon_{ii}/g'_{ii} \ll 1$ из (1.46), (1.47) и (1.49) получаем

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_{ii}; \quad \dot{\gamma}_{ik} = 2\dot{\varepsilon}_{ik}; \quad \varepsilon_i = \varepsilon_{ii}; \quad \gamma_{ik} = 2\varepsilon_{ik}.$$

Отметим еще раз, что здесь, как и в (1.44)–(1.49), по i и k нет суммирования.

Таким образом, и в лагранжевом описании диагональные компоненты тензоров $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{E}}_0$ определяют относительные удлинения по координатным осям (в приближении малых деформаций), а недиагональные — равны половине угловой деформации.

Изменение объема при деформации Как известно (см., например, [7]), для любого симметричного тензора второго ранга существуют три взаимно перпендикулярных главных направления, определяющие главные оси тензора, в системе координат которых тензор определяется тремя главными значениями, расположенными по главной диагонали его матрицы.

Поскольку все рассматриваемые здесь тензоры деформации симметричны, то удобно для них ввести главные оси и определять изменение объема при деформации через главные значения тензоров.

Так, например, если $u_{(1)}, u_{(2)}, u_{(3)}$ — главные значения тензора u_{ik} , определяемого (1.27), то в системе главных осей ($x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}$) этот тензор имеет компоненты

$$u_{(ik)} = \delta_{ik} u_{(k)}.$$

Поскольку $u_{(k)}$ — относительные удлинения вдоль главных осей, то относительное изменение объема среды при деформации равно:

$$\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} = (1 + u_{(1)}) (1 + u_{(2)}) (1 + u_{(3)}) - 1 = I_1 + I_2 + I_3. \quad (1.50)$$

Здесь

$$I_1 = u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} = u_i^i,$$

$$I_2 = u_{(1)}u_{(2)} + u_{(1)}u_{(3)} + u_{(2)}u_{(3)} = \frac{1}{2} \left[(u_i^i)^2 - u_i^k u_k^i \right],$$

$$I_3 = u_{(1)}u_{(2)}u_{(3)} = \det \left\| u_i^i \right\|$$

— инварианты тензора u_{ik} , записанные в системе главных осей и в системе координат конечного состояния.

В случае малых деформаций, ограничиваясь линейными относительно компонент слагаемыми, имеем

$$\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} = I_1 = u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} = u_i^i = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.51)$$

В случае лагранжева описания деформаций воспользуемся выражением для элементов объема до и после деформации в выбранной системе лагранжевых координат

$$\delta V_0 = \sqrt{\dot{g}'} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad \delta V = \sqrt{g'} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3,$$

где $\dot{g}' = \det \left\| \dot{g}'_{ik} \right\|$, $g' = \det \left\| g'_{ik} \right\|$.

Используя компоненты тензора g'^i_k для поднятия-опускания индексов у \dot{g}'_{ik} , получаем

$$\dot{g}'^{rk} g'^i_k = \dot{g}'^i_r.$$

Отсюда $g' \det \left\| \dot{g}'^{rk} \right\| = \dot{g}'$. Поэтому

$$\frac{\delta V_0}{\delta V} = \sqrt{\frac{\dot{g}'}{g'}} = \sqrt{\det \left\| \dot{g}'^{rk} \right\|}.$$

Выражая из (1.32) смешанные компоненты \dot{g}'^{rk} через компоненты тензора \mathcal{E}_j^k в системе конечного базиса, приходим к равенству

$$\frac{\delta V_0}{\delta V} = \sqrt{\det \left\| g_k^i - 2\mathcal{E}_k^i \right\|}.$$

Здесь

$$g_k^i = \delta_k^i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Раскрывая определитель и переходя к главным осям тензора ε_{ik} , можно получить:

$$\det \|g_k^i - 2\varepsilon_k^i\| = (1 - 2\varepsilon_{(1)}) (1 - 2\varepsilon_{(2)}) (1 - 2\varepsilon_{(3)}) = 1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3,$$

где J_1, J_2, J_3 — инварианты тензора $\hat{\mathbf{E}}$ с компонентами ε_{ik} , а $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(3)}$ — его главные значения. Таким образом, имеем

$$\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} = 1 - \sqrt{1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3}. \quad (1.52)$$

Если выражать относительное изменение объема через компоненты $\dot{\varepsilon}_{ik}$ тензора $\hat{\mathbf{E}}_0$, то следует воспользоваться формулой

$$g_j'^k \dot{g}'_{ik} = g'_{ij}.$$

Тогда $\dot{g}' \det \|g_j'^k\| = g'$ и, следовательно,

$$\frac{\delta V_0}{\delta V} = \sqrt{\frac{\dot{g}'}{g'}} = \frac{1}{\sqrt{\det \|g_j'^k\|}}.$$

Выражая из (1.32) $g_j'^k$ через компоненты $\dot{\varepsilon}_{ik}$, получаем

$$g_j'^k = \dot{g}_j^k + 2\dot{\varepsilon}_j^k = \delta_j^k + 2\dot{\varepsilon}_j^k.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\det \|\delta_i^k + 2\dot{\varepsilon}_i^k\|}} = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{\left(1 + 2\dot{\varepsilon}_{(1)}\right) \left(1 + 2\dot{\varepsilon}_{(2)}\right) \left(1 + 2\dot{\varepsilon}_{(3)}\right)}} = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\dot{J}_1 + 4\dot{J}_2 + 8\dot{J}_3}}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где

$$J_1 = \dot{\epsilon}_{(1)} + \dot{\epsilon}_{(2)} + \dot{\epsilon}_{(3)} = \dot{\epsilon}_i^i,$$

$$J_2 = \dot{\epsilon}_{(1)} \dot{\epsilon}_{(2)} + \dot{\epsilon}_{(1)} \dot{\epsilon}_{(3)} + \dot{\epsilon}_{(2)} \dot{\epsilon}_{(3)} = \frac{1}{2} \left[(\dot{\epsilon}_i^i)^2 - \dot{\epsilon}_k^i \dot{\epsilon}_i^k \right],$$

$$J_3 = \dot{\epsilon}_{(1)} \dot{\epsilon}_{(2)} \dot{\epsilon}_{(3)} = \det \left\| \dot{\epsilon}_i^k \right\|$$

— инварианты тензора $\hat{\mathbf{E}}_0$, а $\dot{\epsilon}_{(1)}$, $\dot{\epsilon}_{(2)}$, $\dot{\epsilon}_{(3)}$ — его главные значения.

В случае малых деформаций из (1.52) и (1.53) имеем

$$\frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0} = 1 + J_1 = 1 + J_1^{\circ}.$$

Так как при малых деформациях $J_1 = J_1^{\circ}$, то значения для объемного расширения, вычисленные в обоих базисах системы лагранжевых координат, совпадают.

Условия совместности Выражения (1.27), (1.28) (эйлерово описание), а также (1.36) и (1.37) в лагранжевых координатах дают компоненты тензоров конечных деформаций через производные вектора смещений. В то же время в большинстве задач теории упругости приходится находить вектор смещений по известным компонентам тензора деформаций. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения движения упругого тела формулируют для компонент вектора смещений, а граничные условия часто задают для компонент тензора деформаций (см. § 14, 15). При этом возникает вопрос, возможно ли из системы шести дифференциальных уравнений в частных производных (если считать u_{ik} заданными) определить три непрерывных компоненты вектора смещения. Ясно, что если решение этой системы существует, то компонентами тензора деформаций не могут служить произвольно заданные функции. Чтобы обеспечить интегрируемость системы шести дифференциальных уравнений, необходимо ввести определенные ограничения на выбор функций u_{ik} . Эти ограничения для линейного тензора деформаций впервые были получены в 1860 г. Б. Сен-Венаном¹

¹Сен-Венан (Saint-Venant) (Barre de Сен-Венан) Адамар Жан Клод (1797–1886) — французский ученый в области механики. Труды по теории упругости (автор принципа Сен-Венана), по теории пластичности (см. литературу [81]), по сопротивлению материалов.

и были названы *условиями интегрируемости* или *условиями совместности компонент тензора деформаций*, или просто *условиями совместности*.

В анализе известны условия совместности компонент вектора \mathbf{A} , позволяющие вместо A_1, A_2, A_3 рассматривать одну скалярную функцию $\varphi(x_1, x_2, x_3)$. Такими условиями являются дифференциальные уравнения, следующие из $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, а именно:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2} = 0. \quad (1.53a)$$

Они являются необходимыми условиями существования в односвязном объеме однозначной функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, которая определяется по A_1, A_2, A_3 с помощью криволинейного интеграла

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) = & \int_{(x_{01}, x_{02}, x_{03})}^{(x_1, x_2, x_3)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int_{x_{01}}^{x_1} A_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \int_{x_{02}}^{x_2} A_2(x_{01}, x_2, x_3) dx_2 + \\ & + \int_{x_{03}}^{x_3} A_3(x_{01}, x_{02}, x_3) dx_3 + \varphi(x_{01}, x_{02}, x_{03}). \end{aligned}$$

При этом $A_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $A_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$, $A_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$, так что условия совместности (1.53a) означают равенство смешанных производных функции $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}.$$

Условия совместности для компонент тензора деформации можно получить из того, что, согласно одной из исходных гипотез механики сплошной среды, пространство, в котором происходит деформация сплошной среды, является евклидовым. Поэтому тензор кривизны этого пространства (тензор Римана¹ — Кристоффеля), связанный с метрикой пространства, должен быть равен нулю.

Для пространства с метрическими коэффициентами g_{ik} тензор Римана — Кристоффеля дается формулой (см., например, [27])

¹ *Риман (Riemann) Бернхард* (1826—1866) — выдающийся немецкий математик. Учился в Геттингенском и Берлинском университетах. В 1854—1866 гг. работал в Геттингенском университете (с 1857 г. — профессор). Несмотря на раннюю смерть, внес значительный вклад в мировую науку. Ввел строгое понятие определенного интеграла и доказал его существование. Создал геометрическое направление теории аналитических функций, ввел римановы поверхности и разработал теорию конформных отображений. Создал (1854 г.) риманову геометрию и ввел понятие обобщенных римановых пространств. Аппарат теории квадратичных дифференциальных форм, разработанный Риманом, широко применяется в теории относительности. Работы по теории фигур равновесия вращающейся жидкости, по газовой динамике («О распространении волн конечной амплитуды»), ввел понятие инвариантов в газовой динамике и объяснил необходимость образования ударных волн в сверхзвуковых потоках.

$$R_{ikl}^{-m} = \frac{\partial \Gamma_{li}^m}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{lk}^m}{\partial x^i} + \Gamma_{sk}^m \Gamma_{li}^s - \Gamma_{si}^m \Gamma_{lk}^s,$$

где Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля второго рода.

В этом пространстве метрика имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^k dx^i.$$

При лагранжевом описании деформации в начальном координатном базисе, связанном с недеформированным телом, имеем метрику пространства в виде

$$ds_0^2 = \dot{g}'_{ik} d\xi^i d\xi^k,$$

а в конечном базисе:

$$ds^2 = g'_{ik} d\xi^i d\xi^k.$$

И то и другое пространства являются евклидовыми, поэтому тензоры Римана — Кристоффеля, построенные из метрических коэффициентов g'_{ik} и \dot{g}'_{ik} , равны нулю.

Если учесть, что $g'_{ik} - \dot{g}'_{ik} = 2\varepsilon'_{ik}$, то, приравнявая нулю оба риманова тензора R_{ikl}^{-m} и R_{ikl}^{-m} , построенные по \dot{g}'_{ik} и g'_{ik} , можно получить (см., например, [67])

$$\varepsilon'_{ijkl} + \bar{h}^{-\alpha\beta} (\varepsilon'_{jk\beta} \varepsilon'_{i\alpha} - \varepsilon'_{j\beta} \varepsilon'_{i\alpha}) = 0, \quad (1.54)$$

где

$$\varepsilon'_{ijkl} \equiv \varepsilon'_{jl,ik} + \varepsilon'_{ik,jl} - \varepsilon'_{ij,kl} - \varepsilon'_{kl,ij}, \quad \varepsilon'_{ijk} \equiv \varepsilon'_{ik,j} + \varepsilon'_{kj,i} - \varepsilon'_{ij,k},$$

$$\bar{h}^{-\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{\dot{g}'};$$

$H^{\alpha\beta}$ — алгебраическое дополнение коэффициента $\dot{g}'_{\alpha\beta}$ в $\det \|\dot{g}'_{ik}\| = \dot{g}'$.

В случае малых деформаций линеаризация условия совместности (1.54) дает

$$u_{ij,k;l} + u_{kl,i;j} - u_{ik,j;l} - u_{jl,i;k} = 0, \quad (1.55)$$

где $2u_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$.

В прямоугольных декартовых координатах (x_1, x_2, x_3) имеем

$$\frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 u_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (1.56)$$

Эти соотношения называются *уравнениями совместности Сен-Венана*. Это шесть независимых дифференциальных линейных уравнений относительно u_{ik} .

То, что независимых уравнений в (1.55) всего только шесть, видно не сразу. Действительно, обозначив левую часть через A_{ijkl} , получаем равенство нулю 81 компоненты тензора четвертого ранга. Но нетрудно видеть, что эти компоненты таковы, что

$$A_{ijkl} = -A_{ikjl}; \quad A_{ijkl} = -A_{ijki},$$

так что $A_{ijjl} = A_{ijki} = 0$; $A_{1111} = A_{2222} = A_{3333} = 0$.

Это дает $4 \times 18 + 3 = 75$ уравнений, связывающих 81 компоненту тензора A_{ijkl} , из которых, следовательно, остается лишь шесть независимых.

Нетривиальные уравнения из (1.56) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{12}}{\partial x_3} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.57)$$

а остальные четыре получаются циклической перестановкой индексов 1, 2, 3 (см. также задачу 7.4).

Систему независимых шести уравнений из (1.56) можно получить и свернув тензор A_{ijkl} по двум индексам, например i и j ; тогда имеем

$$\Delta u_{kl} + \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_{il}}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (1.58)$$

Из этого уравнения в теории упругости получают (путем подстановки выражения u_{ik} через компоненты тензора напряжений) так называемые уравнения Бельтрами¹, которым должны удовлетворять компоненты тензора напряжений. Это связано с тем, что уравнения движения упругого тела формулируются, в конечном счете, относительно вектора смещения \mathbf{u} , компоненты которого могут быть выражены через u_{ik} только при выполнении условий совместности.

Другой путь получения условий совместности — это непосредственное восстановление вектора смещения по компонентам тензора деформации.

Определение вектора смещений по компонентам тензора деформаций

Уравнения совместности иногда называют *условиями сплошности непрерывного поля смещений*. При их невыполнении нельзя говорить о непрерывности вектора $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, т. е. о сплошности среды. Если ограничиваться линейными деформациями, то восстановление вектора

$\mathbf{u}(\mathbf{r})$ по компонентам тензора деформаций можно провести при помощи криволинейного интеграла, получая при этом необходимые условия для существования непрерывного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, т. е. условия совместности компонент тензора деформации.

Имеем:

$$\mathbf{u}(M) - \mathbf{u}(M_0) = \int_{M_0}^M \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} dx^k = \int_{M_0}^M \mathbf{a}_i u_{i,k}^i dx^k = \int_{M_0}^M \mathbf{a}^i u_{i,k} dx^k.$$

Здесь $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$ — базисные векторы выбранной фиксированной пространственной системы координат. Выделим в $u_{i,k}$ тензор бесконечно малых деформаций u_{ik} :

$$u_{i,k} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,k} - u_{k,i}) \equiv u_{ik} + \theta_{ik}.$$

Антисимметричному тензору θ_{ik} , как и в случае прямоугольных декартовых коор-

¹ Бельтрами (Beltrami) Эудженио (1835–1900) — итальянский математик. Основные труды по геометрии. Показал, что планиметрия Лобачевского реализуется на поверхности псевдосферы.

динат, соответствует аксиальный вектор θ , который равен половине вихря поля смещения (см. (1.20)–(1.22)):

$$\theta = \frac{1}{2} \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} \theta_{ik} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} u_{i;k} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}, \quad (1.59)$$

где ε^{ijk} — контравариантные компоненты тензора Леви-Чевита.

Поскольку

$$\theta \times \mathbf{a}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k) \varepsilon^{\alpha j \beta} u_{\alpha; \beta} = \mathbf{a}^i \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} u_{i;k},$$

где \mathbf{a}^i — вектор взаимного базиса и (jki) — циклическая перестановка индексов, то

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} = \mathbf{a}^i u_{i;k} = \mathbf{a}^i u_{ik} + \mathbf{a}^i \theta_{ik} = \mathbf{a}^i u_{ik} + \theta \times \mathbf{a}_k. \quad (1.60)$$

Учтем, что в евклидовом пространстве, где тензор Римана — Кристоффеля равен нулю, имеет место теорема Риччи¹ о возможности изменения порядка ковариантного дифференцирования. Тогда, беря производную от (1.59), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x^j} &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} u_{i;k;l} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} \left[(u_{l;i} + u_{i;l})_{,k} - u_{l;i;k} \right] = \\ &= \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} \frac{1}{2} (u_{l;i} + u_{i;l})_{,k} - \frac{1}{2} \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} u_{l;i;k} = \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} u_{il;k}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Здесь использовано $\varepsilon_{,i}^{ijk} = 0$ и, кроме того, для любых j и l сумма $\varepsilon^{ijk} u_{l;i;k} = 0$ в силу антисимметрии по (i, k) псевдотензора ε^{ijk} и симметрии тензора $u_{l;i;k}$.

Соотношения (1.60) и (1.61) можно рассматривать как систему уравнений в частных производных для определения трех величин u_i по компонентам тензора деформаций u_{ik} . Необходимыми условиями интегрируемости этой системы, как известно из математического анализа, являются:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^k \partial x^i}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^k \partial x^i},$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{a}^\alpha u_{\alpha k} + \theta \times \mathbf{a}_k) = \frac{\partial}{\partial x^k} (\mathbf{a}^\alpha u_{\alpha i} + \theta \times \mathbf{a}_i), \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{a}_j \varepsilon^{\alpha j \beta} u_{\alpha k; \beta}) = \frac{\partial}{\partial x^k} (\mathbf{a}_j \varepsilon^{\alpha j \beta} u_{\alpha i; \beta}). \quad (1.63)$$

¹ Риччи Курбастро (Ricci) Грегорио (1853–1925) — итальянский математик. Профессор математики (1880–1925 г.г.) Падуанского университета. Один из основоположников тензорного исчисления («Методы абсолютного дифференциального исчисления и их приложения» (1901 г.) — совместно с Т. Леви-Чивита). Ввел ковариантное дифференцирование.

Преобразуя эти соотношения, мы и получаем условия совместности компонент u_{ik} .

Условие (1.62) удовлетворяется на основании $u_{\alpha k; j} = u_{\alpha i; k}$ и уравнения (1.61). Из условия (1.63) имеем

$$\varepsilon^{\alpha j \beta} (u_{\alpha k; \beta; j} - u_{\alpha i; \beta; k}) = 0. \quad (1.64)$$

Меняя местами α и β , получаем для любого i

$$u_{\alpha k; \beta; j} - u_{\alpha i; \beta; k} - u_{\beta k; \alpha; j} + u_{\beta i; \alpha; k} = 0. \quad (1.65)$$

Это соотношение совпадает с ранее полученным условием Сен-Венана (см. (1.55)). В прямоугольных декартовых координатах (1.64) имеет вид

$$\varepsilon_{\alpha j \beta} \left(\frac{\partial^2 u_{\alpha k}}{\partial x_\beta \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_{\alpha i}}{\partial x_\beta \partial x_k} \right) = 0,$$

что при расписывании суммы по α и β совпадает с (1.56).

Если необходимые условия (1.62) и (1.63) интегрируемости системы выполнены, то тогда вектор \mathbf{u} может быть найден из (1.60), а именно

$$\mathbf{u}(M) - \mathbf{u}(M_0) = \int_{M_0}^M (\mathbf{a}^i u_{ik} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_k) dx^k, \quad (1.66)$$

причем $\boldsymbol{\theta}$ определяется из (1.61):

$$\boldsymbol{\theta} = \int_{M_0}^{M'} \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} u_{il; k} dx^l + \boldsymbol{\theta}_0, \quad (1.67)$$

а точка M' — произвольная точка на пути интегрирования от M_0 к M .

Формулу (1.66) можно, подставив в интеграл значение $\boldsymbol{\theta}$ из (1.67), переписать в следующем виде:

$$\mathbf{u}(M) = \int_{M_0}^M \left\{ \mathbf{a}^i u_{il} + \left[\int_{M_0}^{M'} \mathbf{a}_j \varepsilon^{ijk} u_{il; k} dx^l \right] \times \mathbf{a}_k \right\} dx^l + \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\theta}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.68)$$

Здесь \mathbf{u}_0 , $\boldsymbol{\theta}_0$ — постоянные векторы, \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 — радиусы-векторы точек M и M_0 соответственно, так что в поле перемещений выделено перемещение среды как твердого тела.

В случае прямоугольных декартовых координат восстановление поля \mathbf{u} можно провести независимо от (1.68) на основании следующих простых, хотя и громоздких, выкладок.

Из $du_i = (\partial u_i / \partial x_k) dx_k = u_{ik} dx_k + \theta_{ik} dx_k$ следует

$$u_i(M) - u_i(M_0) = \int_{M_0}^M u_{ik} dx_k + \int_{M_0}^M \theta_{ik} dx_k \equiv F_i(x_k; x_{0k}) + \Phi_i(x_k; x_{0k}),$$

где x_k — координаты точки M , а x_{0k} — точки M_0 .

Используя правило вычисления криволинейных интегралов, получаем

$$F_i(x_k; x_{0k}) = \int_{x_{01}}^{x_1} u_{i1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \int_{x_{02}}^{x_2} u_{i2}(x_{01}, x_2, x_3) dx_2 + \int_{x_{03}}^{x_3} u_{i3}(x_{01}, x_{02}, x_3) dx_3,$$

$$\Phi_i(x_k; x_{0k}) = \int_{x_{01}}^{x_1} \theta_{i1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \int_{x_{02}}^{x_2} \theta_{i2}(x_{01}, x_2, x_3) dx_2 + \int_{x_{03}}^{x_3} \theta_{i3}(x_{01}, x_{02}, x_3) dx_3.$$

Выражение для Φ_i преобразуем путем интегрирования по частям так, чтобы под интегралом фигурировали компоненты u_{ik} , по которым восстанавливается вектор u_i . Обозначая переменную интегрирования через η_1 , получаем для первого интеграла из Φ_i :

$$\int_{x_{01}}^{x_1} \theta_{i1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 = \int_{x_{01}}^{\eta_1} \theta_{i1}(\eta_1, x_2, x_3) d(\eta_1 - x_1) = (\eta_1 - x_1) \theta_{i1}(\eta_1, x_2, x_3) \Big|_{\eta_1=x_{01}}^{\eta_1=x_1} -$$

$$- \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{\partial \theta_{i1}}{\partial \eta_1} (\eta_1 - x_1) d\eta_1 = (x_1 - x_{01}) \theta_{i1}(x_{01}, x_2, x_3) - \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta_i} \right) (\eta_1 - x_1) d\eta_1 =$$

$$= (x_1 - x_{01}) \theta_{i1}(x_{01}, x_2, x_3) - \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial \eta_1^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_1 \partial \eta_i} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_i \partial \eta_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta_i \partial \eta_i} \right) (\eta_1 - x_1) d\eta_1 =$$

$$= (x_1 - x_{01}) \theta_{i1}(x_{01}, x_2, x_3) - \int_{x_{01}}^{x_1} \left(\frac{\partial u_{i1}}{\partial \eta_1} - \frac{\partial u_{11}}{\partial \eta_i} \right) \Big|_{\eta_2=x_2, \eta_3=x_3} (\eta_1 - x_1) d\eta_1.$$

Вычисляя аналогичным образом остальные интегралы в выражении для Φ_i , окончательно получаем следующее выражение для компонент вектора смещения $u_i(x_1, x_2, x_3)$:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) +$$

$$+ \int_{x_{01}}^{x_1} u_{i1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \int_{x_{02}}^{x_2} u_{i2}(x_{01}, x_2, x_3) dx_2 + \int_{x_{03}}^{x_3} u_{i3}(x_{01}, x_{02}, x_3) dx_3 +$$

$$+ (x_1 - x_{01}) \theta_{i1}(x_{01}, x_2, x_3) + (x_2 - x_{02}) \theta_{i2}(x_{01}, x_{02}, x_3) + (x_3 - x_{03}) \theta_{i3}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) -$$

$$- \int_{x_{01}}^{x_1} \left(\frac{\partial u_{i1}}{\partial \eta_1} - \frac{\partial u_{11}}{\partial \eta_i} \right) \Big|_{\eta_2=x_2, \eta_3=x_3} (\eta_1 - x_1) d\eta_1 - \int_{x_{02}}^{x_2} \left(\frac{\partial u_{i2}}{\partial \eta_2} - \frac{\partial u_{22}}{\partial \eta_i} \right) \Big|_{\eta_1=x_{01}, \eta_3=x_3} (\eta_2 - x_2) d\eta_2 -$$

$$- \int_{x_{03}}^{x_3} \left(\frac{\partial u_{i3}}{\partial \eta_3} - \frac{\partial u_{33}}{\partial \eta_i} \right) \Big|_{\eta_1=x_{01}, \eta_2=x_{02}} (\eta_3 - x_3) d\eta_3. \quad (1.69)$$

Что касается θ_i , то следует иметь в виду, что выражения для них могут быть получены из условий независимости значения криволинейного интеграла

$$\int_{M_0}^M (u_{ik} + \theta_{ik}) dx_k \text{ от пути интегрирования.}$$

Эти условия записываются в виде:

$$\frac{\partial \theta_{i1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \theta_{i2}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{i2}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_2};$$

$$\frac{\partial \theta_{i2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \theta_{i3}}{\partial x_2} = \frac{\partial u_{i3}}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{i2}}{\partial x_3};$$

$$\frac{\partial \theta_{i3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta_{i1}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_{i1}}{\partial x_3} - \frac{\partial u_{i3}}{\partial x_1}.$$

Здесь правые части уравнений, как и подынтегральные выражения в (1.69), рассматриваются как известные (заданные) функции. Следует иметь в виду, что u_{ik} должны также удовлетворять и уравнениям совместности (1.56).

Задачи с решениями

Задача 2.1. Показать, что деформация среды

$$x_1 = x_{01}; \quad x_2 = x_{02} + ax_{03}; \quad x_3 = x_{03} + ax_{02},$$

где $a = \text{const}$, переводит материальную биссектрису координатного угла в плоскости (x_{02}, x_{03}) в биссектрису угла плоскости x_2, x_3 , причем прямая из этой плоскости $x_{02} + x_{03} = 1/(1+a)$ переходит в прямую $x_2 = 1 - x_3$. Во что переходит круговой цилиндр $x_{02}^2 + x_{03}^2 = 1/(1-a^2)$?

Решение. Для материальной биссектрисы $x_{02} = x_{03}$; $x_{01} = 0$; тогда согласно заданному закону деформации имеем $x_1 = 0$, $x_2 = x_{02}(1+a) = x_3$, так что материальная биссектриса перешла в биссектрису $x_2 = x_3$ в деформированной среде.

Если же $x_1 = 0$ и $x_{02} + x_{03} = 1/(1+a)$, то получаем

$$x_1 = 0, \quad x_2 + x_3 = (x_{02} + x_{03})(1+a) = 1,$$

т. е. $x_2 = 1 - x_3$.

Для кругового цилиндра с радиусом $1/\sqrt{1-a^2}$ в начальной конфигурации, поскольку задано

$$\frac{x_2 + x_3}{1+a} = x_{02} + x_{03}, \quad \frac{x_2 - x_3}{1-a} = x_{02} - x_{03},$$

имеем

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{1+a} \right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_3}{1-a} \right)^2 = \frac{2}{1-a^2},$$

так что в главных осях $x_2 + x_3 = x_{(1)}$, $x_2 - x_3 = x_{(2)}$ получаем уравнение эллипса с полуосями

$$a' = \sqrt{\frac{2(1+a)}{1-a}}, \quad b' = \sqrt{\frac{2(1-a)}{1+a}}.$$

Задача 2.2. Показать, что при однородной деформации $u_i = a_{ij}x_{0j}$ ($a_{ij} = a_{ij}(t)$), плоскости переходят в плоскости, а прямые — в прямые.

Решение. Поскольку $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}$, то

$$x_i = x_{0i} + u_i = x_{0j} (\delta_{ij} + a_{ij}).$$

Любая плоскость в исходной конфигурации, скажем $\alpha = \beta_i x_{0i}$, где α, β_i — постоянны, даст плоскость

$$\alpha = \beta_i b_{ij} x_j,$$

где b_{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице с компонентами $(\delta_{ij} + a_{ij})$.

Любая прямая при однородной деформации перейдет в прямую, т. к. пересекающиеся по этой прямой плоскости переходят снова в пересекающиеся плоскости.

Задача 2.3. Для поля перемещений

$$\mathbf{u} = (3x_{02} - 4x_{03}, 2x_{01} - x_{03}, 4x_{02} - x_{01})$$

найти относительное удлинение отрезков, расположенных по координатным осям, вектора $\vec{OA} = (1, 1, 1)$ и угловые деформации.

Решение. Поскольку $x_i = u_i + x_{i0}$, то имеем

$$x_1 = x_{01} + 3x_{02} - 4x_{03},$$

$$x_2 = 2x_{01} + x_{02} - x_{03},$$

$$x_3 = -x_{01} + 4x_{02} - x_{03}.$$

Находим компоненты тензора Грина $\dot{\varepsilon}_{ik}$ в декартовой системе координат

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0k}} - \delta_{ik} \right).$$

Вычисления дают

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 2 & 25 & -9 \\ -7 & -9 & 17 \end{pmatrix}.$$

Согласно (1.46) определяем относительные удлинения отрезков вдоль координатных осей

$$\dot{\varepsilon}_i = \frac{|\mathbf{e}_i| - |\mathbf{e}_i^0|}{|\mathbf{e}_i^0|} = \sqrt{1 + 2\dot{\varepsilon}_{ii}} - 1,$$

а для заданного поля смещений имеем

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{6} - 1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{26} - 1, \quad \dot{\varepsilon}_3 = \sqrt{18} - 1.$$

Из (1.47) получаем угловые смещения в координатных плоскостях

$$\sin \dot{\gamma}_{12} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_{12}}{\sqrt{1+2 \dot{\varepsilon}_{11}} \sqrt{1+2 \dot{\varepsilon}_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{39}},$$

$$\sin \dot{\gamma}_{13} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_{13}}{\sqrt{1+2 \dot{\varepsilon}_{11}} \sqrt{1+2 \dot{\varepsilon}_{33}}} = -\frac{7}{6\sqrt{3}},$$

$$\sin \dot{\gamma}_{23} = \frac{2 \dot{\varepsilon}_{23}}{\sqrt{1+2 \dot{\varepsilon}_{22}} \sqrt{1+2 \dot{\varepsilon}_{33}}} = -\frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

Для вычисления относительно удлинения $\varepsilon_{\vec{OA}}$ отрезка \vec{OA} воспользуемся формулой (1.41), полагая в ней

$$n_{0i} = N_{0i} = \frac{(\vec{OA})_i}{|\vec{OA}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Имеем

$$(1 + \varepsilon_{\vec{OA}})^2 = 1 + 2 \dot{u}_{ik} n_{0i} N_{0k} = 1 + \frac{2}{3} (\dot{u}_{11} + \dot{u}_{22} + \dot{u}_{33} + 2 \dot{u}_{12} + 2 \dot{u}_{13} + 2 \dot{u}_{23}).$$

Поскольку из заданного поля смещений следует

$$\dot{u}_{ii} = \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_{0i}} = 0; \quad \dot{u}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{02}}{\partial x_{01}} + \frac{\partial u_{01}}{\partial x_{02}} \right) = \frac{5}{2};$$

$$\dot{u}_{13} = -\frac{5}{2}; \quad \dot{u}_{23} = \frac{3}{2},$$

то

$$\varepsilon_{\vec{OA}} = \sqrt{3} - 1.$$

Упражнения

1. Показать, что для деформации

$$\mathbf{r} = (x_{01}, x_{02} + ax_{03}, x_{03} + ax_{02}),$$

где $a = \text{const}$, тензоры деформаций Грина и Альманси имеют матрицы

$$\left(\dot{\varepsilon}_{ik} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2/2 & a \\ 0 & a & a^2/2 \end{pmatrix}, \quad (\varepsilon_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2(a-1)} & \frac{a}{1-a^2} \\ 0 & \frac{a}{1-a^2} & \frac{a}{2(a-1)} \end{pmatrix}.$$

Выразить компоненты этих тензоров через компоненты вектора смещений $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

2. Определить смещенное положение $A'B'$ вектора AB в результате деформации

$$\mathbf{u} = (3x_{02} - 4x_{03}, 2x_{01} - x_{03}, 4x_{02} - x_{01}),$$

если до деформации координаты точек A и B были: $A(1, 0, 3)$, $B(3, 6, 6)$.

3. Показать, что радиус-вектор частицы $C(2, 6, 3)$ до и после деформации, которая задана в упражнении 2, остается параллельным соответственно векторам AB и $A'B'$.

4. Показать, что для тензоров упражнения 1 изменение квадратов длины отрезков ds_2^0 и ds_3^0 осей (x_{02}) и (x_{03}) равны соответственно $a^2(ds_2^0)^2$ и $a^2(ds_3^0)^2$.

5. Показать, что при значениях постоянной $\alpha = \pm 1$ деформация

$$\mathbf{r} = (x_{01} + \alpha x_{02}, x_{02} + \alpha x_{01}, \alpha x_{03})$$

теряет непрерывность.

§ 3. Поле скоростей сплошной среды и основные его характеристики

Интегральные характеристики поля скоростей

Эти величины относятся к полю скоростей в целом. Из них наиболее важными являются траектории частиц, линии тока, трубки тока.

Траектории частиц, в соответствии с ранее данным определением (см. § 1) — это линии движения частиц сплошной среды. Их дифференциальные уравнения, если задано поле скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, можно получить из того, что вдоль траектории

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})dt,$$

где $d\mathbf{r}$ — элемент траектории.

Отсюда имеем систему *трех* дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{v_1(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{v_2(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{v_3(t, x_1, x_2, x_3)} = dt \quad (1.70)$$

относительно функций x_i , зависящих от t .

Интегрируя эту систему, получаем уравнение семейства траекторий частиц в конечной форме

$$x_i = x_i(t, x_{01}, x_{02}, x_{03}),$$

где x_{01}, x_{02}, x_{03} — постоянные интегрирования.

Уравнения траекторий, как мы уже отмечали, являются исходным пунктом в методе Лагранжа описания движения сплошной среды. Они представляют собой закон движения частиц.

Линии тока — это векторные линии поля скоростей. Таким образом, векторные линии могут рассматриваться лишь для фиксированного момента времени, так что если $\delta\mathbf{r}$ — элемент линии тока в момент времени $t = t^*$, то по определению векторных линий $\delta\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}(t^*, \mathbf{r})$. Отсюда следует система *двух* дифференциальных уравнений

$$\frac{\delta x_1}{v_1(t^*, x_1, x_2, x_3)} = \frac{\delta x_2}{v_2(t^*, x_1, x_2, x_3)} = \frac{\delta x_3}{v_3(t^*, x_1, x_2, x_3)}. \quad (1.71)$$

Эти уравнения определяют семейство линий тока в момент времени t^* .

Выбирая в качестве независимого переменного, например, x_3 , отсюда имеем:

$$\frac{\delta x_1}{\delta x_3} = \frac{v_1(t^*, x_1, x_2, x_3)}{v_3(t^*, x_1, x_2, x_3)}, \quad \frac{\delta x_2}{\delta x_3} = \frac{v_2(t^*, x_1, x_2, x_3)}{v_3(t^*, x_1, x_2, x_3)}.$$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения, получаем (C_1, C_2 — постоянные интегрирования):

$$x_1 = f_1(t^*, x_3, C_1, C_2), \quad x_2 = f_2(t^*, x_3, C_1, C_2).$$

Отсюда имеем уравнения двух семейств цилиндров: $F_1(x_1, x_3, C_1, C_2, t^*) = 0$ — с осью (x_2) и $F_2(x_2, x_3, C_1, C_2, t^*) = 0$ — с осью (x_1), пересечение которых дает линии тока для момента времени $t = t^*$.

Через каждую точку векторного поля, в которой $\mathbf{v} \neq 0$, проходит одна и только одна линия тока и единственная траектория (в предположении, что v_1, v_2 и v_3 — однозначные и непрерывно дифференцируемые функции). Те точки, где $\mathbf{v} = 0$, носят название *критических точек*. Классификация этих точек дается обычно в общей теории дифференциальных уравнений.

Следует заметить, что любая частица, находящаяся на линии тока, содержащей критическую точку, может достичь эту точку только через бесконечное время.

Действительно, пусть L — такая линия тока и s — значение дуговой координаты точки на ней, где в момент времени t находится некая частица среды. Тогда скорость частицы равна

$$v(s) = \frac{ds}{dt}.$$

С другой стороны, в окрестности критической точки $s = s_0$, где $v(s_0) = 0$, можно представить

$$v(s) = v(s_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s-s_0)^k}{k!} \left(\frac{\partial^k v}{\partial s^k} \right)_{s=s_0} = \frac{(s-s_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial^n v}{\partial s^n} \right)_{s=s_0} + \dots,$$

где $\left(\frac{\partial^n v}{\partial s^n} \right)_{s=s_0}$ — первое отличное от нуля значение производной ($n \geq 1$). Тогда

$$t - t_0 = \int_{s_0}^s \frac{ds}{v(s)} \approx \frac{n!}{(\partial^n v / \partial s^n)_{s=s_0}} \int_{s_0}^s \frac{ds}{(s-s_0)^n}.$$

Поскольку интеграл справа расходится, то промежуток времени $t - t_0$ — бесконечно большой, независимо от t_0 .

Таким образом, частицы, подходя к критической точке, теряют свою конечную скорость движения очень медленно (теоретически — бесконечно медленно), так что удары о поверхность исключаются.

Вообще говоря, линии тока не совпадают с траекториями. Схема построения элементов линии тока и траектории, проходящих в момент времени t через одну общую точку M , показана на рис. 13: элементы линии тока ($MM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4$ и т. д.) берутся на векторах скорости в один момент времени t , а элементы траектории ($MM_1, M_1M'_2, M'_2M'_3, M'_3M'_4$ и т. д.) — на векторах скорости в разные моменты времени, в те, когда частица займет положение в точках (M_1, M'_2, M'_3, M'_4 и т. д.), а именно: $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, t + 3\Delta t$ и т. д.

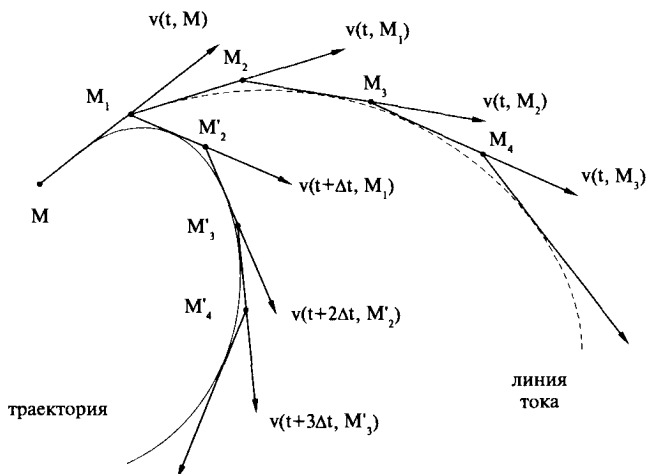


Рис. 13

Если поле скоростей среды явно не зависит от времени, т. е. $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$, то такое движение называется *установившимся* (стационарным).

В стационарном поле скоростей *линии тока и траектории совпадают*.

Иногда в экспериментальной гидроаэромеханике наряду с траекториями и линиями тока интересуются так называемыми *линиями отмеченных частиц*. Линия отмеченных частиц — это линия, на которой находятся все частицы, прошедшие (в разные моменты времени) через одну фиксированную точку пространства. Так, например, линия отмеченных частиц, прошедших через фиксированную точку \mathbf{r}^* , может быть найдена из уравнения $\mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}^*$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$ — лагранжево описание движения. Разрешая это уравнение относительно \mathbf{r}_0 , получаем $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r}^*)$ — начальный радиус-

вектор точки, которая в момент времени t занимает положение \mathbf{r}^* , а для разных моментов t это уравнение и дает искомую линию отмеченных частиц, которая определяется зависимостью $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0(t, \mathbf{r}^*))$ с параметром t .

Линию отмеченных частиц можно получить, если из неподвижной трубочки подкрашивать все частицы движущейся жидкости, которые проходят у отверстия трубки.

Элементы линий тока можно увидеть, сделав с экспозицией фотографию движущейся жидкости, в которой растворен видимый на фотографии порошок. Траектории можно наблюдать, снимая движущуюся жидкость киноаппаратом.

В случае установившегося движения траектории, линии тока и линии отмеченных частиц совпадают.

Следует заметить, что условие стационарности потока является достаточным для того, чтобы траектории совпадали с линиями тока. Необходимым условием является неизменность *направления* скорости в каждой точке потока с течением времени. Так, например, в нестационарном поле скоростей $\mathbf{v} = \varphi(t) \mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ линии тока совпадают с траекториями. Это следует и из совпадения систем дифференциальных уравнений траекторий и линий тока, а также видно из схемы построения линий тока и траекторий (см. рис. 13).

Поверхность тока — это поверхность, образуемая линиями тока, которые проходят через каждую точку кривой (C), не являющейся линией тока (рис. 14).

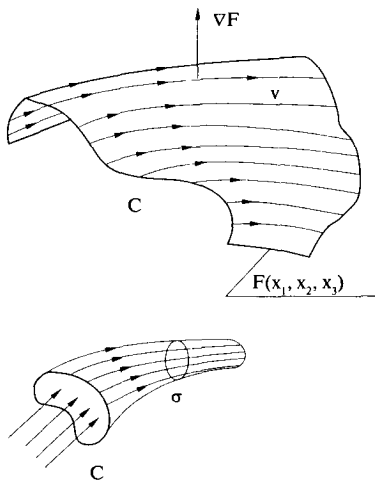


Рис. 14

Уравнение поверхности тока $F(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$ можно для данного поля скоростей \mathbf{v} получить из дифференциального уравнения

$$\mathbf{v} \cdot \nabla F = v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0, \quad (1.72)$$

в котором функции $v_k = v_k(t_1, x_1, x_2, x_3)$ рассматриваются как заданные и которое отражает факт перпендикулярности ∇F к скорости в каждой точке поверхности $F = \text{const}$ (см. рис. 14).

Поскольку линии тока являются характеристическими кривыми уравнения (1.72), то, как известно, задача определения уравнения поверхности $F = \text{const}$ на основании (1.72) может быть разрешена, если кривая (C) не является характеристикой (см., например, [29]).

Трубка тока — это поверхность тока, для которой образующая кривая (C) является замкнутой (см. рис. 14). Обычно под трубкой тока подразумевают элементарную трубку тока, для которой площадь (σ) поперечного сечения бесконечно мала.

Интенсивность трубки тока (в сечении σ) называется **интеграл** $\int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \equiv i$, где \mathbf{n} в каждом сечении (σ) берется в одном направлении по отношению к \mathbf{v} .

Если L — любая замкнутая кривая, то интеграл $\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}$ носит название *циркуляции скорости* по замкнутому контуру L . Эта величина играет большую роль во всей гидромеханике и, как будет показано далее, определяет силу, действующую со стороны потока на твердое плоское тело, ограниченное контуром L .

Дифференциальные характеристики поля скоростей

Дифференциальные характеристики относятся к отдельным точкам поля и потому являются локальными.

Из дифференциальных характеристик поля скоростей сплошной среды отметим важнейшие для кинематики, а именно: *дивергенцию* (расхождение) и *ротор* (вихрь) поля скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$. Если дивергенция $\operatorname{div} \mathbf{v}$ является скалярной характеристикой поля \mathbf{v} , то вихрь $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ — векторной. Здесь время в уравнении поля $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ будет рассматриваться как параметр: все рассуждения и выводы остаются справедливыми и для нестационарного поля в каждый момент времени.

Независимо от системы координат дивергенция и вихрь поля $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ в любой точке M определяются следующим образом:

$$(\operatorname{div} \mathbf{v})_M = \lim_{\Delta V, \Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS, \quad (1.73)$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})_M = \lim_{\Delta V, \Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) dS. \quad (1.74)$$

Здесь ΔV — малый объем с границей ΔS , а \mathbf{n} — внешняя к области ΔV нормаль (рис. 15).

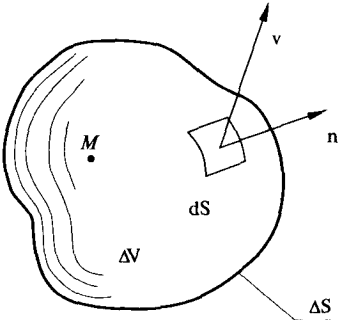


Рис. 15

Если пределы (1.73) и (1.74) существуют, когда ΔV и ΔS , убывая до нуля, стягиваются к точке M , то, как известно, в прямоугольных декартовых координатах $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ имеют выражения

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}; \quad (\operatorname{rot} \mathbf{v})_j = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad (1.75)$$

где ε_{ijk} — компоненты тензора Леви-Чевита.

Независимо от системы координат, используя оператор ∇ , эти характеристики

можно записать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (1.76)$$

где $\nabla \equiv \mathbf{a}^i \partial / \partial x^i$ — дифференциальный оператор в произвольной пространственной системе координат с векторами взаимного базиса \mathbf{a}^i , так что в любой криволинейной системе координат (x^i) имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{a}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = v_{;i}^i, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \varepsilon^{ikj} v_{j;k} \mathbf{a}_i. \quad (1.77)$$

Как будет показано дальше (§ 6), основные дифференциальные характеристики поля скорости сплошной среды имеют ясный физический смысл, а именно: значение $\operatorname{div} \mathbf{v}$ в какой-либо точке равно скорости относительного изменения объема соответствующей частицы среды и характеризует, таким образом, сжимаемость среды, т. е. способность изменять величину своего объема, а $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ равен удвоенной угловой скорости вращения частицы, находящейся в этой точке.

Дальнейшее изложение кинематики сплошной среды всюду, где это не связано со спецификой поля скоростей среды (понятие функции тока, § 6, 7), будет относиться к любому непрерывному векторному полю $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$.

Интегральные теоремы векторного анализа

При изучении векторных полей часто приходится использовать две основные теоремы векторного анализа — теорему Гаусса¹ — Остроградского²

и теорему Стокса³, которые имеют следующие формулировки:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.78)$$

$$\int_S (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}) dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (1.79)$$

В теореме Гаусса — Остроградского (1.78) поверхность S есть граница пространственной области V , а \mathbf{n} — орт внешней к V нормали. В теореме Стокса (1.79) поверхность S — регулярная незамкнутая с границей L , причем нормаль \mathbf{n} с положительным направлением обхода границы составляет «правый винт» (рис. 16).

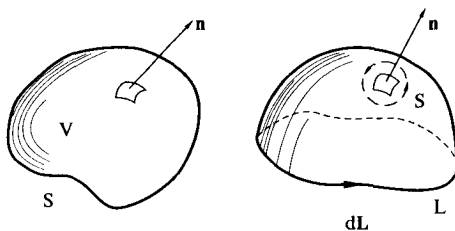


Рис. 16

¹ Гаусс (Gauss) Карл Фридрих (1777–1855) — выдающийся немецкий математик, астроном и физик. Закончил в 1789 г. Геттингенский университет, с 1807 г. — профессор этого университета и директор астрономической обсерватории. Для творчества Гаусса характерна органическая связь между теоретической и прикладной математикой. Его труды оказали большое влияние на развитие алгебры (основная теорема алгебры), теории чисел (квадратичные вычеты), дифференциальной геометрии (внутренняя геометрия поверхностей), математической физики и теорий потенциала (принцип Гаусса, теорема Гаусса — Остроградского, метод наименьших квадратов), теории электромагнетизма и ряда разделов астрономии.

² Остроградский Михаил Васильевич (1801–1862) — известный математик и механик. Учился в Харьковском университете (1816–1820 гг.) и в Париже (1822–1827 гг.). С 1828 г. — профессор в высших учебных заведениях Петербурга, академик. Сформулировал и развил общий вариационный принцип для консервативных систем, доказал теорему (1828 г.) о преобразовании интегралов (теорема Гаусса — Остроградского), построил теорию распространения тепла в твердых телах и жидкостях. Труды по математическому анализу, алгебре, теории чисел, аналитической и небесной механике, гидромеханике, теории упругости, баллистике.

³ Стокс (Stokes) Джордж Габриель (1819–1903) — английский физик и математик. Окончил (1841 г.) Кембриджский университет. Фундаментальные труды по гидромеханике (математическая теория вязкости жидкости, определение силы вязкого сопротивления при медленном движении шара — закон Навье — Стокса, формула Стокса), по векторному анализу. В области оптики исследовал аберрацию света, кольца Ньютона, интерференцию и поляризацию света, люминесценцию.

Интеграл $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ называется *поток*ом векторного поля \mathbf{A} через поверхность S . Интеграл $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ называется *циркуляцией* поля \mathbf{A} по замкнутому контуру L .

К основным теоремам (1.78) и (1.79) примыкает ряд дополнительных теорем, которые могут быть получены для частных случаев поля \mathbf{A} .

Полагая в (1.78) последовательно $\mathbf{A} = \varphi \mathbf{C}$, $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{C}$ ($A_i = T_{ik} C^k$), где \mathbf{C} — произвольный постоянный вектор, а φ , \mathbf{B} и $\hat{\mathbf{T}}$ — переменные скаляр, вектор, тензор второго ранга соответственно, получаем:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \int_S \varphi \mathbf{n} dS, \quad (1.80)$$

$$\int_V \text{rot } \mathbf{B} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{B} dS, \quad (1.81)$$

$$\int_V \text{div } \hat{\mathbf{T}} dV = \int_S \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.82)$$

Все эти формулы можно сокращенно записать в виде равнозначности действия двух операторов на одну и ту же величину (...):

$$\int_V \nabla (...) dV = \int_S \mathbf{n} (...) dS,$$

где $\nabla = \mathbf{a}^i \partial / \partial x^i$ — в системе криволинейных координат с векторами взаимного базиса \mathbf{a}^i .

Полагая в (1.78) последовательно $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi$ и $\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi$, где φ , ψ — скалярные поля, получаем первую (1.83) и вторую (1.84) формулы Грина:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS, \quad (1.83)$$

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (1.84)$$

Полагая в формуле Стокса (1.79) последовательно $\mathbf{A} = \varphi \mathbf{C}$ и $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, получаем:

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \varphi dS = \oint_L \varphi d\mathbf{L}, \quad (1.85)$$

$$\int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} dS = \oint_L d\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (1.86)$$

Задачи с решениями

Задача 3.1. Для поля скоростей, заданного на плоскости (x_1, x_2) в виде (источник мощностью Q , обтекаемый однородным потоком со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{i}_1 v_0$)

$$v_1 = v_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_2 = \frac{Q}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad (v_0 > 0, \quad Q > 0),$$

1) найти линии тока, а среди них — линию тока, отделяющую поток из источника от внешнего однородного потока;

2) рассмотреть движение среды в системе координат (x'_1, x'_2) , движущейся вдоль оси (x_1) со скоростью v_0 , в которой жидкость на бесконечности покоится. Найти в этой системе траектории и линии тока.

Решение. 1. В системе (x_1, x_2) движение среды стационарно, так что линии тока и траектории совпадают.

Уравнение линий тока определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2}.$$

Переходя к полярным координатам r, φ , запишем, исходя из $d\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$, где $d\mathbf{r} = \mathbf{i}_r dr + \mathbf{i}_\varphi r d\varphi$ и $\mathbf{v} = \mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\varphi v_\varphi$, дифференциальное уравнение линий тока в полярной системе координат

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\varphi}{v_\varphi}.$$

Отсюда, поскольку

$$v_r = v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi = \frac{Q}{2\pi r} + v_0 \cos \varphi, \quad v_\varphi = v_2 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi = -v_0 \sin \varphi,$$

имеем

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \frac{v_r}{v_\varphi} = -r \operatorname{ctg} \varphi - \frac{Q}{2\pi v_0 \sin \varphi}.$$

Интегрируя это линейное дифференциальное уравнение, получаем уравнение линий тока в полярных координатах

$$r = \frac{Q}{2\pi v_0} \frac{c - \varphi}{\sin \varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Придавая различные значения постоянной c , можно построить разные линии тока, вид которых показан на рис. 17. Линии тока симметричны относительно оси (x_1) , что можно было заключить уже из вида поля скоростей. Среди этих линий тока есть такая, которая разделяет однородный поток и поток от источника. Для нее, как нетрудно видеть, $c = \pi$, ибо это единственное значение постоянной c , для которого $r(\pi)$ конечно (см. рис. 17).

Линия тока

$$r(\varphi) = \frac{Q}{2\pi v_0} \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi}$$

имеет асимптоту $x_2 = Q/2v_0$ и пересекает ось (x_2) в точках $a = (0, Q/4v_0)$ и $a' = (0, -Q/4v_0)$, а ось (x_1) — в точке $b = (-Q/2\pi v_0, 0) = (r(\pi), 0)$.

Наличие этой линии тока позволяет рассматриваемое движение интерпретировать либо как обтекание однородным потоком со скоростью v_0 полубесконечного тела, асимптотически расширяющегося до величины Q/v_0 на бесконечности, либо как течение от источника с мощностью Q внутри бесконечного открытого цилиндра, либо, наконец, как восходящий поток у горы, профиль которой описывается уравнением

$$r(\varphi) = r_0 \frac{\pi - \varphi}{\sin \varphi},$$

так что ее высота далеко от подножия равна $\pi r_0 = \lim_{\varphi \rightarrow 0} r \sin \varphi$.

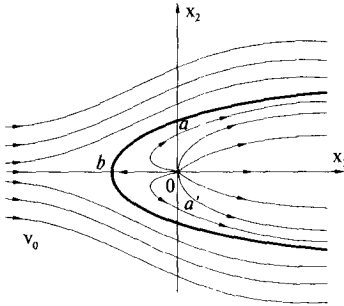


Рис. 17

2. В системе координат (x'_1, x'_2) , связанной с (x_1, x_2) соотношениями

$$x'_1 = x_1 - v_0 t, \quad x'_2 = x_2,$$

жидкость на бесконечности покоится, но рассматриваемое движение будет уже нестационарным. Это движение, которое вызывает источник, движущийся влево со скоростью v_0 в покоящейся на бесконечности жидкости. Скорости потока в системе (x'_1, x'_2) равны:

$$v'_1 = \frac{Q}{2\pi} \frac{x'_1 + v_0 t}{(x'_2)^2 + (x'_1 + v_0 t)^2},$$

$$v'_2 = \frac{Q}{2\pi} \frac{x'_2}{(x'_2)^2 + (x'_1 + v_0 t)^2}.$$

Уравнение линий тока

$$\frac{dx'_1}{v'_1(x'_1, x'_2, t_*)} = \frac{dx'_2}{v'_2(x'_1, x'_2, t_*)},$$

где $t_* = \text{const}$. Или

$$\frac{dx'_1}{dx'_2} = \frac{v'_1}{v'_2} = \frac{x'_1 + v_0 t_*}{x'_2}.$$

Отсюда конечное уравнение линий тока имеет вид

$$x'_1 + v_0 t_* = C_1 x'_2, \text{ т. е. } x_1 = C_1 x_2.$$

Таким образом, для разных значений постоянной C_1 получаем линии тока в виде лучей, исходящих из местоположения источника (рис. 18).

Переходя к определению траекторий в системе (x'_1, x'_2) , введем переменные $r(t)$ и $\varphi(t)$ согласно формулам

$$x'_1 + v_0 t = r(t) \cos \varphi(t), \quad x'_2 = r(t) \sin \varphi(t).$$

Тогда имеем, учитывая выражения для $v'_1 = dx'_1/dt$ и $v'_2 = dx'_2/dt$:

$$\frac{dx'_1}{dt} + v_0 = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r} + v_0,$$

$$\frac{dx'_2}{dt} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r}.$$

Эту систему дифференциальных уравнений относительно $r(t)$ и $\varphi(t)$ можно записать в безразмерных переменных (обозначения для них те же) с масштабами длины (l_0) , времени (t_0) и скорости $(v_0 = l_0/t_0)$ в виде

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon}{r} + \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{r} \sin \varphi, \quad (1)$$

где $\varepsilon = Q/2\pi v_0 l_0$ — безразмерный параметр.

Исключая $\varphi(t)$, отсюда имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{r} - \frac{\varepsilon}{r} \right) + \left(\dot{r} - \frac{\varepsilon}{r} \right)^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Вводя новую переменную $u(r) = (\dot{r}r)^{-1}$, из этого уравнения получаем

$$\frac{du}{dr} = \left(\frac{\varepsilon^2}{r} - r \right) u^3 - \frac{\varepsilon}{r} u^2. \quad (3)$$

Это уравнение Абеля первого рода в таком виде к квадратурам не сводится.

Можно получить приближенное решение для $\varepsilon \ll 1$.

Отыскивая решение уравнения (2) в виде

$$r(t) = r_0(t) + \varepsilon r_1(t) + \varepsilon^2 r_2(t) + \dots, \quad \varphi(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \dots$$

получаем

$$\dot{r}_0^2 + r_0 \ddot{r}_0 = 1, \quad \frac{d^2}{dt^2} (r_1 r_0) = \frac{\dot{r}_0}{r_0}.$$

Отсюда имеем

$$r_0(t) = \sqrt{c_2^2 + (t + c_1)^2}, \quad r_1(t) = \frac{1}{r_0(t)} \left\{ \int \ln r_0(t) dt + c_3 t + c_4 \right\}, \quad (4)$$

где постоянные c_1, c_2, c_3 и c_4 определяются из значений r, \dot{r}, φ и $\dot{\varphi}$ при $t = 1$.

Учитывая, что из (1) следует

$$\dot{r}_0 = \cos \varphi_0, \quad \dot{r}_1 = r_0^{-1} - \varphi_1 \sin \varphi_0,$$

получаем окончательно из соотношений между x'_1 , x'_2 и $r(t)$, $\varphi(t)$:

$$\frac{x'_1}{l_0} = c_1 + \varepsilon (\dot{r}_1 + r_1 \dot{r}_0 - r_0^{-1}), \quad \frac{x'_2}{l_0} = c_2 + \varepsilon c_2^{-1} (\dot{r}_0 + r_1 r_0^{-1} c_2^2 - \dot{r}_1 (t + c_1)),$$

где $r_0(t)$ и $r_1(t)$ имеют значения (4).

Что касается другого предельного значения параметра ε , а именно $\varepsilon \gg 1$, то в этом случае появляется в уравнении (3) малый параметр при старшей производной и решение можно искать методами теории пограничного слоя.

На рис. 18 схематически представлена одна из траекторий, полученная путем графического построения (см.[6]).

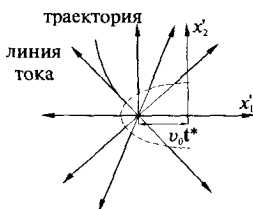


Рис. 18

Задача 3.2. Найти линии тока, траектории и линии отмеченных частиц для поля скоростей

$$\mathbf{v} = (-x_2 u(r), x_1 u(r), w(r)), \text{ где } r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Решение. Уравнение траекторий и линий тока находим из систем уравнений

$$\frac{dx_1}{-x_2 u(r)} = \frac{dx_2}{x_1 u(r)} = \frac{dx_3}{w(r)} = dt.$$

Из $dx_1/dx_2 = -x_2/x_1$ следует $r = r_0 = \text{const}$. Тогда для нахождения траекторий имеем систему

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 u_0, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 u_0, \quad \frac{dx_3}{dt} = w_0,$$

где $u_0 \equiv u(r_0)$; $w_0 \equiv w(r_0)$ — постоянные. Отсюда получаем

$$x_1 = x_{01} \cos u_0 t - x_{02} \sin u_0 t, \quad x_2 = x_{02} \cos u_0 t + x_{01} \sin u_0 t, \quad x_3 = x_{03} + w_0 t.$$

Для каждого фиксированного r_0 эти соотношения представляют линии тока, являющиеся винтовыми линиями с шагом $2\pi w_0/u_0$, располагающиеся на круговом цилиндре радиуса r_0 с осью в виде оси (x_3). Эти винтовые линии представляют и траектории различных частиц с лагранжевыми координатами x_{01} , x_{02} , x_{03} .

§ 3. Поле скоростей сплошной среды и основные его характеристики

Чтобы получить линию отмеченных частиц, проходящую через точку (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , находим x_{01}, x_{02}, x_{03} из системы

$$x_1^* = x_{01} \cos u_0 t^* - x_{02} \sin u_0 t^*, \quad x_2^* = x_{02} \cos u_0 t^* + x_{01} \sin u_0 t^*, \quad x_3^* = x_{03} + w_0 t^*,$$

где t^* — момент времени, в который частица x_{01}, x_{02}, x_{03} находилась в точке (x_1^*, x_2^*, x_3^*) . Получаем

$$x_{01} = x_1^* \cos u_0 t^* + x_2^* \sin u_0 t^*, \quad x_{02} = -x_1^* \sin u_0 t^* + x_2^* \cos u_0 t^*, \quad x_{03} = x_3^* - w_0 t^*.$$

Подставляя эти значения в лагранжево описание движения, получаем уравнение искомой линии отмеченных частиц

$$x_1 = x_1^* \cos u_0 (t^* - t) + x_2^* \sin u_0 (t^* - t), \quad x_2 = x_1^* \sin u_0 (t^* - t) + x_2^* \cos u_0 (t^* - t),$$

$$x_3 = w_0 (t - t^*) + x_3^*.$$

Эти соотношения представляют любую линию отмеченных частиц, для которой лагранжевыми координатами являются t^*, x_1^*, x_2^*, x_3^* .

Задача 3.3. (См. также [17, с. 19]). Найдите траектории частиц и исследовать движение прогрессивной волны, заданной в лагранжевом описании:

$$x_1 = \xi_1 + R e^{k\xi_2} \cos(k\xi_1 - \omega t),$$

$$x_2 = \xi_2 + R e^{k\xi_2} \sin(k\xi_1 - \omega t),$$

$$x_3 = \xi_3,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — лагранжевы координаты, меняющиеся в полупространстве $\xi_2 \leq 0$, R — некоторая длина, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Решение. Уравнение траекторий частиц

$$(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 = R^2 e^{2k\xi_2}$$

представляет окружности в плоскости $x_3 = \xi_3$ с центрами $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2$ и радиусами $R e^{k\xi_2}$ тем меньшими ($\xi_2 \leq 0$), чем дальше окружности отстоят от поверхности $\xi_2 = 0$ (рис. 19, где оси (ξ_1, ξ_2) совмещены с (x_1, x_2)). На рисунке жирными линиями показано положение частиц в момент времени $t = 0$, которые находились в равновесии в плоскостях $\xi_2 = \xi_{02} = \text{const}$; их координаты $x_2 = \xi_{02} + R e^{k\xi_{02}} \sin k\xi_1, x_1 = \xi_1 + R e^{k\xi_{02}} \cos k\xi_1$.

Если отсчетную (начальную) конфигурацию интерпретировать как объем жидкости, находящейся в покое (при $t = 0$), то рассматриваемое движение представляет собой бегущую волну в жидкости. Частицы, которые в исходной конфигурации находились на плоскостях $\xi_2 = \text{const}$, в некоторый фиксированный момент t будут располагаться на

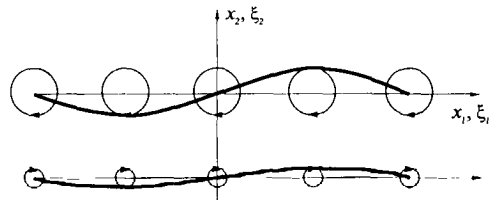


Рис. 19

волне, которую в первом приближении при малом R ($Rk \ll 1$) можно представить в виде синусоиды

$$x_2 = \xi_2 + Re^{k\xi_2} \sin(kx_1 - \omega t),$$

так что при переходе от x_1 к $x_1 + \lambda$ (когда kx_1 переходит в $kx_1 + k\lambda = kx_1 + 2\pi$) амплитуда x_2 не меняется. Поэтому частицы, располагавшиеся в момент времени на волне « aa » (рис. 20), через Δt уже будут на волне « bb », поскольку

$$kx_1 - \omega t = k(x_1 + \Delta x_1) - \omega(t + \Delta t),$$

а отсюда $\Delta x_1 = \omega \Delta t / k$, так что

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda \omega}{2\pi} \equiv c$$

— скорость бегущей волны. При этом следует иметь в виду, что не частицы среды, а некоторое состояние среды,

или, как говорят иногда, геометрический образ в виде бегущей волны, распространяется вдоль оси x_1 со скоростью c . Сами же частицы среды передвигаются вдоль траекторий, представляющих собой окружности.

Рассматриваемое движение является нестационарным и поэтому линии тока не совпадают с траекториями. Вид линий тока может быть получен из уравнений движения частиц для фиксированного момента времени. На рис. 21 приведено схематическое изображение линий тока.

Упражнения

1. Доказать, что \mathbf{v} и $\text{rot } \mathbf{v}$ перпендикулярны в каждой точке поля \mathbf{v} , если линии тока этого поля и векторные линии некоторого потенциального поля \mathbf{u} ($\mathbf{u} = \nabla f$) совпадают.

2. Найти линию тока, траекторию и линию отмеченных частиц, проходящие через точку $M(a, 0, 0)$, для поля скоростей $\mathbf{v} = (-x_2 u(r), x_1 u(r), w(r) + \alpha \sin \beta t)$.

3. Для поля скоростей

$$\mathbf{v} = \left(\frac{x_1 - \alpha t}{\beta}, -\frac{x_2}{\beta}, 0 \right)$$

показать, что линии тока — гиперболы, если α, β — константы. Найти траектории.

4. Доказать, что для поля скоростей $\mathbf{v} = (x_1^2 x_2 + x_2^3, -x_1^3 - x_1 x_2^2, 0)$ линии тока будут окружностями. Найти траектории частиц.

5. Для поля скоростей $v_i = u(t) \alpha_{ij} x_j$, где α_{ij} — константы, найти траектории и линии тока.

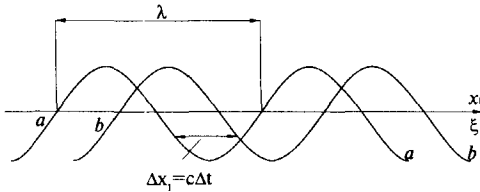


Рис. 20

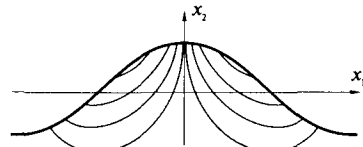


Рис. 21

§ 3. Поле скоростей сплошной среды и основные его характеристики

6. Доказать, что для любого односвязного объема V с внешней нормалью \mathbf{n} на его границе S имеет место формула

$$\int_S x_i n_k dS = V \delta_{ik},$$

где x_i — проекции радиуса-вектора на оси (x_i) прямоугольной декартовой системы координат.

Указание. Формулу (1.82) записать для $T_{ik} = a_k x_i$, где \mathbf{a} — произвольный постоянный вектор, причем $(\operatorname{div} \hat{\mathbf{T}})_i = \partial T_{ik} / \partial x_k$.

7. Показать, что для поля скоростей $\mathbf{v} = (u_1(x_1)\varphi(t), u_2(x_2)\varphi(t), u_3(x_3)\varphi(t))$ траектории совпадают с линиями тока.

§ 4. Основные типы векторных полей и их свойства

Различают три основных типа векторных полей: *безвихревое, соленоидальное и гармоническое*. Рассмотрим их последовательно.

Безвихревое поле. Векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется *безвихревым*, если в любой его точке $\text{rot } \mathbf{A} = 0$.
Скалярный потенциал

Как известно из анализа, условие $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ в некоторой области является условием необходимым и достаточным, чтобы выражение

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = A_i dx^i$$

было полным дифференциалом некоторой функции, т. е.

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = A_i dx^i = d\varphi.$$

Отсюда

$$\mathbf{A} = \nabla\varphi \quad \text{или} \quad A_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}.$$

Вектор \mathbf{A} с компонентами A_i называют иногда ([27]) ковариантным вектором.

Функция φ называется *скалярным потенциалом* безвихревого поля \mathbf{A} . Ее можно определить в любой точке M поля по значениям поля \mathbf{A} на некоторой кривой при помощи криволинейного интеграла

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \int_{M_0}^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (1.87)$$

Поскольку выбор значения $\varphi(M_0)$ произволен, то *потенциал безвихревого поля определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной*.

Однако потенциал безвихревого поля будет *однозначной функцией* только в *односвязной области* определения вектора \mathbf{A} , т. е. в такой области, где произвольный замкнутый контур (L) может быть непрерывным образом стянут в точку без выхода за пределы области. Только в таком случае на этот контур можно «натянуть» регулярную поверхность S , лежащую целиком в области определения \mathbf{A} и применить теорему

Стокса (1.79), из которой в силу $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ следует, что для такого замкнутого контура L

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \nabla \varphi \cdot d\mathbf{L} = 0. \quad (1.88)$$

А это и означает, что φ — однозначная функция, ибо по какому бы пути ни двигаться от M_0 к M , мы всегда придем с одним значением $\varphi(M)$, определяемым формулой (1.87).

Если же область определения вектора \mathbf{A} неодносвязна, то гарантировать однозначность потенциала φ нельзя. В этом случае к значению интеграла в (1.87) в некоторых случаях добавляется определенная постоянная (циклическая постоянная) каждый раз при обходе по замкнутому контуру особенности, нарушающей связность области. Этот вопрос будет подробно рассмотрен дальше (§ 6).

В связи с тем, что безвихревое поле может быть описано при помощи одной скалярной функции — его потенциала (однозначного или неоднозначного), это поле часто называют *потенциальным*.

Сформулируем основные свойства безвихревого поля, следующие из его определения.

1. *Скалярный потенциал безвихревого поля определяется с точностью до произвольной постоянной.*

2. *Скалярный потенциал в односвязной области поля \mathbf{A} является однозначной скалярной функцией.* В этом случае безвихревое поле называется *потенциальным*.

В неодносвязной области скалярный потенциал может быть как однозначной, так и многозначной функцией.

3. *Векторные линии потенциального поля не могут быть замкнутыми.*

Действительно, если допустить существование замкнутой векторной линии без особых точек, в которых $\mathbf{A} = 0$, то $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$ не может на векторной линии менять знак и, следовательно, $\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} \neq 0$. Но это противоречит условию (1.88) однозначности потенциала φ , и, следовательно, поле \mathbf{A} — не потенциально.

В то же время безвихревое поле с неоднозначным потенциалом может иметь замкнутые векторные линии.

Примером безвихревого поля с многозначным потенциалом и замкнутыми векторными линиями может служить поле магнитной напряженности \mathbf{H} от прямолинейного проводника с током J , расположенного на оси x_3 :

$$\mathbf{H} = \frac{2J}{r^2} \mathbf{i}_3 \times \mathbf{r}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2.$$

Это поле определено всюду, кроме точек оси x_3 . Потенциал поля $\varphi = 2J \operatorname{arctg} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$ является многозначной функцией, существующей всюду вне оси x_3 , а векторные линии — концентрическими окружностями в плоскостях (x_1, x_2) с центрами на оси x_3 . Поэтому всякий раз, обходя по контуру, охватывающему ось x_3 , мы из интеграла $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$ получаем циклическую постоянную, равную $4\pi J$. Нетрудно видеть, что в плоскостях, перпендикулярных оси x_3 , мы имеем дело с изолированным плоским вихрем поля $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ интенсивностью $4\pi J$ (см. (1.135)).

4. Если векторное поле скорости сплошной среды потенциально, то поле ускорения также имеет потенциал.

Пусть $\mathbf{v} = \nabla \varphi$; тогда, используя известное выражение векторного анализа для $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \nabla \frac{v^2}{2} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \nabla \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} = \\ &= \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} \right) = \nabla \Phi, \end{aligned}$$

где $\Phi = \partial \varphi / \partial t + (\nabla \varphi)^2 / 2$ является потенциалом ускорения.

Таким образом, если потенциал скорости φ — однозначная функция, то потенциал ускорения Φ — тоже однозначная функция, так что циркуляция ускорения потенциального потока по любому замкнутому контуру равна нулю, т. е.

$$\oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \nabla \Phi \cdot d\mathbf{L} = 0.$$

Этот же результат следует из общей теоремы Кельвина — Томсона (§ 8), утверждающей равенство — при любом поле скоростей — циркуляции ускорения и производной по времени от циркуляции скорости, т. е.

$$\oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{L} = \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}$$

(см. (1.183а)).

**Соленоидальное поле.
Векторный потенциал**

Векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется соленоидальным, если в любой его точке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Основные свойства соленоидального поля:

1. Любое соленоидальное поле можно представить с помощью векторного потенциала \mathbf{B} , который определяется с точностью до градиентной функции.

Действительно, если $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то всегда можно представить поле \mathbf{A} через другое векторное поле \mathbf{B} такое, что

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (1.89)$$

поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} \equiv 0$ (§ 5).

Вектор \mathbf{B} из формулы (1.89) называется *векторным потенциалом* соленоидального поля \mathbf{A} .

Так, например, в случае плоского соленоидального поля $\mathbf{A}(x, y) = (A_x, A_y)$ из $\operatorname{div} \mathbf{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y = 0$, как известно из анализа, следует, что выражение $A_x dy - A_y dx$ является полным дифференциалом некоторой функции $\psi(x, y)$, т. е.

$$A_x dy - A_y dx = d\psi.$$

При этом $A_x = \partial \psi / \partial y$; $A_y = -\partial \psi / \partial x$ и, следовательно, векторное поле \mathbf{A} можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \nabla \psi \times \mathbf{i}_z = \operatorname{rot} \mathbf{i}_z \psi.$$

Таким образом, векторным потенциалом любого плоского соленоидального поля \mathbf{A} служит вектор $\mathbf{B} = \mathbf{i}_z \psi(x, y)$, перпендикулярный плоскости вектора $\mathbf{A} = (A_x, A_y)$.

Если \mathbf{B} — векторный потенциал, то $\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \nabla \chi$ — тоже векторный потенциал, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}' = \operatorname{rot} (\mathbf{B} + \nabla \chi) = \operatorname{rot} \mathbf{B},$$

так что действительно выражение (1.89) определяет векторный потенциал с точностью до произвольной градиентной функции.

2. Векторный потенциал соленоидального поля всегда может рассматриваться как соленоидальный вектор, т. е. если $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, то всегда можно считать $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Действительно, если $\operatorname{div} \mathbf{B} \neq 0$, то, вводя новый векторный потенциал $\mathbf{B}' = \mathbf{B} + \nabla \chi$, всегда его можно подчинить условию $\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0$, ибо для этого стоит только найти функцию χ из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{B}' = \operatorname{div} \mathbf{B} + \Delta \chi = 0, \text{ т. е. } \Delta \chi = -\operatorname{div} \mathbf{B}.$$

Решение такого типа уравнения (уравнения Пуассона¹) в безграничной области всегда можно получить, как будет показано ниже (см. (1.101)), с помощью второй формулы Грина (1.84).

3. Поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность в односвязной области равен нулю.

Это следует непосредственно из теоремы Гаусса — Остроградского для соленоидального поля.

4. Интенсивность векторных трубок соленоидального поля не меняется вдоль них.

Выбрав два произвольных поперечных сечения σ_1 и σ_2 трубки (рис. 22) и применив теорему (1.78) к объему, ограниченному σ_1 , σ_2 и боковой поверхностью σ_δ трубки поля (\mathbf{n} — внешняя к объему нормаль), получаем в силу $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ и $\mathbf{A} \perp \mathbf{n}$ на боковой поверхности трубки:

$$0 = \int_{\sigma_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Поменяв в одном из этих интегралов направление \mathbf{n} на противоположное, получаем в соответствии с определением интенсивности векторной трубки $i_1 = i_2$.

5. Векторные трубки соленоидального поля не могут оканчиваться внутри поля: они либо замкнуты, либо заканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

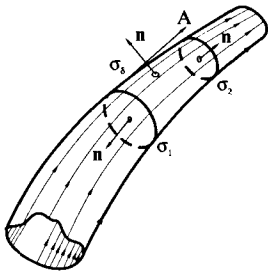


Рис. 22

Это следует из предыдущего свойства трубок, ибо если предположить, что трубка заканчивается во внутренней точке поля, т. е. площадь ее поперечного сечения стремится к нулю, то в этой точке вектор \mathbf{A} должен быть бесконечно большим, чтобы постоянная интенсивность трубки осталась конечной. Но это исключается в силу предположения о непрерывности поля \mathbf{A} .

¹ Пуассон (Poisson) Симеон Дени (1781–1840) — французский математик, механик и физик. Окончил Политехническую школу в Париже (1798 г.). Сформулировал частный случай закона больших чисел и одну из предельных теорем теории вероятностей; предложил названное его именем распределение вероятностей случайных величин. Разработал математическую теорию электростатики, обобщил уравнения Навье — Стокса на случай сжимаемой вязкой жидкости с учетом теплопередачи, обобщил уравнения теории упругости на анизотропные среды, решил ряд задач теории упругости, ввел «скобки Пуассона» и доказал ряд важных теорем динамики. В теории потенциала изучил носящее его имя уравнение. Доказал устойчивость планетных движений. Написал «Курс механики» (1811 г.), многократно переиздававшийся.

Поле вихря. Вихревое движение

О соленоидальном поле \mathbf{A} можно говорить как о поле вихря некоторого другого поля \mathbf{B} , поскольку оно всегда представимо в виде $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B}$.

Движение сплошной среды со скоростью \mathbf{v} , когда в каждой точке скоростного поля $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, называют *вихревым движением*. Основной характеристикой этого движения является соленоидальный вектор $\mathbf{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ с компонентами (1.77), а следовательно, поле скоростей \mathbf{v} для вихря $\mathbf{\Omega}$ играет роль векторного потенциала.

Все свойства соленоидального поля автоматически переносятся на поле вихря $\mathbf{\Omega}$. Теорема о постоянстве интенсивности векторных трубок для вихревого поля была получена Гельмгольцем¹ и носит его имя. Векторные трубки поля вихря скорости называют *вихревыми трубками*.

Отметим, что *интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по замкнутому контуру*, расположенному на поверхности трубки и один раз ее опоясывающему. (В качестве такого контура может быть взята граница поперечного сечения трубки.) Этот факт следует из теоремы Стокса, примененной к поверхности любого поперечного сечения вихревой трубки.

Если вихревое поле ограничено областью вихревой трубки, а в остальной области $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, то интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по любому контуру, охватывающему трубку.

Это следует из теоремы Стокса, примененной к поверхности S , ограниченной замкнутым контуром L_2 , лежащим на поверхности вихревой трубки, и произвольным контуром L_1 , стягивающим S и охватывающим трубку (рис. 23). Поскольку $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ всюду на S , то из (1.79) имеем

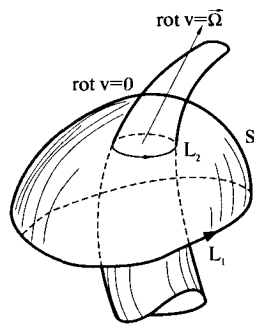


Рис. 23

¹ Гельмгольц (Helmholtz) Герман Людвиг Фердинанд (1821–1894) — крупный немецкий ученый. Учился в Военно-медицинском институте (Берлин); с 1849 г. работал профессором в ряде университетов в Германии, директором Физико-технического института. Автор ряда фундаментальных работ по физике, биофизике, физиологии, психологии. Впервые (1847 г.) математически обосновал закон сохранения энергии, показав его всеобщий характер («О сохранении силы»). Разработал термодинамическую теорию химических процессов, ввел понятие свободной и связанной энергии. Автор основополагающих работ по теории слуха и зрения, по процессам сокращения мышц и распространению нервного импульса. В гидродинамике заложил основы вихревого движения (1858 г.) жидкости и аномальной дисперсии; работы по теории разрывных движений, по теории механического подобия и теории волн. Член многих академий наук.

$$0 = \oint_{L_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}, \text{ т. е. } \Gamma_2 = i = \Gamma_1,$$

где i — интенсивность вихревой трубки (контуры обходятся так, как показано на рис. 23).

Заметим, что область S — двухсвязная, и хотя в ней течение безвихревое, но поскольку потенциал — неоднозначная функция, то линии тока могут быть замкнуты.

Соленоидальное поле скорости. Функции тока

В случае плоского соленоидального поля и осесимметричных пространственных соленоидальных полей можно ввести скалярную функцию,

через частные производные которой будут выражаться компоненты вектора поля. Как и в случае потенциального поля, анализ векторного поля с помощью одной скалярной функции выглядит во многих приложениях проще. Более того, в случае плоских полей наличие двух гармонически сопряженных функций — потенциала поля и упомянутой скалярной функции — позволяет использовать теорию функций комплексного переменного. Это и будет сделано в гидромеханике плоских потоков.

Если векторное поле \mathbf{A} представляет собой поле скорости движущейся среды ($\mathbf{A} = \mathbf{v}$), то вводимая для соленоидальных полей скалярная функция носит название *функции тока*. Это связано с тем, что линии постоянного уровня этой функции совпадают с линиями тока.

Как будет показано в § 7, если среда является несжимаемой, т. е. любая ее частица движется без изменения величины своего объема, то поле скоростей в такой среде обязательно соленоидально, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. И, следовательно, в первую очередь о такой среде идет речь, когда рассматривается функция тока.

Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ в обобщенных криволинейных координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид (см. например, [7])

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (v^i \sqrt{g}) = 0, \tag{1.90}$$

где v^i — контравариантные компоненты вектора \mathbf{v} , $g = \det \|g_{ik}\|$.

Для движений сплошной среды, когда одна из компонент скорости равна нулю (например, $v^3 = 0$), можно ввести функцию тока $\psi(x^1, x^2)$, через частные производные которой однозначно выражаются две не равные нулю компоненты скорости v^1 и v^2 .

Действительно, при $v^3 = 0$ из (1.90) можно говорить о существовании непрерывной функции $\psi(x^1, x^2)$ такой, что

$$v^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}; \quad v^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}. \quad (1.91)$$

Это следует и из дифференциального уравнения линий тока, которое согласно (1.71) имеет вид $\varepsilon_{ijk} v^j \delta x^k = 0$, или в рассматриваемом случае

$$\sqrt{g} v^1 \delta x^2 - \sqrt{g} v^2 \delta x^1 = 0.$$

В силу соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (v^1 \sqrt{g}) = -\frac{\partial}{\partial x^2} (v^2 \sqrt{g}),$$

следующего при $v^3 = 0$ из (1.91), получаем, что элементарная величина $v^1 \delta x^2 - v^2 \delta x^1$ есть дифференциал некоторой функции $\psi = \psi(x^1, x^2)$, т. е.

$$d\psi = v^1 \delta x^2 - v^2 \delta x^1.$$

При этом линии постоянного уровня этой функции ($\psi(x^1, x^2) = \text{const}$) на координатной поверхности $x^3 = 0$ совпадают с линиями тока.

В случае ортогональных координат, переходя к физическим компонентам v_i^* , т. е. к компонентам вектора \mathbf{v} при его разложении по ортам $\mathbf{a}_i/|\mathbf{a}_i|$ ортогональных базисов, получаем из (1.91):

$$v_i^* = v^1 \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}; \quad v_2^* = v^2 \sqrt{g_{22}} = -\sqrt{\frac{g_{22}}{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}. \quad (1.92)$$

Ситуация, когда во всем потоке и всегда $v^3 = 0$, характерна для плоских (двумерных) потоков и для осесимметричных потоков, у которых в меридиональных плоскостях поток тоже двумерный.

Для плоских потоков функция тока впервые была введена Лагранжем, для осесимметричных потоков — Стоксом.

Рассмотрим частные случаи существования функции тока.

1. *Двумерный поток; прямоугольные декартовы координаты x, y в плоскости $x^3 = 0$.*

Для этого случая $x^1 = x; x^2 = y; g_{11} = g_{22} = g_{33} = \sqrt{g} = 1; v_1^* \equiv v_x; v_2^* \equiv v_y; v_3^* = 0$, так что в плоскости (x, y) имеем

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.93)$$

Таким образом, двумерный вектор скорости равен $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{a}_3^0 \psi = \nabla \psi \times \mathbf{a}_3^0$, где \mathbf{a}_3^0 — орт оси (x^3).

Условие соленоидальности поля и выражение для функции тока:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad \psi(x, y) = \psi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dy - v_y dx.$$

Линии постоянного уровня функции тока, т. е. кривые $\psi(x, y) = \text{const}$, обладают свойством $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy = 0$, что указывает на то, что они совпадают с линиями тока.

Из $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} (\nabla \psi \times \mathbf{a}_3^0) = -\mathbf{a}_3^0 \text{div } \nabla \psi = 0$ следует уравнение для ψ в случае безвихревого потока:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

2. Двумерный поток; полярные координаты r, φ в плоскости $x^3 = 0$.

В этом случае $x^1 = r; x^2 = \varphi; g_{11} = g_{33} = 1; \sqrt{g_{22}} = \sqrt{g} = r; v_1^* \equiv v_r; v_2^* \equiv v_\varphi; v_3^* \equiv 0$, так что из (1.92) имеем

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}; \quad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.94)$$

Следовательно, аналогично предыдущему примеру $\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{a}_3^0 \psi = \nabla \psi \times \mathbf{a}_3^0$. Условие соленоидальности поля и функция тока имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0; \quad \psi(r, \varphi) = \psi_0 + \int_{(r_0, \varphi_0)}^{(r, \varphi)} r v_\varphi d\varphi - v_r dr.$$

Из $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} (\nabla \psi \times \mathbf{a}_3^0) = -\mathbf{a}_3^0 \text{div } \nabla \psi = 0$ получаем уравнение для ψ безвихревого потока:

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

3. Осесимметричный (относительно оси z) поток (рис. 24).

Когда потоки в плоскостях, проходящих через ось z (меридиональные плоскости в которых можно ввести переменные $\rho = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ и $z \equiv x_1$), идентичны, а компоненты скорости, перпендикулярная этим плоскостям, равна нулю, в каждой такой плоскости (ρ, z) существует функция тока $\psi(\rho, z)$. Выбирая цилиндрические координаты в виде $x^1 = z, x^2 = \rho, x^3 = \varphi$, так что $g_{11} = g_{22} = 1; \sqrt{g_{33}} = \sqrt{g} = \rho$, имеем $v_1^* \equiv v_z, v_2^* \equiv v_\rho, v_3^* \equiv v_\varphi = 0$. Тогда из (1.92) получаем

$$v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}; \quad v_\rho = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (1.95)$$

Двумерный вектор скорости (в плоскости изменения координат z и ρ) можно представить в виде $\mathbf{v} = (\nabla \psi \times \mathbf{a}_\varphi^0) / \rho = \text{rot}(\mathbf{a}_\varphi^0 \psi / \rho)$.

Условие соленоидальности поля и функция тока имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(v_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0; \quad \psi(\rho, z) = \psi_0 + \int_{(\rho_0, z_0)}^{(\rho, z)} \rho(v_z d\rho - v_\rho dz).$$

Из $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} \left(\frac{\nabla \psi}{\rho} \times \mathbf{a}_\varphi^0 \right) = -\mathbf{a}_\varphi^0 \text{div} \frac{\nabla \psi}{\rho} = 0$, учитывая принятый выбор цилиндрических координат, получаем уравнение для функции тока ψ безвихревого потока:

$$\text{div} \frac{\nabla \psi}{\rho} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = 0.$$

При таком выборе осей объемный расход жидкости в единицу времени через ортогональное к оси (z) сечение, ограниченное окружностью радиуса ρ , равен

$$Q = \int_0^\rho v_z \cdot 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_0^\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} d\rho = 2\pi \psi(\rho)$$

и если $Q > 0$, то $\psi(\rho) > 0$ ($\psi(0) = 0$).

Заметим, что об уравнении $\psi(\rho, z) = \text{const}$ можно говорить как об уравнении поверхности тока: поверхности, образованной вращением линии тока вокруг оси z .

4. Осесимметричный поток в плоскости $\varphi = \text{const}$ сферических координат r, θ, φ .

Когда компонента скорости v_φ равна нулю, то в сферической системе координат

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi \quad \text{получаем} \quad g_{11} = 1; \quad \sqrt{g_{22}} = r; \quad \sqrt{g_{33}} = r \sin \theta; \quad \sqrt{g} = r^2 \sin \theta; \\ v_1^* \equiv v_r; \quad v_2^* \equiv v_\theta; \quad v_3^* \equiv v_\varphi = 0.$$

Тогда из (1.92) получаем

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (1.96)$$

где $\psi = \psi(r, \theta)$ — функция тока.

Двумерный вектор скорости \mathbf{V} в азимутальной плоскости имеет следующее выражение:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} (\nabla \psi \times \mathbf{a}_3^0) = \text{rot} \left(\mathbf{a}_3^0 \frac{\psi}{r \sin \theta} \right),$$

где $\mathbf{a}_3^0 \equiv \mathbf{a}_\varphi^0$.

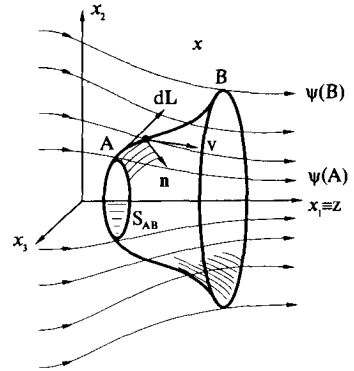


Рис. 24

Условие соленоидальности и функция тока имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}(v_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta r \sin \theta) = 0; \quad \psi(r, \theta) = \psi_0 + \int_{(\psi_0, \theta_0)}^{(r, \theta)} (rv_r d\theta - v_\theta dr) r \sin \theta.$$

Из $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot} \left(\frac{\nabla \psi}{r \sin \theta} \times \mathbf{a}_3^0 \right) = -\mathbf{a}_3^0 \text{div} \left(\frac{\nabla \psi}{r \sin \theta} \right) = 0$ получаем уравнение для ψ безвихревого движения:

$$\text{div} \frac{\nabla \psi}{r \sin \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

5. Винтовой поток.

В сферических координатах (r, θ, φ) для осесимметричного $(\partial/\partial\varphi = 0)$ винтового движения $(\text{rot } \mathbf{v} = k\mathbf{v})$ можно ввести¹ функцию тока $\psi = \psi(r, \theta)$, которая выражается через обобщенный потенциал $\Phi = \Phi(r, \theta)$ следующим образом:

$$\psi = -r \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sin \theta.$$

При этом компоненты скорости имеют значения:

$$v_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + k^2 \Phi,$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$v_\varphi = -k \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{k}{r \sin \theta} \psi,$$

а потенциал Φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

или

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + k^2 \Phi = 0.$$

В случае потенциального движения $(k = 0)$ отсюда имеем

$$v_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad v_\varphi = 0,$$

$$\Delta \Phi = 0.$$

¹ N. V. Saltanov and P. A. Shestopal. The Helical Analog of Potential Flow Over a Sphere // Intern. Journal of Fluid Mechanics Research. 2000. № 1. Vol. 27.

Наконец, отметим, что стационарный трехмерный поток сжимаемой среды с плотностью ρ может быть описан двумя функциями тока $\psi(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r})$, так что $\rho\mathbf{v} = \nabla\psi \times \nabla\chi$ (см. задачу 9.1).

Функцию тока можно рассматривать как единственную отличную от нуля компоненту векторного потенциала \mathbf{B} . Для плоских потоков — это компонента по оси (z), перпендикулярной плоскости потока, так что

$$\mathbf{v} = \text{rot}\mathbf{B}; \quad \mathbf{B} = (0, 0, \psi).$$

Для осесимметричных потоков — это азимутальная компонента вектора \mathbf{B} , причем в цилиндрических координатах $B_\phi = \psi/\rho$ (пример 3), а в сферических (пример 4) имеем $B_\phi = \psi/r \sin\theta$.

Функция тока имеет ясную физическую интерпретацию, а именно:

Для плоских потоков разность значений функции тока в произвольных двух точках A и B численно равна объемному расходу Q среды в единицу времени между линиями тока, проходящими через эти точки.

Вычисляя Q между линиями тока $\psi(A)$ и $\psi(B)$, получим (рис. 25)

$$Q = \int_A^B \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL = \int_A^B (v_x n_x + v_y n_y) dL.$$

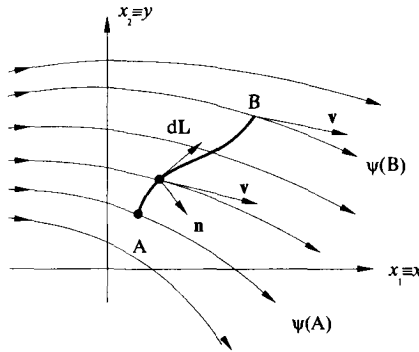


Рис. 25

Но $n_x dL = dy$, $n_y dL = -dx$, где dx и dy берутся вдоль линии интегрирования, так что, учитывая (1.93), получаем

$$Q = \int_A^B v_x dy - v_y dx = \int_A^B \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = \psi(B) - \psi(A).$$

Для бесконечно близких линий тока (плоская трубка тока) имеем $dQ = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dL = d\psi$.

В случае осесимметричного потока (например, относительно оси z), вычисляя расход через поверхность S_{AB} , образованную вращением кривой AB вокруг оси z (рис. 24), имеем

$$Q = \int_{S_{AB}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dS = \int_A^B (v_\rho n_\rho + v_z n_z) 2\pi\rho dL = 2\pi \int_A^B \rho (v_z d\rho - v_\rho dz),$$

поскольку $n_\rho dL = -dz$; $n_z dL = d\rho$.

Подставляя сюда выражения v_ρ и v_z через функцию тока (1.95), получаем

$$Q = 2\pi \int_A^B \rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} d\rho \right) = 2\pi (\psi(B) - \psi(A)).$$

Таким образом:

Для осесимметричных потоков разность значений функций тока в произвольных двух точках A и B потока численно равна объемному расходу среды в единицу времени Q , деленному на 2π , через поверхность, образованную вращением произвольной кривой, соединяющей точки A и B .

Эта формула имеет наглядное толкование.

Нетрудно видеть (см. пример 3), что поскольку $\psi(A)$ и $\psi(B)$ представляют собой расходы через два поперечных сечения замкнутой поверхности (два «донышка» и боковая поверхность), ограничивающей объем, где всюду $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, то общий расход среды через эту поверхность (см. (1.78)) равен нулю.

Функция тока однозначна в односвязной области соленоидального поля.

В неодносвязной области функция тока может быть неоднозначной (см. § 6).

Заметим, что для сжимаемых стационарных потоков с плотностью ρ , т. е. когда $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$, можно также в двумерных и осесимметричных потоках рассматривать функцию тока. Однако в этих безвихревых потоках ни φ , ни ψ , вообще говоря, не будут гармоническими функциями, ибо из $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$, скажем, в декартовых координатах, следует

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \psi \right) = 0, \quad \operatorname{div} (\rho \nabla \varphi) = 0.$$

Гармоническое (лапласово) векторное поле.
Гармонические функции

Векторное поле $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ называется гармоническим (лапласовым), если в любой его точке $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$.

Особенности этого поля связаны со свойствами гармонических функций. Это следует из того, что в силу $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ в односвязной области $\mathbf{A} = \nabla \varphi$, а поскольку и $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то $\Delta \varphi = 0$, т. е. потенциал этого поля — гармоническая функция. Такими функциями, непрерывными с первыми и вторыми производными и удовлетворяющими уравнению Лапласа¹, являются, в частности, функции $1/r$ (в пространстве), $\ln r$ (в плоскости): они гармонические всюду, кроме начала координат.

Укажем на некоторые свойства гармонических функций.

1. Если φ — гармоническая внутри области V функция, то ее значение в любой внутренней точке M области может быть выражено через значения этой функции и ее нормальной производной на границе области с помощью формулы:

$$4\pi\varphi(M) = - \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS, \quad (1.97)$$

где $r = |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_S|$, \mathbf{r}_S — радиус-вектор текущей точки на поверхности.

Выведем это важное для дальнейшего изложения следствие из второй формулы Грина (1.84), положив в ней $\psi = (1/r) \equiv 1/|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_{M'}|$, причем \mathbf{r}_M — радиус-вектор точки M , где мы хотим найти значение φ , а $\mathbf{r}_{M'}$ — радиус-вектор переменной точки интегрирования M' (рис. 26). Поскольку $\Delta(1/r) = 0$, то из (1.84) имеем, если точка M лежит вне V :

$$- \int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

Если же, как в рассматриваемом нами случае, точка M лежит внутри V , то впрямую формулой (1.84) пользоваться нельзя, поскольку при $\mathbf{r}_{M'} = \mathbf{r}_M$ имеем $1/r = \infty$. Чтобы избежать этой неприятности, окружим точку M «шаром безопасности» радиуса ρ с поверхностью S_ρ и объемом V_ρ (см. рис. 26). Теперь к области V^* (область V , из которой исключена область шара V_ρ) применяем формулу (1.84). Имеем

¹ Лаплас (Laplace) Пьер Симон (1749–1827) — видный французский математик, астроном, физик. Автор классических работ по математической физике, по теории вероятностей и небесной механике. Основные труды «Аналитическая теория вероятностей» (1812 г.), «Трактат о небесной механике» (1825 г.). Один из создателей математической теории вероятностей, доказал первые предельные теоремы, развил теорию ошибок и метод наименьших квадратов. Завершил создание небесной механики на основе закона Ньютона. Доказал устойчивость Солнечной системы.

$$-\int_{V^*} \frac{1}{r} \Delta \varphi dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \int_{S_\rho} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS_\rho.$$

Вычисляя предел (при $\rho \rightarrow 0$) второго интеграла справа, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS_\rho &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{S_\rho} \left(\frac{\varphi}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) dS_\rho = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0, M' \rightarrow M} \left[\frac{\varphi(M')}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{M'} \right] 4\pi \rho^2 = 4\pi \varphi(M). \end{aligned}$$

Таким образом, в пределе при $\rho \rightarrow 0$, $V^* \rightarrow V$ получаем

$$4\pi \varphi(M) = -\int_V \frac{\Delta \varphi}{r} dV - \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (1.98)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения носит название *объемного потенциала*, второе имеет вид *потенциала двойного слоя*, а третье — *потенциала простого слоя*. Смысл этих понятий будет разъяснен в § 5 (см. примеры 2 и 5 построения векторных полей).

Если точка M_S находится на поверхности S , то сфера безопасности становится полусферой и располагается с той стороны поверхности S , откуда M' стремится к M_S (см. рис. 26). При этом с какой бы стороны M' не приближалась к M_S , имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, M' \rightarrow M_S} \int_{S_\rho} \frac{\varphi}{\rho^2} dS_\rho = \frac{\varphi(M)}{\rho^2} 2\pi \rho^2 = 2\pi \varphi(M_S).$$

Формула (1.98) для гармонической функции ($\Delta \varphi = 0$) дает (1.97). Из нее же следует выражение для функции $\varphi(\mathbf{r})$, удовлетворяющей в каждой внутренней точке области V уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi = \theta(r), \quad (1.99)$$

при ограниченности на бесконечности величины $|r^{2+\alpha} \theta(r)|$ для $0 < \alpha < 1$.

Эта формула также требует значений как φ , так и $\partial \varphi / \partial n$ на границе области и имеет вид

$$4\pi \varphi(M) = -\int_V \frac{\theta}{r} dV - \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (1.100)$$

В случае безграничной области, выбирая в качестве S поверхность сферы радиуса R и вычисляя предел (при $R \rightarrow \infty$) поверхностного интеграла в (1.100), получаем (предполагая $\varphi(R) = O(1/R^\alpha)$; $\alpha > 0$)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\varphi(R) \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) 4\pi R^2 =$$

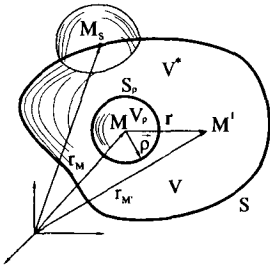


Рис. 26

чаем

$$= -4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \varphi(R) + R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right\} = 0.$$

Таким образом, регулярное решение уравнения Пуассона для безграничной области имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\theta(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.101)$$

где \mathbf{r}' определяет переменную точку M' , у которой берется dV' .

Из этой формулы, в частности, следует, что если гармоническая во всем пространстве функция убывает на бесконечности согласно $\varphi(R) = O(1/R^\alpha)$ (или быстрее) и, следовательно, $\nabla \varphi(R) = O(1/R^{\alpha+1})$, то она равна тождественно нулю (при гармоничности φ из (1.99) следует $\theta = 0$, а тогда в силу соотношения (1.101), полученного для $\varphi(R) = O(1/R^\alpha)$, имеем $\varphi \equiv 0$).

Таким образом, подытоживая полученные выше для гармонической функции $\varphi(\mathbf{r})$ результаты, получаем

1) если точка M находится вне области V , ограниченной S , то

$$\int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = 0,$$

2) если точка M находится внутри области V , то

$$4\pi \varphi(M) = - \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

3) если точка M находится на границе S области V , то

$$2\pi \varphi(M_S) = - \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

Из этих выражений следует, в частности, содержание теоремы Лапласа и Гаусса, а именно

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \begin{cases} -4\pi, & \text{если точка } M \text{ (полюс) внутри } S, \\ -2\pi, & \text{если полюс на } S, \\ 0, & \text{если полюс вне } S. \end{cases}$$

Эти формулы получаются из трех предыдущих, если в них положить $\varphi = 1$.

2. Для любой замкнутой поверхности S внутри области гармоничности функции φ имеет место равенство

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0.$$

Это свойство следует из второй формулы Грина (1.84), если в ней считать $\psi = \text{const}$, а φ — гармонической.

3. Гармоническая функция не может иметь ни максимума, ни минимума внутри области гармоничности.

4. Гармоническая функция, принимающая постоянные значения на границе некоторой конечной области, постоянна всюду внутри области.

5. Уравнение Лапласа имеет единственное решение в односвязной области, если на границе ее заданы либо значения функции (задача Дирихле¹), либо значения ее нормальной производной (задача Неймана²).

Доказательства этих свойств гармонических функций известны (см., например, [27], [29]) и здесь не приводятся (см. также задачу 4.4).

Заметим, что формула (1.97) не может быть использована для решения ни задачи Дирихле, ни задачи Неймана: она требует знания на границе области и самой функции и ее нормальных производных.

6. Теорема Кельвина — Томсона. Если $\Phi(r, \theta, \varphi)$ — гармоническая функция, то функция $\Phi^*(r, \theta, \varphi) = \frac{a^2}{r} \Phi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right)$ — также гармоническая, причем a — любая постоянная.

Это свойство носит название инверсии гармонической функции, поскольку точки (r, θ, φ) и $(a^2/r, \theta, \varphi)$ связаны преобразованием инверсии относительно сферы $r = a$.

Доказательство. Пусть $\Delta \Phi(r, \theta, \varphi) = 0$. Обозначив $R \equiv a^2/r$, имеем $\Phi^* = R\Phi(R, \theta, \varphi)$, так что

$$\nabla_R \Phi^*(r, \theta, \varphi) = \nabla_R (R\Phi(R, \theta, \varphi)) = \nabla_r (r\Phi(r, \theta, \varphi)) = \mathbf{i}_r \Phi + r \nabla_r \Phi.$$

Поскольку $\nabla_R = \frac{dr}{dR} \nabla_r = -\frac{a^2}{R^2} \nabla_r$, то $\nabla_r \Phi^*(r, \theta, \varphi) = -\mathbf{i}_r \Phi \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{r} \nabla_r \Phi$. Поэтому

$$\operatorname{div} \nabla_r \Phi^*(r, \theta, \varphi) = \Delta \Phi^*(r, \theta, \varphi) = -a^2 \operatorname{div} \mathbf{i}_r \frac{\Phi}{r^2} - \nabla_r \frac{a^2}{r} \nabla_r \Phi - \frac{a^2}{r} \Delta \Phi.$$

Учитывая выражения для div в сферических координатах, откуда получаем ($\Delta \Phi = 0$):

$$\Delta \Phi^*(r, \theta, \varphi) = -a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\Phi}{r^2} \right) + \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0,$$

что и доказывает гармоничность $\Phi^*(r, \theta, \varphi) = \frac{a^2}{r} \Phi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right)$.

¹ Дирихле (Dirichlet) Петер Густав (1805–1859) — известный немецкий математик. Труды по теории чисел, математическому анализу, математической физике. Доказал теорему Ферма для степени не выше пяти. Создал теорию рядов Дирихле, решил задачу об отыскании гармонической функции по ее значениям на границе (задача Дирихле).

² Нейман (Neumann) Карл Готфрид (1832–1925) — известный немецкий математик. Труды по теории логарифмического потенциала, по теории алгебраических функций, теории функций Бесселя. Исследовал вводящую краевую задачу (задача Неймана).

Из свойств гармонических функций следуют свойства гармонического (лапласова) векторного поля:

1. Гармоническое векторное поле полностью определяется в каждой внутренней точке односвязной области значением либо его скалярного потенциала, либо нормальной производной потенциала, заданных на границе области; в случае многосвязной области дополнительно к нормальной производной на границе области необходимо задать значение циркуляции поля по тем контурам, которые не могут быть непрерывно стянуты в точку внутри области.

2. Гармоническое во всем бесконечном пространстве векторное поле, исчезающее на бесконечности (не медленнее, чем $R^{-(1+\alpha)}$, при $\alpha > 0$ и $R \rightarrow \infty$) тождественно равно нулю.

3. Ни в одной внутренней точке абсолютная величина гармонического векторного поля не может иметь ни максимума, ни минимума.

Задачи с решениями

Задача 4.1. Показать, что единственно возможным безвихревым движением в односвязном объеме V несжимаемой жидкости является покой, если граница S этого объема непроницаема и неподвижна.

Решение. Имеем, используя $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, условие $v_n|_S = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = 0$ и теорему Гаусса — Остроградского:

$$\begin{aligned} \int_V v^2 dV &= \int_V (\nabla\varphi)^2 dV = \int_V (\operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) - \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}) dV = \\ &= \int_S (\varphi\nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \varphi v_n dS = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности V имеем $\mathbf{v} \equiv 0$ в каждой из внутренних для области V точек.

Задача 4.2. Показать, что кинетическая энергия плоского потенциального потока несжимаемой жидкости может быть записана в виде

$$T = \frac{\rho}{2} \int_L \varphi d\psi,$$

где φ — потенциал скорости потока, ψ — функция тока, а L — контур, ограничивающий рассматриваемую односвязную область потока S .

Решение. Используя выражение $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL = d\psi$ и теорему Гаусса — Остроградского для единицы длины бесконечного цилиндра с направляющей L , на доньшках которого $v_n = 0$, получаем

$$T = \frac{\rho}{2} \int_S v^2 dS = \frac{\rho}{2} \int_S (\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) dS = \frac{\rho}{2} \int_S (\operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi) - \varphi \operatorname{div} \nabla \varphi) dS = \\ = \frac{\rho}{2} \int_L \varphi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dL = \frac{\rho}{2} \int_L \varphi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dL = \frac{\rho}{2} \int_L \varphi d\psi.$$

Задача 4.3. Теорема Кельвина — Томсона о минимуме энергии. Показать, что если на границе области V два соленоидальных потока ($\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0$) имеют одинаковые нормальные скорости, причем один из них (например, \mathbf{v}_1) — безвихревой с однозначным потенциалом φ ($\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0$, $\mathbf{v}_1 = \nabla \varphi$), то кинетическая энергия этого потока меньше, чем второго.

Если область V простирается в бесконечность, то теорема справедлива для потоков, исчезающих на бесконечности ($\mathbf{v}_1|_{\infty} = \mathbf{v}_2|_{\infty} = 0$).

Решение. Имеем, поскольку для обоих потоков $\rho = \text{const}$

$$T_2 - T_1 = \frac{\rho}{2} \int_V (v_2^2 - v_1^2) dV = \frac{\rho}{2} \int_V (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 dV + \rho \int_V (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 dV.$$

Второй интеграл преобразуем по теореме Гаусса — Остроградского и используем $\mathbf{v}_1 = \nabla \varphi$ и соленоидальность \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 :

$$\int_V (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \nabla \varphi dV = \int_V \{ \operatorname{div} \varphi (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \varphi \operatorname{div} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \} dV = \int_S \varphi (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Но в силу условий теоремы этот поверхностный интеграл равен нулю. Поскольку первый интеграл в выражении $T_2 - T_1$ всегда положителен, то при $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$

$$T_2 > T_1.$$

В случае бесконечной области (S отодвигается на бесконечность) $v_{1n}|_{\infty} = v_{2n}|_{\infty} = 0$ в силу условия исчезновения движения на бесконечности, так что и в этом случае $T_2 > T_1$.

Задача 4.4. Показать, что задача определения поля скоростей безвихревого движения несжимаемой жидкости в односвязном объеме V не может иметь более одного решения, если на границе S этого объема заданы либо потенциал скорости движения φ (задача Дирихле), либо его нормальная производная $\partial \varphi / \partial n$ (задача Неймана).

Решение. Для указанного движения $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, так что поле скоростей является гармоническим и его потенциал φ ($\mathbf{v} = \nabla \varphi$) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$.

Пусть φ_1 и φ_2 — два различных решения этого уравнения. Тогда, записывая формулу Грина (1.83) для $\varphi = \psi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$, получим

$$\int_V [\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)]^2 dV = \int_S (\varphi_1 - \varphi_2) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right) dS.$$

Отсюда, если на границе области совпадают либо значения двух решений ($\varphi_1|_S = \varphi_2|_S$), либо значения их нормальных производных ($\partial \varphi_1 / \partial n|_S = \partial \varphi_2 / \partial n|_S$), то поля скорос-

тей $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, соответствующие этим решениям, в каждой внутренней точке области совпадают, т. е. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Задача 4.5. В области, внешней по отношению к поверхности S , найти потенциал $\varphi(t, \mathbf{r})$ гармонического поля скоростей, исчезающий на бесконечности и принимающий значения нормальной производной на S , заданные в виде $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(t)$, где $\mathbf{w}(t)$ — произвольный вектор.

Решение. Такой потенциал определяет скорость потока несжимаемой жидкости, вызванного поступательным движением тела со скоростью $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$, если считать движение жидкости безвихревым, поверхность тела непроницаемой, а жидкость — остающейся в покое вдали от тела ($\mathbf{v}_\infty = 0$).

Из условия линейности и однородности уравнения и граничного условия относительно φ и \mathbf{W} , а также независимости решения от выбора системы координат, следует, что решение должно иметь вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{w} \cdot \Phi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ — вектор-функция, не зависящая от \mathbf{W} . Подставляя (1) в исходное уравнение и граничное условие и учитывая, что вектор $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \operatorname{div} \nabla (\mathbf{w} \cdot \Phi) = \mathbf{w} \cdot \Delta \Phi = 0, \\ \mathbf{w} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \mathbf{n} \right)_S &= \mathbf{w} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \Phi - \mathbf{n})_S = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения в силу произвольности \mathbf{W} дают

$$\Delta \Phi = 0, \quad ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \Phi - \mathbf{n})_S = 0, \quad \text{причем } \Phi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Для этой задачи в некоторых случаях может быть получено аналитическое решение. Так, в случае твердой сферы S радиуса a , центр которой в рассматриваемый момент времени находится в начале координат, и движущейся поступательно со скоростью \mathbf{W} , естественно в силу симметрии предположить $\Phi = \Phi(r)$. Тогда единственным векторным частным решением, удовлетворяющим уравнению (2) задачи, является $\Phi = \alpha \nabla(1/r)$, где α — постоянная, определяемая из граничного условия.

Таким образом

$$\varphi = \alpha \mathbf{w} \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\alpha \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

На поверхности сферы S имеем

$$\left[(\mathbf{n} \cdot \nabla) \Phi - \mathbf{n} \right]_S = \left[\alpha \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \nabla \right) \nabla \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r}}{r} \right]_S = 0 \quad \text{или} \quad -\alpha \frac{\mathbf{a}}{a^4} + 3\alpha \frac{\mathbf{a}}{a^4} - \frac{\mathbf{a}}{a} = 0,$$

откуда $\alpha = a^3/2$.

Таким образом, потенциал безвихревого течения, вызванного поступательно движущейся сферой радиуса a в несжимаемой жидкости, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{a^3(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})}{2r^3} = -\frac{1}{2}a^3w \frac{\cos\theta}{r^3},$$

где \mathbf{W} — скорость поступательного движения сферы, а θ — угол между \mathbf{r} и \mathbf{W} .

В системе координат, движущейся вместе со сферой и началом в центре сферы, этот потенциал имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}a^3 \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}}{r^3} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right), \quad (3)$$

т. е. $\mathbf{v}|_{\infty} = -\mathbf{w}$.

Об этом потенциале можно говорить как о потенциале обтекания неподвижной сферы однородным потоком, имеющим на бесконечности скорость $(-\mathbf{W})$.

В плоском случае (поступательное движение со скоростью \mathbf{W} бесконечно длинного кругового цилиндра радиуса a в плоскости его поперечного сечения S), повторяя рассуждения для пространственного потока, приходим к задаче (2) в плоскости потока (x_1, x_2) .

Решение для круга, в соответствии с фундаментальным решением $\ln r$ двумерного уравнения Лапласа ($\mathbf{r} = \mathbf{i}_1x_1 + \mathbf{i}_2x_2$), имеет вид

$$\Phi = \beta \nabla \ln r, \quad \varphi = \frac{\beta \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}}{r^2}.$$

Определяя постоянную β из граничного условия

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \Phi|_S = \beta \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \nabla \right) \nabla \ln r|_S = \frac{\mathbf{r}}{r}|_S,$$

получаем $\beta = -a^2$, так что $\varphi = -\frac{a^2}{r^2}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{r})$.

Потенциал двумерного безвихревого движения несжимаемой жидкости, вызванного равномерно движущейся непроницаемой окружностью со скоростью \mathbf{W} , имеет вид (в системе координат, связанной с окружностью и началом в ее центре)

$$\varphi = -\mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Если вокруг окружности, нарушающей связность области, имеется циркуляция Γ (поле циклическое), то потенциал потока у такой окружности, движущейся со скоростью \mathbf{W} , имеет вид

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \frac{a^2}{r^2},$$

где θ — полярный угол между \mathbf{r} и \mathbf{W} . Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет граничному условию, поскольку $\mathbf{n} \cdot \nabla \theta|_S = 0$.

Задача 4.6. Показать, что величина завихренности любой жидкой частицы ($\mathbf{\Omega} \equiv \text{rot } \mathbf{v}$) в случае двумерного течения баротропной несжимаемой ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) невязкой жидкостью в поле потенциальных массовых сил не меняется с течением времени, т. е. $d\mathbf{\Omega}/dt = 0$.

Решение. Уравнение движения такой среды имеет вид (см. § 14)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla \left(\mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{v^2}{2} \right), \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0,$$

так как: а) для баротропной среды ($p = p(\rho)$) существует функция $\mathcal{P}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} dp/\rho$, так что $\nabla p/\rho = \nabla \mathcal{P}(\rho)$, б) $\mathbf{f} = -\nabla \Pi$ для потенциальных массовых сил, в) $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \nabla v^2/2$. Беря операцию rot от обеих частей (1), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}),$$

или

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2)$$

Уравнение (2), в частности, означает, что вихревые трубки обладают свойством сохранения, т. е. движутся вместе с жидкостью и не меняют своей интенсивности (см. § 10).

В случае двумерного потока

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right),$$

так что единственной, отличной от нуля, является компонента вихря скорости, перпендикулярная плоскости потока. Поэтому вдоль $\mathbf{\Omega}$ поле скоростей не меняется, и вследствие этого правая часть уравнения (2) равна нулю; таким образом,

$$d\mathbf{\Omega}/dt = 0.$$

Другим видом двумерного течения служит осесимметричный поток без «закрутки», т. е. без азимутального течения, когда вектор вихря $\mathbf{\Omega}$ в любой точке потока M перпендикулярен к плоскости (S), содержащей эту точку и ось симметрии (z) (рис. 27).

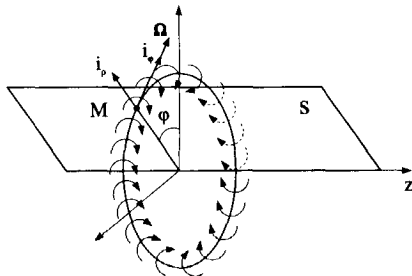


Рис. 27

Тогда в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) с ортами $(\mathbf{i}_\rho, \mathbf{i}_\varphi, \mathbf{i}_z)$ имеем $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{i}_\varphi$, так что вихревыми линиями являются окружности с центрами на оси симметрии, а вихревые трубки (нити) образуют вихревые кольца. В этом случае получаем

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} \mathbf{i}_\varphi;$$

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \Omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{i}_\rho v_\rho) = \frac{\Omega v_\rho}{\rho} \frac{\partial \mathbf{i}_\rho}{\partial \varphi} = \Omega \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \mathbf{i}_\varphi.$$

Таким образом, для кругового вихря отсюда имеем

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

Интегрируя, получаем $(\Omega / \rho) = \text{const}$. Если эта постоянная одинакова для всех частиц потока, то в нем, следовательно, величина завихренности пропорциональна радиусу вихревого кольца (расстоянию, на которое частица удалена от оси симметрии).

Задача 4.7. Условие Громеки¹. Найти условие, которому должно удовлетворять векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, чтобы через любую точку пространства можно было провести поверхность $F(x, y, z) = \text{const}$, ортогональную к векторным линиям поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Решение. Пусть $F(x, y, z) = \text{const}$ — семейство поверхностей, от которого потребуем ортогональность к любой векторной линии поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, пересекающей это семейство, т. е.

$$\mathbf{A} = \lambda \nabla F, \tag{1}$$

где $\lambda = \lambda(x, y, z)$ — произвольная непрерывная скалярная функция.

Взяв операцию rot от обеих частей (1), получим

$$\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \lambda \nabla F = \nabla \lambda \times \nabla F = \frac{1}{\lambda} (\nabla \lambda \times \mathbf{A}).$$

Отсюда имеем искомое условие

$$\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = 0. \tag{2}$$

Этому условию удовлетворяет вихревое поле \mathbf{A} , у которого в каждой точке вихревые линии $\text{rot } \mathbf{A}$ перпендикулярны векторным линиям поля.

Условие (2) в применении к полю скорости движения жидкости впервые (в 1881 г.) было получено И. С. Громекой.

Задача 4.8. Показать, что для осесимметричного движения несжимаемой жидкости интегрирование системы уравнений линий тока

¹ Громека Ипполит Степанович (1851–1889) — русский физик, профессор Казанского университета. Фундаментальные труды по теории вихревых движений несжимаемой жидкости, по теории капиллярности. Сформулировал условие, которому должно удовлетворять вихревое поле, для того, чтобы существовали поверхности, ортогональные линиям тока. Рассмотрел вихревые движения на сфере, винтовое движение жидкости.

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (1)$$

приводится к квадратурам.

Решение. Из (1) систему дифференциальных уравнений линий тока можно записать в виде

$$\begin{aligned} v_x dy - v_y dx &= 0, \\ v_x dz - v_z dx &= 0, \\ v_y dz - v_z dy &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть осью симметрии движения является ось (z), так что $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\rho, z)$, причем $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Выберем систему цилиндрических координат (z, ρ, φ) так, что плоскость изменения ρ и z является меридиональной плоскостью потока, которая проходит через ось z , а ее положение в пространстве определяется углом φ .

В этой системе координат

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2, \quad v_\rho^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad v_\varphi = 0, \\ v_x &= v_\rho \frac{x}{\rho}, \quad v_y = v_\rho \frac{y}{\rho}. \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности в этой системе выглядит так:

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} (v_\rho \rho) = 0. \quad (3)$$

Подставляя v_x и v_y в первое из уравнений (2), имеем

$$x dy - y dx = 0. \quad (4)$$

Отсюда, между прочим, имеем $x/y = \text{const}$ — уравнение меридиальной плоскости, в которой находится рассматриваемая точка M и которая содержит линии тока, определяемые системой (2).

Вместе с уравнением

$$x dx + y dy = \rho d\rho,$$

получаемым из $x^2 + y^2 = \rho^2$, уравнение (4) дает

$$dx = \frac{x}{\rho} d\rho.$$

Рассмотрим, например (система (2) является системой двух независимых уравнений), второе уравнение системы (2), подставив в него найденное значение dx и $v_x = v_\rho x/\rho$:

$$v_x dz - v_z dx = v_\rho \frac{x}{\rho} dz - v_z \frac{x}{\rho} d\rho = 0,$$

так что отсюда имеем

$$v_p \rho dz - v_z \rho d\rho = 0. \quad (5)$$

Теперь заметим, что уравнение неразрывности (3)

$$\frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho) = -\frac{\partial}{\partial \rho} (v_p \rho)$$

является необходимым и достаточным условием интегрируемости уравнения (5), так что левая часть (5) представляет дифференциал некоторой функции $\psi = \psi(\rho, z)$ (функции тока). Таким образом, имеем

$$v_z \rho d\rho - v_p \rho dz = d\psi,$$

причем (ср. пример 3 соленоидального поля)

$$v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad v_p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Упражнения

1. Показать, что если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру в двумерном потоке несжимаемой жидкости равна нулю, то функция тока является гармонической функцией.

2. Для двумерных потоков с потенциалами скорости

$$1) \varphi(x, y) = \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}, \quad 2) \varphi(x, y) = a(x^2 - y^2), \quad 3) \varphi(x, y) = Ax + \frac{Bx}{x^2 + y^2}$$

найти функции тока.

3. Найти скорость и вихрь скорости течения с функцией тока $\psi = cr^2\theta$, где r, θ — полярные координаты, $c = \text{const}$.

4. Доказать, что поле скоростей

$$\mathbf{v} = \left(-2x_1 x_2 x_3 / r^4, (x_1^2 - x_2^2) \frac{x_3}{r^4}, \frac{x_2}{r^2} \right),$$

где $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, является соленоидальным и безвихревым. Найти его векторный и скалярный потенциалы.

5. Показать, что функция тока и потенциал скорости связаны соотношениями

$$\varphi(x, y) - \varphi(a, b) = \int_a^x \frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \int_b^y \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=a} dy; \quad \psi(x, y) - \psi(a, b) = -\int_a^x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \int_b^y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=a} dy.$$

6. Показать, что семейство линий тока ($\psi = \text{const}$) в каждой точке ортогонально семейству линий равных потенциалов скорости ($\varphi = \text{const}$).

7. Показать, что ни в одной внутренней точке односвязного объема потенциал скорости безвихревого потока несжимаемой жидкости не может иметь ни максимума, ни минимума, а величина скорости — не может иметь максимума.

Указание. Воспользоваться свойством 2 гармонической функции.

§ 5. Определение векторного поля по значению его вихря и дивергенции

Нахождение вихря $\text{rot } \mathbf{A}$ и дивергенции $\text{div } \mathbf{A}$ заданного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ сводится к простому дифференцированию компонент поля. Интерес представляет обратная задача: восстановить поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ по заданному векторному полю $\text{rot } \mathbf{A}$ и скалярному $\text{div } \mathbf{A}$.

В тех случаях, когда эти два поля заданы или известны из условий движения жидкости, полезно знать, в какой мере они определяют само поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Теорема Стокса — Гельмгольца

Ответ на вопрос, как единственным образом восстановить поле \mathbf{A} по его дивергенции и вихрю, был дан Стоксом, а в более полном изложении — несколько лет спустя Гельмгольцем, в теореме, получившей их имя. Эту теорему иногда называют фундаментальной теоремой векторного анализа. Она утверждает:

Любое дифференцируемое векторное поле, заданное во всем бесконечном пространстве и обращающееся вместе со своими первыми производными в нуль на бесконечности, может быть единственным образом представлено в виде суммы безвихревой части $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ и соленоидальной части $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$, т. е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \quad (1.102)$$

где $\text{rot } \mathbf{A}_1 = 0$ и $\text{div } \mathbf{A}_2 = 0$.

Доказательство состоит в построении векторов \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 и в установлении единственности представления (1.102).

Для вычисления потенциального вектора \mathbf{A}_1 заметим, что в силу $\text{rot } \mathbf{A}_1 = 0$ и $\text{div } \mathbf{A}_1 = \text{div } \mathbf{A}$ имеем $\mathbf{A}_1 = \nabla \varphi$ и $\text{div } \mathbf{A}_1 = \text{div } \nabla \varphi = \Delta \varphi = \text{div } \mathbf{A}$. Из последнего соотношения, которое можно рассматривать как уравнение Пуассона для φ , согласно (1.101) получаем выражение для φ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Таким образом, вектор \mathbf{A}_1 равен

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \nabla \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_r \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.103)$$

где индекс « r » у ∇ означает дифференцирование по координатам x^1, x^2, x^3 ; ($\mathbf{r} = \mathbf{a}_k x^k$; $\mathbf{r}' = \mathbf{a}_k x'^k$; $dV' = \sqrt{g'} dx'^1 dx'^2 dx'^3$; $g' = \det \|g'_{ik}\|$).

Соленоидальный вектор \mathbf{A}_2 вычисляем на основании соотношений $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, где \mathbf{B} — векторный потенциал, который в соответствии со свойствами соленоидального поля тоже можно считать соленоидальным, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Тогда имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_2 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B}.$$

Из этого уравнения Пуассона относительно вектора \mathbf{B} , согласно формуле (1.101), примененной к каждой из компонент \mathbf{B} в декартовой прямоугольной системе координат, получаем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_r \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.104)$$

где индекс « r » у rot означает дифференцирование по координатам x^1, x^2, x^3 .

Таким образом, окончательное представление векторного поля \mathbf{A} в виде суммы потенциального и соленоидального слагаемых имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_r \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_r \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.105)$$

Формула дает также и ответ на задачу восстановления поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ по его дивергенции и вихрю: эти величины входят в интегралы, распространенные на всю область определения непрерывного поля \mathbf{A} и его производных.

Докажем единственность представления (1.102).

Допустим, что наряду с (1.102) существует другое представление $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1^* + \mathbf{A}_2^*$, причем $\text{rot } \mathbf{A}_1^* = 0$ и $\text{div } \mathbf{A}_2^* = 0$. Тогда, рассматривая вектор $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1^*$, устанавливаем: $\text{rot } (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1^*) = \text{rot } \mathbf{A}_1 - \text{rot } \mathbf{A}_1^* = 0$; $\text{div } (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1^*) = \text{div } \mathbf{A}_1 - \text{div } \mathbf{A}_1^* = \text{div } \mathbf{A} - \text{div } \mathbf{A} = 0$.

Таким образом, $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1^*$ — гармонический вектор, который в силу условия теоремы исчезает на бесконечности¹. Тогда по свойству гармонических полей этот вектор равен нулю, т. е. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^*$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2^*$ — тоже гармонический вектор и потому $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^*$. Единственность представления (1.102) доказана.

Задача определения векторного поля по значениям его вихря и дивергенции может быть решена и для конечной области. Ее решение в постановке: в области V с границей S найти вектор, удовлетворяющий системе уравнений

$$\text{div } \mathbf{A} = \theta(\mathbf{r}), \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_S = f(\mathbf{r}_s) \quad (1.106)$$

при условиях, следующих из (1.106), а именно $\int_S f(\mathbf{r}_s) dS = \int_V \theta(\mathbf{r}) dV$; $\text{div } \mathbf{\Omega} = 0$ и непрерывности функций θ и $\mathbf{\Omega}$ вместе с их частными производными, приведено в монографии [7]. Это решение имеет вид $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla(\varphi + \psi) + \text{rot } \mathbf{B}$, где

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\theta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S H(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) F(\mathbf{r}'_s) dS,$$

$$F(\mathbf{r}_s) = f(\mathbf{r}_s) - b_n(\mathbf{r}_s), \quad b_n(\mathbf{r}_s) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_S, \quad \mathbf{b} = \nabla\varphi + \text{rot } \mathbf{B},$$

$$H(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) = h(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_s|} - \text{функция, удовлетворяющая условиям: } \partial H / \partial n|_S = 4\pi/S;$$

$\int_S H(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r}) dS = 0$, где S — величина площади всей поверхности S , функция $h(\mathbf{r}'_s, \mathbf{r})$ — гармоническая, удовлетворяющая на поверхности S условию

$$\partial h / \partial n|_S = 4\pi/S - \partial(1/r) / \partial n|_S.$$

Единственность решения задачи (1.106) следует из первой формулы Грина. Пусть \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 — два различных решения. Отсюда для $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ в силу $\text{div } \mathbf{A}^* = \text{rot } \mathbf{A}^* = 0$ имеем

$$\mathbf{A}^* = \nabla\Phi; \quad \Delta\Phi = 0; \quad \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{n}|_S = 0.$$

Но тогда из (1.83) для случая $\varphi = \psi = \Phi$ получаем $\int_V (\nabla\Phi)^2 dV = 0$, откуда и следует, что во всех внутренних точках области V : $\nabla\Phi = \mathbf{A}^* = 0$, т. е. $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$.

¹ Можно показать, что из условия исчезновения \mathbf{A} следует, что \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 в отдельности исчезают на бесконечности.

Из теоремы Стокса — Гельмгольца следуют утверждения:

1) В неограниченном пространстве любое непрерывное поле \mathbf{A} тождественно равно нулю, если только в каждой точке $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, а на бесконечности само поле исчезает ($\mathbf{A}|_{\infty} = 0$).

2) В ограниченной области непрерывное поле \mathbf{A} однозначно определяется значением $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ и $\operatorname{div} \mathbf{A}$ в каждой внутренней точке и значением его нормальной компоненты $A_n \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ на границе области.

Эти выводы часто используются в гидромеханике.

Примеры построения векторных полей на основании теоремы Стокса — Гельмгольца

1. *Изолированные источники (стоки)*. Пусть $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ всюду, кроме малой области ΔV , окружающей некоторую точку M_0 и ограниченной поверхностью ΔS .

Предъявим определенные требования к поведению поля \mathbf{A} в окрестности выбранной точки M_0 . Интегралы в выражении (1.105) могут быть приближенно записаны в следующем виде, если учесть, что в малой области ΔV величина $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{R}| \equiv R$ меняется мало (рис. 28):

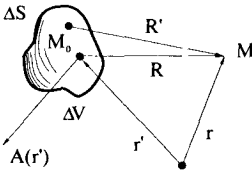


Рис. 28

$$\int_{\Delta V} \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{\bar{R}} \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{\bar{R}} \int_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS',$$

$$\int_{\Delta V} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{\bar{R}} \int_{\Delta V} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{\bar{R}} \int_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS',$$

где \bar{R} — среднее по области ΔV значение R , причем $\bar{R} \rightarrow R$ при $\Delta V \rightarrow 0$, $\Delta S \rightarrow 0$.

При стягивании ΔV к точке M_0 отсюда имеем (см. рис. 28):

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{R} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{R} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS',$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{R} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{R} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS', \quad (1.107)$$

где R — расстояние между точками M_0 и M .

Предположим, что скалярное поле $\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \theta(M)$ в окрестности точки M_0 таково, что $\theta(M)|_{M \rightarrow M_0} \rightarrow \infty$, но существует предел при стягивании ΔV к точке M_0 :

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \theta(\mathbf{r}') dV' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS' = Q. \quad (1.108)$$

В то же время векторное поле $\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \mathbf{\Omega}(M)$ в окрестности той же точки M_0 таково, что подобный (1.108) предел равен нулю, а именно:

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЗНАЧЕНИЮ ЕГО ВИХРЯ И ДИВЕРГЕНЦИИ

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}') dV' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS' = 0. \quad (1.109)$$

Геометрически это означает такое поведение поля \mathbf{A} в окрестности особой точки M_0 , когда несмотря на то, что вектор \mathbf{A} и его производные в самой точке могут быть бесконечно большими, поток \mathbf{A} через стягивающуюся к особой точке замкнутую поверхность ΔS остается постоянным, а интеграл по поверхности ΔS от касательной компоненты поля $\mathbf{A}_\tau \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{A}$ стремится к нулю. В этом суть ограничений на поведение рассматриваемого поля \mathbf{A} в окрестности особой точки M_0 .

Таким образом, переходя к пределу в соответствующих интегралах в (1.105), учитывая требование (1.108), (1.109) и то, что всюду, кроме точки M_0 , $\text{rot } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = 0$, получаем:

$$\mathbf{A}(M) = -\frac{1}{4\pi} \nabla_R \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{R} \int_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS' = -\frac{1}{4\pi} \nabla_R \frac{Q}{R} = -\frac{Q}{4\pi} \nabla_R \frac{1}{R} = \frac{Q\mathbf{R}}{4\pi R^3}, \quad (1.110)$$

где дифференцирование по компонентам r' заменено на дифференцирование по компонентам вектора \mathbf{R} , проведенного из точки M_0 в точку M (см. рис. 28). Таким образом, векторные линии полученного поля (1.110) представляют собой прямые, исходящие из точки M_0 , а направление векторов поля \mathbf{A} определяется знаком Q : от точки M_0 в случае $Q > 0$, к точке M_0 при $Q < 0$ (рис. 29).

Полученное поле (1.110) называется полем *изолированного источника* ($Q > 0$) или *стока* ($Q < 0$). Величина $|Q|$ носит название мощности (производительности) источника или стока.

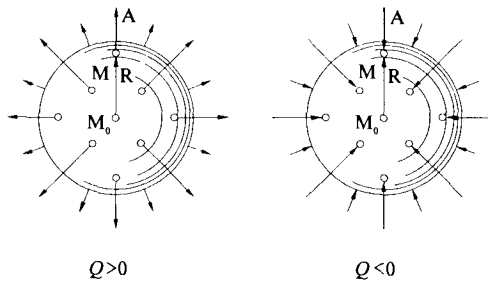


Рис. 29

Поле источника (стока) является примером потенциального поля с изолированной особенностью. Его потенциал, как это следует из (1.110), равен

$$\varphi(M) = -\frac{Q}{4\pi R}.$$

Как потенциал, так и сам вектор поля определены всюду, кроме точки M_0 , где $R = 0$. В этой точке они обращаются в бесконечность. Радиус-вектор \mathbf{R} проводится из точки источника (стока) в ту точку, где определяется значение поля или потенциала.

Заметим, что поле (1.110) не только *потенциально*, но и *соленоидально* вне точки M_0 , так что вне M_0 поле \mathbf{A} гармонично.

Если в точках $M_1, M_2 \dots M_n$, отстоящих на $R_1, R_2 \dots R_n$ от точки M , расположены источники мощностью соответственно $Q_1, Q_2 \dots Q_n$ (рис. 30), то суммарное поле от этих источников может быть написано, в силу линейности уравнения Пуассона, в виде суммы полей от источников, т. е.

$$\mathbf{A}(M) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \nabla_{R_i} \frac{Q_i}{R_i} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i \mathbf{R}_i}{R_i^3}. \quad (1.111)$$

Аналогично потенциал суммарного поля равен

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{R_i}. \quad (1.112)$$

В таком поле $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ всюду, кроме точек M_i , где дивергенция становится бесконечно большой. Однако поток поля \mathbf{A} через поверхность S , охватывающую все источники, равен сумме их мощностей, т. е. (см. рис. 30)

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (1.113)$$

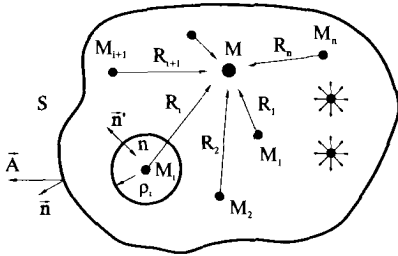


Рис. 30

Это следует из теоремы Гаусса — Остроградского, примененной к области V внутри S , из которой удалены маленькие шарики (см. рис. 30), окружающие источники в точках M_i . Поток поля через поверхность каждого такого шарика радиуса ρ_i равен (\mathbf{n}' — внешняя нормаль)

$$\int_{s_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}' dS = \int_{s_i} \frac{Q_i}{4\pi} \frac{\rho_i}{\rho_i^3} \cdot \frac{\rho_i}{\rho_i} dS = Q_i. \quad (1.114)$$

В то же время в области ΔV (без шариков) всюду $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Поэтому из теоремы Гаусса — Остроградского следует

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = 0 = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где в каждом шарике берется нормаль внутренняя (внешняя для ΔV). Отсюда в силу (1.114) и $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$ получаем формулу (1.113).

Если поле $\mathbf{A} = \mathbf{v}$, т. е. представляет собой поле скорости в сплошной среде, то величина Q равна объему жидкости, истекающей из источника в единицу времени.

Если поле $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, т. е. представляет напряженность электрического поля от точечного заряда, то Q — величина этого заряда.

2. Источники, непрерывно распределенные по поверхности. Исходя из выражения (1.112), можно построить потенциальные поля источников, распределенных по поверхностям, по линиям. Наиболее простое физическое содержание этих примеров — поле от электрических зарядов, распределенных по поверхности проводников. Поверхность испаряющейся жидкости можно рассматривать как поверхность с распределением источников массы.

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЗНАЧЕНИЮ ЕГО ВИХРЯ И ДИВЕРГЕНЦИИ

Пусть по поверхности σ распределены источники (поверхностные источники) с поверхностной плотностью q , зависящей, вообще говоря, от точек поверхности, так что мощность источников элемента поверхности равна $q d\sigma$. Тогда значение в точке M потенциала поля источников, распределенных по поверхности σ , в соответствии с выражением (1.110) естественно определить в виде интеграла по поверхности (рис.31)

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{q' d\sigma}{R}. \quad (1.115)$$

При этом само поле имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{q' \mathbf{R}}{R^3} d\sigma. \quad (1.116)$$

Здесь $q' \equiv q(\mathbf{r}')$, а $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ — радиус-вектор, проведенный из текущей точки M' поверхности σ в точку M . Функция (1.115) — гармоническая вне поверхности, поскольку $\Delta_r \varphi =$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta_r \left(\frac{1}{R} \right) q' d\sigma = 0. \text{ Она носит название } \textit{потенциала простого слоя}.$$

Обращаясь к представлению функции (1.98), мы видим, что третье слагаемое в правой части является потенциалом простого слоя с плотностью распределения, равной значению (со знаком минус) нормальной производной этой функции на поверхности.

Равенства (1.115) и (1.116) следуют из (1.111) и выражения для потенциала этого поля \mathbf{A} , если представить $Q = q d\sigma$ и расположить источники на поверхности σ .

Нормальные компоненты поля от простого слоя на поверхности σ терпят разрыв, равный плотности поверхностных источников.

Действительно, выделим у элемента $d\sigma$ объем $dV = dV_1 + dV_2$ в виде цилиндра с образующими, направленными по нормали \mathbf{n} к поверхности, причем часть цилиндра dV_1 лежит по одну сторону поверхности, а часть dV_2 — по другую сторону (см. рис. 31); на доньшках цилиндра значения поля равны A_1 и A_2 . В силу того, что вне поверхности $d\sigma$ источников нет, сумма мощностей всех источников внутри dV равна $q' d\sigma$. С другой стороны, поток поля через поверхность, ограничивающую область dV , равен

$$\int_{d\sigma_1} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{n} dS + \int_{d\sigma_8} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{d\sigma_2} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{n} dS,$$

где $d\sigma_1, d\sigma_2$ — площади доньшек цилиндра, $d\sigma_8$ — его боковой поверхности.

Стягивая объем dV к поверхности σ так, что $d\sigma_1 \rightarrow d\sigma_2 \rightarrow d\sigma, d\sigma_8 \rightarrow 0$ и $\mathbf{n}_2 \rightarrow (-\mathbf{n}_1) \equiv -\mathbf{n}$, в силу (1.113) получаем

$$A_{1n} d\sigma - A_{2n} d\sigma = q' d\sigma,$$

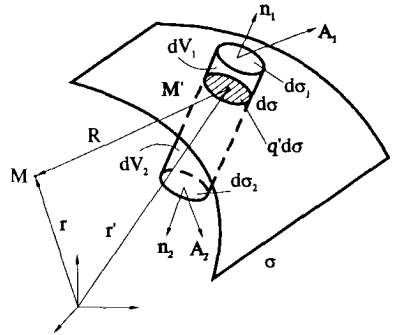


Рис. 31

или

$$q' = A_{1n} - A_{2n} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2), \quad (1.117)$$

что и доказывает утверждение о разрыве на σ нормальных компонент поля (1.116).

Что касается самого потенциала φ простого слоя (1.115), то можно показать, что он непрерывен на поверхности σ , т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$, так что тангенциальные компоненты поля также непрерывны $\mathbf{A}_{1\tau} = \mathbf{A}_{2\tau}$.

3. *Двумерное поле изолированного источника (источник в плоскости)*. В случае двумерного поля, т. е. поля вектора \mathbf{A} , параллельного какой-то плоскости, например (x_1, x_2) , и не зависящего от x_3 , потенциал и вектор поля можно получить из равномерного распределения источников по прямой L , параллельной оси (x_3) и проходящей через точку M_0 плоскости (x_1, x_2) (рис. 32).

Если линейная плотность источников постоянна и равна q , то из (1.116) имеем

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{q\mathbf{r}}{r^3} dL = \frac{q}{4\pi} \int_L \frac{\mathbf{r}}{r^3} dL.$$

Рассматривая в качестве L бесконечную прямую, мы из предыдущего выражения и получим плоское поле. Переходя к переменной x_3 , имеем, обозначая через $\mathbf{R} = \mathbf{i}_1x_1 + \mathbf{i}_2x_2 = \mathbf{r} + \mathbf{i}_3x_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(M) &= \frac{q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{R} - x_3\mathbf{i}_3}{(R^2 + x_3^2)^{3/2}} dx_3 = \frac{q\mathbf{R}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{(R^2 + x_3^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{q\mathbf{R}}{4\pi R^2} \left[\frac{x_3}{\sqrt{R^2 + x_3^2}} \right]_{x_3=-\infty}^{x_3=\infty} = \frac{q\mathbf{R}}{2\pi R^2}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Вектор $\mathbf{A}(M)$ определен во всех точках плоскости (x_1, x_2) , кроме точки M_0 , и всюду в них он не только потенциален и его потенциал φ равен

$$\varphi(M) = -\frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{R}, \quad (1.119)$$

но и образует двумерное соленоидальное поле, ибо $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Заметим, что для двумерного поля условия теоремы Стокса — Гельмгольца сохраняются, ибо здесь в бесконечно удаленных точках плоскости (x_1, x_2) исчезает и сам вектор поля, и его частные производные.

4. *Поле изолированного диполя (дублета)*. Этот вид потенциального поля с особенностью образуется как предельный случай полей стока и источника равной мощности, когда расстояние между ними уменьшается до нуля, а величина мощности бесконечно растет так, что произведение мощности на расстояние (*момент диполя*) остается постоянным.

В соответствии с этим определением рассмотрим вначале суммарный потенциал $\hat{\varphi}$ поля от источника мощностью $+Q$, находящегося в точке M^+ (рис. 33), и от стока мощностью $-Q$ в точке M^- .

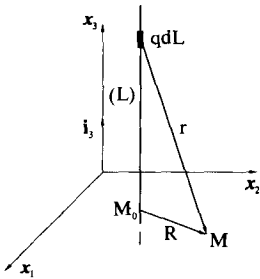


Рис. 32

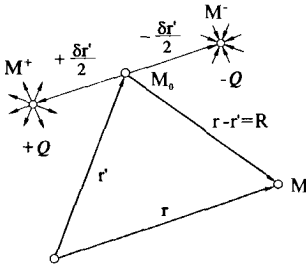


Рис. 33

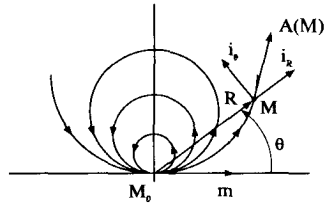


Рис. 34

Имеем

$$\hat{\varphi} = -\frac{Q}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' - \frac{\delta \mathbf{r}'}{2} \right|} - \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' + \frac{\delta \mathbf{r}'}{2} \right|} \right\}.$$

Предел этого выражения при $Q \rightarrow \infty$, $|\delta \mathbf{r}'| \rightarrow 0$ и $Q\delta \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{m}$ равен

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow \infty, \delta \mathbf{r}' \rightarrow 0} \hat{\varphi} &= -\lim_{Q \rightarrow \infty, \delta \mathbf{r}' \rightarrow 0} \frac{Q\delta \mathbf{r}'}{4\pi} \cdot \frac{\delta \mathbf{r}'}{|\delta \mathbf{r}'|^2} \left\{ \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' - \frac{\delta \mathbf{r}'}{2} \right|} - \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' + \frac{\delta \mathbf{r}'}{2} \right|} \right\} = \\ &= \frac{-\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \lim_{\delta \mathbf{r}' \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{r}'}{|\delta \mathbf{r}'|^2} \left\{ \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' - \frac{\delta \mathbf{r}'}{2} \right|} - \frac{1}{\left| \mathbf{r} - \mathbf{r}' + \frac{\delta \mathbf{r}'}{2} \right|} \right\} = \\ &= \frac{-\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \nabla_R \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

По определению этот предел и есть потенциал диполя, расположенного в точке M_0 , так что

$$\varphi(M) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi} \cdot \nabla_R \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3}. \quad (1.120)$$

Вектор поля диполя равен

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \cdot \nabla_R \left(\mathbf{m} \cdot \nabla_R \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{R^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} \right). \quad (1.121)$$

Это поле во всех точках, кроме M_0 , гармоническое, ибо в них $\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$.

Поле обладает осевой симметрией: его азимутальная компонента равна нулю. Вычисляя компоненты поля диполя в сферической системе координат, получаем

$$A_R = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_R = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{2\pi R^4} = \frac{m}{2\pi R^3} \cos \theta,$$

$$A_\theta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_\theta = -\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{i}_\theta}{4\pi R^3} = -\frac{m}{4\pi R^3} \sin \theta,$$

$$A_\varphi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_\varphi = 0.$$

Векторные линии этого поля в меридиональной плоскости легко могут быть найдены интегрированием уравнения $dR/A_R = R d\theta/A_\theta$, или $dR/\cos \theta = 2R d\theta/\sin \theta$. Отсюда имеем $R(\theta) = \text{const} \cdot \sin^2 \theta$. Их вид в верхней части плоскости изображен на рис. 34.

Поверхности тока поля (1.121) образуются, например, вращением кривых $R(\theta)$ вокруг оси диполя.

Поток поля диполя через любую замкнутую поверхность, окружающую диполь, равен нулю. Действительно, поток векторного поля (1.121) через сферу радиуса R_0 равен

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(-\frac{\mathbf{m}}{R_0^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}_0)\mathbf{R}_0}{R_0^5} \right) \cdot \frac{\mathbf{R}_0}{R_0} dS = \\ &= \frac{m}{R_0} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0, \end{aligned}$$

а через любую поверхность, охватывающую сферу, этот поток будет иметь то же значение, ибо между поверхностями $\text{div} \mathbf{A} = 0$.

Поле \mathbf{A} от n диполей, расположенных в точках $M_1, M_2 \dots M_n$, получается суммированием индивидуальных полей, т. е.

$$\mathbf{A}(M) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\mathbf{m}_i}{R_i^3} + \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{R}_i)\mathbf{R}_i}{R_i^5} \right), \quad (1.122)$$

и, соответственно, потенциал этого поля

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{R}_i}{R_i^3}. \quad (1.123)$$

Отметим, что поле изолированного диполя убывает на бесконечности быстрее, чем поле источника (стока): поле диполя — как R^{-3} , а поле источника — как R^{-2} (см. (1.121) и (1.110)).

5. Поле диполей, непрерывно распределенных по поверхности. В приложениях особое значение имеет поле распределенных диполей, у которых момент направлен по нормали к поверхности, т. е. $\mathbf{m} = m\mathbf{n}$. Для этого случая, если по поверхности σ распределены диполи с плотностью ν , так что $m = \nu d\sigma$, то потенциал поля от такой поверхности в соответствии с формулой (1.120) имеет вид

$$\varphi(M) = \varphi(\mathbf{R}) = \int_\sigma \nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{n}'}{4\pi} \cdot \nabla_R \frac{1}{R} d\sigma' =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \nu(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma' = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} d\sigma'. \quad (1.124)$$

Эта функция, как и (1.115), — гармоническая всюду, кроме точек поверхности σ . Она носит название *потенциала двойного слоя*.

Обращаясь к выражению (1.98), мы видим, что второе слагаемое справа представляет собой потенциал двойного слоя с плотностью распределения, равной значению функции в точках поверхности.

Поле, определяемое потенциалом двойного слоя, имеет выражение

$$\mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\nu(\mathbf{r}')}{R^3} \left(-\mathbf{n}' + 3 \frac{(\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R}}{R^2} \right) d\sigma', \quad (1.125)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из текущей точки поверхности σ в точку M , в которой определяется поле (рис. 35).

Потенциал двойного слоя терпит на поверхности σ разрыв, равный плотности поверхностных диполей (моменты которых ориентированы по нормали к поверхности).

Этот факт можно доказать, если воспользоваться одним из представлений потенциала (1.124):

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \nu(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} d\sigma' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \nu(\mathbf{r}') \frac{\cos \theta}{R^2} d\sigma'. \end{aligned}$$

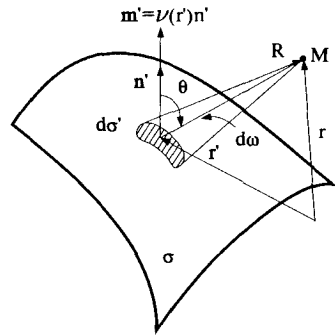


Рис. 35

Поскольку θ — угол между нормалью и радиус-вектором \mathbf{R} , то величина площадки, перпендикулярной \mathbf{R} , равна $d\sigma' \cos \theta$; тогда $d\sigma' \cos \theta / R^2 = d\omega$ — элемент телесного угла, под которым площадка $d\sigma'$ видна из точки M (см. рис. 35).

Поэтому

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \nu d\omega. \quad (1.126)$$

Возьмем две точки M_1 и M_2 , расположенные по обе стороны от поверхности σ (рис. 36).

Если точка M_1 приближается к окрестности $d\sigma$ точки M_0 , то из (1.126) (при выделении из области окрестности $d\sigma$ у точки M_0) следует:

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \nu(M_0) \cdot 2\pi - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma - d\sigma} \nu d\omega,$$

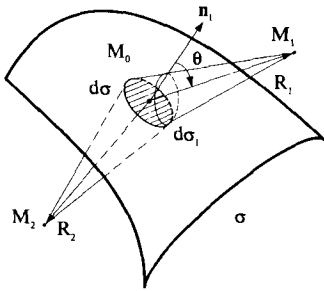


Рис. 36

а предел при $M_1 \rightarrow M_0$ и $d\sigma \rightarrow 0$ равен

$$\lim_{M_1 \rightarrow M_0} \varphi(M_1) \equiv \varphi_1 = -\frac{1}{2} \nu(M_0) - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \nu d\omega,$$

где φ_1 — значение потенциала в точке M_0 на стороне поверхности, обращенной к M_1 .

Аналогично, когда M_2 приближается к M_0 , получим

$$\lim_{M_2 \rightarrow M_0} \varphi(M_2) \equiv \varphi_2 = \frac{1}{2} \nu(M_0) - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \nu d\omega.$$

Здесь знак (+) в первом слагаемом связан с тем, что при приближении к точке M_0 с другой стороны поверхности телесный угол, под которым виден элемент $d\sigma$, стремится не к $(+2\pi)$, а к (-2π) . Таким образом, в любой точке M_0 поверхности с непрерывно распределенными диполями разрыв потенциала равен

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \nu. \tag{1.127}$$

Помимо этого, сумма $\varphi_2 + \varphi_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \nu d\omega = 2\varphi(M_0)$ равна удвоенному значению потенциала на самой поверхности σ . Поскольку $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то касательная компонента поля также разрывна, т. е. $\mathbf{A}_{t_1} \neq \mathbf{A}_{t_2}$.

6. Двумерное поле изолированного диполя. Поступая точно так же, как при определении плоского поля источника (см. пример 3), получаем из (1.120), где расстояние от точки на бесконечной прямой, параллельной оси x_3 , обозначено через r , причем $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{i}_3 x_3 = (\mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2) - \mathbf{i}_3 x_3$:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^3} dx_3 = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{(R^2 + x_3^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}}{2\pi R^2}. \tag{1.128}$$

Следовательно, поле плоского диполя имеет вид ($\mathbf{R} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2$)

$$\mathbf{A}(M) = -\frac{1}{2\pi} \nabla \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}}{R^2} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{R^2} + \frac{2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^4} \right), \tag{1.129}$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор в плоскости (x_1, x_2) , проведенный из точки M_0 , где расположен диполь, в точку M .

7. Поле вихревой нити. Вихревая нить — это вихревая трубка с элементарным поперечным сечением. Вихревые нити, как частный случай векторных трубок соленоидального поля (см. § 4), не могут заканчиваться внутри поля. Поэтому будем рассматривать поле замкнутой вихревой нити. Кроме этого, вихревая нить в отличие от обычных векторных линий поля вихря $\mathbf{\Omega}$ обладает еще одним важным свойством: несмотря на элементарное поперечное сечение, т. е., строго говоря, бесконечно малую его

площадь, эта трубка, суживаясь до нуля, сохраняет свою постоянную интенсивность $i = \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{\sigma}$. Поэтому вихревую нить следует рассматривать как линию особенностей поля, подобно тому, как изолированные источники и диполи являются особыми точками. Это свойство вихревой нити позволяет моделировать при помощи нее такие явления, как торнадо, водовороты и др. вихреобразования с весьма большой (теоретически — бесконечной) завихренностью $\mathbf{\Omega}$ на очень малом (теоретически — бесконечно малом) поперечном сечении.

Рассмотрим поле замкнутой вихревой нити (рис. 37)

Пусть, как и при рассмотрении поля изолированного источника (см. пример 1), поле \mathbf{A} потенциально и соленоидально ($\text{rot } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = 0$) всюду, кроме малой окрестности особенности. В нашем случае особенности сосредоточены на вихревой линии L , поэтому предположим, что в окрестности ее точек справедливы условия (1.107), где теперь $dV' = d\mathbf{\sigma} \cdot d\mathbf{r}$ — элементарный объем окрестности вихревой нити ($d\mathbf{r}'$ — линейный элемент нити, $d\mathbf{\sigma}$ — ориентированный элемент площади поперечного сечения нити).

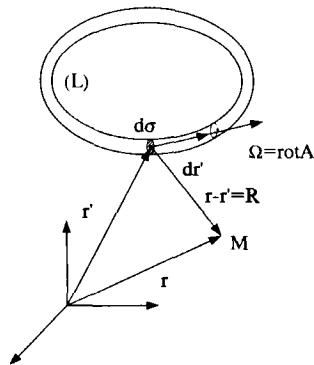


Рис. 37

В отличие от ограничений (1.108) и (1.109) на поведение поля \mathbf{A} в окрестности особенностей теперь предположим, что поле \mathbf{A} удовлетворяет условиям

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS' = 0,$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \mathbf{\Omega}(\mathbf{r}') dV' = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{\Delta S} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS' \neq 0.$$

Таким образом, предполагается, что внутри стягивающегося объема бесконечно большая интенсивность $\mathbf{\Omega}$ такова, что предел интеграла по объему конечен и не равен нулю, а поток поля через поверхность этого объема исчезает при $\Delta S \rightarrow 0$.

Тогда из формулы (1.105) имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \text{rot}_r \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1.130)$$

а так как $d\mathbf{r}'$ параллелен $\text{rot } \mathbf{A}$ и $dV' = d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{\sigma}$, то

$$\int_{\Delta V} \frac{\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int_{\Delta V} \frac{(d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{\sigma}) \text{rot } \mathbf{A}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_{\Delta V} \frac{(d\mathbf{\sigma} \cdot \text{rot } \mathbf{A}) d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Но поскольку $(d\mathbf{\sigma} \cdot \text{rot } \mathbf{A}) = \Gamma$ — интенсивность вихревой нити — не меняется вдоль нее (см. свойства соленоидального поля), то, заменяя интегрирование по окрестности нити на интегрирование вдоль нити, из (1.130) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(M) &= \frac{\Gamma}{4\pi} \operatorname{rot}_r \int_L \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \operatorname{rot}_r \left\{ \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Вводя $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, окончательно получим

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (1.132)$$

где $d\mathbf{L} (\equiv d\mathbf{r}')$ — линейный элемент вихревой нити, а \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из этого элемента в точку M .

Это поле, как и поле источника (стока), на бесконечности убывает как R^{-2} . Заметим, что поскольку $d\mathbf{A} = \Gamma d\mathbf{L} \times \mathbf{R} / (4\pi R^3)$, то элементарная часть поля $d\mathbf{A}$ от вихрей на элементе нити $d\mathbf{L}$ перпендикулярна плоскости векторов \mathbf{R} и $d\mathbf{L}$ и направлена по правилу правого винта (известный из физики закон Био¹ — Савара²: \mathbf{A} — магнитное поле вокруг проводника, по которому течет ток силой $\Gamma/4\pi$).

Другая интересная формулировка для поля вихревой нити может быть получена при помощи теоремы Стокса.

Пусть S — любая поверхность, натянутая на замкнутую нить, так что нить является ее краем (рис. 38).

Тогда, применяя к (1.131) формулу (1.86), следующую из теоремы Стокса, получим

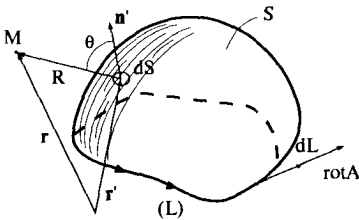


Рис. 38

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(M) &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L d\mathbf{L} \times \nabla_r \frac{1}{R} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S (\mathbf{n}' \times \nabla_r) \times \nabla_r \frac{1}{R} dS = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \left\{ \nabla_r \left(\mathbf{n}' \cdot \nabla_r \frac{1}{R} \right) - \mathbf{n}' \left(\nabla_r \cdot \nabla_r \frac{1}{R} \right) \right\} dS = \\ &= -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla_r \int_S \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} dS = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla_r \int_S \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}'}{R^3} dS. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что $\nabla_r \cdot \nabla_r (1/R) = \Delta (1/R) = 0$ и $\nabla_r \cdot \mathbf{n}' = -\nabla_r \cdot \mathbf{n}'$.

Таким образом, имеем

¹ Био (Biot) Жан Батист (1774–1862) — французский физик и математик. Окончил Политехническую школу в Париже. Основные работы посвящены оптике (закон Био вращения плоскости поляризации света), электромагнетизму (закон Био — Савара о напряженности магнитного поля прямолинейного проводника). В области математики работал над теорией уравнений с частными производными, связанными с колебанием поверхностей, предложил классификацию дифференциально-разностных уравнений. Написал (1803 г.) «Общую историю науки в годы Революции».

² Савар (Savart) Феликс (1791–1841) — французский физик. Труды по акустике, электромагнетизму, оптике. Установил (1820 г.) совместно с Био Ж. один из законов электромагнетизма.

$$\mathbf{A}(M) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla_r \int_S \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}'}{R^3} dS = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla \int_S \frac{\cos \theta}{R^2} dS = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla \omega. \quad (1.133)$$

Здесь ω — телесный угол, под которым поверхность S , натянутая на вихревую нить, видна из точки M . Следовательно, потенциал поля (1.133) может быть представлен в виде

$$\varphi(M) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{\cos \theta}{R^2} dS = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_S d\omega. \quad (1.134)$$

Сравнивая это выражение с (1.126), заключаем:

Поле, создаваемое вихревой нитью интенсивности Γ , совпадает с полем от диполей той же интенсивности Γ , равномерно распределенных по поверхности, натянутой на контур нити.

В теории электромагнетизма этот факт известен как теорема Ампера¹, утверждающая, что магнитное поле, создаваемое электрическим током силой j в линейном проводнике, идентично полю от равномерно намагниченного с плотностью j/c магнитного листка, контуром которого является проводник.

8. *Поле изолированного вихря в плоскости* может быть получено из формулы для кольцевой нити (1.132), если считать, что она в виде прямолинейной нити растянута до бесконечности, где два конца нити соединяются, например, в форме полуокружности бесконечного радиуса R_∞ . Тогда

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{i}_3 dx_3 \times \mathbf{R}}{(R^2 + x_3^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma R}{4\pi} \mathbf{i}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_3}{(R^2 + x_3^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \mathbf{i}_\varphi, \quad (1.135)$$

где орт $\mathbf{i}_\varphi = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{R}/R$, а $\mathbf{R} = \mathbf{i}_1 x_1 + \mathbf{i}_2 x_2$. При этом отброшен интеграл по замыкающей полуокружности, который убывает как R_∞^{-1} .

Это соленоидальное поле имеет однозначную функцию тока $\psi(r, \varphi) = \text{const}$, уравнение которой следует из того, что из (1.135) имеем $A_r = 0$; $A_\varphi = \Gamma/2\pi R$. Тогда из (1.94) получаем (см. пример 2)

$$\psi = \int (R A_r d\varphi - A_\varphi dR) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R.$$

Эта функция тока по виду совпадает с функцией потенциала изолированного плоского источника (см. (1.119)).

Поле (1.135) — безвихревое всюду, кроме особой точки M_0 . Но потенциал этого поля — многозначная функция, линии уровня которой сопадают с лучами, проведен-

¹Ампер (Ampere) Андре Мари (1775–1836) — французский физик и математик, один из основоположников теории электромагнетизма. Получил домашнее образование, с 1805 г. — профессор Политехнической школы, а с 1824 г. — Высшей нормальной школы в Париже. Открыл (1820 г.) правило механического взаимодействия токов (закон Ампера), построил первую теорию электромагнетизма. Работы по теории дифференциальных уравнений с частными производными (уравнения Ампера — Моисжа), по теории вероятностей, по приложениям вариационного исчисления к задачам анализа и механики. Занимался классификацией наук, предложил названия «кинематика» и «кибернетика».

ными из точки M_0 , т. е. с векторными линиями поля изолированного источничка; в то же время векторные линии изолированного вихря совпадают с линиями уровня потенциала ($R = \text{const}$) источника и являются концентрическими окружностями. Этот факт получит наглядную интерпретацию при применении функций комплексного переменного для изучения плоских полей в гидромеханике.

9. *Поле вихревой пелены.* Если по некоторой поверхности распределены вихри с поверхностной интенсивностью Υ , то потенциальное поле у такой поверхности, состоящей из вихревых нитей, может быть получено подобно тому, как было получено поле вихревой нити. Путем аналогичных рассуждений, но учитывая, что теперь поле складывается из полей от вихревых элементов с интенсивностью Υ , распределенных по поверхности σ , получим (см. (1.132))

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\Upsilon(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\sigma' \quad (1.136)$$

В частном случае плоской вихревой пелены, для которой Υ постоянна и лежит в плоскости пелены, имеем, оставляя в интеграле только нормальную компоненту $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} = R_n$, поскольку интеграл от касательной компоненты обращается в нуль в силу нечетности подынтегральной функции:

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \Upsilon \times \int_{\sigma} \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\sigma' = \frac{1}{4\pi} \Upsilon \times \mathbf{n} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{R}}{R^3} d\sigma' = \frac{1}{2} \Upsilon \times \mathbf{n}, \quad (1.137)$$

где \mathbf{n} — нормаль к пелене, направленная от плоскости в ту сторону, где находится точка M , поскольку интеграл в (1.137) равен телесному углу 2π .

Если рассмотреть поле у вихревой пелены в виде бесконечного цилиндра произвольного сечения с вектором Υ , перпендикулярным всюду образующим цилиндра, то окажется (см., например, [8] и задачу 5.5), что поле вне цилиндра равно нулю, а внутри цилиндра имеет всюду одинаковую величину и направлено по оси цилиндра. Этот факт имеет интерпретацию в теории электромагнетизма при расчете магнитного поля соленоида.

Можно получить, что на вихревой пелене терпит разрыв тангенциальная составляющая поля, и этот разрыв равен по величине $|\Upsilon|$. Так, например, из (1.137) имеем для значений поля по разные стороны от разрыва $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = \Upsilon \times \mathbf{n}$, откуда $\mathbf{A}_{1n} = \mathbf{A}_{2n}$; $\mathbf{A}_{1\tau} - \mathbf{A}_{2\tau} = \Upsilon \times \mathbf{n}$.

Пусть цилиндрическая вихревая пелена не плоская и в качестве направляющей имеет некоторую кривую L (рис. 46, б), а вихревая интенсивность $\Upsilon = \Upsilon(s)$ по этой кривой направлена вдоль образующих и непостоянна (s — дуговая координата вдоль кривой L). Пусть \mathbf{A}'_+ и \mathbf{A}'_- — векторы поля \mathbf{A} на двух сторонах этой пелены, вызванные всей системой вихрей $\Upsilon(s)$. Тогда, считая, что на малом участке $d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} ds$ эти векторы приближенно постоянны, вычислим циркуляцию Γ поля \mathbf{A} по контуру элементарной площадки $d\sigma = d\sigma \mathbf{i}_z = (\mathbf{n}h \times d\mathbf{s})$, охватывающему участок пелены $d\mathbf{s}$ (см. рис. 46, б)

$$\Gamma = \mathbf{A}'_+ \cdot d\mathbf{s}_+ + \mathbf{A}'_- \cdot d\mathbf{s}_- = (\mathbf{A}'_+ - \mathbf{A}'_-) \cdot \boldsymbol{\tau} ds,$$

где $d\mathbf{s}_+ = \boldsymbol{\tau} ds = -d\mathbf{s}_-$.

По теореме Стокса (1.79) эта циркуляция равна потоку вектора вихря поля через площадку $d\sigma$, т. е.

$$\Gamma = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\sigma = (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot (h\mathbf{n} \times d\mathbf{s}) = (h\text{rot } \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{n} \times d\mathbf{s}) \equiv \boldsymbol{\gamma} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}) ds.$$

Здесь через $\boldsymbol{\gamma}$ обозначена линейная плотность вихрей ($\boldsymbol{\gamma} \equiv h\text{rot } \mathbf{A}$), или вихревая интенсивность вдоль кривой L (вихревая интенсивность цилиндрической вихревой пелены).

Тогда, сравнивая два полученных выражения для Γ , получаем

$$(\mathbf{A}_+^{\boldsymbol{\gamma}} - \mathbf{A}_-^{\boldsymbol{\gamma}}) \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}) ds = (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

Отсюда в силу произвольности ds имеем локальное соотношение для цилиндрической пелены с интенсивностью $\boldsymbol{\gamma}$, направленной вдоль образующих

$$\mathbf{A}_+^{\boldsymbol{\gamma}} - \mathbf{A}_-^{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{n}. \quad (1.137a)$$

Из этого выражения видно, что для неплюсской вихревой пелены равенства, относящиеся к нормальным и тангенциальным составляющим поля, полученные выше для плоской пелены, здесь носят локальный характер.

Соотношение (1.137a) широко используется в методе присоединенных особенностей.

10. *Другие виды потенциальных полей.* Аналогично тому, как с помощью пары источник-сток было получено поле диполя, можно получить и другие поля. Так, например, если сближать точки, где расположены диполи с противоположными по направлению моментами, одинаковая величина которых при этом неограниченно растет, можно получить потенциалы вида (квадруполь)

$$\varphi = -\frac{\lambda_{ik}}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Эти поля встречаются в задачах математической физики, относящихся к теории электромагнетизма и др.

Асимптотика на бесконечности поля, восстановленного по дивергенции и вихрю

Может показаться странным, что для полного восстановления векторного поля достаточно знать только распределение источников (стоков) $\theta(\mathbf{r}) = \text{div } \mathbf{A}$ и вихрей $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}$.

Дело в том, что, как уже отмечалось, если поля источника и вихря убывают на бесконечности как R^{-2} , то поле диполя — как R^{-3} . Поэтому распределение диполей сказывается лишь в членах второго порядка малости при убывании поля на бесконечности от особенностей, расположенных в окрестности V' начала координат.

Действительно, разлагая поле (1.105) по степеням $1/r$, получим

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{1}{4\pi} \nabla_r \int_{V'} \frac{\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' -$$

$$\begin{aligned} & \sim -\frac{1}{4\pi} \nabla_r \left\{ \frac{1}{r} \int_{V'} \theta(\mathbf{r}') dV' - \int_{V'} \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} \theta(\mathbf{r}') dV' + \dots \right\} = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \theta(\mathbf{r}') dV' \right\} \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \mathbf{r}' \theta(\mathbf{r}') dV' \right\} \cdot \nabla \left(\nabla \frac{1}{r} \right) + \dots \\ A_2 & = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_r \int_{V'} \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{V'} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}') dV' \right\} \times \nabla \frac{1}{r} + \\ & + \frac{1}{8\pi} \nabla \left\{ \nabla \frac{1}{r} \cdot \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\Omega}') dV' + \dots \right\} = \frac{1}{8\pi} \nabla \left\{ \nabla \frac{1}{r} \cdot \int_{V'} (\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\Omega}') dV' \right\} + \dots \end{aligned}$$

В разложении A_2 первый член равен нулю вследствие того, что вихревые нити должны быть замкнуты и поэтому в V' может поместиться только нить конечного размера, так что интеграл в первом слагаемом обращается в нуль.

В разложении A_1 первый член определяется наличием источников в области V' ; если их суммарная мощность не равна нулю, то асимптотика поля A_1 (и поля \mathbf{A}) при $r \rightarrow \infty$ начинается с членов порядка r^{-2} . В том случае, когда в области располагаются лишь одни диполи, от моментов которых зависит второе слагаемое в разложении A_1 , то асимптотика A_1 , как и A_2 (а следовательно, и \mathbf{A}), начинается с членов порядка r^{-3} . Эта асимптотика относится, таким образом, к полю, связанному либо с диполями, либо с одиночной вихревой нитью, расположенными в окрестности начала координат.

О движении изолированных особенностей в жидкости

Изолированная особенность (вихрь, источник, диполь и др.), будучи помещенной в жидкость, вызывает движение жидкости. Однако сама особенность в этом движении не участвует; говорят: «особенность сама на себя не влияет». Иными словами, из поля скоростей от особенности точка ее местоположения исключается.

В то же время, если в жидкость помещены несколько особенностей, то, вообще говоря, каждая из них участвует в движении среды, вызванном остальными особенностями. В этом заключается их взаимовлияние, взаимодействие.

Мы рассмотрим движение от взаимодействия пар одноименных особенностей — двух источников (стоков), двух вихрей, двух диполей. Оказывается, движения этих пар совершенно различны. Например, вихри с циркуляцией одного знака могут совершать лишь вращательное движение, а источники (стоки) — лишь прямолинейное вдоль прямой, соединяющей их начальные положения.

Отметим, что характеристики движения «от взаимодействия, взаимовлияния» различных изолированных особенностей рассматриваются здесь не в зависимости от динамических факторов («массы особенностей», сил, действующих на них, и т. п.), но лишь как следствие кинематических свойств их скоростных полей.

1. *Два плоских источника (стока)*. Пусть источник (сток) мощностью Q_1 находится при $t = 0$ в точке, определяемой в плоскости радиусом-вектором \mathbf{r}_1 , а источник мощностью Q_2 — в точке с радиусом-вектором \mathbf{r}_2 , который, как и \mathbf{r}_1 , берется относительно некоторого неподвижного начала O_0 (рис. 39).

В каждой точке \mathbf{r} безграничного двумерного пространства поле скорости жидкости от этих двух особенностей определяется формулой (см. 1.118):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1}{2\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} + \frac{Q_2}{2\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^2}. \quad (1.138)$$

Скорость \mathbf{v}_1 движения первого источника (стока) получается из (1.138), если положить $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ и отбросить первое слагаемое, отражающее «влияние особенности самой на себя». Таким образом, имеем

$$\mathbf{v}_1 = \frac{Q_2}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad (1.139)$$

причем под d/dt понимается материальная производная.

Аналогично скорость \mathbf{v}_2 движения второй особенности равна

$$\mathbf{v}_2 = \frac{Q_1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}. \quad (1.140)$$

Введем относительный радиус-вектор $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Тогда, вычитая (1.139) из (1.140), получаем для \mathbf{R}_{12} дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{R}_{12}}{dt} = \frac{(Q_1 + Q_2)\mathbf{R}_{12}}{2\pi R_{12}^2}. \quad (1.141)$$

Из этого уравнения следует: *плоские взаимовлияющие источник и сток одинаковой мощности ($Q_1 = -Q_2$) не меняют своего относительного положения*, так что они движутся с одинаковыми скоростями, которые, к тому же, не зависят от времени.

Действительно, если $Q_1 = -Q_2$, то из (1.141) следует $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{12}|_{t=0} = \mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10} = \text{const}$,

а из (1.139) и (1.140) получаем, что $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 = \frac{Q_1}{2\pi R_{12}^2} \mathbf{R}_{12}$ постоянны.

В дальнейшем будем считать $Q_1 + Q_2 \neq 0$.

Умножая (1.139) на Q_1 , (1.140) — на Q_2 и складывая, получаем

$$Q_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + Q_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 0. \quad (1.142)$$

Можно ввести постоянный вектор \mathbf{r}_c следующим образом

$$\mathbf{r}_c = \frac{Q_1 \mathbf{r}_1 + Q_2 \mathbf{r}_2}{Q_1 + Q_2}; \quad \left(\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = 0 \right). \quad (1.143)$$

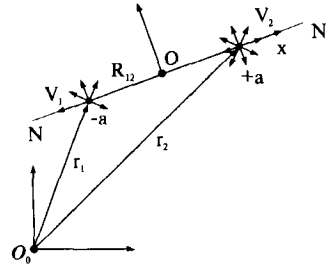


Рис. 39

Вектор \mathbf{r}_c определяет на прямой NN , соединяющей особенности, положение «центра инерции» системы двух стоков (источников).

Таким образом, «центр инерции» системы двух источников (стоков) остается неподвижным, так что возможное движение от взаимодействия особенностей Q_1 и Q_2 происходит относительно него.

Покажем, что такое движение является прямолинейным по прямой NN , соединяющей особенности и не меняющей своего положения. Выражая из (1.143) \mathbf{r}_2 через \mathbf{r}_1 , из (1.139) и (1.140) получаем

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{Q_2^2}{2\pi(Q_1 + Q_2)} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c|^2}; \quad \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \frac{Q_1^2}{2\pi(Q_1 + Q_2)} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c|^2}. \quad (1.144)$$

Поскольку скорость любой частицы M , лежащей на прямой NN , направлена, как следует из (1.138), вдоль этой прямой, то эта прямая не может вращаться. Следовательно, вектор \mathbf{R}_{12} сохраняет свое направление, т. е. вектор \mathbf{R}_{12}/R_{12} постоянен, как бы ни двигались особенности Q_1 и Q_2 . Поэтому, перенося на эту прямую начало O и помещая его посредине между начальными положениями Q_1 и Q_2 , получим, отсчитывая координату x по этой прямой:

$$\mathbf{r}_1(t) = kx_1(t); \quad \mathbf{r}_2(t) = kx_2(t); \quad \mathbf{R}_{12} = k(x_2(t) - x_1(t)),$$

причем $x_1(0) \equiv -a$, $x_2(0) \equiv +a$.

Таким образом, из (1.144) имеем

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{Q_2^2}{2\pi(Q_1 + Q_2)(x_1 - x_c)}; \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{Q_1^2}{2\pi(Q_1 + Q_2)(x_2 - x_c)}, \quad (1.145)$$

где $x_c = a(Q_2 - Q_1)/(Q_2 + Q_1)$.

Интегрируя (1.145) и удовлетворяя начальным условиям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a} &= \frac{Q_2(1 - 2\sqrt{1 + \gamma t}) - Q_1}{Q_2 + Q_1}; & \frac{x_2}{a} &= \frac{Q_2 - Q_1(1 - 2\sqrt{1 + \gamma t})}{Q_2 + Q_1}; \\ v_1(t) &= -\frac{Q_2}{4\pi a\sqrt{1 + \gamma t}}; & v_2(t) &= \frac{Q_1}{4\pi a\sqrt{1 + \gamma t}}, \end{aligned} \quad (1.146)$$

где

$$\gamma = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi a^2}.$$

При этом $R_{12} = |x_2 - x_1| = 2a\sqrt{1 + \gamma t}$;

$$v_1(0) = -\frac{Q_2}{4\pi a}, \quad v_2(0) = \frac{Q_1}{4\pi a}.$$

Рассмотрим различные случаи значений Q_1 , Q_2 и соответствующие перемещения особенностей.

1. $Q_1 = Q_2 = Q$. Как следует из выражений (1.146), источники ($Q > 0$) расходятся в разные стороны из своих начальных положений, причем величины скорости их движений убывают от $Q/4\pi a$ до нуля на бесконечности (при $t \rightarrow \infty$). Однако стоки ($Q < 0$) сходятся к началу координат и достигают его за конечный промежуток времени, равный $-Q/2\pi a^2$; в момент «столкновения» величины их скоростей бесконечно возрастают.

2. $Q_1 + Q_2 > 0$, $Q_1 > 0$. При этом $Q_2 > -Q_1$, так что справа от источника может быть как источник ($Q_2 > 0$), так и сток ($Q_2 < 0$; $|Q_2| < Q_1$). Если $Q_2 > 0$, т. е. обе особенности являются источниками, то, поскольку $v_1 < 0$ и $v_2 > 0$, источники удаляются от начала координат, причем тот, у которого мощность меньше, — быстрее. На бесконечности их скорости обращаются в нуль. Если $Q_2 < 0$, то левый источник и правый сток движутся оба вправо ($v_1 > 0$, $v_2 > 0$), но расстояние между ними монотонно увеличивается ($\gamma > 0$), поскольку $Q_1 > |Q_2|$ и, следовательно, $v_2 > v_1$. На бесконечности их скорости равны нулю.

3. $Q_1 + Q_2 > 0$, $Q_1 < 0$. При этом $Q_2 > -Q_1 > 0$, так что справа от стока находится источник. Обе особенности движутся влево ($v_1 < 0$, $v_2 < 0$), но, поскольку $Q_2 < |Q_1|$, расстояние между ними монотонно возрастает. Их скорости на бесконечности ($t \rightarrow \infty$) обращаются в нуль.

4. $Q_1 + Q_2 > 0$, $Q_2 > 0$ и случай $Q_2 < 0$ сводится к предыдущим двум.

5. $Q_1 + Q_2 < 0$. В этом случае $\gamma < 0$, так что движение особенности заканчивается за время $-\gamma^{-1} = -4\pi a^2 / (Q_1 + Q_2)$. При этом, если $Q_1 < 0$ и $Q_2 < 0$, то оба стока «сталкиваются» ($v_1 > 0$ и $v_2 < 0$) в промежутке $[-a; +a]$ ближе к тому концу, откуда движется более мощный сток.

В момент «столкновения» величины их скоростей бесконечно возрастают. Если же Q_1 и Q_2 имеют разные знаки, то через время $-4\pi a^2 / (Q_1 + Q_2)$ источник догоняет сток, причем в момент, когда $x_1 = x_2$, величины их скоростей бесконечно возрастают.

Из вышеизложенного рассмотрения можно сделать следующие выводы относительно взаимодействия особенностей типа сток — источник:

1) источники «взаимно отталкиваются», а стоки — «взаимно притягиваются», так что «столкновение» в одноименных парах может быть только у стоков;

2) при взаимодействии пары источник — сток источник всегда движется к стоку, но сток удаляется от источника с большей скоростью, если его мощность (по модулю) меньше; в противном случае источник «догонит» сток.

Отметим еще раз, что речь здесь идет не о взаимодействии каких-то материальных частиц с определенной массой, а о кинематических свойствах суммы полей от изолированных особенностей.

Анализ движения двух взаимодействующих точечных источников (стоков) в трехмерном пространстве может быть проведен, если за исходное взять выражение для скорости (1.110). Так же, как и в случае плоских источников, все возможные их перемещения совершаются по прямой, соединяющей их начальные местоположения, а при $Q_1 + Q_2 = 0$ источник и сток равной мощности остаются на постоянном удалении друг от друга. Не останавливаясь на подробностях, приведем выражения, аналогичные (1.146) для двух пространственных источников (стоков):

$$\frac{x_1}{a} = \frac{Q_2(1 - 2\sqrt[3]{1 - \gamma_1 t}) - Q_1}{Q_1 + Q_2}, \quad \frac{x_2}{a} = \frac{Q_2 - Q_1(1 - 2\sqrt[3]{1 - \gamma_2 t})}{Q_1 + Q_2},$$

$$v_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{16\pi a^2 (1 - \gamma_1 t)^{2/3}}, \quad v_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{16\pi a^2 (1 - \gamma_2 t)^{2/3}}, \quad (1.147)$$

где x отсчитывается вдоль прямой, соединяющей начальные положения $x = \pm a$ особенностей;

$$\gamma_1 = \frac{3(Q_1 + Q_2)^2}{32\pi a^3 Q_2}; \quad \gamma_2 = \frac{3(Q_1 + Q_2)^2}{32\pi a^3 Q_1}.$$

2. Два плоских вихря. Поле скорости от двух вихрей с интенсивностями Γ_1 и Γ_2 , расположенных в точках плоскости, определяемых радиусами-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , имеет выражение (см. (1.135) и рис. 40):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma_1 \mathbf{i}_\varphi^{(1)}}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\Gamma_2 \mathbf{i}_\varphi^{(2)}}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|},$$

где $\mathbf{i}_\varphi^{(1)}$, $\mathbf{i}_\varphi^{(2)}$ — орты, перпендикулярные соответственно векторам $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ и направленные так, как показано на рисунке ($\Gamma_1 > 0$, $\Gamma_2 > 0$). Для скоростей взаимодействия \mathbf{v}_1 (скорость движения вихря Γ_1 в поле вихря Γ_2) и \mathbf{v}_2 (скорость движения вихря Γ_2 , вызванного воздействием на него вихря Γ_1) получаем выражения

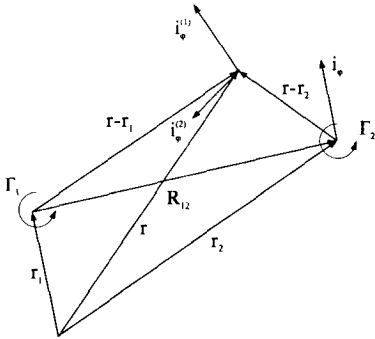


Рис. 40

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = -\frac{\Gamma_2 \mathbf{i}_\varphi}{2\pi |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|};$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \frac{\Gamma_1 \mathbf{i}_\varphi}{2\pi |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad (1.148)$$

где учтено, что особенность на себя не оказывает воздействия, а орт \mathbf{i}_φ перпендикулярен вектору $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и направлен так, как показано на рис. 40.

Умножая первое из уравнений (1.148) на Γ_1 , а второе — на Γ_2 и складывая, получаем

$$\Gamma_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \Gamma_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что вектор $\Gamma_1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_2 \mathbf{r}_2$ не меняется со временем. Поэтому, если $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$, то для «центра инерции» вихрей, определяемого радиусом-вектором \mathbf{r}_c , имеем

$$\mathbf{r}_c = \frac{\Gamma_1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_2 \mathbf{r}_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad \left(\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = 0 \right).$$

«Центр инерции» вихрей неподвижен. Он лежит на прямой, соединяющей вихри, и делит (в случае $\Gamma_1 \Gamma_2 > 0$) длину \mathbf{R}_{12} на отрезки, обратно пропорциональные значениям $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$. Это следует, например, из соотношения:

$$\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_1 = \frac{\Gamma_2 \mathbf{R}_{12}}{\Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

Вычитая первое уравнение (1.148) из второго, получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi R_{12}} \mathbf{i}_\varphi. \quad (1.149)$$

Умножая (1.149) скалярно на $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, имеем

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{R}_{12}^2}{2} \right) = 0,$$

т. е. $R_{12} = \text{const}$.

Таким образом, *расстояние между двумя вихрями не меняется во время их движения* (независимо от величины и направления вихрей).

Заметим, что пара особенностей типа источника (стока) этим свойством обладает только, если $Q_1 + Q_2 = 0$.

Если $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$, то вихри совершают вращение вокруг «центра инерции» с угловой скоростью ω , равной

$$\omega = \frac{v_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c|} = \frac{v_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c|} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi R_{12}^2}.$$

Если $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$, т. е. вихри имеют равную по величине, но противоположную по направлению завихренность ($\Gamma_1 = -\Gamma_2 \equiv \Gamma$ — так называемая «пара вихрей»), то из (1.148) следует $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, так что *пара вихрей движется поступательно со скоростью*

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \frac{\Gamma}{2\pi R_{12}} \mathbf{i}_\varphi,$$

т. е. *перпендикулярно вектору \mathbf{R}_{12} , а их центр инерции при этом находится на бесконечности* ($|\mathbf{r}_c| = \infty$).

Частицы жидкости, лежащие между вихрями, движутся в том же направлении, причем частица посередине имеет скорость, равную

$$\frac{2\Gamma}{2\pi R_{12}} + \frac{2\Gamma}{2\pi R_{12}} = 4 \frac{\Gamma}{2\pi R_{12}} = 4v_1,$$

т. е. *движется вчетверо быстрее вихрей*.

Функцию тока для двух вихрей можно получить как сумму функций тока для каждого из вихрей (см. пример 8 § 5), а именно

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - \frac{\Gamma_2}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|.$$

Для вихревой пары ($\Gamma_2 = -\Gamma_1 \equiv \Gamma$), расположенной в точках $x = \pm a$, имеем

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{\mathbf{r} + a\mathbf{i}_x}{\mathbf{r} - a\mathbf{i}_x} \right|,$$

так что уравнения линий тока имеют вид

$$(x-a)^2 + y^2 = C \left[(x+a)^2 + y^2 \right].$$

Следовательно, линии тока являются окружностями (рис. 41, а).

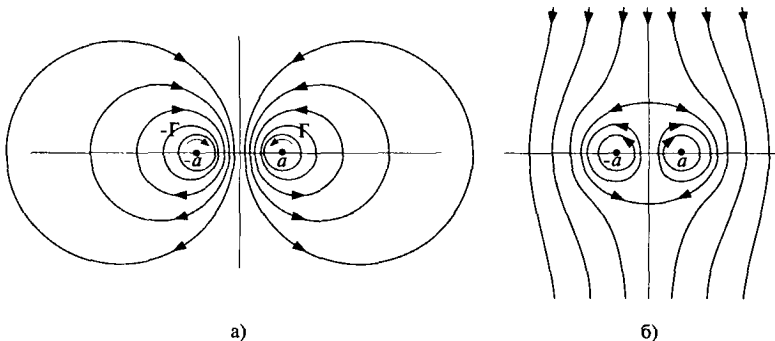


Рис. 41

Чтобы получить линии тока жидкости относительно пары вихрей, движущихся со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{i}_y \Gamma/4\pi a$, необходимо на все движение наложить однородный поток со скоростью $\mathbf{v} = -\mathbf{i}_y \Gamma/4\pi a$, так что функция тока приобретает вид

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{x}{2a} + \ln \left| \frac{\mathbf{r} + a\mathbf{i}_x}{\mathbf{r} - a\mathbf{i}_x} \right| \right).$$

В этой системе координат вихри неподвижны, так что получаем обтекание пары вихрей однородным потоком со скоростью $\mathbf{v}_\infty = -\frac{\Gamma}{4\pi a} \mathbf{i}_y$.

Линии тока этого относительного движения изображены на рис. 41, б. Линия $\psi = 0$ состоит из оси y и овала, окружающего оба вихря.

3. Два плоских диполя. Если на плоскости (x, y) в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 расположены два изолированных диполя с моментами \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 , то поле скоростей от них, согласно (1.129), имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\mathbf{m}_1}{2\pi R_1^2} - \frac{\mathbf{m}_2}{2\pi R_2^2} + \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R}_1)\mathbf{R}_1}{\pi R_1^4} + \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{R}_2)\mathbf{R}_2}{\pi R_2^4},$$

где обозначено $\mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{R}_2 \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$.

Отсюда скорости движения самих диполей равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = -\frac{\mathbf{m}_2}{2\pi R_{21}^2} + \frac{(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{R}_{21})\mathbf{R}_{21}}{\pi R_{21}^4}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = -\frac{\mathbf{m}_1}{2\pi R_{12}^2} + \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R}_{12})\mathbf{R}_{12}}{\pi R_{12}^4}, \end{aligned} \quad (1.150)$$

где $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{R}_{12}$, $R_{21} = R_{12}$.

Умножая первое из уравнений (1.150) скалярно на \mathbf{m}_1 и вычитая его из второго, умноженного на \mathbf{m}_2 , получаем

$$\mathbf{m}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \mathbf{m}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = 0.$$

Отсюда имеем интеграл уравнений движения

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = \text{const.}$$

Вычитая первое уравнение (1.150) из второго и умножая скалярно эту разность на $\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, получим

$$\mathbf{R}_{12} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{R}_{12} \cdot \frac{d\mathbf{R}_{12}}{dt} = \frac{(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \cdot \mathbf{R}_{12}}{\pi R_{12}^2}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{R_{12}^2}{2} \right) = \frac{(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \cdot \mathbf{R}_{12}}{\pi R_{12}^2}.$$

Таким образом, если проекции моментов диполей на прямую, их соединяющую, одинаковы, то $R_{12} = \text{const}$, т. е. расстояние между диполями не меняется с течением времени.

Если $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ совпадает по направлению с \mathbf{R}_{12} , то имеем

$$R_{12}^3(t) = \frac{3}{\pi} |\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2| t + R_{12}^3(0).$$

Рассматривая различные соотношения между \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 , можно исследовать другие случаи взаимного движения двух плоских диполей.

4. Система N плоских вихрей. Для N плоских вихрей, расположенных в точках, определяемых радиусами-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, получаем, подобно (1.148), скорость k -того вихря

$$\mathbf{v}_k = \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma_l \mathbf{i}_\phi^{(l)}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma_l \mathbf{i}_\phi^{(l)}}{R_{lk}},$$

где штрих у знака суммы означает, что в сумме нет слагаемого, для которого $l = k$; $\mathbf{r}_k = \mathbf{i}_x x_k + \mathbf{i}_y y_k$.

Для этой системы вихрей существует несколько интегралов движения.

Во-первых, получаем

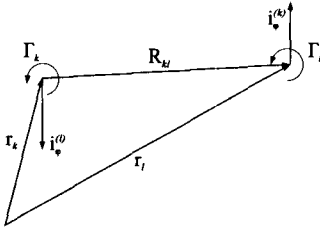


Рис. 42

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \Gamma_k \Gamma_l \frac{\mathbf{i}_\varphi^{(l)}}{R_{lk}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\frac{\Gamma_k \Gamma_l}{R_{lk}} \mathbf{i}_\varphi^{(l)} + \frac{\Gamma_l \Gamma_k}{R_{kl}} \mathbf{i}_\varphi^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Но поскольку $\mathbf{i}_\varphi^{(l)} = -\mathbf{i}_\varphi^{(k)}$ (рис. 42) и $R_{kl} = R_{lk}$, то двойная сумма обращается в нуль. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k \mathbf{r}_k = \text{const},$$

так что «центр инерции» \mathbf{r}_c этой системы вихрей остается неподвижным,

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^N \Gamma_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} = \text{const} \quad \left(\sum_{k=1}^N \Gamma_k \neq 0 \right). \quad (1.151)$$

Во-вторых, рассматривая единственную компоненту (перпендикулярную плоскости вихрей) «кинетического момента» системы, а именно $\sum_{k=1}^N \Gamma_k (\mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k)_z$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\mathbf{r}_k \times \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \right)_z &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \sum_{l=1}^N \Gamma_l \frac{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{i}_\varphi^{(l)})_z}{R_{lk}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq k} \Gamma_k \Gamma_l \left[\frac{(\mathbf{r}_k \times \mathbf{i}_\varphi^{(l)})_z}{R_{lk}} + \frac{(\mathbf{r}_l \times \mathbf{i}_\varphi^{(k)})_z}{R_{kl}} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq k} \Gamma_k \Gamma_l \frac{[(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l) \times \mathbf{i}_\varphi^{(l)}]_z}{R_{lk}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq k} \Gamma_k \Gamma_l. \end{aligned}$$

Или в проекциях:

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(x_k \frac{dy_k}{dt} - y_k \frac{dx_k}{dt} \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq k} \Gamma_k \Gamma_l. \quad (1.152)$$

Это равенство означает, что сумма «кинетических моментов» вихрей относительно начала координат не меняется с течением времени.

Наконец, образуем сумму, равную нулю:

$$0 = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \right)_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq k} \Gamma_k \Gamma_l \left(\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} \times \frac{\mathbf{i}_\varphi^{(l)}}{R_{lk}} \right)_z = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq k} \Gamma_k \Gamma_l \frac{1}{R_{lk}} \frac{dR_{lk}}{dt}.$$

Отсюда получаем третий интеграл движения системы N плоских вихрей

$$\sum_{l \neq k} \Gamma_k \Gamma_l \ln R_{lk} = \text{const.} \quad (1.153)$$

В заключение этого раздела отметим еще раз, что при рассмотрении движения изолированных особенностей в жидкости речь шла не о движении и взаимодействии каких-то материальных частиц с определенной массой, а о кинематических свойствах суммарного поля изолированных особенностей и об изменении этого поля с течением времени.

И тем не менее, имея в виду физическое воплощение гидродинамических особенностей (торнадо, смерчи, истечение среды из щелей или отверстий в тонких трубках и др.), следует иметь в виду силовое взаимодействие подобных материальных «воплощений» или устройств. Тем более, что движение особенностей происходит с ускорением, так что, скажем, на трубки, из которых вытекает жидкость, будут действовать определенные силы, а смерчи тоже будут перемещаться под действием возникающего между ними силового взаимодействия.

О подобных силах можно получить представление, если рассмотреть картину потока в начальный момент времени ($t = 0$) у особенностей или предполагать их искусственную неподвижность (существование устройств, фиксирующих их положение в пространстве).

Рассмотрим для примера картину взаимодействия потоков от источников (стоков). Пусть две особенности типа источник — сток с мощностью Q_1 и Q_2 находятся в начальный момент в точках $(-a, 0)$ и $(+a, 0)$. Функция тока согласно (1.93) может быть найдена по формуле

$$\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dy - v_y dx = \int_{y_0}^y v_x(x, y) dy - \int_{x_0}^x v_y(x, y_0) dx.$$

Выбирая $y_0 = 0$, $\psi(x_0, y_0) = 0$ и имея в виду (см. (1.118)), что

$$v_x = \frac{Q_1}{2\pi} \left\{ \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} + k \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right\},$$

$$v_y = \frac{Q_1}{2\pi} \left\{ \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} + k \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right\},$$

где $Q_2 = kQ_1$, получаем

$$\psi(x, y) = \frac{Q_1}{2\pi} \left(\text{arctg} \frac{y}{x+a} + k \text{arctg} \frac{y}{x-a} \right).$$

Уравнения линий тока можно записать в виде

$$\frac{\text{tg} \theta_1 + \text{tg} k \theta_2}{1 - \text{tg} \theta_1 \cdot \text{tg} k \theta_2} = \text{tg} \frac{2\pi\psi}{Q_1} \equiv \frac{1}{c_0}, \quad (1.154)$$

где

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a}, \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}.$$

Придавая различные значения c_0 , для каждого k получаем семейства линий тока. Для случая $k=1$ (два источника одинаковой мощности) и случая $k=-1$ (источник и сток равной по величине мощности) картина линий тока приведена на рис. 43.

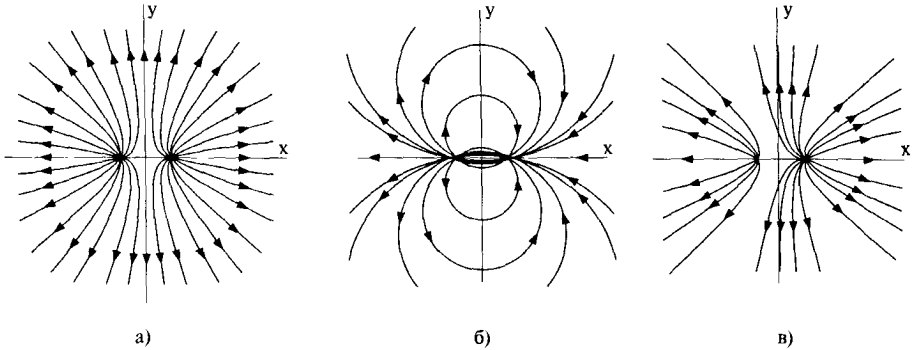


Рис. 43

В первом случае ($k=1$) семейство равносторонних гипербол

$$x^2 - y^2 - a^2 = 2yxc_0$$

изображено на рис. 43, а; их асимптоты, которые могут быть найдены из уравнения линий тока, записанного в виде

$$\left[x - (c_0 - \sqrt{c_0^2 + 1})y \right] \left[x - (c_0 + \sqrt{c_0^2 + 1})y \right] = a^2,$$

пересекаются под прямыми углами. Координатные оси также являются линиями тока, так что потоки от двух источников не смешиваются, а ось Y -ов может рассматриваться как твердая стенка, разгораживающая эти потоки. Каждый из потоков «воздействует» на эту «стенку» с одинаковой силой, величина которой может быть определена из интеграла Бернулли; она равна, как показывают вычисления, $P_x = \rho Q^2 / 4\pi a$, где ρ — плотность жидкости. Можно условно считать, что на каждый изолированный источник действует сила величиной P_x от взаимодействия двух потоков (или своего потока и «стенки»).

При $k=-1$ (см. рис. 43, б), когда слева находится источник, а справа — сток той же мощности, линиями тока являются семейства окружностей, проходящих через точки $(0, -a)$ и $(0, +a)$. Их уравнения

$$x^2 + (y + ac_0)^2 = a^2(1 + c_0^2).$$

В этом случае происходит полное перетекание жидкости из источника в сток, и особенности остаются все время неподвижными относительно друг друга.

При $Q_1 \neq Q_2$ линия тока, разделяющая потоки двух источников ($Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$), будет расположена ближе к менее мощному источнику.

Уравнение (1.154) позволяет построить семейство линий тока для разных значений k .

На рис. 43, в показаны линии тока в случае $k = 2$.

Задачи с решениями

Задача 5.1. Вихревое кольцо. *Найти поле, потенциал и функцию тока установившегося течения от круговой вихревой нити.*

Решение. Для установления вектора поля и его потенциала воспользуемся выражением (1.133), из которого для любой замкнутой вихревой нити имеем:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla_r \int_S \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}'}{R^3} dS, \quad (1)$$

и, следовательно, потенциал поля

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}'}{R^3} dS. \quad (2)$$

Здесь S — поверхность, стягиваемая вихревой нитью.

Векторный потенциал \mathbf{B} вихревого поля \mathbf{A} , для которого $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \mathbf{\Omega}$, равен (см. 1.104)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

а в случае осесимметричного поля, когда нет азимутального движения, существует функция тока, которую можно определить через ненулевую компоненту векторного потенциала \mathbf{B} (см. § 4, пример 3), а именно — в цилиндрических координатах (z, ρ, ε) — $B_\varepsilon = \psi/\rho$. А поскольку в этом случае направления \mathbf{B} и $\mathbf{\Omega}$ всюду совпадают, то имеем

$$\psi = \rho B = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{\Omega}(z', \rho') \rho' \cos \theta dz' d\rho' d\theta}{R}, \quad (3)$$

где $\theta = \varepsilon' - \varepsilon$, $R^2 = (z - z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \theta$, а интегрирование распространяется на всю область, занятую вихревыми образованиями с осью симметрии (Z).

В рассматриваемом случае одной круговой (радиуса a) вихревой нити, расположенной в плоскости $z' = 0$, в формулах (1), (2) следует положить (для плоскости круговой нити, где $z' = 0$):

$$R^2 = z^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \theta,$$

$$\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}'}{R^3} = \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{z}{(z^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \theta)^{3/2}}.$$

Тогда

$$\varphi(z, \rho) = \frac{\Gamma z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho' d\theta d\rho'}{(z^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\theta)^{3/2}}, \quad \mathbf{A}(z, \rho) = \nabla\varphi. \quad (4)$$

Поскольку для одной круговой линии радиуса a в плоскости $z' = 0$ имеем $\Omega(z', \rho') d\rho' dz' = \Gamma$, то для функции тока ψ из (3) получаем

$$\psi(z, \rho) = \frac{\rho\Gamma a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{(z^2 + \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos\theta)^{1/2}}. \quad (5)$$

Интегралы (4) и (5) приводятся к эллиптическим интегралам. Например, полагая в (5)

$$k^2 = \frac{4a\rho}{z^2 + (a + \rho)^2},$$

будем иметь

$$\psi(z, \rho) = \frac{\Gamma\sqrt{a\rho}}{2\pi} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\},$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Аналогично потенциал $\varphi(z, \rho)$ также может быть выражен через полные эллиптические интегралы и через интегралы от них. В частном случае при $\rho = 0$, т. е. для значения потенциала на оси (z), имеем

$$\varphi(z, 0) = \frac{\Gamma z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho' d\theta d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma z}{2} \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}} \right]_{\rho'=0}^{\rho'=a} = \frac{\Gamma z}{2} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right].$$

Задача 5.2. *Круговой цилиндрический вихрь. Рассмотреть стационарное движение жидкости, вызванное бесконечным цилиндрическим вихрем кругового сечения — совокупностью бесконечных прямолинейных вихревых нитей, расположенных вдоль оси z и сплошь заполняющих круговой цилиндр радиуса a с осью (z). Жидкость предполагается невязкой и несжимаемой, а интенсивности нитей — одинаковыми и постоянными вдоль их длины.*

Решение. В любой из плоскостей, перпендикулярных оси (z), в силу бесконечной протяженности вихря, движение жидкости будет таким же, как и в плоскости xOy . Поэтому ограничимся рассмотрением плоского стационарного движения от завихренностей постоянной интенсивности Ω_0 , сплошным образом заполняющих круг радиуса a .

Как известно, для двумерного движения $\text{rot } \mathbf{v} = -\mathbf{i}_z \Delta\psi$, где $\psi = \psi(x, y)$ — функция тока. Так как по условию $\text{rot } \mathbf{v} = \Omega_0$, то в области внутри кругового вихря ($r \leq a$) имеем

$$\Delta\psi = -\Omega_0.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль на окружности радиуса a , имеет вид

$$\psi = \frac{\Omega_0 a^2}{4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (r^2 = x^2 + y^2). \quad (1)$$

Заметим, что подобного типа решение имеет место для вихря, ограниченного любой кривой второго порядка с уравнением $f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 1 = 0$, поскольку для нее $\Delta f = \text{const}$.

Из (1) получаем, что все частицы внутри круга движутся по круговым орбитам со скоростью (в полярных координатах r, θ)

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Omega_0 r}{2} \quad \left(v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \right).$$

Поскольку величина скорости возрастает от центра к периферии пропорционально r , то все частицы описывают круговые траектории за одинаковое время.

В том случае, когда область цилиндрического вихря не изолирована от внешней среды и на границе скорость непрерывна, можно найти течение, вызываемое цилиндрическим вихрем в области $r > a$.

Для того чтобы найти поле скоростей вне кругового вихря, достаточно проинтегрировать по площади его поперечного сечения скорость от элементарных вихрей (см. (1.131))

$$dv = \frac{\Gamma}{2\pi R} \mathbf{i}_\theta = \frac{\Omega dS}{2\pi R} \mathbf{i}_\theta,$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$, причем \mathbf{r} определяет местоположение вихря интенсивностью ΩdS в круге, \mathbf{r}_0 — точку, где определяется dv , а \mathbf{i}_θ — орт, перпендикулярный к \mathbf{R} и направленный против хода стрелки часов (рис. 44). Тогда имеем

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\Omega dS}{R} \mathbf{i}_\theta.$$

Но $\Omega = \Omega_0 = \text{const}$, а $\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_x = -\mathbf{i}_R \cdot \mathbf{i}_y = -\frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{R} \cdot \mathbf{i}_y = \frac{r \sin \theta - r_0 \sin \theta_0}{R}$ и $\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_y = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{R} \cdot \mathbf{i}_x = \frac{r_0 \cos \theta_0 - r \cos \theta}{R}$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\Omega_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_x) r dr d\theta}{R} = \\ &= \frac{\Omega_0}{2\pi} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta - r_0 \sin \theta_0}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0)} d\theta, \\ v_y &= \frac{\Omega_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{(\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_y) r dr d\theta}{R^2} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos \theta_0 - r \cos \theta}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0)} d\theta. \end{aligned}$$

Вычисления дают

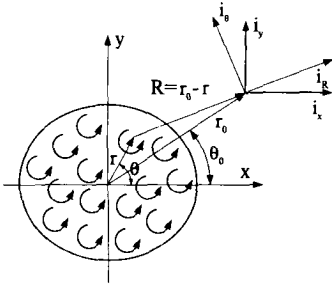


Рис. 44

$$\int_0^{2\pi} \frac{r \sin \theta - r_0 \sin \theta_0}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0)} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r \sin(\theta - \theta_0) - r_0 \sin \theta_0}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \theta} d\theta = -\frac{2\pi}{r_0} \sin \theta_0.$$

Аналогично

$$\int_0^{2\pi} \frac{r_0 \cos \theta_0 - r \cos \theta}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = \frac{2\pi}{r_0} \cos \theta_0.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$v_x(r_0, \theta_0) = -\frac{\Omega_0 a^2}{2r_0} \sin \theta_0,$$

$$v_y(r_0, \theta_0) = \frac{\Omega_0 a^2}{2r_0} \cos \theta_0.$$

Отсюда в области вне кругового вихря имеем

$$v_\theta = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\Omega_0 a^2}{2r_0}; \quad v_r = 0.$$

Итак, поле скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta)$ от кругового вихря с постоянной интенсивностью завихренности Ω_0 имеет вид

$$v_r = 0; \quad v_\theta = \begin{cases} \frac{\Omega_0 r}{2}, & r \leq a, \\ \frac{\Omega_0 a^2}{2r}, & r \geq a. \end{cases}$$

Таким образом, внутри кругового вихря скорость изменяется по линейному закону, а вне вихря — по гиперболическому закону убывания. Такое движение вызывает понижение давления в центре вихря (см. задачу 14.8).

Задача 5.3. Рассмотреть безвихревое движение жидкости с постоянной плотностью ($\rho = \text{const}$), вызванное бесконечным цилиндрическим источником (стоком) кругового сечения — совокупностью прямых, параллельных оси Z , с плотностью q распределения на них источников (стоков) и сплошным образом заполняющих круговой цилиндр радиуса a так, что $q = q(x, y)$.

Решение. В плоскости любого поперечного сечения цилиндрического источника (стока) введем полярные координаты r, θ с началом на оси цилиндра. Тогда в области внутри круга радиуса a справедливы уравнения

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q(r, \theta), \quad (q(r, \theta) = q(r, \theta + 2\pi)), \quad (r \leq a),$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{v} = 0.$$

Первое из этих уравнений может быть получено из (1.108), для среднего значения $\widetilde{\text{div}} \mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \equiv \mathbf{A}$) по объему ΔV , т. е.

$$\Delta V \widetilde{\text{div}} \mathbf{v} = Q(\mathbf{r}, \Delta V),$$

где \mathbf{r} определяет некоторую точку внутри ΔV . В пределе получаем $\text{div} \mathbf{v} = q(\mathbf{r})$, где

$$q(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q(\mathbf{r}, \Delta V)}{\Delta V} \quad \text{— объемная плотность распределения источников (см. также § 13,}$$

уравнение неразрывности для среды переменной массы).

Второе уравнение отражает отсутствие вихрей в области цилиндрического источника.

В полярных координатах эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = rq, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0. \quad (2)$$

Если считать $q(r, \theta)$ известной функцией, то можно ввести непрерывную функцию $\psi(r, \theta)$ так, чтобы

$$rv_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \int_0^r r' q(r', \theta) dr', \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Тогда уравнение (1) выполняется тождественно.

Эта функция в силу (2) должна удовлетворять следующему уравнению Пуассона:

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r^2} \int_0^r r' \frac{\partial q(r', \theta)}{\partial \theta} dr'. \quad (3)$$

Рассмотрим случай $q = q(r)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Ищем такое решение этого уравнения, для которого в области кругового источника (стока) $v_r = v_r(r)$, $v_\theta = 0$. Таким решением будет $\psi = C_0 \theta$. Тогда

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0,$$

$$v_r = \frac{C_0}{r} + \frac{1}{r} \int_0^r r' q(r') dr'.$$

Но поскольку суммарная мощность всех распределенных по кругу источников (стоков) равна

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a q(r') r' dr' d\varphi = 2\pi \int_0^a r' q(r') dr',$$

а, с другой стороны, объемный расход жидкости через окружность радиуса a равен

$$2\pi a v_r(a) = 2\pi a \left(\frac{C_0}{a} + \frac{1}{a} \int_0^a r' q(r') dr' \right) = Q = 2\pi \int_0^a r' q(r') dr',$$

то $C_0 = 0$.

Таким образом, окончательно для области в виде круга, заполненного непрерывно распределенными источниками (стоками), имеем поле скоростей

$$v_\theta = 0; \quad v_r = \frac{1}{r} \int_0^r r' q(r') dr' \quad (r \leq a).$$

При $q = q_0 = \text{const}$ получаем $v_r = \frac{q_0 r}{2}$.

Если цилиндрический источник (сток) не изолирован от жидкости в области $r > a$, то он приводит в движение эту жидкость.

Для области вне круга с непрерывно распределенными источниками (стоками) согласно (1.118) имеем

$$d\mathbf{v} = \frac{q \mathbf{R} dS}{2\pi R^2},$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки расположения источника мощностью $q dS$ в точку, где определяется скорость \mathbf{v} . Отсюда следует

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{q(\mathbf{r})(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}|^2} dS = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{q(\mathbf{r})}{R} \mathbf{i}_R dS.$$

Проводя вычисления, аналогичные вычислениям задачи 5.2, получаем для $q = q_0$ и $r_0 > a$:

$$v_x(r_0, \theta_0) = \frac{q_0 a^2}{2r_0} \cos \theta_0; \quad v_y(r_0, \theta_0) = \frac{q_0 a^2}{2r_0} \sin \theta_0.$$

Таким образом,

$$v_\theta = 0, \quad v_r(r_0, \theta_0) = \frac{q_0 a^2}{2r_0}.$$

Итак, поле скорости среды у цилиндрического источника (стока) с постоянной плотностью распределения q_0 имеет вид

$$v_{\theta} = 0, \quad v_r = \begin{cases} \frac{q_0 r}{2}, & r \leq a, \\ \frac{q_0 a^2}{2r}, & r \geq a. \end{cases}$$

При этом для стока $q_0 < 0$, а источника $q_0 > 0$.

Здесь характер распределения радиальной скорости такой же, как трансверсальной скорости у цилиндрического вихря.

Задача 5.4. Сферический вихрь Хилла. Найти установившееся осесимметричное течение от распределенных завихренностей Ω внутри сферы радиуса a (сферический вихрь Хилла). Жидкость предполагается невязкой и несжимаемой, массовые силы — потенциальными.

Решение. Осесимметричный поток образуется от системы круговых вихрей, названных на ось симметрии (см. задачу 5.1). Подберем такую их конфигурацию, чтобы одна из поверхностей тока движения от них являлась сферой радиуса a .

Введем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) , в которой запишем единственную отличную от нуля (ибо $\Omega = \Omega \mathbf{i}_{\varphi}$, а $\mathbf{v} = \mathbf{i}_z v_z + \mathbf{i}_{\rho} v_{\rho}$ для потока от кольцевых вихрей с центрами на оси z) проекцию уравнения (2) из задачи 4.6. Имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\Omega v_z) + \frac{\partial}{\partial \rho} (\Omega v_{\rho}) = 0. \quad (1)$$

На основании уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial z} (v_z \rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_{\rho}) = 0$$

введем функцию тока $\psi = \psi(\rho, z)$ так, что (см. (1.95))

$$v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}, \quad v_{\rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) = 0. \quad (2)$$

Для установившегося движения

$$\frac{\Omega}{\rho} = f(\psi). \quad (3)$$

Это следует из того, что $\frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) = 0$ в случае стационарного движения дает:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) = 0, \text{ т. е. } \frac{\Omega}{\rho} \text{ остается постоянным вдоль любой линии тока } (\psi = \text{const}).$$

Записывая это соотношение в сферических координатах (r, θ, φ) и подставляя $\rho = r \sin \theta$, получаем

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} = f(\psi). \quad (4)$$

Уравнение неразрывности в сферических координатах

$$\frac{\partial}{\partial r}(v_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta r \sin \theta) = 0$$

позволяет ввести функцию тока на основании соотношений (см. (1.96))

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

так что (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = -r^2 f(\psi) \sin \theta. \quad (5)$$

Функцию тока, удовлетворяющую условиям задачи, можно получить из (5), если положить $f(\psi) = -A = \text{const}$. Тогда, отыскивая решение этого уравнения в виде $\psi = F(r) \sin^2 \theta$, получаем для $F(r)$ уравнение

$$r^2 F'' - 2F' = Ar^4,$$

откуда

$$F(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r^2 + \frac{A}{10} r^4.$$

Определяя c_1 и c_2 из условий конечности ψ во всех точках внутри сферы и равенства нулю ψ на сфере, т. е. $F(a) = 0$, получаем

$$\psi = -\frac{A}{10} (a^2 - r^2) r^2 \sin^2 \theta, \quad r \leq a.$$

При этом завихренность (см. (3))

$$\Omega = -A\rho$$

меняется линейно с расстоянием ρ от оси симметрии. Вихревые линии — это ($\rho = \text{const}$) окружности в плоскостях, перпендикулярных оси симметрии с центрами на ней (рис. 45).

В меридиональной плоскости можно найти кольца, на которых расположены критические точки, где $v_r = v_\theta = 0$. Имеем

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{A}{5} (a^2 - r^2) \cos \theta = 0,$$

$$v_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{A}{10r \sin \theta} [2a^2 r - 4r^3] \sin^2 \theta = \frac{A}{5} (a^2 - 2r^2) \sin \theta = 0.$$

Отсюда $\theta = \pm \pi/2$, $r = a/\sqrt{2}$. Одна из этих точек на рис. 45 обозначена A .

Поверхности тока определяет уравнение

$$(a^2 - r^2) r^2 \sin^2 \theta = \text{const.}$$

Здесь есть и сфера ($r = a$), и ось симметрии ($\theta = 0$).

Линии тока в меридиональной плоскости ($\theta = \pi/2$) изображены на рис. 45. Их уравнения в меридиональной плоскости $\varphi = \text{const}$ имеют вид $(a^2 - z^2 - \rho^2) \rho^2 = \text{const}$, поскольку $r^2 = z^2 + \rho^2$, $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$.

Сферический вихрь может играть роль присоединенного вихря, т.е. имитировать обтекание сферы плоскопараллельным потоком.

Для этого определим значение функции тока (обозначим ее через $\psi_0(R, \theta)$) обтекания сферы радиуса a однородным потоком со скоростью v_{∞} , используя уже полученное (см. задачу 4.5) значение потенциала этого потока

$$\varphi(r, \theta) = v_{\infty} r \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta$$

($\mathbf{W} = -\mathbf{v}_{\infty}$).

Поскольку в сферических координатах

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}; \quad v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial r},$$

то, подставляя значения $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ в интеграл

$$\begin{aligned} \psi_0(r, \theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} d\theta + \int_{r_0}^r \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right)_{\theta=\theta_0} dr + \text{const} = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\theta - \int_{r_0}^r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} \sin \theta_0 dr + \text{const}, \end{aligned}$$

после интегрирования получаем

$$\psi_0(r, \theta) = \frac{1}{2} v_{\infty} r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) + \text{const.}$$

Если потребовать, чтобы касательные скорости на поверхности сферы совпадали, т.е.

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right|_{r=a},$$

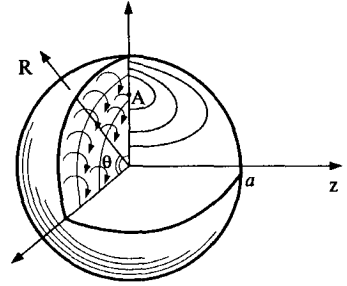


Рис. 45

то получим значение $A = (15v_\infty)/2r^2$. Тогда функцию тока течения вокруг сферы, внутри которой есть движение среды, можно записать в виде

$$\psi = -\frac{3v_\infty}{4r^2} (a^2 - r^2)r^2 \sin^2 \theta \quad (r \leq a),$$

$$\psi = \frac{v_\infty}{2} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) r^2 \sin^2 \theta \quad (r \geq a).$$

Задача 5.5. Рассмотреть поле от вихревой пелены в виде боковой поверхности бесконечного цилиндра произвольного поперечного сечения с постоянной интенсивностью $|\boldsymbol{\Upsilon}| \equiv \gamma$, причем вектор $\boldsymbol{\Upsilon}$, будучи расположен в касательной плоскости, всюду перпендикулярен образующим цилиндра, так что вихревые линии представляют собой одинаковые плоские кривые (рис. 46, а). Показать, что внутри цилиндра поле постоянно и направлено вдоль оси цилиндра, а вне его — равно нулю. Рассмотреть случай, когда вектор $\boldsymbol{\Upsilon}$ направлен по образующим цилиндрической вихревой пелены (рис. 46, б).

Решение. Согласно (1.136) и в применении к рассматриваемому случаю поле в точке M (см. рис. 46, а) равно

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\boldsymbol{\Upsilon}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\sigma' = \frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_L \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

ибо $\boldsymbol{\Upsilon} = \gamma d\mathbf{L}/|d\mathbf{L}|$, $d\sigma' = dz|d\mathbf{L}|$.

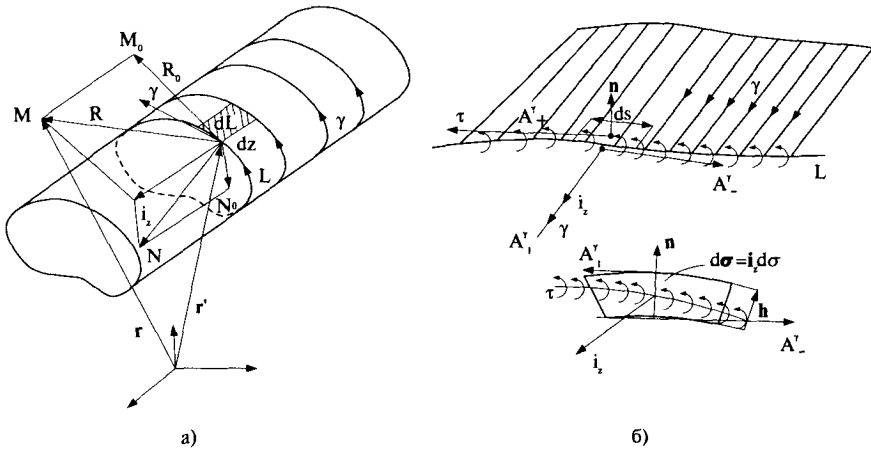


Рис. 46

Поскольку $\mathbf{R} = \mathbf{i}_z z + \mathbf{R}_0$, где \mathbf{R}_0 — вектор в плоскости поперечного сечения, то, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_L \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{R}}{R^3} = \int_L \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d\mathbf{L} \times \mathbf{i}_z) z + d\mathbf{L} \times \mathbf{R}_0}{(z^2 + R_0^2)^{3/2}} dz = 2 \int_L \frac{d\mathbf{L} \times \mathbf{R}_0}{R_0^2} = 2\mathbf{i}_z \int_L d\omega,$$

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЗНАЧЕНИЮ ЕГО ВИХРЯ И ДИВЕРГЕНЦИИ

где $d\omega$ — угол в плоскости поперечного сечения, стягиваемый отрезком dL , с вершиной в точке M_0 . Очевидно, что если точка лежит вне цилиндра (точка M), то интегрирование по L дает равный нулю интеграл $\int d\omega = 0$; если точка лежит внутри цилиндра (точка N), изменение этого угла, наблюдаемое из N_0 , при интегрировании по L равно 2π , так что $\mathbf{A}(M) = 0$, но $\mathbf{A}(N) = \gamma \mathbf{i}_z$.

Для случая $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{i}_z \gamma(S)$ из (1.136) имеем (см. рис. 46, б)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(M) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\sigma' = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_L \gamma(S') \frac{\mathbf{i}_z \times \mathbf{R}}{R^3} dS' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_L \gamma(S') \frac{\mathbf{i}_z \times (\mathbf{i}_z z + \mathbf{R}_0)}{(z^2 + R_0^2)^{3/2}} dS' = \frac{1}{4\pi} \int_L \gamma(S') (\mathbf{i}_z \times \mathbf{R}_0) dS' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R_0^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_L \gamma(S') \frac{\mathbf{i}_z \times \mathbf{R}_0}{R_0^2} dS'. \end{aligned} \quad (1)$$

Если кривая L — незамкнутая и ее уравнение $y = y(x)$, причем $y(-a) = y(a) = 0$ в выбранной системе декартовых координат (x, y) в плоскости поперечного сечения, то выражение для поля вне пелены можно вычислить по формуле

$$\mathbf{A}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \gamma(x', y'(x')) \frac{\mathbf{i}_y (x - x') - \mathbf{i}_x (y - y'(x'))}{(x - x')^2 + (y - y'(x'))^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy'(x')}{dx'} \right)^2} dx'. \quad (2)$$

Задача 5.6. Волны в упругой изотропной среде. Уравнение, которому подчиняется поле смещений $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ в линейно упругой среде при отсутствии массовых сил, имеет вид (см. § 4, гл. II (2.149))

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = a_1^2 \Delta \mathbf{u} + a_2^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u},$$

где a_1, a_2 — постоянные, связанные с плотностью и модулями упругости среды. Пусть поле $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ исчезает вместе со своими производными $\partial \mathbf{u} / \partial x_k$ на бесконечности. Показать, что в упругой среде существует два типа волн, определяемых потенциальным вектором \mathbf{u}_l (продольные волны) и соленоидальным вектором \mathbf{u}_r (поперечные волны) и распространяющихся со скоростями соответственно a_2 и a_1 .

Решение. На основании теоремы Стокса — Гельмгольца имеем

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_r, \text{ где } \operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0, \operatorname{div} \mathbf{u}_r = 0. \quad (1)$$

Тогда, подставляя это представление в исходное уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} = a_1^2 (\Delta \mathbf{u}_l + \Delta \mathbf{u}_r) + a_2^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_l. \quad (2)$$

Возьмем операцию rot от обеих частей этого уравнения. Получаем в силу (1)

$$\text{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} - a_1^2 \Delta \mathbf{u}_r \right) = 0.$$

С другой стороны, вследствие $\text{div} \mathbf{u}_r = 0$, имеем

$$\text{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} - a_1^2 \Delta \mathbf{u}_r \right) = 0.$$

Таким образом, функция

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} - a_1^2 \Delta \mathbf{u}_r$$

является гармонической, исчезающей на бесконечности. Тогда

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} - a_1^2 \Delta \mathbf{u}_r = 0. \quad (3)$$

Беря операцию div от уравнения (2), получаем

$$\text{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - a_2^2 \Delta \mathbf{u}_l \right) = 0,$$

а поскольку $\text{rot} \mathbf{u}_l = 0$, то

$$\text{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - a_2^2 \Delta \mathbf{u}_l \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - a_2^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) — волновые, определяющие волновые процессы, причем скорость поперечной волны равна a_1 , а продольной a_2 . Эти волны могут существовать в упругом изотропном теле одновременно, причем поперечные волны распространяются без изменения объема частиц ($\text{div} \mathbf{u}_r = 0$), а в продольных волнах вектор смещения образует безвихревое поле ($\text{rot} \mathbf{u}_l = 0$).

Из теоремы Стокса — Гельмгольца следует, что представление (1) единственно и справедливо для любого поля смещений, удовлетворяющего условиям теоремы.

Задача 5.7. Поле вихревого диполя. Рассмотреть предельный случай поля от двух изолированных в плоскости вихрей, одинаковых по величине, но разных по знаку интенсивностей Γ , когда расстояние $|\delta \mathbf{R}|$ между вихрями стремится к нулю, а их интенсивности бесконечно возрастают, но существует предел

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty, |\delta \mathbf{R}| \rightarrow 0} \Gamma \delta \mathbf{R} = \mathbf{m}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (1.131). Имеем для искомого поля вихревого диполя

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(M) &= \lim_{\Gamma \rightarrow \infty, |\delta \mathbf{R}| \rightarrow 0} \left\{ \mathbf{A} \left(\mathbf{R} + \frac{\delta \mathbf{R}}{2}; \Gamma \right) + \mathbf{A} \left(\mathbf{R} - \frac{\delta \mathbf{R}}{2}; -\Gamma \right) \right\} = \\
 &= \lim_{\Gamma \rightarrow \infty, |\delta \mathbf{R}| \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mathbf{i}_3 dx_3 \times \left(\mathbf{R} + \frac{\delta \mathbf{R}}{2} \right)}{\left(R^2 + \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R} + \frac{\delta R^2}{4} + x_3^2 \right)^{3/2}} - \frac{\mathbf{i}_3 dx_3 \times \left(\mathbf{R} - \frac{\delta \mathbf{R}}{2} \right)}{\left(R^2 - \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R} + \frac{\delta R^2}{4} + x_3^2 \right)^{3/2}} \right) = \\
 &= \lim_{\Gamma \rightarrow \infty, |\delta \mathbf{R}| \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}_3 dx_3 \times \delta \mathbf{R}}{\left(R^2 + x_3^2 \right)^{3/2}} - 3 \frac{\mathbf{i}_3 dx_3 \times \mathbf{R} (\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R})}{\left(R^2 + x_3^2 \right)^{5/2}} + O((\delta R)^2) \right\} = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{m}) dx_3}{\left(R^2 + x_3^2 \right)^{3/2}} - 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{i}_3 \times \mathbf{R} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}) dx_3}{\left(R^2 + x_3^2 \right)^{5/2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Введем постоянный вектор, лежащий в плоскости течения $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{m}$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{m} = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{i}_3$ и поэтому

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{R} \cdot (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{i}_3) = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{R}) = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{i}_\varphi) R; \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{R} = \mathbf{i}_\varphi R,$$

где \mathbf{i}_φ — орт в системе полярных координат (R, φ) в плоскости течения. Вычисляя интегралы, получаем

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{2\pi R^2} (\boldsymbol{\lambda} - 2\lambda_\varphi \mathbf{i}_\varphi) = \frac{1}{2\pi R^2} (\lambda_R \mathbf{i}_R - \lambda_\varphi \mathbf{i}_\varphi) = \frac{1}{2\pi R^2} (m_R \mathbf{i}_R - m_\varphi \mathbf{i}_\varphi) \times \mathbf{i}_3.$$

Поскольку $\mathbf{A}(M) = \nabla \psi \times \mathbf{i}_3$, где ψ — функция тока, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{m_R}{2\pi R^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{m_\varphi}{2\pi R},$$

так что

$$\psi = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{2\pi R^2} = -\frac{m \cos \varphi}{2\pi R},$$

если $\mathbf{m} = -\mathbf{i}_1 m$. Линии тока схематически располагаются по отношению к \mathbf{m} так, как показано на рис. 47. При этом

$$A_r = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{m \sin \varphi}{2\pi R^2},$$

$$A_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial R} = -\frac{m \cos \varphi}{2\pi R^2}.$$

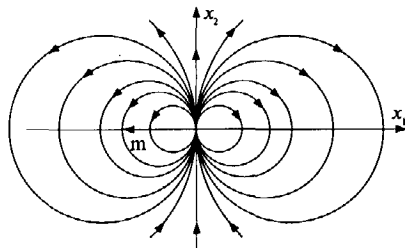


Рис. 47

Упражнения

1. Доказать, что для поля скоростей

$$\mathbf{v} = (\alpha x_3 - \beta x_2, \beta x_1 - \gamma x_3, \gamma x_2 - \alpha x_1)$$

вихревые линии являются прямыми. Написать их уравнения.

2. Определить линии равного потенциала для течения у вихревого диполя (задача 5.7).

3. Рассмотреть поле изолированного плоского диполя, помещенного в однородный поток. Показать, что при определенном соотношении между моментом диполя m и скоростью потока v_0 существует линия тока, в которую входит окружность радиуса R , отделяющая поток у диполя от однородного потока.

4. Определить поток от изолированного плоского источника мощностью Q , помещенного в точку $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ и стока той же мощности в точке $x_1 = a$, $x_2 = 0$. Показать, что при наложении на эти поля однородного потока со скоростью v_0 образуется замкнутая линия тока в виде овала, отделяющего этот поток от источника и стока. Каковы максимальные толщина и длина этого овала?

5. Определить линии равного потенциала для полей: 1) изолированного источника (стока), 2) изолированного диполя, 3) плоской вихревой пелены.

6. Определить потенциал простого и двойного слоя постоянной интенсивности на сфере радиуса R .

7. Рассмотреть течение у цилиндрического вихря эллиптического сечения; показать, что частицы в нем движутся по конфокальным эллиптическим орбитам.

8. Показать, что из формулы (2) задачи 5.5 в случае $\gamma = \text{const}$, $y(x) = 0$ при $a \rightarrow \infty$ следует формула (1.137).

§ 6. Безвихревые и соленоидальные поля скорости в неодносвязных областях

Рассмотрим в качестве поля \mathbf{A} скоростное поле среды ($\mathbf{A} = \mathbf{v}$). Как уже отмечалось, и потенциал безвихревого поля, и функция тока соленоидального поля могут быть многозначными функциями в неодносвязных областях потока. Это вызвано тем, что эти скалярные функции восстанавливаются по вектору поля при помощи криволинейных интегралов (ограничимся для наглядности рассмотрением плоских потоков среды):

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \int_{M_0}^M v_x dx + v_y dy, \quad (1.155)$$

$$\psi(M) = \psi(M_0) + \int_{M_0}^M v_x dy - v_y dx. \quad (1.156)$$

Напомним, что в безвихревом поле во всех его точках $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, а в соленоидальном — $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Наличие изолированных особенностей в двумерном поле нарушает связность его области определения.

Циклическое безвихревое поле. Однозначность функции потенциала

Функция $\varphi(x, y)$ будет однозначной, если для любых пар точек (M, M_0) интеграл (1.155) по любому замкнутому контуру, проходящему через M и M_0 , равен нулю, т. е.

$$\oint v_x dx + v_y dy = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = 0. \quad (1.157)$$

Так, если интеграл (1.157) по стягиваемому к точке контуру $(M_0 a M b M_0)$ (рис. 48) равен нулю, то по какому бы пути не идти из точки M_0 в M , при вычислении φ по формуле (1.155) мы всегда придем с одним и тем же значением $\varphi(M)$, ибо из того, что

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \int_{M_0 b M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} + \int_{M a M_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \int_{M_0 b M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} - \int_{M_0 a M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

следует $\int_{M_0 a M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \int_{M_0 b M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}$.

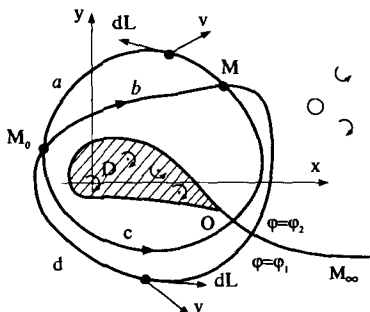


Рис. 48

Однако гарантировать равенство $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = 0$ для безвихревого поля ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) можно только для односвязной области, т. е. когда любой замкнутый контур без самопересечений является границей части плоскости, целиком лежащей в области определения поля. Тогда, действительно, из теоремы Стокса (1.79)

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{v} dS = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}$$

для безвихревого поля ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$) следует $\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = 0$ для любого замкнутого контура в области поля \mathbf{v} .

Если же область течения двухсвязная, т. е. из плоскости (x, y) удалена некоторая область D (заштрихованная на рис. 48), то замкнутый контур $M_0 c M b M_0$, охватывающий эту «дырку» в плоскости, уже не может ограничивать поверхность S , целиком лежащую в области определения поля, где $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Таким образом, гарантировать равенство нулю интеграла (1.157) по этому замкнутому контуру нельзя. Заметим, что этот контур нельзя непрерывно стянуть в точку, не выходя за пределы области. Наличие такого контура увеличивает связность области на единицу.

Итак, вообще говоря, для двухсвязной области интеграл по любому нестягиваемому непрерывным образом замкнутому контуру равен постоянной, т. е.

$$\oint_{M_0 c M a M_0} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \kappa_\Gamma, \quad (1.158)$$

(положительный обход замкнутого контура осуществляется против часовой стрелки).

Эта постоянная носит название *циклической постоянной* поля скорости \mathbf{v} . Таким образом, для безвихревого поля в двухсвязной области *циклическая постоянная равна циркуляции скорости по нестягиваемому контуру*.

То, что интегралы по любым двум нестягиваемым контурам, один раз охватывающим одну и ту же особенность («дырку»), одинаковы и равны одной и той же циклической постоянной \mathcal{K}_Γ , следует из теоремы Стокса, примененной к области между контурами M_0cMbM_0 и M_0dMbM_0 , т. е. между двумя нестягиваемыми кривыми (см. рис. 48). Их части M_0dM и McM_0 являются стягиваемой границей области, где $\text{rot } \mathbf{v} = 0$.

Рассмотренное безвихревое поле в двухсвязной области носит название *циклического поля*, если $\mathcal{K}_\Gamma \neq 0$. Его потенциал (1.155) является многозначной функцией. Следует заметить, что функция $\varphi(M)$, определяемая выражением (1.155), является непрерывной функцией от x и y (когда $\mathbf{v}(x, y)$ всюду конечна).

Если же $\mathcal{K}_\Gamma = 0$ по всем нестягиваемым контурам, то безвихревое поле называется *ациклическим*.

Примером циклического безвихревого поля может служить поле плоского изолированного вихря (см. пример 8 в § 5), расположенного в начале координат (θ — полярный угол)

$$\mathbf{v}(M) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \mathbf{i}_\theta.$$

Отсюда имеем

$$v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin\theta = -\frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)},$$

$$v_y = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos\theta = \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + y^2)}.$$

В начале координат $\mathbf{v} \rightarrow \infty$, так что из всей плоскости надо «выколоть» начало координат, чтобы получить непрерывное безвихревое поле $\mathbf{v}(x, y)$. Область определения этого безвихревого поля — двухсвязная, ибо любой контур, охватывающий начало координат, нестягиваемый. Потенциал поля имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x dx + v_y dy = \varphi_0 + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \\ &= \varphi_0 + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} d\left(\arctg \frac{y}{x}\right) = \varphi_0 + \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta)_{x_0, y_0}^{x, y} = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta(x, y). \end{aligned}$$

Циклическая постоянная \mathcal{K}_Γ равна Γ — интенсивности изолированного вихря, ибо каждый раз, обходя начало координат и приходя в ту же точку $M(x, y)$, мы увеличиваем значение φ на $\frac{\Gamma}{2\pi} \cdot 2\pi = \Gamma$ (рис. 49, а).

Примером ациклического безвихревого поля с нестягиваемым контуром может служить поле изолированного плоского источника (1.118).

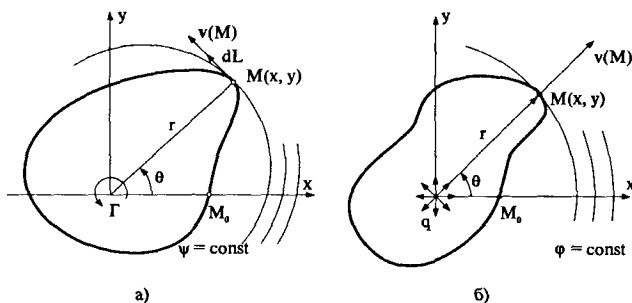


Рис. 49

Присоединенные особенности

Если рассматривать область D (см. рис. 48) как сечение бесконечного твердого цилиндра, обтекаемого безвихревым плоским потоком со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, то такое обтекание называется *бесциркуляционным*, если $\kappa_\Gamma = \Gamma = 0$, или *циркуляционным* (с циркуляцией), если $\Gamma \neq 0$. При этом, конечно, следует иметь в виду, что само течение — безвихревое ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$ всюду вне области D). При циркуляционном обтекании условно считают, что в области D происходит некоторое фиктивное движение жидкости с изолированным вихрем интенсивностью Γ , и это приводит к тому, что циркуляция скорости по нестягиваемому контуру, охватывающему область D , отлична от нуля и равна Γ . Такой фиктивный вихрь в гидромеханике носит название *присоединенного вихря*. Вместо одного вихря можно внутри области D расположить (см. рис. 48) систему изолированных вихрей с суммарной интенсивностью Γ (в фиктивном течении внутри D) и попытаться разместить их так, чтобы контур области D был линией тока. Тогда при помощи присоединенных вихрей обтекание твердого контура (границы области D) будет смоделировано наиболее полным образом. Этот метод присоединенных вихрей широко известен в гидромеханике.

Аналогично присоединенным вихрям внутри D можно поместить и другие *присоединенные особенности* — источники, стоки, диполи и др.

Иногда предпочитают иметь дело с однозначным потенциалом при изучении обтекания плоским потоком бесконечных цилиндров задан-

ного сечения. В этом случае можно превратить двухсвязную область потока в односвязную, проведя дополнительный разрез ее «от границы до границы» (в данном примере от точки на границе области D до бесконечно удаленной точки). На рис. 48 такой разрез изображен в виде линии OM_∞ . Обе стороны этой линии следует рассматривать как границы потока, на которых потенциал терпит разрыв, равный величине циклической постоянной, т. е. $\varphi_1 - \varphi_2 = \kappa_\Gamma$.

Циклическое соленоидальное поле. Однозначность функции тока

Как нельзя гарантировать однозначность потенциала безвихревого поля в двухсвязной области, если только $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} \neq 0$ для нестягиваемых замкнутых контуров, так нельзя говорить и об однозначной функции тока ψ в двухсвязных областях, если на таких нестягиваемых контурах

$$\oint \nabla \psi \cdot d\mathbf{L} = \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL \neq 0.$$

Это следует из определения функции тока (1.156):

$$\begin{aligned} \psi(M) &= \psi(M_0) + \int_{M_0}^M v_x dy - v_y dx = \psi(M_0) + \int_{M_0}^M \nabla \psi \cdot d\mathbf{L} = \\ &= \psi(M_0) + \int_{M_0}^M \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Последняя форма криволинейного интеграла следует из того, что для плоского потока $\mathbf{v} = (\nabla \psi \times \mathbf{i}_z)$, так что $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (\nabla \psi \times \mathbf{i}_z) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{i}_z \times \mathbf{n}) \cdot \nabla \psi = \nabla \psi \cdot d\mathbf{L}/dL$. Ее можно получить и из того, что $d\psi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL$.

Следовательно, в случае соленоидального поля в двухсвязной области (вся плоскость (x, y) с выброшенной областью D) циклическая постоянная поля равна

$$\oint_{M_0 c M a M_0} \nabla \psi \cdot d\mathbf{L} = \oint_{M_0 c M a M_0} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL = \kappa_D. \quad (1.160)$$

Эта величина равна суммарной мощности источников и стоков внутри контура интегрирования, в частности, мощности присоединенных (фиктивных) источников и стоков внутри области D (рис. 50).

Если $K_Q \neq 0$, то соленоидальное поле называется *циклическим*. Если для всех нестягиваемых контуров $K_Q = 0$, то говорят об *ациклическом соленоидальном поле*. Очевидно, что если граница области D непроницаема для среды, т. е. на ней $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, то такое соленоидальное поле будет ациклическим. Граница может быть и проницаемой, но если интеграл (1.160) равен нулю, то поле — ациклическое.

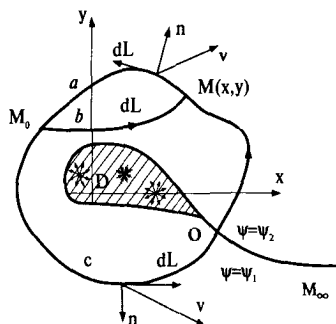


Рис. 50

Таким образом, для *циклического соленоидального поля в двухсвязной области циклическая постоянная равна объемному расходу среды через нестягиваемый контур*.

Как и K_Γ , величина K_Q одинакова для всех нестягиваемых контуров, один раз охватывающих одну и ту же «дырку» в плоскости.

Циклическое соленоидальное поле имеет многозначную функцию тока, определяемую выражением (1.159), которая каждый раз при положительном обходе нестягиваемого контура увеличивается на K_Q . Эта функция, тем не менее, как и многозначный потенциал (1.155), всюду непрерывна (если \mathbf{v} — конечно). Сделав разрез в двухсвязной области «от границы до границы» и превратив ее в односвязную, следует иметь в виду, что на линии разреза функция тока будет разрывной (см. рис. 50), причем

$$\psi_1 - \psi_2 = K_Q. \tag{1.161}$$

Примером циклического соленоидального поля может служить поле плоского изолированного источника (стока) (см. пример 3 в § 5), расположенного в начале координат. Для него из (1.118) получаем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{2\pi r^2}$$

и, следовательно:

$$v_x = \frac{q}{2\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2)}; \quad v_y = \frac{q}{2\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2)};$$

$$\psi(M) = \psi(M_0) + \int_{M_0}^M v_x dy - v_y dx = \psi(M_0) + \frac{q}{2\pi} \int_{M_0}^M \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} =$$

$$= \psi(M_0) + \frac{q}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)_{M_0}^M = \frac{q}{2\pi} \theta(x, y).$$

Циклическая постоянная $K_Q = q$ равна мощности источника. Следует отметить, что здесь линиями тока служат лучи, исходящие из начала координат, а функция тока совпадает с потенциальной функцией изолированного в начале координат вихря.

В то же время данное соленоидальное поле является одновременно и безвихревым, ибо $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ всюду, кроме начала координат. Поэтому, определяя по (1.155) его потенциал, получим

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= \varphi(M_0) + \int_{M_0}^M \frac{q}{2\pi} \frac{xdx}{x^2 + y^2} + \frac{q}{2\pi} \frac{ydy}{x^2 + y^2} = \\ &= \varphi(M_0) + \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)_{M_0}^M = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, линиями равного потенциала служат окружности с центрами в начале координат. Для поля изолированного источника потенциальная функция однозначна, поскольку $K_\Gamma = 0$. Точно так же для ранее рассмотренного поля изолированного вихря, где функция потенциала многозначна, однозначной будет функция тока, ибо в нем $K_Q = 0$ и уравнение линий тока $r^2 = x^2 + y^2 = \operatorname{const}$ (см. рис. 49, б).

Гармоническое поле.

**Циклическая
и ациклическая**

Если всюду $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, то в таком безвихревом соленоидальном поле можно определить, используя (1.155) и (1.156), как потенциал $\varphi(x, y)$, так и функцию тока $\psi(x, y)$.

При этом в неодносвязной области эти функции могут быть либо обе, либо каждая порознь неоднозначными. Если по всем нестягиваемым контурам $K_Q = K_\Gamma = 0$, то говорят об *ациклическом безвихревом соленоидальном поле*. Если хотя бы по одному нестягиваемому контуру K_Γ или K_Q не равно нулю, то такое поле называется *циклическим*. При этом, если $K_\Gamma \neq 0$, а $K_Q = 0$, то потенциал этого поля является многозначной функцией, в то время как функция тока однозначна; если же $K_\Gamma = 0$, а $K_Q \neq 0$, то неоднозначна функция тока, а потенциал однозначен. Эти положения уже проиллюстрированы примерами полей изолированных плоских источников и вихрей. Заметим, что поле изолированного диполя является «дважды» ациклическим: для него однозначны и функция тока, и потенциал поля.

О связности области в трехмерном пространстве

В этом параграфе, как уже отмечалось, речь шла только о двумерных потоках среды. Поэтому и область потока рассматривалась как область на плоскости (евклидовой).

Для случая пространственных потоков следует рассматривать связность области потока в трехмерном евклидовом пространстве.

Будем считать, что в таком пространстве область потока V односвязна, если любую замкнутую кривую, лежащую в V , можно путем непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя за пределы области. В противном случае область V называется многосвязной.

Неограниченное пространство, область между двумя концентрическими сферами, внутренняя область сферы, внешняя область по отношению к некоторому количеству сфер — все это односвязные области. Область между двумя концентрическими бесконечными цилиндрами, область вне вихревых трубок, область внутри тора («баранки») — многосвязны.

Иногда о таких областях, связность которых определяют с помощью стягиваемых контуров, говорят как о *поверхностно-односвязных* и *поверхностно-многосвязных* областях. При этом имеют в виду, что существует другое определение связности области в трехмерном пространстве, а именно: определяют *пространственно-односвязную* область как такую, в которой любую замкнутую *поверхность* можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя за пределы области. В таком случае область вне сферы хотя и будет *поверхностно-односвязной*, но в то же время она *пространственно-многосвязна*, а *поверхностно-многосвязная* внутренность тора будет *пространственно-односвязной* областью.

Формула Грина для многосвязных областей

Кельвину — Томсону принадлежит обобщение формулы Грина для многосвязных областей и многозначных функций.

Пусть область V , имеющая границу S , — двухсвязная; при помощи разреза — дополнительно проведенной поверхности σ — она превращена в односвязную область, и в ней уже нельзя провести нестягиваемых контуров. В этой области рассматриваются функции Ψ и φ , причем пусть функция φ — циклична.

Тогда в интеграле по поверхности формулы Грина (1.83) должна быть учтена дополнительная поверхность σ , так что вместо (1.83) для области V имеем

$$\int_V (\varphi \Delta \Psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS + \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma.$$

Поскольку на разных сторонах (σ_1 и σ_2) поверхности σ функция φ имеет разные значения (φ_1 и φ_2) и на этих сторонах $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\sigma_1} = - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{\sigma_2}$, то имеем

$$\int_V (\varphi \Delta \Psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \Psi) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS + \kappa \int_{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\sigma,$$

где $\kappa = \varphi_2 - \varphi_1$, а положительное направление нормали взято на стороне σ_2 .

Если область V — многосвязна, то, проведя соответствующее количество разрезов, получим

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS + \kappa_1 \int_{\sigma_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma + \kappa_2 \int_{\sigma_2} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma + \dots$$

Отметим, что в случае многозначной гармонической функции φ и $\psi = 1/r$, отсюда можно получить представление для φ , подобное (1.97); дополнительные слагаемые в правой части этого представления $\left(\kappa_i \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma \right)$ суть части функции φ , которые вносятся диполями, равномерно распределенными по σ_i с плотностью κ_i .

Задачи с решениями

Задача 6.1. *Определить в плоской области S с замкнутой границей L поле $\mathbf{A} = (A_1(x_1, x_2), A(x_1, x_2), 0)$, удовлетворяющее условиям*

$$1) \operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \quad 2) \oint_L [\mathbf{A} - (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{r})] \cdot d\mathbf{L} = 0; \quad 3) \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_L = 0.$$

Рассмотреть случай многосвязной области S , в которой второе условие выполнено для любого (в том числе и нестягивающегося) контура.

Решение. Ищем соленоидальный вектор \mathbf{A} в виде: $\mathbf{A} = \nabla \psi \times \mathbf{i}_3$, где функция $\psi = \psi(x_1, x_2)$ подлежит определению. Из второго условия следует, что $\mathbf{A} - (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{r}) = \nabla \varphi$, где φ — однозначная (даже в многосвязной области) функция. В силу $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ (первое условие) и $\operatorname{div} (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{r}) = 0$ эта функция — гармоническая, т. е. $\Delta \varphi = 0$.

Имеем

$$\mathbf{i}_3 \times \nabla \varphi = \mathbf{i}_3 \times \{ \nabla \psi \times \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \times \mathbf{r} \} = \mathbf{i}_3 \times \{ (\nabla \psi + \mathbf{r}) \times \mathbf{i}_3 \} = \nabla \psi + \mathbf{r}.$$

Отсюда, беря операцию div от обеих частей, получаем

$$\Delta \psi = -2,$$

так что функция ψ удовлетворяет уравнению Пуассона. Граничное условие для ψ следует из условия (3):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}|_L = (\nabla \psi \times \mathbf{i}_3) \cdot \mathbf{n}|_L = \nabla \psi \cdot (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{n})|_L = \nabla \psi \cdot \boldsymbol{\tau}|_L = 0,$$

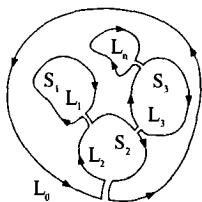
где $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{i}_3 \times \mathbf{n})$ — орт касательной к контуру L . Таким образом, на контуре L функция ψ , определяющая поле \mathbf{A} , постоянна и находится из задачи

$$\Delta \psi = -2; \quad \psi|_L = C_0 = \text{const}.$$

Если область односвязная, то всегда можно принять $C_0 = 0$, поскольку ψ определена с точностью до константы. Если область S многосвязная (рис. 51), так что ее граница состоит из контуров $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$, то условие $\psi|_L = \text{const}$ должно быть задано для каждого из контуров, т. е.

$$\psi|_{L_k} = C_k.$$

Тогда, записывая условие (2) для каждого из контуров L_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$), образующих границу, имеем



$$\oint_{L_k} \{(\nabla\psi + \mathbf{r}) \times \mathbf{i}_3\} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{L_k} \{\nabla\psi \times \mathbf{i}_3\} \cdot d\mathbf{L} + \oint_{L_k} (\mathbf{r} \times \mathbf{i}_3) \cdot d\mathbf{L} = 0.$$

Поскольку $d\mathbf{L} = dL(\mathbf{i}_3 \times \mathbf{n})$, то отсюда получаем

$$\oint_{L_k} \frac{\partial\psi}{\partial n} dL + \oint_{L_k} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dL = 0,$$

Рис. 51 или

$$\oint_{L_k} \frac{\partial\psi}{\partial n} dL = -S_k,$$

где S_k — площадь, ограниченная контуром L_k . Это условие может быть использовано для определения C_k (см., например, [52], § 9.8).

Рассмотренная задача имеет несколько механических интерпретаций (см., например, [60]), из которых укажем на две.

1) *Кручение призматических стержней.* В этом случае компоненты вектора \mathbf{A} представляют две отличных от нуля компоненты тензора напряжений ($A_1 = p_{13}$, $A_2 = p_{23}$); функция $\mu'\gamma\psi$ — так называемая функция кручения Прандтля, $\mu'\gamma\phi$ — функция кручения, введенная Сен-Венаном, где $2\mu'$ — сдвиговой модуль упругости, γ — погонный угол закручивания. Зависимость внешнего (приложенного к бесконечному стержню) крутящего момента M от γ определяется из соотношения ($\mathbf{A} = \mu'\gamma(\nabla\psi \times \mathbf{i}_3)$):

$$\begin{aligned} M &= \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{i}_3 dS = \mu'\gamma \int_S \{\mathbf{r} \times (\nabla\psi \times \mathbf{i}_3)\} \cdot \mathbf{i}_3 dS = \\ &= -\mu'\gamma \int_S (\mathbf{r} \cdot \nabla\psi) dS = -\mu'\gamma \int_S \operatorname{div} \mathbf{r}\psi dS + 2\mu'\gamma \int_S \psi dS \end{aligned}$$

В случае многосвязной области S , образуя путем разрезов (см. рис. 51) из нее односвязную с границей $L = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n$ (устанавливая на контурах L_1, \dots, L_n направление обхода, как показано на рис. 51), получаем возможность применить теорему Гаусса — Остроградского к первому интегралу в выражении для M . Имеем

$$M = -\mu'\gamma \int_L (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \psi dL + 2\mu'\gamma \int_S \psi dS = -\mu'\gamma \left\{ SC_0 - \sum_{k=1}^n S_k C_k - 2 \int_S \psi dS \right\},$$

где S_k — площадь, ограниченная контуром L_k .

В случае односвязной области, принимая $C_0 = 0$, отсюда получаем выражение крутящего момента M через угол закручивания γ , модуль сдвига $2\mu'$ и жесткость стержня при кручении $\int_S \psi dS$

$$M = 2\mu'\gamma \int_S \psi dS.$$

§ 6. БЕЗВИХРЕВЫЕ И СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ПОЛЯ СКОРОСТИ В НЕОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

2) Течение вязкой несжимаемой жидкости по бесконечной трубе поперечного сечения S . В этом случае скорость вдоль оси трубы $\mathbf{v} = (0, 0, v_3(x_1, x_2))$ удовлетворяет, как будет показано в гидромеханике, уравнению и граничному условию

$$\Delta v_3 = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx_3}, \quad v_3|_L = 0,$$

где μ — коэффициент вязкости, dp/dx_3 — постоянный продольный градиент давления.

Вектор \mathbf{A} может быть сопоставлен с вихрем скорости, т. е.

$$\mathbf{A} = - \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_3} \right)^{-1} \text{rot } \mathbf{v},$$

а функция ψ — с компонентой v_3 :

$$\psi = - \left(\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_3} \right)^{-1} v_3(x_1, x_2).$$

Тогда расход Q через поперечное сечение трубы может быть сопоставлен с крутящим моментом M , поскольку

$$Q = \int_S v_3 dS = - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_3} \int_S \psi dS = - \frac{M}{4\mu' \gamma} \frac{dp}{dx_3}.$$

Этим соотношением можно воспользоваться для определения расхода вязкой жидкости через трубу сложного поперечного сечения по значению приложенного крутящего момента на стержне того же сечения.

Упражнения

1. Показать, что поле диполя (1.129) является ациклическим.
2. Вычислить плоское поле скоростей от равномерно распределенных по кругу радиуса a источников и показать, что для этого поля $\kappa_\Gamma = 0$, а $\kappa_Q = \pi a^2 q$.

§ 7. Поле скоростей деформируемой частицы

Теорема Гельмгольца Как известно, поле скоростей $\mathbf{v}^T(t, \mathbf{r})$ в недеформируемом твердом теле представляется следующим выражением

$$\mathbf{v}^T(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}^T(t, \mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\omega}^T \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.162)$$

где $\mathbf{v}^T(t, \mathbf{r}_0)$ — скорость полюса O , $\boldsymbol{\omega}^T$ — мгновенная угловая скорость вращения, одинаковая для всех точек твердого тела (вообще говоря, $\boldsymbol{\omega}^T = \boldsymbol{\omega}^T(t)$).

Это поле представляет собой линейную зависимость от координат точек. Нетрудно показать, что независящая от координат угловая скорость $\boldsymbol{\omega}^T$ выражается через вихрь поля скоростей:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v}^T &= \text{rot} (\boldsymbol{\omega}^T \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) = ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}^T - (\boldsymbol{\omega}^T \cdot \nabla)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \\ &+ \boldsymbol{\omega}^T \text{div} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \text{div} \boldsymbol{\omega}^T = -\boldsymbol{\omega}^T + 3\boldsymbol{\omega}^T = 2\boldsymbol{\omega}^T, \end{aligned}$$

так что $\boldsymbol{\omega}^T$ определяет однородную завихренность линейного поля скоростей недеформируемого твердого тела

$$\boldsymbol{\omega}^T = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}^T.$$

Для твердой недеформируемой *частицы* поле скоростей можно записать в виде

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) = \mathbf{v}^T(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\omega}^T \times d\mathbf{r}, \quad (1.163)$$

где $\mathbf{v}^T(\mathbf{r}) = \mathbf{v}^T(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r})$ — скорость любой точки в малой окрестности полюса O . Здесь и в дальнейшем, для краткости, в большинстве записей мы не отмечаем возможную нестационарность, рассматривая время как параметр, поскольку нас будет интересовать, в первую очередь, неоднородность поля скоростей.

Формулу (1.163) можно рассматривать как разложение (с точностью до малых второго порядка) поля скоростей твердой частицы в окрестности точки O .

Для поля скоростей *деформируемой частицы* сплошной среды мы должны исходить из общего вида разложения непрерывной вектор-функ-

ции $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в окрестности точки O , а именно (в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2, x_3)):

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \right)_0 dx_k + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_k \partial x_m} \right)_0 dx_k dx_m + \dots, \quad (1.164)$$

где значения производных берутся в полюсе O (точке разложения).

Ограничиваясь далее малыми первого порядка, имеем для компонент v_i :

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) &= v_i(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)_0 dx_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)_0 dx_k = \\ &= v_i(\mathbf{r}_0) + \omega_{ik} dx_k + v_{ik} dx_k. \end{aligned} \quad (1.165)$$

Здесь

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)_0 = -\omega_{ki}$$

— компоненты антисимметричного тензора, а

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)_0 = v_{ki}$$

— компоненты симметричного тензора второго ранга.

Тензор v_{ik} носит название *тензора скоростей деформации*.

В силу того, что любой антисимметричный тензор второго ранга эквивалентен некоторому аксиальному вектору (обозначим его $\boldsymbol{\omega}$), имеем

$$\omega_{ik} = \varepsilon_{ijk} \omega_j,$$

где ε_{ijk} — единичный псевдотензор Леви-Чивита (см. § 2).

При этом поскольку $\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{kj} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$, то

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}.$$

Тогда (1.165) можно записать в виде

$$v_i(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) = v_i(\mathbf{r}_0) + \varepsilon_{ijk} \omega_j dx_k + v_{ik} dx_k = v_i(\mathbf{r}_0) + (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r})_i + v_{ik} dx_k$$

или

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} + \mathbf{v}^D. \quad (1.166)$$

Здесь $(\mathbf{v}^D)_i \equiv v_{ik} dx_k$ — компоненты так называемой *деформационной скорости*.

Сравнивая (1.166) с выражением для поля скоростей твердой частицы (1.163), можно отметить идентичность структуры первых двух слагаемых. Именно таким будет поле скоростей в деформируемой частице, если представить ее в данный момент «мгновенно затвердевшей» (§ 2). Поэтому скорость

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} \equiv \mathbf{v}^{KT}$$

получила название скорости *кватитвердого движения*. Отличие \mathbf{v}^{KT} от \mathbf{v}^T , несмотря на схожесть формы, существенна: если в твердом теле $\boldsymbol{\omega}^T$ одинакова для всех его частиц, то в деформируемой среде

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$$

имеет, вообще говоря, разные значения для разных частиц.

И, наконец, последнее в (1.166) слагаемое \mathbf{v}^D и есть та существенная часть, которая отражает в поле скоростей любой частицы сплошной среды ее способность деформироваться. Она характеризует чисто деформационное движение частицы. Таким образом, окончательно имеем

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}^{KT}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}^D(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}).$$

В этом равенстве заключена *теорема Гельмгольца*, которая может быть сформулирована следующим образом.

Движение частицы сплошной среды можно в каждый момент времени представить в виде суммы

1) *кватитвердого движения со скоростью*

$$\mathbf{v}^{KT}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0) \times d\mathbf{r}, \text{ где } \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}_0),$$

равной сумме поступательного движения частицы вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса с угловой скоростью, равной половине значения вихря скорости в этой частице;

2) деформационного движения со скоростью, полностью определяемой значением тензора скоростей деформаций в этой частице

$$(\mathbf{v}^D)_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)_0 dx_k = (v_{ik})_0 dx_k. \quad (1.167)$$

Из хода доказательства этой теоремы становится ясным кинематический смысл вихря скоростного поля среды:

Вихрь поля скорости сплошной среды ($\text{rot } \mathbf{v}$) в каждый момент времени равен удвоенной угловой скорости собственного вращения частицы (мгновенного вращения вокруг оси, проходящей через частицу), находящейся в точке, где вычисляется $\text{rot } \mathbf{v}$.

Таким образом, в безвихревом поле скорости все частицы движутся поступательно, хотя и могут деформироваться.

Тензор скоростей деформации: главные оси, тензорная поверхность. Деформационная скорость. Скорость изменения объема частицы

Рассмотрим более детально деформацию жидкой частицы, исходя из значения тензора скоростей деформаций в какой-то ее точке O . Распределение скоростей деформаций по частице полностью определяется выражением (1.167), так что скорость деформации в соседней с O

точке, отстоящей от нее на $\delta \mathbf{r}$, равна

$$v_i^D(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = (v_{ik})_0 \delta x_k,$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки O , и значение $v_{ik} = (\partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i) / 2$ берется в точке O . В дальнейшем обозначим $\delta x_i \equiv \zeta_i$, отбросим индекс «0» и рассмотрим распределение деформационных скоростей по частице в системе прямоугольных декартовых координат $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Поле деформационных скоростей в частице целиком определяется значением компонент v_{ik} . Тензорная поверхность, связанная с v_{ik} , имеет в системе координат $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ уравнение

$$\Phi = \frac{1}{2} v_{ik} \zeta_i \zeta_k = \text{const}, \text{ причем } v_{ik} = v_{ki}.$$

Тогда

$$v_i^D(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_i} = v_{ik} \zeta_k,$$

так что нормаль к тензорной поверхности совпадает по направлению со скоростью деформации частицы в каждой точке поверхности $\Phi = \text{const}$.

Если ζ'_i — главные координаты, определяющие главные направления тензора v_{ik} , а $v_{(1)}$, $v_{(2)}$, $v_{(3)}$ — его главные значения, то, как известно, уравнение тензорной поверхности в главных координатах имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} (v_{(1)} \zeta_1'^2 + v_{(2)} \zeta_2'^2 + v_{(3)} \zeta_3'^2) = \text{const},$$

и, соответственно, компоненты деформационной скорости в главных осях равны

$$(v_1^D)' = v_{(1)} \zeta_1', \quad (v_2^D)' = v_{(2)} \zeta_2', \quad (v_3^D)' = v_{(3)} \zeta_3'.$$

Отсюда следует, что в движущейся деформируемой частице все элементы-волокна, параллельные оси (ζ_1') (несколько таких элементов изображены на рис. 52), в данный момент времени испытывают только растяжение или сжатие вдоль своего направления (вдоль оси (ζ_1')), поскольку на них меняется только $(v_1^D)'$, а остальные компоненты деформационной скорости неизменны (ζ_2' и ζ_3' на этих элементах постоянны). Таким образом, вдоль осей (ζ_2') и (ζ_3') эти элементы могут участвовать только в мгновенном квазитвердом движении, т. е. перемещаться как целое, не меняя своей длины. Аналогично волокна-частицы, расположенные вдоль других главных осей тензора v_{ik} , либо сжимаются, либо растягиваются.

Отсюда приходим к заключению:

Произвольное деформационное движение любой частицы сплошной среды состоит из растяжения (сжатия) вдоль главных осей тензора скоростей деформаций.

Иными словами, как бы ни двигалась частица сплошной среды, вся ее деформация в каждый момент времени может быть сведена к простейшей — растяжению (сжатию) по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

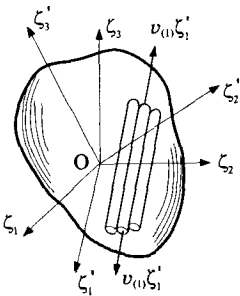


Рис. 52

Этот важнейший вывод из теоремы Гельмгольца, конечно, относится к бесконечно малым деформациям и мог быть сделан уже после введения понятия о тензоре бесконечно малых деформаций (§ 2). Более того, поскольку этот тензор по структуре и физическому смыслу сходен с тензором скоростей деформаций, то и физическая интерпретация компонент тензора скоростей деформаций может быть получена путем процедуры, аналогичной относительно компонент u_{ik} (§ 2). Диагональные компоненты тензора v_{ik} представляют собой *скорости* относительных удлинений по координатным осям, а недиагональные — половину *скоростей* угловой деформации в соответствующих координатных плоскостях, так что в криволинейных координатах имеем

$$v_{ii} = \frac{du_{ii}}{dt} = \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x^i} - v_l \Gamma_{ii}^l \quad (\text{нет суммирования по } \langle i \rangle),$$

$$v_{ik} = \frac{du_{ik}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\gamma_{ik}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - 2\Gamma_{ik}^j v_j \right) \quad (i \neq k).$$

Непосредственный вывод этих соотношений (см., например, [7]) ничем принципиально не отличается от выкладок § 2, проведенных относительно u_{ik} . Отметим, что здесь рассматривается материальная производная по времени, так что компоненты тензора малых деформаций могут быть взяты и в лагранжевом описании, когда дифференцирование по t и по координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 взаимно переставимо.

Восстановление поля скоростей по заданным компонентам тензора скоростей деформаций проводится точно так же, как и получение $\mathbf{u}(M)$ по компонентам u_{ik} в случае малых деформаций (§ 2). Уравнения совместности для v_{ik} имеют аналогичный вид. Так, в прямоугольных декартовых координатах имеем

$$\frac{\partial^2 v_{ik}}{\partial x_i \partial x_m} + \frac{\partial^2 v_{lm}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 v_{im}}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 v_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} = 0. \quad (1.168)$$

Другим способом эти соотношения получены в задаче 7.4 (см. также задачу 7.5).

Проанализируем мгновенную деформацию жидких частиц в двух характерных плоских потоках, один из которых безвихревой, так что вращение частиц отсутствует,

а другой представляет чисто сдвиговое течение, в котором $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$, а частицы и деформируются, и вращаются вокруг осей, проходящих через полюсы частиц.

1. Течение у изолированного вихря, расположенного в начале координат. Согласно (1.135) имеем

$$v_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}; \quad v_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Линии тока этого поля скоростей являются концентрическими окружностями с центрами в начале координат. Это круговое движение частиц всюду, кроме начала координат, является безвихревым, поскольку единственная компонента $\text{rot } \mathbf{v}$, а именно $\text{rot}_3 \mathbf{v} = \partial v_2 / \partial x_1 - \partial v_1 / \partial x_2$, всюду равна нулю, а в начале координат v_1 , v_2 и их производные не определены.

Таким образом, все частицы движутся по круговым траекториям поступательно, хотя и испытывают деформационное движение. Детально деформацию частиц можно описать, перейдя к главным осям тензора скоростей деформаций (рис. 53, а).

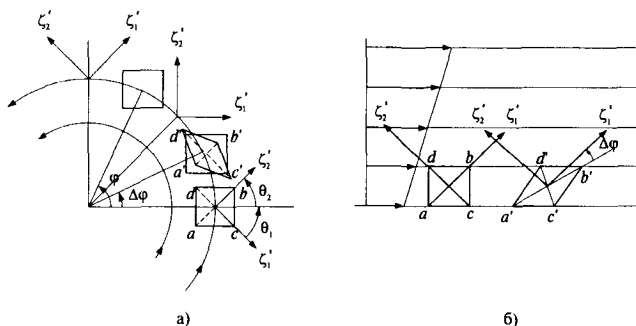


Рис. 53

Для рассматриваемого потока имеем

$$v_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}; \quad v_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2};$$

$$v_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

все остальные компоненты v_{ik} равны нулю.

Главные значения $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$ тензора v_{ik} являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} v_{11} - \lambda & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda (v_{11} + v_{22}) + v_{11} v_{22} - v_{12}^2 = 0$$

и поскольку $v_{11} + v_{22} = 0$, отсюда имеем

$$v_{(1)} = \frac{\Gamma}{2\pi (x_1^2 + x_2^2)} = -v_{(2)}.$$

Направления главных осей (ζ'_1) и (ζ'_2) определяются углами θ_1 и θ_2 , причем

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{v_{12}}{v_{(1)} - v_{22}} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{v_{12}}{v_{(2)} - v_{22}} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 - x_2} = \operatorname{ctg} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right),$$

где φ — полярный угол, определяющий положение частицы на траектории (см. рис. 53, а). Таким образом, $\theta_1 = \varphi - \pi/4$, $\theta_2 = \varphi + \pi/4$.

Поскольку в системе главных осей

$$\Phi = \frac{1}{2} (v_{(1)} \zeta_1'^2 + v_{(2)} \zeta_2'^2),$$

то деформационные скорости в этой системе имеют компоненты

$$(v_1^D)' = v_{(1)} \zeta_1'; \quad (v_2^D)' = v_{(2)} \zeta_2' = -v_{(1)} \zeta_2'.$$

Деформация движущихся по круговым траекториям частиц схематически представлена на рис. 53, а. Там же показано положение главных осей в разных точках траектории.

Положение главных осей меняется вдоль траектории, в соответствии с этим меняется и мгновенное деформационное движение частицы: по оси (ζ'_1) ее волокна удлиняются, а по оси (ζ'_2) — сокращаются ($v_{(1)} > 0$, $v_{(2)} < 0$ при $\Gamma > 0$). Однако вследствие того, что всюду $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, каждая частица в своем квазитвердом движении перемещается поступательно. На рис. 53, а приведена схема этого движения и деформации одной из частиц: диагональ « cd » квадрата растянулась, а диагональ « ab » — сжалась, но через Δt частица займет положение ромба $a'c'b'd'$, в котором диагонали ромба параллельны диагоналям квадрата.

Только одна из частиц — в начале координат — вращается вокруг своей оси с бесконечно большой угловой скоростью.

Следует отметить, что деформационное движение частицы является и безвихревым, и соленоидальным ($\operatorname{rot} \mathbf{v}^D = \operatorname{div} \mathbf{v}^D = 0$).

Иной будет картина движения и деформации частиц в вихревом потоке.

2. *Течение жидкости при простом сдвиге.* Этот плоскопараллельный поток, когда слои жидкости, параллельные одной из координатных плоскостей, скользят друг относительно друга, задается полем скоростей

$$v_1 = v_1(x_2), \quad v_2 = 0.$$

Так движется слой вязкой жидкости вдоль твердой стенки под действием постоянного градиента давления (см. рис. 53, б).

В этом случае предполагается, что жидкость ведет себя как несжимаемая, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. В то же время вихрь скорости отличен от нуля, и его компонента, перпендикулярная плоскости потока, равна

$$\operatorname{rot}_3 \mathbf{v} = -\frac{dv_1}{dx_2}.$$

Кроме того, из всех компонент тензора v_{ik} отлична от нуля лишь компонента $v_{12} = 0,5dv_1/dx_2$. Этот тензор имеет два главных значения

$$v_{(1)} = v_{12} = -v_{(2)}.$$

Тогда направления двух главных осей тензора определяются углами θ_1 и θ_2 , причем

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{v_{12}}{v_{(1)} - v_{22}} = 1; \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{v_{12}}{v_{(2)} - v_{22}} = -1.$$

Таким образом, главные оси всюду в потоке наклонены под углами $\pi/4$ и $3\pi/4$ к скорости потока. На рис. 53, б изображена частица в виде квадрата $abcd$ и ее деформация через Δt . Эта частица превращается в параллелограмм, причем ее диагонали ab и cd не только растягиваются или сжимаются, но и поворачиваются вокруг полюса — центра квадрата. Мгновенное вращение частицы связано с тем, что в этом потоке $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$.

То, как чисто деформационное движение, векторно складываясь с вращением, приводит к простому сдвигу, иллюстрируется схематически на рис. 54. На первой схеме этого рисунка изображены чисто деформационные скорости. Их значения в точках a, b, c и d получаем из того, что в системе главных осей $\Phi = 0,5(v_{(1)}\zeta_1'^2 + v_{(2)}\zeta_2'^2)$, и, следовательно, $(v_1^{\text{II}})' = v_{12}\zeta_1'$; $(v_2^{\text{II}})' = -v_{12}\zeta_2'$, так что волокно « bd » сжимается, а « ca » — растягивается. Деформационные скорости в точках m, n, p и q можно получить, если записать выражение для Φ в координатах (ζ_1'', ζ_2'') , оси которых повернуты на $\pi/4$ по отношению к главным, т. е.

$$\zeta_1'' + i\zeta_2'' = (\zeta_1' + i\zeta_2') e^{-i\pi/4}.$$

Тогда, поскольку $(\zeta_1'')^2 - (\zeta_2'')^2 = -2\zeta_1''\zeta_2''$, получаем $\Phi = (v_{(1)}\zeta_1''^2 + v_{(2)}\zeta_2''^2)/2 = -v_{12}\zeta_1''\zeta_2''$. Поэтому $(v_1^{\text{II}})'' = -v_{12}\zeta_2''$; $(v_2^{\text{II}})'' = -v_{12}\zeta_1''$.

Если векторно сложить чисто деформационное движение, изображенное на первой схеме рис. 54, с чисто вращательным движением на второй схеме этого рисунка, то приходим к сдвиговому потоку, изображенному на третьей схеме.

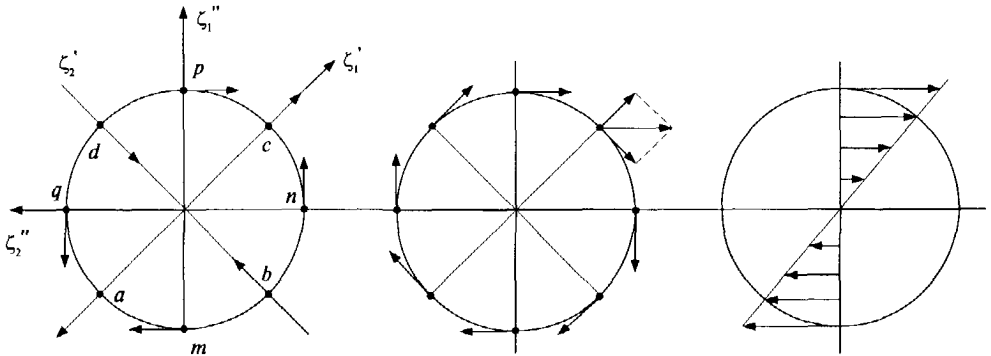


Рис. 54

Выясним, как меняется с течением времени объем частицы при ее произвольной деформации.

Поскольку в силу гипотезы сплошности можно рассматривать частицу среды любой формы, опишем деформацию элементарного материального прямоугольного параллелепипеда среды, который до деформации имел ребра, выражаемые векторами $\delta \mathbf{a}_0$, $\delta \mathbf{b}_0$, $\delta \mathbf{c}_0$ (рис. 55), а после деформации его вершины сместились по направлению соответствующих значений деформационной скорости, так что новые его ребра могут быть представлены векторами $\delta \mathbf{a}$, $\delta \mathbf{b}$, $\delta \mathbf{c}$, причем

$$\delta \mathbf{a} = \delta \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}^A(A)\Delta t, \quad \delta \mathbf{b} = \delta \mathbf{b}_0 + \mathbf{v}^A(B)\Delta t, \quad \delta \mathbf{c} = \delta \mathbf{c}_0 + \mathbf{v}^A(C)\Delta t.$$

Тогда величина объема частицы до деформации равна

$$\Delta V = \delta \mathbf{a}_0 \cdot (\delta \mathbf{b}_0 \times \delta \mathbf{c}_0) = \delta a_0 \delta b_0 \delta c_0,$$

а после деформации

$$\Delta V' = \delta \mathbf{a} \cdot (\delta \mathbf{b} \times \delta \mathbf{c}).$$

Введем прямоугольную декартову систему координат с осями по ребрам недеформированной частицы (см. рис. 55). Тогда, поскольку, например, $v_i^A(A) = v_{ik}(0)\delta a_{0k} = v_{i1}(0)\delta a_0$, получаем, записывая смешанное произведение в виде определителя

$$\begin{aligned} \Delta V' = \delta \mathbf{a} \cdot (\delta \mathbf{b} \times \delta \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} \delta a_0(1+v_{11}\Delta t) & \delta a_0 v_{21}\Delta t & \delta a_0 v_{31}\Delta t \\ \delta b_0 v_{12}\Delta t & \delta b_0(1+v_{22}\Delta t) & \delta b_0 v_{32}\Delta t \\ \delta c_0 v_{13}\Delta t & \delta c_0 v_{23}\Delta t & \delta c_0(1+v_{33}\Delta t) \end{vmatrix} = \\ &= \delta a_0 \delta b_0 \delta c_0 \left[1 + (v_{11} + v_{22} + v_{33})\Delta t + O((\Delta t)^2) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V'}{\Delta V} - 1 \right) \frac{1}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V \cdot \Delta t} = v_{11} + v_{22} + v_{33} = \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Скорость относительного изменения объема частицы равна значению $\text{div } \mathbf{v}$ в точке, где находится частица.

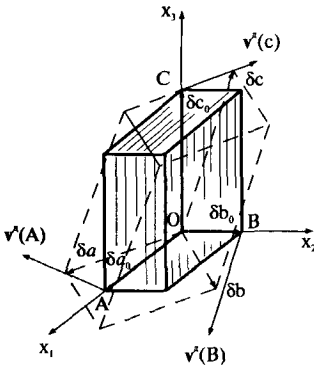


Рис. 55

Эту скорость часто называют скоростью объемного расширения.

Таким образом, если $\text{rot } \mathbf{v}$ определяет вращение частиц в среде, то $\text{div } \mathbf{v}$ связана со скоростью изменения объема частиц.

Если $\text{div } \mathbf{v} = 0$ всюду, то в среде все частицы движутся, не меняя своего объема. Такая среда называется несжимаемой.

Если тензор скоростей деформаций представить в виде суммы

$$v_{ik} = \dot{v}_{ik} + \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll}, \text{ где } \dot{v}_{ik} = v_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll}, \quad (1.170)$$

то $\dot{v}_{ii} = 0$.

Тензор \dot{v}_{ik} носит название *дивергента тензора скоростей деформаций*. Он характеризует движение, при котором частицы не меняют своего объема (например, двумерное течение вязкой жидкости: $v_1 = v_1(x_2)$, $v_2 = v_3 = 0$).

Компоненты тензора скоростей деформаций в лагранжевых переменных (т. е. в сопутствующей, подвижной системе координат) можно выразить через компоненты тензора в эйлеровом описании, если исходить из соотношений (1.33), имеющих место и в случае малых деформаций.

Поскольку в случае малых деформаций тензор скоростей деформаций равен материальной производной от тензора деформаций, т. е.

$$v_{ik}(t, x^1, x^2, x^3) = \frac{du_{ik}}{dt} \approx \frac{\partial u_{ik}}{\partial t}; \quad v'_{ik}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{\partial \varepsilon'_{ik}}{\partial t},$$

то, дифференцируя обе части соотношения (1.33) по t , получаем

$$v'_{ik}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = v_{lm}(t, x^1, x^2, x^3) \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k},$$

$$v_{ik}(t, x^1, x^2, x^3) = v'_{lm}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \frac{\partial \xi^l}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^m}{\partial x^k}.$$

При этом отброшены члены второго порядка малости. Например, учитывая, что в лагранжевых переменных $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}$ и дифференцирование по ξ^i и по t переместимо, имеем при дифференцировании (1.33)

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon'_{ik}}{dt} &= \frac{\partial \varepsilon'_{ik}}{\partial t} = v'_{ik}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{d}{dt} \left(u_{im} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} \right) = \frac{du_{im}}{dt} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} + \\ &+ u_{im} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \right) \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} + \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} \right) \right\} = \left(\frac{\partial u_{im}}{\partial t} + u^n \frac{\partial u_{im}}{\partial x^n} \right) \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} + \\ &+ u_{im} \left\{ \frac{\partial v^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} + \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial v^m}{\partial \xi^k} \right\} \approx \\ &\approx \frac{\partial u_{im}}{\partial t} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} = v_{im}(t, x^1, x^2, x^3) \frac{\partial x^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k}. \end{aligned}$$

Задачи с решениями

Задача 7.1. Вычислить в неподвижной системе координат момент количества движения $\delta \mathbf{K}_0$ частицы сжимаемой среды относительно ее центра (некоторой ее точки), движущегося со скоростью \mathbf{v}_0 . Рассмотреть случай сферической частицы и показать, что в этом случае $\delta \mathbf{K}_0$ не зависит от деформационного движения частицы.

Решение. Пусть ΔV — объем, занимаемый частицей, а $\delta \mathbf{r}$ — радиус-вектор любой точки внутри нее относительно центра.

Тогда

$$\delta \mathbf{K}_0 = \int_{\Delta V} (\delta \mathbf{r} \times \mathbf{v}) \rho dV = \int_{\Delta V} \left[\delta \mathbf{r} \times \left(\mathbf{v}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \right)_0 \delta x_k + \dots \right) \right] \left[\rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right)_0 \delta x_k + \dots \right] dV,$$

где нижний индекс 0 указывает на то, что значение величины берется в центре. Отсюда с точностью до малых второго порядка имеем

$$\delta \mathbf{K}_0 = \left(\int_{\Delta V} \delta \mathbf{r} dV \right) \times \rho_0 \mathbf{v}_0 + \left(\int_{\Delta V} \delta \mathbf{r} \delta x_k dV \right) \times \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \right)_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right)_0 \mathbf{v}_0 \right].$$

Или в проекциях на оси координат

$$\delta K_{0i} = \varepsilon_{ijl} \left\{ \rho_0 \alpha_j v_{0l} + \alpha_{jk} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right)_0 v_{0l} \right] \right\},$$

где ε_{ijl} — единичный псевдотензор, а $\alpha_j \equiv \int_{\Delta V} \delta x_j dV$, $\alpha_{jk} \equiv \int_{\Delta V} \delta x_j \delta x_k dV$. Замечая, что

$\partial v_l / \partial x_k = v_{lk} + \omega_{lk}$, где $v_{lk} = (\partial v_l / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_l) / 2$ — тензор скоростей деформации, а антисимметричный тензор $\omega_{lk} = (\partial v_l / \partial x_k - \partial v_k / \partial x_l) / 2$ представляется через компо-

ненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$ следующим образом: $\omega_{lk} = \varepsilon_{lmk} \omega_m = \varepsilon_{lmk} \frac{1}{2} \text{rot}_m \mathbf{v}$, получаем

$$\delta K_{0i} = \rho_0 \varepsilon_{ijl} \alpha_j v_{0l} + \rho_0 \varepsilon_{ijl} \alpha_{jk} (v_{lk})_0 + \rho_0 \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{lmk} \alpha_{jk} \frac{1}{2} (\text{rot}_m \mathbf{v})_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right)_0 v_{0l} \varepsilon_{ijl} \alpha_{jk}.$$

В случае сферической частицы имеем (\mathbf{v}_0 — скорость центра сферы)

$$\alpha_j = 0, \quad \alpha_{jk} = \delta_{jk} \int_{\Delta V} \delta x_l^2 dV = \frac{J}{2\rho_0} \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера, а J — момент инерции частицы с однородным распределением массы относительно любой оси, проходящей через центр сферы. Тогда, поскольку в этом случае

$$\varepsilon_{ijl} \alpha_{jk} (v_{lk})_0 = \frac{J}{2\rho_0} \varepsilon_{ijl} \delta_{jk} (v_{lk})_0 = \frac{J}{2\rho_0} \varepsilon_{ikl} (v_{lk})_0 = 0 \quad (\text{ибо } v_{lk} = v_{kl}),$$

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{lmk} \alpha_{jk} = \frac{J}{2\rho_0} \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{lmj} = \frac{J}{\rho_0} \delta_{im},$$

имеем

$$\delta K_{0i} = \frac{J}{2} (\text{rot}_i \mathbf{v})_0 + \varepsilon_{ijl} \frac{J}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right)_0 v_{0l}$$

или

$$\delta \mathbf{K}_0 = \frac{J}{2} (\text{rot } \mathbf{v})_0 + \frac{J}{\rho_0} (\nabla \rho)_0 \times \mathbf{v}_0.$$

Таким образом, в случае сферической частицы деформационное движение не входит в выражение для $\delta \mathbf{K}_0$. Если в жидкости $\rho = \text{const}$, то момент количества движения сферической частицы определяется исключительно ее угловой скоростью вращения.

Задача 7.2. В уравнении тензорной поверхности $\Phi = \frac{1}{2} v_{ik} \zeta_i \zeta_k = \text{const}$ для тензора скоростей деформации частицы ($\zeta_i \equiv \delta x_i$) выделить часть, «ответственную» за скорость изменения объема, и часть, относящуюся к чисто сдвиговой деформации. Найти скорости этих деформаций. Записать соответствующие два слагаемых функции Φ в главных координатах через главные значения тензора.

Решение. Поскольку в тензоре v_{ik} чисто сдвиговая деформация определяется дивиатором $\dot{v}_{ik} = v_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll}$, то получаем

$$\Phi = \frac{1}{2} v_{ik} \zeta_i \zeta_k = \frac{1}{2} \left(\dot{v}_{ik} + \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll} \right) \zeta_i \zeta_k = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (1)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{6} v_{ll} \zeta'^2; \quad \Phi_2 = \frac{1}{2} \dot{v}_{ik} \zeta'_i \zeta'_k; \quad \zeta'^2 = \zeta_1'^2 + \zeta_2'^2 + \zeta_3'^2.$$

Так как $v_{ll} \equiv J_1$ — скорость объемного расширения частицы (первый инвариант v_{ik}), то слагаемое Φ_1 определяет деформационную скорость объемного расширения $v_i'^{об}$, а слагаемое Φ_2 — сдвиговую скорость $v_i'^{сдв}$, причем

$$v_i'^{об} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta'_i} = \frac{1}{3} v_{ll} \zeta'_i; \quad v_i'^{сдв} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta'_i} = \dot{v}_{ik} \zeta'_k.$$

Перейдем в (1) к главным координатам ζ'_i и обозначим через $v_{(i)}$ соответствующие главные значения тензора. Тогда поскольку J_1 и ζ'^2 — не меняются при изменении координатной системы, из (1) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{6} v_{ll} \zeta'^2 = \frac{1}{6} J_1 (\zeta')^2 = \frac{1}{6} (v_{(1)} + v_{(2)} + v_{(3)}) (\zeta_1'^2 + \zeta_2'^2 + \zeta_3'^2), \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} \dot{v}_{ik} \zeta'_i \zeta'_k = \frac{1}{2} \left(\dot{v}'_{11} \zeta_1'^2 + \dot{v}'_{22} \zeta_2'^2 + \dot{v}'_{33} \zeta_3'^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(v_{(1)} - \frac{1}{3} J_1 \right) \zeta_1'^2 + \left(v_{(2)} - \frac{1}{3} J_1 \right) \zeta_2'^2 + \left(v_{(3)} - \frac{1}{3} J_1 \right) \zeta_3'^2 \right], \end{aligned}$$

где $J_1 = v_{ll} = v_{(1)} + v_{(2)} + v_{(3)}$.

Используя выражение для J_1 , можно получить для Φ_2 и другую форму, а именно

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \left(v_{(1)} - \frac{1}{3} J_1 \right) (\zeta_1'^2 - \zeta_3'^2) + \frac{1}{2} \left(v_{(2)} - \frac{1}{3} J_1 \right) (\zeta_2'^2 - \zeta_3'^2).$$

Деформационные скорости в главных осях имеют выражения

$$\begin{aligned} v_i'^{об} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta'_i} = \frac{1}{3} (v_{(1)} + v_{(2)} + v_{(3)}) \zeta'_i, \\ v_i'^{сдв} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta'_i} = \left(v_{(i)} - \frac{1}{3} J_1 \right) \zeta'_i \end{aligned}$$

(без суммирования по i !).

Задача 7.3. «Чистая» деформация частицы. Показать, что при «чистой» деформации (без квазитвердого движения) частицы жидкости главные оси деформации состоят из одних и тех же материальных волокон, а при однородной деформации точки, лежащие на плоскости или на прямой, останутся после деформации соответственно на некоторой плоскости или на прямой.

Решение. Из (1.165) для чисто деформационного движения частицы ($\omega_{ik} = 0$) имеем

$$\delta x'_i = \delta x_i + v_{ik} \delta x_k dt = \delta x_i + v_i^{деф} dt, \quad (1)$$

где

$$v_i^{\text{леФ}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \delta x_k = v_{ik} \delta x_k;$$

$$\delta x'_i = v_i(\mathbf{r}_0 + \delta \mathbf{r}) dt; \quad \delta x_i = v_i(\mathbf{r}_0) dt.$$

Обозначая $\delta x_i \equiv \zeta_i$ из (1) получаем, пренебрегая малыми dt второго порядка

$$\zeta'_i \zeta'_i = (\zeta_i + v_{ik} \zeta_k dt)^2 = \zeta_i \zeta_i + 2v_{ik} \zeta_i \zeta_k dt,$$

$$\zeta_i \zeta_i = \zeta'_i \zeta'_i - 2v_{ik} \zeta_i \zeta_k dt = \zeta'_i \zeta'_i - 2v_{ik} \zeta'_i \zeta'_k dt = (\delta_{ik} - 2v_{ik} dt) \zeta'_i \zeta'_k \equiv W_{ik} \zeta'_i \zeta'_k. \quad (2)$$

Таким образом, перемещение частицы за время dt полностью определяется тензором второго ранга

$$W_{ik} = \delta_{ik} - 2v_{ik} dt.$$

Главные значения этого тензора, как известно, определяются из системы

$$W_{ik} \zeta'_k = \lambda \zeta'_i.$$

При этом для главных координат $\zeta_{(i)}$, удовлетворяющих этой системе, в силу (2) имеем

$$\zeta_{(i)}^2 = \lambda \zeta_{(i)}'^2. \quad (3)$$

Это означает, что точки жидкой сферы радиуса $\zeta_{(i)}^2 = (\delta \mathbf{r})^2$ через dt в результате чистой деформации окажутся на сфере радиуса $\zeta_{(i)}'^2 = (\delta \mathbf{r}')^2$, причем соотношение между радиусами находится из (3). Величины возможных трех значений λ (главные значения тензора W_{ik}) определяются из уравнения

$$\det \|W_{ik} - \lambda \delta_{ik}\| = 0.$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни этого уравнения, т. е. главные значения тензора W_{ik} . Они выражаются через главные значения $\hat{v}_{(s)}$ тензора v_{ik} следующим образом:

$$\lambda_s = 1 - \hat{v}_{(s)} dt,$$

причем $\hat{v}_{(s)}$ является скоростью относительного удлинения частицы вдоль главной оси ($\zeta_{(s)}$).

Переходя в уравнении (2) к главным координатам, получим

$$(\delta \mathbf{r})^2 = W_{ik} \zeta'_i \zeta'_k = (1 - \hat{v}_{(1)} dt) \zeta_{(1)}'^2 + (1 - \hat{v}_{(2)} dt) \zeta_{(2)}'^2 + (1 - \hat{v}_{(3)} dt) \zeta_{(3)}'^2,$$

так что квадраты длин главных полуосей тензорного эллипсоида соответственно равны

$$\frac{1}{(1 - \hat{v}_{(1)} dt)}, \quad \frac{1}{(1 - \hat{v}_{(2)} dt)}, \quad \frac{1}{(1 - \hat{v}_{(3)} dt)}.$$

С течением времени тензорный эллипсоид меняется, причем для каждой частицы по-своему, поскольку v_{ik} есть функции координат и времени. Если v_{ik} не зависят от координат, то говорят об однородной деформации.

Тем не менее, точки главных осей деформации останутся на главных осях и после деформации частицы. Действительно, пусть точка A до деформации находится на главной оси $(\zeta_{(s)})$. Тогда после деформации координаты $\zeta'_{(i)}$ удовлетворяют уравнениям

$$(\delta_{ik} - 2v_{ik} dt)\zeta'_{(k)} = \lambda_s \zeta'_{(i)}.$$

Подставляя сюда значение $v_{ik} dt \zeta'_{(k)} = \zeta'_{(i)} - \zeta_{(i)}$, полученное с точностью до малых первого порядка из (1), имеем

$$\zeta'_{(i)} - 2(\zeta'_{(i)} - \zeta_{(i)}) = \lambda_s \zeta'_{(i)}.$$

Отсюда

$$\zeta'_{(i)} = \frac{2}{1 + \lambda_s} \zeta_{(i)}.$$

Это означает, что точка на прямой, уравнение которой можно представить в параметрической форме $\zeta_{(i)} = \zeta_{(i)}(\theta)$, осталась после деформации на той же прямой.

Из системы уравнений для главных координат $\zeta'_{(i)}$, а именно $\lambda_s \zeta'_{(i)} = (\delta_{ik} - 2v_{ik} dt)\zeta'_{(k)}$, в силу предыдущего соотношения имеем

$$-\zeta'_{(i)} + 2\zeta_{(i)} = (\delta_{ik} - 2v_{ik} dt)\zeta'_{(k)}.$$

Отсюда с точностью до бесконечно малых второго порядка получаем

$$\zeta'_{(i)} = (\delta_{ik} + v_{ik} dt)\zeta_{(k)} \equiv a_{ik}\zeta_{(k)}.$$

Если деформация однородна ($\partial a_{ik} / \partial x_k = 0$), то в силу линейности этого преобразования координат следует, что точки конца вектора $\delta \mathbf{r}$, которые до деформации были на какой-то плоскости или прямой, переходя в точки конца вектора $\delta \mathbf{r}'$, будут также на какой-то плоскости или прямой.

Задача 7.4. Условия совместности. *Получить условия интегрируемости (условия совместности) для компонент тензора скоростей деформаций v_{ik} .*

Решение. Не прибегая к способу, изложенному в § 2 и основанному на том, что пространство, где движется среда, является евклидовым, будем исходить из представления:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = v_{ik} + \omega_{ik} = v_{ik} + \varepsilon_{ijk} \omega_j. \quad (1)$$

Необходимым условием того, что три компоненты v_i можно однозначным образом получить из девяти величин $\partial v_i / \partial x_k$, являются, как известно из анализа, равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} \right),$$

или

$$\varepsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (2)$$

Подставляя сюда $\partial v_i / \partial x_k$ из (1), получаем

$$\varepsilon_{jkl} \left(\frac{\partial v_{ik}}{\partial x_l} + \varepsilon_{imk} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_l} \right) = \varepsilon_{jkl} \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_l} + \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{imk} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_l} = 0.$$

Поскольку (см. (1.15)) $\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{imk} = \varepsilon_{klj} \varepsilon_{kim} = \delta_{li} \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{ij}$, то, учитывая, что $\partial \omega_l / \partial x_l = 0$, имеем из предыдущего выражения:

$$\varepsilon_{jkl} \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_l} = \delta_{lm} \delta_{ij} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_l} - \delta_{li} \delta_{jm} \frac{\partial \omega_m}{\partial x_l} = -\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Применяя теперь к вектору $\boldsymbol{\omega}$ рассуждения, подобные предыдущим относительно вектора \mathbf{V} , получаем условие интегрируемости для нахождения ω_i :

$$\varepsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Учитывая (3), отсюда имеем:

$$\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{imn} \frac{\partial^2 v_{km}}{\partial x_l \partial x_n} = 0. \quad (4)$$

Из этого общего выражения следуют все уравнения совместности. Полагая $j = i = 1$, а затем $i = 1, j = 2$, получаем

$$\frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 v_{32}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 v_{31}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 v_{12}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 v_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Остальные четыре независимых соотношения можно получить циклической перестановкой индексов:

$$\frac{\partial^2 v_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 v_{13}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 v_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_{31}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_{12}}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_{12}}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_{31}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 v_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0.$$

Заметим, что выражение (4) можно расписать и на основании соотношения (1.14).

Подставляя (1.14) в (4) и проводя элементарные выкладки, получаем

$$\frac{\partial^2 v_{ll}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_{lj}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 v_{ij}}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 v_{ll}}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Это соотношение представляет собой (1.168), свернутое по индексам « k » и « l ». Оно эквивалентно вышеприведенным условиям, полученным непосредственно из (4).

Задача 7.5. *Определить наиболее общий вид поля скоростей для движущейся среды, если известно, что тензор скоростей деформации v_{ik} имеет лишь две отличных от нуля компоненты v_{13} , v_{23} в прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) , причем $v_{13} = v_{13}(x_1, x_2)$, $v_{23} = v_{23}(x_1, x_2)$.*

Для частного случая скоростного поля, в котором v_1 и v_2 обращаются в нуль на оси (x_3) , найти линии тока.

Решение. Прежде всего учтем, что заданные функции $v_{13}(x_1, x_2)$ и $v_{23}(x_1, x_2)$ должны удовлетворять условиям интегрируемости, полученным в предыдущей задаче. Из них имеем

$$\frac{\partial^2 v_{31}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 v_{31}}{\partial x_2^2} = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial v_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial v_{23}}{\partial x_1} = C_0 = \text{const.}$$

Воспользуемся формулой (1.69), которую для тензора скоростей деформации перепишем в виде

$$v_i(x_1, x_2, x_3) = v_i(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + F_i(x_k; x_{0k}) + \Phi_i(x_k; x_{0k}),$$

где

$$F_i(x_k; x_{0k}) \equiv \int_{x_{01}}^{x_1} v_{i1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \int_{x_{02}}^{x_2} v_{i2}(x_{01}, x_2, x_3) dx_2 + \int_{x_{03}}^{x_3} v_{i3}(x_{01}, x_{02}, x_3) dx_3,$$

$$\Phi_i(x_k; x_{0k}) \equiv (x_1 - x_{01}) \omega_{i1}(x_{01}, x_2, x_3) + (x_2 - x_{02}) \omega_{i2}(x_{01}, x_{02}, x_3) +$$

$$+ (x_3 - x_{03}) \omega_{i3}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) - \int_{x_{01}}^{x_1} \left(\frac{\partial v_{i1}}{\partial \eta_1} - \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta_i} \right)_{\eta_2=x_2, \eta_3=x_3} (\eta_1 - x_1) d\eta_1 -$$

$$- \int_{x_{02}}^{x_2} \left(\frac{\partial v_{i2}}{\partial \eta_2} - \frac{\partial v_{22}}{\partial \eta_i} \right)_{\eta_1=x_{01}, \eta_3=x_3} (\eta_2 - x_2) d\eta_2 - \int_{x_{03}}^{x_3} \left(\frac{\partial v_{i3}}{\partial \eta_3} - \frac{\partial v_{33}}{\partial \eta_i} \right)_{\eta_1=x_{01}, \eta_2=x_{02}} (\eta_3 - x_3) d\eta_3,$$

причем

$$v_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right); \quad \omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Исходя из условий задачи, получаем выражение для поля скоростей через компоненты $u_{13} = u_{13}(x_1, x_2)$ и $u_{23} = u_{23}(x_1, x_2)$, которые не равны нулю из всех u_{ik} . Для этого поля имеем

$$F_1(x_k; x_{0k}) = \int_{x_{03}}^{x_3} u_{13}(x_{01}, x_{02}) dx_3 = u_{13}(x_{01}, x_{02})(x_3 - x_{03}),$$

$$F_2(x_k; x_{0k}) = \int_{x_{03}}^{x_3} u_{23}(x_{01}, x_{02}) dx_3 = u_{23}(x_{01}, x_{02})(x_3 - x_{03}),$$

$$F_3(x_k; x_{0k}) \equiv \int_{x_{01}}^{x_1} u_{31}(x_1, x_2) dx_1 + \int_{x_{02}}^{x_2} u_{32}(x_{01}, x_2) dx_2,$$

$$\Phi_1(x_k; x_{0k}) = (x_2 - x_{02}) \omega_{12}(x_{01}, x_{02}, x_3) + (x_3 - x_{03}) \omega_{13}(x_{01}, x_{02}, x_{03}),$$

$$\Phi_2(x_k; x_{0k}) = (x_1 - x_{01}) \omega_{21}(x_{01}, x_2, x_3) + (x_3 - x_{03}) \omega_{23}(x_{01}, x_{02}, x_{03}),$$

$$\Phi_3(x_k; x_{0k}) = (x_1 - x_{01}) \omega_{31}(x_{01}, x_2, x_3) + (x_2 - x_{02}) \omega_{32}(x_{01}, x_{02}, x_3) -$$

$$- \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{\partial u_{31}(\eta_1, x_2)}{\partial \eta_1} (\eta_1 - x_1) d\eta_1 - \int_{x_{02}}^{x_2} \frac{\partial u_{32}(x_{01}, \eta_2)}{\partial \eta_2} (\eta_2 - x_2) d\eta_2.$$

Из соотношений, выражающих условия существования первообразной, имеем

$$\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_{31} + u_{31}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{32} + u_{32}),$$

$$\frac{\partial \omega_{12}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} (u_{13} + \omega_{13}), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_{23} + u_{32}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_{32} + u_{23}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{13} + u_{13}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{23} + u_{23}) = \frac{\partial \omega_{21}}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_{31} + u_{31}) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\omega_{12} \equiv \dot{\omega}_{12} = \text{const}; \quad \omega_{13} + u_{13} \equiv \dot{c}_{13} = \text{const}; \quad \omega_{23} + u_{23} \equiv \dot{c}_{23} = \text{const}.$$

Тогда для поля скоростей имеем

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_{01} + \dot{v}_{13} (x_3 - x_{03}) + (x_2 - x_{02}) \dot{\omega}_{12} + (x_3 - x_{03}) \dot{\omega}_{13} = \\ &= u_{01} + \dot{c}_{13} (x_3 - x_{03}) + \dot{\omega}_{12} (x_2 - x_{02}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = u_{02} + \dot{v}_{23} (x_3 - x_{03}) + (x_3 - x_{03}) \dot{\omega}_{23} - \dot{\omega}_{12} (x_1 - x_{01}) = u_{02} + \dot{c}_{23} (x_1 - x_{01}) - \dot{\omega}_{12} (x_1 - x_{01}),$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_{03} + \int_{x_{01}}^{x_1} u_{31}(x_1, x_2) dx_1 + \int_{x_{02}}^{x_2} u_{32}(x_{01}, x_2) dx_2 + (x_1 - x_{01}) \omega_{31}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) +$$

$$+(x_2 - x_{02}) \omega_{32}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) - \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{\partial v_{31}(\eta_1, x_2)}{\partial \eta_1} (\eta_1 - x_1) d\eta_1 - \int_{x_{02}}^{x_2} \frac{\partial v_{32}(x_{01}, \eta_2)}{\partial \eta_2} (\eta_2 - x_2) d\eta_2.$$

Или, проводя интегрирование в выражении для v_3 по частям, получим окончательно

$$v_3(x_1, x_2, x_3) = v_{03} - \dot{c}_{23}(x_2 - x_{02}) - \dot{c}_{13}(x_1 - x_{01}) + 2 \int_{x_{01}}^{x_1} v_{31}(x_1, x_2) dx_1 + 2 \int_{x_{02}}^{x_2} v_{32}(x_{01}, x_2) dx_2. \quad (2)$$

Для этого поля скоростей имеем $v_{11} = v_{22} = v_{33} = v_{12} = 0$; $v_{13} = v_{31}$, а $v_{23} = v_{32}$, если выполнено условие, отмеченное в начале решения (при $C_0 = 0$).

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} v_{32}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\dot{c}_{23} - \dot{c}_{23} + 2 \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{\partial v_{31}(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_1 + 2v_{32}(x_{01}, x_2) \right) = \\ &= \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{\partial v_{23}(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + v_{32}(x_{01}, x_2) = v_{23}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Таким образом, выражения (1) и (2) представляют искомое поле скоростей.

Перейдем к определению линий тока для поля скорости, исчезающего на оси (x_3).

Если компоненты v_1 и v_2 скоростного поля обращаются в нуль при $x_1 = x_2 = 0$, то постоянные в его общем выражении должны быть выбраны так, что

$$v_1 = \dot{\omega}_{12} x_2; \quad v_2 = -\dot{\omega}_{12} x_1; \quad v_3 = v_3(x_1, x_2) = v_{03} + 2 \int_{x_{01}}^{x_1} v_{31}(x_1, x_2) dx_1 + 2 \int_{x_{02}}^{x_2} v_{32}(x_{01}, x_2) dx_2.$$

Тогда дифференциальные уравнения линий тока имеют вид

$$\frac{dx_1}{\dot{\omega}_{12} x_2} = -\frac{dx_2}{\dot{\omega}_{12} x_1} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2)}.$$

Отсюда имеем уравнение линий тока

$$x_1^2 + x_2^2 = x_{01}^2 + x_{02}^2 \equiv r_0^2; \quad x_3 = x_{03} + \frac{1}{\dot{\omega}_{12}} \int_{x_{01}}^{x_1} \frac{v_3(x_1, \sqrt{r_0^2 - x_1^2})}{\sqrt{r_0^2 - x_1^2}} dx_1.$$

Линии тока, таким образом, располагаются на круговых цилиндрах с образующими, параллельными оси (x_3).

Упражнения

1. Найти общий вид двумерного потока несжимаемой среды, при котором направления осей (x) и (y) являются главными для тензора скоростей деформации.

2. Закон движения среды задан в виде

$$x_1 = x_{01}, \quad x_2 = \frac{e^t (x_{02} + x_{03})}{2} + \frac{e^{-t} (x_{02} - x_{03})}{2}, \quad x_3 = \frac{x_{02} + x_{03}}{2} - \frac{e^{-t} (x_{02} - x_{03})}{2}.$$

Показать, что при $t = 0$ тензор деформаций и тензор скоростей деформации отличаются только размерным множителем; сравнить эти тензоры при $t = 1$.

3. Найти главные значения и главные оси для тензоров скоростей деформации:

1) $v_{12} = v_{23} = \alpha$, а все остальные $v_{ik} = 0$,

2) $v_{11} \neq 0$, $v_{22} \neq 0$, $v_{12} \neq 0$, а $v_{33} = v_{31} = v_{32} = 0$.

То же — для поля скоростей $\mathbf{v} = (2x_3, 2x_3, 0)$.

4. Доказать, что главные оси v_{ik} и девизатора $\overset{\circ}{v}_{ik}$ совпадают, а главные значения $\overset{\circ}{v}_{ik}$ меньше главных скоростей удлинения на треть первого инварианта.

5. Показать, что тензор скоростей деформации представляет собой материальную производную от эйлера тензора малых деформаций.

6. Для поля скоростей трехстороннего неравномерного растяжения

$$\mathbf{v} = (a_1(t)x_1, a_2(t)x_2, a_3(t)x_3)$$

найти тензор скоростей деформации, вектор вихря и вектор перемещений \mathbf{u} как функцию лагранжевых координат.

7. В случае закона движения среды

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2 + \xi_1(e^{-2t} - 1), \quad x_3 = \xi_3 + \xi_1(e^{-3t} - 1),$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — лагранжевы координаты, написать тензор скоростей деформации, вектор угловой скорости вращения частиц и выяснить, изменяются ли объемы жидких частиц.

8. Поле скоростей простого сдвига можно представить в виде $v_i = \lambda x_j \mu_i \nu_j$, где μ, ν — взаимно ортогональные орты, $\lambda = \text{const}$ — скаляр. Найти главные скорости удлинений, главные скорости сдвига и ориентацию главных осей относительно векторов μ и ν .

9. Показать, что если сплошная среда движется как твердое тело, то

$$\text{div} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\omega^2, \quad \text{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — мгновенная угловая скорость вращения частиц.

§ 8. Скорость изменения физических свойств сплошной среды в конечной пространственной области (объем, поверхность, линия) при ее перемещении

Рассмотрим кинематические соотношения, определяющие изменение во времени физических свойств конечного участка («куска») сплошной среды, заполняющей в данный момент времени t соответствующую пространственную область.

Эта область (поверхность, линия) может быть геометрической, воображаемой и перемещаться предписанным образом (задана скорость $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t, \mathbf{r})$ каждой ее точки) по движущейся среде, имеющей поле скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$. Однако эта геометрическая область может все время включать одни и те же частицы среды, т. е. не менять своего содержимого с течением времени. Это будет тогда, когда для всех ее точек $\mathbf{w}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$. В этом случае такую область (поверхность, линию), как отмечалось ранее, называют *материальной* (жидкой, индивидуальной). В изложении, когда это различие будет иметь принципиальное значение, геометрические области мы будем отмечать индексом w , т. е. V_w, S_w, L_w .

Объем

Рассмотрим вначале трехмерную область, имеющую в момент времени t объем $V(t)$.

Пусть $\Phi(t, \mathbf{r})$ — тензорная (любого ранга) функция, описывающая определенное физическое свойство среды. Это может быть поле плотности $\rho(t, \mathbf{r})$, характеризующее распределение массы, поле вектора количества движения единицы объема $\rho\mathbf{v}$, поле сил, моментов сил, энергии и т. п. Об интеграле $\int_V \Phi(t, \mathbf{r}) dV$ будем говорить как о физическом свойстве конечной области сплошной среды (о массе, если $\Phi = \rho$; о количестве движения, если $\Phi = \rho\mathbf{v}$, и т. п.).

Изучим скорость изменения физического свойства сплошной среды, заполняющей геометрический объем $V(t)$, ограничивающая поверхность $S(t)$ которого имеет в каждой своей точке скорость $\mathbf{w}(t, \mathbf{r})$. Используя определение производной по времени, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} \Phi(t+\Delta t, \mathbf{r}) dV - \int_{V(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV \right]. \quad (1.171)$$

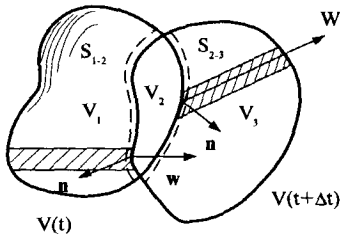


Рис. 56

Чтобы разделить зависимость от времени подынтегральной функции и области интегрирования, разобьем интегралы в (1.171) на интегралы по областям V_1, V_2, V_3 (рис. 56, где представлено два бесконечно близких положения области $V(t)$ и $V(t+\Delta t)$, причем $V(t+\Delta t) = V_3 + V_2$, $V(t) = V_1 + V_2$, так что $V_2(t)$ — их общая часть).

Тогда получаем

$$\int_{V(t+\Delta t)} \Phi(t+\Delta t, \mathbf{r}) dV - \int_{V(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_{V_2} [\Phi(t+\Delta t, \mathbf{r}) - \Phi(t, \mathbf{r})] dV + \int_{V_3} \Phi(t+\Delta t, \mathbf{r}) dV - \int_{V_1} \Phi(t, \mathbf{r}) dV. \quad (1.172)$$

В областях V_1 и V_3 выразим элементы объемов через элементы поверхности, разделяющей области на участках S_{1-2} и S_{2-3} :

$$dV_3 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) \Delta t dS_{2-3}; \quad dV_1 = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) \Delta t dS_{1-2}. \quad (1.173)$$

Тогда, подставляя (1.172) в (1.171), с учетом (1.173) и переходя к интегрированию по участкам S_{1-2} и S_{2-3} , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V_2} [\Phi(t+\Delta t, \mathbf{r}) - \Phi(t, \mathbf{r})] dV_2 + \int_{S_{2-3}} \Phi(t+\Delta t, \mathbf{r}) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS_{2-3} + \int_{S_{1-2}} \Phi(t, \mathbf{r}) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS_{1-2} \right\}.$$

Предполагая, что переход к пределу в первом интеграле справа возможен, и учитывая, что $V_2 \rightarrow V(t)$ и $(S_{2-3} + S_{1-2}) \rightarrow S(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ ($S(t)$ — поверхность, ограничивающая $V(t)$), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_{V_w(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S_w(t)} \Phi(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (1.174)$$

Таков окончательный вид искомого соотношения. Первое слагаемое в правой части отражает зависимость от времени тензорного поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$, а второе — зависимость от времени области интегрирования. Чтобы подчеркнуть значение скорости \mathbf{w} на границе S , у областей поставлен индекс «w». Эта формула выражает изменение интеграла от величины Φ по геометрическому (воображаемому) объему $V_w(t)$. Если необходимо найти значение интеграла в следующий за t момент времени, то надо считать, что точки границы объема имеют скорость $\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)$.

В случае материального объема V скорость любой точки его границы совпадает со скоростью соответствующей частицы среды, т. е. $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, и из (1.174) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_V \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_S \Phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (1.175)$$

Если определять значение величин, пользуясь этой формулой в следующие моменты времени, то необходимо рассматривать движение поверхности S (и всех частиц среды) со скоростями $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$.

Заметим, что если в рассматриваемый момент времени t области V и V_w и их границы S и S_w совпадают, то из формул (1.174) и (1.175) следует

$$\frac{d}{dt} \int_V \Phi dV = \frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi dV + \int_S \Phi(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

поскольку в этих формулах $\int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV = \int_{V_w} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV$, как слагаемые, не связанные с зависимостью области от времени.

Пусть теперь материальный объем V с границей S содержит поверхность разрыва σ , движущуюся со скоростью \mathbf{w} . О допустимости существования таких поверхностей, не нарушающих сплошности среды, уже шла речь ранее. На этой поверхности терпят конечный разрыв все физические характеристики среды, так что если Φ_1 — значе-

ние величины Φ по одну сторону такой поверхности, то по другую эта величина принимает значение Φ_2 . При этом для скачка этой величины на поверхности разрыва прием обозначение $\langle \Phi \rangle \equiv \Phi_2 - \Phi_1$. Рассмотрим вид формулы (1.175) при наличии внутри V поверхности разрыва σ .

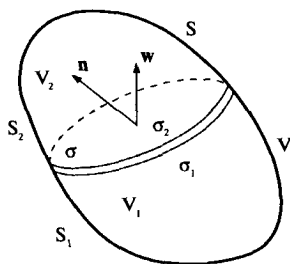


Рис. 57

Будем считать, что в каждый момент времени поверхность σ делит V на части V_1 и V_2 ($V = V_1 + V_2$), ограниченные соответствующими поверхностями $S_1 + \sigma_1$ и $S_2 + \sigma_2$, причем $S = S_1 + S_2$, а σ_1 и σ_2 являются двумя сторонами поверхности σ (рис. 57). Тогда, применяя (1.175) к каждой из частей V и складывая полученные результаты, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \Phi dV &= \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_S \Phi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ &+ \int_{\sigma_1} \Phi (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\sigma_2} \Phi (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} d\sigma. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что на поверхности разрыва σ относительная скорость частиц среды равна $\mathbf{U} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, поскольку поверхность σ сама движется со скоростью \mathbf{w} . Так как $\mathbf{n}|_{\sigma_1} = -\mathbf{n}|_{\sigma_2}$, то отсюда имеем

$$\frac{d}{dt} \int_V \Phi dV = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_S \Phi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{\sigma} \langle \Phi U_n \rangle d\sigma, \quad (1.175a)$$

где $U_n = (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}$, причем \mathbf{n} — нормаль, обращенная в область V_2 (см. рис. 57).

Таков вид основного соотношения (1.175) при наличии внутри V поверхности разрыва σ .

Рассмотренный выше прием может быть использован для получения других кинематических формул, касающихся различных движущихся областей сплошной среды. Мы рассмотрим две из них, которые найдут непосредственное применение в дальнейшем изложении.

Незамкнутая поверхность

Пусть незамкнутая поверхность $S(t)$ перемещается со скоростью $\mathbf{W}(t, \mathbf{r})$ по среде, в которой определены скоростное поле $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ и векторное поле $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, описывающее некоторое физическое свойство среды.

Вычислим скорость изменения потока поля \mathbf{A} через поверхность S , т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}(t+\Delta t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S(t)} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \right]. \quad (1.176)$$

Чтобы отделить временные зависимости поверхности и подынтегральной функции, применим теорему Гаусса — Остроградского к полю $\mathbf{A}(t + \Delta t, \mathbf{r})$ в объеме V_N (рис. 58), ограниченном $S(t + \Delta t)$, $S(t)$ и боковой поверхностью S_6 , образуемой прямыми, соединяющими точки контуров $L(t)$ и $L(t + \Delta t)$.

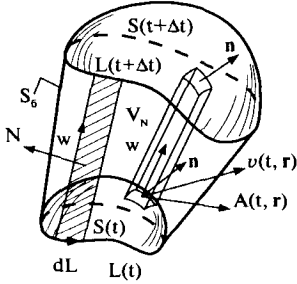


Рис. 58

Итак, имеем по теореме Гаусса — Остроградского:

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}(t + \Delta t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS - \int_{S(t)} \mathbf{A}(t + \Delta t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_6} \mathbf{A}(t + \Delta t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} dS_6 - \int_{V_N} \operatorname{div} \mathbf{A}(t + \Delta t, \mathbf{r}) dV_N = 0. \quad (1.177)$$

Выражая отсюда первый интеграл, подставим его значение в (1.176). Учтем, что

$$\mathbf{N} dS_6 = (d\mathbf{L} \times \mathbf{w}) \Delta t, \quad dV_N = dS (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) \Delta t,$$

и перейдем к интегрированию по контуру L и по поверхности S в третьем и четвертом интегралах (1.177) соответственно. Тогда (1.176) дает:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{S(t)} [\mathbf{A}(t + \Delta t, \mathbf{r}) - \mathbf{A}(t, \mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} dS - \Delta t \int_L \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{L} \times \mathbf{w}) + \Delta t \int_S (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{A} dS \right\}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{S_w} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_w} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{w} \operatorname{div} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{L_w} (\mathbf{A} \times \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{L}. \quad (1.178)$$

Замкнутый контур

Для вычисления производной от циркуляции поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ по произвольному замкнутому контуру $L(t)$ достаточно записать, что поток вектора $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ через поверхность, ограничивающую односвязный объем V_N (см. рис. 58), равен

нулю (поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0$), а затем воспользоваться теоремой Стокса, связывающей поток $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ через незамкнутую поверхность с интегралом по ее краю. Имеем последовательно:

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} dS - \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} dS + \int_{S_6} \mathbf{N} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} dS_6 = 0.$$

Преобразуя два первых интеграла по теореме Стокса, а в третьем переходя к интегрированию по контуру L , получим

$$\oint_{L(t+\Delta t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = -\Delta t \oint_L (d\mathbf{L} \times \mathbf{w}) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.179)$$

Тогда, исходя из определения

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \oint_{L(t+\Delta t)} \mathbf{A}(t+\Delta t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L(t)} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{L} \right\}$$

и подставляя в правую часть этого выражения значение интеграла по контуру $L(t)$ из (1.179), а затем переходя к пределу, окончательно получаем:

$$\frac{d}{dt} \oint_{L_w} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \oint_{L_w} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{L}. \quad (1.180)$$

Геометрические и материальные области

Формулы (1.174), (1.178) и (1.180) относятся к геометрическим областям и получены при довольно слабых ограничениях на области и подынтегральные функции. Они могут быть использованы для изучения разрывных полей и их производных, лишь бы эти поля были интегрируемы.

Если предположить, что все условия теорем Гаусса — Остроградского и Стокса выполнены, то, используя эти теоремы, можно указать другой вид полученных формул:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_{V_w(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\Phi \mathbf{w}) \right] dV,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{S_w(t)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_w(t)} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \text{div} \mathbf{A} \right] \cdot \mathbf{n} dS,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{L_w(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int_{S_w(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{A} - \text{rot}(\mathbf{w} \times \text{rot} \mathbf{A}) \right] \cdot \mathbf{n} dS.$$

Наконец, в случае материальных областей интегрирования, подставляя $\mathbf{W} = \mathbf{v}$ и вспоминая выражение для материальной производной по времени, предыдущие три формулы можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{d\Phi}{dt} + \Phi \text{div} \mathbf{v} \right] dV, \quad (1.181)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(t)} \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.182)$$

$$\frac{d}{dt} \oint_{L(t)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \int_{S(t)} \left[\frac{d}{dt} \text{rot} \mathbf{A} - ((\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\text{rot} \mathbf{A}) \text{div} \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.183)$$

Формула (1.181) — фундаментальное соотношение, используемое при постулировании основных законов динамики сплошной среды.

Что касается формул (1.182), (1.183), то в их правую часть входит выражение, которое имеет название *гельмгольца* векторного поля:

$$\text{helm} \mathbf{A} \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{v}.$$

Из этих формул следуют утверждения:

1. Для того чтобы поток векторного поля \mathbf{A} через любую незамкнутую материальную поверхность был постоянен, необходимо и достаточно выполнение равенства $\text{helm} \mathbf{A} = 0$.

2. Для того чтобы циркуляция векторного поля \mathbf{A} по любому замкнутому материальному контуру была постоянна, необходимо и достаточно выполнение равенства $\text{helm}(\text{rot} \mathbf{A}) = 0$.

Теорема Кельвина-Томсона

Эта теорема была доказана Томсоном¹, который за свои научные успехи был удостоен английским королем звания лорда Кельвина.

Теорема гласит:

Производная от циркуляции скорости по любому жидкому контуру равна циркуляции ускорения.

Современное доказательство теоремы достаточно кратко.

Действительно, из (1.180) при $\mathbf{A} = \mathbf{w} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ имеем

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{L}, \quad (1.183a)$$

поскольку

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \frac{v^2}{2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \nabla \frac{v^2}{2},$$

а

$$\oint_L \nabla \frac{v^2}{2} \cdot d\mathbf{L} = 0,$$

как интеграл по замкнутому контуру от дифференциала однозначной функции.

Задачи с решениями

Задача 8.1. *Найти материальные производные по времени от элемента объема, элемента поверхности и линейного элемента.*

Решение. Эту задачу удобно решать путем введения лагранжевых координат, в которых определяется начальное состояние материальных элементов.

¹ Томсон (Thomson) Уильям, с 1892 г. (за научные заслуги) лорд Кельвин (Kelvin) (1824–1907) — выдающийся английский физик. Окончил Кембриджский университет в Глазго. Научные труды относятся ко многим областям физики (термодинамика, гидродинамика, электромагнетизм, теория упругости и др.), математики и техники. Сформулировал в 1851 г. (независимо от Р. Клаузиуса) второе начало термодинамики. Ввел (1848 г.) понятие абсолютной температуры (шкала Кельвина). Открыл эффект Джоуля — Томсона, положенный в основу получения низких температур. Построил термодинамическую теорию термоэлектрических явлений. Открыл (1851 г.) эффект изменения удельной электропроводности ферромагнетиков при их намагничивании (эффект Томсона). Установил зависимость периода колебания контура от емкости и индуктивности. Теоретические исследования по электромагнетизму содействовали практическому осуществлению телеграфной связи, в частности по трансатлантическому кабелю. Изобрел много электроизмерительных приборов. В «Курсе естественной философии» (1867 г.) совместно с П. Г. Тэтом рассмотрел основные задачи механики твердых, упругих и жидких тел и другие задачи математической физики.

1. Пусть элемент объема (параллелепипед) в начальный момент времени t_0 в системе декартовых координат имел величину $dV_0 = dx_{01} dx_{02} dx_{03}$. В результате движения, определяемого уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_0)$ или $x_j = x_j(t, x_{01}, x_{02}, x_{03})$, этот материальный элемент занял положение, в котором его новые ребра равны $d\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_2, d\mathbf{r}_3$, причем с точностью до малых первого порядка (рис. 59):

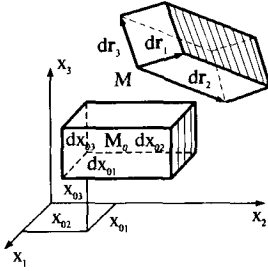


Рис. 59

$$d\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{01}} dx_{01}, \quad d\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{02}} dx_{02}, \quad d\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{03}} dx_{03},$$

где \mathbf{r} определяет движение вершины M элемента объема. Тогда, вычисляя величину деформированного элемента объема dV , получаем

$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_3 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{01}} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{02}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{03}} dx_{01} dx_{02} dx_{03} = \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_i}{\partial x_{03}} dx_{01} dx_{02} dx_{03} = J dV_0, \end{aligned}$$

где

$$J = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}} \right\| = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_i}{\partial x_{03}}.$$

Поскольку dV_0 не меняется с течением времени, то

$$\frac{d}{dt} (dV) = \frac{dJ}{dt} dV_0.$$

Вычисляя материальную производную от якобиана J преобразования (см. также задачу 9.3), получаем

$$\frac{dJ}{dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v},$$

так что

$$\frac{d}{dt} (dV) = J dV_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = dV \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (1)$$

Заметим, что этот результат можно получить из (1.169), если вычислять скорость абсолютного изменения элементарного объема.

2. Рассмотрим изменение какого-нибудь направленного элемента поверхности, например, имевшего в начальный момент времени величину $dx_{02} dx_{03}$ и нормаль, ориентированную по оси (x_1) . Его величина и направление в текущий момент времени (см. рис. 59) определяются выражением

$$\mathbf{n} dS \equiv d\mathbf{S} = d\mathbf{r}_2 \times d\mathbf{r}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{02}} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{03}} dx_{02} dx_{03},$$

или в проекциях

$$dS_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} dx_{02} dx_{03}. \quad (2)$$

Умножая обе части на $\frac{\partial x_i}{\partial x_{01}}$ и суммируя по i , получаем

$$dS_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{03}} \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} dx_{02} dx_{03} = J dx_{02} dx_{03}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial x_{01}}{\partial x_m} dS_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{01}} = dS_i \delta_{im} = dS_m = J \frac{\partial x_{01}}{\partial x_m} dx_{02} dx_{03}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} (dS_m) = \left\{ \frac{dJ}{dt} \frac{\partial x_{01}}{\partial x_m} + J \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{01}}{\partial x_m} \right) \right\} dx_{02} dx_{03}.$$

Из тождества

$$\frac{\partial x_{01}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0i}} = \delta_{i1} \quad (2')$$

следует

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{01}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_{0i}} = - \frac{\partial x_{01}}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_{0i}},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{01}}{\partial x_m} \right) = - \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \frac{\partial x_{01}}{\partial x_i}.$$

Учитывая значение производной от J , имеем

$$\frac{d}{dt} (dS_m) = J \left(\frac{\partial x_{01}}{\partial x_m} \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\partial x_{01}}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) dx_{02} dx_{03}.$$

Подставляя сюда значение якобиана J и учитывая (2) и (2'), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (dS_m) &= \left[\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_p}{\partial x_{03}} \cdot \frac{\partial x_{01}}{\partial x_m} \operatorname{div} \mathbf{v} - \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_{01}} \frac{\partial x_k}{\partial x_{02}} \frac{\partial x_p}{\partial x_{03}} \cdot \frac{\partial x_{01}}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right] dx_{02} dx_{03} = \\ &= dS_m \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\partial v_i}{\partial x_m} dS_i. \end{aligned} \quad (3)$$

3. Вычисляя материальную производную по времени от любого линейного элемента $d\mathbf{r}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{0k}} \right) dx_{0k} = \frac{\partial}{\partial x_{0k}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) dx_{0k} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_{0k}} dx_{0k} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}} dx_{0k} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} dx_i = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (4)$$

Материальная производная по времени от квадрата длины линейного элемента связана с тензором скоростей деформаций. Действительно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}^2) &= 2 \frac{d}{dt} (d\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} dx_i \cdot d\mathbf{r} = 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dx_i dx_k = \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k = 2v_{ik} dx_i dx_k. \end{aligned}$$

Задача 8.2. Используя результаты задачи 8.1, получить значения материальных производных по времени от интеграла по объему, интеграла по поверхности и линейного интеграла (формулы (1.181, 1.182, 1.183)).

Решение. Заменяя интегралы интегральными суммами и беря материальные производные от значений подынтегральной функции и элементов области интегрирования, получаем (в предположении о существовании пределов продифференцированных сумм)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \Phi dV &= \int_V \left\{ \frac{d\Phi}{dt} dV + \Phi \frac{d}{dt} (dV) \right\}, \\ \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{S}, \\ \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} &= \oint_L \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{L} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{L}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда полученные в задаче 8.1 выражения (1), (3) и (4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \Phi dV &= \int_V \left(\frac{d\Phi}{dt} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV, \\ \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_S \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \int_S \left\{ \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{S} + (A_m dS_m) \operatorname{div} \mathbf{v} - A_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} dS_i \right\} = \\ &= \int_S \left\{ \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} \cdot d\mathbf{S}, \\ \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} &= \oint_L \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot d\mathbf{L} + \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \end{aligned}$$

$$= \oint_L \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{v} \right\} \cdot d\mathbf{L},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= A_i dL_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = A_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dL_k + A_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} dL_k = \\ &= (\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{L} + d\mathbf{L} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \end{aligned}$$

В силу известной формулы векторного исчисления

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}$$

и считая $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ однозначной функцией, получаем

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{L},$$

что совпадает с выражением (1.180) при $\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Задача 8.3. Найти материальную производную от вектора $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, заданного своими ковариантными компонентами \hat{A}_i в лагранжевых переменных, т. е. $\hat{A}_i = \hat{A}_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Найти выражение компонент этой производной в абсолютной (неподвижной) системе координат x^1, x^2, x^3 как функций компонент (и их производных) в этой системе, т. е. $A_i = A_i(t, x^1, x^2, x^3)$.

Это выражение материальной производной вектора $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ называется нижней производной Олдройда (см. § 13, гл. II, (2.61)).

Решение. Учитывая связь между компонентами векторов в обеих системах а именно

$$\hat{A}_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} A_k(t, x^1, x^2, x^3)$$

и коммутативность производных по времени и по лагранжевым координатам, для материальной производной в лагранжевой системе имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} A_k(t, x^1, x^2, x^3) \right] = \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \right) A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{dA_k}{dt} = \\ &= \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial \xi^i} A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{dA_k}{dt}. \end{aligned}$$

Умножая обе части этого выражения на $\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}$ и суммируя по i , получаем, вводя обозначение D/Dt для оператора производной Олдройда,

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \frac{d\hat{A}_i}{dt} = \frac{D\hat{A}_l}{Dt} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial \xi^i} A_k + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \frac{dA_k}{dt} = A_k v_{,l}^k + \frac{dA_l}{dt}.$$

Рассматривая материальную производную в эйлеровом представлении, окончательно имеем

$$\frac{D\hat{A}_l}{Dt} = \frac{\partial A_l}{\partial t} + v^k A_{l;k} + A_k v_{;l}^k.$$

Аналогично можно получить выражение для материальной производной в сопутствующей (лагранжевой) системе координат для ковариантного тензора любого ранга. Скажем, для тензора скоростей деформаций v_{ik} имеем (см. § 3)

$$\frac{D\hat{v}_{ik}}{Dt} = \frac{\partial v_{ik}}{\partial t} + v^l v_{ik;l} + v_{il} v_{;k}^l + v_{lk} v_{;i}^l.$$

Задача 8.4. Найти скорость изменения линейного элемента, выбранного в направлении орта ν , отнесенную к длине этого элемента.

Решение. Скорость изменения линейного элемента в направлении координатных осей равна деформационной скорости, а именно

$$v_i^{\text{л}} = v_{ik} dx_k,$$

а если элемент берется вдоль направления ν , то

$$v_{\nu i}^{\text{л}} \equiv v_i^{\text{л}} / |d\mathbf{r}| = v_{ik} \nu_k, \text{ где } \nu_k \equiv \frac{dx_k}{|d\mathbf{r}|}.$$

Так, например, в движущейся среде с полем скоростей $\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ отрезок в точке $(1, 0, 0)$ в направлении $\nu = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ испытывает деформацию со скоростью $\mathbf{v}_{\nu}^{\text{л}}$, имеющую компоненты

$$v_{\nu i}^{\text{л}} = (v_{ik})_0 \nu_k.$$

Так как

$$(v_{ik}) = \begin{pmatrix} x_2 & \frac{1}{2}x_1 & \frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{2}x_1 & x_3 & \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_3 & \frac{1}{2}x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad (v_{ik})_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\mathbf{v}_{\nu}^{\text{л}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Упражнения

1. Показать, что для материальной незамкнутой поверхности S справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_S \text{rot}_n \mathbf{v} dS = \int_S \text{rot}_n \frac{d\mathbf{v}}{dt} dS.$$

Указание: Воспользоваться (1.182) для $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{v}$.

2. Показать, что для материальной незамкнутой поверхности S имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_S T_{ik} n_k dS = \int_S \left(\frac{dT_{ik}}{dt} + T_{ik} \text{div } \mathbf{v} - T_{il} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right) n_k dS.$$

Указание: Воспользоваться (1.182) для $A_k = T_{ik} a_i$, где \mathbf{a} — постоянный произвольный вектор.

3. Показать, что для материального объема $V(t)$ с границей $S(t)$ справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_V \text{rot } \mathbf{v} dV = \int_S \left(\mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \text{rot}_n \mathbf{v} \right) dS.$$

Указание: Воспользоваться (1.181), формулами (1.78), (1.81) и соотношением

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \nabla \frac{v^2}{2}.$$

4. Исходя из (1.182), получить формулу для скалярной функции $f(t, \mathbf{r})$:

$$\frac{d}{dt} \int_S f n dS = \int_S \left\{ \left(\frac{df}{dt} + f \text{div } \mathbf{v} \right) \mathbf{n} - f (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} dS.$$

Указание: Представить $\mathbf{A} = f \mathbf{a}$, где \mathbf{a} — постоянный произвольный вектор.

Как получить эту формулу из соотношения упражнения 2?

5. Показать, что для замкнутой материальной кривой $L(t)$ и скалярной функции $f(\mathbf{r}, t)$ справедлива формула

$$\frac{d}{dt} \oint_L f d\mathbf{L} = \oint_L \frac{df}{dt} d\mathbf{L} - \oint_L (\nabla f \cdot d\mathbf{L}) \mathbf{v} = \oint_L \frac{df}{dt} d\mathbf{L} + \oint_L f (d\mathbf{L} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Указание: В (1.183) представить $\mathbf{A} = \mathbf{a} f(t, \mathbf{r})$, где \mathbf{a} — постоянный и произвольный вектор.

Какой вид приобретет полученная формула, если вместо f взять тензорную функцию $T_{ik\dots}$ любого ранга?

6. Найти скорость изменения величины произвольного материального объема.

7. Указать для деформирующейся частицы среды такие материальные направления, которые не меняются в данный момент времени. Сколько таких направлений для каждой частицы? Указать их, если значения компонент тензора скоростей деформаций в этой частице в этот момент времени равны v_{ik} .

§ 9. Закон изменения массы. Уравнение неразрывности (сплошности)

Полученные в предыдущем параграфе соотношения позволяют сформулировать первый основной закон движения сплошной среды — закон сохранения массы. Этот закон нельзя отнести ни к чисто динамическим, ни к чисто кинематическим соотношениям, поскольку он использует понятие массы скорее как феноменологическое свойство среды, чем как меру ее инертности. Иногда о кинематике сплошной среды с учетом этого закона говорят как о *кинematике*.

Рассмотрим движение произвольного материального объема $V(t)$ сплошной среды. Его масса определяется интегралом

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho(t, \mathbf{r}) dV.$$

Если внутри области $V(t)$ нет ни источников, ни стоков среды, то эта масса остается неизменной в любой момент времени t , так что

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (1.184)$$

Если внутри области V имеются источники (стоки) среды и $q(t, \mathbf{r})$ — функция, характеризующая их распределение, так что ее величина равна массе среды, прибывающей (убывающей) за единицу времени в единице объема, то

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_V q(t, \mathbf{r}) dV. \quad (1.185)$$

Выражение (1.184) может быть названо законом сохранения массы, а (1.185) — законом изменения массы. От функций, входящих в эти выражения, ничего, кроме интегрируемости по V , не требуется. Если эти функции дифференцируемы, то, в силу формулы (1.181), из (1.185) получаем, положив $\Phi = \rho$:

$$\int_{V(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} - q \right) dV = 0.$$

Если подынтегральная функция в предыдущем выражении непрерывна в каждой внутренней точке области $V(t)$, то в силу произвольности этой области имеем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q. \quad (1.186)$$

Это дифференциальное уравнение, связывающее функции $\rho(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ и $q(t, \mathbf{r})$, носит название *уравнения неразрывности* или *уравнения сплошности*.

Название связано с тем, что уравнение (1.186) фактически выполняет роль своего рода связей, накладываемых на частицы жидкости (газа) и обеспечивающих неразрывность, сплошность потока. Действительно, рассматривая простейший случай потока $\mathbf{v} = (v_1(x_1, x_2, x_3), 0, 0)$, $\rho = \text{const}$ и $q = 0$, из (1.186) имеем $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$ и, следовательно, $v_1 = v_1(x_2, x_3)$, т. е. среда движется вдоль оси x_1 «сплошным потоком» без разрывов, ибо ее скорость не меняется вдоль прямолинейных линий тока. В случае $\rho \neq \text{const}$ «сплошной поток» также не нарушится, если \mathbf{v} и ρ непрерывны.

Уравнение (1.186) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = q, \quad (1.187)$$

если учесть, что $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$ и $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$.

В формулах (1.186), (1.187) функция $q(t, \mathbf{r})$ предполагается непрерывной внутри V . Если источники располагаются дискретным образом и, скажем, сосредоточены в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, то в этом случае в качестве q в уравнении (1.185) необходимо брать

$$q(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака¹. Как известно,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \neq 0 \\ \infty, & \text{для } x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Эти свойства составляют главнейшие признаки дельта-функции Дирака.

¹ Дирак (*Dirac*) Поль Анриен Морис (1902–1984) — выдающийся английский физик, один из создателей квантовой механики. Окончил Бристольский (1921 г.) и Кембриджский университеты; профессор Кембриджского университета в 1932–1969 гг. Разработал (1926–1927 гг.) математический аппарат квантовой механики, первым применил ее принципы к электромагнитному полю. Заложил основы квантовой электродинамики и квантовой теории излучения. Построил (1928 г.) релятивистскую теорию движения электрона. Предсказал существование античастиц, рождение и аннигиляцию электронно-позитронных пар. Выдвинул (1933 г.) гипотезу о существовании антивещества. За создание квантовой механики вместе с Э. Шредингером удостоен Нобелевской премии (1933 г.). Независимо от Э. Ферми разработал в 1926 г. статистику частиц с полуцелым спином (статистика Ферми — Дирака).

§ 9. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МАССЫ. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ (СПЛОШНОСТИ)

Поскольку эта функция имеет особенность, то для получения дифференциального уравнения из интегральной формы закона (1.185) следует считать, что функция дискретных источников образуется предельным переходом из некоторой непрерывной функции $q(t, \mathbf{r})$ к δ -функции уже после перехода от интеграла к дифференциальному уравнению (1.186). В качестве примера преобразования в δ -функцию непрерывных функций, зависящих от некоторого параметра ε , когда $\varepsilon \rightarrow \infty$, укажем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\pi(1 + (\varepsilon x)^2)} = \delta(x) \quad \text{или} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-(\varepsilon x)^2} = \delta(x).$$

Функция Дирака, как известно (см., например, [19]), обладает, в частности, следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) f(x) dx = f(x_i);$$

$$f(x)\delta(x - x_i) = f(x_i)\delta(x - x_i), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a = \text{const} \neq 0).$$

Функция Хевисайда¹ (единичная функция) $H(x)$ связана с δ -функцией Дирака следующим образом:

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx,$$

так что

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x < 0, \\ 1, & \text{для } x > 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ функция Хевисайда терпит разрыв.

Нетрудно видеть, что $dH/dx = \delta(x)$ и функцию Хевисайда также можно получить предельным переходом из непрерывной функции, например,

$$H(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \text{arctg } \varepsilon x + \frac{1}{2}.$$

Графики функции $y = \varepsilon/\pi(1 + (\varepsilon x)^2)$, переходящей при $\varepsilon \rightarrow \infty$ в $\delta(x)$, а также графики $H(x)$ и $1/\pi \text{arctg } \varepsilon x + 1/2$ при разных ε показаны на рис. 60.

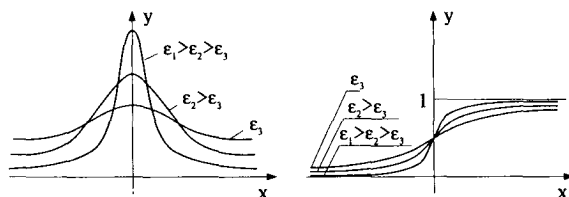


Рис. 60

¹ Хевисайд (Heaviside) Оливер (1850–1925) — английский физик, один из создателей операционного исчисления. Научными трудами занимался в собственной лаборатории. Развил теорию электромагнитного поля Максвелла, получил ряд энергетических соотношений. Указал (1902 г.) на существование ионизированного слоя атмосферы (слой Хевисайда). Автор пятитомной монографии «Электромагнитная теория».

Вышеприведенные соображения касаются возможности существования в области V в том числе и точечных источников импульса, энергии и т.п., что может встретиться при изучении движения среды переменной массы (см. § 13).

В дальнейшем мы, если этого не требует специальная постановка задачи, под дифференциальным уравнением неразрывности будем понимать уравнение (1.186) или (1.187) при $q = 0$, т. е.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (1.188)$$

Тогда закон сохранения массы (1.184) в силу (1.175) может быть записан в виде

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.189)$$

где S — поверхность, ограничивающая в каждый момент времени материальный объем V .

В случае несжимаемой среды, т. е. когда любая частица движется без изменения своего объема и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, из (1.186) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0. \quad (1.190)$$

Таким образом, поскольку частица не меняет своего объема, плотность ρ в каждой частице остается неизменной.

Для несжимаемых сред поле скоростей соленоидально. В случае стационарного движения сжимаемой среды ($\partial \rho / \partial t = 0$) соленоидально поле вектора количества движения единицы объема, так как в этом случае из (1.187) имеем:

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.191)$$

а из (1.189) получаем для произвольной замкнутой поверхности в односвязном объеме

$$\int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.192)$$

Задачи с решениями

Задача 9.1. *Используя уравнение неразрывности, показать, что для любого трехмерного стационарного потока сжимаемой жидкости можно ввести две функции тока $\psi(\mathbf{r})$ и $\chi(\mathbf{r})$ так, что*

$$\rho \mathbf{v} = \nabla \psi \times \nabla \chi.$$

Решение. Рассмотрим две функции $\psi(\mathbf{r})$ и $f(\mathbf{r})$, такие, что пересечение поверхностей $\psi = \text{const}$ и $f = \text{const}$ определяет линии тока. Тогда, поскольку $\nabla \psi$ и ∇f направлены по нормали к этим поверхностям, можно записать

$$\rho \mathbf{v} = \lambda \nabla \psi \times \nabla f,$$

где λ — скалярная функция, подлежащая определению.

Уравнение непрерывности для стационарного движения ($\text{div } \rho \mathbf{v} = 0$) дает

$$\begin{aligned} \text{div}(\lambda \nabla \psi \times \nabla f) &= \nabla \lambda \cdot (\nabla \psi \times \nabla f) + \lambda \text{div}(\nabla \psi \times \nabla f) = \\ &= \nabla \lambda \cdot (\nabla \psi \times \nabla f) = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\text{div}(\nabla \psi \times \nabla f) = \nabla f \cdot \text{rot } \nabla \psi - \nabla \psi \cdot \text{rot } \nabla f = 0.$$

Следовательно, можно считать $\lambda = \lambda(\psi, f)$. Теперь достаточно ввести функцию $\chi = \chi(\psi(\mathbf{r}), f(\mathbf{r}))$ так, чтобы $\lambda = \partial \chi / \partial f$. Тогда

$$\nabla \chi = \frac{\partial \chi}{\partial f} \nabla f + \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \nabla \psi = \lambda \nabla f + \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \nabla \psi,$$

так что $\rho \mathbf{v} = \nabla \psi \times \nabla \chi$, ψ и χ есть искомые две функции тока.

Заметим, что поскольку $\partial \psi / \partial x^i$ являются ковариантными компонентами вектора $\nabla \psi$, то в обобщенных координатах

$$\rho v^j = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \frac{\partial \chi}{\partial x^k}; \quad \rho v_i = g_{ii} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \frac{\partial \chi}{\partial x^k},$$

где ε^{ijk} — контравариантные компоненты тензора Леви-Чивита.

Задача 9.2. *Показать, что если в среде нет источников массы, то для материального объема $V(t)$ справедлива формула*

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho F(t, \mathbf{r}) dV = \int_{V(t)} \rho \frac{dF}{dt} dV,$$

где $F(t, \mathbf{r})$ — интегрируемая вместе с производными тензорная функция любого ранга.

Какой вид будет иметь выражение для $\frac{d}{dt} \int_V \rho F dV$ в случае наличия в среде источников массы с интенсивностью распределения $q = q(t, \mathbf{r})$?

Решение. Подставляя в (1.181) вместо Φ выражение ρF и учитывая уравнение неразрывности, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho F dV &= \int_V \left\{ \frac{d}{dt} (\rho F) + \rho F \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} dV = \int_V \left\{ \rho \frac{dF}{dt} + F \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right\} dV = \\ &= \int_V \left\{ \rho \frac{dF}{dt} + qF \right\} dV. \end{aligned}$$

Отсюда при $q = 0$, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho F dV = \int_V \rho \frac{dF}{dt} dV.$$

Задача 9.3. Показать, что эйлерова и лагранжева формы уравнения неразрывности эквивалентны.

Решение. Будем исходить из лагранжевой формы (см. § 13), которую можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} (\rho J) = \frac{d\rho}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} = 0.$$

Представим определитель $J = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial x_{0k}} \right\|$ в виде

$$J = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}}.$$

Тогда, вычисляя материальную производную от $J = J(t, x_{01}, x_{02}, x_{03})$, получаем

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} = \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial v_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial v_3}{\partial x_{0k}} \right).$$

Имея в виду переход в этом выражении к переменным Эйлера, запишем

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_{0\beta}} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_{0\beta}}.$$

Тогда имеем

$$\frac{dJ}{dt} = \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial v_2}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} + \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial v_3}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_{0k}} \right).$$

Из девяти определителей третьего порядка, получаемых в правой части этого соотношения при суммировании по $s = 1, 2, 3$, от нуля будут отличны лишь три, так что имеем

$$\frac{dJ}{dt} = \varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \frac{\partial x_1}{\partial x_{0i}} \frac{\partial x_2}{\partial x_{0j}} \frac{\partial x_3}{\partial x_{0k}} = J \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = \frac{d\rho}{dt} J + \rho J \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Поскольку $J \neq 0$, то отсюда имеем эйлерову форму уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Задача 9.4. Показать, что для поля скоростей $v_i = x_i f(t)$ уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\rho(t, x_1, x_2, x_3) = \rho_0 \frac{x_{01} x_{02} x_{03}}{x_1 x_2 x_3}.$$

Решение. Для заданного поля имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = -3f(t).$$

Интегрируя по t , имеем

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-3 \int_{t_0}^t f(t) dt\right), \quad x_i = x_{0i} \exp\left(\int_{t_0}^t f(t) dt\right).$$

Отсюда следует

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{x_{01}}{x_1}\right)^3 = \left(\frac{x_{02}}{x_2}\right)^3 = \left(\frac{x_{03}}{x_3}\right)^3,$$

так что

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^3 = \left(\frac{x_{01} x_{02} x_{03}}{x_1 x_2 x_3}\right)^3,$$

или

$$\rho = \rho_0 \frac{x_{01} x_{02} x_{03}}{x_1 x_2 x_3}.$$

Упражнения

1. Показать, что поле скоростей $\mathbf{v} = (-f(r)x_2, f(r)x_1, h(r))$ описывает течение несжимаемой среды ($r^2 = x_1^2 + x_2^2$).

Определить ускорение $d\mathbf{v}/dt$ и угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ частицы в каждой точке потока. Найти линии тока и показать, что они образуют винтовые линии на круговом цилиндре. При каких условиях движение будет безвихревым?

2. Для поля скоростей $\mathbf{v} = (-\alpha x_1, \alpha x_2, 0)$ ($\alpha = \text{const}$) показать, что оно относится к несжимаемой жидкости. Найти линии тока и показать, что частицы, которые при $t = t_0$ находились в плоскостях $x_2 = \text{const}$ и $x_3 = \text{const}$, в любой момент времени будут находиться в плоскостях, соответственно параллельных исходным.

3. Показать, что для безвихревого потока жидкости с потенциалом $\varphi(t, \mathbf{r})$ уравнение неразрывности может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt} \ln \rho = -\Delta \varphi.$$

4. Возможно ли непрерывное течение несжимаемой жидкости со скоростным полем $\mathbf{v} = (\alpha x_1, \beta x_2, \gamma x_3)$? Если возможно, то при каких ограничениях на значения постоянных α, β, γ ? Возможно ли указанное поле скоростей в среде с источниками массы?

§ 10. Сохраняемость векторных линий и интенсивности векторных трубок поля

В ряде вопросов гидромеханики и теории электромагнетизма большую роль играет понятие сохраняемости векторных линий поля, или, как иногда говорят, свойство «вмороженности поля».

Что понимают под *сохраняемостью векторных линий*¹ некоторого поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$?

Если векторные линии поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ в любой момент движения среды со скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ состоят из одних и тех же частиц, то говорят, что векторные линии поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ обладают свойством сохраняемости. Иными словами, если любая материальная векторная линия все время остается векторной линией некоторого поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, то говорят, что векторные линии этого поля сохраняются.

В общем случае движения материальные линии, совпадающие с векторными линиями поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$, могут разрушаться, т. е. в разные моменты времени состоять из разных частиц среды.

Пусть в движущейся среде нам удалось в момент времени t отметить некоторую векторную линию (aa) поля $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ (рис. 61). Пусть частицы этой линии переместились согласно скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ движения среды и в момент времени t' заняли соответствующие положения. Соединим их линией $(a'a')$. Если \mathbf{A} обладает свойством сохраняемости векторных линий, то линия $(a'a')$ является векторной линией поля $\mathbf{A}(t', \mathbf{r})$.

Представим себе мысленный эксперимент, что мы можем в любой момент времени видеть векторные линии поля \mathbf{A} и в какой-то момент t выкрасили их в разные цвета. Если после этого в движущейся среде векторные линии сохранили свой цвет и не перемешались в мозаику, т. е. поле \mathbf{A} как бы «вморозилось» в движущиеся частицы, то говорят, что векторные линии этого поля сохраняются.

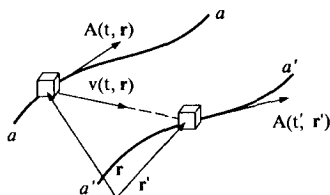


Рис. 61

¹ Выражение «сохраняемость векторных линий поля \mathbf{A} » употребляется для краткости; более точно (например в гидромеханике) говорить о «сохраняемости материальных (жидких) линий, совпадающих с векторными линиями поля \mathbf{A} ».

Если материальные линии сохраняются, то, естественно, сохраняется все содержащее материальной трубки, образуемой сохраняемыми линиями. Но сохранится ли интенсивность материальных трубок? Не по длине трубки — здесь никаких условий не ставится — а по времени, т. е. будет ли независимой от времени величина $\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$?

Теоремы
А. А. Фридмана

Чтобы векторные линии сохранялись и сохранялась интенсивность векторных трубок, поле \mathbf{A} должно удовлетворять определенным условиям, которые устанавливаются двумя следующими теоремами

А. А. Фридмана¹.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием сохраняемости векторных линий поля \mathbf{A} является выполнение равенства:*

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \times \mathbf{A} = 0. \tag{1.193}$$

Докажем необходимость этого условия.

Пусть $\delta \mathbf{r}$ — элемент векторной линии в момент времени t , а $\delta \mathbf{r}'$ — тот же элемент в любой другой, достаточно близкий к t момент времени $t' = t + \Delta t$ (рис. 62). Если это элементы сохраняемых векторных линий, то тогда

$$\mathbf{A} \times \delta \mathbf{r} = 0 \text{ и } \mathbf{A}' \times \delta \mathbf{r}' = 0, \tag{1.194}$$

где \mathbf{A}' — значение поля в частице в момент времени t' .

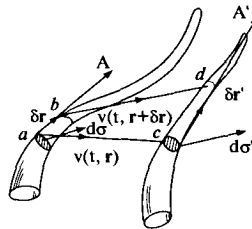


Рис. 62

¹ Фридман Александр Александрович (1888–1925) — советский физик и математик. Окончил Петербургский университет (1910 г.). Профессор Ленинградского университета. Основные научные работы в области гидромеханики, теории тяготения и геофизики. Нашел нестационарные решения уравнения Эйнштейна, доказав (1923 г.), вопреки Эйнштейну, возможность существования расширяющейся Вселенной. В 1929 г. его теория, с которой Эйнштейн в конце концов согласился, подтвердилась экспериментально открытием явления разбегания галактик. Исследовал кинематические свойства и образование вихрей в сжимаемой жидкости, предложил условия динамической возможности ее движения. Разрабатывал вопросы геометрии и теории чисел.

Но с точностью до бесконечно малых Δt и $\delta \mathbf{r}$ в первой степени имеем

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Delta t, \quad (1.195)$$

$$\delta \mathbf{r}' = \delta \mathbf{r} + (\mathbf{v}(t, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r})) \Delta t = \delta \mathbf{r} + (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Delta t. \quad (1.196)$$

Последнее выражение получено из векторного четырехугольника $abcd$ (см. рис. 62) с учетом того, что направленные отрезки \overline{ac} и \overline{bd} равны соответственно $\overline{ac} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \Delta t$ и $\overline{bd} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \Delta t$.

Подставляя \mathbf{A}' и $\delta \mathbf{r}'$ во второе условие (1.194), получаем

$$\left(\mathbf{A} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Delta t \right) \times (\delta \mathbf{r} + (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Delta t) = 0.$$

Отсюда имеем, отбрасывая члены, квадратичные относительно Δt , и учитывая первое условие (1.194):

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \delta \mathbf{r} \right) + (\mathbf{A} \times (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = 0.$$

Поскольку $\delta \mathbf{r} \parallel \mathbf{A}$, то, заменяя здесь $\delta \mathbf{r}$ на \mathbf{A} , получаем

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{A} \right) + (\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = 0,$$

что и дает (1.193).

Доказательство достаточности этого условия такое же, как и во второй теореме, поэтому мы его здесь опускаем. Заметим только, что условие (1.193) можно переписать в виде $d\mathbf{A}/dt - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} = f(t, \mathbf{r}) \mathbf{A}$, где $f(t, \mathbf{r})$ — произвольная функция.

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием сохраняемости векторных линий и интенсивности векторных трубок поля \mathbf{A} является выполнение равенства:*

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.197)$$

О таком поле \mathbf{A} мы будем кратко говорить как о поле, обладающем свойством сохраняемости.

Необходимость.

Если векторные линии поля \mathbf{A} и интенсивность векторных трубок сохраняются, то выполнены равенства:

$$\mathbf{A} \times \delta \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{A}' \times \delta \mathbf{r}' = 0, \quad \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}' \cdot d\boldsymbol{\sigma}'. \quad (1.198)$$

Поскольку векторные линии, образующие векторную трубку, сохраняются, т. е. состоят все время из одних и тех же частиц (остаются материальными), то содержимое трубки, в частности величина массы среды, не меняется, т. е.

$$\rho d\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{r} = \rho' d\boldsymbol{\sigma}' \cdot \delta \mathbf{r}', \quad (1.199)$$

где $\rho' = \rho + (d\rho/dt)\Delta t$ — плотность среды в момент времени $t' = t + \Delta t$, а $d\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{r}$ и $d\boldsymbol{\sigma}' \cdot \delta \mathbf{r}'$ — объемы выделенного элемента трубки соответственно в моменты времени t и t' (см. рис. 62).

Подставляя в (1.199) значение $\delta \mathbf{r}'$ из (1.196) и заменяя $\delta \mathbf{r}$ на \mathbf{A} в силу (1.198), получаем

$$\rho d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \rho' d\boldsymbol{\sigma}' \cdot (\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Delta t).$$

Учитывая условия сохранения интенсивности (1.198), отсюда имеем

$$\rho d\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{A}' = \rho' d\boldsymbol{\sigma}' \cdot (\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Delta t),$$

а в силу произвольности вектора $d\boldsymbol{\sigma}'$ получаем

$$\rho \mathbf{A}' = \rho' (\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Delta t).$$

Подставляя сюда значения \mathbf{A}' из (1.195) и $\rho' = \rho + (d\rho/dt)\Delta t$ и отбрасывая слагаемые, квадратичные относительно Δt , получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{A} \frac{d\rho}{dt} + \rho (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (1.200)$$

Наконец, выражая $d\rho/dt$ из уравнения неразрывности (1.188), приходим к равенству

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.201)$$

Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть поле $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (1.201).

Построим поле $\mathbf{A}^*(t, \mathbf{r})$ следующим образом:

1) в начальный момент времени t_0 оно всюду совпадает с \mathbf{A} , т. е.

$$\mathbf{A}^*(t_0, \mathbf{r}) = \mathbf{A}(t_0, \mathbf{r}); \quad (1.202)$$

2) в любой другой момент времени t поле $\mathbf{A}^*(t, \mathbf{r})$ в каждой точке строится так, чтобы оно обладало свойством сохраняемости и векторных линий, и интенсивности векторных трубок. Для этого, отмечая новое положение частиц векторной линии $\mathbf{A}^*(t_0, \mathbf{r})$ по истечении времени $t - t_0$ (например, $a_0 \rightarrow a$, $b_0 \rightarrow b$ (рис. 63)), соединяем их линией L . Направляем вектор $\mathbf{A}^*(t, \mathbf{r})$ по касательной к этой линии, а величину его выбираем так, чтобы $\mathbf{A}^*(t_0, \mathbf{r}) \cdot d\sigma_0 = \mathbf{A}^*(t, \mathbf{r}') \cdot d\sigma$. Тогда не только линия L будет векторной линией поля \mathbf{A}^* в любой момент времени, но и интенсивность построенных трубок тока не будет меняться со временем. Построенное таким способом поле $\mathbf{A}^*(t, \mathbf{r})$ обладает свойством сохраняемости и, следовательно, по необходимости удовлетворяет условию

$$\frac{d\mathbf{A}^*}{dt} - (\mathbf{A}^* \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{A}^* \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

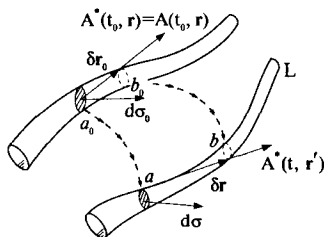


Рис. 63

Но тогда вектор $\mathbf{A}^*(t, \mathbf{r}(t))$, где $\mathbf{r}(t)$ — закон движения частицы среды, удовлетворяет такому же линейному дифференциальному уравнению (1.201), что и вектор $\mathbf{A}(t, \mathbf{r}(t))$, и, кроме того, эти векторы в начальный момент времени в силу (1.202) совпадают. Поскольку задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения имеет единственное решение, то

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}^*(t, \mathbf{r})$$

и поле \mathbf{A} , которое (по предположению) удовлетворяет условию (1.201), обладает свойством сохраняемости.

Достаточность условий теоремы доказана.

Вектор, стоящий в левой части равенства (1.201), есть не что иное, как *гельмгольциан* поля

$$\text{helm } \mathbf{A} \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Мы с ним имели дело при вычислении производных по времени от потока векторного поля через незамкнутую поверхность и циркуляции по замкнутому контуру (см. § 8).

Теперь видно, насколько важную роль играет этот вектор в кинематике сплошной среды. Полученные здесь и в § 8 результаты позволяют сформулировать два важных следствия из второй теоремы Фридмана.

Следствие 1. *Поток поля, обладающего свойством сохраняемости, через любую незамкнутую материальную поверхность остается постоянным.*

Справедливо и обратное утверждение: если поток поля через произвольную незамкнутую материальную поверхность не меняется с течением времени, то это поле обладает свойством сохраняемости.

Это следует из формулы (1.182) и условия (1.197).

Следствие 2. *Если поле $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ в односвязной области обладает свойством сохраняемости, то циркуляция поля \mathbf{A} по любому замкнутому материальному контуру постоянна.*

Это следует из (1.183) и условия сохраняемости $\text{helm}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$.

Обратное утверждение тоже верно в силу произвольности контура $L(t)$.

Примеры векторных полей, обладающих свойством сохраняемости.

Пример 1. Как будет показано в дальнейшем, уравнение движения невязкой жидкости (газа) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.202)$$

Если предположить баротропность среды, т. е. $p = p(\rho)$ и потенциальность массовых сил ($\mathbf{f} = -\nabla\Pi$), то, расписывая полную производную

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \nabla \frac{v^2}{2},$$

уравнение движения (1.203) можно представить в виде

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \mathcal{P}(\rho) \right), \quad (1.204)$$

где

$$\mathcal{P}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho(\rho)}{\rho}.$$

Беря от обеих частей (1.204) операцию rot и обозначая $\text{rot } \mathbf{v} \equiv \mathbf{\Omega}$, получаем

$$\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}). \quad (1.205)$$

Расписывая rot векторного произведения и учитывая, что $\text{div } \mathbf{\Omega} \equiv 0$, получаем

$$\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t} = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \text{div } \mathbf{v}$$

или

$$\text{helm } \mathbf{\Omega} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} - (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Итак, поле вихря баротропной невязкой среды, движущейся в поле потенциальных массовых сил, обладает свойством сохраняемости.

Отсюда, в частности, следует одна из основных теорем гидромеханики, принадлежащая Лагранжу, о том, что циркуляция скорости жидкости в поле потенциальных сил по любому стягиваемому контуру не меняется с течением времени (следствие 2 из второй теоремы Фридриха).

Пример 2. Рассмотрим идеально проводящую сплошную среду, взаимодействующую с электромагнитным полем. Уравнения Максвелла в обычно принятых обозначениях величин имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0; & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho_e; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; & \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.206)$$

Поле магнитной индукции \mathbf{B} всегда соленоидально, поскольку в природе нет магнитных зарядов, а есть только магнитные диполи.

В системе координат, связанной с частицей среды, движущейся со скоростью \mathbf{V} , как известно, электромагнитные величины (\mathbf{B}^* , \mathbf{D}^* и т. д.) выражаются следующим образом:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{D}); \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{E});$$

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}); \quad \mathbf{D}^* = \mathbf{D} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H});$$

$$\rho_e^* = \rho_e; \quad \mathbf{j}^* = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}.$$

Здесь $((v^2/c^2) \ll 1)$ отброшены члены порядка v^2/c^2 и выше.

В случае идеальной среды электрическое поле в каждой частице обращается в нуль, т. е. $\mathbf{E}^* = 0$ и, следовательно, $\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c$.

Подставляя это значение \mathbf{E} в третье уравнение Максвелла (1.206), получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.207)$$

А это и означает (см. (1.205)), что

$$\text{helm } \mathbf{B} = 0.$$

Итак, поле магнитной индукции в идеально проводящей среде обладает свойством сохранения.

Интегрирование уравнения $\text{helm } \mathbf{A} = 0$.

Уравнение

$$\text{helm } \mathbf{A} \equiv \frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{v} = 0$$

может быть с помощью уравнения неразрывности $d\rho/dt = -\rho \text{ div } \mathbf{v}$ приведено к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho} \right) - \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = 0. \quad (1.208)$$

Здесь мы рассмотрим более общее уравнение, которое справедливо как условие сохранения векторного поля \mathbf{A} в среде переменной массы с непрерывным распределением источников (стоков) массы $q(t, \mathbf{r})$. Для такой среды (см. (1.186)) уравнение $\text{helm } \mathbf{A} = 0$ приобретает форму

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho} \right) - \left(\frac{\mathbf{A}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\frac{q\mathbf{A}}{\rho^2}. \quad (1.209)$$

Введем обозначения: $\mathbf{A}/\rho \equiv \mathbf{a}$, $f \equiv -q/\rho$. Тогда имеем из (1.209)

$$\frac{da_i}{dt} - a_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = a_i f(t, x_{0k}). \quad (1.210)$$

Здесь $x_i(t) = x_i(t, x_{0k})$ рассматриваются (лагранжево описание) как известные функции времени и начальных координат x_{01}, x_{02}, x_{03} , поскольку поле скоростей в уравнении (1.210) считается известным, так что из $dx_i/dt = v_i$ всегда можно найти $x_i(t) = x_i(t, x_{0k})$.

Аналогично можно считать, что $\rho = \rho(x_k(t), t)$, $q = q(x_k(t), t)$ тоже известны, так что справа в (1.210) $f(t, x_{0m})$ — известная функция.

Имеем

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \cdot \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k}. \quad (1.211)$$

Отсюда, дифференцируя по t , получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \cdot \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Поскольку $dx_i/dt = v_i$ и можно менять порядок дифференцирования по независимым лагранжевым переменным t, x_{0k} , получаем

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_{0l}} \cdot \frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \right).$$

Подставляя это значение $\partial v_i/\partial x_k$ в (1.210), имеем

$$\frac{da_i}{dt} + a_k \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_{0l}} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \right) = a_i f.$$

Умножим обе части этого уравнения на $\partial x_{0p}/\partial x_i$, просуммируем по i и учтем (1.211):

$$\frac{\partial x_{0p}}{\partial x_i} \frac{da_i}{dt} + a_k \delta_{pk} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_{0l}}{\partial x_k} \right) = a_i f \frac{\partial x_{0p}}{\partial x_i}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(a_i \frac{\partial x_{0p}}{\partial x_i} \right) = a_i \frac{\partial x_{0p}}{\partial x_i} f.$$

Отсюда

$$a_i \frac{\partial x_{0p}}{\partial x_i} = C_p \exp \int_{t_0}^t f(t, x_{0m}) dt,$$

где

$$C_p = \left(a_i \frac{\partial x_{0p}}{\partial x_i} \right)_{t=t_0} = a_p(t_0).$$

Умножая полученное решение на $\partial x_k/\partial x_{0p}$ и суммируя по p , получим окончательно в силу (1.211):

$$a_k(t) = a_p(t_0) \frac{\partial x_k}{\partial x_{0p}} \exp \int_{t_0}^t f(t, x_{0m}) dt. \quad (1.212)$$

Задачи с решениями

Задача 10.1. Показать, что условием сохраняемости линий тока является

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) f(t, \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(t_0, \mathbf{r})$, а $f(t, \mathbf{r})$ — функция, такая, что $f(t_0, \mathbf{r}) = 1$ ($f \equiv 1$ для стационарного движения).

Решение. Линии тока — это векторные линии поля скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, и поэтому условие их сохраняемости на основании (1.193) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = g(t, \mathbf{r})\mathbf{v},$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = g(t, \mathbf{r})\mathbf{v}. \quad (1)$$

Тогда получаем

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r})f(t, \mathbf{r}),$$

где $\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(t_0, \mathbf{r})$ — значение скорости в начальный момент времени, а $f = \exp \int_{t_0}^t g(t, \mathbf{r}) dt$.

Представление $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(\mathbf{r})f(t, \mathbf{r})$ имеет ясный кинематический смысл: для того, чтобы линии тока все время состояли из одних и тех же частиц, вектор скорости \mathbf{v} не должен менять со временем своего направления в любой точке пространства.

Упражнения

1. Показать, что необходимым и достаточным условием сохраняемости поля вихря скорости частиц является потенциальность поля ускорений потока.

2. Показать, что поле $\mathbf{A} = (f(x_2)e^{\lambda t}, 0, 0)$ ($\lambda = \text{const}$) в жидкости с полем скоростей $\mathbf{v} = (v_1(x_2), 0, v_3(x_2, x_3))$ обладает свойством сохраняемости векторных линий, но $\text{helm } \mathbf{A} \neq 0$. При каком условии векторные трубки поля \mathbf{A} будут сохранять интенсивность?

Глава 2

ДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В этой главе изучается движение сплошной среды в связи с причинами, силами, его вызвавшими. При этом, как уже упоминалось, под движением понимается не только механическое перемещение, но и всякие изменения характеристик сплошной среды; это связано с присутствием иных, отличных от механической, форм энергии, в частности тепловой.

§ 11. Силы в механике сплошной среды

Как обычно в механике, в зависимости от рассмотрения движения той или иной части сплошной среды действующие на нее силы могут быть отнесены к внешним или внутренним, активным или силам реакции и т.п.

Однако не эти свойства сил в сплошной среде будут нас сейчас интересовать.

Силы, действующие в сплошной среде, обычно не носят «точечного» характера приложения, а распределены по области. При этом в сплошной среде важно различать два основных типа сил: 1) массовые (или объемные) силы, 2) поверхностные силы.

Массовые (объемные) силы Это силы, приложенные к частицам среды и пропорциональные массе частицы (массовые силы) или объему частицы (объемные силы). Таким образом, массовая сила ΔF , действующая на частицу с массой Δm , равна (рис. 64)

$$\Delta F = f^* \Delta m = f^* \rho \Delta V.$$

Здесь f^* — коэффициент пропорциональности для массовой силы, а ρf^* — то же, если силу рассматривать как объемную. Таким образом, если введено понятие плотности сплошной среды, то определения массовых и объемных сил эквивалентны. Вектор f^* имеет размерность ускорения.

К массовым силам относятся гравитационные силы, в частности сила тяжести (вес), электромагнитные силы, инерционные силы.

Иногда определяют массовые силы как силы *дальнего действия*. Во-первых, потому, что они очень медленно изменяются с расстоянием; так, например, материальные тела «чувствуют» друг друга через силы гравитации, находясь на больших расстояниях, а при сближении тел эти силы увеличиваются весьма медленно. Во-вторых, потому, что изменение количества движения, являющееся, в частности, проявлением массовых сил, осуществляется посредством силовых полей, постоянно окружающих взаимодействующие тела. Поэтому можно говорить, что силовые поля как бы пронизывают все материальные тела, «проникают» сквозь них, влияя на движение всех их частиц. Они в равной степени действуют на все вещество внутри малого объема, а потому суммарная сила пропорциональна величине этого элементарного объема.

Распределение массовых сил в сплошной среде может быть полностью охарактеризовано однозначной вектор-функцией точки и времени.

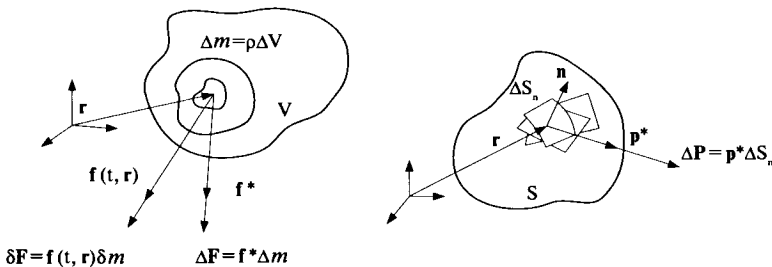


Рис. 64

Пусть в каждой точке области, занятой сплошной средой, в любой момент времени существует предел

$$\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta m} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \mathbf{f}^* \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где Δm — масса частицы среды, а $\Delta \mathbf{F}$ — главный вектор массовых сил, действующих на эту частицу (см. рис. 64).

Предел $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ представляет собой силу, действующую на единицу массы в (t, \mathbf{r}) , и носит название *интенсивности* массовых сил.

Вектор $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ полностью характеризует распределение массовых сил в сплошной среде. Задания поля $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ достаточно, чтобы определить главный вектор массовых сил \mathbf{F} , действующих на любую материальную часть сплошной среды, занимающую в данный момент пространственную область $V(t)$ и обладающую массой M . Действительно, из определения (2.1) получаем

$$\mathbf{F}(t) = \int_M \mathbf{f} dm = \int_V \rho \mathbf{f} dV.$$

В частности, на любую бесконечно малую частицу с массой δm действует массовая сила $\delta \mathbf{F} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}) \delta m$ (см. рис. 64).

Поверхностные силы Это силы, действие которых на некоторый объем сплошной среды осуществляется через материальные частицы, лежащие на поверхности, ограничивающей указанный объем. Они распределены по этой поверхности и в каждой ее точке пропорциональны величине площади соответствующего элемента поверхности.

Таким образом, поверхностная сила $\Delta \mathbf{P}$, действующая на элемент ΔS_n поверхности, ограничивающей рассматриваемую среду, равна (см. рис. 64):

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{p}^* \Delta S_n. \quad (2.2)$$

Здесь индекс « n » указывает на нормаль с ортом \mathbf{n} у элемента поверхности ΔS_n , а вектор \mathbf{p}^* — коэффициент пропорциональности, который в пределе мог бы служить, подобно случаю с массовыми силами, характеристикой распределения поверхностных сил по поверхности S . Однако в случае поверхностных сил ситуация иная.

Поверхностные силы — это *силы близкого действия*. Они проявляются между частицами среды, находящимися на весьма близком (по-

рядка молекулярных величин) друг от друга расстоянии, и исчезают, как только непосредственный контакт между частицами пропадает.

Поэтому поверхностные силы действуют прежде всего между соприкасающимися участками одной и той же среды, т. е. внутри сплошной среды. В связи с этим их часто называют «внутренними силами», хотя, конечно, поверхностные силы могут быть и внешними (например, на границе раздела двух сред).

Поверхностные силы, с точки зрения их физической природы, являются результатом сил молекулярного взаимодействия. Так, сила взаимодействия между элементами газовой среды, контактирующими по некоторой воображаемой поверхности, является следствием взаимопроникновения молекул с разными количествами движения из одного элемента в другой. Для соседствующих элементов жидкостей поверхностная сила определяется как переносом импульса молекул, колеблющихся у общей границы около некоторого среднего состояния, так и силами взаимодействия молекул жидкостей в слоях вблизи поверхностей, разделяющих элементы среды. Последний вид взаимодействия характерен и для твердых тел.

При принятом в механике сплошной среды макроскопическом подходе нет особой нужды вникать в физическую природу поверхностных сил. Достаточно того главного факта, что их воздействие передается непосредственно частицам на поверхности контакта. Это позволяет принять основное положение: *поверхностные силы в сплошной среде пропорциональны величине площади непосредственного контакта взаимодействующих элементов, зависят от ориентации площадки контакта и не зависят от величины объемов элементов.*

В этом состоит принципиальное отличие поверхностных сил от объемных в сплошной среде.

Пусть в каждой точке (t, \mathbf{r}) поверхности S существует предел (см. (2.2))

$$\lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S_n} = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \mathbf{p}^* \equiv \mathbf{p}.$$

Вектор \mathbf{p} поверхностных сил на единичной площадке, имеющей нормаль \mathbf{n} и проходящей в момент времени t через точку \mathbf{r} , называется *напряжением*. Таким образом

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, \mathbf{n}). \quad (2.3)$$

Зависимость от \mathbf{n} обычно записывают в форме $\mathbf{p}(t, \mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{p}_n(t, \mathbf{r})$, но суть от этого не меняется. Дело в том, что исчерпывающей характеристикой распределения поверхностных сил в пространстве, занятом сплошной средой, напряжение служить не может. Оно зависит от ориентации площадки и потому не является однозначной функцией точки и времени, как это было с интенсивностью объемных сил $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$. С каждой пространственной точкой связано бесчисленное множество площадок, проходящих через нее, и на каждой из них определено свое напряжение (см. рис. 64).

И тем не менее, можно ввести однозначную функцию точки и времени, полностью характеризующую распределение поверхностных сил в сплошной среде, позволяющую в каждой точке определить напряжение на любой площадке, проходящей через эту точку. Но эта функция будет уже не вектором, а тензором второго ранга, который называется *тензором напряжений*.

Тензор напряжений Прежде всего заметим, что из третьего закона Ньютона следует

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{r}, \mathbf{n}) = -\mathbf{p}(t, \mathbf{r}, -\mathbf{n}), \text{ или } \mathbf{p}_n(t, \mathbf{r}) = -\mathbf{p}_{-n}(t, \mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Это легко понять из рис. 65, поскольку $\mathbf{p}_n \Delta S_n$ есть сила, с которой часть среды M_1 действует через контактную поверхность ΔS_n на M_2 , а $\mathbf{p}_{-n} \Delta S_{-n}$ — сила действия участка M_2 на среду из M_1 . Из закона равенства действия и противодействия, поскольку $\Delta S_n = \Delta S_{-n}$, следует (2.4).

Пользуясь тем, что форма частицы сплошной среды может быть произвольной, выберем малую частицу массы Δm в виде тетраэдра (рис. 66), отсекаемого от координатного угла в системе декартовых прямоугольных координат (x_1, x_2, x_3) плоскостью с нормалью \mathbf{n} . В дальнейшем для площадок, перпендикулярных координатным осям, примем обозначения $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$, а для напряжений на них — $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$.

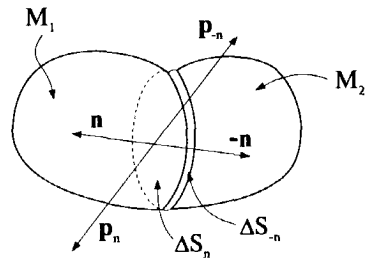


Рис. 65

Тогда уравнение движения центра масс выделенной частицы среды, имеющего скорость \mathbf{V}_c , запишется в виде

$$\Delta m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{f}^* \Delta m + \mathbf{p}_n \Delta S_n + \mathbf{p}_{-1} \Delta S_1 + \mathbf{p}_{-2} \Delta S_2 + \mathbf{p}_{-3} \Delta S_3.$$

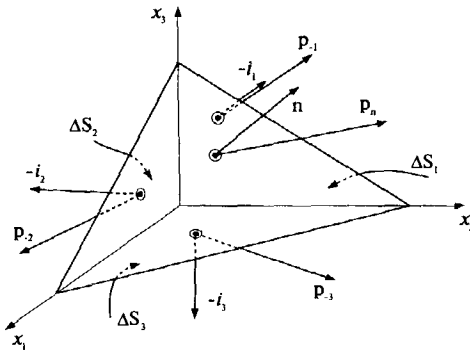


Рис. 66

Здесь $\mathbf{p}_{-k} = -\mathbf{p}_k$ — напряжение на площадке с нормалью $(-\mathbf{i}_k)$.

Но $\Delta S_k = n_k \Delta S_n$, где n_k — проекция \mathbf{n} на k -тую координатную ось, $\Delta m = \rho \Delta V$ и в силу (2.4) имеем

$$\left(\rho \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} - \rho \mathbf{f}^* \right) \Delta V = \left(\mathbf{p}_n - \sum_{k=1}^3 n_k \mathbf{p}_k \right) \Delta S_n.$$

Разделив обе части этого равенства на ΔS_n и совершая предельный переход $\Delta V \rightarrow 0$ с сохранением нормали \mathbf{n} , получаем

$$\mathbf{p}_n = \sum_{k=1}^3 n_k \mathbf{p}_k \equiv n_k \mathbf{p}_k. \quad (2.5)$$

Для компонент вектора \mathbf{p}_n в выбранной декартовой системе координат имеем $p_{ni} = n_k p_{ki}$.

Эта формула показывает, что напряжение \mathbf{p}_n на любой площадке с нормалью \mathbf{n} является линейной однородной функцией напряжений на трех взаимно перпендикулярных координатных площадках, причем коэффициентами линейной комбинации являются направляющие косинусы нормали \mathbf{n} .

В представлении (2.5) физическая характеристика среды (напряжение) отделена от данных ориентации площадки, где рассматривается напряжение.

Таким образом, если в каждой точке пространства в любой момент времени будут заданы девять компонент p_{ik} трех векторов \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 , то через них можно однозначным образом выразить напряжение \mathbf{p}_n на любой площадке, проходящей через эту точку и имеющей направляющие косинусы нормали n_1 , n_2 , n_3 .

Это означает, что девять величин p_{ik} полностью определяют напряженное состояние среды в любой ее точке (t, \mathbf{r}) .

Из формулы (2.5) в силу того, что \mathbf{p}_n и \mathbf{n} являются векторами, следует, что девять величин p_{ik} образуют тензор второго ранга. Этот тензор и носит название *тензора напряжений*.

Тензор напряжений, являющийся однозначной функцией точки и времени, позволяет полностью характеризовать распределение поверхностных сил в сплошной среде.

Диагональные компоненты тензора напряжений представляют собой нормальные напряжения на координатных площадках, а недиагональные — касательные напряжения (рис. 67). При этом p_{ik} означает проекцию на k -тую координатную ось вектора напряжения, приложенного к площадке, перпендикулярной i -той оси со стороны положительного направления этой оси.

Выше для наглядности при определении компонент тензора напряжений была применена декартова прямоугольная система координат. Как видно из рассуждений, это не является ограничением для введения понятия тензора напряжений. Если пользоваться произвольной криволинейной пространственной системой координат (см., например, [7]) с базисными векторами основного базиса \mathbf{a}_k и взаимного \mathbf{a}^k ($k = 1, 2, 3$), так что компоненты метрического тензора равны $g_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k$, $g^{ik} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^k$, $g^i_i = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_i$, то можно определить ковариантные (p_{ik}) , контравариантные (p^{ik}) и смешанные

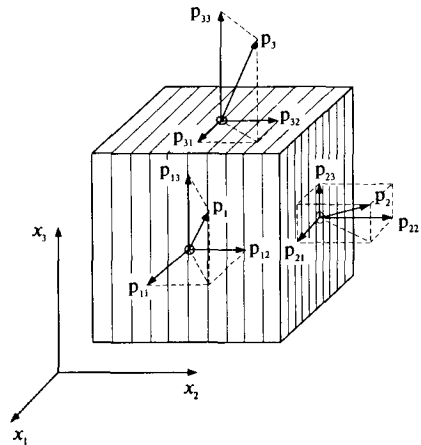


Рис. 67

(P_k^i) компоненты тензора напряжений. При этом формула (2.5) будет иметь вид $\mathbf{P}_n = P^{ik} \mathbf{a}_k n_i$; $P_n^k = n_i P^{ik}$; $P_{ni} = n^k P_{ki} = P_i^k n_k = g_{il} n_k P^{kl}$, где n_i, n^i — ко- и контравариантные компоненты \mathbf{n} .

Соотношения, получаемые проектированием равенства $\mathbf{P}_n = n_k \mathbf{P}_k$ на оси прямоугольной декартовой системы координат, а именно

$$P_{ni} = P_{ki} n_k = P_{1i} n_1 + P_{2i} n_2 + P_{3i} n_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

называют соотношениями Коши¹. Эти соотношения определяют любую компоненту вектора напряжения \mathbf{P}_n на площадке с нормалью \mathbf{n} через компоненты тензора напряжений. Абсолютная величина этого вектора равна

$$P_n = \sqrt{P_{n1}^2 + P_{n2}^2 + P_{n3}^2}. \quad (2.6)$$

Нормальное напряжение на площадке с заданной нормалью \mathbf{n} равно

$$\begin{aligned} P_{nn} &= \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} = P_{ki} n_k n_i = n_k \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{n} = \\ &= n_1 P_{1n} + n_2 P_{2n} + n_3 P_{3n}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где P_{kn} — проекция вектора \mathbf{P}_k на направление \mathbf{n} .

Это соотношение можно записать, исходя из соотношений Коши, в виде

$$P_{nn} = P_{ki} n_k n_i = (n_1 P_{1i} + n_2 P_{2i} + n_3 P_{3i}) n_i.$$

Величина касательной компоненты P_{nt} вектора \mathbf{P}_n определяется из условия

$$P_{nn}^2 + P_{nt}^2 = P_n^2. \quad (2.8)$$

¹ Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789 – 1857) — известный французский математик, один из основоположников теории аналитических функций. Окончил Политехническую школу (1807 г.), Школу дорог и мостов (1810 г.) в Париже. В 1810 – 1813 гг. работал инженером на постройке порта в Шербуре. С 1816 г. – профессор Политехнической школы, Сорбонны, Колеж де Франс (1848 – 1857 гг.). Написал более 700 фундаментальных работ по теории функций, математическому анализу, математической физике. Создал теорию функций комплексного переменного. Заложил основы теории сходимости рядов. Ему принадлежит постановка одной из основных задач теории дифференциальных уравнений, метод интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. В теории упругости ввел понятие напряжения, расширил понятие деформации и ввел соотношения между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций для изотропного тела. Исследовал задачи о деформации стержней, в частности задачу о кручении. В оптике развил математические основания теории Френеля и дисперсии.

**Главные напряжения.
Девiator тензора
напряжений**

Рассмотрим случай симметричного тензора напряжений $p_{ik} = p_{ki}$. В дальнейшем будет показано, что для большинства сред это условие выполняется.

Как известно, для всякого симметричного тензора в каждой точке пространства можно найти три его главных значения и направления его трех взаимно перпендикулярных главных осей. Исходя из понятия тензора напряжений, можно заключить, что его главные значения представляют собой нормальные напряжения на главных площадках (нормали этих площадок направлены по главным осям). Эти главные значения тензора называются *главными нормальными напряжениями* (рис. 68). Обозначим их $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(3)}$ (индекс указывает площадку, перпендикулярную к соответствующей главной оси) и пронумеруем так, что

$$P_{(1)} \geq P_{(2)} \geq P_{(3)}.$$

В системе главных осей матрица тензора напряжений имеет вид

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} P_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & P_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & P_{(3)} \end{pmatrix}.$$

Итак, в каждой точке среды можно определить три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Это означает, что *любое напряженное состояние в рассматриваемой точке может быть сведено к растяжению или сжатию по трем взаимно перпендикулярным направлениям (главным осям тензора напряжений)*.

В координатной системе главных осей на основании (2.6), (2.7) и (2.8) и в силу того, что $p_{kn} = p_{(k)}n_k$ (без суммирования по «k»!), имеем выражение для величин нормальной p_{nn} и касательной $p_{n\tau}$, составляющих напряжения на любой площадке с нормалью \mathbf{n} :

$$p_{nn} = p_{(1)}n_1^2 + p_{(2)}n_2^2 + p_{(3)}n_3^2, \tag{2.9}$$

$$p_{n\tau}^2 = p_n^2 - p_{nn}^2 = p_{(1)}^2n_1^2 + p_{(2)}^2n_2^2 + p_{(3)}^2n_3^2 - (p_{(1)}n_1^2 + p_{(2)}n_2^2 + p_{(3)}n_3^2)^2.$$

Если эти уравнения совместно с тождеством

$$1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$$

исследовать по переменным n_1, n_2, n_3 (см., например, [21] и задачу 11.5) на экстремум значений $p_{n\tau}$, то получится, что касательные напряжения достигают максимума на площадках, делящих пополам углы между главными плоскостями. Значения $p_{n\tau}$ на этих площадках называются *главными касательными напряжениями*; обозначим их через $\tau_{(i)}$, причем вычисления дают

$$\tau_{(1)} = \frac{1}{2}(P_{(2)} - P_{(3)}), \quad \tau_{(2)} = \frac{1}{2}(P_{(3)} - P_{(1)}), \quad \tau_{(3)} = \frac{1}{2}(P_{(1)} - P_{(2)}). \tag{2.10}$$

На рис. 68 изображен вектор $\tau_{(3)}$ в системе главных осей.

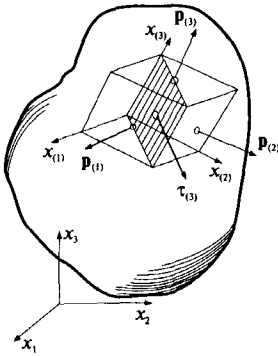


Рис. 68

Максимальное значение величины касательного напряжения равно полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений; для принятой нумерации главных напряжений оно равно $\tau_{(2)}$ и действует в плоскости, делящей пополам угол между направлениями наибольшего и наименьшего из главных напряжений.

Очевидно, что

$$\tau_{(1)} + \tau_{(2)} + \tau_{(3)} = 0. \quad (2.11)$$

Инварианты тензора напряжений \hat{p} выражаются, согласно их определению, через главные напряжения следующим образом:

$$I_1(\hat{p}) = p_{ii} = p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)},$$

$$I_2(\hat{p}) = \frac{1}{2}(p_{ii}p_{kk} - p_{ik}p_{ik}) = p_{(1)}p_{(2)} + p_{(2)}p_{(3)} + p_{(1)}p_{(3)},$$

$$I_3(\hat{p}) = \det \|p_{ik}\| = p_{(1)}p_{(2)}p_{(3)}.$$

Величину

$$p = \frac{1}{3}(p_{(1)} + p_{(2)} + p_{(3)}) = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) = \frac{1}{3}I_1(\hat{p})$$

называют *средним давлением* в точке.

Девизор \hat{p} тензора напряжений определяется компонентами

$$\hat{p}_{ik} = p_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}p_{\parallel} \equiv p_{ik} - p\delta_{ik}.$$

Его инварианты равны:

$$I_1(\hat{p}) = 0,$$

$$I_2(\hat{p}) = -\frac{1}{2}\hat{p}_{ik}\hat{p}_{ik} = -\frac{2}{3}(\tau_{(1)}^2 + \tau_{(2)}^2 + \tau_{(3)}^2),$$

$$I_3(\hat{p}) = \det \|\hat{p}_{ik}\| = \det \|p_{ik} - p\delta_{ik}\| = (p_{(1)} - p)(p_{(2)} - p)(p_{(3)} - p).$$

Шаровой тензор напряжений с компонентами $p\delta_{ik}$ связан с изменением объема частицы. Девизор напряжений характеризует деформацию частицы среды без изменения ее объема.

Величину

$$T = \sqrt{|I_2(\hat{p})|} = \sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{\tau_{(1)}^2 + \tau_{(2)}^2 + \tau_{(3)}^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(p_{(2)} - p_{(3)})^2 + (p_{(3)} - p_{(1)})^2 + (p_{(1)} - p_{(2)})^2}$$

называют *интенсивностью касательных напряжений*.

В случае чистого сдвига, определяемого в главных осях растяжением по одной оси и равносильным сжатием по другой, т. е.

$$p_{(1)} = \tau, \quad p_{(2)} = 0, \quad p_{(3)} = -\tau,$$

так что $\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = \tau/2$, $\tau_{(2)} = -\tau$ имеем

$$T = \tau.$$

В случае простого растяжения (сжатия) по оси (x_1) с напряжением $p_{(1)}$, когда $p_{11} = p_{(1)}$, а все остальные $p_{ik} = 0$, получаем

$$T = \frac{|p_{(1)}|}{\sqrt{3}}.$$

Если взять площадку, одинаково наклоненную ко всем главным осям ($n_1 = n_2 = n_3 = 1/\sqrt{3}$), то из (2.9) следует

$$p_{nn} = p, \quad p_{nt} = \sqrt{\frac{2}{3}}T,$$

так что величина нормального напряжения на этой площадке равна среднему давлению, а величина касательного напряжения пропорциональна интенсивности касательных напряжений.

Задачи с решениями

Задача 11.1. Показать, что в случае симметричного тензора напряжений проекция на нормаль \mathbf{N} напряжения \mathbf{p}_n , действующего на площадке с нормалью \mathbf{n} , равна проекции на нормаль \mathbf{n} напряжения \mathbf{p}_N , действующего на площадке с нормалью \mathbf{N} .

Решение. В силу общей формулы (2.5) имеем

$$\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{p}^k n_k) \cdot \mathbf{N} = p^{ki} n_k N_i = p^{ik} N_i n_k = (\mathbf{p}^i N_i) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{n},$$

что и решает поставленную задачу (при $p^{ik} = p^{ki}$).

Задача 11.2. Показать, что сумма квадратов величин векторов напряжений, действующих на координатных площадках, не зависит от ориентации этих площадок.

Решение. Из формулы (2.5) следует, что компоненты напряжений на координатных площадках с нормальми $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{n}_3 = (0, 0, 1)$ соответственно равны p_{1k} , p_{2k} , p_{3k} . Поэтому сумма квадратов их величин равна

$$p_{1k}^2 + p_{2k}^2 + p_{3k}^2 = p_{ik} p_{ik} = \text{inv}.$$

Задача 11.3. В прямоугольной декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) заданы тензор напряжений

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

и площадка с нормалью \mathbf{n} , составляющей равные углы с осями координат, так что

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \text{ Определить:}$$

1) значения a, b, c , при которых на указанной площадке напряжение равно нулю;

2) для тензора напряжений с этими значениями a, b, c найти главные напряжения и направления главных осей.

Решение. Значения a, b, c , обращающие в нуль напряжение на заданной площадке, находим из трех уравнений $p_{ni} = p_{ik}n_k = 0$, или

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + a \frac{1}{\sqrt{3}} + b \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$a \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + c \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,$$

$$b \frac{1}{\sqrt{3}} + c \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.$$

Отсюда $a = b = c = -1/2$.

Теперь для тензора

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

ищем корни уравнения

$$\det \|p_{ik} - \lambda \delta_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\det \|p_{ik} - \lambda \delta_{ik}\| = -\lambda \left(\lambda - \frac{3}{2} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}, \quad \lambda_3 = 0.$$

Таким образом, имеем два одинаковых главных напряжения $p_{(1)} = p_{(2)} = 3/2$ и одно, равное нулю ($p_{(3)} = 0$).

Направления главных осей, определяемые косинусами α_k^s углов, которые составляет s -тая главная ось с k -той координатной, находятся из уравнений

$$(p_{ik} - p_{(s)}\delta_{ik})\alpha_k^s = 0 \quad (i=1, 2, 3),$$

$$\alpha_i^s \alpha_i^s = (\alpha_1^s)^2 + (\alpha_2^s)^2 + (\alpha_3^s)^2 = 1 \quad (\text{суммирование только по } i).$$

Имеем для $s=1, 2$ и $p_{(1)} = p_{(2)} = 3/2$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3}{2}\right)\alpha_1^s - \frac{1}{2}\alpha_2^s - \frac{1}{2}\alpha_3^s &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_1^s + \left(1 - \frac{3}{2}\right)\alpha_2^s - \frac{1}{2}\alpha_3^s &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_1^s - \frac{1}{2}\alpha_2^s + \left(1 - \frac{3}{2}\right)\alpha_3^s &= 0, \end{aligned}$$

откуда $\alpha_1^s + \alpha_2^s + \alpha_3^s = 0$. Однако, поскольку этого уравнения вместе с $\alpha_i^s \alpha_i^s = 1$ для определения α_i^s недостаточно (корни $\lambda_1 = \lambda_2$), то вся плоскость главных осей (x'_1, x'_2) является собственной плоскостью и любые два взаимно перпендикулярных направления в ней являются главными. Ориентация третьей главной оси ($\lambda_3 = 0$) определится уравнениями:

$$\begin{aligned} \alpha_1^3 - \frac{1}{2}\alpha_2^3 - \frac{1}{2}\alpha_3^3 &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_1^3 + \alpha_2^3 - \frac{1}{2}\alpha_3^3 &= 0, \\ -\frac{1}{2}\alpha_1^3 - \frac{1}{2}\alpha_2^3 + \alpha_3^3 &= 0, \\ (\alpha_1^3)^2 + (\alpha_2^3)^2 + (\alpha_3^3)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $\alpha_1^3 = \alpha_2^3 = \alpha_3^3 = 1/\sqrt{3}$. Таким образом, третья главная ось тензора (p_{ik}) совпала с нормалью к площадке, где все компоненты напряжения равны нулю.

Задача 11.4. Выразить величины нормального (P_{nn}) и касательного ($P_{n\tau}$) напряжений на октаэдрической площадке (площадке, которая составляет равные углы с главными осями тензора напряжений) через главные напряжения $P_{(1)}, P_{(2)}, P_{(3)}$.

Решение. Нормаль на октаэдрической площадке имеет выражение

$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, так что в системе главных осей (x'_1, x'_2, x'_3) имеем $n'_i = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Кро-

ме того, вектор напряжений на октаэдрической площадке может быть представлен через напряжения \mathbf{P}'_k на главных координатных площадках:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}'_k n'_k,$$

а его нормальная компонента P_{nn} равна

$$P_{nn} = \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{P}'_k \cdot \mathbf{n}) n'_k = P_{(k)} \frac{1}{\sqrt{3}} n'_k = \frac{1}{3} (P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)}),$$

поскольку \mathbf{P}'_k направлен по нормали к соответствующей главной координатной площадке, а его величина равна главному напряжению $P_{(k)}$, так что $\mathbf{P}'_k = \mathbf{i}'_k P_{(k)}$, где \mathbf{i}'_k — орт k -той главной оси (нет суммирования по « k »!).

Касательная компонента вектора напряжений на октаэдрической площадке определяется по формуле

$$\begin{aligned} P_{\pi\tau} &= \sqrt{\mathbf{P}_n \cdot \mathbf{P}_n - P_{nn}^2} = \sqrt{(\mathbf{P}'_k \cdot \mathbf{P}'_k) (n'_k)^2 - P_{nn}^2} = \\ &= \sqrt{(P_{(1)}^2 + P_{(2)}^2 + P_{(3)}^2) \frac{1}{3} - \frac{1}{9} (P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)})^2} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2(P_{(1)}^2 + P_{(2)}^2 + P_{(3)}^2) - 2P_{(1)}P_{(2)} - 2P_{(1)}P_{(3)} - 2P_{(2)}P_{(3)}} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(P_{(1)} - P_{(2)})^2 + (P_{(2)} - P_{(3)})^2 + (P_{(1)} - P_{(3)})^2}. \end{aligned}$$

Задача 11.5. В системе главных координат (x'_1, x'_2, x'_3) рассматривается напряжение \mathbf{P}_n на площадке с нормалью \mathbf{n} . Найти максимальное и минимальное значение касательной составляющей $P_{\pi\tau}$ этого напряжения в зависимости от ориентации площадки; выразить эти экстремальные значения через главные значения $P_{(k)}$ тензора напряжений, если нумерация координатных осей выбрана так, что $P_{(1)} > P_{(2)} > P_{(3)}$. Показать, что максимальное значение нормального напряжения P_{nn} совпадает с одним из главных напряжений.

Решение. По определению напряжений, в системе (x'_1, x'_2, x'_3) имеем: $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}'_k n'_k$, где \mathbf{P}'_k — вектор напряжений на соответствующей координатной площадке, а n'_k — проекция \mathbf{n} на k -тую главную ось. Поскольку (x'_1, x'_2, x'_3) — главные оси, то $\mathbf{P}'_k = P_{(k)} \mathbf{i}'_k$, где $P_{(k)}$ — главное напряжение, а \mathbf{i}'_k — орт k -той главной оси. Тогда нормальная составляющая P_{nn} вектора \mathbf{P}_n равна

$$P_{nn} = \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{P}'_k \cdot \mathbf{n}) n'_k = P_{(k)} (\mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{n}) n'_k = P_{(k)} (n'_k)^2,$$

а квадрат величины касательной компоненты $P_{\pi\tau}$ можно найти по формуле

$$P_{\pi\tau}^2 = \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{P}_n - P_{nn}^2 = \mathbf{P}'_k \cdot \mathbf{P}'_k (n'_k)^2 - P_{nn}^2 = P_{(k)}^2 (n'_k)^2 - P_{nn}^2 =$$

$$= p_{(1)}^2 (n'_1)^2 + p_{(2)}^2 (n'_2)^2 + p_{(3)}^2 (n'_3)^2 - (p_{(1)} (n'_1)^2 + p_{(2)} (n'_2)^2 + p_{(3)} (n'_3)^2)^2.$$

Чтобы определить экстремум этой функции при дополнительном условии (связи)

$$(n'_1)^2 + (n'_2)^2 + (n'_3)^2 = 1, \quad (1)$$

воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа и будем искать экстремум функции

$$F = p_{\pi\tau}^2 - \lambda ((n'_1)^2 + (n'_2)^2 + (n'_3)^2).$$

Приравнявая частные производные по n'_k нулю, получим три уравнения

$$n'_i \left[p_{(i)}^2 - 2p_{(i)} p_{(k)} n'_k - \lambda \right] = 0 \quad (\text{суммирование по } \langle i \rangle \text{ нет!}) \quad (i=1, 2, 3),$$

которые вместе с (1) составляют систему для определения n'_i и λ .

Решения этой системы:

$$\begin{aligned} n'_1 = \pm 1, \quad n'_2 = n'_3 = 0, \quad \lambda = p_{(1)}^2, \quad p_{\pi\tau} = 0; \\ n'_1 = n'_2 = 0, \quad n'_3 = \pm 1, \quad \lambda = p_{(3)}^2, \quad p_{\pi\tau} = 0; \\ n'_1 = n'_3 = 0, \quad n'_2 = \pm 1, \quad \lambda = p_{(2)}^2, \quad p_{\pi\tau} = 0; \end{aligned}$$

$$n'_1 = 0, \quad n'_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n'_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda = p_{(2)} p_{(3)}, \quad p_{\pi\tau} = \frac{p_{(2)} - p_{(3)}}{2};$$

$$n'_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n'_2 = 0, \quad n'_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda = p_{(1)} p_{(3)}, \quad p_{\pi\tau} = \frac{p_{(3)} - p_{(1)}}{2};$$

$$n'_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n'_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n'_3 = 0, \quad \lambda = p_{(1)} p_{(2)}, \quad p_{\pi\tau} = \frac{p_{(1)} - p_{(2)}}{2}.$$

Максимальное значение $p_{\pi\tau} = \frac{p_{(1)} - p_{(3)}}{2}$, так что максимальная компонента действует

в плоскости, которая делит пополам прямой угол между направлениями максимального и минимального главных напряжений. Как было отмечено, иногда эти значения $p_{\pi\tau}$ обозначают через $\tau_{(1)}$, $\tau_{(2)}$, $\tau_{(3)}$ (см. (2.10)).

Используя тот же метод неопределенных множителей Лагранжа, для получения максимальных значений p_{nn} будем искать экстремум функции

$$U = p_{nn} - \lambda (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Здесь n_i — проекции \mathbf{n} в произвольной декартовой системе (x_1 , x_2 , x_3), где компоненты тензора напряжений — p_{ik} , так что

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_k n_k, \quad p_{nn} = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{n}) n_k = p_{kl} (\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{n}) n_k = p_{kl} n_l n_k.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial n_\alpha} = \frac{\partial}{\partial n_\alpha} (p_{kl} n_\alpha \delta_{\alpha l} n_k + p_{kl} n_l n_\alpha \delta_{\alpha k}) - 2\lambda n_\alpha =$$

$$\begin{aligned}
 &= p_{kl}n_k\delta_{al} + p_{kl}n_a\delta_{ak} - 2\lambda n_a = p_{ka}n_k + p_{al}n_l - 2\lambda n_a = \\
 &= p_{al}n_l + p_{al}n_l - 2\lambda\delta_{al}n_l = 2(p_{al} - \lambda\delta_{al})n_l.
 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения $\frac{\partial U}{\partial n_a} = 0$ эквивалентны уравнениям

$$(p_{al} - \lambda\delta_{al})n_l = 0,$$

которые совпадают с уравнениями для отыскания главных напряжений и главных направлений. Поэтому только главные напряжения доставляют компоненте

$$P_{nn} = P_{(1)}n_1'^2 + P_{(2)}n_2'^2 + P_{(3)}n_3'^2$$

максимальное значение.

Упражнения

1. Показать, что главные оси тензора напряжений и его дивергента совпадают.
2. Для тензора напряжений

$$p_{12} = 2B \frac{x_1 x_2}{r^4}, \quad p_{13} = p_{23} = 0,$$

$$p_{11} = A - B \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x_1^2}{r^4} \right), \quad A, B \text{ — постоянные,}$$

$$p_{22} = A - B \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x_2^2}{r^4} \right), \quad p_{33} = 0, \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2),$$

найти главные напряжения и главные направления. Для кольцевого цилиндра ($r_1 < r_2$) с осью (x_3) найти точки максимальных касательных напряжений.

3. Для тензора напряжений

$$t_{ik} = \lambda(u_i v_k + u_k v_i)$$

найти главные направления и главные напряжения (\mathbf{u}, \mathbf{v} — два орта).

4. Найти уравнения тензорных поверхностей для следующих видов напряженного состояния: 1) всестороннего сжатия ($p_{ik} = -p\delta_{ik}$); 2) одностороннего равномерного растяжения ($p_{11} = p$, все остальные $p_{ik} = 0$); 3) простого сдвига ($p_{12} = p_{21} = \tau$, все остальные $p_{ik} = 0$); 4) плоского напряженного состояния ($p_{11} = p_{22} = p$; $p_{12} = p_{21} = \tau$; $p_{13} = p_{23} = p_{33} = 0$).

Определить положение главных осей и указать значения главных напряжений.

5. Поле деформаций упругого тела имеет вид $\mathbf{u} = (6x_1 - 3x_2, 6x_2 - 3x_1, 8x_3)$, а связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций задана замыкающим соотношением $p_{ik} = \sigma u_{ik}$.

Для тензора напряжений найти: 1) инварианты, 2) главные напряжения, 3) убедиться, что значения инвариантов, полученные через главные напряжения и по общим формулам, совпадают.

6. Для тензоров напряжений из упражнения 4 найти вектор напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{n} = (-2/3, -2/3, 1/3)$.

7. Для вектора напряжения, полученного из тензора упражнения 5 и взятого на площадке $\mathbf{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, найти: а) величину, б) компоненту, перпендикулярную площадке, в) касательную компоненту, г) угол между \mathbf{p}_n и \mathbf{n} .

8. Для деформации, заданной полем вектора смещений $\mathbf{u} = (5x_1, -6x_2 - 12x_3, -x_3 - 12x_2)$, и $P_{ik} = \sigma u_{ik}$ показать, что максимальное касательное напряжение делит пополам угол между площадками максимального и минимального напряжений (см. задачу 11.5).

§ 12. Основные положения и законы классической термодинамики

Поскольку одним из двух главных признаков сплошной среды является способность деформироваться, то при изучении движения сплошной среды мы обязаны рассматривать, кроме механической, и тепловую форму движения материи. Всякая деформация тела связана с производимой работой, которая может превращаться в тепло. Термодинамика изучает тепловую форму движения материи, рассматривая не только тепловые, но и механические, электромагнитные, химические и другие явления в средах и их связь с тепловым движением материи.

В связи с этим необходимо обратиться к основам классической термодинамики, имеющим прямое отношение к поведению сплошной среды в разных условиях ее движения. При этом будут рассмотрены положения лишь феноменологической термодинамики, поскольку методы статистической термодинамики не используются в принятом здесь феноменологическом изложении механики сплошных сред.

Термодинамическая система и термодинамические параметры. Параметры внешние, внутренние. Термодинамическое и механическое состояния системы. Системы однокомпонентные, изолированные, замкнутые, адиабатические, стационарные и равновесные. Термодинамический процесс

Вне зависимости от конкретного содержания, когда о материальном объекте говорят как о системе (греч. *systema* — целое), то рассматривают его как совокупность частей (частиц).

Под *термодинамической системой* подразумевают некоторое количество вещества, отделенное поверхностью (оболочкой) от окружающей (внешней) среды.

Основанием считать вещество системой является опытный факт, что оно представляет собой совокупность множества элементарных частиц — атомов, молекул и др. Существенным является то, что этих частиц в системе достаточно много и каждой частице можно приписать определенную механическую характеристику — массу, скорость, импульс и др. Известно также, что эти частицы находятся в постоянном хаотическом движении, так что о численном значении этих характеристик частиц можно говорить только в вероятностном смысле. Однако, как уже отмечалось, на основании этих характеристик (микропризнаков системы),

зная функцию распределения множества частиц по этим свойствам, используя законы и приемы статистической механики, всегда можно определить характеристики, признаки всей системы в целом (макропризнаки) — среднестатистическая скорость, количество движения, кинетическую энергию и др. Подобные макропризнаки являются так называемыми термодинамическими параметрами системы.

В любой термодинамической системе можно определить ряд макроскопических признаков, характеризующих как саму систему, так и ее взаимодействие с окружающими телами (системами). Численная величина такого признака называется *термодинамическим параметром системы*.

Когда говорят о совокупности термодинамических параметров системы, то имеют в виду, что она полностью определяет *термодинамическое состояние системы*.

Как уже отмечалось во «Введении», оперирование с *механическим состоянием* физического тела, как совокупности элементарных частиц, доставляющих очень большое число механических параметров, встречает как вычислительные затруднения, так и трудности принципиального характера. Здесь требуются методы статистической механики. В термодинамике, как и в механике сплошной среды, широко используется феноменологический подход для изучения движения физических тел: в механике сплошных сред при помощи понятия частиц сплошной среды как содержимого макродифференциала объема, а в термодинамике — на основе понятий термодинамических параметров и термодинамического состояния.

В то же время следует иметь в виду, что *одному термодинамическому состоянию соответствует множество механических состояний* таких систем, как физические тела. Например, изучая определенное термодинамическое состояние газа при заданном объеме, температуре и давлении, надо учитывать, что существует бесконечное множество соответствующих ему механических состояний молекул: все эти состояния непрерывно сменяют друг друга, пока система находится в одном и том же термодинамическом состоянии. Поэтому реальные тела имеют термодинамических параметров всегда неизмеримо меньше, чем механических. Это обстоятельство, кстати, и было использовано Л. Больцманом в понятии энтропии как вероятности термодинамического состояния (см. дальше).

Параметры системы подразделяются на внешние и внутренние.

Внешние параметры системы — это величины, определяемые положением и состоянием внешних тел, с которыми взаимодействует система.

Например, объем деформируемой среды определяется размерами сосуда, в котором находится среда (газ, жидкость), или положением других тел, при перемещении которых объем среды меняется. Например, напряженность электромагнитного или интенсивность гравитационного полей в системе зависят от положения источников поля, не входящих в систему. Объем среды, напряжение силового поля — внешние параметры.

Внутренние параметры системы — это статистически средние величины, определяемые совокупным движением, свойствами и распределением входящих в систему частиц.

Например, плотность определяется как массой частиц, так и распределением их по пространству. Или, скажем, давление определяется массой, скоростью движения и функцией распределения частиц, а температура — среднестатистической кинетической энергией элементарных частиц, поляризация и намагниченность — электромагнитными свойствами частиц системы и законом их распределения по частицам. Плотность, давление, температура, намагниченность среды — внутренние параметры.

Внутренние параметры, не зависящие от массы системы, называются *интенсивными*; таковы давление, температура. Внутренние параметры, пропорциональные массе системы, носят название *экстенсивных* или *аддитивных*; таковы энергия, энтропия.

Система, состоящая из одного вида частиц, называется *однокомпонентной*, в противном случае — *многокомпонентной*.

Система, не обменивающаяся энергией и веществом с внешней средой, называется *изолированной*. Если система не обменивается веществом (обмен энергией возможен), то о ней говорят как о *замкнутой* (закрытой) системе; в противном случае — как о *незамкнутой* (открытой) системе. Если система не может обмениваться с внешними телами теплом, то она называется *адиабатической* системой. Таким образом, открытая адиабатическая система — это термодинамическая система, которая может обмениваться веществом, энергией (но не тепловой) с окружающими телами.

Термодинамическое состояние системы называется *стационарным*, а сама система *стационарной*, если ее параметры (внешние и внутренние) не меняются с течением времени.

Под *термодинамическим потоком*¹ (вещества, тепла и др.) понимается скорость изменения соответствующего внешнего параметра (концентрации вещества, энергии поля и др.).

Если в стационарной системе отсутствуют термодинамические потоки (потоки вещества, излучения, тепла и т. д.), то говорят, что система находится в *состоянии термодинамического равновесия*, или короче — в *равновесном состоянии*. Такая термодинамическая система называется *равновесной*.

¹ См. также подраздел о соотношениях Онсагера (с. 287).

Этот важнейший в термодинамике вид состояния системы соответствует такому ее состоянию, в котором она пребывает как угодно долго, если только внешние условия не изменяются.

Если параметры системы меняются с течением времени, то говорят, что в системе происходит *термодинамический процесс*. Таким образом, всякий термодинамический процесс связан с переходом системы из одного термодинамического состояния в другое.

**Равновесные (квазистатические) процессы.
Обратимые процессы.
Время релаксации**

Время, за которое изолированная система, будучи выведена из равновесного состояния и предоставлена сама себе, вновь вернется в равновесное состояние, называется *временем релаксации*.

Реальность такого процесса возврата изолированной системы в исходное состояние принимается как опытный факт. Это утверждает общее начало термодинамики (см. дальше).

Процесс называется равновесным или квазистатическим, если все параметры меняются физически настолько медленно (теоретически — бесконечно медленно), что система все время находится в равновесных состояниях, следующих одно за другим.

Выражение «физически настолько медленно» означает, что скорость изменения любого внешнего параметра a_i значительно меньше средней скорости его изменения при релаксации (возвращении системы в равновесное состояние), т. е. $|da_i/dt| \ll |\Delta a_i|/\tau$, где Δa_i — полное изменение параметра за время релаксации, τ — *время релаксации*. Если же параметр a_i меняется на величину Δa_i за время Δt , меньшее или сравнимое со временем релаксации τ (т. е. $\Delta t \sim \tau$), то такой процесс называется *неравновесным*. Для него $|da_i/dt| \gtrsim |\Delta a_i|/\tau$. Таким образом, равновесный процесс — это предельный процесс, к которому сколь угодно близко приближаются реальные процессы, если они протекают все медленнее и медленнее.

Законы термодинамики не требуют, чтобы при обратном переходе в исходное состояние равновесия система проходила все те же состояния, в которых она пребывала в процессе вывода из равновесия. Тем не менее

в термодинамике допускается существование таких процессов, и тогда эти процессы называются *обратимыми*.

Равновесный (квазистатический) процесс является обратимым. Действительно, поскольку любое его состояние является состоянием равновесным, то при обратном его протекании система проходит все состояния прямого процесса, но только в обратном порядке. Обратное утверждение тоже верно — всякие обратимые процессы являются квазистатическими, т. е. теоретически бесконечно медленными. Впрочем, для идеализированных схем (например при отсутствии сил трения) даже быстрые процессы могут быть обратимыми.

Опытные данные говорят о том, что многие реальные процессы можно с хорошим приближением считать квазистатическими. Так, например, сжатие жидких и газообразных сред можно провести так, что на каждой стадии процесса сжатия давление будет меняться очень медленно, приводя к малому изменению объема. В этом случае работа по сжатию газа при квазистатическом процессе равна $-pdV$, причем p выражается через V и T из уравнения равновесного состояния.

Функция состояния и функция процесса. Внутренняя энергия системы. Работа

В термодинамике различают два вида величин, относящихся к термодинамическому процессу: *функции состояния* и *функции процесса*.

Величина, значение которой не зависит от «предыстории» системы и полностью определяется состоянием системы в данный момент (т. е. набором термодинамических параметров), носит название *функции состояния*. Иными словами, эта величина не зависит от характера процесса, от «пути», по которому система пришла в данное состояние. Бесконечно малое изменение такой величины является полным дифференциалом некоторой функции, поскольку только в этом случае ее значение в конце процесса не зависит от хода, пути процесса.

Примером функции состояния системы является ее *внутренняя энергия E* .

Под энергией системы понимается сумма энергий непрерывно движущихся и взаимодействующих частиц системы, атомов и молекул — для физических тел. Внутренняя энергия системы является частью пол-

ной энергии. Полная энергия складывается из *внешней* и *внутренней* энергий. Внешняя энергия — это энергия движения системы как целого, т. е. сумма ее кинетической энергии и потенциальной энергии во внешних потенциальных силовых полях. Остальная часть полной энергии — это внутренняя энергия. Она определяется энергией разного вида движения частиц — поступательного, вращательного, колебательного, внутреннего взаимодействия и др. Такое движение частиц связано с температурой тела T , поэтому в термодинамике принимается, что в случае равновесных процессов внутренняя энергия зависит не только от внешних параметров, но и от температуры, так что $E = E(a_1, a_2, \dots, a_n, T)$. Если под δf понимать элементарное приращение некоторой функции f , а под df — ее полный дифференциал, то для внутренней энергии E как функции состояния имеем $\delta E = dE(a_1, a_2, \dots, a_n, T)$. Тогда изменение внутренней энергии при переходе системы из состояния (I) в (II) равно

$$\int_{(I)}^{(II)} \delta E = \int_{(I)}^{(II)} dE = E^{II} - E^I,$$

где $E^I \equiv E(a_1^I, a_2^I, \dots, T^I)$, $E^{II} \equiv E(a_1^{II}, a_2^{II}, \dots, T^{II})$ — значения внутренней энергии в начальном (I) и конечном (II) состояниях системы. Для функции состояния E в случае замкнутого контура пути процесса (кругового, или циклического процесса) имеем

$$\oint \delta E = 0,$$

так что E^{II} не зависит от пути (т. е. от кривой в пространстве переменных a_1, a_2, \dots, a_n, T), по которому система пришла в состояние $(a_1^{II}, a_2^{II}, \dots, a_n^{II}, T^{II})$ из какого-то начального состояния.

Величина, значение которой зависит от «предыстории» системы, т. е. от пути, по которому система пришла в данное состояние, носит название *функции процесса*. Для функции процесса бесконечно малое приращение не может быть представлено в виде полного дифференциала некоторой функции. Примером функции процесса является работа W непотенциальных сил.

Если A_i — обобщенная сила, соответствующая внешнему параметру a_i , то бесконечно малая величина

$$\delta W = \sum_{i=1}^n A_i da_i, \quad (2.12)$$

вообще говоря, не является полным дифференциалом некоторой функции даже при $A_i = A_i(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Только в случае $A_i = \partial \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n) / \partial a_i$, т. е. потенциальности сил A_i , $\delta W = d\Pi$ и интеграл

$$\int_I^{II} \delta W$$

не зависит от пути интегрирования. Но этот случай исключительный, так что, вообще говоря,

$$\oint \delta W \neq 0.$$

Величина δW представляет собой *элементарную работу*, совершаемую системой при бесконечно малом изменении параметров a_i .

Величина

$$W = \int_I^{II} \sum_{i=1}^n A_i da_i$$

называется в термодинамике *работой, произведенной системой над внешней средой* («против внешних сил», по выражению Хендрика Лоренца) при переходе из состояния (I) в (II). В термодинамике принято считать такую работу W , совершаемую системой, положительной величиной. Она равна взятой с обратным знаком работе, совершаемой внешними телами над рассматриваемой системой.

Приведем несколько выражений для работы δW , совершаемой системами в различных ситуациях.

Если в системе существенно изменение ее материальной поверхности S под действием сил поверхностного натяжения σ , то ($A = -\sigma$, $a = S$)

$$\delta W = -\sigma dS. \quad (2.12a)$$

Элементарная работа, совершаемая единицей объема диэлектрика с индукцией \mathbf{D} против сил внешнего электрического поля \mathbf{E} , создающего в нем перемещение электрических зарядов, в случае однородного электрического поля и однородного вещества равна

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}. \quad (2.126)$$

Здесь: A_i — три компоненты поля $-\mathbf{E}/4\pi$, а a_i — соответствующие компоненты вектора \mathbf{D} .

В случае изотропного диэлектрика $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.

Элементарная работа по переориентации магнитных диполей в однородном магнетике с индукцией \mathbf{B} при изменении внешнего однородного магнитного поля \mathbf{H} равна

$$\delta W = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}. \quad (2.12в)$$

В случае изотропного магнетика $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

Вывод формул (2.12 б) и (2.12 в) можно найти в курсах электродинамики.

Выражения для δW в случае всестороннего равномерного давления в газах и жидкостях и в случае деформируемого твердого тела будут приведены дальше (см. (2.20) и (2.30)).

Не является также полным дифференциалом функции и элементарное тепло δQ , полученное или отданное системой при бесконечно малом изменении ее состояния.

При переходе системы из состояния (I) в (II) сообщаемое системе тепло Q равно

$$Q = \int_I^{II} \delta Q, \text{ причем } \oint \delta Q \neq 0.$$

Если тепло получено рассматриваемой системой, то принято считать $\delta Q > 0$, $Q > 0$; в противном случае, когда тепло уходит из системы, эти величины считаются отрицательными.

Если $\delta Q = 0$, то процесс называется *адиабатическим*.

Отметим, что и работа W , и тепло Q в термодинамике означают *энергию*, получаемую (отдаваемую) системой определенным способом, а не сам способ передачи энергии. В то же время, называя Q и W теплотой и работой, часто говорят о превращении тепла в работу и наоборот.

Исходные положения термодинамики. Температура

В термодинамике исходят из следующих положений, касающихся равновесного состояния системы и постулируемых как опытный факт. Первое исходное положение гласит:

I. *Всякая изолированная система, выведенная из состояния термодинамического равновесия, рано или поздно придет в равновесное состояние и никогда самопроизвольно из него выйти не сможет.*

Иногда этот постулат называют *общим началом термодинамики*.

Второе исходное положение термодинамики гласит:

II. *Состояние термодинамического равновесия системы определяется внешними параметрами и одним внутренним — температурой*. Вместо температуры может быть взята энергия системы (эргодическая гипотеза).

По своей сути это исходное положение тесно связано с общим началом термодинамики.

Из второго положения следует, что если равновесные замкнутые (без обмена массой) системы привести во взаимный тепловой контакт, то всегда, независимо от равенства или различия их внешних параметров, в результате теплового обмена системы либо останутся по-прежнему в состоянии равновесия, либо рано или поздно перейдут в новое равновесное состояние, общее для обеих систем. Все зависит от внутренних состояний систем: либо они таковы, что первоначальное равновесие сохранится, либо они приводят к установлению нового равновесия. Таким образом, состояние термодинамического равновесия любой системы определяется не только внешними параметрами, но еще и некоторой величиной, связанной с тепловой формой энергии и отражающей, следовательно, внутреннее состояние системы. Ею, в частности, может служить величина, которая имела разные значения в равновесных системах до их теплового контакта и приобрела одно значение в новом общем равновесном состоянии.

Эта величина получила в термодинамике название *температуры*. О ней уже шла речь, когда рассматривалась внутренняя энергия системы: температура, как и внутренняя энергия, связана с тепловой формой движения и определяется в физических телах поступательным, вращательным и другими видами беспорядочного движения молекул.

Понятие температуры является важнейшим в термодинамике.

Второе исходное положение, устанавливающее существование температуры, иногда называют «нулевым началом», поскольку первое и второе начала термодинамики (см. дальше) также определяют существование некоторых функций состояния.

Температура не зависит от массы системы и является, таким образом, интенсивным параметром. Она одинакова для систем, находящихся в термодинамическом равновесии друг с другом, и, следовательно,

определяет равновесное состояние систем. Поскольку ранее было определено, что равновесное состояние системы характеризуется полностью совокупностью внешних и внутренних параметров, а второе исходное положение утверждает, что это состояние определяется внешними параметрами и *одним* внутренним (температурой), то, следовательно, это положение может быть сформулировано и следующим образом:

Все равновесные внутренние параметры системы являются функциями внешних параметров и температуры.

В таком виде это исходное положение носит название *второго постулата термодинамики*.

От температуры непосредственно зависит внутренняя энергия системы E , которая (при неизменных остальных параметрах) возрастает с ростом температуры. Температура определяет возможность рассматриваемой системы пополнить внутреннюю энергию соседних систем, у которых температура ниже.

В термодинамике принято, и это повседневно наблюдается в природе, что тепло может переходить не от тела с *большим количеством тепла*, зависящим от массы тела, к телу с меньшим запасом тепла, но от тела с *большой температурой* к телу с меньшей температурой.

Этот всеобщий закон очень ярко охарактеризовал Х. Лоренц¹ в «Лекциях по термодинамике»:

«Опыт учит нас, что все тела могут быть рассмотрены в виде восходящего ряда таким образом, что тело, занимающее в этом ряду более высокое место, будет всегда отдавать теплоту телу, занимающему более низкое место.

При этом говорят, что тело, помещенное выше, имеет более высокую температуру. Два тела, которые не отдают теплоты друг другу, займут одно и то же место в этом ряду, и им приписывается одинаковая температура».

¹ Лоренц (Lorentz) Хендрик Антон (1853–1928) — известный нидерландский физик-теоретик. Окончил Лейденский университет (1872 г.). Научные труды относятся к областям электродинамики, термодинамики, статистической механики, оптики, квантовой теории, атомной физики и др. Создал классическую электронную теорию вещества, базирующуюся на анализе движения дискретных зарядов, и на основе ее, в частности, вывел зависимость диэлектрической проницаемости от плотности диэлектрика (формула Лоренца-Лоренца), дал выражение для силы, действующей на движущийся в электромагнитном поле заряд (сила Лоренца), развил теорию дисперсии света. Предсказал явление расщепления спектральных линий в сильном магнитном поле (Нобелевская премия (совместно с П. Зееманом) в 1902 г.). Создал электродинамику движущихся сред. Вывел в 1904 г. формулы, связывающие между собой пространственные координаты и моменты времени одного и того же события в разных инерциальных системах отсчета (преобразование Лоренца). Впервые получил зависимость массы электрона от скорости. Своими работами подготовил переход к квантовой механике и теории относительности. Ряд исследований по кинетической теории газов, кинетике твердых тел, электронной теории металлов (1904 г.).

Уравнения равновесного состояния. Простые системы

Согласно второму исходному положению равновесное состояние системы характеризуется тем, что:

$$b_i = f_i(a_1, a_2, \dots, a_n, T), \quad (2.13)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — внешние параметры, а b_i — любой внутренний параметр системы, T — температура.

Это уравнение носит название *термического уравнения состояния*. Если в качестве внутреннего параметра берется внутренняя энергия, то уравнение

$$E = E(a_1, a_2, \dots, a_n, T)$$

называется *калорическим уравнением состояния*, или *уравнением энергии*.

В термодинамике в первую очередь рассматривают так называемые *простые системы*, системы с постоянным числом частиц. Их состояние определяется одним внешним параметром и температурой T . Термическое и калорическое уравнения состояния простой системы имеют вид

$$b = b(a, T), \quad E = E(a, T).$$

Основные принципы термодинамики. Первое и второе начала

В основе всей термодинамики лежат два основных принципа: *первое начало* — закон сохранения энергии для термодинамической системы и *второе начало* — закон, устанавливающий

существование у любой равновесной системы некоторой однозначной функции состояния — энтропии.

Первое начало термодинамики представляет собой математическую формулировку количественной стороны закона сохранения и превращения энергии. Этот закон постулируется как результат теоретических и экспериментальных исследований.

Пусть закрытая, но неизолированная термодинамическая система (т. е. система, которая может обмениваться с внешними телами энергией, но не массой) в ходе процесса переводится в другое, достаточно близкое равновесное состояние. Тогда эта система может получить какое-то малое количество тепла δQ и за счет этого приобретает возможность

изменить на dE свою внутреннюю энергию и произвести элементарную работу δW над окружающими телами («против действующих сил»).

Первое начало термодинамики устанавливает баланс между этими величинами и гласит:

Количество тепла, полученное системой при протекании термодинамического процесса, равно сумме приращения ее внутренней энергии и работы, произведенной системой над внешней средой (телами, системами).

Таким образом, для бесконечно малого изменения состояния системы имеем

$$\delta Q = dE + \delta W. \quad (2.14)$$

Здесь элементарные теплота δQ и работа δW , вообще говоря, не являются полными дифференциалами каких-либо функций, поскольку работа является функцией процесса. Внутренняя энергия есть функция состояния, так что из (2.14) для кругового (циклического) процесса имеем

$$\oint (\delta Q - \delta W) = 0.$$

Таким образом, при циклическом процессе $Q = W$, т. е. работа может совершаться системой только за счет получения тепла от внешней среды (невозможность вечного двигателя).

Из (2.14) следует, что работа системы над внешними телами может совершаться либо за счет получения системой теплоты, либо за счет уменьшения внутренней энергии системы.

Первое начало описывает естественный обмен энергией термодинамической системы с внешним миром. При этом согласно (2.14) этот обмен происходит двумя путями.

При первом, названном *работой*, изменяются внешние параметры системы. Этот путь энергетического обмена, таким образом, связан с состоянием как системы, так и внешних тел в целом, т. е. в макроскопическом их рассмотрении. Этот способ обмена энергией отражен в (2.14) слагаемым δW .

Второй путь энергообмена называется *теплопередачей* и описывается слагаемым δQ . При теплопередаче фактически происходит обмен энергией между хаотически движущимися элементарными частицами (молекулами, атомами и др.) взаимодействующих систем. Этим теплопередача качественно отличается от работы, представ-

ляющей макроскопически упорядоченный энергообмен, но этим она схожа с изменением внутренней энергии системы, также зависящей от температуры. При втором способе энергообмена внешние параметры системы не меняются, но меняется ее температура.

Как видно из самого определения двух путей энергообмена, они не являются равноценными. Если совершаемая работа может непосредственно увеличить любой вид энергии системы (упругой, электромагнитной и др.), то количество теплоты непосредственно (без преобразования в работу) может пойти только на увеличение внутренней энергии системы.

Отметим, что в (2.14) входит изменение только внутренней энергии системы, а остальная часть полной энергии (внешняя энергия) не учитывается. Это связано с тем, что в термодинамике вообще не рассматривается механическое движение системы как целого; все процессы, таким образом, описываются в системе координат, где центр масс системы покоится, а движением вокруг центра масс при любом термодинамическом процессе пренебрегают.

Второе начало термодинамики, подобно первому, было установлено как обобщение опытных и теоретических данных.

При формулировке этого основного термодинамического принципа можно исходить из разных положений, отражающих законы природы.

Можно за исходное принять положение о том, что *невозможно передавать тепло от тела с меньшей температурой к телу с большей температурой* (постулат Клаузиуса¹). Часто считают основополагающим утверждение, что *невозможно отнятое у системы тепло полностью превратить в работу без того, чтобы в системе не произошли изменения* (постулат Кельвина — Томсона).

Эти и подобные им постулаты приводят к факту существования у равновесных систем новой функции состояния. Эта функция под названием *энтропия* была введена в 1865 г. Рудольфом Клаузиусом, чтобы в какой-то мере количественно отразить суть второго начала. Бесконечно малое изменение энтропии (дифференциал dS) при равновесных (обра-

¹ Клаузиус (Clausius) Рудольф Юлиус Эмануэль (1822–1888) — немецкий физик, один из основателей термодинамики и молекулярно-кинетической теории теплоты. Дал (одновременно с У. Томсоном) в 1850 г. первую формулировку второго начала термодинамики. Придерживался гипотезы У. Томсона о тепловой смерти Вселенной. Ввел первым понятие энтропии (1865 г.) идеального газа, длины свободного пробега молекул. Обновил в 1850 г. уравнение Клапейрона — Клаузиуса. Доказал (1870 г.) теорему вириала, связывающую кинетическую энергию системы частиц с действующими силами. Разработал теорию поляризации диэлектриков (формула Клаузиуса — Моссоли).

тимых) процессах связано с элементарным притоком тепла следующим образом:

$$\delta Q = TdS.$$

Энтропия является экстенсивной величиной, зависящей от числа частиц системы.

В термодинамике есть несколько способов доказательства существования у равновесных систем энтропии.

Укажем на два основных пути введения в термодинамике функции состояния — энтропии.

Энтропия может быть определена (см., например, [75]) при рассмотрении циклического обратимого процесса в равновесной системе, обменивающейся по законам цикла Карно (состоящего из двух адиабатических и двух изотермических процессов) порциями тепла Q_1, Q_2, \dots, Q_n с n внешними источниками тепла, имеющими температуры T_1, T_2, \dots, T_n . Для этого процесса оказывается, что $\sum_{i=1}^n Q_i/T_i \leq 0$, причем знак равенства стоит в случае обратимого цикла. При бесконечно малых порциях тепла δQ , таким образом, имеем для цикла

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

что и доказывает, что $\delta Q/T$ есть полный дифференциал некоторой функции состояния. Заметим, что впервые так энтропия была введена в 1866 г. Людвигом Больцманом.

В термодинамике строго доказывается (см., например, [39]), что величина δQ имеет множество интегрирующих множителей, среди которых есть величина, обратная абсолютной температуре. Так что выражение

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{dE + \delta W}{T}$$

представляет собой дифференциал некоторой функции состояния, а именно — энтропии.

Таким образом, объединение первого и второго начал термодинамики позволяет записать закон сохранения энергии (2.14) для равновесных систем в виде

$$TdS = dE + \delta W. \quad (2.15)$$

Но замечательно то, что, как установил Клаузиус, *существующая у всякой равновесной системы функция энтропии не убывает при любых процессах в изолированных системах.*

В этом, пожалуй, состоит существенная черта второго начала термодинамики, и она является следствием объективно существующей неравноценности работы и теплоты.

Вот как Больцман излагает¹ второе начало термодинамики в одном из своих докладов:

«... Работа и видимая живая сила могут безусловно переходить одна в другую и без всяких ограничений превращаться в теплоту; наоборот, обратное превращение теплоты в работу или в видимую живую силу или совсем невозможно, или возможно только отчасти».

Здесь Больцман под работой понимает энергию «взаимного отдаления притягивающих друг друга тел или сближения тел отталкивающих», а под «видимой живой силой» энергию «видимого движения тел». В сумме они составляют механическую энергию (потенциальную и кинетическую).

Далее Больцман говорит:

«... Энергия в форме тепла часто обозначается как рассеянная или деградированная энергия. Таким образом, второй закон констатирует непрерывный рост деградации энергии, пока не прекратятся все видимые напряжения во Вселенной».

Возвращаясь теперь к понятию обратимости процессов, следует отметить, что мерой необратимости процесса в изолированной системе является изменение новой функции состояния — энтропии. При процессах, например с трением, работа непосредственно может быть превращена в теплоту; но при обратном процессе переход теплоты в работу невозможен без изменения во внешних телах. Следовательно, процессы с трением необратимы. Такими же необратимыми процессами являются процессы теплопередачи (обратный процесс связан с отнятием части теплоты у холодного тела и некомпенсированного превращения его в работу, которую надо затратить на увеличение энергии нагретого тела), процессы диффузии и др. Поскольку любой равновесный процесс обратим, можно говорить, что *любой необратимый процесс неравновесен*.

Как устанавливается вторым началом, функция энтропии при *обратимых*, а следовательно, *равновесных процессах* в изолированных системах не меняется ($\delta Q = 0$ и $dS = 0$).

Значит, при *неравновесных*, а следовательно, *необратимых процессах* функция энтропии в изолированных системах может только возрастать ($\delta Q = 0$; $dS > 0$).

¹ Больцман Л. Второй закон механической теории тепла // Людвиг Больцман. Статьи и речи. М.: Наука, 1970.

Неравновесные процессы являются естественными, не идеализируемыми, реально осуществляемыми в природе.

Таким образом, второе начало термодинамики может быть сформулировано следующим образом:

Все естественные (реализуемые в природе) процессы в изолированной системе, выведенной из состояния термодинамического равновесия, вблизи этого равновесия идут в направлении монотонного возрастания энтропии, которая стремится к своему максимальному значению.

Следует подчеркнуть еще раз, что *возрастание энтропии при необратимых (естественных) процессах обязательно лишь для изолированных (не обменивающихся ни теплом, ни массой с внешними телами) систем.* Если система не изолирована, то даже и при необратимых процессах энтропия в ней может убывать.

Одним из характерных примеров, иллюстрирующих это свойство энтропии, является процесс теплопередачи в изолированной системе, рассмотренный Энрико Ферми¹ [75].

Пусть термодинамическая система состоит из двух частей, одна из которых имеет температуру T_1 , а вторая $T_2 > T_1$. Если система теплоизолирована, то согласно опытному факту о переходе тепла от более нагретого тела к менее нагретому вторая часть отдаст некоторое тепло δQ и оно полностью (вследствие изоляции системы) перейдет к первой части. При этом процессе полное изменение энтропии dS всей системы, равное в силу аддитивности сумме изменений энтропии ее частей, имеет значение

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{\delta Q}{T_1} - \frac{\delta Q}{T_2}.$$

Нетрудно видеть, что, поскольку $T_2 > T_1$, то $dS > 0$. Если допустить невозможное в природе явление, что полученное тепло ($+\delta Q$) будет у тела с большей температурой, т. е. $T_2 < T_1$, то $dS < 0$.

Во второй части системы, имеющей температуру T_2 , энтропия убывает ($dS_2 = -\frac{\delta Q}{T_2} < 0$), но это не противоречит второму началу, поскольку сама по себе вторая часть системы не является изолированной.

¹ Ферми (Fermi) Энрико (1901–1954) — выдающийся итальянский физик, один из создателей ядерной и нейтронной физики. Окончил Пизанский университет и Высшую нормальную школу (1922 г.). Работал в Геттингенском и Лейденском университетах, преподавал в Римском и Флорентийском университетах. В 1938 г. эмигрировал в США, где в 1942 г. в Металлургической лаборатории Чикагского университета построил первый ядерный реактор и осуществил управляемую цепную ядерную реакцию. Научные работы в области атомной и ядерной физики, статистической механики, физики космических лучей, физики высоких энергий, астрофизики, технической физики. Разработал статистику частиц с полуцелым спином (статистика Ферми — Дирака), создал модель атома (модель Томаса — Ферми), открыл искусственную радиоактивность (1934 г.), обусловленную нейтронами, эффекты замедления нейтронов (Нобелевская премия, 1938 г.). Впервые (1941 г.) зарегистрировал нейтроны при спонтанном делении. Член многих академий наук и научных обществ.

В своих лекциях [75] Ферми формулирует второе начало термодинамики в следующем виде: «Для любого процесса, происходящего в изолированной системе, энтропия конечного состояния никогда не может быть меньше энтропии начального состояния».

И далее, по поводу системы с максимальным значением энтропии:

«Когда изолированная система находится в состоянии с максимальной энтропией соответствующей ее энергии, то в ней не могут происходить никакие дальнейшие процессы, потому что любой процесс привел бы к уменьшению энтропии. Таким образом состояние с максимальной энтропией является наиболее устойчивым состоянием изолированной системы».

Вышеприведенная формулировка второго начала, данная Клаузиусом, страдает некоторой формальностью и неявными ссылками на то, что, мол, таков наш мир, что в нем некоторые процессы запрещены. Функция энтропии, введенная при помощи обратимого циклического процесса, существование которого само по себе проблематично, имеет такие односторонние свойства, которые как бы отсекают все «запрещенные» природой процессы.

Вот некоторые примеры природных явлений с односторонним ходом их реального протекания.

Если опустить стакан горячей воды в теплую ванну, то он остынет, хотя в большой ванне теплоты, пропорциональной массе, гораздо больше, чем в стакане. Или, скажем килограммовый камень, упав с высоты 427 м, может выделить одну килокалорию тепла, превратив весь запас механической энергии в тепло. Точно так же нагревается тормозное устройство автомобиля при торможении. Но невозможно довести до кипения стакан горячей воды в теплой ванне, ибо тепло всегда переходит от тела с большей температурой (постулат Клаузиуса). Напрасно ожидать, что камень подпрыгнет на 427 м, если сообщить ему одну килокалорию тепла; невозможно и заставить двигаться автомобиль, подогрев его тормоза. Такое направление протекания явлений в природе запрещено вторым началом термодинамики, ибо при этом энтропия системы убывает хотя закону сохранения энергии, т. е. первому началу, и прямой, и обратный ход процессов не противоречат.

В 1876–1880 гг. Больцман ввел понятие энтропии на основании рассмотрения вероятности термодинамического состояния системы. При этом Больцман исходил из того, что любая термодинамическая система состоит из множества элементарных частиц (молекул, атомов), которые находятся в состоянии непрерывного хаотического движения. Таким образом, в основу второго начала были положены одновременно и механические, и статистические закономерности, присущие всем реальным физическим телам.

Поскольку в системе, состоящей из N частиц, множество механических состояний значительно мощнее множества термодинамических состояний, определяемых значением n термодинамических параметров ($n \ll N$), то имеет смысл говорить о вероятности любого термодинамического состояния системы. Эта вероятность характеризуется величиной Π , которая пропорциональна числу механических состояний, соответствующих этому одному термодинамическому состоянию. Тогда говорят, что Π равно термодинамической вероятности данного макросостояния. Больцман показал, что энтропия системы связана с Π следующим образом:

$$S = k \ln \Pi,$$

где $k = 1,381 \cdot 10^{-16}$ см · дин/град — универсальная постоянная, численно определенная Максом Планком¹ (постоянная Больцмана).

Таким образом, чем вероятнее какое-либо термодинамическое состояние системы, тем больше ее энтропия.

Наиболее вероятное состояние реальной изолированной системы будет и ее наиболее устойчивым состоянием. Это дает основание считать — и подтверждается опытом — что в изолированной системе энтропия всегда возрастает, ибо все протекающие в ней процессы приводят систему к наиболее вероятному состоянию.

Такое определение энтропии не связано с определением Клаузиуса, которое годится для равновесного и близкого к нему состояний. Определение Больцмана пригодно и для состояний, далеких от равновесия, ибо оно исходит только из атомистической структуры термодинамических систем и статистических закономерностей механики движения атомов. И это, кстати, сыграло решающую роль в неравновесной термодинамике. Таким образом, Больцман впервые доказал, что второе начало тер-

¹ Планк (*Planck*) Макс Карл Эрнст Людвиг (1858–1947) — выдающийся немецкий физик-теоретик, создатель квантовой теории. Окончил Берлинский университет (1878 г.). Профессор Мюнхенского (1880–1885 гг.), Кильского (1885–1889 гг.), Берлинского (1889–1928 гг.) университетов. В 1900 г. ввел квант действия и теоретически вывел закон распределения энергии в спектре абсолютно черного тела. «Это открытие, — писал А. Эйнштейн, — стало основой для всех исследований в физике XX в. и с того времени полностью обусловило ее развитие». Постоянная Планка, или квант действия, является одной из трех универсальных постоянных в физике. Нобелевская премия 1918 г. Фундаментальное значение имеют работы Планка по теории относительности: в 1906 г. он вывел уравнения релятивистской теории динамики, а в 1907 г. провел обобщение термодинамики в рамках специальной теории относительности. Ввел термин «теория относительности».

модинамики является одновременно и «механическим», и «статистическим», т. е. относится к системам множества частиц, хаотически движущихся по законам механики, а возрастание энтропии в осуществляющихся процессах определено физической природой реально существующих термодинамических систем.

Итак, второе начало термодинамики, если исходить из больцмановского определения энтропии, может быть сформулировано следующим образом:

Любые реальные процессы в изолированной термодинамической системе, состоящей из множества хаотически движущихся частиц, постоянно приближают эту систему к наиболее вероятному термодинамическому состоянию, а функция энтропии этой системы, пропорциональная логарифму вероятности состояния, монотонно возрастает, стремясь к своему максимальному значению.

Формула Больцмана, связывающая энтропию с вероятностью состояния системы, является величайшим достижением человеческой мысли прошлого века. Она сыграла настолько большую роль в науке, что, по предложению научной общественности, эта формула была высечена на его могильном памятнике в Вене.

Оценивая работы Больцмана, Планк пишет, что «второе начало термодинамики получило... подобно первому, вполне реальное обоснование».

Метод и статистика Больцмана оказали большое влияние не только на развитие термодинамических представлений. Впоследствии они были положены в основу *теории информации*, где в качестве меры количества информации К. Шенноном¹ в 1948 г. была предложена (см. [78]) положительная величина

$$H = -K \sum_{k=1}^n p_i \ln p_i,$$

где K — положительная постоянная, p_i — вероятность i -го события, связанного с передачей определенного сигнала, состоящего из n событий. Чем больше H , тем больше информации содержит данное сообщение. Таким образом, скажем, в языке, насчитывающем минимальное число слов, информации очень мало, в то время как язык развитых народов обладает информативностью значительно большей.

Основополагающий результат Больцмана широко использовался при формировании совершенно новой отрасли науки, названной в 1975 г. немецким ученым Г. Хаке-

¹ Шеннон (Shannon) Клод Элюд (р. 1916) — американский математик и инженер, один из создателей математической теории информации. Предложил (1948 г.) метод количественного выражения информации. Развил алгебру логики, методы теории информации, как основу создания вычислительных машин. Труды по теории релейно-контактных схем, по математической теории связи, по кибернетике.

ном синергетикой. Эта наука, связанная с неравновесными термодинамическими процессами, находясь на стыке разных научных направлений, в последнее время весьма интенсивно развивается¹.

Идеи Больцмана широко используются и в других разделах кибернетики.

Чтобы отразить в первом начале возможность естественных процессов, сопровождающихся ростом энтропии в неизолированных системах, пользуются следующим представлением Карно² — Клаузиуса для полного приращения энтропии:

$$dS = d_e S + d_i S = \frac{\delta Q}{T} + d_i S. \quad (2.16)$$

В этом разбиении под $d_e S$ подразумевают обратимое (внешнее) изменение энтропии за счет обратимого изменения тепла δQ , сообщенного системе из окружающей среды. Можно сказать, что $d_e S$ определяет обмен энтропией с внешней средой через границы системы. Величина $d_e S$ может быть положительной (система получает тепло), отрицательной (система отдает тепло) и нулем (система адиабатическая). Изменение энтропии $d_i S$ (внутреннее изменение) является следствием необратимости диссипативных процессов, происходящих внутри системы. Говорят, что $d_i S$ — это энтропия, произведенная системой («производство энтропии»). Примерами таких процессов могут быть теплопроводность, диффузия, вязкость, химические реакции. Поэтому, если допускаются такие процессы, то $d_i S$ всегда положительно ($d_i S > 0$).

В связи с этим для необратимых процессов, как это следует из представления (2.16), имеем

$$dS > \frac{\delta Q}{T}.$$

Таким образом, когда хотят подчеркнуть возможность необратимых процессов перехода системы из одного состояния в близкое к нему, пишут первое и второе начала в виде:

¹ См., например, один из последних обзоров работ по синергетике: Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Антропный принцип в синергетике // Вопросы философии. 1997. № 3.

² Карно (Carnot) Никола Леонард Сади (1796–1832) — французский физик и инженер, один из основателей термодинамики. Сын математика и механика Карно Лазара (1753–1823). Учился (1812–1814 гг.) в Политехнической школе. В «Размышлениях о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу», исходя из невозможности вечного двигателя, впервые показал, что работу можно получить лишь в случае, когда тепло переходит от нагретого тела к более холодному (фактически это положение является вторым началом термодинамики). Получил известность лишь после 1834 г., когда Б. Клапейроу удалось придать идеям Карно математическую формулировку.

$$TdS \geq dE + \delta W,$$

или

$$TdS_i = TdS - Td_e S = TdS - dE - \delta W \geq 0,$$

где знак равенства относится к обратимым процессам, а неравенства — к необратимым.

Принцип локального равновесия

Движение реальных сплошных сред, обладающих вязкостью, теплопроводностью и другими свойствами, приводящими к необратимым диссипативным явлениям, нельзя, строго говоря, считать равновесным процессом. В механике сплошной среды принимают так называемый *принцип локального равновесия*. Этот принцип основывается на реальных свойствах движения газов, жидкостей, деформируемых тел и других физических сред, изучаемого в механике сплошных сред, и позволяет конструктивно использовать основные положения термодинамики равновесного состояния, в частности основные начала в форме (2.14), (2.15).

Согласно принципу локального равновесия *каждый малый объем (частица) движущейся сплошной среды в любой момент времени находится в состоянии термодинамического равновесия*.

Это значит, что для любого малого объема (частицы, «целлы»¹) среды справедлива установленная для равновесных процессов формулировка начал термодинамики (2.15), независимо от того, будут ли процессы, касающиеся всей среды в целом, только обратимыми или же среда будет двигаться в таком режиме, когда процессы ее перехода из одного состояния в другое будут необратимы.

Этот принцип требует двухстороннего сильного неравенства, а именно

$$\tau \ll |\tau_0| \ll \tau_c.$$

Здесь τ — время релаксации элементарной частицы среды, для которой определены внешние параметры $a_i(t, \mathbf{r})$; τ_0 — фактическое вре-

¹ Целла (лат.) — малая комната, келья. Отсюда иногда принцип локального равновесия называют «принципом целлюлярного равновесия».

мя изменения этих параметров в частицах; τ_c — время релаксации всей системы как совокупности частиц, т. е. время, в течение которого вся система в целом возвращается в состояние равновесия.

Чем меньше по размерам термодинамическая система, тем меньше время ее релаксации. Многочисленные опыты и исследования (см. ссылки на них в [16]) показывают, что принцип локального равновесия справедлив для движущихся сплошных сред, систем, весьма далеких от термодинамического равновесия в целом. Однако, скажем, в турбулентных потоках, при быстрых процессах в плазме, в области ударных волн обычно считается, что этот принцип нарушается.

В дальнейшем при рассмотрении движения сплошной среды будет принят, если не оговорено особо, принцип локального равновесия. Таким образом, в общей формулировке первого начала (2.14) в качестве δW рассматривается *обратимая* элементарная работа, т. е. работа, не включающая диссипативных процессов и произведенная системой при равновесном (обратимом) процессе над внешней средой, и допускается существование интегрирующего множителя $1/T$, позволяющего ввести функцию состояния — энтропию, так что $dS = \delta Q/T$.

Итак, *в механике сплошной среды, как следствие принципа локального равновесия, принимается, что в каждой частице среды обмен энергиями идет согласно закону*

$$TdS = dE + \delta W, \quad (2.17)$$

где $dS = dS_e$; $\delta W = \sum_{i=1}^n A_i da_i$.

Таким образом, движущаяся произвольным образом сплошная среда, в которой возможны необратимые термодинамические процессы, в каждый момент времени может быть представлена совокупностью частиц среды, находящихся в термодинамическом равновесии.

При этом, однако, неравенство $d_i S > 0$ привлекается к анализу всякий раз, когда надо установить знак каких-то феноменологических коэффициентов либо приращений термодинамических потенциалов (см. §14 о диссипативной функции и неньютоновских средах, задачу 12.4, задачу 14.3 и др.).

**Теплоемкость системы.
Термостат**

С процессами теплообмена связано понятие теплоемкости термодинамической системы.

Теплоемкостью системы «С» называется величина, равная количеству теплоты, необходимому для изменения температуры системы на 1°K, т. е.

$$c = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (2.18)$$

Такое определение теплоемкости неполно, поскольку дает неоднозначное представление о теплоемкости. Теплоемкость является функцией процесса системы, ибо количество тепла δQ , требуемое для изменения температуры тела на dT , зависит от условий, при которых это тепло сообщается телу. Так что одна и та же система может иметь разные теплоемкости в зависимости от процесса передачи тепла и, вообще говоря, $0 < c < +\infty$. Например, при изотермическом процессе ($dT = 0$) $c = \infty$, а при изэнтропическом обратимом процессе ($dS = 0$) теплоемкость того же тела равна нулю. В термодинамике тело с бесконечной теплоемкостью называют *термостатом*. Температура термостата не меняется при теплообмене с другими телами.

В определении (2.18) тот параметр, который остается постоянным при процессе теплопередачи, соответствует нижнему индексу у «С»; так, теплоемкость c_p при постоянном давлении равна $c_p = (\delta Q/dT)_p$, а при постоянном объеме $c_v = (\delta Q/dT)_v$.

Среди жидких тел наибольшей теплоемкостью обладает вода ($c \approx 1,0$), наименьшей — ртуть ($c \approx 0,03$). Из твердых тел наиболее «теплоемкий» — лед ($c \approx 0,4$); почти все металлы имеют $c \approx 0,2 - 0,05$. Водород имеет $c_p \approx 3,4$, гелий — $\approx 1,3$, а остальные газы $c_p \approx 0,5 - 0,2$ (в кал/г · град).

Основные термодинамические соотношения для сплошной среды. Термодинамические потенциалы

Как опытный факт принимают, что любая сплошная среда с постоянным числом частиц при отсутствии взаимодействия ее с электромагнитными полями является простой термодинамической системой, так что ее терми-

ческое уравнение равновесного состояния имеет вид

$$b_i = b_i(a_i, T).$$

Для жидкостей и газов в качестве единственного внешнего параметра a_1 выбирается объем системы V , а в качестве внутреннего параметра берут давление p . Таким образом, термическое уравнение равновесного состояния жидкостей и газов имеет в общем виде форму

$$p = p(V, T). \quad (2.19)$$

В этом случае обратимая элементарная работа по увеличению объема системы на $da_1 = dV$, как это следует из выражения (2.12) и физического смысла давления в газах и жидкостях, равна

$$\delta W = pdV,$$

и первое начало термодинамики для газов и жидкостей приобретает форму

$$TdS = dE + pdV. \quad (2.20)$$

Заметим, что для закрытых систем экстенсивные (пропорциональные массе) величины в этом соотношении могут быть заменены их удельными значениями (отнесенными к единице массы). Тогда (2.20) приобретает вид

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (2.21)$$

где s и e — энтропия и внутренняя энергия единицы массы.

Это соотношение выполняется для системы в виде материального объема, сохраняющего свою массу.

Для случая деформируемой среды, способной поляризоваться и намагничиваться в электромагнитном поле, уравнение (2.21) приобретает вид (см. (2.12б) и (2.12в))

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B},$$

где \mathbf{D} , \mathbf{B} — электрическая и магнитная индукции соответственно единицы объема среды. Иногда это соотношение записывают в виде

$$Tds = de + p^\ominus d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{\mathbf{E}}{4\pi} \cdot d\left(\frac{\mathbf{D}}{\rho}\right) - \frac{\mathbf{H}}{4\pi} \cdot d\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\right),$$

где $p^\ominus = p + \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{4\pi}$.

В тех случаях, когда важны эффекты сжимаемости среды, удобно пользоваться вместо внутренней энергии другой функцией состояния — энтальпией I , которая по определению равна

$$I = E + pV.$$

Тогда имеем, учитывая (2.20):

$$dI = TdS + Vdp. \quad (2.22)$$

Важными функциями состояния являются *свободная энергия* (по Гельмгольцу) F и потенциал Гиббса Φ , которые по определению равны

$$F = E - TS, \\ \Phi = E + pV - TS.$$

Для них, используя (2.20), получаем

$$dF = -pdV - SdT, \quad (2.23)$$

$$d\Phi = Vdp - SdT. \quad (2.24)$$

Из этих выражений следует, что функции состояния E , I , F и Φ можно рассматривать в качестве потенциалов для термодинамических параметров S и V , S и p , V и T , p и T соответственно.

Из приведенных выше формул можно получить четыре соотношения, известных в термодинамике как соотношения Максвелла. Действительно, из (2.20) имеем

$$p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S; \quad T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V.$$

Отсюда, вычисляя вторую производную $\partial^2 E / \partial S \partial V$, получим

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S.$$

Следующие три соотношения Максвелла получены подобным образом из (2.22), (2.23) и (2.24):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T; \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T. \quad (2.25)$$

Из соотношения

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV,$$

рассматривая $E = E(T, V)$, получаем

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \frac{1}{T} \left(p + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T\right) dV.$$

Условие того, что dS есть полный дифференциал, дает

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} \left(p + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T \right) \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \right),$$

откуда

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V. \quad (2.26)$$

Это соотношение в термодинамике называется *соотношением взаимности*.

Приведем основные термодинамические соотношения для разных видов сплошной среды.

Идеальные (совершенные) газы Для идеальных (совершенных) газов при не слишком малых и не слишком больших давлениях и температурах термическое уравнение равновесного состояния имеет вид следующего закона:

$$pV = AT,$$

где A — величина, постоянная для рассматриваемой массы газа.

Если перейти здесь к молярному объему v ($V = Nv$, где N — число молей в объеме V), а затем к плотности ρ ($\rho = \mu/v$, где μ — масса одного моля), то, используя закон Авогадро¹ о равенстве количества молекул в одинаковых объемах газа при одинаковых температурах и давлениях, получаем

$$p = \rho RT, \quad (2.27)$$

где $R = A/N\mu$ — газовая постоянная, отнесенная к массе одного моля и различная для разных газов. Для воздуха ($R = 2,87 \cdot 10^6$ см²/сек² · град). Величина $R_0 = \mu R = A/N$ носит название универсальной газовой постоянной, имеющей одинаковое значение для всех газов $R_0 = 8,31$ Дж/моль · град.

Выражение (2.27) носит название закона Клапейрона², хотя незави-

¹ Авогадро (Avogadro) Амедео (1776–1856) — итальянский физик и химик. Профессор физики Туринского университета. Заложил основы молекулярной теории вещества, открыл (1811 г.) закон равного количества молекул в равных объемах газов при одинаковых условиях (закон Авогадро).

² Клапейрон (Clapeyron) Бенжа Поль Эмиль (1799–1864) — французский физик и инженер. Окончил парижскую Политехническую школу (1818 г.), в 1820–1830 гг. работал в России. Работы по механике посвящены теории упругости (теорема Клапейрона) и строительной механике (устойчивость арок). На основе идей Н. Карно ввел в термодинамику индикаторные диаграммы. Сформулировал (1834 г.) уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева) и уравнение, устанавливающее связь между температурой плавления и кипения вещества и давлением (уравнение Клапейрона — Клаузиуса).

симо это уравнение состояния было получено Д. И. Менделеевым¹.

Более точно уравнение состояния реальных газов выражается уравнением Ван-дер-Ваальса²:

$$p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2,$$

где a , b — опытные постоянные (для воздуха — $a = 3 \cdot 10^{-3} p_0 \rho_0^2$; $b = 3 \cdot 10^{-3} \rho_0^{-1}$, причем p_0 , ρ_0 — стандартные значения давления и плотности). Это уравнение используется при описании поведения газов в случае малых отклонений от стандартных условий. При очень высоких температурах, когда наблюдается не только диссоциация молекул, но может начаться и процесс ионизации, то, если не учитывать электростатические силы, можно (см. [10]) использовать (2.27) в виде

$$p = \rho T \frac{k}{\bar{m}},$$

поскольку $R = k/\bar{m}$, где k — постоянная Больцмана, а \bar{m} — средняя масса молекул газа, зависящая как от температуры, так и от плотности.

Чтобы получить калорическое уравнение состояния газа, обратимся к (2.26). Из него для совершенного газа ($p = \rho RT$) имеем

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = T \rho R - p = 0,$$

так что внутренняя энергия зависит только от температуры, т. е. $E = E(T)$. Определяя согласно (2.18) теплоемкости идеального газа при процессах, когда сохраняется объем (c_v) или давление (c_p), получаем

$$c_v = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{dE(T)}{dT}, \quad c_p = \left(\frac{\delta Q}{\delta T}\right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Отсюда имеем калорическое уравнение состояния идеального газа

$$E(T) = \int c_v(T) dT.$$

¹ Менделеев Дмитрий Иванович (1834–1907) — выдающийся русский химик, разносторонний ученый и общественный деятель. Окончил (1855 г.) главный Педагогический институт в Петербурге. В 1857–1890 гг. преподавал в Петербургском университете, с 1893 г. — ученый-хранитель Главной палаты мер и весов. Оставил свыше 500 печатных трудов, среди которых «Основы химии» (1869–1871 гг.). Открыл (1869 г.) периодический закон химических элементов — один из основных законов естествознания. Установил существование критической температуры, обобщил уравнение Клапейрона, нашел в 1874 г. уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева). Создал барометр, указал на существование пограничного слоя при обтекании судов, впервые (в 1888 г.) выдвинул идею подземной газификации угля, заложил основы теории растворов.

² Ван-дер-Ваальс (van der Waals) Ян Дидерик (1837–1923) — нидерландский физик, окончил Лейденский университет, профессор Амстердамского университета (1877–1907 гг.). Научные работы посвящены молекулярной физике и низкотемпературным явлениям. Вывел в 1873 г. уравнение состояния реального газа. За работы, содержащие уравнения агрегатных состояний жидкостей и газов, удостоен Нобелевской премии (1910 г.).

Для политропного газа (калорически совершенного)

$$c_v = \text{const}$$

и тогда $E(T) = c_v T$.

Далее получаем

$$dS = \frac{dE}{T} + \frac{pdV}{T} = \frac{c_v dT}{T} + R \frac{dV}{V}, \quad c_p = c_v + p \frac{R}{p} = c_v + R,$$

так что

$$S - S_0 = c_v \ln T + R \ln V, \quad R = c_p - c_v \quad (\text{формула Майера}).$$

Поскольку $R > 0$, то $c_p > c_v$. Для воздуха отношение теплоемкостей $\kappa = c_p / c_v \approx 1,4$. Для политропного совершенного газа отсюда имеем

$$S = c_v \ln p V^\kappa + \text{const} = c_v \ln \frac{p}{\rho^\kappa} + \text{const}. \quad (2.28)$$

Основные процессы, которые различают в идеальных газах, это: изохорический процесс ($V = \text{const}$), изобарический процесс ($p = \text{const}$), изотермический процесс ($T = \text{const}$), изэнтропический процесс ($S = \text{const}$). Графики этих процессов представлены на рис. 69. Заметим, что поскольку $\delta Q = T dS$, то изэнтропический процесс ($dS = 0$) является одновременно адиабатическим ($\delta Q = 0$).

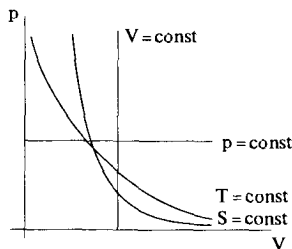


Рис. 69

В некоторых случаях движения газов в качестве уравнения состояния берется $p = p(\rho)$. Такой газ называется *баротропным*. В частности, идеальный газ, движущийся изотермически ($T = \text{const}$) или изэнтропически ($S = \text{const}$), является баротропным.

Жидкости

Построить приемлемую кинетическую модель для жидкостей гораздо труднее, чем для совершенного газа. Это связано с тем, что жидкости, как и твердые тела, представляют собой конденсированные фазы, где существует весьма интенсивное сцепление молекул.

В то же время жидкость, как и газ, обладает свойством текучести и способностью свободно изменять форму занятой ею пространственной

области. В покоящейся жидкости, как и в газе, касательные компоненты напряжений равны нулю. При достаточно медленном изменении объема жидкостей, как и газов, обратимая элементарная работа, совершаемая над единицей массы среды, равна $-pd(1/\rho) = pd\rho/\rho^2$. Уравнение состояния жидкостей и газов, как уже было отмечено, связывает три параметра — p , T и V .

Одинаковость ряда свойств у жидкостей и газов неудивительна, если учесть, что вещество может существовать как жидкость при некоторых значениях двух параметров, а при других значениях этих же параметров — в газообразной фазе. Это связано с изменением межмолекулярных сил в зависимости от температуры и может быть проиллюстрировано ходом изотерм (рис. 70).

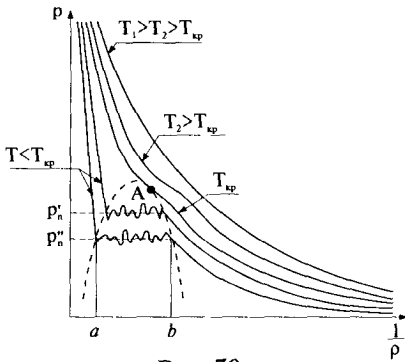


Рис. 70

Существует для каждого вещества критическая температура $T_{кр}$ и соответствующая изотерма в плоскости $(p, 1/\rho)$. Если $T > T_{кр}$, то вещество находится в газообразной фазе, и соответствующая изотерма подчиняется формуле Клапейрона — Менделеева тем точнее, чем дальше T от $T_{кр}$. По мере приближения к $T_{кр}$ (но не очень близко) изотермы уже соответствуют закону Ван-дер-Ваальса. Если же температура изотермы меньше критической, то при малых плотностях ($1/\rho > b$ на рис. 70) вещество находится в газообразной фазе. При $a < 1/\rho < b$ наступает неустойчивое состояние среды при постоянном

(в среднем) давлении (давление парообразования p_n), когда в газе появляются центры конденсации молекул и часть среды находится в жидкой фазе, а другая — в газообразной паровой фазе. При $1/\rho < a$, когда плотность увеличивается во много раз, вещество переходит в жидкую фазу; при этом $T < T_{кр}$.

Для воды критическая температура равна 374°C , а давление и плотность в критической точке A равны соответственно 218 атм и $0,4$ г/см³. На изотерме воды, соответствующей температуре 15°C , точка « a » соответствует плотности 1 г/см³, а точка « b » — плотности $1,28 \cdot 10^{-5}$ г/см³.

Заметим, что уменьшение давления ниже давления насыщенного пара имеет особое значение в гидродинамике, ибо в жидкости при этом появляются полости, пузырьки, заполненные паром. Это явление предшествует кавитации и играет решающую роль в разрушении лопастей гидротурбин, корабельных винтов и др.

В жидкой фазе вещества ($T < T_{кр}$; $1/\rho < a$) изотермы близки к вертикали, так что очень малые изменения плотности приводят к весьма большим изменениям давления. В этом диапазоне обычно принимают,

что $\rho = \text{const}$, а изменения давления малы и определяются из уравнения движения несжимаемой жидкости. Иногда (при анализе движения воды на больших глубинах океана) явления малых изменений плотности существенны. Тогда в качестве термического уравнения равновесного состояния воды можно использовать зависимость (см. [10])

$$\frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n, \quad (2.28a)$$

где $B = 3000$ атм, $n = 7$, ρ_0 — плотность воды при атмосферном давлении $p_0 = 1$ атм. Эта зависимость дает хорошие результаты (до нескольких процентов расхождения с опытом) при $p < 10^5$ атм.

Деформируемое твердое тело Как и жидкости, деформируемые твердые тела обычно рассматривают как среду с неизменной плотностью и постоянной теплоемкостью. Тогда

$$\rho = \text{const}; \quad \frac{\delta Q}{dT} = c = \text{const},$$

и, следовательно, $TdS = cdT$.

Заметим, что теплоемкость вычисляется здесь, как и для несжимаемых жидкостей (см. § 14), при постоянном давлении (обычно индекс опускается), а что касается неизменности плотности, то это приближение будет более подробно рассмотрено в модели упругого тела в § 14.

Для получения калорического уравнения состояния надо знать выражение для элементарной работы δW в случае деформируемого тела.

Рассмотрим в состоянии равновесия деформируемое твердое тело, занимающее объем V , ограниченный поверхностью S . Влияние окружающих систем отражено в силах, действующих на тело: объемных с интенсивностью $\rho \mathbf{f}$ и поверхностных, приложенных к S , имеющих напряжение \mathbf{p}_n . Поскольку тело находится в равновесии, то главный вектор всех этих сил равен нулю, т. е.

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{p}_n dS = 0.$$

Учитывая, что $p_{ni} = p_{ki}n_k$, и применяя теорему Гаусса — Остроградского ко второму интегралу, получим

$$\int_V \rho f_i dV + \int_S p_{ki} n_k dS = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \right) dV = 0. \quad (2.29)$$

Если каждый элемент тела в результате деформации под действием внешних сил испытывает смещение $d\mathbf{u}$, то элементарная работа этого тела над окружающими его системами равна

$$\delta W = - \int_V \rho f_i du_i dV - \int_S p_{ni} du_i dS = - \int_V \rho f_i du_i dV - \int_S p_{ki} du_i n_k dS.$$

Используя теорему Гаусса — Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int_V \left\{ \rho f_i du_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (p_{ki} du_i) \right\} dV = \\ &= - \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \right) du_i dV - \int_V p_{ki} d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dV. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части в силу (2.29) равен нулю, а второй преобразуем, предполагая симметричность тензора напряжений ($p_{ik} = p_{ki}$). Имеем

$$\begin{aligned} \delta W &= - \int_V p_{ki} d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dV = - \int_V \left(p_{ki} \frac{1}{2} d \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + p_{ik} \frac{1}{2} d \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV = \\ &= - \int_V p_{ik} d \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV = - \int_V p_{ik} du_{ik} dV. \end{aligned}$$

Отсюда элементарная обратимая работа на единицу объема в случае малых деформаций равна ($-p_{ik} du_{ik}$), а на единицу массы: $-p_{ik} du_{ik}/\rho$.

Уравнение (2.15) в применении к деформируемому телу приобретает для удельных (на единицу массы) внутренней энергии e и энтропии s вид

$$de = Tds + \frac{p_{ik} du_{ik}}{\rho} . \quad (2.30)$$

Оно показывает, что калорическое уравнение равновесного состояния деформируемого тела может быть представлено в виде

$$e = e(s, u_{ik}).$$

Если ввести удельную свободную энергию $\mathcal{F} = e - Ts$, то получаем

$$d\mathcal{F} = -sdT + \frac{p_{ik} du_{ik}}{\rho},$$

так что уравнение состояния может быть задано и в виде

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(T, u_{ik}).$$

При этом соотношение

$$p_{ik} = \rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} \right)_T \quad (2.31)$$

определяет зависимость $p_{ik} = p_{ik}(u_{ik})$ для упругого тела в случае малых деформаций, т. е. когда $u_{ik} = (u_{i,k} + u_{k,i})/2$. Если предположить, что свободная энергия является квадратичной функцией от u_{ik} , т. е.

$$\rho \mathcal{F} = \mu' \dot{u}_{ik} \dot{u}_{ik} + \frac{\lambda'}{2} u_{ii}^2, \quad (2.31a)$$

то из предыдущего выражения для p_{ik} получаем закон Гука (см. § 14)

$$p_{ik} = 2\mu' \dot{u}_{ik} + \lambda' \delta_{ik} u_{ii}, \quad (2.31b)$$

справедливый и для случая $\mu'(T)$, $\lambda'(T)$. Здесь \dot{u}_{ik} — компоненты девиатора тензора деформаций u_{ik} .

Свободную энергию \mathcal{F} для упругого тела очень часто называют *упругой энергией*.

В теории упругости иногда рассматривают еще один удельный термодинамический потенциал — потенциал Гиббса ϕ (см. (2.24))

$$\phi = e - Ts - \frac{p_{ik} u_{ik}}{\rho}.$$

В состоянии *текучести* рекомендуется:

$$\{I_2(\dot{p}_{ik})\}^2 = \text{const}.$$

В упругих телах, называемых *пьезоэлектриками* (см., например [2], [37]), напряжения возникают и под воздействием электрического поля. В них наблюдается и обратный эффект — появление электрического поля, пропорционального величине упругой деформации пьезоэлектрика. Если считать, что в пьезоэлектрике внутренняя энергия $e = e(s, u_{ik}, D_i)$, где \mathbf{D} — вектор электрической индукции, то в правую часть (2.30)

должна быть добавлена элементарная работа (2.12б). Таким образом, в случае пьезоэлектрика имеем для потенциалов e , \mathcal{F} и ϕ :

$$\begin{aligned} de(s, u_{ik}, D_i) &= Tds + \frac{p_{ik} du_{ik}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} E_i dD_i, \\ d\mathcal{F} &= -sdT + \frac{p_{ik} du_{ik}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} E_i dD_i, \\ d\phi &= -sdT - \frac{u_{ik} dp_{ik}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} E_i dD_i. \end{aligned}$$

В некоторых задачах удобно рассматривать в качестве внешнего параметра системы не индукцию \mathbf{D} , а электрическое поле \mathbf{E} . По отношению к полю потенциалы будут другими, а именно:

$$\begin{aligned} \tilde{e}(s, u_{ik}, E_i) &= e(s, u_{ik}, D_i) - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{4\pi}, \\ \tilde{\mathcal{F}}(s, u_{ik}, E_i) &= \mathcal{F}(s, u_{ik}, D_i) - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{4\pi}, \\ \tilde{\phi}(s, u_{ik}, E_i) &= \phi(s, u_{ik}, D_i) - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{4\pi}. \end{aligned}$$

Тогда термодинамические соотношения примут вид:

$$\begin{aligned} d\tilde{e} &= Tds + \frac{p_{ik} du_{ik}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} D_i dE_i, \\ d\tilde{\mathcal{F}} &= -sdT + \frac{p_{ik} du_{ik}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} D_i dE_i, \\ d\tilde{\phi} &= -sdT - \frac{u_{ik} dp_{ik}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} D_i dE_i. \end{aligned}$$

Аналогично пьезоэлектрикам в электрическом поле ведут себя ферромагнетики в магнитном поле: наложение достаточно сильных магнитных полей приводит к деформированию ферромагнетика. Это явление носит название *магнитострикции*. В некоторых условиях деформация кристаллических ферромагнетиков приводит к появлению их намагниченности [37]. Термодинамическое соотношение для ферромагнетика в случае введения потенциала свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}(s, u_{ik}, H_i)$ имеет вид

$$d\tilde{\mathcal{F}} = -sdT + \frac{p_{ik} du_{ik}}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} B_i dH_i$$

и аналогично выписываются остальные соотношения для ферромагнетиков с магнитострикцией.

Многокомпонентная открытая система. Соотношение Гиббса¹

В случае многокомпонентной среды, когда каждая из N компонент может менять свою массу как в результате массообмена, так и вследствие возможных химических реакций между компонентами, изменение ее массы можно представить в виде

$$dM_k = d_e M_k + d_i M_k,$$

где $d_e M_k$ — изменение массы k -той компоненты за счет внешнего обмена, а $d_i M_k$ — за счет химических реакций. При этом

$$\sum_{k=1}^N d_i M_k = 0; \quad \sum_{k=1}^N d_e M_k = d_e M \equiv dM,$$

где dM — изменение массы всей системы. Если $dM \neq 0$, то эта система является открытой.

В такой системе, считая $E = E(S, V, M_k)$, получаем:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V, M_k} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, M_k} dV + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial E}{\partial M_k} \right)_{S, V, M'_k} dM_k.$$

Вводя обобщенные для неравновесных процессов температуру $T = (\partial E / \partial S)_{V, M_k}$ и давление $p = -(\partial E / \partial V)_{S, M_k}$ и обозначая $\mu_k = (\partial E / \partial M_k)_{S, V, M'_k}$ (штрих у M'_k означает, что все M_i ($i \neq k$) считаются постоянными при вычислении производной), получаем

$$TdS = dE + pdV - \sum_{k=1}^N \mu_k dM_k. \quad (2.32)$$

Величины μ_k называются *химическими потенциалами*. Они зависят от термодинамических параметров — температуры, давления и др. Выражение (2.32) носит название *соотношения Гиббса*.

¹ Гиббс (Gibbs) Джозайя Уиллард (1839–1903) — американский физик и механик, один из создателей термодинамики и статистической механики. Окончил Йельский университет (1863 г.), с 1871 г. — профессор Йельского университета. Разработал теорию термодинамических потенциалов, открыл общее условие равновесия гетерогенных систем, получил фундаментальное термодинамическое соотношение Гиббса, вывел ряд уравнений (Гиббса — Гельмгольца, Гиббса — Дюгема). В последней (1902 г.) работе «Основные принципы статистической механики» обобщил результаты Л. Больцмана для идеального газа на системы общего вида, установил фундаментальный закон статистической физики — распределение Гиббса. Работы по векторному анализу в развитие алгебраических методов Г. Грассмана.

Оно играет основную роль в неравновесной термодинамике. Отметим, что соотношение Гиббса справедливо лишь в некоторой окрестности равновесного состояния системы.

В случае закрытой системы ($M = \text{const}$) соотношение (2.32) для удельных величин имеет вид

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - \sum_{k=1}^N \mu_k dc_k, \quad (2.33)$$

где $c_k = M_k/M$ — концентрация k -той компоненты.

Линейная термодинамика необратимых процессов. Термодинамические силы и потоки. Соотношения Онсагера¹

Изложенное ранее в этом параграфе относится к тем разделам термодинамики, которые иногда называют термостатикой. В ней отсутствует понятие времени, а под процессом понимается либо цепочка равновесных состояний (квазистатические процессы), либо переходы («без истории») из одного состояния в другое.

Собственно термодинамика как полная теория реальных необратимых процессов, протекающих во времени с той или иной скоростью, достаточно сложна и не может считаться завершенной. Следует отметить бурно развивающуюся в последнее время теорию диссипативных систем, далеких от равновесного состояния, получившую название синергетики (см., например, [51]), о которой говорилось при рассмотрении понятия энтропии. Тем не менее, некоторые частные случаи термодинамики необратимых процессов (неравновесной термодинамики), уже вошли в классическую термодинамику. В первую очередь речь идет о линейной неравновесной термодинамике. Рассмотрим основные положения линейной неравновесной термодинамики, в которой изучаются неравновесные процессы, близкие к равновесным.

Прежде всего, предполагается, что при таких неравновесных процессах также выполняется соотношение Гиббса (2.32). Тогда, следовательно, и термодинамические потенциалы, как и в равновесных процессах, не зависят явно от координат и времени (в соотношении (2.32) не входят дифференциалы dx_k и dt), а зависят лишь от термодинамических параметров. Сами же параметры определены локально, т. е. как функции x_k и t . Так, скажем, если в качестве таких параметров выбраны $E(t, \mathbf{r})$, $V(t, \mathbf{r})$ и $M_k(t, \mathbf{r})$, то из (2.32) следует, что энтропия $S = S(E(t, \mathbf{r}), V(t, \mathbf{r}), M_k(t, \mathbf{r}))$.

¹ Онсагер (Onsager) Ларс (1903–1976) — американский физик и химик, один из создателей термодинамики неравновесных процессов. Окончил Норвежскую высшую техническую школу (1925 г.), с 1928 г. жил в США; работал в Йельском университете и университете в Майами. Установил в 1931 г. одну из основных теорем термодинамики неравновесных процессов и свойство симметрии кинетических коэффициентов (теорема Онсагера), разработал теорию термодинамических свойств плоской решетки (теория Онсагера), открыл необратимую реакцию (реакция Онсагера) в термодинамике необратимых процессов (Нобелевская премия по химии, 1968 г.).

Кроме того, принимается принцип локального равновесия, что позволяет использовать статические (равновесные) значения локальных, определенных для каждой частицы термодинамических параметров при описании динамических (неравновесных) процессов, идущих во всей системе.

Эти два условия дают возможность ввести исходные понятия *термодинамических сил* и *термодинамических потоков* и через них выразить такую важнейшую характеристику системы в неравновесной термодинамике, как производство энтропии.

Под *производством энтропии* (σ) понимается скорость изменения энтропии системы в единице объема (ρS) за счет необратимых процессов.

Поскольку эта величина зависит лишь от термодинамических параметров $P_k(t, \mathbf{r})$, то имеем

$$\sigma = \frac{d(\rho S)}{dt} = \sum_k \frac{\partial(\rho S)}{\partial P_k} \frac{dP_k}{dt}.$$

Величины $dP_k/dt \equiv I_k$ называют *термодинамическими потоками*, а соответствующие им величины $\partial(\rho S)/\partial P_k \equiv X_k$ — *термодинамическими силами* (вызывающими потоки I_k).

В соответствии с этим при необратимых процессах в термодинамической системе имеем

$$\sigma = \sum_k I_k X_k.$$

Простейшие необратимые процессы представляют один поток, который устанавливается под действием постоянной во времени одной силы (импульса). Таковы электрический ток, поток тепла, диффузионный поток. При этом, согласно простейшим законам (Ома, Фурье, Фика), поток, определяемый как производная по времени от некоторой величины, пропорционален соответствующей силе (импульсу). Так для законов Ома¹ и Фурье² имеем:

$$I_e \equiv \frac{de_{el}}{dt} = \gamma_{el} \delta\varphi,$$

$$I_T \equiv \frac{dE}{dt} = \lambda \delta T,$$

где e_{el} — заряд, γ_{el} — электропроводность проводника, $\delta\varphi$ — разность электрических потенциалов на концах проводника, E — внутренняя энергия тела, λ — тепло-

¹ *Ом (Ohm) Георг Симон* (1787–1854) — немецкий физик. Основные труды относятся к электричеству. Ввел понятие сопротивления электрической цепи, экспериментально установил (1826 г.) и теоретически обосновал (1827 г.) закон, связывающий силу тока, напряжение и сопротивление.

² *Фурье (Fourier) Жан Батист Жозеф* (1768–1830) — французский математик и физик. Труды по алгебре, дифференциальным уравнениям и особенно математической физике. В «Аналитической теории тепла» (1822 г.) разработал метод представления функций тригонометрическими рядами (ряды Фурье). Исследовал термоэлектронный эффект, построил первую термоэлектрическую батарею.

проводность его, δT — перепад температур в теле; I_e, I_T называют термодинамическим потоком электрического тока и тепла соответственно.

Однако в общем случае необратимых процессов подобные простейшие потоки существуют совместно, внося каждый свой вклад в производство энтропии. Мало того, налагаясь друг на друга, они дают так называемые перекрестные эффекты. Эти эффекты впервые были рассмотрены Ларсом Онсагером в 1931 г., предложившим считать в первом приближении зависимость между силами и потоками линейной. Поскольку в равновесном состоянии σ, I_i и X_i равны нулю, то при малых отклонениях от равновесия естественно допустить

$$I_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k.$$

Коэффициенты L_{ik} называются *кинетическими коэффициентами*.

Онсагер доказал, что если в описание системы не входят аксиальные векторы, например индукция магнитного поля, то матрица кинетических коэффициентов симметрична, т. е.

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Если коэффициенты зависят от какого-то псевдовектора \mathbf{B} , то

$$L_{ik}(\mathbf{B}) = L_{ki}(-\mathbf{B}).$$

Соотношения симметрии кинетических коэффициентов носят названия *соотношений Онсагера*. Физически они означают, что в необратимых процессах существует определенная симметрия во взаимодействии различных факторов: возрастание потока I_i , обусловленное увеличением на единицу силы X_k , равно возрастанию потока I_k , обусловленному увеличением силы X_i на единицу.

Подставляя линейное выражение потоков через силы в σ , получаем

$$\sigma = \sum_i \sum_k L_{ik} X_i X_k.$$

Согласно второму началу термодинамики для необратимых процессов $\sigma > 0$, и это накладывает определенные ограничения на L_{ik} , поскольку квадратичная форма σ должна быть положительно-определенной. Как известно, эти ограничения сводятся к положительности детерминанта $\det \|L_{ik}\|$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) и главных миноров матрицы, так что, в частности, все диагональные коэффициенты L_{ii} должны быть положительными.

Пример. Рассмотрим случай термоэлектрического эффекта, когда воздействия от необратимых процессов протекания электрического тока и потока тепла через среду с конечной электропроводностью (γ_{el}) и теплопроводностью (λ) накладываются друг на друга.

Разобьем изолированную систему на две подсистемы, между которыми протекает электрический ток и есть поток энергии в виде тепла. Каждая из подсистем приближенно принимается за равновесную (принцип локального равновесия). Пусть за-

ряд и внутренняя энергия одной из подсистем равны соответственно e_{el} и E . Поскольку заряд и энергия всей системы сохраняются, то если изменения в первой системе равны de_{el} и dE , то в другой они равны $-de_{el}$ и $-dE$. Если $\delta\phi$ — разность потенциалов между системами, то элементарные работы каждой из подсистем примерно одинаковы и равны $\delta\phi de_{el}/2$. Тогда уравнения Гиббса для каждой из подсистем имеют вид:

$$T_1 dS_1 = -dE + \delta\phi \frac{de_{el}}{2},$$

$$T_2 dS_2 = dE + \delta\phi \frac{de_{el}}{2}.$$

Изменение $d_i S$ энтропии всей системы вследствие неравновесных процессов внутри нее равно

$$d_i S = dS_1 + dS_2 = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) dE + \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right) \delta\phi \frac{de_{el}}{2},$$

а плотность потока $\sigma = d_i S/dt$ имеет вид

$$\sigma = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \frac{dE}{dt} + \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right) \frac{\delta\phi}{2} \frac{de_{el}}{dt}.$$

Тогда, учитывая, что потоки тепла и электрического тока имеют вид $I_T = dE/dt$, $I_{el} = de_{el}/dt$, находим выражения соответствующих термодинамических сил

$$X_T = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \approx \frac{\delta T}{T^2}, \quad X_e = \left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} \right) \frac{\delta\phi}{2} \approx \frac{\delta\phi}{T}.$$

Предполагая линейную зависимость между термодинамическими потоками, получим:

$$I_T = L_{11} X_T + L_{12} X_e = L_{11} \frac{\delta T}{T^2} + L_{12} \frac{\delta\phi}{T},$$

$$I_e = L_{21} X_T + L_{22} X_e = L_{21} \frac{\delta T}{T^2} + L_{22} \frac{\delta\phi}{T}.$$

Отсюда имеем:
закон Ома

$$\left(\frac{I_e}{\delta\phi} \right)_{\delta T=0} = \frac{L_{22}}{T} = \text{const} = \gamma_{el},$$

закон Фурье

$$\left(\frac{I_T}{\delta T} \right)_{I_e=0} = \left(L_{11} - \frac{L_{12} L_{21}}{L_{22}} \right) \frac{1}{T^2} = \text{const} = \lambda.$$

Кроме этих прямых эффектов, можно получить ряд перекрестных. Например, эффект Пельтье¹

$$\left(\frac{I_T}{I_e} \right)_{\delta T=0} = \frac{L_{12}}{L_{22}} = \text{const} = \Pi,$$

эффект Зеебека²

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta T} \right)_{I_e=0} = -\frac{L_{21}}{L_{22}T} = \text{const}.$$

Все перекрестные эффекты пропадают, если $L_{21} = L_{12} = 0$. Равенство $L_{21} = L_{12}$ дает уравнение Томсона

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta T} \right)_{I_e=0} = -\frac{\Pi}{T}.$$

Задачи с решениями

Задача 12.1. Формула Больцмана для энтропии. Исходя из положения о том, что энтропия системы S зависит от вероятности термодинамического состояния системы Π , показать, что эта зависимость имеет вид формулы Больцмана $S = k \ln \Pi$.

Решение. Приведем вывод из монографии [60]. Пусть $S = f(\Pi)$, где f — дифференцируемая функция. Тогда, в силу аддитивности функции энтропии и свойств вероятности, для системы из двух частей имеем

$$S = S_1 + S_2, \quad \Pi = \Pi_1 \Pi_2,$$

так что из $S = f(\Pi)$ получаем

$$S_1 + S_2 = f(\Pi_1) + f(\Pi_2) = f(\Pi_1 \Pi_2).$$

Следовательно, функция f удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Поскольку это соотношение верно для любых x и y , выберем $y = 1 + \varepsilon$, где ε — бесконечно малая величина. Тогда из $f(x + x\varepsilon) = f(x) + f(1 + \varepsilon)$ следует $xf'(x) = f'(1)$. Отсюда, обозначая $f'(1) \equiv k$, имеем

$$f(x) = k \ln x + \text{const}. \tag{2}$$

Таким образом, считая постоянную интегрирования в этой формуле равной нулю (в силу определения энтропии $dS = \delta Q/T$), имеем, как результат предположения $S = f(\Pi)$, формулу $S = k \ln \Pi$.

¹Пельтье (*Peltier*) Жан Шарль Атаназ (1785–1845) — французский физик; до 1815 г. работал газодви-ком. Труды посвящены электромагнетизму, термоэлектричеству, атмосферному электричеству; обнаружил (1834 г.), что в местах спаяв двух различных металлов в зависимости от направления тока происходит поглоще-ние или выделение тепла (эффект Пельтье).

²Зеебек (*Seebeck*) Томас Йоган (1770–1831) — немецкий физик. Научные труды посвящены электромаг-нетизму и оптике. Открыл (1821 г.) явление термоэлектричества (в паре медь — висмут), построил термопару и использовал ее для измерения температуры.

Рассуждения можно немного упростить, если соотношение (1) продифференцировать, например, по y и положить затем $y = 1$. Получаем

$$xf'(xy) = f'(y); \quad xf'(x) = f'(1).$$

Отсюда, обозначая постоянную $f'(1) = k$ и интегрируя, имеем формулу (2). То, что постоянная в этой формуле равна нулю, можно заключить и из того, что из нее следует $\text{const} = f(1)$; но из (1) имеем (при $y = 1$): $f(x) = f(x) + f(1)$, т. е. $f(1) = 0$.

Задача 12.2. Найти зависимость температуры от давления в идеальном газе при адиабатическом процессе. На основании этого закона, считая процесс охлаждения воздуха при подъеме в верхние слои атмосферы адиабатическим (окружающий воздух — плохой проводник тепла), а изменение давления dp с подъемом на высоту dz равным $dp = -\rho g dz$ (g — ускорение силы тяжести), найти изменение температуры при подъеме на 1 км.

Решение. Из выражения $\delta Q = TdS$ следует, что адиабатический процесс одновременно является изэнтропическим. Поэтому из (2.28) имеем для адиабатического процесса

$$p\rho^{-\kappa} = \text{const.}$$

А для идеального газа ($p = \rho RT$) отсюда получаем

$$Tp^{(1-\kappa)/\kappa} = \text{const.}$$

Учитывая зависимость $dp = -\rho g dz$ и уравнение состояния $p = \rho RT$, имеем

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\rho g T}{p} = -\frac{(\kappa-1)g}{\kappa R}.$$

Отсюда для $\kappa = 1,4$; $g = 9,8$ м/сек²; $R = 287$ м²/(сек² · град), получаем

$$\frac{dT}{dz} = -9,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{град}}{\text{м}} = -9,8 \frac{\text{град}}{\text{км}}.$$

Таким образом, при подъеме на 1 км температура воздуха снижается примерно на 10 градусов. Это достаточно хорошо соответствует наблюдениям.

Задача 12.3. Для среды с уравнением состояния $p = RV^n T^m$ ($R = \text{const}$) выразить внутреннюю энергию и энтропию через T и V , если при измерении теплоемкости среды внутри сосуда с постоянным объемом V_0 она оказалась постоянной.

Решение. На основании соотношения (2.26) имеем

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = TmRV^n T^{m-1} - p = (m-1)p.$$

Тогда, интегрируя

$$E = (m-1) \int p(T, V) dV + f(T) = \frac{m-1}{n+1} RT^m V^{n+1} + f(T).$$

Определим функцию $f(T)$. Поскольку

$$c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{m-1}{n+1} RmT^{m-1}V^{n+1} + f'(T),$$

а при $V = V_0$ оказалось, что $c_v = c_v^0 = \text{const}$, то отсюда

$$f(T) = c_v^0 T - \frac{R(m-1)}{n+1} T^m V_0^{n+1}.$$

Таким образом

$$E = c_v^0 T + \frac{R(m-1)}{n+1} T^m (V^{n+1} - V_0^{n+1}).$$

Выражение энтропии через T и V получаем из соотношения

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T} dE + \frac{p}{T} dV = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_V dV + \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_T dT \right] + \frac{p}{T} dV = \\ &= RmV^n T^{m-1} dV + c_v^0 \frac{dT}{T} + \frac{Rm(m-1)}{n+1} T^{m-2} (V^{n+1} - V_0^{n+1}) dT. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$S = c_v^0 \ln T + \frac{RmT^{m-1}}{n+1} (V^{n+1} - V_0^{n+1}).$$

При $m=1$ и $n=-1$ получаем

$$E = c_v^0 T, \quad S = c_v^0 \ln T + R \ln V,$$

т. е. внутреннюю энергию и энтропию идеального газа с уравнением состояния $pV = RT$.

Задача 12.4. Показать, что при неравновесных (необратимых) изотермических процессах

1) свободная энергия по Гельмгольцу (потенциал $F = E - TS$) убывает и имеет минимум в состоянии устойчивого равновесия, если система не меняет объема (не производит работы);

2) свободная энергия по Гиббсу (потенциал $\Phi = E + pV - TS$) убывает и имеет в состоянии устойчивого равновесия минимум, если в системе не меняется давление.

Решение. Поскольку процесс необратимый, то для него

$$TdS > dE + pdV.$$

Подставляя сюда dE из выражения $dF = dE - d(TS)$, получим

$$dF < - (SdT + pdV).$$

Для изотермического процесса ($dT = 0$) и когда система не производит работы (не меняет объема), т. е. $\delta W = pdV = 0$, отсюда имеем

$$dF < 0.$$

§ 12. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Это означает, что свободная энергия F может только убывать для такого процесса, и если она достигнет минимума, то будет пребывать в таком состоянии сколь угодно долго, ибо любой процесс из этого устойчивого состояния может идти лишь с $dF > 0$, что противоречит условиям процесса. Таким образом, *общее условие устойчивого равновесия изотермической системы, не производящей работы*, можно записать в виде

$$F > F_0, \text{ или } (\delta F)_0 = 0; (\delta^2 F)_0 > 0,$$

где F_0 — значение свободной энергии в состоянии устойчивого равновесия, F — любое другое ее значение, а нулевые значения вариаций свободной энергии в состоянии равновесия соответствуют минимуму F .

Аналогично, подставляя в

$$TdS > dE + pdV$$

значение dE из $d\Phi = dE + d(pV) - d(TS)$, получаем

$$d\Phi < -SdT + Vdp.$$

Отсюда следует, что при неравновесном изотермическом процессе ($dT = 0$) в системе с постоянным давлением ($dp = 0$)

$$d\Phi < 0.$$

Отсюда заключаем, что *общее условие устойчивого равновесия изотермической системы с постоянным давлением* имеет вид

$$\Phi > \Phi_0, \text{ или } (\delta\Phi)_0 = 0, (\delta^2\Phi)_0 > 0.$$

Задача 12.5. Показать, что при неравновесных процессах в неизолированных системах с неизменной энтропией ($dS = 0$):

1) внутренняя энергия убывает и достигает минимума в состоянии устойчивого равновесия, если объем системы не меняется;

2) энтальпия $I = E + pV$ убывает и достигает минимума в состоянии устойчивого равновесия, если давление в системе не меняется.

Решение. Для указанных процессов из $TdS > dE + pdV$ и $dI = dE + d(pV)$ имеем

$$dE < TdS - pdV, \quad dI < TdS + Vdp,$$

т. е. $dE < 0$ при $dS = dV = 0$ и $dI < 0$ при $dS = dp = 0$.

Отсюда, подобно рассуждениям задачи 12.4, получаем, что для первого процесса

$$E > E_0, \text{ или } (\delta E)_0 = 0, (\delta^2 E)_0 > 0,$$

а для второго

$$I > I_0, \text{ или } (\delta I)_0 = 0, (\delta^2 I)_0 > 0.$$

Задача 12.6. Показать, что для вещества, у которого объем линейно зависит от температуры, теплоемкость c_p не зависит от давления.

Решение. По определению теплоемкости имеем $c_p = T(\partial S / \partial T)_p$ и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = T \frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T}.$$

Из $d\Phi = -SdT + Vdp$ имеем: $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Поэтому $\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T} = -\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}$, так что если $\frac{\partial^2 V}{\partial T^2} = 0$, то и $\frac{\partial c_p}{\partial p} = 0$.

Задача 12.7. Получить зависимость от температуры давления насыщенного пара в области двухфазного состояния жидкость — пар (область ab на рис. 70).

Решение. В области двухфазного состояния давление и плотность жидкости и пара зависят только от температуры, так что если в объеме V с энергией E содержится масса m_1 жидкости и масса m_2 газа с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно, то

$$V = V_1 + V_2 = \frac{m_1}{\rho_1(T)} + \frac{m_2}{\rho_2(T)}; \quad E = m_1 e_1(T) + m_2 e_2(T).$$

Пусть при изотермическом процессе, соответствующем какой-то изотерме на рис. 69, некоторое количество жидкой фазы dm перешло в пар. Тогда новый объем $V + dV$ равен

$$V + dV = (m_1 - dm) \frac{1}{\rho_1} + (m_2 + dm) \frac{1}{\rho_2} = V + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) dm.$$

Таким образом,

$$dV = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) dm.$$

Аналогично вычислим

$$dE = (e_2 - e_1) dm.$$

Тогда на основании первого закона (2.14) имеем ($\delta W = pdV$)

$$\frac{\delta Q}{dm} = e_2 - e_1 + p \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) = \lambda_n.$$

Величина λ_n называется скрытой теплотой парообразования и определяет количество теплоты, необходимое для испарения единицы массы жидкости при постоянной температуре. Для воды $\lambda_n = 540$ кал/г, для воздуха 50 кал/г, для меди — 71 кал/г и т. д. (при температурах кипения).

Из полученных выражений для dV и dE при изотермическом процессе имеем

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \frac{e_2 - e_1}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}}.$$

Используя соотношение взаимности (2.26), получаем

$$\frac{e_2 - e_1}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}} + p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v.$$

Отсюда имеем, заменяя $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v$ на $\frac{dp}{dT}$ (поскольку $p = p(T)$) и учитывая определение скрытой теплоты парообразования λ_n :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_n \rho_2}{T}.$$

Это уравнение называется уравнением Клапейрона.

В случае насыщенного пара можно считать, что $\rho_2 \ll \rho_1$, и тогда, пренебрегая в уравнении Клапейрона величиной ρ_2/ρ_1 по сравнению с единицей, получаем

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_n \rho_2}{T}.$$

Считая, что давление насыщенного пара удовлетворяет уравнению $p = \rho RT$, получим

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda_n p}{RT^2}.$$

Отсюда имеем искомую зависимость в виде

$$p = \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda_n}{RT}\right).$$

Приведенные рассуждения годятся и для системы жидкость — твердое тело. Так, например, для системы вода — лед имеем $\lambda_n = 80$ кал/г; $\rho_1^{-1} = 1,0907$ см³/г; $\rho_2^{-1} = 1,00013$ см³/г и при температуре $T = 273,1^\circ$ получаем, подставляя в уравнение Клапейрона эти значения,

$$\frac{dp}{dT} = -1,35 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2 \text{ град} = -134 \text{ атм/град}.$$

Таким образом, повышение давления до 134 атм понижает температуру плавления льда на один градус.

Заметим, что только для пары вода — лед плотность твердой фазы меньше жидкости, так что лед всегда на поверхности воды и водоемы не промерзают до дна; для других веществ — наоборот, так что для них повышение давления увеличивает температуру плавления. Что касается аномальных свойств пары вода — лед, то этим объясняется «обтекание» препятствий ледниками.

Задача 12.8. Показать, что отклонение плотности $\delta\rho$ от равновесного значения ρ в движущейся со скоростью v среде, уравнение состояния которой имеет вид

$\rho = \rho(T, p)$, а отклонение давления равно $\delta p \sim \rho v^2$, не зависит от градиента температур, но увеличивается со скоростью движения.

Решение. Из уравнения состояния получаем

$$\delta p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \delta p + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \delta T.$$

По определению $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T^{-1} \equiv a_T^2$ — квадрат изотермической скорости звука, а $-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \equiv \beta$ — коэффициент теплового расширения среды. Тогда, используя условия задачи, имеем

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{v^2}{a_T^2} - \beta \delta T.$$

Из этого выражения следует, что при увеличении v изменение плотности среды увеличивается. Кроме того, δp зависит лишь от абсолютной разности температур δT , но не от $\frac{\partial T}{\partial x_k}$. Таким образом, в очень узком слое среду можно считать несжимаемой, если относительный перепад температур ($\beta \delta T$) мал.

Упражнения

1. Найти изменение энтропии литра воды при ее нагревании от температуры замерзания до температуры кипения (принять теплоемкость $c = 1$ кал/г · град постоянной).

2. Показать (см. задачу 12.3), что для среды, уравнение состояния которой имеет вид $p = a(V)T + b(V)$, а теплоемкость $c_v = c_v(T)$, внутренняя энергия и энтропия имеют выражения

$$E = \int c_v(T) dT - \int b(V) dV; \quad S = \int \frac{c_v(T)}{T} dT + \int a(V) dV.$$

Найти E и S для газа, следующего уравнению Ван-дер-Ваальса.

3. Определить теплоемкость идеального газа ($p = \rho RT$) при политропном процессе $p \rho^{-n} = \text{const}$.

4. Показать, что термодинамическим потенциалом при независимых переменных p и T является энтропия, а при T и F — объем системы V .

5. Квадрат скорости распространения звуковых волн в сжимаемой среде равен $\partial p / \partial \rho$. Вычислить скорость распространения звуковых волн в идеальном газе при изотермическом и адиабатическом процессах. Когда звук распространяется медленнее?

§ 13. Основные законы движения сплошной среды и система основных дифференциальных уравнений движения

Соотношение (1.175), полученное в § 8, является исходным при постулировании основных законов движения сплошной среды.

По отношению к материальному объему, движущемуся как единое целое, можно теперь применить основные законы механики Ньютона с учетом возможности не только механических, но и другого типа (тепловых, электромагнитных и т.п.) воздействий. Все эти воздействия могут быть по своей природе либо объемными (F), либо поверхностными (P). Таким образом, основные законы в общем виде могут быть сформулированы следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \Phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{V(t)} F dV + \int_{S(t)} P dS. \quad (2.34)$$

Здесь Φ , F и P могут быть величинами любого (но одинакового!) ранга. Кроме того, предполагается, что когда объемные воздействия F могут быть представлены в виде поверхностных P (например, $F_i = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$, $\mathbf{F} = \nabla P$), то эти преобразования уже сделаны.

Конкретная формулировка законов движения сплошной среды, постулируемых на основе принятых принципов ньютоновской механики, зависит от того, какие значения принимают Φ , F и P .

Мы будем предполагать, что внутри материального объема однофазной среды нет источников массы, импульса и энергии, а среда не взаимодействует с электромагнитным полем. Рассмотрение случаев движения среды с усложненными свойствами отнесено в конец этого параграфа.

Закон сохранения массы¹

Масса произвольного материального объема сплошной среды не меняется с течением времени.

Полагая в (2.34) $\Phi = \rho(t, \mathbf{r})$, $F = P = 0$, получаем (см. (1.189))

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (2.35)$$

¹ Хотя эти несколько строк и включены в содержание § 9, они уместны здесь как иллюстрация общности выражения (2.34).

Закон изменения количества движения *Скорость изменения количества движения произвольного материального объема сплошной среды равна главному вектору всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой среде.*

Полагая в (2.34) $\Phi = \rho \mathbf{v}$ (количество движения единицы объема среды), $F = \rho \mathbf{f}$, $P = \mathbf{p}_n$, где $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r})$ — плотность массовых сил, $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(t, \mathbf{r})$ — напряжение на замкнутой поверхности S с внешней нормалью \mathbf{n} , ограничивающей объем V , получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{p}_n dS. \quad (2.36)$$

Закон изменения момента количества движения *Скорость изменения момента количества движения произвольного материального объема сплошной среды относительно неподвижного полюса равна главному моменту объемных и поверхностных сил относительно того же полюса, сложенному с главным моментом распределенных объемных и поверхностных пар сил.*

Полагая в (2.34) $\Phi = \rho \mathbf{l}(t, \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v})$, $F = \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \mathcal{M}$, $P = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n + \mathbf{m}_n$, где $\mathbf{l} = \mathbf{l}(t, \mathbf{r})$ — массовая плотность внутреннего момента количества движения среды, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{m}_n = \mathbf{m}_n(t, \mathbf{r})$ — плотности объемных и поверхностных пар сил (моментов), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho (\mathbf{l} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})) dV = \\ & = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho (\mathbf{l} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})) dV + \int_S \rho (\mathbf{l} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ & = \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \mathcal{M}) dV + \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n + \mathbf{m}_n) dS. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Для простейших сред с внутренним моментом количества движения обычно полагают $\mathbf{l} = I \boldsymbol{\Omega}_e$, где $\boldsymbol{\Omega}_e$ — средняя угловая скорость микрочастиц, I — феноменологический коэффициент, который далее принимается постоянным.

**Закон изменения
полной энергии**

Скорость изменения полной энергии произвольного материального объема сплошной среды равна мощности внешних сил и пар сил,

сложенной с притоком тепла извне через граничную поверхность.

Полагая в (2.34) $\Phi = \rho (v^2/2 + I\Omega_e^2/2 + e)$; $F = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{M}\Omega_e$; $P = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}_n \Omega_e - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}$, где $e = e(t, \mathbf{r})$ — внутренняя энергия единицы массы среды, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{r}) = -\lambda \nabla T$ — вектор плотности потока тепла, вычисляемый по закону Фурье (λ — коэффициент теплопроводности), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + I\Omega_e^2/2 + e \right) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{v^2}{2} + I\Omega_e^2/2 + e \right) dV + \int_S \rho \left(\frac{v^2}{2} + I\Omega_e^2/2 + e \right) \times \\ &\times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{M}\Omega_e) dV + \int_S (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}_n \Omega_e) dS + \int_S \lambda (\nabla T) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (2.38)$$

Заметим, что знак минус у слагаемого с вектором плотности потока тепла \mathbf{Q} , входящего в P , обусловлен тем, что \mathbf{n} — орт внешней по отношению к объему V нормали, а в формулировку закона входит приток тепла.

Равенства (2.35)–(2.38) полностью исчерпывают основные законы движения сплошной среды, сформулированные в наиболее общем виде; от подынтегральных функций требуется только их интегрируемость, так что внутри области V они могут быть разрывными.

**Дифференциальные
уравнения движения**

В связи с тем, что область V произвольна, из интегральных уравнений движения среды при дополнительных ограничениях могут

быть получены дифференциальные уравнения движения сплошной среды. Предполагая, что области интегрирования и функции удовлетворяют условиям теоремы Гаусса — Остроградского, и переходя от поверхностных интегралов к объемным, получим из выражений (2.35) – (2.38):

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0,$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \text{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \rho \mathbf{f} - \mathbf{p}_{;k}^k \right\} dV = 0,$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho (\mathbf{1} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})) + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} (\mathbf{1} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})) - \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathcal{M}) - \mathbf{m}_{;k}^k - \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{;k}^k - \mathbf{r}_{;k} \times \mathbf{p}^k \right\} dV = 0, \quad (2.39)$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{v^2}{2} + I \Omega_e^2 / 2 + e \right) + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + I \Omega_e^2 / 2 + e \right) - \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathcal{M} \Omega_e) - \mathbf{p}_{;k}^k \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v}_{;k} - \mathbf{m}_{;k}^k \cdot \boldsymbol{\Omega}_e - \mathbf{m}^k \cdot \boldsymbol{\Omega}_{e;k} - \operatorname{div} (\lambda \nabla T) \right\} dV = 0.$$

Здесь приведены выражения, справедливые в любой координатной системе. При переходе от поверхностных к объемным интегралам для \mathbf{p}_n было принято выражение (2.5), так что

$$\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^i n_i = \sum_{i,k=1}^n p^{ik} \mathbf{a}_k n_i, \quad \mathbf{p}_{;k}^k = p_{;k}^{ki} \mathbf{a}_i.$$

Что касается вектора поверхностной пары сил \mathbf{m}_n на площадке с нормалью \mathbf{n} , то, как и для \mathbf{p}_n , имеет место формула $\mathbf{m}_n = \mathbf{m}^k n_k$, где \mathbf{m}^k — пара сил на k -той координатной площадке (моментное напряжение).

Из формул (2.39) следует, что дивергенция тензора напряжений (вектор $\mathbf{p}_{;k}^k$) сводится к объемной силе. Проиллюстрируем это «превращение» поверхностных сил в объемные следующими простыми выкладками.

Вычислим равнодействующую \mathbf{F} всех *поверхностных* сил, действующих на какую-то частицу среды со стороны граничащих с нею частиц. Выберем эту частицу в виде параллелепипеда с ребрами δx_1 , δx_2 и δx_3 , направленными по соответствующим осям системы прямоугольных декартовых координат, начало которой помещено в одну из вершин параллелепипеда. Тогда, складывая векторно все поверхностные силы, действующие на гранях частицы с нормальями \mathbf{i}_k и \mathbf{i}_{-k} ($k = 1, 2, 3$), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \{ \mathbf{p}_1(\delta x_1, x_2, x_3) + \mathbf{p}_{-1}(0, x_2, x_3) \} \delta x_2 \delta x_3 + \{ \mathbf{p}_2(x_1, \delta x_2, x_3) + \mathbf{p}_{-2}(x_1, 0, x_3) \} \delta x_1 \delta x_3 + \\ & + \{ \mathbf{p}_3(x_1, x_2, \delta x_3) + \mathbf{p}_{-3}(x_1, x_2, 0) \} \delta x_1 \delta x_2. \end{aligned}$$

Заменяя здесь \mathbf{p}_{-k} на $(-\mathbf{p}_k)$, имеем с точностью до слагаемых более высокого порядка малости

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1} \right)_0 \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 + \left(\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2} \right)_0 \delta x_2 \delta x_1 \delta x_3 + \left(\frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3} \right)_0 \delta x_3 \delta x_1 \delta x_2 \equiv \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial x_k} dV,$$

где $dV \equiv \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ — объем частицы, а сумма $\partial \mathbf{p}_k / \partial x_k$ — значение дивергенции тензора напряжений в частице.

Таким образом, на единицу объема рассмотренной частицы со стороны окружающей среды действует сила $\partial \mathbf{p}_k / \partial x_k$ (в криволинейных координатах $\mathbf{p}_{,k}^k$). Эта сила является объемной и внешней по отношению к частице, но внутренней для среды в том смысле, что такие силы действуют внутри объема сплошной среды между отдельными ее внутренними частицами. Кроме того, в основе происхождения этих сил лежит поверхностное, «внутреннее» взаимодействие между частицами среды. Эти силы участвуют в изменении кинетической энергии сплошной среды (см. задачу 13.2).

Используя известные формулы для вычисления дивергенции от диады векторов (тензора второго ранга), получаем:

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \mathbf{v} \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v};$$

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} (\mathbf{l} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{l} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}) \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\mathbf{l} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Кроме того, отметим равенство ковариантной производной от радиуса-вектора базисному вектору системы координат, а именно $\mathbf{r}_{,k} = \mathbf{a}_k$, и выражение для полной производной по времени от функции $f(t, \mathbf{r})$ любого тензорного ранга в движущейся со скоростью \mathbf{v} среде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f.$$

Теперь, предполагая непрерывность подинтегральных функций и проводя несложные преобразования, в силу произвольности области интегрирования V , из уравнений (2.39) получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.40)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{p}_{,k}^k, \quad (2.41)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{a}_k \times \mathbf{p}^k + \rho \mathcal{M} + \mathbf{m}_{,k}^k, \quad (2.42)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{p}^k \cdot (\mathbf{v}_{,k} - \mathbf{a}_k \times \boldsymbol{\Omega}_e) + \mathbf{m}^k \boldsymbol{\Omega}_{e,k} + \operatorname{div}(\lambda \nabla T). \quad (2.43)$$

Заметим, что при получении (2.41) и (2.42) было использовано уравнение (2.40); окончательный вид (2.42) получен как следствие уравнения

(2.41). При выводе уравнения (2.43) изменения внутренней энергии использованы следствия уравнений (2.41) и (2.42) в виде

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_{;k}^k \cdot \mathbf{v},$$

$$\rho \boldsymbol{\Omega}_e \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \frac{I \Omega_e^2}{2} = \mathbf{p}^k (\boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{a}_k) + \rho \mathcal{M} \boldsymbol{\Omega}_e + \mathbf{m}_{;k}^k \cdot \boldsymbol{\Omega}_e.$$

Дифференциальные уравнения движения (2.41) – (2.43) можно получить иным способом, если учесть, что для $\Phi \equiv \rho \tilde{F}$, где ρ — плотность среды, из (1.175) следует (см. задачу 9.2)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \tilde{F} dV = \int_V \rho \frac{d\tilde{F}}{dt} dV,$$

если выполнено уравнение неразрывности (2.40), а также

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \tilde{F} dV = \int_V \left(\rho \frac{d\tilde{F}}{dt} + q\tilde{F} \right) dV,$$

если уравнение неразрывности имеет вид (1.186).

Тогда, заменяя интегралы слева в (2.36), (2.37) и (2.38) в соответствии с этими формулами, получаем при тех же предположениях дифференциальные уравнения движения: изменения количества движения, момента количества движения и полной энергии.

Сделаем несколько замечаний по поводу основной системы дифференциальных уравнений (2.40) – (2.43).

1. Симметрия тензора напряжений. Для большинства сред можно пренебречь величиной внутреннего кинетического момента \mathbf{l} и распределенными парами сил \mathcal{M} и \mathbf{m}_n . Исключение могут составить специальные жидкости, например, жидкие кристаллы и магнитные жидкости. Поэтому, как говорят, в классическом рассмотрении в (2.42) можно положить $\mathbf{l} = 0$, $\mathcal{M} = 0$, $\mathbf{m}_n = 0$. Тогда это уравнение сводится к равенству

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{p}^k \equiv \mathbf{a}_1 \times \mathbf{p}^1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{p}^2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{p}^3 = 0.$$

Разлагая векторы \mathbf{p}^k по основному базису и замечая, что $\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_i = \mathbf{a}^j V_*$, где V_* — объем параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, а индексы k, i, j составляют циклическую перестановку, отсюда получаем

$$\mathbf{a}_k \times \mathbf{p}^k = (\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_i) p^{ki} = \mathbf{a}^j V_* \mathbf{b}_j = 0,$$

где $\mathbf{b}_j = p^{ki} - p^{ik}$.

Теперь видно, что поскольку \mathbf{a}^j — векторы базиса, все компоненты вектора $\mathbf{a}_k \times \mathbf{p}^k$ должны быть равны нулю, т. е.

$$p^{12} = p^{21}; \quad p^{13} = p^{31}; \quad p^{23} = p^{32}. \quad (2.44)$$

Таким образом, в случае «классических» сплошных сред ($\mathbf{l} = \mathcal{M} = \mathbf{m}_n = 0$) тензор напряжений симметричен: $p^{ki} = p^{ik}$. При этом в тензоре напряжений остается только шесть независимых компонент.

2. Система (2.40)–(2.43) удовлетворяет принципу относительности Галилея, т. е. при переходе от одной инерциальной системы координат к другой в условиях инвариантности выражений для массы, температуры, внутренней энергии, внутреннего момента количества движения и силовых воздействий вид уравнений не меняется.

3. Система уравнений (2.40)–(2.43) незамкнутая. Действительно, в ней можно считать заданными функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{r})$, $\mathcal{M}(t, \mathbf{r})$, определяющие взаимодействие среды с внешними телами, а выражения внутренней энергии $e(\rho, T)$ и коэффициента теплопроводности $\lambda(\rho, T)$ считаются известными. Определяемыми неизвестными являются $\rho, T, \mathbf{v}, \mathbf{l}$ (или $\mathbf{\Omega}_e$), $\mathbf{m}_{ik}, \mathbf{p}_{ik}$. Таким образом, 8 скалярных уравнений служат для определения 26 скалярных неизвестных.

Поэтому для основной системы дифференциальных уравнений движения сплошной среды (или системы основных законов движения) необходимо предварительно провести ее замыкание: назначить или отыскать из соображений, не связанных напрямую с основными постулатами ньютоновской механики, недостающие 18 скалярных зависимостей между искомыми функциями. Это будет сделано в § 14 при классификации сплошных сред для каждого из принятых классов. В дальнейшем будут рассматриваться только классические среды (в пренебрежении внутренним моментом количества движения).

4. Наконец, отметим, что поскольку при выводе основной системы использовался эйлеров метод описания движения, то уравнения (2.40)–(2.43) относятся к нестационарным полям величин $\rho(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ и т. д. и слева стоят полные производные по времени от соответствующих величин,

$$\text{т. е. } \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + v^k \mathbf{v}_{;k} \text{ и т. д.}$$

С другой стороны, в интегральных законах (2.35)–(2.38) слева стоят материальные производные от объемных интегралов; поэтому в уравнении

ях (2.40)–(2.43) производные в левых частях могут быть прочтены как материальные производные от соответствующих величин: $d\rho(t, \mathbf{r})/dt$ — это скорость изменения плотности в частице среды, которая находится в точке (t, \mathbf{r}) , $d\mathbf{v}(t, \mathbf{r})/dt$ — ускорение этой частицы (в эйлеровом описании) и т. д. Как уже отмечалось (см. § 1), по виду материальные производные в эйлеровом описании совпадают с полными производными по времени от функций соответствующих полей.

Дивергентная форма уравнений

Рассмотрим соотношения, следующие из законов движения сплошной среды, которые приводят к так называемой *дивергентной форме уравнений* и которые могут быть использованы для вычисления производной по времени от интегралов по материальному объему среды, движущемуся произвольным образом.

Пусть в момент времени t геометрический объем V_w , движущийся со скоростью \mathbf{W} , совпадает с определенным материальным объемом V во всех его точках вплоть до границ. Тогда, определяя из формулы (2.34) для материального объема слагаемое

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV,$$

относящееся к локальному изменению величины Φ , и подставляя его в (1.175), получаем (в силу $V_w = V$)

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_S \Phi(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V F dV + \int_S P dS. \quad (2.45)$$

Здесь индексом w у V в левой части формулы подчеркнуто, что производная по времени вычисляется для геометрического объема среды, движущегося со скоростью \mathbf{W} . В случае $\mathbf{W} = \mathbf{v}$ отсюда получаем формулу для материального объема, т. е. (2.34). В случае $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ имеем формулу, относящуюся к неподвижному геометрическому объему, когда

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi(t, \mathbf{r}) dV = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV,$$

и, следовательно, (2.45) вновь приводит к (2.34).

Подчеркнем еще раз, что равенство (2.45) относится к тому моменту времени, в который области V и V_w совпадают во всех точках вплоть до их границ. В этот момент времени всюду Φ , F и P совпадают также, но на совпавшей границе ($S_w = S$) скорости различны. В силу этого левая часть формулы представляется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi dV = \int_{V_w(=V)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S_w(=S)} \Phi (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

так что (2.45) обращается, как и должно быть, в выражение (2.34), относящееся только к материалному объему V .

Подставляя в (2.45) вместо Φ последовательно ρ , $\rho \mathbf{v}$, $\rho(v^2/2 + e)$ и соответствующие значения для F и P , получаем:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho dV = - \int_S \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \mathbf{v} dV = - \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{p}_n dS, \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = & - \int_S \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS + \\ & + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS + \int_S \lambda (\nabla T) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Эти соотношения представляют собой скорость изменения основных механических характеристик среды в геометрической области V_w , движущейся произвольным образом, т. е. на границе, имеющей произвольную скорость \mathbf{w} . В дальнейшем они будут использованы для получения граничных условий на движущейся поверхности разрыва.

Предположим теперь, что в *материальном объеме* полем массовых сил можно пренебречь ($\mathbf{f} = 0$). Тогда, полагая в (2.46)–(2.48) $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, записывая левые части согласно (1.175) и переходя от поверхностных к объемным интегралам, получаем:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV, \quad (2.49)$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV = - \int_S \{ \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{p}_n \} dS = - \int_V \operatorname{div} \{ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}} \} dV, \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) dV = \\ & = - \int_S \left\{ \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho e \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} - \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} \right\} dS = \\ & = - \int_V \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \rho \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} - \lambda \nabla T \right\} dV. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Здесь через $\hat{\mathbf{p}}$ обозначен тензор напряжений ($\hat{\mathbf{p}} = p^{ik} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k = p_{ik} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^k$).

Из этих выражений, как и при получении (2.40)–(2.43), имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div} \rho \mathbf{v}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = - \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\pi}}, \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) = - \operatorname{div} \mathcal{N}. \quad (2.54)$$

Это и есть *дивергентная форма* основных уравнений движения. Здесь: $\hat{\boldsymbol{\pi}} = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}}$ — тензор плотности потока импульса среды, $\mathcal{N} = (v^2/2 + e) \rho \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} - \lambda \nabla T$ — вектор, получивший название *вектора плотности потока энергии Умова*¹ — *Пойнтинга*²; их компоненты в прямоугольной декартовой системе координат равны: $\pi_{ik} = \rho v_i v_k - p_{ik}$; $\mathcal{N}_i = (v^2/2 + e) \rho v_i - p_{ik} v_k - \lambda \partial T / \partial x_i$.

¹ Умов Николай Алексеевич (1846–1915) — русский физик. Окончил Московский университет (1867 г.), преподавал в Новороссийском (1871–1893 гг.) и Московском (1893–1911 гг.) университетах. В докторской диссертации (1874 г.) впервые ввел понятие векторного потока энергии, которое в 1884 г. Дж. Г. Пойнтингом было применено к электромагнитному полю.

² Пойнтинг (Poynting) Джон Генри (1852–1914) — английский физик. Окончил Лондонский и Кембриджский университеты. С 1880 г. — профессор Бирмингемского университета. Научные работы посвящены теории электромагнетизма. Ввел понятие потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга). Измерил плотность Земли, гравитационную постоянную.

В случае стационарного движения среды из (2.52)–(2.54) следует, что векторы $\rho \mathbf{v}$, \mathcal{N} и тензор $\hat{\pi}$ — соленоидальны, так что их потоки через любую замкнутую жидкую поверхность равны нулю.

Уравнения (2.52)–(2.54) можно, конечно, получить непосредственно из (2.40)–(2.43).

Уравнение (2.53) часто называют *уравнением импульсов*.

Уравнения движения в лагранжевых переменных

Пусть t, x_1, x_2, x_3 — эйлеровы и t, ξ^1, ξ^2, ξ^3 — лагранжевы переменные и пусть между ними есть взаимно однозначная зависимость, так что существуют функции $x_i = x_i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ и $\xi^i = \xi^i(t, x_1, x_2, x_3)$, причем x_i — декартовы прямоугольные, а ξ^i — обобщенные координаты сопутствующей системы.

Условие сохранения массы любого материального объема V , рассматриваемое в эйлеровых и лагранжевых переменных, имеет вид

$$\int_V \rho dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{V_0} \rho_0 dx_{01} dx_{02} dx_{03} = \int_{v_0} \rho_0 J_0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3,$$

где ρ — плотность среды в момент времени t , а ρ_0 — в начальный момент времени t_0 , когда V имел значение V_0 ; $J_0 = \partial(x_{01}, x_{02}, x_{03}) / \partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \equiv \det \|\partial x_{0i} / \partial \xi^i\|$; v_0 — область изменения лагранжевых переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

Переходя в первом выражении интеграла к лагранжевым переменным, получим:

$$\int_{v_0} \rho J d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \int_{v_0} \rho_0 J_0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3,$$

где $J = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \equiv \det \|\partial x_i / \partial \xi^i\|$.

Отсюда, в предположении непрерывности подинтегральных функций в силу произвольности v_0 получаем *уравнение неразрывности в лагранжевых переменных*:

$$\rho = \frac{\rho_0}{J}.$$

Здесь принято, что в начальный момент времени $t = t_0$ декартовы координаты совпадают с лагранжевыми, т. е. $x_{0i} = x_i(t_0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \xi^i$, так что $J_0 = 1$.

В лагранжевом описании ускорение материальной частицы равно $\partial^2 x_i / \partial t^2$, поэтому, записывая дифференциальное уравнение количества движения в виде

$$\rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$$

и рассматривая компоненты тензора напряжений как функции лагранжевых координат, получим

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi^s} \frac{J_{ks}}{J}.$$

Здесь $J_{ks} = \partial J / \partial x_{ks}$; $x_{ks} \equiv \partial x_k / \partial \xi^s$, так что J_{ks} — алгебраическое дополнение к члену x_{ks} в определителе J .

Эти соотношения следуют из известной формулы представления определителя

$$J = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} J_{ij} \equiv \sum_j x_{ij} J_{ij} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_j}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^3} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^j} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^k}.$$

Отсюда, поскольку $\frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} = \delta_{jk}$, следует выражение для элемента $\frac{\partial \xi^k}{\partial x_i}$ матрицы, обратной матрице определителя J ; оно получается умножением предыдущего выражения на $\frac{\partial \xi^k}{\partial x_i}$:

$$J \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} J_{ij} = \sum_j \delta_{jk} J_{ij} = J_{ik},$$

так что

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial x_i} = \frac{J_{ik}}{J}.$$

Кроме того, вычисления на основе другого представления J дают $\frac{\partial J_{ik}}{\partial \xi^k} = 0$, поскольку, например, $J_{i3} = \varepsilon_{isk} \frac{\partial x_s}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^2}$, и т. п.

Тогда, учитывая уравнение неразрывности $\rho_0 = \rho J$, получаем уравнение изменения количества движения в лагранжевых переменных

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - f_i \right) = J_{ks} \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi^s} = \frac{\partial}{\partial \xi^s} (J_{ks} p_{ik}).$$

Если умножить обе части этого уравнения на $\frac{\partial x_i}{\partial \xi^j}$ и просуммировать по « i », то в силу $J_{ks} = J \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k}$ получим еще одну форму уравнения изменения количества движения в лагранжевых переменных

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - f_i \right) \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} = J_{ks} \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi^s} \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} = J \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j}.$$

Для идеальной жидкости ($p_{ik} = -p\delta_{ik}$) равносильные уравнения изменения количества движения имеют вид:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - f_i \right) = -J_{is} \frac{\partial p}{\partial \xi^s},$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} - f_i \right) \frac{\partial x_i}{\partial \xi^s} = -J \frac{\partial p}{\partial \xi^s}.$$

Учитывая, что $v_i = \partial x_i / \partial t$, можно записать и уравнение энергии (на пример в форме (2.54)) в лагранжевых переменных.

Уравнения движения сплошной среды в неинерциальной системе координат

Пусть (K') — неинерциальная система декартовых координат, произвольным образом движущаяся относительно инерциальной (абсолютной) системы координат (K), в которой уравнения движения сплошной среды в эйлеровом представлении имеют вид (2.40)–(2.43).

Пусть $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(t)$ — скорость начала системы (K') относительно (K), а $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ — мгновенная угловая скорость ее вращения. Будем считать, что в момент времени t_0 обе системы совпадают, так что для любой частицы $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)$ и, следовательно, производные по координатам от полей в системах (K) и (K') также совпадают. Что касается производной по времени ($t = t'$), то, как известно, производная в системе (K) от вектора $\mathbf{a}(t)$ равна

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d'\mathbf{a}}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}),$$

где $d'\mathbf{a}/dt$ — производная в системе (K').

В силу этого, если \mathbf{v} — скорость абсолютного движения, $d\mathbf{v}/dt$ — ускорение абсолютного движения (относительно (K)), то по законам кинематики относительного движения имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c,$$

где \mathbf{v}_r , $d'\mathbf{v}_r/dt$ — скорость и ускорение частицы в системе (K'); кроме того,

$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ — скорость переносного движения,

$\mathbf{w}_e = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ — ускорение переносного движения,

$\mathbf{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)$ — кориолисово¹ ускорение.

В силу этих формул из (2.40)–(2.43) имеем, подставив в них выражения для \mathbf{v} и $d\mathbf{v}/dt$:

$$\frac{d'\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}_r = 0,$$

$$\rho \frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{p}_{;k}^k - \rho \mathbf{w}_e - \rho \mathbf{w}_c,$$

$$\rho \frac{d'e}{dt} = p_{ik}^{(r)} \frac{\partial v_{ri}}{\partial x'_k} + \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x'_k} \right),$$

$$e = e(\rho, T); \quad p_{ik}^{(r)} = p_{ik}(u_{lm}^{(r)}, v_{sp}^{(r)}) = p_{ik}.$$

¹ Кориолис (Coriolis) Гюстав Гаснар (1792–1843) — французский механик. Окончил Политехническую школу (1810 г.). Профессор (с 1816 г.) и директор (с 1833 г.) Политехнической школы. Основные исследования относятся к аналитической механике. Ввел понятие работы и коэффициент 1/2 в выражение для «живой силы»; рассмотрел (1835 г.) дополнительное ускорение (кориолисово ускорение) и кориолисову силу инерции в относительном движении.

Здесь индексом \mathcal{I} обозначены величины, вычисляемые в системе (K') , где полная производная по времени отмечена штрихом, так что

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial'}{\partial t} + \mathbf{v}_r \cdot \nabla.$$

Кроме того, использован тот факт, что в нерелятивистском приближении величины ρ , T , λ и e , равно как и силы \mathbf{f} и \mathbf{p}_n , одинаковы в обеих системах координат. Замыкающие соотношения, которые имеют вид (см. § 14) $P_{ik} = P_{ik}(u_{lm}, v_{sp})$, также идентичны в (K) и (K') .

Это следует из того, что компоненты тензоров u_{ik} и v_{ik} совпадают в этих системах координат: $u_{ik} = u_{ki}^{(r)}$ по определению вектора смещения и совпадения (K) и (K') в рассматриваемый момент времени, а равенство $v_{ik} = v_{ik}^{(r)}$ следует из элементарных выкладок:

$$\begin{aligned} v_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{ri}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{rk}}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_k \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{ri}}{\partial x'_k} + \frac{\partial v_{rk}}{\partial x'_i} \right) \equiv v_{ik}^{(r)}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_k &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{ilm} \omega_l x_m) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{klm} \omega_l x_m) = \omega_l (\varepsilon_{ilm} \delta_{mk} + \varepsilon_{klm} \delta_{mi}) = \omega_l (\varepsilon_{ilk} + \varepsilon_{kli}) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P_{ik} = P_{ik}(u_{lm}, v_{sp}) = P_{ik}(u_{lm}^{(r)}, v_{sp}^{(r)}) = P_{ik}^{(r)},$$

где $u_{ik}^{(r)}$, $v_{ik}^{(r)}$ строятся по компонентам векторов \mathbf{u}_r , \mathbf{v}_r точно так же, как u_{ik} , v_{ik} — по компонентам \mathbf{u} , \mathbf{v} .

Кроме того, учтено, что в силу симметричности P_{ik} имеем

$$P_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = P_{ik}^{(r)} v_{ik} = P_{ik}^{(r)} v_{ik}^{(r)} = P_{ik}^{(r)} \frac{\partial v_i^{(r)}}{\partial x'_k}.$$

Таким образом, в *неинерциальной системе координат иначе выглядит лишь уравнение изменения количества движения сплошной среды*, в котором появляются дополнительные массовые силы: сила инерции переносного движения, равная (на единицу объема)

$$-\rho \mathbf{w}_e = -\rho \left(\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right),$$

и кориолисова сила инерции, равная

$$-\rho \mathbf{w}_c = -2\rho (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r).$$

Полезно заметить, что вихрь в подвижной системе координат (K') отличается от вихря в системе (K) на вектор $2\boldsymbol{\omega}$, что проверяется непосредственным вычислением ($\text{rot } \mathbf{v} - \text{rot } \mathbf{v}_r = 2\boldsymbol{\omega}$).

Кроме того, стоит иметь в виду, что

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2}.$$

Это следует хотя бы из того, что

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega^2 r^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2.$$

Отсюда

$$\nabla (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = 2\omega^2 \mathbf{r} - 2(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} = -2(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})).$$

В случае равновесия среды в *неинерциальной системе* координат (K') имеем

$$0 = \rho \mathbf{f} + \mathbf{p}_{;k}^k - \rho \mathbf{w}_e - \rho \mathbf{w}_c.$$

Если же среда покоится в *абсолютной системе* (K), т. е. $\mathbf{v} \equiv 0$, и, следовательно, $\mathbf{v}_e = -\mathbf{v}_r$, $0 = \rho \mathbf{f} + \mathbf{p}_{;k}^k$, то среда будет двигаться в системе (K') согласно уравнению

$$\rho \frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} = -\rho \mathbf{w}_e - \rho \mathbf{w}_c$$

или

$$\frac{\partial' \mathbf{v}_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \times \text{rot } \mathbf{v}_e - \nabla \frac{v_e^2}{2} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_e) = \mathbf{w}_e.$$

Это тождество, относящееся только к \mathbf{v}_e и \mathbf{w}_e , может быть установлено независимо от значения \mathbf{v} и \mathbf{v}_r .

Складывая это уравнение с уравнением движения в системе (K'), получаем

$$\frac{\partial' \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}_e \times \text{rot } \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_r \times \text{rot } \mathbf{v}_r + \frac{1}{2} \nabla (v_r^2 - v_e^2) + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \mathbf{p}_{;k}^k.$$

Замечая, что

$$v_r^2 - v_e^2 = v^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e, \quad \text{rot } \mathbf{v}_e = \text{rot } (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{v}_r \times \text{rot } \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_r \times \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v}_r \times \text{rot } \mathbf{v}_e = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \times \text{rot } \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\omega}),$$

отсюда имеем

$$\frac{\partial' \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_e \right) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \mathbf{p}_{;k}^t \quad (\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})).$$

Это уравнение описывает движение среды в *неинерциальной (подвижной) системе координат*, но сформулировано при помощи абсолютной скорости \mathbf{V} и переносной \mathbf{v}_e . Оно носит имя Ламба¹.

Производная Олдройда и производная Яуманна

При анализе движения сплошной среды, проводимом в неподвижной (абсолютной) системе координат, иногда приходится использовать результаты наблюдений явления в собственной (относительной) системе.

При этом важно уметь отделить влияние переносного движения. Так, например, в нагруженном и находящемся в покое относительно собственной системы координат теле, компоненты напряжения, вычисляемые в неподвижной системе координат, будут, вообще говоря, меняться с течением времени. Но это изменение будет определяться целиком переносным движением, а не той нагрузкой, в зависимости от которой, скажем, хотя бы определить деформацию. Производные Олдройда и Яуманна позволяют разрешить подобные ситуации и выделить необходимую информацию. Они широко используются в реологических уравнениях, в частности, когда необходимо отразить зависимость напряжений от скорости изменения тензора скоростей деформации (см., например, [49, 50, 55, 88]).

Предложенная Олдройдом (1950 г.) производная по времени от тензорных характеристик среды устанавливает связь между материальными производными от компонент тензора, взятых в абсолютной и собственной системах координат. При этом в качестве собственной системы выбирается лагранжева (сопутствующая) система, а система наблюдателя служит в качестве абсолютной системы. Таким образом, различие между двумя материальными производными целиком определяется движением среды, а их вычисление связано либо с лагранжевым, либо с эйлеровым описанием движения.

Рассмотрим вектор \mathbf{A} , заданный контравариантными компонентами \tilde{A}^i в лагранжевой системе ξ^1, ξ^2, ξ^3 с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, так что

$$\mathbf{A}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \tilde{A}^i \mathbf{e}_i.$$

¹ Ламб (Lamb, sir Horace) Горацій (1849–1934) — выдающийся английский математик. Окончил Тринити Коледж (1872 г.), профессор математики Аделаидского университета (1875–1885 гг.), Манчестерского университета (1885–1920 гг.). Широко известен своими работами в области гидроаэромеханики («Гидродинамика» (1895 г.), 6-е издание в 1933 г., «Динамическая теория звука» (1910 г.) и др.), в теории упругости — по упругой деформации пластин, а также другими работами в области прикладной математики и механики.

Тогда производная (верхняя) Олдройда (обозначим ее DA/Dt) от вектора \mathbf{A} , выраженная через компоненты \hat{A}^i , по определению равна

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{d\hat{A}^i}{dt} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial t} \mathbf{e}_i. \quad (2.55)$$

Таким образом, в лагранжевой системе координат контравариантные компоненты вектора DA/Dt равны материальным производным от контравариантных компонент \hat{A}^i вектора \mathbf{A} . В любой другой системе криволинейных координат компоненты производной Олдройда DA/Dt определяются на основании общих формул.

Чтобы найти компоненты производной Олдройда в абсолютной системе координат, преобразуем правую часть (2.55) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - \hat{A}^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - \hat{A}^i \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} = \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - \hat{A}^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} = \\ &= \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - \hat{A}^i \hat{v}^j_k \mathbf{e}_k = \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - \hat{A}^k \hat{v}^j_k \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Здесь использовано определение базисного вектора $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^i$, независимость t и лагранжевых координат ξ^i , а также известное из тензорного анализа выражение для производной от вектора по криволинейной координате через ковариантную производную; $\hat{v}^i = \hat{v}^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — компоненты вектора \mathbf{v} в лагранжевой системе.

Пусть абсолютная (неподвижная) криволинейная система координат задана базисными векторами $\mathbf{a}_i(x^1, x^2, x^3)$; компоненты вектора \mathbf{A} в этой системе обозначим как $A^i(t, x^1, x^2, x^3)$.

Тогда, переходя в выражении (2.56) к абсолютной системе, получаем

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt} &= \frac{d}{dt} (A^i \mathbf{a}_i) - \hat{A}^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} = \frac{dA^i}{dt} \mathbf{a}_i - \hat{A}^i v^m_k \mathbf{a}_m \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} = \left(\frac{dA^i}{dt} - A^k v^i_k \right) \mathbf{a}_i = \\ &= \left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + v^k A^i_k - A^k v^i_k \right) \mathbf{a}_i. \end{aligned}$$

Здесь: $A^k = \hat{A}^i \partial x_k / \partial \xi^i$, $v^i = v^i(t, x^1, x^2, x^3)$ — контравариантные компоненты векторов в абсолютной системе координат; материальная производная dA^i/dt записана в виде суммы локального и конвективного слагаемых.

Отсюда для контравариантных компонент производной Олдройда в системе эйлеровых координат абсолютной системы имеем

$$\frac{DA}{Dt} \cdot \mathbf{a}_i \equiv \frac{D\hat{A}^i}{Dt} = \frac{dA^i}{dt} - A^k v^i_k = \frac{\partial A^i}{\partial t} + v^k A^i_k - A^k v^i_k. \quad (2.57)$$

Заметим, что здесь и слева, и справа стоят функции от t, x^1, x^2, x^3 , но производная Олдройда касается компонент \hat{A}^i в сопутствующей системе координат. Таким образом, можно записать для производной Олдройда от вектора \mathbf{A} :

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial \hat{A}^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial t} \mathbf{e}_i = \frac{D\hat{A}^i(t, x^1, x^2, x^3)}{Dt} \mathbf{a}_i = \left(\frac{dA^i}{dt} - A^k v_{,k}^i \right) \mathbf{a}_i. \quad (2.58)$$

Аналогичным образом определяется производная Олдройда для тензора любого ранга. Так, например, для тензора второго ранга $\hat{\mathbf{T}} = \hat{T}^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = T^{ik} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k$, получаем

$$\frac{D\hat{\mathbf{T}}}{Dt} = \frac{d\hat{T}^{ik}}{dt} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \frac{d}{dt} (\hat{T}^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) - \hat{T}^{ik} \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \mathbf{e}_k - \hat{T}^{ik} \mathbf{e}_i \frac{d\mathbf{e}_k}{dt} = \frac{d}{dt} (\hat{T}^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) - \hat{T}^{ik} \hat{v}_{,i}^l \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k - \hat{T}^{ik} \hat{v}_{,k}^l \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l.$$

Или, переходя в абсолютную систему координат, получаем в эйлеровом описании

$$\frac{D\hat{\mathbf{T}}}{Dt} = \left(\frac{dT^{ik}}{dt} - T^{lk} v_{,l}^i - T^{il} v_{,l}^k \right) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k = \left(\frac{\partial T^{ik}}{\partial t} + v^l T_{,l}^{ik} - T^{lk} v_{,l}^i - T^{il} v_{,l}^k \right) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k.$$

Итак, производная по времени от контравариантных компонент $\hat{T}^{ik} = \hat{T}^{ik}(t, x^1, x^2, x^3)$, взятых относительно осей сопутствующей системы и рассматриваемых как функции t, x^1, x^2, x^3 , выражается через компоненты $T^{ik} = T^{ik}(t, x^1, x^2, x^3)$ в абсолютной системе следующим образом:

$$\frac{D\hat{T}^{ik}}{Dt} = \frac{dT^{ik}}{dt} - T^{lk} v_{,l}^i - T^{il} v_{,l}^k. \quad (2.59)$$

Чтобы получить производную Олдройда, сформулированную относительно ковариантных компонент (нижняя производная), исходим из определения производной Олдройда от вектора \mathbf{A} , выраженной через его ковариантные компоненты \hat{A}_i , а именно

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{d\hat{A}_i}{dt} \mathbf{e}^i.$$

Отсюда имеем

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{d}{dt} (\hat{A}_i \mathbf{e}^i) - \hat{A}_i \frac{d\mathbf{e}^i}{dt}.$$

Но для векторов основного и взаимного базисов имеем $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_k^i$, так что

$$\frac{d\mathbf{e}^i}{dt} \cdot \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}^i \cdot \frac{d\mathbf{e}_k}{dt} = -\mathbf{e}^i \cdot (\hat{v}_{,k}^l \mathbf{e}_l) = -\hat{v}_{,k}^l g_l^i = -\hat{v}_{,k}^i.$$

Поэтому

$$\frac{d\mathbf{e}^i}{dt} = -\hat{v}_{,k}^i \mathbf{e}^k. \quad (2.60)$$

Подставляя это значение в выражение для производной, получаем

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{d}{dt} (\hat{A}_i \mathbf{e}^i) + \hat{A}_i \hat{v}_{,k}^i \mathbf{e}^k.$$

Переходя, подобно тому, как это было сделано в (2.56), к абсолютной системе координат, имеем

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \left(\frac{dA_i}{dt} + A_k v_{;i}^k \right) \mathbf{a}^i = \left(\frac{dA_i}{dt} + v^k A_{i;k} + A_k v_{;i}^k \right) \mathbf{a}^i,$$

так что

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \cdot \mathbf{a}_i \equiv \frac{D\hat{A}_i}{Dt} = \frac{dA_i}{dt} + A_k v_{;i}^k. \quad (2.61)$$

Для тензора второго ранга $\hat{\mathbf{T}}$, заданного своими ковариантными компонентами относительно осей лагранжевой системы, также имеем

$$\frac{D\hat{\mathbf{T}}}{Dt} = \frac{d}{dt} (T_{ik} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k) + \hat{T}_{ik} \hat{v}_{;i}^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k + \hat{T}_{il} \hat{v}_{;k}^l \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k.$$

Переходя к эйлерову описанию, получаем

$$\frac{D\hat{\mathbf{T}}}{Dt} = \left(\frac{dT_{ik}}{dt} + T_{ik} v_{;i}^j + T_{il} v_{;k}^j \right) \mathbf{a}^i \mathbf{a}^k = \left(\frac{dT_{ik}}{dt} + v^l T_{ik;l} + T_{ik} v_{;i}^l + T_{il} v_{;k}^l \right) \mathbf{a}^i \mathbf{a}^k.$$

Таким образом, для производной по времени от ковариантных компонент тензора $\hat{T}_{ik} = \hat{T}_{ik}(t, x^1, x^2, x^3)$ (нижняя производная Олдройда) получаем следующее выражение через компоненты $T_{ik}(t, x^1, x^2, x^3)$ и $v^i(t, x^1, x^2, x^3)$, взятые относительно осей абсолютной (неподвижной) системы координат:

$$\frac{D\hat{T}_{ik}}{Dt} = \frac{dT_{ik}}{dt} + T_{ik} v_{;i}^j + T_{il} v_{;k}^j. \quad (2.62)$$

Для смешанных компонент тензора имеем формулы:

$$\frac{D\hat{T}_{;k}^i}{Dt} = \frac{dT_{ik}^i}{dt} - T_{;k}^i v_{;i}^j + T_{;i}^j v_{;k}^j, \quad (2.63)$$

$$\frac{D\hat{T}_i^{;k}}{Dt} = \frac{dT_i^{;k}}{dt} + T_i^{;k} v_{;i}^j - T_i^{;l} v_{;j}^k. \quad (2.64)$$

Таким образом, для компонент тензора любого ранга имеем

$$\frac{D\hat{T}_{\dots}^{ik\dots m}}{Dt} = \frac{dT_{\dots}^{ik\dots m}}{dt} - T_{\dots}^{\alpha k\dots m} v_{;\alpha}^j - T_{\dots}^{i\alpha\dots m} v_{;\alpha}^k + T_{\dots}^{ik\dots m} v_{;i}^{\alpha} + T_{\dots}^{i k \dots \alpha} v_{;\alpha}^m + \dots$$

Рассмотрим производную Луманна.

Пусть теперь $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ — локальный базис криволинейных координат, вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ частицы среды, находящейся в начале этих координат. Вычислим производную по времени от компонент вектора, взятых в относительной системе, через переменные в абсолютной системе.

Имеем по определению для производной (верхней) Луманна:

$$\left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{d\hat{A}^i}{dt} \mathbf{e}_i = \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - \hat{A}^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}. \quad (2.64a)$$

Но теперь, используя известную формулу кинематики, имеем:

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i = \varepsilon_{\alpha\gamma r} \hat{\omega}^q (\mathbf{e}_i)^r \mathbf{e}^\alpha = \varepsilon_{\alpha\gamma r} \hat{\omega}^q \hat{g}_i^r \mathbf{e}^\alpha = \varepsilon_{\alpha qi} \hat{\omega}^q \mathbf{e}^\alpha.$$

Поскольку компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ выражаются через производные $\hat{v}_{k,j}$ следующим образом (см. 1.16):

$$\hat{\omega}^q = \frac{1}{2} \varepsilon^{qjk} \hat{v}_{k,j},$$

то имеем (см. 1.15)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha qi} \varepsilon^{qjk} \hat{v}_{k,j} \mathbf{e}^\alpha = \frac{1}{2} (\hat{g}_i^j \hat{g}_\alpha^k - \hat{g}_i^k \hat{g}_\alpha^j) \hat{v}_{k,j} \mathbf{e}^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} (\hat{v}_{\alpha j} - \hat{v}_{j\alpha}) \mathbf{e}^\alpha = \hat{\omega}_{\alpha i} \mathbf{e}^\alpha = \hat{\omega}_{\alpha i} \hat{g}^{\alpha k} \mathbf{e}_k = \hat{\omega}_i^k \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_{\text{Я}} = \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - \hat{A}^i \hat{\omega}_i^k \mathbf{e}_k = \frac{d}{dt} (\hat{A}^i \mathbf{e}_i) - A^k \hat{\omega}_i^k \mathbf{e}_i.$$

В абсолютной системе координат, учитывая, что

$$\begin{aligned} \hat{A}^i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} &= \hat{A}^i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) = \\ &= A^l (\mathbf{a}_s \times \mathbf{a}_l) \omega^s = A^l \varepsilon_{isl} \omega^s \mathbf{a}^i = A^l \varepsilon_{isl} \frac{1}{2} \varepsilon^{sjk} v_{k,j} \mathbf{a}^i, \quad \mathbf{a}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^i}, \end{aligned}$$

и, повторяя цепочку предыдущих выкладок (при вычислении $\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}$), получаем

из (2.64а)

$$\left(\frac{D\mathbf{A}}{Dt} \right)_{\text{Я}} = \left(\frac{dA^i}{dt} - A^k \omega_i^k \right) \mathbf{a}_i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + v^k A_{,k}^i - A^k \omega_i^k \right) \mathbf{a}_i.$$

Таким образом, для производной по времени от контравариантных компонент вектора A^i , взятых в относительной системе координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , вращающейся в каждой точке движущейся среды с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}$, имеем

$$\left(\frac{DA^i}{Dt} \right)_{\text{Я}} = \frac{dA^i}{dt} - A^k \omega_i^k,$$

где $A^i = A^i(t, x^1, x^2, x^3)$, $\omega_i^k = g^{\alpha k} \omega_{\alpha i} = \frac{1}{2} g^{\alpha k} (v_{\alpha,i} - v_{i,\alpha})$.

Это выражение носит название производной (верхней) Яуманна от вектора \mathbf{A} .
Для тензора второго ранга производная Яуманна имеет вид

$$\left(\frac{D\hat{T}}{Dt} \right)_{\mathfrak{A}} = \frac{d\hat{T}^{ik}}{dt} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \frac{d}{dt} (\hat{T}^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) - \hat{T}^{lk} \hat{\omega}_{,l}^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k - \hat{T}^{il} \hat{\omega}_{,l}^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k.$$

Переходя к абсолютной системе координат, получаем

$$\left(\frac{D\hat{T}}{Dt} \right)_{\mathfrak{A}} = \left(\frac{d\hat{T}^{ik}}{dt} - T^{lk} \omega_{,l}^i - T^{il} \omega_{,l}^k \right) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k.$$

Для соответствующих компонент имеем выражение верхней производной Яуманна в следующем виде:

$$\left(\frac{D\hat{T}^{ik}}{Dt} \right)_{\mathfrak{A}} = \frac{dT^{ik}}{dt} - T^{il} \omega_{,l}^k - T^{lk} \omega_{,l}^i. \quad (2.65)$$

Следует отметить выражения для производных Олдройда от метрического тензора, заданного своими компонентами $\hat{g}^{ik} = \hat{g}^{ik}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ в лагранжевой системе координат. Используя формулы (2.59) и (2.62) и замечая, что $\frac{d}{dt} g^{ik} = \frac{d}{dt} g_{ik} = 0$ ($g^{ik} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^k$; $g_{ik} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_k$), получаем

$$\frac{D\hat{g}^{ik}}{Dt} = - (g^{lk} v_{,l}^i + g^{il} v_{,l}^k) = -2v^{ik},$$

$$\frac{D\hat{g}_{ik}}{Dt} = (g_{lk} v_{,l}^i + g_{il} v_{,l}^k) = v_{k;i} + v_{i;k} = 2v_{ik}. \quad (2.66)$$

Заметим также, что в декартовых координатах с абсолютным базисом $\hat{\mathbf{i}}_l$ ($\mathbf{a}^l = \mathbf{a}_l = \hat{\mathbf{i}}_l$) две производных Олдройда не совпадают. Однако их полусумма равна производной Яуманна. Действительно, из (2.59) и (2.62) в декартовых координатах абсолютной системы имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{D\hat{T}_{ik}}{Dt} + \frac{D\hat{T}^{ik}}{Dt} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{dT_{ik}}{dt} - T_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_l} - T_{il} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{dT_{ik}}{dt} + T_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} + T_{il} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) = \\ & = \frac{dT_{ik}}{dt} - T_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right) - T_{il} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{dT_{ik}}{dt} - T_{ik}\omega_{il} - T_{il}\omega_{ik}.$$

Производные Яуманна формально можно получить из выражения для производных Олдройда, полагая

$$v_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i;k} + v_{k;i}) = 0.$$

Тогда

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i;k} - v_{k;i}) = v_{i;k}.$$

Подставляя значения $v_{i;k}$, например в (2.59), получаем (2.65), а из (2.62) имеем

$$\left(\frac{D\tilde{T}_{ik}}{Dt} \right)_Я = \frac{dT_{ik}}{dt} + T_{ik}\omega_{i' }^l + T_{il}\omega_{l' }^k.$$

Аналогично можно выписать и соответствующие производные Яуманна, пользуясь (2.63) и (2.64).

Уравнения баланса В механике сплошной среды очень часто предпочитают пользоваться так называемым *уравнением баланса*, интегральным и дифференциальным.

Производную по времени от экстенсивной величины $A_\Phi = \int_V \Phi dV$ с объемной плотностью Φ , основываясь на физических соображениях, представляют в виде двух слагаемых: 1) *потока величины* A_Φ через поверхность S , ограничивающую объем V ; 2) изменения величины A_Φ за счет существования во внутренних точках объема *источников или стоков* величины A_Φ . В соответствии с этим

$$\frac{dA_\Phi}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi dV = - \int_S \Phi \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_\Phi - \mathbf{w}) dS + \int_V \sigma_\Phi dV. \quad (2.67)$$

Здесь \mathbf{w} — скорость элемента поверхности S , ограничивающей материальный объем V , совпадающий в рассматриваемый момент времени с геометрическим V_w ; \mathbf{v}_Φ — скорость, определяющая перенос в среде величины Φ , например вещества определенного сорта

в многокомпонентной среде за счет разности концентраций и т. п. ($\mathbf{V}_\Phi = \mathbf{V}$, если рассматривается поток массы, т. е. $\Phi = \rho$); σ_Φ — объемная плотность источников (стоков, если $\sigma_\Phi < 0$) величины A_Φ внутри V_w .

Соотношение (2.67), как и (2.45), относится к моменту времени, в который геометрический и материальный объемы совпадают ($V_w = V$) во всех точках вплоть до границ ($S_w = S$). Для производной по t в этом случае имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi dV = \int_{V_w} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{S_w} \Phi (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

так что (2.67) обращается в соотношение

$$\int_{V_w (=V)} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV = - \int_{S_w (=S)} \Phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Phi dS + \int_{V_w (=V)} \sigma_\Phi dV. \quad (2.68)$$

Это соотношение, таким образом, относится к материальному объему.

Выражение (2.67) называется *интегральным уравнением баланса величины A_Φ* . Иногда его записывают в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi dV = - \int_S \mathbf{J}_\Phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \sigma_\Phi dV, \quad (2.69)$$

где $\mathbf{J}_\Phi \equiv \Phi (\mathbf{v}_\Phi - \mathbf{w})$ — плотность потока величины Φ (по определению).

Для материального объема интегральное уравнение баланса имеет форму (2.68).

Это уравнение по сути является одновременным определением трех входящих в него слагаемых и их взаимосвязи. Если заданы (известны) два из них, то можно определить третье. Как будет показано дальше, уравнение баланса может служить полезной интерпретацией основных законов движения сплошной среды.

Интегральное уравнение баланса (2.68) для материального объема можно переписать в виде

$$\int_V \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \sigma_\Phi \right) dV = - \int_S \Phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_\Phi dS.$$

Применяя к правой части формулу Гаусса — Остроградского и предполагая непрерывность подынтегральных величин $\partial\Phi/\partial t$, σ_Φ и $\text{div } \Phi \mathbf{v}_\Phi$, получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \text{div } \Phi \mathbf{v}_\Phi = \sigma_\Phi. \quad (2.70)$$

Это дифференциальное уравнение называют *локальным уравнением баланса*. Вспоминая определение полной (материальной в эйлеровом описании) производной по времени

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\Phi$$

и расписывая $\text{div } \Phi \mathbf{v}_\Phi = \Phi \text{div } \mathbf{v}_\Phi + \mathbf{v}_\Phi \cdot \nabla\Phi$, из (2.70) получаем так называемое *материальное уравнение баланса*

$$\frac{d\Phi}{dt} + (\mathbf{v}_\Phi - \mathbf{v}) \cdot \nabla\Phi + \Phi \text{div } \mathbf{v}_\Phi = \sigma_\Phi. \quad (2.71)$$

Заметим, что для тензора $\hat{\Phi}$ с компонентами $\Phi_{ikl\dots}$ ($\hat{\Phi} = \Phi_{ikl\dots} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^k \mathbf{a}^l \dots$) уравнения (2.70) и (2.71) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{ikl\dots}}{\partial t} + (v_\Phi^\alpha \Phi_{ikl\dots})_{;\alpha} &= (\sigma_\Phi)_{ikl\dots}, \\ \frac{d\Phi_{ikl\dots}}{dt} + (v_\Phi^\alpha - v^\alpha) \Phi_{ikl\dots;\alpha} + \Phi_{ikl\dots} v_{\Phi;\alpha}^\alpha &= (\sigma_\Phi)_{ikl\dots}. \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнения баланса массы, импульса и энергии.

1. *Уравнения баланса массы* получаем из (2.69), (2.70) и (2.71), полагая в них $\Phi = \rho$ и, поскольку скорость переноса массы равна скорости движения среды, $\mathbf{v}_\Phi = \mathbf{v}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho dV &= - \int_S \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \sigma_\rho dV, \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} &= \sigma_\rho, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \mathbf{v} &= \sigma_\rho. \end{aligned}$$

Первые два уравнения совпадают с (2.46) и (2.52) при $\sigma_p = 0$. (В конце этого параграфа рассмотрен случай сплошной среды переменной массы ($\sigma_p \neq 0$)). Третье уравнение совпадает со вторым, если учесть выражение для полной производной

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho.$$

2. Уравнения баланса импульса (количества движения) в трех формах получаем для $\Phi = \rho\mathbf{v}$. Положив в (2.69) $\mathbf{v}_\Phi = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p$, выражения для \mathbf{v}_p и для $\sigma_{\rho\mathbf{v}}$ можно получить из сравнения соотношения

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho\mathbf{v}dV = - \int_S \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}dS + \int_V \sigma_{\rho\mathbf{v}}dV + \int_S \rho(\mathbf{v}\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{n}dS, \quad (2.72)$$

с уравнением изменения количества движения сплошной среды (2.47).

Тогда

$$\sigma_{\rho\mathbf{v}} = \rho\mathbf{f}, \quad \rho(\mathbf{v}\mathbf{v}_p) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}_n, \quad (p_{ni} = \rho v_k n^k v_{pi}). \quad (2.73)$$

Плотность источника импульса $\sigma_{\rho\mathbf{v}}$ относится к «внешнему» источнику, ибо она обусловлена существованием внешних тел и их полей, оказывающих воздействие на движение среды в V_w . Можно сказать, что именно в результате этого воздействия в каждой точке осуществляется приток импульса к частицам движущейся среды с объемной интенсивностью $\sigma_{\rho\mathbf{v}}$. Что касается второго поверхностного интеграла в (2.72), то его можно интерпретировать как часть потока импульса, переносимого через поверхность S в результате непосредственного контакта с внешними телами. Действительно, вычисляя $\mathbf{J}_\Phi = \hat{\mathbf{J}}_{\rho\mathbf{v}}$ согласно (2.69) и учитывая (2.73), получим

$$\hat{\mathbf{J}}_{\rho\mathbf{v}} = \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \rho\mathbf{v}\mathbf{v}_p = \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \hat{\mathbf{p}}.$$

В данном случае плотность потока импульса $\hat{\mathbf{J}}_{\rho\mathbf{v}}$ является тензором второго ранга. Внутреннее произведение тензора $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}_p$ на орт нормали к площадке равно напряжению \mathbf{p}_n на этой площадке. Следовательно, этот тензор равен тензору напряжений $\hat{\mathbf{p}}$. Можно, таким образом, говорить, что \mathbf{v}_p — это скорость, определяющая тот перенос импульса $\rho\mathbf{v}$ через поверхность контакта, который и приводит к возникновению поверхностных сил.

В рассмотренной ситуации возникает специфическая интерпретация (с точки зрения «потоков» и «источников») массовых и поверхностных сил в механике сплошных сред.

Таким образом, из (2.72), (2.70) и (2.71) получаем уравнения баланса импульса (интегральное, локальное и материальное):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho\mathbf{v}dV = - \int_S \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}dS + \int_S \mathbf{p}_n dS + \int_V \rho\mathbf{f}dV,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \text{div}(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}}) = \rho\mathbf{f},$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \sigma_p \mathbf{v} = \rho\mathbf{f} + \text{div} \hat{\mathbf{p}}.$$

Первые два уравнения совпадают с (2.47) и (2.53), а третье получается из второго уравнения и уравнения неразрывности (уравнения баланса массы), записанного для $\sigma_p \neq 0$.

3. Уравнение баланса энергии получается в случае $\Phi = \rho v^2/2 + \rho e$. Подставляя это значение в общую формулу (2.67) и принимая $\mathbf{V}_\Phi = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p$, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = - \int_S \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \sigma_\Phi dV + \int_S \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.74)$$

Преобразуем последний интеграл справа:

$$\int_S \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \rho v^2 (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S \rho \frac{v^2}{2} (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) dS + \int_S \rho e (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (2.75)$$

В силу (2.73) имеем

$$\int_S \rho v^2 (\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS. \quad (2.76)$$

Примем, что поток тепла определяется лишь переносом внутренней энергии со скоростью \mathbf{v}_p , связанной со скоростью переноса импульса, так что

$$\rho e \mathbf{v}_p = \lambda \nabla T.$$

В этом случае из соответствия (2.75) и (2.48) получаем выражение для источника полной энергии

$$\sigma_\Phi = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v}_p.$$

В случае потенциальных массовых сил ($\rho \mathbf{f} = \nabla \Pi$) и стационарности потенциала ($\partial \Pi / \partial t = 0$) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_\Phi &= \mathbf{v} \cdot \nabla \Pi + \operatorname{div} \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v}_p = \operatorname{div} \left(\mathbf{v} \Pi + \frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v}_p \right) - \Pi \operatorname{div} \mathbf{v} = \\ &= \operatorname{div} \left\{ \left(\frac{\rho v^2}{2} + \Pi \right) \mathbf{v}_p + \Pi \mathbf{v} \right\} + \left(\frac{d\rho}{dt} - \sigma_\rho \right) \frac{\Pi}{\rho}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{V}_Φ — скорость переноса полной энергии.

При таком разбиении правой части (2.75) эта формула принимает вид (2.48), так что из нее, а также из (2.70) и (2.71) получаем уравнения баланса полной энергии ($\sigma_p = 0$):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = - \int_S \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS + \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) + \operatorname{div} \left\{ \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} - \lambda \nabla T \right\} = 0,$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) = \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + \operatorname{div} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v}).$$

Последнее уравнение можно с помощью материального дифференциального уравнения баланса импульса, умноженного скалярно на \mathbf{V} , преобразовать в материальное уравнение баланса внутренней энергии, а именно

$$\rho \frac{de}{dt} = \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + p_k^i v_i^k.$$

Дальнейшие сведения об уравнениях баланса можно найти в [16].

О законе изменения энтропии

Принимая принцип локального равновесия и первое начало термодинамики

$$TdS = dE + \delta W,$$

где δW — элементарная работа в равновесном процессе, вместо закона изменения энергии можно постулировать закон изменения энтропии.

Этот закон может быть сформулирован следующим образом:

Скорость изменения энтропии произвольного материального объема сплошной среды равна общему количеству удельного (на один градус) необратимого тепла, выделяемого в каждой частице среды за счет необратимой мощности внутренних поверхностных сил (δQ_p) и процессов теплопроводности (δQ_T).

Заметим, что этот закон постулируется независимо от закона изменения полной энергии и не только независимо, но и вместо него. Их связывает принцип локального равновесия. В полной системе уравнений, определяющих движение сплошной среды, он заменяет закон (2.48) (при $\mathbf{w} = 0$), а термодинамическое уравнение состояния $e = e(\rho, T)$ должно быть заменено уравнением $s = s(\rho, T)$.

В уравнении (2.43) первое слагаемое в правой части является удельной мощностью всех поверхностных сил; из нее только необратимая часть идет на выделяемое в единице объема необратимое тепло, так что необратимая мощность поверхностных сил в частице равна $\mathbf{p}^{k^i} \cdot \mathbf{v}_{;k} dV$, а, соответственно, удельное *необратимое тепло* равно

$$\delta Q_p = \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} \right) dV,$$

где $\mathbf{p}^{k'}$ — часть вектора напряжений, которая не участвует в обратимой работе $\delta W (p_i^{k'} = p_i^k + g_i^k p; \mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} \equiv p^{ki} v_{i;k})$.

Каждая частица среды, занимающая объем ΔV , соприкасаясь с соседними частицами, через свою поверхность ΔS получает от них

тепло $\int_{\Delta S} \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \lambda \nabla T dV$. Следовательно,

$$\delta Q_T = \frac{1}{T} (\operatorname{div} \lambda \nabla T) dV.$$

Тогда, в соответствии с вышеприведенной формулировкой закона изменения энтропии сплошной среды, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \int_V \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} + \operatorname{div} \lambda \nabla T \right) dV. \quad (2.77)$$

Отсюда (при $\sigma_\rho = 0$) получаем дифференциальное уравнение изменения энтропии

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} + \operatorname{div} (\lambda \nabla T) \right). \quad (2.78)$$

Его можно записать в виде

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} + \operatorname{div} (\lambda \nabla T). \quad (2.78a)$$

Это уравнение называют [34] *общим уравнением переноса тепла*.

В случае вычисления энтропии в геометрическом объеме, движущемся со скоростью $\mathbf{W}(t, \mathbf{r})$, из (2.45) можно получить

$$\frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho s dV = - \int_{S_w} \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} + \operatorname{div} \lambda \nabla T \right) dV,$$

где S_w — поверхность, ограничивающая объем V_w .

Уравнение (2.77) не имеет соответствующей дивергентной формы, подобной (2.51). В то же время ему можно придать форму уравнения баланса, выделив объемную плотность источника энтропии. Записывая предыдущее выражение в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho s dV = - \int_{S_w} \left(\rho s (\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \frac{\lambda \nabla T}{T} \right) \cdot \mathbf{n} dS + \\ + \int_V \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T} \right) dV \end{aligned} \quad (2.79)$$

и сравнивая с общим уравнением баланса (2.69), получаем

$$\mathbf{J}_{\rho s} = \rho s (\mathbf{v} - \mathbf{w}) - \frac{\lambda \nabla T}{T}$$

— плотность потока энтропии,

$$\sigma_{\rho s} = \frac{\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k}}{T} + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T^2}$$

— объемная мощность источника энтропии, или, как ее называют, *плотность производства энтропии*.

При этом скорость переноса энтропии равна (см. (2.70) и предыдущее выражение):

$$\mathbf{v}_{\rho s} = \mathbf{v} - \frac{\lambda}{\rho s T} \nabla T.$$

Можно написать локальное и материальное уравнения изменения энтропии ρs , используя (2.70) и (2.71):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \operatorname{div} \left(\rho s \mathbf{v} - \frac{\lambda}{T} \nabla T \right) = \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} \right) + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T^2}, \\ \frac{d}{dt} (\rho s) - \frac{\lambda \nabla T}{\rho s T} \cdot \nabla \rho s + \rho s \operatorname{div} \left(\mathbf{v} - \frac{\lambda}{\rho s T} \nabla T \right) = \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{;k} \right) + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T^2}. \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (2.78), определяющее скорость изменения удельной энтропии в каждой частице, эквивалентно не только последним двум уравнениям, но — и это более примечательно — эквивалентно уравнению энергии (2.43). Иными словами, при принятии принципа локального равновесия из (2.78) можно получить (2.43) и наоборот. Действительно, согласно этому принципу в каждой частице среды процессы

равновесные, так что справедливо основное уравнение равновесной термодинамики для удельных величин:

$$Tds = de + \delta w,$$

где δw — удельная обратимая работа, производимая над окружающими частицами, а удельная обратимая мощность равна $(\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k'}) \cdot \mathbf{v}_{,k} / \rho$.

Тогда

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{(\mathbf{p}^k - \mathbf{p}^{k'})}{\rho} \cdot \mathbf{v}_{,k} = \frac{de}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Выражая отсюда de/dt и подставляя в (2.43), получаем (2.78).

Закон изменения полной энергии и закон переноса тепла. Закон изменения кинетической энергии (закон «живых сил»)

Из общего уравнения переноса тепла, проинтегрировав его по материальному объему V , получаем интегральный закон переноса тепла:

$$\int_V \rho T \frac{ds}{dt} dV = \int_V \mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{,k} dV + \int_V \operatorname{div} (\lambda \nabla T) dV. \quad (2.79a)$$

Название этого закона, как и уравнения (2.78a), свя-

зано с физической интерпретацией его слагаемых. Поскольку $T \frac{ds}{dt}$ есть количество тепла, получаемого единицей массы среды в единицу времени, то из (2.79a) следует, что тепло, получаемое в единицу времени движущимся материальным объемом, равно энергии, диссипируемой внутри объема в виде тепла благодаря вязкости (первый интеграл справа), плюс тепло, приносимое в рассматриваемый объем посредством теплопроводности (второй интеграл в (2.79a)).

Закон переноса тепла (2.79a), установленный независимо от закона изменения полной энергии (2.78), можно получить из этого закона только при принятии принципа локального равновесия и выполнении закона изменения кинетической энергии, иногда называемого «законом живых сил». Покажем это.

Закон изменения полной энергии материального объема V (см. (2.38)) можно записать в следующем виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = - \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \operatorname{div} (\lambda \nabla T) dV + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS. \quad (2.79b)$$

Заметим, что область V может содержать разрывы, через которые нет протекания вещества ($U_n = 0$, см. (1.175a) и § 15). Используя представление $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n} + \mathbf{p}^{k'} n_k$ и уравнение неразрывности, получаем

$$\int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS = - \int_S p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v} n_k dS = - \int_V \operatorname{div} (p \mathbf{v}) dV + \int_V \left(\mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v} \right)_{,k} dV =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_V \nabla p \cdot \mathbf{v} dV - \int_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV + \int_V \left(\mathbf{p}_{,k}^{k'} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{,k} \right) dV = \\
 &= \int_V \mathbf{p}_{,k}^k \cdot \mathbf{v} dV - \int_V \rho p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) dV + \int_V \mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{,k} dV.
 \end{aligned}$$

Если считать, что выполняется принцип локального равновесия в каждой частице, то

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV + \int_V \rho p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) dV = \int_V \left\{ \frac{de}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\} dV = \int_V \rho T \frac{ds}{dt} dV. \quad (2.79\text{в})$$

Пусть справедлив закон изменения кинетической энергии (закон «живых сил»), который можно сформулировать следующим образом:

Скорость изменения кинетической энергии произвольного материального объема среды равна мощности всех внешних и внутренних сил, т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \mathbf{p}_{,k}^k \cdot \mathbf{v} dV.$$

Или (см. также задачу 13.2)

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS - \int_V \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v}_{,k} dV. \quad (2.79\text{г})$$

Здесь первый интеграл справа представляет собой мощность внешних объемных сил, второй — мощность внешних поверхностных сил, приложенных к границе S области V , а третий — мощность внутренних (для области V) сил, как следствие существования между внутренними частицами сил поверхностного взаимодействия — давления и сил трения.

Теперь из (2.79б), учитывая (2.79в) и (2.79г), получаем закон переноса тепла (2.79а).

Заметим, что если обозначить скорость изменения тепла, получаемого единицей массы среды через dQ/dt , т. е. $T \frac{dS}{dt} \equiv \frac{dQ}{dt}$, то закон (2.79а) можно формально записать в виде

$$\int_V \rho \frac{dQ}{dt} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho Q dV = \int_V \mathbf{p}^{k'} \cdot \mathbf{v}_{,k} dV + \int_V \operatorname{div} (\lambda \nabla T) dV.$$

Уравнения движения сплошной среды с усложненными свойствами

Ограничимся рассмотрением трех случаев усложненных свойств сплошной среды.

1. Многофазная сплошная среда. Многофазная среда — это модель сплошной среды, при помощи которой изу-

чаются смеси различных веществ; при этом под фазами понимаются составляющие смеси. При более детальном изучении многофазных сред считают (см. [55]), что каждая фаза состоит из нескольких компонент различной плотности, способных вступать в химические реакции и (или) изменять структуру фазы (например коагуляция твердых частиц, заиливание пор и т. п.).

В качестве примеров широко распространенных смесей можно привести всевозможные аэрозоли (дым, туман), эмульсии, кровь, другие биологические жидкости и ткани (хрящ, кость), насыщенные газом и жидкостью грунты, влажный пар, металлизированное топливо, композитные материалы, фильтрующуюся среду вместе с веществом фильтра.

Наиболее изучены так называемые *дисперсные среды*, состоящие из двух фаз. Различают следующие двухфазные среды: суспензии (смесь жидкой и твердой фазы), эмульсии (смесь жидкости с капельками другой жидкости), газозвеси или аэрозоли (смесь газа с твердыми частицами или жидкими каплями), пузырьковые среды (смесь жидкости с пузырьками газа или пара). Часто все двухфазные среды называют суспензиями.

Модель многофазной среды применима при следующем главном допущении:

— *размеры включений и неоднородностей в смеси значительно больше характерных кинетических размеров (расстояний между молекулами, размеров кристаллической решетки, длины свободного пробега молекул и т. п.), но значительно меньше размера макродифференциала.*

Это позволяет, во-первых, на основе идентификации включений (сферы, вытянутые структуры, волокна и т. п.) и данных о поведении их в среде (например, из задачи об обтекании сферы и др.) провести осреднение микроданных (сила сопротивления сферы или вытянутого тела в потоке и т. п.) по фазе или компоненте, а результат осреднения использовать для замыкания основной системы уравнений движения многофазной среды.

Во-вторых, — и, пожалуй, это основное, — ввести понятия макродифференциала dV^α фазы α и макродифференциала $dV^{\alpha\beta}$ компоненты β в фазе α на тех же основаниях, что и макродифференциал всей среды dV (см. «Введение»). Суммируя по всем компонентам и фазам, имеем

$$\sum_{\beta} dV^{\alpha\beta} = dV^{\alpha}, \quad \sum_{\alpha} \sum_{\beta} dV^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} dV^{\alpha} = dV.$$

При этом считается, что фаз и компонент не может быть очень много, так как линейные размеры $dV^{\alpha\beta}$, dV^{α} и dV должны быть одного порядка.

Теперь, аналогично тому, как была введена функция плотности среды $\rho(t, \mathbf{r})$ (см. «Введение»), можно ввести плотности компоненты β в фазе α и плотность самой фазы α (их иногда называют «размазанные» плотности):

$$\rho^{\alpha\beta} = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta M^{\alpha\beta}}{\Delta V}, \quad \rho^{\alpha} = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta M^{\alpha}}{\Delta V},$$

где $\Delta M^{\alpha\beta}$ — масса компоненты β в объеме ΔV , а ΔM^{α} — масса фазы α в объеме ΔV .

При этом

$$\sum_{\beta} \rho^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha}, \quad \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \rho^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} = \rho.$$

Заметим, что «размазанные» плотности отличаются от истинных плотностей —

фазы $\{\rho^{\alpha}\} = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \Delta M^{\alpha} / \Delta V$ и компоненты в фазе $\{\rho^{\alpha\beta}\} = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \Delta M^{\alpha\beta} / \Delta V$. Если ввести

понятия относительных объемов $\overset{\alpha}{H} = \Delta V / \Delta V$, $\overset{\alpha\beta}{H} = \Delta V / \Delta V$, то тогда $\{\overset{\alpha}{\rho}\} \overset{\alpha}{H} = \overset{\alpha}{\rho}$, $\{\overset{\alpha\beta}{\rho}\} \overset{\alpha\beta}{H} = \overset{\alpha\beta}{\rho}$ (без суммирования по α и β !).

Определяя подобным образом и другие «размазанные» феноменологические характеристики многофазной среды ($\overset{\alpha\beta}{\mathbf{v}}(t, \mathbf{r})$, $\overset{\alpha\beta}{\dot{\mathbf{v}}}(t, \mathbf{r})$ и т. д.) и считая их непрерывными и дифференцируемыми функциями по пространству и времени, можно сформулировать основные уравнения движения многофазной среды (см. [55]).

1. Уравнение неразрывности — для компоненты β в фазе α :

$$\frac{\partial \overset{\alpha\beta}{\rho}}{\partial t} + \text{div} \left(\overset{\alpha\beta}{\rho} \overset{\alpha\beta}{\mathbf{v}} \right) = \overset{\alpha\beta}{Q} + \overset{\beta}{M} \sum_{\gamma} \overset{\alpha}{J}_{\gamma} \overset{\alpha\beta}{\nu}_{\gamma}, \quad (2.80)$$

где $\overset{\alpha\beta}{\mathbf{v}}$ — скорость (среднемассовая) компоненты β в фазе α ; $\overset{\alpha\beta}{Q}$ — приток вещества компоненты β в фазу α из других фаз; $\overset{\alpha}{J}_{\gamma}$ — скорость реакции с номером γ в фазе α ; $\overset{\alpha\beta}{\nu}_{\gamma}$ — стехиометрический коэффициент, с которым компонента β входит в уравнение этой реакции ($\nu > 0$ для продуктов реакции); $\overset{\beta}{M}$ — молекулярная масса компоненты β .

Суммируя по β , из (2.80) получаем уравнение неразрывности для фазы

$$\frac{\partial \overset{\alpha}{\rho}}{\partial t} + \text{div} \left(\overset{\alpha}{\rho} \overset{\alpha}{\mathbf{v}} \right) = \overset{\alpha}{Q}, \quad (2.80a)$$

поскольку по определению $\sum_{\beta} \overset{\beta}{M} \overset{\alpha\beta}{\nu}_{\gamma} = 0$, а $\overset{\alpha}{\mathbf{v}} = (1/\overset{\alpha}{\rho}) \sum_{\beta} \overset{\alpha\beta}{\rho} \overset{\alpha\beta}{\mathbf{v}}$ — среднемассовая скорость фазы; кроме того, здесь $\overset{\alpha}{Q} = \sum_{\beta} \overset{\alpha\beta}{Q}$ — приток (если $Q > 0$) вещества в фазу α из других фаз.

Если химические реакции в смеси идут между фазами, то уравнение (2.80a) запишется в виде

$$\frac{\partial \overset{\alpha}{\rho}}{\partial t} + \text{div} \left(\overset{\alpha}{\rho} \overset{\alpha}{\mathbf{v}} \right) = \overset{\alpha}{Q} + \overset{\beta}{M} \sum_{\gamma} \overset{\alpha}{J}_{\gamma} \overset{\alpha}{\nu}_{\gamma},$$

где $\overset{\alpha}{M}$ — молекулярная масса фазы α , $\overset{\alpha}{\nu}_{\gamma}$ — стехиометрический коэффициент, с которым фаза α участвует в реакции; $\overset{\alpha}{J}_{\gamma}$ — скорость реакции с номером γ ; при этом $\sum_{\alpha} \overset{\alpha}{M} \overset{\alpha}{\nu}_{\gamma} = 0$, как для всякой внутренней реакции.

Поскольку $\overset{\alpha\beta}{Q} = -\overset{\beta\alpha}{Q}$, то $\sum_{\alpha} \overset{\alpha}{Q} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \overset{\alpha\beta}{Q} = 0$, и суммируя (2.80a) по α , получим уравнение неразрывности для всей многофазной среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v} = (1/\rho) \sum_{\alpha} \overset{\alpha}{\rho} \overset{\alpha}{\mathbf{v}}$ — среднемассовая скорость среды.

Вводя понятие массовых концентраций \bar{C}^α (фазы) и $\bar{C}^{\alpha\beta}$ (компоненты β) при помощи соотношений $\bar{\rho}^\alpha = \rho \bar{C}^\alpha$, $\bar{\rho}^{\alpha\beta} = \rho \bar{C}^{\alpha\beta}$, так что

$$\bar{C}^\alpha = \sum_\beta \bar{C}^{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha \bar{C}^\alpha = \sum_\alpha \sum_\beta \bar{C}^{\alpha\beta} = 1,$$

уравнениям (2.80) и (2.80а) можно придать вид уравнений диффузии:

$$\rho \frac{d\bar{C}^{\alpha\beta}}{dt} = Q^{\alpha\beta} + M_\beta \sum_\gamma J_\gamma^\alpha \bar{v}_\gamma^{\alpha\beta} - \operatorname{div} \bar{\mathcal{J}}^{\alpha\beta},$$

$$\rho \frac{d\bar{C}^\alpha}{dt} = \bar{Q}^\alpha - \operatorname{div} \bar{\mathcal{J}}^\alpha.$$

Здесь

$$\bar{\mathcal{J}}^{\alpha\beta} = \bar{\rho}^{\alpha\beta} (\bar{\mathbf{v}}^{\alpha\beta} - \mathbf{v}), \quad \bar{\mathcal{J}}^\alpha = \bar{\rho}^\alpha (\bar{\mathbf{v}}^\alpha - \mathbf{v})$$

потoki, определяемые относительными скоростями компонент и фаз, а материальная производная по времени относится к частицам всей смеси, т. е.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla.$$

Аналогичным образом формулируются остальные основные уравнения движения многофазных сред.

2. Уравнение импульсов (см. (2.53)) для компоненты, фазы и многофазной среды имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{v}}^{\alpha\beta} \right) = \bar{\rho}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{f}}^{\alpha\beta} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\alpha\beta} - \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\pi}}^{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho}^\alpha \bar{\mathbf{v}}^\alpha \right) = \bar{\rho}^\alpha \bar{\mathbf{f}}^\alpha + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^\alpha - \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\pi}}^\alpha,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} - \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\pi}}. \quad (2.81)$$

Здесь $\bar{\rho}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{f}}^{\alpha\beta}$ — объемная сила, действующая на компоненту β из фазы α ; $\bar{\rho}^\alpha \bar{\mathbf{f}}^\alpha$ — объемная сила, действующая на всю фазу α , так что $\sum_\alpha \sum_\beta \bar{\rho}^{\alpha\beta} \bar{\mathbf{f}}^{\alpha\beta} = \sum_\alpha \bar{\rho}^\alpha \bar{\mathbf{f}}^\alpha = \rho \mathbf{f}$; $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\alpha\beta}$ — притоки импульса (из других фаз) к компоненте β и всей фазе α соответственно,

причем $\sum_\alpha \sum_\beta \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\alpha\beta} = \sum_\alpha \bar{\boldsymbol{\gamma}}^\alpha = 0$, поскольку (как и для \bar{Q}) $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\alpha\beta} = -\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\beta\alpha}$;

$$\begin{aligned}\hat{\pi}^{\alpha} &= \sum_{\beta} \left\{ \rho^{\alpha\beta} \left(\mathbf{v}^{\alpha\beta} - \mathbf{v} \right) \left(\mathbf{v}^{\alpha\beta} - \mathbf{v} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{\alpha\beta} \right\}, \\ \hat{\pi}^{\alpha} &= \sum_{\alpha} \hat{\pi}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \left\{ \rho^{\alpha} \left(\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{v} \right) \left(\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{v} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{\alpha} \right\},\end{aligned}$$

где $\hat{\mathbf{p}}^{\alpha}$, $\hat{\mathbf{p}}^{\alpha\beta}$ — парциальные тензоры напряжений для фазы и компоненты соответственно, а произведения векторов в круглых скобках составляют диаду. В декартовых прямоугольных координатах имеем следующие выражения для компонент тензоров потока импульса:

$$\begin{aligned}\pi_{ik}^{\alpha} &= \sum_{\beta} \rho^{\alpha\beta} \pi_{ik}^{\alpha\beta} = \sum_{\beta} \left\{ \rho^{\alpha\beta} \left(v_i^{\alpha\beta} - v_i \right) \left(v_k^{\alpha\beta} - v_k \right) - \rho_{ik}^{\alpha\beta} \right\}, \\ \pi_{ik} &= \sum_{\alpha} \pi_{ik}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \left\{ \rho^{\alpha} \left(v_i^{\alpha} - v_i \right) \left(v_k^{\alpha} - v_k \right) - \rho_{ik}^{\alpha} \right\}.\end{aligned}$$

3. Уравнение изменения полной энергии (см. (2.54)) для компоненты, фазы и среды

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\alpha\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta} \right) &= -\operatorname{div} \mathcal{N}^{\alpha\beta} + \rho^{\alpha\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta} + \rho^{\alpha\beta} \mathbf{f}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\alpha} \mathcal{E}^{\alpha} \right) &= -\operatorname{div} \mathcal{N}^{\alpha} + \rho^{\alpha} \mathcal{E}^{\alpha} + \rho^{\alpha} \mathbf{f}^{\alpha} \cdot \mathbf{v}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathcal{E}) &= -\operatorname{div} \mathcal{N} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}\tag{2.82}$$

Здесь $\mathcal{E}^{\alpha\beta}$, \mathcal{E}^{α} , \mathcal{E} — полная энергия единицы массы компоненты β , фазы α и среды соответственно, так что для единицы объема имеем

$$\rho \mathcal{E} = \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \left(\frac{v^{\alpha 2}}{2} + e^{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \rho^{\alpha\beta} \left(\frac{v^{\alpha\beta 2}}{2} + e^{\alpha\beta} \right),$$

$e^{\alpha\beta}$, e^{α} , e — внутренние энергии единицы массы; $\mathcal{N}^{\alpha\beta}$, \mathcal{N}^{α} , \mathcal{N} — векторы плотности потока энергии компоненты β , фазы α и многофазной среды соответственно, так что:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}, \\ \mathcal{N}^{\alpha} &= \rho^{\alpha} \left(\mathbf{v}^{\alpha} - \mathbf{v} \right) \left(\frac{v^{\alpha 2}}{2} + e^{\alpha} \right) - \hat{\mathbf{p}}^{\alpha} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}^{\alpha},\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}^{\alpha\beta} = \rho^{\alpha\beta} \left(\mathbf{v} - \mathbf{v} \right) \left(\frac{v^{\alpha\beta 2}}{2} + e^{\alpha\beta} \right) - \mathbf{p}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}^{\alpha\beta},$$

$\mathcal{E}^{\alpha\beta}$, $\mathcal{E}^{\alpha} = \sum_{\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta}$ — притоки энергии к компоненте β и фазе α из других фаз, а векторы \mathbf{q}^{α} , $\mathbf{q}^{\alpha\beta}$, $\mathbf{q}^{\alpha\beta}$ — определяют потоки тепла.

Таким образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \sum_{\alpha} \mathcal{N}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \mathcal{N}^{\alpha\beta}, \\ \sum_{\alpha} \mathcal{E}^{\alpha} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \mathcal{E}^{\alpha\beta} = 0, \text{ ибо } \mathcal{E}^{\alpha\beta} = -\mathcal{E}^{\beta\alpha}, \\ \sum_{\alpha} \mathbf{q}^{\alpha} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \mathbf{q}^{\alpha\beta} = \mathbf{q}, \\ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \rho^{\alpha\beta} \mathbf{f}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{v} &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Уравнениям (2.82) можно, используя (2.80) и (2.81), придать форму уравнений изменения внутренней энергии (уравнений притока тепла):

$$\begin{aligned} \rho^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial e^{\alpha\beta}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e^{\alpha\beta} \right] &= -\operatorname{div} \mathbf{q}^{\alpha\beta} + \mathbf{p}^{\alpha\beta k} \cdot \mathbf{v}_{,k} + \mathcal{W}^{\alpha\beta}, \\ \rho^{\alpha} \left[\frac{\partial e^{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e^{\alpha} \right] &= -\operatorname{div} \mathbf{q}^{\alpha} + \mathbf{p}^{\alpha k} \cdot \mathbf{v}_{,k} + \mathcal{W}^{\alpha}, \\ \rho \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e \right] &= -\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v}_{,k} + \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Здесь величина \mathcal{W} связана с мощностью объемных сил и химическими реакциями между компонентами. В работе [55] приведены следующие выражения для этой величины:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{\alpha\beta} &= \mathcal{E}^{\alpha\beta} - \mathbf{v} \cdot \left(\boldsymbol{\gamma}^{\alpha\beta} - \mathbf{z}^{\alpha\beta} \mathbf{v} \right) - \mathcal{E}^{\alpha\beta} \mathcal{Z}, \\ \mathcal{Z}^{\alpha\beta} &= \mathcal{Q}^{\alpha\beta} + \mathcal{M}^{\beta} \sum_{\gamma} J_{\gamma}^{\alpha} \nu_{\gamma}^{\alpha\beta}, \\ \mathcal{W}^{\alpha} &= \mathcal{E}^{\alpha} - \mathbf{v} \cdot \left(\boldsymbol{\gamma}^{\alpha} - \mathbf{z}^{\alpha} \mathbf{v} \right) - \mathcal{E}^{\alpha} \mathcal{Q}, \end{aligned}$$

$$W = \sum_{\alpha, \beta} \rho^{\alpha\beta} \mathbf{f} \cdot \left(\mathbf{v}^{\alpha\beta} - \mathbf{v}^{\alpha} \right).$$

В термодинамике многофазных сред принимается принцип локального равновесия для каждой фазы, так что для жидкостей и газов

$$T^{\alpha} \frac{d_{\alpha} s^{\alpha}}{dt} = \frac{d_{\alpha} e^{\alpha}}{dt} + \bar{p}^{\alpha} \frac{d_{\alpha} \left(\frac{1}{\rho^{\alpha}} \right)}{dt},$$

где \bar{p}^{α} — парциальное давление, а

$$\frac{d_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}^{\alpha} \cdot \nabla.$$

Это позволяет при принятии закона Фурье для вектора плотности потока тепла, т. е. $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$, и при задании уравнений состояния для каждой из фаз (компонент)

$$s^{\alpha} = s^{\alpha}(\bar{p}^{\alpha}, T); \quad \bar{p}^{\alpha} = \bar{p}^{\alpha}(\bar{\rho}^{\alpha}, T)$$

уменьшить количество неизвестных в основной системе.

Дальнейшее замыкание основной системы состоит в задании функций $Q^{\alpha}, \gamma^{\alpha}, \varepsilon^{\alpha}, \bar{p}^{\alpha}, J_{\gamma}^{\alpha}$ от тех величин или их производных, которые входят в уравнения.

В случае рассмотрения многокомпонентных фаз это касается и функций $s^{\alpha\beta}, \bar{p}^{\alpha\beta}, \varepsilon^{\alpha\beta}, Q^{\alpha\beta}, \dots$

В качестве примера приведем замкнутую систему уравнений [55] для двухфазной среды — пористого тела, у которого основными параметрами выбраны: вектор перемещения $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}$, тензор упругих деформаций $\mathbf{u}_{ik} \equiv u_{ik}$, тензор упругих напряжений $\mathbf{p}_{ik} \equiv p_{ik}$ — первой (упругой) фазы; скорость $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}$, давление $p \equiv p$, объемное содержание жидкости (или коэффициент пористости первой фазы) m — для второй (жидкой) фазы.

Подобная модель широко применяется в механике грунтов, в биомеханике (хрящ, кости).

Замкнутая система уравнений, получаемая из (2.80), (2.81), (2.82) при некоторых дополнительных допущениях, необходимых для замыкания, имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(1-m) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \operatorname{div} \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{R} + (1-m)\rho \mathbf{f}, \\ \rho m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p - \mathbf{R} + m\rho \mathbf{f}, \\ p_{ik} &= -\frac{1-m}{m} p g_{ik} + p'_{ik}, \\ \lambda_T \frac{\partial p'_{ik}}{\partial t} + p'_{ik} &= 2\tilde{\mu} \left(u_{ik} + \lambda_e \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \right) + \tilde{\lambda} \left(I_1 + \lambda_e \frac{\partial I_1}{\partial t} \right) g_{ik}, \\ \mathbf{R} &= \frac{\mu}{k} \left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right), \quad (1-m_0) = (1-m)(1+I_1), \end{aligned}$$

$$2u_{ik} = (u_{i;k} + u_{k;i}), \quad \operatorname{div} \left(mv + (1-m) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0.$$

Здесь: λ_T, λ_e — времена релаксации и ретардации, k — проницаемость, μ — вязкость жидкости, $I_1 = u^i_i$, $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ — коэффициенты Ламэ (см. § 14), через которые выражаются модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν

$$E = \frac{\tilde{\mu} (2\tilde{\mu} + 3\tilde{\lambda})}{\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}}, \quad \nu = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}.$$

Как уже говорилось, при замыкании основной системы зачастую приходится использовать решения задач движения отдельных компонент или фаз. Так, в случае смеси твердых частиц и жидкости привлекается решение задачи об обтекании сферы, а при смеси газов и жидкости рассматривают движение пузырька в жидкости [46]. Данные этих задач осредняют и таким образом получают феноменологические функции, замыкающие систему.

Движение многофазных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, рассмотрено в работе [12].

2. **Сплошная среда переменной массы.** Пусть в сплошной среде допустимо возникновение (исчезновение) вещества того же сорта за счет какого-то «механизма», который реализуется в каждой частице среды или в отдельных ее областях (объемах, поверхностях, линиях, точках). В качестве такого механизма можно представить химические реакции, приводящие к изменению количества одного компонента среды, движение которого изучается, либо процессы, приводящие к изменению фазового состава среды (испарение, сублимация, диффузия, рост ткани и др.). Если удастся отделить движение одной компоненты среды от остальных, движение которых можно считать известным, то тогда возникает модель однокомпонентной сплошной среды переменной массы.

В определенном смысле эту модель можно рассматривать как приближение модели многофазных сред.

Кроме этих, на первый взгляд вроде бы экзотических предположений о происхождении источников массы, модель однокомпонентной среды переменной массы может быть применена для исследования таких уже «земных» задач, как движение среды в области нефтяных и водяных скважин, моделируемых источниками (стоками) (см., например, [59], [86] и библиографию в них), а также и для некоторых задач обычной гидромеханики и газовой динамики (см., например, [32, § 195]), и задач течения с пористыми границами. Отметим также задачи диффузии с зарождением частиц (см., например, [19]) и некоторые задачи биомеханики, связанные с рассмотрением роста ткани (кости) [82, 83]. Одним из первых учебников, в котором рассмотрена модель жидкости переменной массы с непрерывно распределенными источниками массы, была монография Л. Г. Лойцянского¹ [40].

¹ *Лойцянский Лев Герасимович (1901–1998)* — видный советский механик и математик. Окончил (1921 г.) Петроградский университет. С 1922 г. работал в Ленинградском политехническом институте. Основные труды по гидроаэродинамике (движение вязкой жидкости, теория пограничного слоя, турбулентность, газовая динамика). Автор книг и учебников по теоретической механике и гидроаэромеханике, выдержавших несколько изданий.

Таким образом, источники массы могут быть связаны с частицами и передвигаться с ними, как это происходит в многофазных средах при химических реакциях и переходе одной фазы в другую. В других случаях механизм появления (исчезновения) массы в среде может быть таким, что источники (стоки) перемещаются независимо от движения среды, в частности, остаются неподвижными в движущейся среде.

Среда с переменной массой является *открытой системой*, поскольку допускает обмен массой одного и того же вещества с другими системами. Это вносит, конечно, определенные изменения в термодинамические соотношения, о чем будет сказано дальше.

Наряду с источниками массы естественно допустить в среде переменной массы наличие источников импульса и энергии. Источники (стоки) могут быть распределены по среде или в пространстве непрерывным образом либо быть дискретными. В случае непрерывного распределения будем обозначать их объемные интенсивности как $q(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{Y}(t, \mathbf{r})$ и $\mathcal{E}(t, \mathbf{r})$ — массы, импульса и энергии соответственно. В случае, когда источники сосредоточены в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$, будем считать, что эти функции заданы в виде дельта-функций Дирака, например

$$q(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N q_k(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k),$$

причем функции $q_k(t)$ также могут носить импульсивный характер и тогда $q_k(t) = q_k^0 \delta(t - t_0)$.

Удобно воспользоваться всеми допущениями, которые приняты при оперировании с δ -функцией Дирака и функцией Хевисайда в физике (см. § 9).

Тогда при выводе основных дифференциальных уравнений с участием δ -функций мы можем при переходе от интегральной формы к дифференциальным уравнениям считать их непрерывными, а в самих уравнениях — в виде собственно δ -функций, получаемых при предельном значении некоторого параметра (см. § 9).

В модели среды переменной массы расширяется понятие материального объема, материальной поверхности и др., поскольку теперь они могут содержать источники (стоки) массы и, таким образом, могут не состоять, как прежде, из одних и тех же частиц среды. Их масса, содержимое меняется, вообще говоря, со временем. И это изменение определяется прежде всего новой формулировкой закона изменения массы и нового уравнения неразрывности. Все остальные законы должны быть сформулированы с учетом переменности массы материального объема во времени.

Учитывая эти замечания, закон изменения массы для среды переменной массы можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V q dV. \quad (2.83)$$

Здесь интенсивность $q = q(t, \mathbf{r})$ равна массе, произведенной источниками в единицу времени в единице объема (в уравнении баланса массы она была обозначена σ_ρ). Так что если объем ΔV , расположенный у точки, определяемой радиусом-вектором \mathbf{r} , содержит массу сплошной среды Δm , то

$$q(t, \mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta m}{dt} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{d}{dt} (\rho(t, \mathbf{r}) \Delta V).$$

Что касается закона изменения количества движения в его формулировке (2.36), то, поскольку величина количества движения $\int_V \rho \mathbf{v} dV$ включает в себя переменную

массу, должен быть учтен реактивный импульс истекающей среды в виде дополнительной внешней силы. Так, например, если тело (частица среды) с переменной массой Δm , движущееся со скоростью \mathbf{v} , испускает массу $d(\Delta m)$ со скоростью \mathbf{u} (рис. 71), то по закону Ньютона имеем (\mathbf{F} — главный вектор внешних сил)

$$d(\Delta m \mathbf{v}) = \mathbf{F} dt + \mathbf{u} d(\Delta m).$$

Отсюда, имея в виду, что $d\Delta m/dt = q\Delta V$ — мощность источника массы в ΔV , получаем

$$\Delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) q \Delta V.$$

Равенство $\mathbf{u} = 0$ означает, что источник массы покоится в выбранной инерциальной системе. Величину $\mathbf{q}(t, \mathbf{r}) = q\mathbf{u}$ можно рассматривать как интенсивность источника импульса. Если $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, источники массы движутся со скоростью частиц.

Таким образом, закон изменения количества движения для среды переменной массы должен быть сформулирован так:

Скорость изменения количества движения материального объема сплошной среды переменной массы равна реактивному импульсу истекающей (поглощаемой) в этом объеме массы, сложенному с главным вектором всех приложенных внешних сил. Тогда имеем

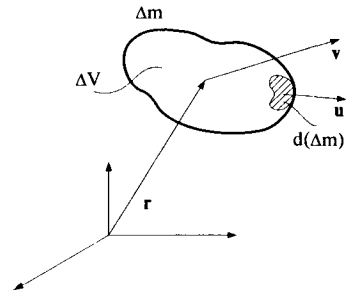


Рис. 71

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V q \mathbf{u} dV + \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{p}_n dS. \quad (2.84)$$

Аналогично получаем формулировку закона изменения момента количества движения для среды переменной массы (для простоты выкладок рассматривается случай $\mathbf{l} = \mathcal{M} = \mathbf{m}_n = 0$)

$$\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{r} \times q \mathbf{u}) dV + \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}) dV + \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) dS. \quad (2.85)$$

Закон изменения полной энергии среды вследствие того, что система является открытой, должен учитывать изменение кинетической энергии вследствие переменности массы. Тогда закон (2.38) можно сформулировать следующим образом:

Скорость изменения полной энергии материального объема сплошной среды переменной массы, сложенная с изменением его кинетической энергии за счет изменения массы, равна мощности всех внешних сил, сложенной с притоком тепла и притоком энергии от внутренних источников энергии. Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV + \int_V q \frac{v^2}{2} dV = \int_V \mathbf{u}q \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \\ + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS + \int_S \lambda (\nabla T) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \varepsilon dV. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Здесь второй интеграл слева отражает изменение кинетической энергии среды за счет изменения массы внутри объема, которое для каждой частицы равно (в единицу времени) $\delta m = q dV$ и, следовательно, кинетическая энергия каждой частицы от этого получает приращение

$$\delta m \frac{v^2}{2} = q \frac{v^2}{2} dV.$$

Из уравнений (2.83), (2.84), (2.85) и (2.86) получаем основную систему дифференциальных уравнений механики сплошной среды переменной массы:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + q(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} + \mathbf{p}_{,k}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$p_{ik} = p_{ki},$$

$$\rho \frac{de}{dt} + qe = \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v}_{,k} + \varepsilon + \operatorname{div} (\lambda \nabla T). \quad (2.88)$$

Если считать $q(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ и $\varepsilon(t, \mathbf{r})$ известными, то эта система, как и (2.40)–(2.43), служит для определения основных гидродинамических величин, а замыкание обеих систем проводится одинаково.

Эта система ковариантна относительно преобразований Галилея.

Вид функций q , \mathbf{u} и ε определяется, прежде всего, принимаемым механизмом образования (исчезновения) массы сплошной среды. Функция $q(t, \mathbf{r})$ в случае внешних задач должна удовлетворять определенным условиям на бесконечности, если требуется регулярность скоростного поля.

Уравнение движения (2.87) по форме совпадает с уравнением И. В. Мещерского¹ для точки переменной массы, причем реактивная сила И. В. Мещерского здесь равна $q(\mathbf{u} - \mathbf{v})$. Заметим, что в случае стоков ($q < 0$) эта сила меняет знак.

¹ Мещерский Иван Всеволодович (1859–1935) — известный русский механик. Окончил Петербургский университет (1882 г.). Профессор Петербургского университета (с 1902 г.) и Петербургского политехнического института. Основное направление исследований — динамика тел переменной массы. Разработал (1904 г.) теорию движения тел переменной массы, дал выражение для реактивной силы. Известен также педагогическими трудами.

Если источники (стоки) массы «пассивны», т. е. появляющаяся (исчезающая) в них масса имеет скорость движения частицы \mathbf{V} , т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{V}$, то тогда уравнение движения (2.87) ничем не отличается от такового для среды без источников массы. Если же источники (стоки) массы «активны», т. е. $\mathbf{u} \neq \mathbf{V}$, то при этом, исходя из механизма их действия, надо задать поле $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$. Так, например, при использовании полученной здесь системы дифференциальных уравнений движения для изучения движения i -той компоненты гетерогенной смеси из N компонент (см., например, [46]) получаем соответствие:

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_{ij}; \quad \mathbf{u} \rightarrow \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} / \sum_{j=1}^N \mathbf{q}_{ij},$$

где $q_{ij} = q_{ji}$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ — интенсивности перехода масс из j -той фазы в i -тую и обмена импульсами между фазами соответственно.

Что касается вида интенсивности источников энергии $\varepsilon(t, \mathbf{r})$, то его можно получить из термодинамических соотношений для рассматриваемой среды.

Для однокомпонентной открытой системы, имеющей в момент времени t в объеме V массу M , в силу того, что ее внутренняя энергия $E = E(S, V, M)$, получим

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V, M} dS + \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, M} dV + \left(\frac{\partial E}{\partial M} \right)_{S, V} dM.$$

Вводя для этой системы температуру $T = (\partial E / \partial S)_{V, M}$ и давление $p = -(\partial E / \partial V)_{S, M}$, запишем это уравнение в виде

$$dE = TdS - pdV + \mu dM,$$

где $\mu = (\partial E / \partial M)_{S, V}$ — химический (в данном случае — массовый) потенциал. Переходя здесь к удельным значениям энергии ($e = E/M$) и энтропии ($s = S/M$), получим

$$de = Tds - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) + \left(\mu - \frac{p}{\rho} - e + Ts \right) \frac{dM}{M}.$$

Поскольку из (2.83) имеем (объем V — произвольный)

$$\frac{dM}{M} = \frac{\int_V q dV}{\int_V \rho dV} dt = \frac{q}{\rho} dt,$$

а в силу принципа локального равновесия ни e , ни любой другой термодинамический потенциал от t явно зависеть не может, то из выражения для de следует:

$$\mu - \frac{p}{\rho} - e + Ts = 0.$$

Таким образом, соотношение Гиббса для однокомпонентной открытой системы имеет вид

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

а массовый потенциал

$$\mu = \frac{p}{\rho} + e - Ts.$$

Теперь, переходя в (2.88) к энтропии, можно получить локальное уравнение переноса энтропии (2.70) в виде (см. (2.79))

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div}\left(\rho s \mathbf{v} - \frac{\lambda \nabla T}{T}\right) = \frac{2\mu}{T}(\check{v}_{ik})^2 + \frac{\zeta}{T}(v_{||})^2 + \frac{\lambda(\nabla T)^2}{T^2} + \frac{1}{T}\left[\varepsilon + q\left(Ts - e - \frac{p}{\rho}\right)\right].$$

Поскольку правая часть этого уравнения, представляющая собой плотность производства энтропии для рассматриваемой системы, должна быть положительной, то

$$\varepsilon > q\mu.$$

В случае, если процессы образования (исчезновения) массы в среде можно считать обратимыми, имеем

$$\varepsilon = q\mu = q\left(\frac{p}{\rho} + e - Ts\right).$$

3. Сплошная среда, взаимодействующая с электромагнитным полем (нерелятивистское приближение).

Изучение движения таких сред составляет предмет электродинамики сплошных сред, магнитной гидродинамики, электродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред, электродинамики плазмы, электродинамики диэлектриков и др.

Вообще говоря, электромагнитные эффекты присущи абсолютно всем жидким, газообразным и твердым средам. Однако в обычных условиях и в обычных полях этими эффектами часто можно пренебречь. К средам, заметно взаимодействующим с электромагнитным полем, относятся плазма, электропроводящие жидкости, жидкие металлы, жидкие диэлектрики, а также целый ряд упругих и пластических сред, обнаруживающих заметный электромагнитный эффект в обычных полях (например, сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики, магнитоstrictionные среды).

Пусть сплошная среда взаимодействует с электромагнитным полем (\mathbf{E} , \mathbf{H}) и способна не только проводить объемный ток плотности \mathbf{j} и содержать объемные заряды плотности ρ_e , но и изотропно намагничиваться и поляризоваться, так что векторы электрической и магнитной индукции приобретают в среде соответственно значения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$, причем в общем случае $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, E)$ и $\mu = \mu(\rho, T, H)$ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Тогда основные законы движения такой среды можно записать в виде (см., например, [37, 79, 11, 60, 71, 5]):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \tag{2.89}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V (\rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{f}_*^e) dV + \int_S \mathbf{p}_n dS, \quad (2.90)$$

$$p_n^i = p^{ik} n_k, \quad p^{ik} = p^{ki},$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = \int_V (\rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{f}_*^e) \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS + \int_S \lambda \nabla T \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.91)$$

Здесь \mathbf{f}_*^e — массовая электромагнитная сила взаимодействия, имеющая в нерелятивистском приближении выражение

$$\mathbf{f}_*^e = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) - \nabla (\psi_*^{(\rho)} + \chi_*^{(\rho)}) + M_* \nabla H_* + P_* \nabla E_*, \quad (2.92)$$

где

$$\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}_* - \frac{4\pi}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{P}_*),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_* + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{M}_*), \quad (2.93)$$

$$\psi_*^{(\rho)} = -\rho^2 \int_0^{H_*} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{M_*}{\rho} \right) dH_*, \quad \chi_*^{(\rho)} = -\rho^2 \int_0^{E_*} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{P_*}{\rho} \right) dE_*;$$

c — скорость света, σ — проводимость, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\rho, T, \mathbf{H})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\rho, T, \mathbf{E})$ — векторы намагниченности и поляризации соответственно. Нижним индексом — звездочкой отмечено, что электромагнитные характеристики рассматриваются в собственной системе координат, т. е. в системе координат, связанной с частицей, движущейся со скоростью \mathbf{v} . Связь между полями в лабораторной и собственной системах координат следует из преобразований Лоренца и с точностью до v^2/c^2 (исключительно) имеет вид:

$$\mathbf{H}_* = \mathbf{H} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{D}), \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}), \quad \mathbf{D}_* = \mathbf{D} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}),$$

$$\rho_{e*} = \rho_e, \quad \mathbf{j}_* = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}.$$

Что касается симметричности тензора напряжений, то, например, в жидких ферромагнетиках очень часто нельзя пренебрегать внутренним вращением частиц, усиливающимся под действием электромагнитного поля. В этом случае надо пользоваться уравнением сохранения момента количества движения в его полном виде (2.42). В большинстве сред, однако, обычно принимают, как и в нейтральной среде:

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + p'_{ik} = p_{ki},$$

где p'_{ik} — тензор вязких напряжений, p — гидростатическое давление.

Тогда дифференциальные уравнения движения, получаемые из (2.89)–(2.91), приобретают вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.94)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{f}_*^e + \mathbf{p}_{*;k}^k, \quad (2.95)$$

$$\rho \frac{de_*}{dt} = \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v}_{*;k} + \operatorname{div} (\lambda \nabla T). \quad (2.96)$$

Эта система дифференциальных уравнений должна быть дополнена термодинамическим соотношением, которое в предположении обратимости процессов сжатия, намагничивания и поляризации имеет вид:

$$T ds_*^e = de_* + \left(p + \frac{\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{D}_* + \mathbf{H}_* \cdot \mathbf{B}_*}{4\pi} \right) d\left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{\mathbf{E}_*}{4\pi} \cdot d\left(\frac{\mathbf{D}_*}{\rho} \right) - \frac{\mathbf{H}_*}{4\pi} \cdot d\left(\frac{\mathbf{B}_*}{\rho} \right), \quad (2.97)$$

где

$$s_*^e = s(\rho, T) + \frac{1}{\rho} \int_0^{H_*} \left(\frac{\partial M_*}{\partial T} \right)_{\rho, H_*} dH_* + \frac{1}{\rho} \int_0^{E_*} \left(\frac{\partial P_*}{\partial T} \right)_{\rho, E_*} dE_*.$$

— выражение для энтропии среды в электромагнитном поле через энтропию $s(\rho, T)$ в отсутствие поля.

Кроме того, связь между характеристиками поля учитывается системой уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho_e, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}, & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Граничные условия для векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} могут быть получены из следующего рассмотрения.

Пусть σ (рис. 81) — поверхность, разделяющая две среды с характеристиками \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 , ... — в области над ней и \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 , ... — под ней. Проинтегрируем уравнения (2.98) по объему $V_w = V_1 + V_2$, где V_1 , V_2 — объемы цилиндров с образующими по нормали к поверхности раздела. Получаем интегральные уравнения Максвелла в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{V_w} \operatorname{div} \mathbf{B} dV &= 0, & \int_{V_w} \operatorname{div} \mathbf{D} dV &= 4\pi \int_{V_w} \rho_e dV, \\ \frac{1}{c} \int_{V_w} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dV &= - \int_{V_w} \operatorname{rot} \mathbf{E} dV, & \frac{1}{c} \int_{V_w} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV &= - \int_{V_w} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV - \frac{4\pi}{c} \int_{V_w} \mathbf{j} dV. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского, получаем для второго и четвертого из этих интегральных уравнений Максвелла (см. рис. 81)

$$\begin{aligned} \int_{V_w} \operatorname{div} \mathbf{D} dV &= \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \delta\sigma_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \delta\sigma_2 + \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_\delta \delta\sigma_\delta = \\ &= 4\pi \int_{V_1+V_2} \rho_e dV, \\ \frac{1}{c} \int_{V_w} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV &= \int_{V_w} \operatorname{rot} \mathbf{H} dV - \frac{4\pi}{c} \int_{V_w} \mathbf{j} dV = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) dS - \frac{4\pi}{c} \int_{V_w} \mathbf{j} dV = \\ &= (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1) \delta\sigma_1 + (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2) \delta\sigma_2 + (\mathbf{n}_\delta \times \mathbf{H}) \delta\sigma_\delta - \frac{4\pi}{c} \int_{V_w} \mathbf{j} dV. \end{aligned}$$

Пусть в пределе: $V_w \rightarrow \delta\sigma_0 \cdot \delta l \rightarrow 0$, боковая поверхность $\delta\sigma_\delta \rightarrow 0$, $\mathbf{n}_2 \rightarrow \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_1 \rightarrow -\mathbf{n}$; кроме того, предположим, что при стремлении V_w к нулю существуют пределы

$$\begin{aligned} \rho_e V_w &\rightarrow \rho_e \delta\sigma_0 \delta l \rightarrow \rho_e^s \delta\sigma_0, \\ \mathbf{j} V_w &\rightarrow \mathbf{j} \delta\sigma_0 \delta l \rightarrow \mathbf{j}^s \delta\sigma_0, \end{aligned}$$

где δl — поперечный размер слоя, содержащего поверхность разрыва (см. рис. 81).

Тогда в пределе из полученных интегральных формул имеем

$$\begin{aligned} -\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} \delta\sigma_0 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} \delta\sigma_0 &\rightarrow 4\pi \rho_l \delta\sigma_0 \delta l = 4\pi \rho_e^s \delta\sigma_0, \\ -(\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \delta\sigma_0 + (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) \delta\sigma_0 - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^s \delta\sigma_0 &= 0. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\delta\sigma_0$ имеем

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = 4\pi \rho_e^s; \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^s. \quad (2.98a)$$

Аналогичным образом из остальных интегральных уравнений Максвелла получаем

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0.$$

Эти четыре соотношения служат граничными условиями для векторов электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} .

Система уравнений (2.94)–(2.98) достаточно сложна для практического пользования в общей постановке задач.

Укажем на три главных приближения нерелятивистской электродинамики сплошных сред.

Идеальная среда. Предполагается, что в среде отсутствуют диссипативные процессы, так что

$$\mathbf{E}_* = 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad p_{ik} = -p \delta_{ik}.$$

Тогда из (2.94)–(2.98) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla(p + \psi^{(\rho)}) + \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + M \nabla H, \\ \frac{ds^e}{dt} &= 0, \quad p = p(\rho, T), \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ s^e &= s(\rho, T) + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}(\rho, T, \mathbf{H}) = \mu(\rho, T, H) \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Эта система служит для определения ρ , p , T , \mathbf{v} и \mathbf{H} , если известно уравнение термодинамического состояния ($p = p(\rho, T)$) или $s = s(\rho, T)$) и функция обратимого намагничивания $\mu = \mu(\rho, T, H)$. Плотность зарядов ρ_e может быть определена из уравнения Максвелла

$$\rho_e = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \left(4\pi \mathbf{P} - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \right),$$

что требует еще знания поляризации $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, E)$.

Магнитогидродинамическое (МГД) и электрогидродинамическое (ЭГД) приближения.

Эти приближения можно получить, оценивая различные слагаемые в последнем уравнении системы Максвелла (2.98), если в него подставить выражение (2.93) для тока \mathbf{j} . Имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - 4\pi \rho_e \mathbf{v} = \frac{4\pi}{c} \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right). \quad (2.99)$$

Пусть H_0 , E_0 , $D_0 = \varepsilon_0 E_0$, $B_0 = \mu_0 H_0$, L_0 , t_0 , $v_0 = L_0/t_0$ — масштабы соответствующих величин из этого уравнения. Переходя в нем к безразмерным величинам (со штрихами), получаем

$$\frac{c^2}{\mu_0 \varepsilon_0 v_0^2} \cdot \frac{t_m}{t_0} \operatorname{rot} \mathbf{H}' - \left(\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} + 4\pi \rho_e' \mathbf{v}' \right) = 4\pi \frac{t_0}{t_e} \left(\mathbf{E}' + \frac{t_m}{t_0}(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') \right). \quad (2.100)$$

Здесь $t_e = \varepsilon_0/\sigma$ — время релаксации электрического заряда (время, за которое равномерно распределенный заряд уменьшается до e^{-1} от своей первоначальной величины, где e — основание натуральных логарифмов); $t_m = \mu_0 H_0 L_0 / c E_0$ — время сохранения магнитных силовых линий (величины t_e и t_m можно получить из оценок слагаемых в последних двух уравнениях Максвелла (2.98)), считая $t_0 = t_m$ в первом из них, $t_0 = t_e$ — во втором при одинаковом порядке слагаемых.

Заметим, что в проводниках (даже плохих) величина t_e очень мала (морская вода $t_e \sim 2 \cdot 10^{-10}$ сек, дистиллированная вода $\sim 10^{-6}$ сек); однако в очень хороших изоляторах эта величина может быть большой: например, $t_e = 10^6$ сек для плавленого кварца.

МГД-приближение. Предположим, что среда движется в таких условиях, что в ней $t_0 \sim t_m$ и, кроме того, $t_m/t_e \sim c^2/v_0^2$; поскольку для обычных задач $c/v_0 \sim 10^8$, то $t_m/t_e - c^2/v_0^2 \gg 1$.

Для этого случая из (2.100), отбрасывая слагаемые, имеющие порядок v^2/c^2 , получаем

$$\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{H}' = 4\pi \frac{t_0^2 v_0^2}{t_m t_e c^2} \left(\mathbf{E}' + \frac{t_m}{t_0} (\mathbf{v}' + \mathbf{B}') \right).$$

Таким образом в МГД-приближении из (2.99) и выражения (2.93) для тока \mathbf{j} имеем, отбрасывая слагаемые порядка v^2/c^2 :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

Беря от обеих частей этого выражения операцию rot и при помощи третьего уравнения Максвелла исключая $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, получаем *уравнение индукции* в магнитной гидродинамике:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} \right). \quad (2.101)$$

Кроме того, воспользовавшись тем, что при $t_m \sim t_0$ из выражения для $t_m = \mu_0 H_0 v_0 t_0 / (c E_0 c)$ следует $E/H \sim v_0/c$, из системы (2.94)–(2.98) получаем остальные уравнения МГД-приближения:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.102)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla (p + \psi^{(\rho)}) + \mathbf{p}_{;k}^{k'} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + M \nabla H, \quad (2.103)$$

$$\rho T \frac{ds^e}{dt} = p_{;k}^{i'} v_i^k + \frac{\nu_m}{4\pi} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2 + \operatorname{div} (\lambda \nabla T), \quad (2.104)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (2.105)$$

где

$$\psi^{(\rho)} = -\rho^2 \int_0^H \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{M}{\rho} \right) dH, \quad s^e = s(\rho, T) + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} dH, \quad p = p(\rho, T),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}(\rho, T, \mathbf{H}) = \mu(\rho, T, H) \mathbf{H}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}.$$

Система (2.102)–(2.105) служит для определения ρ , T , p , \mathbf{v} , \mathbf{H} , \mathbf{B} . Заметим, что в ней все величины относятся к лабораторной системе координат. Для определения характеристик электрического поля служат следующие уравнения:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_*(\rho, T, E_*) + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{M}),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_e, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

причем

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{H}_* = \mathbf{H}.$$

Если намагниченностью среды можно пренебречь, т. е. считать $\mu \approx 1$; $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, то из (2.102)–(2.105) получается *основная система магнитной гидродинамики* (см. [30]).

ЭГД-приближение. Пусть свойства среды и условия ее движения соответствуют оценкам: $t_0 \sim t_e$, причем $t_e/t_m \sim c^2/v_0^2 \gg 1$.

В этом случае из (2.100) имеем, отбрасывая слагаемые порядка v^2/c^2 ,

$$-\left(\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} + 4\pi\rho_e' \mathbf{v}'\right) = 4\pi \frac{t_0}{t_e} \mathbf{E}'.$$

Кроме того, из выражения для t_m и из того, что $t_e/t_m \sim t_0/t_m \sim c^2/v_0^2$, следует, что $E/H \sim c/v_0$, т. е. в этом приближении электрическое поле всюду в среде значительно больше магнитного.

Таким образом, в рассматриваемом ЭГД-приближении из системы (2.94)–(2.98) получаем:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2.106}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \rho_e \mathbf{E} - \nabla(p + \chi^{(\rho)}) + \mathbf{p}_{;k}' + P \nabla E, \tag{2.107}$$

$$\rho T \frac{ds^e}{dt} = p_k' v_s^k + \operatorname{div}(\lambda \nabla T), \tag{2.108}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{2.109}$$

где

$$\chi^{(\rho)} = -\rho^2 \int_0^H \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{P}{\rho} \right) dE, \quad s^e = s(\rho, T) + \frac{1}{\rho} \int_0^H \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho, E} dE, \quad p = p(\rho, T),$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}(\rho, T, \mathbf{E}) = \varepsilon(\rho, T, E)\mathbf{E}.$$

Из этой основной системы электрогидродинамики, записанной в лабораторной системе координат, определяются ρ , T , p , \mathbf{v} , \mathbf{E} , \mathbf{D} и ρ_e . Характеристики магнитного поля затем могут быть найдены из уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \quad \mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v} + \sigma \mathbf{E}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}_*(\rho, T, H_*) - \frac{4\pi}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{P}), \\ \mathbf{H}_* &= \mathbf{H} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{D}), \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Задачи с решениями

Задача 13.1. Показать, что в случае затвердевшего материального объема сплошной среды, имеющего неподвижную точку, уравнение (2.37) сводится к уравнению динамики твердого тела.

Решение. Для затвердевшего объема V , имеющего неподвижную точку в начале координат, поле скоростей имеет вид

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}(t)$ — мгновенная угловая скорость.

В правой части (2.37) стоит главный момент \mathbf{M}_0 всех сил относительно начала координат. Преобразуем левую часть, принимая $\mathbf{l} = 0$,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho (\boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})) dV.$$

Вводя в декартовых координатах компоненты тензора инерции J_{ik} затвердевшего объема среды

$$J_{ik} = \int_V \rho (\delta_{ik} x_l^2 - x_l x_k) dV,$$

получаем

$$\frac{d}{dt} (J_{ik} \omega_k) = M_{0i}.$$

Задача 13.2. Изменение кинетической энергии среды. Воспользовавшись уравнением движения (2.41) и результатом задачи 9.2, вычислить скорость изменения кинетической энергии материального объема и дать объяснение полученному результату.

Решение. Имеем (при $q = 0$, см. задачу 9.2):

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dV.$$

Подставляя сюда $\rho dv/dt$ из (2.41), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV = \int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}^k_{,k} \cdot \mathbf{v}) dV = \int_V (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v})_{,k} - \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v}_{,k}) dV.$$

Преобразуя второй интеграл по теореме Гаусса — Остроградского, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}^k n_k \cdot \mathbf{v} dS - \int_V \rho^{ki} v_{i,k} dV.$$

Первые два интеграла представляют собой мощность объемных и поверхностных сил соответственно, а последний — мощность внутренних поверхностных сил. Более полную интерпретацию этот результат получает при сравнении с законом изменения полной энергии жидкости (газа) — см. уравнения (2.48), (2.51), (2.54).

Задача 13.3. Записать уравнение энергии (2.43) для следующей зависимости (в прямоугольных декартовых координатах):

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu\dot{v}_{ik} + \zeta v_{ll}\delta_{ik}$$

и выразить слагаемые, зависящие от v_{ik} , через инварианты I_1, I_2, I_3 этого тензора.

Решение. Имеем в декартовых координатах

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^k \cdot \mathbf{v}_{,k} &= p_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \left(-p\delta_{ik} + 2\mu\dot{v}_{ik} + \zeta v_{ll}\delta_{ik} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu\dot{v}_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \zeta v_{ll}^2 = \\ &= -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \zeta v_{ll}^2 + 2\mu\dot{v}_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Поскольку для дивергатора $\dot{v}_{ik} = \dot{v}_{ki}$ и $\dot{v}_{ii} = 0$, то

$$\dot{v}_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \dot{v}_{ik} v_{ik} = \dot{v}_{ik} \left(v_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll} \right) = \dot{v}_{ik}^2.$$

Таким образом,

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu\dot{v}_{ik}^2 + \zeta v_{ll}^2 + \operatorname{div}(\lambda \nabla T).$$

Так как

$$I_1 \equiv v_{ll} = \operatorname{div} \mathbf{v}; \quad I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - v_{ik} v_{ik}),$$

то получаем

$$\dot{v}_{ik}^2 = v_{ik} v_{ik} - \frac{2}{3} v_{ll}^2 + \frac{1}{3} v_{ll}^2 = -2I_2 + I_1^2 - \frac{1}{3} I_1^2 = \frac{2}{3} I_1^2 - 2I_2.$$

Следовательно,

$$\rho \frac{de}{dt} + pI_1 = 2\mu \left(\frac{2}{3} I_1^2 - 2I_2 \right) + \zeta I_1^2 + \operatorname{div}(\lambda \nabla T).$$

Задача 13.4. Для плоскопараллельного потока несжимаемой жидкости $\mathbf{v} = (v(t, x_2), 0, 0)$ вычислить скорость изменения количества движения в материальном круге радиуса R и геометрическом круге того же радиуса, движущимся со скоростью $\mathbf{w}(t)$.

Решение. Согласно (1.174) и (1.175) для обоих кругов имеем:

$$\frac{d\mathbf{p}_v}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_S \rho \mathbf{v} v_n dS,$$

$$\frac{d\mathbf{p}_w}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_w} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_{S_w} \rho \mathbf{v} w_n dS,$$

где V, V_w — круговые области (в момент совпадения), а S, S_w соответствуют контурам окружностей, ограничивающим эти области.

Импульсы \mathbf{p}_v и \mathbf{p}_w имеют одну компоненту (по оси x_1), так что:

$$\frac{dp_v}{dt} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial v(r \sin \theta, t)}{\partial t} r dr d\theta + \rho R \int_0^{2\pi} v^2(R \sin \theta, t) \cos \theta d\theta,$$

$$\frac{dp_w}{dt} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial v(r \sin \theta, t)}{\partial t} r dr d\theta + \rho R \int_0^{2\pi} v w \cos(\alpha - \theta) d\theta,$$

где α — угол, который вектор \mathbf{w} составляет с осью x_1 . Нетрудно видеть, что из интегралов по окружностям отличен от нуля лишь один в выражении для dp_w/dt , так что

$$\frac{dp_v}{dt} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial v}{\partial t} r dr d\theta,$$

$$\frac{dp_w}{dt} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial v}{\partial t} r dr d\theta + \rho R w(t) \sin \alpha \int_0^{2\pi} v(R \sin \theta, t) \sin \theta d\theta.$$

Таким образом, в случае стационарного движения жидкости количество движения меняется со временем лишь внутри геометрического круга. Например, в случае $v = v_0 x_2$ имеем

$$\frac{dp_w}{dt} = \rho R^2 w(t) v_0 \sin \alpha \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi \rho R^2 w(t) v_0 \sin \alpha.$$

Задача 13.5. Диссипативная функция в безвихревом потоке. Найти выражение для диссипативной функции $\Phi = 2\mu \dot{v}_{ik}^2 + \zeta \delta_{ik} (v_{||})^2$ (см. (2.125)) в безвихревом потоке несжимаемой среды.

Решение. По условиям задачи $\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{||} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, так что $\mathbf{v} = \nabla \varphi$. Тогда (в прямоугольных декартовых системах координат)

$$\Phi = 2\mu v_{ik}^2 = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 =$$

$$= \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right)^2 = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2.$$

Это выражение, учитывая $\operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \varphi = \partial^2 \varphi / \partial x_i^2 = 0$, можно представить в виде

$$\Phi = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \mu \Delta (\nabla \varphi)^2.$$

Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \varphi^2 &= \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_k^2} \varphi \varphi = \\ &= 2 \left(\varphi \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_i^2 \partial x_k^2} + 4 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_k^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right), \end{aligned}$$

то при $\partial^2 \varphi / \partial x_i^2 = 0$ имеем

$$\Delta \Delta \varphi^2 = 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right)^2 = 2\Delta (\nabla \varphi)^2.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\Phi = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 = \mu \Delta (\nabla \varphi)^2 = \frac{\mu}{2} \Delta \Delta \varphi^2.$$

Можно видеть, что эти выражения справедливы в любых системах координат.

Заметим, что интеграл по конечному объему V с поверхностью S от диссипации энергии вследствие сил вязкости, выражаемой Φ , может быть представлен через поток градиента квадрата скорости через поверхность. Действительно, из первой формулы Грина (1.83) при $\varphi = \operatorname{const}$ получаем

$$\int_V \Delta \psi dV = \int_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_S \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS.$$

В нашем случае имеем

$$\int_V \Phi dV = \mu \int_V \Delta (\nabla \varphi)^2 dV = \mu \int_S \nabla (\nabla \varphi)^2 \cdot \mathbf{n} dS = \mu \int_S \frac{\partial}{\partial n} (\nabla \varphi)^2 dS = \mu \int_S \frac{\partial}{\partial n} (v)^2 dS.$$

Задача 13.6. Преобразование Клебша¹. Показать, что если вихревые линии поля $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ могут быть в каждый момент времени представлены как пересечение поверхностей $\lambda(t, \mathbf{r}) = \operatorname{const}$, $\mu(t, \mathbf{r}) = \operatorname{const}$, то уравнение движения невязкой ба-

¹ Клебш (Clebsch) Рудольф Фридрих Альфред (1833–1872) — немецкий математик и механик. Окончил Кенигсбергский университет. Основные исследования посвящены теории упругости, вариационному исчислению, геометрии. Рассмотрел двумерные задачи, теорию деформации тонких стержней и тонких пластинок. Исследовал ряд задач гидромеханики, где наиболее известно преобразование Клебша уравнений движения невязкой баротропной жидкости.

ротропной жидкости в поле потенциальных массовых сил может быть записано в виде

$$\frac{d\lambda}{dt} \nabla \mu - \frac{d\mu}{dt} \nabla \lambda = - \left(\mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right),$$

где

$$\mathcal{P}(\rho) = \int \frac{d\rho(\rho)}{\rho}; \quad \mathbf{f} = -\nabla \Pi.$$

Решение. Если $\text{rot } \mathbf{v}$ параллелен линии пересечения двух поверхностей $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, то это означает, что вихревая часть поля \mathbf{v} параллельна вектору $\nabla \lambda \times \nabla \mu$. Поэтому имеем

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \nabla \varphi + \lambda \nabla \mu,$$

ибо в этом случае $\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \lambda \times \nabla \mu$.

Это представление поля скоростей было предложено Клебшем в 1859 г.

Записывая уравнение (2.41) в условиях задачи в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = - \nabla \left(\mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{v^2}{2} \right) \quad (1)$$

и основываясь на выражении для полной производной поля по времени, получаем последовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \nabla \mu + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mu - (\nabla \varphi + \lambda \nabla \mu) \times (\nabla \lambda \times \nabla \mu) = \\ &= \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \nabla \mu + \lambda \nabla \frac{\partial \mu}{\partial t} - \nabla \varphi \times (\nabla \lambda \times \nabla \mu) - \lambda \nabla \mu \times (\nabla \lambda \times \nabla \mu) = \\ &= \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \nabla \mu + \lambda \nabla \frac{\partial \mu}{\partial t} - (\nabla \varphi \cdot \nabla \mu) \nabla \lambda + (\nabla \varphi \cdot \nabla \lambda) \nabla \mu - \\ &\quad - \lambda (\nabla \mu)^2 \nabla \lambda + \lambda (\nabla \lambda \cdot \nabla \mu) \nabla \mu = \\ &= \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \nabla \mu + \nabla \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial t} \nabla \lambda - \left[\nabla \varphi \cdot \nabla \mu + \lambda (\nabla \mu)^2 \right] \nabla \lambda = \\ &= \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{d\lambda}{dt} \nabla \mu + \nabla \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial t} \nabla \lambda. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (1) и перенося потенциальные слагаемые в правую часть, получим требуемый вид уравнения движения.

Задача 13.7. Показать, что если абсолютное движение несжимаемой жидкости в сосуде, равномерно вращающемся вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, является безвихревым, а относительное движение — стационарным, то величина

$$H = \frac{v_r^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2,$$

где $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$, остается постоянной всюду в потоке (массовые силы потенциальны, т. е. $\mathbf{f} = -\nabla \Pi$).

Решение. Уравнение изменения количества движения в относительной системе координат можно записать в виде ($\boldsymbol{\Omega}_r \equiv \text{rot } \mathbf{v}_r$):

$$\frac{\partial' \mathbf{v}_r}{\partial t} - (\mathbf{v}_r \times \boldsymbol{\Omega}_r) = -\nabla \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} \right) - \mathbf{w}_e - \mathbf{w}_c.$$

Здесь, поскольку $\mathbf{v}_0 = 0$ и $d\boldsymbol{\omega}/dt = 0$, имеем

$$\mathbf{w}_e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad \mathbf{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r), \quad \nabla \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

так что предыдущее уравнение можно записать так:

$$\frac{\partial' \mathbf{v}_r}{\partial t} - \mathbf{v}_r \times (\boldsymbol{\Omega}_r + 2\boldsymbol{\omega}) = -\nabla \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} - \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2} \right).$$

Поскольку, как это следует из уравнения $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$, завихренность абсолютного движения ($\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}$) равна $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_r + 2\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\Omega}_r = \text{rot } \mathbf{v}_r$, то при стационарности относительного движения и потенциальности абсолютного движения ($\boldsymbol{\Omega} = 0$) из полученного выражения следует

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2}{2} - \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2} \equiv H \equiv \text{const},$$

поскольку Π , p , v_r и $\boldsymbol{\omega}$ по условию задачи не зависят от времени.

Величина H равна полной энергии единицы массы вращающейся жидкости.

Задача 13.8. Сегнерово¹ колесо. Найти (приближенно) угловую скорость вращения вокруг вертикальной оси двух горизонтальных труб (патрубков) длиной l и радиуса $a \ll l$, в которые подается из вертикальной трубы безвихревой поток жидкости с полной энергией H (см. задачу 13.7) и которые изогнуты под углом θ к своей оси (рис. 72).

Решение. Пусть по вертикальной трубе с осью (z) подается в два колена горизонтальных патрубков длиной l и радиуса a жидкость с энергией единицы массы H , которая, согласно решению предыдущей задачи, постоянна по всему потоку и может считаться заданной.

Поскольку в относительном движении завихренность $\boldsymbol{\Omega}_r$, при условии потенциальности абсолютного движения, равна $\boldsymbol{\Omega}_r = -2\boldsymbol{\omega}$ (см. задачу 13.7), то ее единственная компонента, отличная от нуля, равна

¹Сегнер (Segner) Янош Андрош (1704–1777) — венгерский механик, математик, медик. Работы относятся к разным вопросам математики, физики, техники. Ряд монографий по математике, предложил графический метод решения алгебраических уравнений. Ввел оси инерции. Изобрел одну из первых турбин — сегнерово колесо.

$$\Omega_{rz} = -\frac{\partial v_{rx}}{\partial y} = -2\omega.$$

Отсюда

$$v_{rx} = 2\omega y + u,$$

где u — средняя по сечению скорость жидкости, подающейся через вертикальную трубу. Давление в потоке может быть вычислено на основании выражения для H :

$$\frac{p}{\rho} = H - \Pi - \frac{1}{2}(u + 2\omega y)^2 + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \quad (1)$$

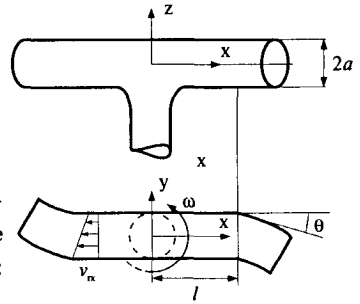


Рис. 72

Крутящий момент M , который необходимо приложить к горизонтальным патрубкам, чтобы обеспечить вращение их с угловой скоростью ω , равен по величине массе секундного расхода жидкости через два патрубка ($2\pi a^2 \rho u dx$), умноженной на линейную скорость (ωx) и проинтегрированной по обоим патрубкам, т. е.

$$M = 2 \int_0^l 2\pi a^2 \rho u \omega x dx = 2\pi \rho u \omega a^2 l^2. \quad (2)$$

При этом, если оба конца патрубков открыты в атмосферу, где давление равно P_0 , то при $a \ll l$ из (1) имеем

$$u^2 = 2 \left(H - \frac{P_0}{\rho} - \Pi \right) + \omega^2 l^2. \quad (3)$$

Поскольку оба патрубка отклонены от оси на угол θ , то приближенно момент, вращающий патрубки с угловой скоростью ω , равен по величине секундной массе, вытекающей из обоих патрубков жидкости $2\pi \rho a^2 u$, умноженной на плечо l и на компоненту скорости $u \sin \theta$. Тогда, приравнявая этот момент величине (2), получаем

$$\omega l = u \sin \theta.$$

Подставляя отсюда u в (3), получаем искомую угловую скорость вращения патрубков

$$\omega = \frac{\operatorname{tg} \theta}{l} \sqrt{2 \left(H - \frac{P_0}{\rho} - \Pi \right)}.$$

Упражнения

1. Доказать, что для тензора любого ранга $T_{ik\dots}$, связанного со сплошной средой, и для произвольного материального объема среды $V(t)$, ограниченного поверхностью S , имеет место равенство

$$\int_V \left[p_{ik} T_{jl\dots k} + \rho T_{jl\dots} \left(\frac{dv_i}{dt} - f_i \right) \right] dV = \int_S T_{jl\dots} p_{ik} n_k dS.$$

2. Показать, что в стационарном потоке баротропной невязкой жидкости в поле потенциальных массовых сил вихри либо равны нулю, либо параллельны скорости в каждой точке потока (винтовое движение).

Указание: использовать уравнение динамической возможности движения (см. (2.1426) § 14)

3. Показать, что для любой материальной поверхности S справедлива формула

$$\frac{d}{dt} \int_S \text{rot}_n \mathbf{v} dS = \int_S \text{rot}_n \frac{d\mathbf{v}}{dt} dS.$$

Указание: воспользоваться формулами (1.79), (1.183) и выражением для полной производной

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \nabla \frac{v^2}{2}.$$

4. Показать, что если $F(t, \mathbf{r}) = 0$ — уравнение материальной поверхности, так что через δt ее уравнение будет $F(t + \delta t, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = 0$, где $\delta \mathbf{r}$ — смещение по направлению скорости движения среды $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, то F удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0.$$

5. Показать, что если несжимаемая невязкая жидкость вращается под действием массовой силы \mathbf{f} вокруг начала координат как твердое тело, т. е. $\mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ и $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$, то

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{f}.$$

Указание: воспользоваться формулой (1) задачи 13.6.

6. Показать, что если $\boldsymbol{\Omega}$ — вихрь в абсолютной системе координат, а $\boldsymbol{\Omega}_r$ — в относительной, то $\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_r = 2\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — скорость вращения относительной системы.

7. Записать уравнение (2.42) в обобщенных ортогональных координатах. Какой вид это уравнение имеет для симметричного тензора напряжений?

§ 14. Классификация сплошных сред и их различные модели. Замыкание основной системы уравнений движения сплошной среды и ее вид для разных сред

Как уже отмечалось, полученная на основании постулирования законов механики сплошной среды система уравнений (2.40)–(2.43) является незамкнутой. Для ее замыкания необходимо иметь дополнительно шесть скалярных соотношений между величинами ρ , T , \mathbf{v} , p_{ik} . Эти замыкающие уравнения формулируются в виде зависимостей компонент тензора напряжений от компонент тензора деформаций и компонент тензора скоростей деформаций. В свою очередь, эти зависимости имеют качественно различный характер для разных классов сплошной среды — жидкостей, газов, деформируемых твердых тел и др.

Поэтому характер замыкающих зависимостей положен в основу классификации сплошных сред.

Для основных классов сред замыкающие уравнения могут быть записаны в наиболее общем виде¹ следующим образом:

$$p_{ik} = p_{ik}(\mathbf{r}, L_{\alpha\beta\gamma\dots}, \lambda_{jrs\dots}, u_{lm}, v_{np}). \quad (2.110)$$

Здесь: v_{ik} , u_{ik} — компоненты тензоров скоростей деформаций и деформаций соответственно, $L_{\alpha\beta\gamma\dots}$ — тензорные функции, связанные с физическими свойствами пространства-времени и принимающие различные численные значения в разных системах координат.

Различные виды этого уравнения составляют предмет специальной науки — реологии (греч. *rhéos* — течение, *logós* — слово). *Реология* — область механики, которая изучает деформационные свойства сплошных сред и их связь с напряжениями и другими (например электромагнитными) характеристиками физических тел. Первые исследования по реологии появились в связи с изучением течения разных жидких и пластических тел; отсюда и название этой науки.

О замыкающем уравнении (2.110) часто говорят как о *реологическом уравнении* (законе, соотношении).

¹ Считается, что из деформационных факторов существенны лишь деформации и скорости деформации; не учитывается влияние ускорений деформаций, скорости изменения напряжений, ориентации молекул в частях и др. (см. «Класс неньютоновских сред» в этом параграфе).

Основные классы сплошной среды определяются зависимостью между тензорами P_{ik} , V_{ik} и U_{ik} в уравнении (2.110).

Явная зависимость P_{ik} от Γ и $L_{\alpha\beta\gamma\dots}$ означает, что *сам характер, вид замыкающего уравнения* зависит от свойств пространства, поскольку выбор начала системы координат и ее ориентации в пространстве определяет физический закон взаимозависимости P_{ik} , U_{ik} , V_{ik} . В дальнейшем предполагается *однородность и изотропность пространства*, в котором рассматривается движение среды и устанавливается закон (2.110). В силу этого явная зависимость P_{ik} от Γ и $L_{\alpha\beta\gamma\dots}$ исключается, так что замыкающие зависимости становятся инвариантными по отношению к переносу и повороту системы координат. Это, конечно, не значит, что рассматривается только однородное поле P_{ik} , поскольку поля U_{ik} и V_{ik} могут быть неоднородными.

Что касается функций $\lambda_{jrs\dots}$, то они, напротив, *связаны исключительно с физическими свойствами среды*, изменение их значений при поворотах выбранной координатной системы зависит только от свойств среды.

Для сред с *релаксацией (с памятью, с последствием)* замыкающие уравнения представляются с помощью функционалов, учитывающих как локальное состояние в данный момент времени, так и историю процесса в частице сплошной среды. О таких средах будет идти речь далее («Класс неньютоновских сред»).

Кроме того, два крупных подкласса сред — *изотропных и анизотропных* — выделяются в зависимости от того, меняются или нет физические свойства среды по различным пространственным направлениям.

Если физические свойства среды одинаковы по всем направлениям, то такая сплошная среда называется изотропной. Если же в сплошной среде характеристики ее физических свойств зависят от направления, в котором их наблюдают и измеряют, то мы имеем дело с анизотропной средой.

В случае изотропных сред тензоры $\lambda_{iklm\dots}$, характеризующие физические свойства среды, должны быть либо скалярами, либо комбинациями метрического тензора g_{ik} , ибо только этот тензор инвариантен относительно поворота системы координатных осей, что и обеспечивает справедливость закона (2.110) в произвольно ориентирован-

ных системах координат. Только в этом случае в изотропной среде, движущейся относительно новой системы координат точно так же, как она двигалась относительно старой, все физические явления будут выглядеть одинаковыми.

В анизотропных средах можно рассматривать симметрию свойств среды различных типов. Здесь мы на них останавливаться не будем: они рассмотрены подробно в специальных разделах механики сплошных сред (см., например, [35, 60], а также задачи 14.5–14.7 к этому параграфу).

Рассмотрим основные классы сплошных сред и соответственно — конкретный вид замыкающего уравнения (2.110).

1. Класс жидкостей и газов

Движение жидкостей и газов изучается в гидромеханике и газовой динамике, а при взаимодействии среды с электромагнитным полем — в магнитной гидромеханике, электрогидродинамике, динамике плазмы, гидромеханике намагничивающихся и поляризующихся сред.

Класс жидкостей и газов определяется зависимостью

$$p_{ik} = p_{ik}(v_{ik}), \quad p_{ik}(0) \neq 0. \quad (2.111)$$

Отметим, что условие $p_{ik}(0) \neq 0$ предполагает наличие напряжений и в покоящейся среде ($\mathbf{v} \equiv 0$).

Если считать зависимость (2.111) аналитической по v_{lm} , то, предполагая малость v_{lm} , в наиболее общем случае ее можно представить в виде бесконечного ряда

$$p_{ik} = \lambda_{ik} + \lambda_{iklm} v^{lm} + \lambda_{iklmnp} v^{lm} v^{np} + \dots \quad (2.112)$$

В случае малости компонент v_{ik} можно ограничиться линейной зависимостью, и тогда

$$p_{ik} = p_{ik}(0) + \lambda_{iklm} v^{lm}. \quad (2.113)$$

В этом случае говорят о *ньютоновских жидкостях и газах*.

Большинство реальных жидкостей и газов изотропны. В качестве неизотропных жидкостей в специальных разделах рассматривают жидкие кристаллы (см. «Класс неньютоновских сред») и магнитные жидко-

сти, или феррожидкости. Естественно, что для анизотропных жидкостей следует учитывать внутренние вращения, так что $p_{ik} \neq p_{ki}$. По магнитным жидкостям и жидким кристаллам имеется обширная литература (см., например, [5, 57, 70, 68]).

Для изотропных жидкостей и газов бесконечный ряд (2.112), в котором $p_{ik} = p_{ki}$ и, следовательно, $\lambda_{iklm\dots} = \lambda_{kilm\dots}$, может быть свернут до квадратичной зависимости между тензором напряжений $\hat{\mathbf{p}}$ и тензором скоростей деформации $\hat{\mathbf{v}}$.

Покажем это. Вследствие изотропности из (2.112) имеем

$$p_{ik} = a_0 g_{ik} + a_1 v_{ik} + a_2 v_i^l v_{lk} + a_3 v_i^l v_l^m v_{mk} + \dots,$$

или

$$\hat{\mathbf{p}} = a_0 \hat{\mathbf{g}} + a_1 \hat{\mathbf{v}} + a_2 \hat{\mathbf{v}}^2 + a_3 \hat{\mathbf{v}}^3 + \dots,$$

где g_{ik} — метрический тензор, а a_n — скаляры, которые могут зависеть от компонент матрицы тензора $\hat{\mathbf{v}}$, причем эта зависимость вследствие изотропности может осуществляться только через инварианты I_1, I_2, I_3 этой матрицы, так что

$$a_n = a_n(I_1, I_2, I_3) \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$\text{где } I_1 = v^i_{\cdot i}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[(v^i_{\cdot i})^2 - v^i_{\cdot k} v_{i \cdot}^k \right], \quad I_3 = \det \|v_{i \cdot}^k\|.$$

Зависимость $a_n = a_n(I_1, I_2, I_3)$ в явном виде можно получить, если в (2.212) подставить

$$\lambda_{ik} = a_0 g_{ik},$$

$$\lambda_{iklm} = k_{11} g_{ik} g_{lm} + k_{21} g_{il} g_{km} + k_{31} g_{im} g_{kl},$$

$$\lambda_{iklmrp} = k_{12} g_{ik} g_{lm} g_{rp} + k_{22} g_{il} g_{km} g_{rp} + k_{32} g_{im} g_{kl} g_{rp} + k_{42} g_{ik} g_{lr} g_{mp} + k_{52} g_{ik} g_{lp} g_{mr} + \dots$$

и провести достаточно громоздкие вычисления.

Таким образом, бесконечный ряд (2.112) для изотропных сред может быть записан в виде

$$\hat{\mathbf{p}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{\mathbf{v}}^n = a_0 \hat{\mathbf{g}} + a_1 \hat{\mathbf{v}} + a_2 \hat{\mathbf{v}}^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n \hat{\mathbf{v}}^n, \quad (2.114)$$

где $\hat{\mathbf{v}}^0 \equiv \hat{\mathbf{g}}$, a_k — скаляры.

Воспользуемся теоремой Гамильтона¹ — Кэли² (см., например, [42]), в соответствии с которой каждая матрица является корнем своего характеристического уравнения, так что в нашем случае

$$\hat{\mathbf{v}}^3 - I_1 \hat{\mathbf{v}}^2 + I_2 \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{g}} I_3 = 0. \quad (2.114a)$$

Отсюда всякая степень матрицы выше второй может быть выражена через $\hat{\mathbf{v}}^2$, $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{g}}$, так что

$$\hat{\mathbf{v}}^n = A_n \hat{\mathbf{v}}^2 + B_n \hat{\mathbf{v}} + C_n \hat{\mathbf{g}} \quad (n > 2),$$

где скаляры A_n , B_n , C_n суть функции I_1 , I_2 , I_3 . Тогда соотношение (2.114) может быть переписано в виде

$$\hat{\mathbf{p}} = A_0(I_1, I_2, I_3) \hat{\mathbf{g}} + A_1(I_1, I_2, I_3) \hat{\mathbf{v}} + A_2(I_1, I_2, I_3) \hat{\mathbf{v}}^2, \quad (2.115)$$

и, следовательно,

$$p_{ik} = A_0(I_1, I_2, I_3) g_{ik} + A_1(I_1, I_2, I_3) v_{ik} + A_2(I_1, I_2, I_3) v_i^l v_{lk}.$$

Эта формула представляет наиболее общий вид зависимости между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций для изотропных жидкостей и газов. В этом случае обычно говорят о *неньютоновских изотропных жидкостях и газах*.

Значения коэффициентов A_0 , A_1 и A_2 можно определить при помощи специально выбранного эксперимента. Так, например, если поставить эксперимент, при котором из всех компонент v_{ik} отлична от нуля v_{11} , то $I_1 = v_{11}$, $I_2 = I_3 = 0$. Следовательно, $p_{11} = A_0(I_1) + A_1(I_1)I_1 + A_2(I_1)I_1^2$; $p_{22} = p_{33} = A_0(I_1)$, откуда в определенном приближении малости I_1 можно определить коэффициенты степенных по I_1 рядов, которыми представлены A_0 , A_1 , A_2 (общий вид этих рядов можно найти в [56]).

¹ Гамильтон (Hamilton) Уильям Роуан (1805–1865) — ирландский математик и физик. Окончил Тринити Колледж (1827 г.), профессор Дублинского университета и директор астрономической обсерватории. Исследования в области оптики и механики. Разработал математический аппарат для решения задач геометрической оптики; развил аналогию между корпускулярной и волновой оптикой, использованную через сто лет Э. Шредингером при разработке волновой механики. Распространил теорию оптических явлений на механику (1834–1835 гг.), разработав общие принципы, в частности вариационный принцип; получил канонические уравнения механики. Построил своеобразную систему чисел — кватернионов. Идеи Гамильтона в настоящее время получают развитие в теории нелинейных волн, теории динамических систем и др.

² Кэли (Cayley) Артур (1821–1895) — английский математик. Окончил Кембриджский университет (1841 г.). В течение 20 лет занимался адвокатурой. Профессор Кембриджского университета с 1863 г. Заложил основы современной алгебраической геометрии. Создал алгебру матриц (термин принадлежит Кэли). Ввел понятие абстрактной группы. Занимался сферической астрономией.

Выражение (2.115) в силу своей структуры представляет собой зависимость компонент P_{ik} в виде многочленов любой степени от компонент v_{ik} .

Если ограничиться лишь линейной зависимостью между компонентами P_{ik} и v_{ik} (ньютоновские изотропные жидкости и газы), то из (2.115) имеем

$$P_{ik} = (k_0 + k_1 v_l^l) g_{ik} + k_2 v_{ik}, \quad (2.116)$$

где k_0, k_1, k_2 — скаляры, не зависящие от компонент v_{ik} .

Представляя тензор v_{ik} в виде суммы девиатора \dot{v}_{ik} , определяющего скорость сдвиговых деформаций, и шаровой его части, определяющей скорость изменения объема частицы, получаем

$$v_{ik} = \dot{v}_{ik} + \frac{1}{3} g_{ik} v_l^l,$$

где

$$\dot{v}_{ik} \equiv v_{ik} - \frac{1}{3} g_{ik} v_l^l; \text{ причем } \dot{v}_i^i = v_i^i - \frac{1}{3} g_i^i v_l^l = 0.$$

Тогда, переобозначая скаляры в (2.116), окончательно получаем принятую в гидродинамике форму зависимости (для ковариантных компонент тензоров):

$$P_{ik} = -p g_{ik} + 2\mu \dot{v}_{ik} + \zeta g_{ik} v_l^l = -p g_{ik} + P'_{ik}, \quad (2.117)$$

где $P'_{ik} \equiv 2\mu \dot{v}_{ik} + \zeta g_{ik} v_l^l$ — тензор вязких напряжений.

Здесь: скаляр p называется гидростатическим (равновесным, паскалевым) давлением, μ — коэффициент сдвиговой (первой) вязкости, ζ — коэффициент объемной (второй) вязкости. Эти величины могут зависеть от термодинамических параметров (скажем, ρ и T), но не зависят от v_{ik} .

При использовании зависимости (2.117) в полном виде говорят о вязких (ньютоновских) жидкостях и газах.

Возвращаясь к несколько формальному определению жидкости (газа), данному в начале раздела, можно сказать, что жидкость (газ) — это сплошная среда, в которой сопротивления сдвигу сколь угодно малы при малых

скоростях деформации, а преобладают нормальные напряжения, определяемые гидростатическим давлением. Отсюда и та легкость, с которой жидкость (газ) изменяет свою форму.

Подставляя замыкающее соотношение (2.117) в (2.40)–(2.43), получаем полную систему дифференциальных уравнений движения ньютоновских изотропных жидкостей и газов:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.117a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (2.118)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \dot{v}_{ik} \dot{v}^{ik} + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \lambda \Delta T, \quad (2.119)$$

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T). \quad (2.120)$$

Здесь принято: λ, μ, ζ — постоянные, $\mathbf{l} = \mathbf{M} = \mathbf{m}_n = 0$.

Поскольку термодинамические зависимости (2.120), а также λ, μ, ζ и \mathbf{f} считаются известными, система пяти скалярных уравнений (2.117a)–(2.120) служит для определения переменных \mathbf{v}, ρ, T . При этом следует иметь в виду выражение для материальных производных, а именно

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla e.$$

Остановимся на анализе этой системы и закона (2.117), который носит название *закона Навье¹ — Стокса* или обобщенного закона Ньютона. Кстати, уравнение (2.118) тоже часто называют уравнением Навье — Стокса.

¹ *Навье (Navier) Луи Мари Анри* (1785–1836) — французский ученый в области математики и механики, один из основоположников теории упругости (теория изгиба бруса и пластинок, 1821 г.), гидродинамики вязкой жидкости (уравнение Навье — Стокса, его частное решение с помощью метода Фурье). Окончил Политехническую школу (1804 г.) и Школу мостов и дорог (1806 г.) в Париже. Опубликовал (1826 г.) первый курс сопротивления материалов.

В покоящейся среде ($\mathbf{v} \equiv 0$) из (2.117) имеем $p_{ik} = -p g_{ik}$, так что $p_n^i = p^{ik} n_k = -p n^i$, или $\mathbf{p}_n = -p \mathbf{n}$. Таким образом, в покоящихся жидкостях и газах существуют только нормальные напряжения, причем если $p > 0$, то эти напряжения — сжимающие.

В классических задачах гидро- и аэромеханики всегда считается $p > 0$.

Физические основания для того, чтобы считать в жидкостях гидростатическое давление положительным, следующие.

Жидкости, не переходя в другое агрегатное состояние и не нарушая сплошности среды, могут выдерживать большие сжатия ($p > 0$). Как показывает ряд экспериментов [26], модуль объемной упругости жидкости $K = -V \frac{\delta p}{\delta V}$ (V — объем, занятый жидкостью, δV — изменение объема, δp — соответствующее изменение давления) очень сильно зависит от давления (увеличивается с ростом p) и от температуры (уменьшается с ростом T). Если изменение давления отсчитывается от нуля, то

$$p = -K u_i^i = -K \frac{\delta V}{V} = K \frac{\delta \rho}{\rho}.$$

Поскольку $K = K(p, T)$, то зависимость $p = p(u_i^i)$ у жидкостей носит всюду нелинейный характер. Зависимость $K(p)$ схематически представлена на графике рис. 73, а значения K для некоторых жидкостей при комнатной температуре и атмосферном давлении даны в табл. 1 (данные из [26]). Отметим для сравнения, что для воздуха $K = 1$ атм, а для стали $K = 2\,000\,000$ атм.

Таблица 1

Жидкость	K (атм.)	$p_{кр}$ (атм.)
Эфир	5400	-72
Спирт	9100	-39
Вода	21800	-280
Ртуть	256000	

Примерно такой же характер нелинейности, как на графике рис. 73, имеет убывание K с ростом температуры. В области комнатной температуры и атмосферного давления эти зависимости линейны. Для каждой жидкости можно определить экстраполяцией параметр $p_{кр}$ (рис. 73). Этот параметр определяет напряжение при деформации растяжения ($p_{кр} < 0$), при котором жидкость разрушается. Экспериментальные (данные из [26]) значения $p_{кр}$, полученные при $T = 293^\circ$ (см. табл. 1) показывают, что по сравнению с давлениями, которые выдерживают жидкости до перехода в твердое состояние, $p_{кр}$ очень мало. По опытам Бриджмена [9], вода, сжатая при комнат-

ной температуре до 40000 атм., не переходила в кристаллическое состояние. То же происходило и с органическими маслами. По другим данным, вода при 60°С и 16,5 тыс. атм. уже кристаллизуется, а при 21 тыс. атм. можно получить «горячий лед» при 76°С.

Таким образом, можно считать, что *все жидкости не сопротивляются растяжению и существуют как сплошная однофазная среда лишь при положительном гидростатическом давлении.*

Значение $p_{кр} = -280$ атм. (для воды) получено искусственным затягиванием момента кавитации, которая в обычных условиях, как показывают наблюдения, наступает почти сразу, как только p становится отрицательным.

При малых значениях положительного гидростатического давления жидкость переходит в двухфазную среду (см. § 12), поскольку в ней образуются пузырьки растворенных в жидкости газов. Образование этих пузырьков приводит к неустойчивости агрегатного состояния среды. Поскольку разрушение жидкости при понижении давления начинается с отдельных пузырьков газа, то фактически следует принимать, что жидкость существует лишь при $p > p_0$, где p_0 связано с давлением парообразования (см. рис. 70 и 73), а $p_{кр}$ — верхняя граница сопротивления жидкости растяжению.

В движущейся среде наряду с нормальными напряжениями, которые при движении отличаются от гидростатических, появляются и сдвиговые, касательные напряжения.

Что касается нормальных напряжений в движущейся среде, то, вычисляя их арифметическое среднее на трех взаимно перпендикулярных площадках, получим из (2.117)

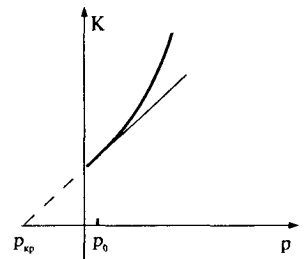


Рис. 73

$$\frac{1}{3} (p_{11}^* + p_{22}^* + p_{33}^*) = -p + \zeta v_l', \quad (2.121)$$

где $p_{ii}^* = p_{ii} / g_{ii}$ — физические компоненты тензора напряжений, которые в декартовой прямоугольной системе совпадают с обычными компонентами.

Стокс считал, что это среднее должно совпадать с гидростатическим давлением, что соответствует принятию $\zeta = 0$. Однако не во всех случаях можно считать коэффициент объемной вязкости равным нулю. Как показывают эксперименты (см., например, [26]), отношение ζ / μ , хотя и не зависит от температуры, изменяется в довольно широких пределах (табл. 2).

Таблица 2

Жидкость	ζ/μ
Толуол	12
Бензол	133
Спирт	1,4
Вода	2,8

Таким образом, в движущейся жидкости можно рассматривать *неравновесное давление* p_n , за которое естественно принять левую часть (с обратным знаком) выражения (2.121), и тогда

$$p_n - p = -\zeta \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2.122)$$

Вторая вязкость связана, таким образом, с неравновесными процессами, сопровождающимися изменением объема частиц. Если времена релаксации этих изменений велики, т. е. восстановление равновесия не успевает следовать за изменением объема, то вторая вязкость становится существенной. Такие явления наблюдаются в многофазных жидкостях и газах, если между фазами или компонентами происходит химическая реакция и восстановление равновесного состояния не успевает за ходом реакции, связанной с изменением концентрации (объема) веществ. Тогда при немалой скорости изменения объема, характеризуемой значением $\operatorname{div} \mathbf{v}$, влияние второй вязкости становится существенным. Она вносит вклад и в диссипацию энергии.

Вводя в рассмотрение неравновесное давление и привлекая уравнение неразрывности, уравнение энергии (2.119) можно записать в виде

$$\frac{de}{dt} = -p_n \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{2\mu_0}{\rho} \dot{v}_{ik} \dot{v}^{ik} + \frac{\lambda \Delta T}{\rho}. \quad (2.123)$$

Таким образом, первое слагаемое правой части можно рассматривать как мощность сил неравновесного давления по изменению объема среды. Она состоит из обратимой части, не связанной с диссипативными процессами, равной $-p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$, и необратимой части, равной

$\zeta (\operatorname{div} \mathbf{v}) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\zeta}{\rho} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2$, которая определяет диссипацию меха-

нической энергии вследствие изменения объема частиц среды. Эта часть входит как отдельное слагаемое в функцию, определяющую общий объем диссипации механической энергии вследствие необратимых процессов, связанных с вязкостью. Действительно, принимая принцип локального равновесия, имеем из первого начала термодинамики

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Выражая отсюда производную de/dt и подставляя ее в (2.119), получим, учитывая уравнение неразрывности:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 2\mu \dot{v}_{ik} \dot{v}^{ik} + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \lambda \Delta T. \quad (2.124)$$

Заметим, что поскольку элементарное изменение тепла в системе равно $\delta Q = T dS$, справа стоят слагаемые, ответственные за прирост тепла в единице объема в единицу времени в движущейся среде. Функция

$$\Phi = 2\mu \dot{v}_{ik} \dot{v}^{ik} + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \quad (2.125)$$

называется *диссипативной функцией*. Она равна мощности вязких напряжений в единице объема и определяет количество тепла, выделяемого в среде, в которое необратимым образом переходит потерянная механическая энергия жидкости. Силы вязкости вызывают деформацию среды как без изменения (сдвиговые вязкие напряжения), так и с изменением объема (нормальные напряжения, связанные с объемной вязкостью). Последнее слагаемое справа в (2.124) определяет тепло, притекающее к каждой частице в результате процессов теплопроводности.

Отметим, что в случае несжимаемой жидкости ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) диссипативная функция равна $\Phi = -\mu I_2$, а в безвихревом потоке ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$)

$$\Phi = \mu \Delta v^2 = \frac{\mu}{2} \Delta \Delta \phi^2, \quad \mathbf{v} = \nabla \phi \quad (\text{см. задачу 13.5}).$$

Чтобы более детально рассмотреть термодинамические процессы в любом материальном объеме и связанное с ними изменение энтропии, вернемся к общему уравнению изменения энтропии, сформулированному в § 13.

$$\text{Соотношение (2.77), записывая } \frac{1}{T} \operatorname{div} \lambda \nabla T = \operatorname{div} \lambda \frac{\nabla T}{T} + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T^2},$$

преобразуем к виду:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = \int_S \frac{\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}}{T} dS + \int_V \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}'_k \cdot \mathbf{v}_{;k} + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T} \right) dV.$$

Из этого выражения следует, что изменение энтропии в любом материальном объеме определяется, с одной стороны, потоком тепла через его поверхность S , а с другой — теми необратимыми процессами, которые происходят внутри этого объема: работой сил трения в каждой частице и передачей тепла от частицы к частице внутри объема. Если рассматриваемый материальный объем среды теплоизолирован $\left(\nabla T \cdot \mathbf{n} \Big|_S = \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = 0 \right)$, то изменение энтропии зависит только от внутренних необратимых процессов. При этом в соответствии со вторым началом термодинамики энтропия такого объема может только возрастать, т. е.

$$\int_V \frac{1}{T} \left(\mathbf{p}'_k \cdot \mathbf{v}_{;k} + \frac{\lambda (\nabla T)^2}{T} \right) dV > 0.$$

В случае жидкостей и газов, когда $\mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_k + p\mathbf{n}$, а $p'_{ik} = 2\mu \dot{v}_{ik} + \zeta g_{ik} v'_i$, имеем

$$\int_V \frac{1}{T} \left(2\mu \dot{v}_{ik} \dot{v}^{ik} + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \lambda \frac{(\nabla T)^2}{T} \right) dV > 0.$$

Каждый из трех интегралов в этом выражении должен быть неотрицательным, ибо всегда можно выбрать такой режим течения, что какие-то два слагаемых обратятся в нуль, а третье при этом должно остаться положительным. Следовательно, все феноменологические коэффициенты μ , ζ , λ должны быть больше нуля, даже если они непостоянны (при

получении неравенства постоянство этих коэффициентов не требовалось).

Более детальные сведения о коэффициентах λ , ζ и μ в уравнениях движения можно получить, если выйти из рамок феноменологического рассмотрения и обратиться к молекулярной структуре конкретной жидкости или газа.

Второе слагаемое из трех в законе Навье — Стокса (2.117) характеризует сдвиговые напряжения в среде. Оно обобщает известную формулу Ньютона для силы трения, отнесенной к единице площади параллельных пластин, между которыми находится вязкая жидкость:

$$\tau = \mu \frac{V^I - V^{II}}{h},$$

где V^I , V^{II} — скорости пластин, отстоящих на расстоянии h (рис. 74, а).

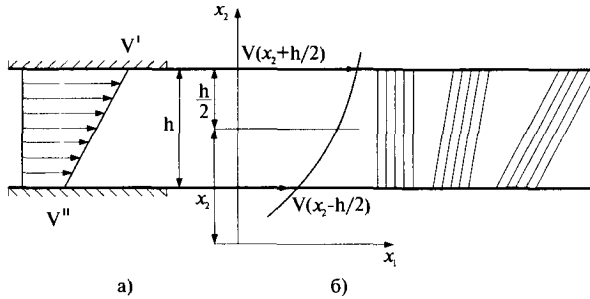


Рис. 74

Если же применять эту формулу локально, когда $V = V(x_2)$ и h мало, т. е. к течению в элементарном слое вязкой жидкости, то тогда в нем, в срединной плоскости (x_2) (см. рис. 74, б), напряжение трения равно

$$\tau = \mu \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x_2 + h/2) - V(x_2 - h/2)}{h} = \mu \frac{dV(x_2)}{dx_2}.$$

Это выражение совпадает с напряжением P_{12} , полученным из формулы Навье — Стокса для плоскопараллельного потока $\mathbf{v} = \mathbf{i}_1 v(x_1, x_2, x_3)$

$$P_{12} = 2\mu v_{12} = \mu \frac{\partial v}{\partial x_2}.$$

Заметим, что сдвиговые напряжения не вызывают изменения объема частиц среды. Так, например, в случае плоскопараллельного потока прямоугольная частица деформируется (из-за разности скоростей ее граней, совпадающих с линиями тока) в равновеликий ей по площади параллелограмм (см. рис. 74, б). Те же явления происходят локально в любом потоке.

Обосновать справедливость формулы Ньютона и закона Навье — Стокса в рамках феноменологического рассмотрения, конечно, нельзя. Для этого приходится обращаться к сведениям о молекулярном строении среды. При этом можно получить и выражение для коэффициента μ через характеристики молекулярного строения конкретной среды.

Покажем, как это сделать. Согласно представлениям о характере поверхностных сил и о молекулярной структуре среды поверхностная сила на какой-то поверхности внутри среды является следствием обмена количествами движения между соседствующими через эту поверхность слоями. Этот обмен происходит вследствие миграции молекул из одного слоя в другой. Если среда представляет собой газ, то молекулы в пределах своего свободного пробега пересекают поверхность между слоями. Если среда является жидкостью, то перенос количества движения происходит как за счет части молекул, хаотически движущихся в жидкости, так и (в основном) за счет колебательного движения около равновесного положения молекул в соседних слоях жидкости. Молекулы, которые попадают из более медленного слоя в более быстрый, подтормаживают его, воздействуя на этот слой с некоторой суммарной силой; наоборот, молекулы, попавшие из быстрого в более медленный слой, способствуют его ускорению также с определенной силой. Такая сила, отнесенная к единице поверхности, и есть напряжение вязкого трения между слоями.

Рассмотрим на основании элементарной кинетической теории возникновение силы трения в идеальном газе. Пусть \bar{c} — средняя статистическая скорость молекул, N — среднестатистическое число молекул в единице объема; эти величины вычисляются на основании функции распределения молекул. Если m — масса одной молекулы, то масса всех молекул, переходящих в единицу времени через единицу площади срединной поверхности слоя, имеющего толщину h (см. рис. 74, б) порядка длины свободного пробега молекул (примем $h = l$), равна $mN\bar{c}l$. Приравнявая разность количеств движения, переносимых через единицу площади поверхности контакта, напряжению вязкого трения между слоями толщиной $l/2$, получаем (с точностью до l^2)

$$\tau = \mu \frac{dV}{dx_2} = mN\bar{c} \left[V \left(x_2 + \frac{l}{2} \right) - V \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) \right] = mN\bar{c}l \frac{dV}{dx_2}.$$

Отсюда $\mu = mN\bar{c}l$. Поскольку длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна числу молекул в единице объема, то имеем

$$\mu = \alpha m\bar{c},$$

где α — числовой коэффициент.

Дальнейшее уточнение этой формулы требует как знания функции распределения молекул, так и принятия их физической модели. Существенным в полученной формуле является то, что коэффициент вязкости зависит не от плотности газа, а лишь от температуры, которая в кинетической теории определяет скорость \bar{c} , причем $\bar{c} \sim \sqrt{T}$. При этом следует отметить, что если для газов экспериментальная зависимость $\mu(T)$ представляет функцию, растущую с температурой, то в жидкостях вязкость резко падает

с ростом температуры. Это характерно для всех жидкостей и газов. Что же касается конкретных практических формул, то их существует достаточно много, как теоретических для определенных моделей молекул, так и экспериментальных. Наиболее употребительны следующие:

для газов

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n,$$

где $n \simeq 1$ для малых и $n \simeq 0,76$ для больших температур; μ_0 — вязкость при температуре $T_0 = 273^\circ$;

для жидкостей

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + \dots} \quad (\text{формула А. И. Бачинского}^1),$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = e^{A \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (\text{формула Я. И. Френкеля}^2),$$

где A , c_0 , c_1 , c_2 , ... — постоянные, зависящие от вида жидкости, причем для практических целей можно считать $c_2 = c_3 = \dots = 0$. Так, например, если t — температура в градусах Цельсия, то для воды хороший результат дает формула

$$\frac{\mu_0}{\mu} = 1 + 0,337t + 0,0022t^2.$$

Зависимости μ от температуры для воздуха, воды и смазочного масла представлены на рис. 75 в виде графиков (сплошные линии), где значения μ даны в системе единиц измерения МКС, так что размерность μ равна: $[\mu] = \text{кГ сек/м}^2$.

Аналогичным способом из элементарной кинетики можно получить выражение для другой феноменологической функции — коэффициента теплопроводности λ . Поскольку мигрирующие из одного изотермического слоя в соседний слой молекулы переносят не только количество движения, но и среднестатистическую кинетическую энергию молекул, пропорциональную количеству тепла (по определению), то общее количество тепла, переносимое в единицу времени через единицу площади контактного слоя, равно (с точностью до слагаемых порядка J^2)

¹ Бачинский Алексей Иосифович (1877–1944) — советский физик. Окончил Московский университет, работал там же. Работы по молекулярной физике, изучал поверхностные натяжение и вязкость жидкостей; установил (1912 г.) закон изменения вязкости жидкостей (закон Бачинского).

² Френкель Яков Ильич (1894–1952) — советский физик-теоретик. Окончил Петроградский университет (1916 г.), работал в Физико-техническом институте и в Политехническом институте в Ленинграде. Научные работы относятся ко многим разделам физики (строение твердых и жидких тел, физика ядра и элементарных частиц, физика твердого тела, магнетизм) и в ряде направлений были пионерскими. Независимо от Н. Бора разработал в 1936 г. капельную модель ядра, независимо от В. Гейзенберга — первую квантовомеханическую модель ферромагнетизма. В 1930 г. создал теорию доменного строения ферромагнетиков, предложил теорию движения атомов и ионов в кристаллах. Развил теорию вырожденного релятивистского газа, сформулировал (1939 г.) основы теории спонтанного деления тяжелых ядер. Автор более 300 статей и двадцати книг.

$$mN\bar{c}_v \left[T \left(x_2 + \frac{l}{2} \right) - T \left(x_2 - \frac{l}{2} \right) \right] = mN\bar{c}_v l \frac{dT}{dx_2},$$

где C_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

С другой стороны, это количество тепла равно взятой со знаком «минус» проекции на ось x_2 вектора потока тепла, т. е. $-Q_2 = \lambda \frac{dT}{dx_2}$. Из сравнения этих выражений получаем

$$\lambda = mN\bar{c}_v l. \tag{2.126}$$

Кроме того, учитывая выражение для μ , имеем

$$\lambda = \mu c_v.$$

Что касается температурной зависимости $\lambda(T)$, то следует отметить, что в случае газов, для которых обычно принимается $c_v = \text{const}$, характер $\lambda(T)$ повторяет $\mu(T)$.

Поэтому для газов безразмерная величина $Pr = \mu \frac{c_p}{\lambda}$, называемая числом Прандтля¹, почти не меняется с температурой (см. пунктирный график на рис. 75). Для большинства жидкостей $\lambda(T)$ лежит в пределах 0,08–0,6 ккал/м·час·град и убывает с ростом температуры (исключение составляет вода и глицерин, для которых наблюдается [73] повышение λ с ростом T). Число Прандтля для жидкостей, однако, уменьшается с ростом температуры почти так же, как и вязкость (см. рис. 75).

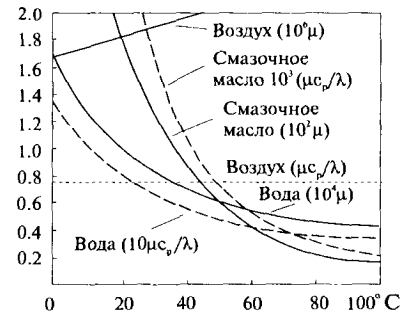


Рис. 75

Приведенные выше сведения для зависимостей $\mu(T)$, $\zeta(T)$, $\lambda(T)$ позволяют оценить справедливость принятия их постоянными в формулах (2.118)–(2.119). При необходимости эта система всегда может быть выписана для случая переменных λ , μ и ζ .

На практике часто употребляют *кинематическую вязкость* $\nu = \mu/\rho$. Она имеет размерность $L^2 t^{-1}$, т. е. такую же, как коэффициенты диффузии массы и тепла. И это не случайно, поскольку именно она определяет диффузию импульса $\rho\nu$ в результате молекулярного переноса. В данном случае молекулярный пере-

¹ Прандтль (Prandtl) Людвиг (1875–1953) — немецкий ученый в области механики, один из основателей аэродинамики, прикладной и экспериментальной гидроаэромеханики. Окончил Высшую техническую школу в Мюнхене. В 1925–1947 гг. — директор Института аэродинамики в Геттингене. Первые работы относятся к теории упругости (изгиб пластинок, устойчивость балок, аналогия между распределением и напряжением при кручении и формой провисания мыльной пленки). Ввел (1904 г.) представление о пограничном слое и отрывном течении, дал теорию крыла конечного размаха. Изучил турбулентность свободной атмосферы, переход от ламинарного течения к турбулентному. Предложил линеаризованную теорию крыла в дозвуковом потоке. Под его руководством построены аэродинамические трубы в Геттингене (1908, 1915 гг.).

нос импульса сглаживает неравномерность скорости жидкости, подобно тому, как, скажем, процесс диффузии тепла, определяемый величиной $\lambda/\rho c_p$, сглаживает неравномерность распределения температуры.

В табл. 3 приведены численные значения при температуре 20°C плотности ρ , коэффициентов вязкости μ , ν и ζ для некоторых жидкостей и газов.

Таблица 3

Среда	$\rho, \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$\mu, \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}$	$\nu, \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\zeta, \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{сек}}$	$\lambda, \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$
Воздух	$1,29 \cdot 10^{-3}$	$0,02 \cdot 10^{-2}$	$15,5 \cdot 10^{-2}$	$0,18 \cdot 10^{-6}$	$0,60 \cdot 10^{-4}$
Эфир	0,74	$0,24 \cdot 10^{-2}$	$0,32 \cdot 10^{-2}$	$0,24 \cdot 10^{-2}$	$0,32 \cdot 10^{-3}$
Спирт этиловый	0,79	$1,20 \cdot 10^{-2}$	$1,53 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$0,42 \cdot 10^{-3}$
Вода	1,00	$1,1414 \cdot 10^{-2}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$	$2,814 \cdot 10^{-2}$	$0,14 \cdot 10^{-2}$
Смазочное масло	0,94	$243,00 \cdot 10^{-2}$	$260,0 \cdot 10^{-2}$	$19,70 \cdot 10^{-2}$	$0,31 \cdot 10^{-2}$
Ртуть	13,60	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$0,12 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	0,02

В классе жидкостей и газов обычно выделяют модели, которые соответствуют различным приближениям основной системы уравнений (2.118)–(2.120). Рассмотрим особенности этих моделей.

Идеальная среда: невязкие жидкость и газ

В ряде задач эффектами от диссипации, связанной с вязкостью и теплопроводностью, можно пренебречь. При этом основная система значительно упрощается, и обычно говорят о том, что она описывает движение *идеальной (невязкой) жидкости и невязкого*¹ газа.

Итак, примем, что при движении идеальной среды всегда выполнены условия

$$|p'_{ik}| \ll |p|, \quad \left| \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x^i} \right| \ll \left| \frac{\partial p}{\partial x^i} \right|, \quad (2.127)$$

¹Под «идеальным газом» в физике понимают, как правило, газ, удовлетворяющий уравнению Клапейрона. В таком газе длина свободного пробега молекул значительно больше радиуса молекулярного взаимодействия; заметим, что для воздуха при нормальных условиях длина свободного пробега молекул $\sim 10^{-5}$ см, а радиус взаимодействия $\sim 10^{-7}$ см.

$$\left| 2\mu \dot{v}_{ik} \dot{v}^{ik} + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \lambda \Delta T \right| \ll \left| p \operatorname{div} \mathbf{v} \right|,$$

где $p'_{ik} = 2\mu \dot{v}_{ik} + \zeta g_{ik} v_l{}^l$ — тензор вязких напряжений, так что $p_{ik} = -pg_{ik} + p'_{ik}$.

Чтобы не сложилось впечатление об идеальной среде как о нереальной сплошной среде (в каком газе и жидкости отсутствует вязкость и теплопроводность?), остановимся на анализе условий (2.127) и выясним, в каких реальных ситуациях они могут быть удовлетворены.

Прежде всего надо иметь в виду, что коэффициенты μ , ζ и λ , как мы видели, для большинства жидкостей и особенно газов весьма малы (см. табл. 3). Однако условия (2.127) требуют не только малости этих коэффициентов, но и малости градиентов скоростей и температур, которые определяют необратимые процессы, т. е. течений специального вида с не слишком большими градиентами. Оказывается, что такие течения не столь уж редки; поэтому их рассмотрение в приближениях (2.127) представляет практический интерес. Как будет показано дальше, в тех случаях, когда силы инерции стационарного потока (слагаемое $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ в уравнении (2.118)) значительно превосходят силы вязкости (последние два слагаемых), влияние вязких напряжений существенно только в пристеночном слое у твердых тел, в так называемом *пограничном слое*. Именно в нем градиенты скорости велики и предположения (2.127) не имеют места. Но этот слой имеет очень малую толщину, и тем меньше, чем больше инерционные силы и меньше силы вязкости. Во всей остальной области потока реальной вязкой жидкости и вязкого газа, где градиенты скорости сравнительно малы, силы вязкости будут пренебрежимо малы по сравнению с силами давления и силами инерции. В этой области потока, т. е. почти всюду, за исключением тонкого пристеночного слоя среды, можно, таким образом, пользоваться моделью идеальной среды.

Кроме этого, следует иметь в виду целый ряд практически важных задач, в решении которых приближение идеальной среды дает вполне удовлетворительные результаты, совпадающие с экспериментом. Прежде всего здесь следует указать на задачи баллистики и задачи фильтра-

ции. Даже такие задачи, как движение сыпучих (гранулированных) сред, вполне могут быть решены в рамках приближения идеальной среды (теория «сухой воды»). Наконец, необходимо отметить почти все задачи газовой динамики, где в первую очередь учитывают сжимаемость и пренебрегают вязкостью газа.

Итак, полная система уравнений, определяющих движение идеальной среды, имеет вид (см. (2.117а)–(2.120)):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p, \quad \rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T).$$

Принимая принцип локального равновесия и вводя в уравнение энергии функцию энтропии вместо внутренней энергии, получаем:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2.128}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p, \tag{2.129}$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad p = p(\rho, s). \tag{2.130}$$

Эта система служит для определения функций ρ , \mathbf{v} и p (или s). Как видно из нее, в идеальной среде существуют только нормальные напряжения ($\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$), а энтропия каждой частицы среды остается неизменной, хотя распределение энтропии по частицам, вообще говоря, неоднородно и нестационарно, поскольку функция $s(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0.$$

Уравнение (2.129), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

в гидромеханике названо именем Эйлера, который впервые его получил и применил к изучению движения несжимаемых жидкостей.

Система (2.128)–(2.130) положена в основу обширной области механики сплошных сред — газовой динамики. С помощью этой системы, рассматриваемой при $\rho = \text{const}$, изучалось движение летательных аппаратов на заре авиации, когда скорость полета была значительно меньше звуковой.

Несжимаемые жидкость и газ. Баротропные среды

Другим важным приближением системы (2.117a)–(2.120) является модель несжимаемой среды, которая, как и модель идеальной среды, имеет широкое применение.

Под *несжимаемой* понимается среда, в которой величина любого материального объема не меняется с течением времени.

В соответствии с этим определением, вспоминая гидромеханический смысл $\text{div } \mathbf{v}$, из (2.117a)–(2.120) получаем:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \tag{2.131}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho = 0, \tag{2.132}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}, \tag{2.133}$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 2\mu v_{ik} v^{ik} + \lambda \Delta T, \tag{2.134}$$

$$s = s(\rho, T). \tag{2.135}$$

Из этой системы определяют ρ , T , \mathbf{v} , p . Для несжимаемых сред давление, как термодинамический параметр, исключается из рассмотрения (первое начало термодинамики имеет вид $Tds = de$) и фигурирует в (2.133) как чисто гидродинамическая переменная. Это означает, что изменение давления вследствие изменений гидродинамических характеристик потока мало и не может быть причиной сколько-нибудь заметного изменения плотности среды.

Заметим, что в этом рассмотрении предположение о постоянстве λ и μ «расщепляет» систему: уравнения (2.131)–(2.133) позволяют найти ρ , \mathbf{v} и p независимо от уравнений (2.134), (2.135), из которых затем можно найти T и s по известным ρ и \mathbf{v} .

Уравнение (2.132), конечно, удовлетворяется при $\rho = \text{const}$. Однако это уравнение может быть удовлетворено и полем $\rho = \rho(t, \mathbf{r})$ при подходящем поле скоростей. Таким образом, несжимаемая жидкость ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) может иметь неоднородное поле плотности, но при этом плотность каждой частицы не меняется при ее движении ($dp/dt = 0$), а в стационарном случае ($\partial\rho/\partial t = 0$) плотность частицы неизменна вдоль линии тока.

В связи с этим обстоятельством в гидроаэромеханике рассматривают так называемые *баротропные среды*, для которых уравнение состояния имеет вид $p = p(\rho)$. Для баротропных сред вместо давления p в уравнения движения можно ввести функцию $\mathcal{P}(\rho) = \int \frac{dp(\rho)}{\rho}$ и тогда

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \mathcal{P}(\rho).$$

Газ, как это следует из уравнения состояния $p = p(\rho, T)$ (или $p = p(\rho, s)$) движется как баротропная среда, если в каждой его частице процессы либо изотермичны ($T = \text{const}$), либо изэнтропичны ($s = \text{const}$).

Но и несжимаемая жидкость ($\text{div } \mathbf{v} = 0$) может рассматриваться как баротропная среда с уравнением состояния $p = p(\rho)$. Это имеет место тогда, когда необходимо учитывать изменения давления при небольших изменениях плотности (зона $0 < 1/\rho < a$ на графике рис. 70). Как практически важный случай таких несжимаемых, т. е. сохраняющих объем любой частицы, но обладающих непостоянным полем плотности сред, следует отметить так называемые *стратифицированные среды* (лат. *stratum* — слой). В этих средах (морская вода) допускается неоднородное распределение физических свойств на разных глубинах. Для таких сред уравнением состояния может служить уравнение (2.28а). Земная атмосфера также является стратифицированной средой.

Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать баротропные среды, которые могут быть как несжимаемыми ($\text{div } \mathbf{v} = 0$, $\rho \neq$

$\neq \text{const}$), так и сжимаемыми (газ при изотермичных или изэнтропичных процессах).

Среда, в которой $\rho = \text{const}$, является частным случаем баротропных сред: для нее $\mathcal{P}(\rho) = p/\rho$.

Отметим, что баротропными могут быть не только идеальные среды.

Как известно (см. § 4), если скорость жидкости имеет потенциал, то ускорение тоже является потенциальным вектором. В баротропной идеальной жидкости при потенциальных массовых силах поле ускорения является безвихревым независимо от того, безвихревое или нет поле скорости. Действительно, из (2.129) имеем

$$\text{rot} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{rot} \left(\mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \right) = \text{rot} (-\nabla\Pi - \nabla\mathcal{P}(\rho)) = 0.$$

Теорема Лагранжа

Важное свойство поля скоростей баротропных сред при потенциальных массовых силах

сформулировано в теореме, принадлежащей Лагранжу.

При движении баротропной среды в поле потенциальных массовых сил циркуляция скорости по любому замкнутому материальному контуру не меняется с течением времени.

Действительно, на основании теоремы Кельвина — Томсона (см. § 8) и (2.129) для $\mathbf{f} = -\nabla\Pi$ и $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\mathcal{P}(\rho)$ получаем

$$\frac{d}{dt} \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \int_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{L} = \int_L (-\nabla\Pi - \nabla\mathcal{P}(\rho)) \cdot d\mathbf{L} = 0,$$

так что

$$\Gamma = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \Gamma_0 = \text{const}.$$

Таким образом, если в какой-то момент времени движение жидкости (газа) было безвихревым, то оно останется безвихревым во все время движения среды. Иными словами, *потенциальные массовые силы не могут привести к возникнованию вихрей в баротропной среде.*

Этот же результат следует и из уравнения динамической возможности движения (см. (2.142б) и пример 1 в § 10), которое можно рассматривать как линейное дифференциальное уравнение относительно завихренности $\text{rot } \mathbf{v} \equiv \mathbf{\Omega}(t, \mathbf{r})$. Поскольку это уравнение однородное, то его решение есть $\mathbf{\Omega}(t, \mathbf{r}) \equiv 0$, как только начальное условие имеет вид $\mathbf{\Omega}(t_0, \mathbf{r}) = 0$, так что завихренность каждого элемента жидкого объема остается равной нулю, если она была нулевой в начальный момент времени.

Подчеркнем, что речь здесь идет о материальных областях среды (материальный контур, область, где $\mathbf{\Omega} = 0$ или $\mathbf{\Omega} \neq 0$ и т. п.), а не о геометрических областях, которые либо фиксированы, либо имеют предписанную скорость.

Это общее свойство обеспечило важное место безвихревых течений в гидромеханике и их значение с точки зрения широких практических применений.

С помощью системы (2.131)–(2.135) исследуют движение всех капельных жидкостей, если пренебрегают их стрикционными свойствами. В то же время оказывается, что и для газов при выполнении некоторых условий, накладываемых на параметры их движения, также можно пользоваться этой системой. Конечно, сжимаемость газа больше, чем у любой жидкости, но при движении газа стоит проследить, насколько при данном виде движения газ может сжиматься, т. е. насколько меняется величина его материальных объемов. Для сильного сжатия газа необходимо значительное изменение давления. Но при небольших скоростях движения ($v^2 \ll a^2$, где $a = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$ — скорость распространения звука) или при не слишком большом влиянии массовой силы (небольшие размеры задачи по сравнению с масштабом высоты атмосферы, т. е. $L_0 \ll a^2 g^{-1}$), или, наконец, при не очень больших частотах колебаний (по сравнению с частотами акустических задач) газ можно рассматривать как несжимаемую среду и пользоваться системой (2.131)–(2.135).

Более конкретную оценку условий, при которых среду допустимо считать несжимаемой, или, что то же, считать поле скоростей соленоидальным, можно получить следующим образом (см., например, [10]).

Пусть V_0 , L_0 — характерные для рассматриваемой задачи скорость и длина. Тогда приближение несжимаемости означает $|\text{div } \mathbf{v}| \ll (V_0 / L_0)$, или, как следует из уравнения неразрывности:

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right| \ll \frac{V_0}{L_0}. \quad (2.136)$$

Учитывая, что $p = p(\rho, s)$, имеем

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{ds}{dt}.$$

Определяя отсюда $d\rho/dt$ и подставляя в (2.136), получим

$$\frac{1}{\rho a^2} \left| \frac{dp}{dt} - \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{ds}{dt} \right| \ll \frac{V_0}{L_0}, \quad (2.137)$$

где $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ — квадрат изэнтропической скорости звука. Далее, учитывая (2.133) и предполагая, что эффект вязкости значительно меньше влияет на изменение давления со временем, чем на его распределение в пространстве, получаем:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}; \quad (2.138)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = -a^2 \frac{(\partial \rho / \partial T)_p}{(\partial s / \partial T)_p} = \frac{\beta T}{c_p} a^2 \rho.$$

Здесь использовано термодинамическое тождество для трех величин p, ρ, s , связанных одним уравнением $p = p(\rho, s)$, а также определение теплоемкости при постоянном давлении $c_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p$ и коэффициента теплового расширения

$$\beta = \rho \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial T} \right)_p = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

Тогда, используя выражение для ds/dt из (2.134), запишем (2.137) в окончательной форме

$$\frac{1}{\rho a^2} \left| \frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{\beta a^2}{c_p} (2\mu v_{ik} v^{ik} + \lambda \Delta T) \right| \ll \frac{V_0}{L_0}. \quad (2.139)$$

Для выполнения (2.136) достаточно обеспечить сильное неравенство для каждого из слагаемых под знаком модуля в (2.139).

Первое слагаемое в (2.139) обращается в нуль в стационарном потоке. В случае нестационарности, предполагая, что изменение давления, умноженное на характерное время t_0 , равно характерному количеству движения $\rho V_0 L_0$, из

$$\frac{1}{\rho a^2} \left| \frac{\partial p}{\partial t} \right| \ll \frac{V_0}{L_0} \quad (2.140)$$

получаем

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{\rho V_0 L_0}{t_0^2} \ll \frac{V_0}{L_0}, \text{ или } \frac{L_0^2}{a^2 t_0^2} \ll 1.$$

Отсюда следует, что только при очень сильной нестационарности, соответствующей, например, $t_0 \sim L_0 a^{-1}$, что характерно для задач акустики, условие (2.140) не выполняется.

Неравенство

$$\frac{1}{\rho a^2} \left| \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \right| \ll \frac{V_0}{L_0}$$

в предположении, что $\left| \frac{\partial}{\partial t} (v^2) \right| \sim |\mathbf{v} \cdot \nabla v^2| \sim \frac{V_0^3}{L_0}$, приводит к условию

$$\frac{V_0^2}{a^2} \ll 1.$$

Это означает, что характерная скорость потока должна быть значительно меньше скорости звука, которая для воздуха при нормальных условиях равна 340 м/сек, а для воды — 1470 м/сек. Так что при движении тел в воздухе со скоростями менее 100 м/сек сжимаемостью воздуха можно пренебречь.

Оценка

$$\frac{1}{\rho a^2} |\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}| \ll \frac{V_0}{L_0} \quad (2.141)$$

приводит к неравенству ($|\mathbf{f}| \sim g$ — ускорению силы тяжести)

$$\frac{gL_0}{a^2} \ll 1.$$

Если учесть, что $a^2 = \kappa p / \rho$ (квадрат скорости звука для политропного газа), то это неравенство, записанное в виде

$$L_0 \ll \frac{p}{\rho g} \kappa,$$

означает, что характерный размер задачи должен быть значительно меньше масштаба высоты атмосферы $p/\rho g \approx 8,4$ км, т. е. высоты, на которой давление и плотность в « e » (основание натурального логарифма) раз меньше, чем у поверхности Земли. Таким образом, если исключить задачи метеорологии, то и условие (2.141) выполняется.

Наконец, перейдем к оценке

$$\frac{1}{\rho a^2} \left| \frac{\beta a^2}{c_p} (2\mu v_{ik} v^{ik} + \lambda \Delta T) \right| \ll \frac{V_0}{L_0}.$$

Это приводит (в предположении, что производная величины по координате равна отношению ее масштаба к L_0) к оценкам

$$\frac{\beta \mu V_0}{\rho c_p L_0} \ll 1, \quad \frac{\beta \lambda T_0}{\rho L_0 V_0} \ll 1.$$

Численно оценивая входящие сюда физические характеристики воздуха и воды, получаем:

для воздуха

$$\frac{V_0}{L_0} \ll 10^{11} \text{ сек}^{-1}, \quad \frac{T_0}{L_0 V_0} \ll 10^5 \frac{\text{град} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2},$$

для воды

$$\frac{V_0}{L_0} \ll 10^{14} \text{ сек}^{-1}, \quad \frac{T_0}{L_0 V_0} \ll 10^7 \frac{\text{град} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2}.$$

Эти неравенства удовлетворяются для масштабов величин в наземных условиях. Их физический смысл состоит в том, что нагрев от диссипации и теплопроводности среды не нарушает условия несжимаемости.

Итак, если исключить задачи акустики, для которых $L_0 \sim at_0$, задачи метеорологии, для которых $gL_0 \sim a^2$, то при скоростях движения $V_0 \ll a$ и жидкость, и газ можно рассматривать как несжимаемые среды и пользоваться системой (2.131)–(2.135).

Для несжимаемых сред можно рассматривать только то изменение энтропии, которое происходит при постоянном давлении, поскольку изменения давления, происходящие в гидродинамическом потоке, малы и ими при оценках свойств сжимаемости среды можно пренебречь.

Это позволяет вообще исключить из рассмотрения уравнение $s = s(\rho, T)$, используя определение теплоемкости:

$$\left(\frac{\delta Q}{\delta T} \right)_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = c_p,$$

так что уравнение (2.134) может быть записано в виде

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = 2\mu v_{ik} v^{ik} + \lambda \Delta T. \quad (2.142)$$

Если в пределах модели несжимаемых сред рассмотреть *невязкие несжимаемые жидкости и газы*, то полная система уравнений для них имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{f} - \nabla p, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = 0. \end{aligned}$$

Условия, при которых можно пренебречь правой частью уравнения (2.142), получим, сравнивая величины ее слагаемых с величиной конвективного слагаемого $\rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T$ слева:

$$\frac{|2\mu v_{ik} v^{ik}|}{\rho c_p |\mathbf{v} \cdot \nabla T|} \sim \frac{\nu V_0}{c_p L_0 T_0} = \frac{\nu}{V_0 L_0} \cdot \frac{V_0^2}{c_p T_0} \sim \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{V_0^2}{a^2},$$

$$\frac{|\lambda \Delta T|}{\rho c_p |\mathbf{v} \cdot \nabla T|} \sim \frac{\lambda}{c_p \mu} \cdot \frac{1}{\text{Re}} = \frac{1}{\text{Pr Re}}.$$

Здесь безразмерная величина (число Рейнольдса¹) $\text{Re} = V_0 L_0 / \nu$, имеющая порядок отношения сил инерции к силам вязкости, предполагается большой, т. е. $\text{Re} \gg 1$. В силу того, что $V_0^2 \ll a^2$ для несжимаемых сред, а число Прандтля $\mu c_p / \lambda$ равно (по порядку): единице (для воздуха), 10^{-1} (для воды и ртути), 10^3 (для смазочного масла), — вся правая часть уравнения (2.142) в рассматриваемом приближении несжимаемых невязких сред может считаться равной нулю.

Таким образом, в этом случае температура каждой частицы не меняется в процессе ее движения, а поле температуры в движущейся среде определяется конвективным переносом и характером нестационарности.

Уравнение динамической возможности движения жидкостей (газов)

При изучении жидкостей и газов принципиальное значение имеет так называемое уравнение динамической возможности движения

жидкостей, в формулировке которого при условии баротропности среды и потенциальности массовых сил исключены силовые воздействия.

Итак, пусть $\mathbf{f} = -\nabla \Pi$, $\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla P(\rho)$ и коэффициенты μ и ζ (для ньютоновских сред) постоянны, так что уравнение (2.118) может быть записано в виде

¹ Рейнольдс (Reynolds) Осборн (1842–1912) — английский физик и инженер. Окончил Кембриджский университет (1867 г.); в 1868–1905 гг. — профессор Манчестерского университета. Основные труды относятся к теории турбулентности (статистическая теория, тензор турбулентных напряжений), теории динамического подобия и перехода ламинарного потока в турбулентный (1883 г.), гидродинамической теории смазки. Исследовал явления кавитации, теплопередачи от стенок сосуда к жидкости, методы определения механического эквивалента тепла. Сконструировал ряд турбин и центробежных насосов.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla (\Pi + \mathcal{P}(\rho)) + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\mu}{3\rho} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Записывая $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) + \nabla(v^2/2)$ и применяя операцию rot к обеим частям полученного уравнения, имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} = \mu \operatorname{rot} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\rho} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \operatorname{rot} \frac{\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}}{\rho}.$$

В этом уравнении полностью исключены массовые и поверхностные силы (давление), так что каковы бы они ни были, поля скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ и плотности $\rho(t, \mathbf{r})$ обязательно должны ему удовлетворять.

Для несжимаемой среды ($\rho = \text{const}$) предыдущее уравнение приобретает вид

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}, \quad (2.142a)$$

а для невязкой сжимаемой (баротропной) —

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.142б)$$

Последнее уравнение является условием того, что вихревые линии движущейся сжимаемой среды все время состоят из одних и тех же частиц (условие сохраняемости векторных линий по Фридману — см. § 10). Оно и было названо А. А. Фридманом *уравнением динамической возможности движения*.

Каким бы образом ни двигалась баротропная сжимаемая среда в поле потенциальных массовых сил, ее поле скоростей обязательно должно удовлетворять уравнению (2.142б).

2. Класс упругих сред

Движение упругих сред изучается в теории упругости. Этот класс сплошных сред характеризуется зависимостью

$$P_{ik} = P_{ik}(u_{lm}); P_{ik}(0) = 0. \quad (2.143)$$

Условие $p_{ik}(0) = 0$ означает, что в недеформированном упругом теле ($\mathbf{u} \equiv 0$) напряжения всюду равны нулю. Таким образом, упругая среда после снятия внешних воздействий всегда возвращается в свое первоначальное («естественное») состояние, характеризуемое отсутствием напряжений и деформаций.

Предполагая аналитичность зависимости (2.143), можно считать ее представимой в виде бесконечного ряда:

$$p_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} + \lambda_{iklmnp} u^{lm} u^{np} + \dots \quad (2.144)$$

Множители $\lambda_{ikl\dots}$ носят название *упругих коэффициентов*. В случае достаточно малых значений компонент тензора деформаций u_{ik} часто ограничиваются линейной зависимостью

$$p_{ik} = \lambda_{iklm} u^{lm}.$$

Если λ_{iklm} — компоненты постоянного тензора упругих коэффициентов и u^{lm} — компоненты тензора малых деформаций, то эта линейная модель упругого тела называется *упругим телом Гука*.

В дальнейшем будем отличать *динамическую линейность* реологического уравнения (динамически линейно деформируемое упругое тело), когда при линейной зависимости между тензорами $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ тензор деформации может включать нелинейные слагаемые, от *кинематической линейности*, когда ограничиваются рассмотрением малых деформаций, так что $u_{ik} = (u_{i;k} + u_{k;i})/2$.

К упругим средам относят все деформируемые твердые тела, если их деформация такова, что после удаления сил, вызывающих деформацию, тело полностью восстанавливает свою первоначальную форму.

Следует отметить, что большинство упругих сред анизотропны, поскольку имеют кристаллическую структуру. Все кристаллы обладают анизотропией, и виды этой анизотропии весьма многообразны. Анизотропны многие искусственно изготавливаемые деформируемые твердые тела (компози-ты). В то же время применяемые в технике металлы и их сплавы имеют мелкокристаллическую структуру в виде беспорядочно расположенных кристаллических зерен. Поскольку зерна значительно меньше (размеры их до десятков микрон, т. е. порядка 10^{-3} см), чем применяемые в практике образцы, то металлы рассматривают как изотропные упругие тела.

И хотя некоторые виды термической обработки металлов (ковка, прокатка и т. п.) приводят к нарушению изотропности, мы сосредоточим внимание в первую очередь на изотропных твердых телах не только из-за их широкого распространения в технике, но и имея в виду наглядность основных закономерностей.

В случае изотропных упругих сред ряд (2.144), точно так же как и ряд (2.112), может быть свернут, так что

$$p_{ik} = B_0(J_1, J_2, J_3)g_{ik} + B_1(J_1, J_2, J_3)u_{ik} + B_2(J_1, J_2, J_3)u_{i\ell}u_{k\ell}^{\ell}, \quad (2.145)$$

где

$$J_1 = u_{i\ell}^{\ell}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \left[(u_{i\ell}^{\ell})^2 - u_{i\ell}^{\ell} u_{i\ell}^{\ell} \right], \quad J_3 = \det \| u_i^{\cdot k} \| \quad (2.146)$$

— инварианты тензора деформаций u_{ik} , а скалярный коэффициент B_0 обращается в нуль при равном нулю тензоре деформации.

В случае линейной зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора малых деформаций, когда $u_{ik} = (u_{i;k} + u_{k;i})/2$ (линейная теория упругости), из (2.145) имеем

$$p_{ik} = b_1 u_{i\ell}^{\ell} g_{ik} + b_2 u_{ik}.$$

Вводя девиатор $\overset{\circ}{u}_{ik}$ тензора деформаций u_{ik} и переобозначая коэффициенты, эту зависимость можно записать в виде

$$p_{ik} = 2\mu' \overset{\circ}{u}_{ik} + \lambda' g_{ik} u_{i\ell}^{\ell}. \quad (2.147)$$

В этом выражении, которое носит название *обобщенного закона Гука*¹, коэффициенты λ' и μ' называются соответственно *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига*. Второе слагаемое правой части (2.147) определяет напряжения в упругом теле, которые вызваны лишь изменением объема (напряжения сжатия и растяжения), а первое слагаемое —

¹ Гук (Hookе) Роберт (1635–1703) — английский ученый-энциклопедист. Учился (1653–1654 гг.) в Оксфордском университете, профессор математики Грэмем-Колледжа (1664–1703 гг.). Научное творчество Гука охватывает многие области естествознания. Открыл (1678 г.) закон теории упругости (закон Гука); изучал явления капиллярности и поверхностного натяжения жидкости. Выказал (1674 г.) идею закона всемирного тяготения, предвосхитив во многих чертах небесную механику Ньютона. Считал, что тепло, свет и тяготение являются колебательными процессами. Усовершенствовал микроскоп и установил клеточное строение тканей (ввел термин «клетка»). Построил первый воздушный насос, работал над проектами летательных аппаратов.

сдвиговые, касательные напряжения, которые не связаны с изменением объема ($\dot{u}_i^i = 0$).

Обобщенный закон Гука совмещает динамическую и кинематическую линейность деформации упругого тела.

Иногда закон (2.132) записывают в другом виде, называя его формулой Ламэ¹, а именно,

$$p_{ik} = 2\tilde{\mu}u_{ik} + \tilde{\lambda}g_{ik}u_i^i.$$

Сделаем несколько замечаний относительно модели упругого тела.

Упругое тело отличается от жидкостей и газов ограниченной подвижностью своих частиц. Если в жидкостях и газах частицы могут разойтись на любое расстояние, то в упругом теле они могут лишь *смещаться* друг относительно друга на величину вектора смещения $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ со скоростями $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ и ускорениями $d^2\mathbf{u}/dt^2 = d\mathbf{v}/dt$. Почти все деформируемые тела разрушаются уже при достаточно малом относительном смещении их частиц. Поэтому и в модели упругого тела принимаются малыми не только \mathbf{u} , но и u_{ik} , скорости \mathbf{v} и ускорения $d\mathbf{v}/dt$ частиц. Кроме того, поскольку $\text{div } \mathbf{u}$ определяет малое изменение объема частиц, то можно считать, что на малую величину отклоняется от постоянного значения ρ_0 в недеформируемом состоянии и плотность упругого тела, т. е. $\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \rho'(t, \mathbf{r})$, причем $|\rho'| \ll \rho_0$.

Таким образом, в *линейной теории упругости* принимается не только закон Гука (2.147), но и считается, что величины ρ' , $|\mathbf{u}|$, $|\partial\mathbf{u}/\partial t|$, $|\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2|$, $|\partial\mathbf{u}/\partial x_k|$ имеют один и тот же порядок малости. Тогда:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} \approx \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \approx \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

¹ Ламэ (Lamé) Габриэль (1795–1870) — французский инженер, математик и механик. Окончил Политехническую школу (1817 г.) и Горную школу (1820 г.) в Париже. В 1820–1832 гг. работал в Петербургском институте инженеров путей сообщения. С 1832 г. — профессор Политехнической школы и Сорбонны в Париже. Исследования посвящены теории упругости и математической физике. Автор первого мемуара по теории упругости («Лекции по математической теории упругости твердых тел» (1852 г.) и «Курса рациональной математической физики», 1869 г.). Ввел понятие эллипсоида напряжений, исследовал равновесие сферических оболочек, арок. В работе о криволинейных координатах и их применении в механике ввел функции Ламэ. В его работах теория тесно связана с практикой.

Кроме того, принимается, что упругие среды обладают постоянной теплоемкостью, так что в условиях линеаризации из (2.30) следует:

$$de = Tds = \delta Q = cdT.$$

В силу этого система дифференциальных уравнений движения (2.40)–(2.43) для линейного упругого тела принимает вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \quad (2.148)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{f} + \left(\lambda' + \frac{\mu'}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu' \Delta \mathbf{u}, \quad (2.149)$$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T. \quad (2.150)$$

Из первого уравнения (при условии $\rho'|_{t=0} = 0$; $(\operatorname{div} \mathbf{u})_{t=0} = 0$) определяем

$$\rho' = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Второе уравнение (2.149) служит для определения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$, в нем обычно принимают $\rho \approx \rho_0$. Это уравнение является основным для всей линейной теории упругости, поскольку позволяет при соответствующих начальных и краевых условиях найти поле смещений в упругом теле $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$.

Уравнение (2.150), в котором также обычно считают $\rho \approx \rho_0$, представляет известное уравнение теплопроводности и определяет поле температур, которое в рассматриваемом приближении не зависит от напряженного состояния среды. Если же феноменологические коэффициенты λ' и μ' зависят от температуры, уравнение движения может быть проинтегрировано только после того, как найдено распределение температуры из (2.150). Это распределение вызывает дополнительные (температурные) напряжения.

Температурные напряжения могут быть и следствием теплового расширения среды. Если α — коэффициент линейного расширения, то в результате теплового расширения новый тензор упругих деформаций u_{ik}^T будет иметь увеличенные на αT относительные удлинения (u_{11}, u_{22}, u_{33}) , так что (в декартовых координатах)

$$u_{ik}^T = u_{ik} + \alpha T \delta_{ik}.$$

Здесь α (табл. 4) — коэффициент температурного расширения. Подставляя отсюда компоненты $u_{ik} = u_{ik}^T - \alpha T \delta_{ik}$ в соотношение (2.147), получаем

$$p_{ik} = \lambda' \delta_{ik} u_j^{jT} + 2\mu' u_{ik}^{iT} - 3\alpha \lambda' T \delta_{ik}.$$

Это соотношение является замыкающим для системы (2.40)–(2.43), которая теперь должна быть записана относительно \mathbf{u}^T и u_{ik}^T . При этом уравнение (2.149) будет иметь вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^T}{\partial t^2} = \rho \mathbf{f} + \left(\lambda' + \frac{\mu'}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^T + \mu' \Delta \mathbf{u}^T - 3\alpha \lambda' \nabla T.$$

Здесь температура $T(t, \mathbf{r})$ определяется уравнением (2.150).

Температурные напряжения в упругих средах при пластических и упругопластических деформациях изучались В. Л. Германом¹.

В любом случае вид системы (2.148)–(2.150) приводит к задаче определения вектора смещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ из одного векторного уравнения (2.149).

Очень часто в уравнении (2.149) модули упругости λ' и μ' выражаются через две другие постоянные — модуль Юнга² E и коэффициент Пуассона m , которые вводятся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{E}{2(1+m)}, & \lambda' &= \frac{E}{3(1-2m)}, \\ E &= \frac{9\lambda'\mu'}{3\lambda' + \mu'}, & m &= \frac{3\lambda' - 2\mu'}{2(3\lambda' + \mu')}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Тогда основное уравнение движения упругого тела (2.149) приобретает вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{f} + \frac{E}{2(1+m)} \Delta \mathbf{u} + \frac{Em}{2(1+m)(1-2m)} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

¹ Герман Вениамин Леонтьевич (1914–1964) — известный физик. Окончил за два года (1934–1936 гг.) Харьковский университет по специальности теоретическая физика. С 1936 г. работал в Харьковском университете (в 1949–1964 гг. заведовал кафедрой теоретической механики) и научным сотрудником в Украинском физико-техническом институте. Основные работы — в области теоретической физики и механики сплошных сред («Некоторые вопросы теории пластичности анизотропных сред» (докторская диссертация), «Температурные напряжения в изотропных и анизотропных средах при чисто пластической и «смешанной» упругопластической деформации», «К гидро- и газодинамической теории смазки» и др.).

² Юнг (Young) Томас (1773–1829) — английский ученый, один из основоположников волновой теории света. Изучал медицину в Лондонском, Эдинбургском, Гёттингенском университетах, математику и физику — в Кембриджском университете. С 1802 г. — непреременный секретарь Лондонского Королевского общества. Открыл интерференцию света (1801 г.), развил теорию звука (1799 г.), объяснил аккомодацию глаза и цветное зрение. Ввел понятие модуля упругости (1807 г.) и исследовал упругую и неупругую деформации. Труды по астрономии, расшифровке египетских иероглифов.

Поскольку $\lambda' > 0$, $\mu' > 0$, $E > 0$, то из (2.151) следует $-1 < m < 0,5$. Пока неизвестны такие материалы, из которых изготовленный стержень утолщается при растяжении, поэтому в дальнейшем будем считать, что $0 < m < 0,5$.

Основанием для введения E и m вместо μ' и λ' служит решение следующей задачи.

Рассмотрим такое напряженное состояние упругого тела, которое соответствует растяжению бесконечно длинного цилиндрического стержня. В этом случае из всех компонент P_{ik} только P_{11} отлично от нуля, так что присутствует только напряжение растяжения стержня (ось (x_1) прямоугольной декартовой системы направлена вдоль стержня, оси (x_2) , (x_3) лежат в плоскости поперечного сечения). Тогда из (2.147) имеем

$$P_{ii} = \lambda' u_{ii} + 2\mu' \left(u_{ii} - \frac{1}{3} u_{ii} \right), \quad (2.152)$$

для $i = 1, 2, 3$ (без суммирования!), а суммирование по l ведется от 1 до 3. Кроме того, из $P_{ik} = 0 (i \neq k)$ следует $u_{12} = u_{23} = u_{13} = 0$.

Введем модуль Юнга E и коэффициент Пуассона m при помощи соотношений

$$\frac{P_{11}}{u_{11}} = E, \quad \frac{u_{22}}{u_{11}} = \frac{u_{33}}{u_{11}} = -m. \quad (2.153)$$

Таким образом, величина E устанавливает пропорциональность между напряжением растяжения и относительным удлинением, а безразмерный коэффициент m отражает соотношение между относительными продольным растяжением и поперечным сжатием стержня. Подставляя (2.153) в последние два уравнения (2.152), получаем из них (2.151).

Для характеристики деформируемых твердых тел часто пользуются так называемой диаграммой (σ, ε) , полученной в опытах по растяжению стержней до разрушения. Типичная диаграмма (σ, ε) , где $\sigma \equiv P_{11}$, $\varepsilon \equiv u_{11}$, для упругопластической среды представлена на рис. 76.

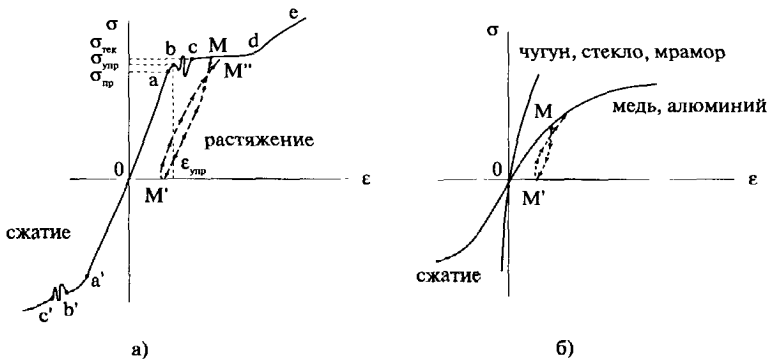


Рис. 76

На этой диаграмме (см. рис. 76, а) точка «а» соответствует пределу пропорциональности, так что при $\sigma \leq \sigma_{\text{пр}}$ выполняется обобщенный закон Гука (2.147), и при растяжении стержня согласно (2.153) имеем $\sigma = E\varepsilon$. Недалеко от точки «а» лежит точка «b», соответствующая пределу упругости $\sigma_{\text{упр}}$ и определяющая область нелинейной упругости (участок *ab*), когда нарушается закон (2.147) и имеет место более общая зависимость (2.145). Участок диаграммы $\sigma \leq \sigma_{\text{упр}}$ характерен тем, что после снятия нагрузки остаточных деформаций не остается, т. е. разгрузка идет по той же линии *Oab*, что и нагрузка, только в обратном направлении. При полной разгрузке ($\sigma = 0$) деформация обращается в нуль. Однако в области $\sigma > \sigma_{\text{упр}}$ процесс деформации становится неустойчивым (участок «bc») и только при $\sigma = \sigma_{\text{тек}}$ ($\sigma_{\text{тек}}$ — предел текучести) удлинение образца заметно увеличивается: материал, говорят, начинает «течь», т. е. образец без изменения нагрузки значительно увеличивает свою длину. Поскольку деформация идет почти без изменения объема¹, то при течении на образце образуется характерное сужение — «шейка». Участок «cd» (площадка текучести) соответствует пластическому состоянию материала, и если она строго горизонтальна, то материал называют идеально пластическим. После точки «d» наступает упрочение материала, т. е. монотонное возрастание напряжения, а затем (точка «e») — разрушение (предел прочности). Участок диаграммы от «b» до «e» характерен тем, что если в какой-то момент (точка *M*) снять нагрузку, то уменьшение деформации пойдет по линии *MM'*, приводя к остаточной деформации *OM'*; при повторном нагружении образец будет следовать новой кривой *MM''*.

Рассмотренная диаграмма поведения упругопластического материала характерна для различных сталей, железа. При достаточно высоких температурах пластическая деформация у этих весьма распространенных материалов наступает уже при незначительных напряжениях: с течением времени материал деформируется, т. е. наступает ползучесть (крип) материала.

Для других пластических материалов (медь, алюминий и т. п.) кривая растяжения лишена площадки текучести и практически не имеет зоны упругости (см. рис. 76, б). Остаточные деформации (*OM'*) у них обнаруживаются при незначительных нагрузках. Такие материалы, как свинец, олово, глина, вообще не имеют упругой зоны и всюду ведут себя как пластические среды. Для всех пластических материалов диаграммы растяжения и сжатия ($\sigma < 0$) зеркально почти подобны. Пластические материалы поддаются при больших давлениях или температурах значительным деформациям без нарушения связности и почти без изменения объема (ковка, прокатка, штамповка и пр.).

Чугун, стекло, кремний относятся к хрупким материалам; у них полностью отсутствует пластическая зона и разрыв наступает вне очень малой упругой области. При сжатии и растяжении хрупкие материалы часто ведут себя различным образом (см. рис. 76, в).

Заметим, что все вышеприведенные свойства и характеристики материалов относятся к достаточно медленным нагружениям, когда деформация успевает следовать за изменением нагрузки.

¹ Изменение объема равно $\text{div } \mathbf{u} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = u_{11}(1 - 2m)$; поскольку для стали $m \sim 0,25$, а $u_{11} = \varepsilon_{\text{упр}} = \sigma_{\text{упр}}/E \sim 10^{-2}$ (см. табл. 4), то $\text{div } \mathbf{u} \sim 10^{-2}$.

Таблица 4

Материал	$E, \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$	$m,$	$\sigma_{\text{упр}}, \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$	$\rho, \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$\alpha, \frac{1}{\text{град}}$
Сталь	$2 \cdot 10^6$	0,25	$1,2 \cdot 10^4$	7,8	$1 \cdot 10^{-6}$
Медь	$1 \cdot 10^6$	0,33	$1 \cdot 10^4$	8,9	$12 \cdot 10^{-6}$
Алюминий	$0,7 \cdot 10^6$	0,33	$1 \cdot 10^4$	2,5	$12 \cdot 10^{-5}$
Свинец	$0,1 \cdot 10^6$	0,43	—	11,3	$3 \cdot 10^{-5}$
Каучук	80	0,47	—	0,93	$7 \cdot 10^{-5}$
Стекло	$0,5 \cdot 10^6$	0,22	—	3,2	$1 \cdot 10^{-5}$

В табл. 4 приведены средние значения E , m , ρ , α и $\sigma_{\text{упр}}$ для некоторых материалов.

3. Класс упругопластических сред

Из диаграммы (σ, ε) , присущей большинству упругих сред, следует, что при больших напряжениях среда теряет свойство упругости и, подобно жидкости, деформируется при неизменной нагрузке и почти без увеличения объема. Характерным для таких неупругих деформаций является и то, что среда уже не восстанавливает свою первоначальную форму после снятия нагрузки. Такие деформации называются *пластическими*, а сама среда, допускающая и упругие, и пластические деформации, — *упругопластической*.

Вопросами поведения упругопластических сред стали интересоваться в связи с развитием техники обработки металлов. Еще в 1828 г. Коши предложил формулы напряжений в упругопластических средах, полагая, что в зоне пластичности их поведение аналогично поведению вязкой жидкости. С тех пор теория пластичности, изучающая целый комплекс вопросов, связанных с движением пластически деформируемых сред, развилась в весьма обширную область механики сплошных сред.

При пластической деформации напряжения в среде удовлетворяют специфическим законам, которые называются *условиями пластичности*. Эти условия и представляют собой замыкающие соотношения для системы уравнений движения упругопластической сплошной среды.

Условия пластичности формулируются в виде соотношений между компонентами тензора напряжений

$$F_{\alpha}(p_{ik}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots) \quad (2.154)$$

Таких соотношений назначается столько, сколько надо для замыкания системы (не более шести).

Одно из первых условий пластичности было предложено в 1871 г. Б. Сен-Венаном [81] на основании результатов опытов французского инженера Треска по штамповке. Полагая, что среда ведет себя в области пластичности как несжимаемая вязкая жидкость, и считая, что максимальные касательные напряжения до наступления пластичности не превосходят максимального сопротивления сдвигу K , опытно определенному Треска, Сен-Венан получил в случае двумерного движения условие пластичности в виде

$$p_{12}^2 + \left(\frac{p_{11} - p_{22}}{2} \right)^2 = K^2 \quad (2.155)$$

Кроме этого, моделируя напряжения при пластическом течении напряжениями в потоке вязкой жидкости, Сен-Венан приходит к соотношению

$$\frac{p_{11} - p_{22}}{2p_{12}} = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}} \quad (2.156)$$

Соотношение (2.155) получается из условия, что пластическое состояние среды наступает тогда, когда главное касательное напряжение достигает своего максимального значения, связанного с пределом текучести. В плоском напряженном состоянии ($p_{33} = p_{32} = p_{31} = 0$) главные значения тензора напряжения выражаются через компоненты p_{ik} следующим образом (см., например, [5]):

$$p_{(1)} = \frac{p_{11} - p_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{p_{11} - p_{22}}{2} \right)^2 + p_{12}^2},$$

$$p_{(2)} = \frac{p_{11} - p_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{p_{11} - p_{22}}{2} \right)^2 + p_{12}^2}.$$

Тогда согласно (2.10) имеем следующее выражение для главного касательного напряжения $\tau_{(3)}$ (максимальное значение касательного напряжения при плоской деформации, которое достигается на площадке, параллельной биссектрисе координатного угла)

$$\tau_{(3)} = \frac{1}{2}(p_{(1)} - p_{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{p_{11} - p_{22}}{2} \right)^2 + p_{12}^2} = K.$$

При чистом растяжении ($p_{(2)} = 0$; $p_{(1)} = \sigma = \sigma_{\text{тек}}$) получаем, что $K = \frac{1}{2} \sigma_{\text{тек}}$.

Уравнения плоского движения несжимаемой вязкой жидкости с компонентами тензоров напряжений, определяемыми (2.155) и (2.156), имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) &= \rho f_1 + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2}, \\ \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) &= \rho f_2 + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Пять уравнений (2.155)–(2.157) составляют полную систему для определения величин $v_1, v_2, P_{11}, P_{22}, P_{12}$.

Обобщая результат Сен-Венана, Р. Мизес¹ формулирует (1913 г.) следующие условия пластичности [66]:

$$p_{ik} = k v_{ik}, \quad k = \frac{2\sqrt{2}K}{\sqrt{3}\sqrt{v_{ik}v^{ik}}}.$$

При этом Р. Мизес исходит из того, что после достижения предела упругости твердое тело ведет себя по существу как вязкая, почти несжимаемая жидкость. Считая, что коэффициент вязкости $\mu = k/2$ и что сумма квадратов главных касательных напряжений постоянна и равна $2k^2$, Мизес приходит к значению

$$k^2 = -\frac{4K^2}{3I_2},$$

где $I_2 = \frac{1}{2}((v_i^j)^2 - v_{ik}v^{ik})$ — второй инвариант тензора $\hat{\mathbf{v}}$. Полагая в нем $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, получаем указанное выше значение k .

Таким образом, у Мизеса полная система уравнений для исследования движения пластической среды имеет вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \operatorname{div} k \hat{\mathbf{v}}, \quad (2.158)$$

$$k = \frac{2\sqrt{2}K}{\sqrt{3}\sqrt{v_{ik}v^{ik}}},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где $\hat{\mathbf{v}}$ — тензор скоростей деформации с компонентами

$$v_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i;k} + v_{k;i}).$$

После этих фундаментальных работ появился целый ряд уточнений критериев пластичности на основании опытов и дальнейшего развития теории (см., например, [48, 23, 21, 22] и библиографию в них).

¹ Мизес (Mises) Рихард фон (1883–1953) — австрийский математик и механик. Окончил Венский университет (1905 г.). Профессор Страсбургского, Берлинского, Стамбульского (в эмиграции 1933–1939 гг.), Гарвардского университетов. Работы по теории вероятностей, по механике, аэромеханике, теории упругости и пластичности (критерий Мизеса).

В качестве моделей упругих и пластических сред обычно рассматриваются:

1) *идеальная упругопластическая среда* (рис. 77, кривая (1)), у которой имеются идеально (прямолинейный) упругий и идеально пластический участки;

2) *идеальная линейно-упрочняющаяся среда* (кривая (2) на рис. 77), когда модуль Юнга, определяющий наклон кривой $\sigma = \sigma(\epsilon)$, меняется скачкообразно в процессе деформирования;

3) *идеальная жесткопластическая среда* (кривая (3) на рис. 77), когда деформации остаются равными нулю до определенного значения напряжений σ_0 , а затем наступает внезапный переход к пластическому течению;

4) *идеальная вязкопластическая среда* (кривая (4) на рис. 78, б), для которой напряжения сдвига остаются равными нулю до некоторого значения τ_0 , а затем внезапно (при $\tau > \tau_0$) наступает режим течения, характерный для вязких жидкостей.

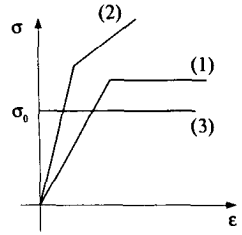


Рис. 77

Наиболее распространенная модель вязкопластического течения — модель Шведова — Бингама (см. «Класс неньютоновских сред»). Модель Сен-Венана и Мизеса, рассмотренная выше, предполагает именно такой, вязкопластический характер поведения пластических сред.

Следует отметить, что основные трудности в построении моделей идеальных пластических сред возникают при формулировке критериев пластичности для общего вида напряженного состояния.

Более сложная модель строится для так называемых *гипоупругих сред* (см., например, [50]), когда в качестве замыкающего соотношения предлагается уравнение

$$\frac{D\hat{p}_{ik}}{Dt} = c_{iklm}(p_{ik})v_{lm},$$

где $\frac{D\hat{p}_{ik}}{Dt} = \frac{dp_{ik}}{dt} - p_{il} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} - p_{kl} \frac{\partial v_i}{\partial x_l}$ — значение верхней производной Олдройда (см. § 13 (2.59)) от тензора напряжений в системе прямоугольных декартовых координат;

$\frac{dp_{ik}}{dt} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial t} + v_l \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_l}$; v_{lm} — компоненты тензора скоростей деформации, а коэффициенты c_{iklm} , зависящие от p_{ik} , определяются физическими свойствами среды (для изотропных сред $c_{iklm} = a\delta_{ik}\delta_{lm} + b(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl})$). Интересным является то, что эта модель относится к невязким средам, в которых малые деформации обратимы, т. е. среда обладает признаками упругости в повышенной мере.

4. Класс неньютоновских сред

Пластические среды являются одним из представителей так называемых *неньютоновских сред*, для которых характерна нелинейная зависимость между тензором напряжений и тензором деформаций и (или) скоростей деформаций.

Такая нелинейность, как уже упоминалось, является динамической в отличие от кинематической, когда в тензоре деформаций присутствуют нелинейные слагаемые, а сам реологический закон линейный (ньютоновский). Таким образом, для неньютоновских жидкостей и газов рассматривается только динамическая нелинейность, а для упругих и пластических сред могут существовать оба вида нелинейности.

Изотропные ньютоновские среды

Отличительной особенностью ньютоновских вязких жидкостей является линейная зависимость между тензором вязких напряжений и тензором скоростей деформации, а именно (см. (2.117))

$$p'_{ik} = 2\mu \dot{v}_{ik} + \zeta g_{ik} v_l{}^l = 2\mu \left(v_{ik} - \frac{1}{3} g_{ik} v_l{}^l \right) + \zeta g_{ik} v_l{}^l. \quad (2.159)$$

Здесь коэффициенты μ и ζ , как уже говорилось, зависят от термодинамических параметров ρ и T (или p и T), определяющих равновесное состояние среды, но не зависят от величин, относящихся к движению среды.

Для неньютоновских жидкостей (газов) рассматривается более общая зависимость между p'_{ik} и v_{ik} . Повторяя выкладки и рассуждения, относящиеся к определению общего вида функции $\hat{p} = \hat{p}(\hat{v})$ (см. (2.115)), проведенные при описании класса жидкостей и газов, нетрудно получить, используя теорему Гамильтона — Кэли, общую зависимость $\hat{p}' = \hat{p}'(\hat{v})$ для изотропных сред в виде

$$p'_{ik} = g_{ik} \mu_0(I_1, I_2, I_3) + 2\mu(I_1, I_2, I_3)v_{ik} + 2\mu_c(I_1, I_2, I_3)v_l{}^l v_{ik}. \quad (2.160)$$

Участвующие здесь функции μ_0, μ, μ_c от главных инвариантов I_1, I_2, I_3 матрицы v_{ik} получили название коэффициентов *объемной, сдвиговой и поперечной вязкости* соответственно.

Среда, имеющая реологическое уравнение (2.160), носит название *жидкости Рейнера — Ривлина* (иногда — *жидкости Стокса*).

Отметим, что эту зависимость нельзя разбить на две независимые зависимости между девиаторами и свертками тензоров, поскольку

$$\dot{p}'_{ik} = \dot{p}'_{ik} - \frac{1}{3} g_{ik} p_l{}^l{}' = 2\mu \dot{v}_{ik} + 2\mu_c \left(\dot{v}_i{}^l \dot{v}_{kl} - \frac{1}{3} g_{ik} \dot{v}_j{}^l \dot{v}_l{}^j + \frac{2}{3} \dot{v}_{ik} v_l{}^l \right).$$

Это приводит к некоторым особенностям течений таких жидкосте (см. задачу 14.2).

Определенные ограничения на коэффициенты вязкости следуют и условия положительности плотности производства энтропии σ_s (см § 13 (2.79))

$$p'_{ik}v^{ik} = v_i^i \mu_0 + 2\mu v^{ik} v_{ik} + 2\mu_c v_i^i v_{ik} v^{ik} > 0. \quad (2.16)$$

В случае несжимаемых жидкостей ($I_1 = v_i^i = 0$), определяя из характеристического уравнения для $\hat{\mathbf{v}}$ свертку матрицы $\hat{\mathbf{v}}^3$, получаем и (2.161)

$$3\mu_c I_3 - 2\mu I_2 > 0. \quad (2.16)$$

Надо отметить, что общая зависимость (2.160) не нашла пока подтверждения в экспериментах с различными неньютоновскими жидкостям

Квазилинейные вязкие среды Квазилинейные вязкие среды (жидкости пластические тела) составляют весьма широкий класс неньютоновских сред. Для них рассматривается «укороченное» уравнение (2.160), включающее лишь линейную зависимость между тензорами $\hat{\mathbf{p}}'$ и $\hat{\mathbf{v}}$, а именно

$$p'_{ik} = g_{ik} \mu_0(I_1, I_2, I_3) + 2\mu(I_1, I_2, I_3)v_{ik}. \quad (2.16)$$

Если ввести объемную вязкость $\zeta(I_1, I_2, I_3)$ при помощи соотношения

$$\mu_0 = \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) v_i^i, \quad (2.16)$$

то (2.163) примет вид

$$p'_{ik} = \zeta(I_1, I_2, I_3)g_{ik}v_i^i + 2\mu(I_1, I_2, I_3)v_{ik}. \quad (2.16)$$

В случае несжимаемых сред ($I_1 = v_i^i = 0$) имеем

$$p'_{ik} = 2\mu(I_2, I_3)v_{ik}.$$

Часто зависимость μ от I_3 для квазилинейных сред пренебрегают чего нельзя делать в общем нелинейном случае, ибо это существенно для выполнения условия (2.162).

Если $\mu = \mu(I_2)$ в квазилинейных несжимаемых средах, то обычно вместо $I_2 = -\frac{1}{2}v_{ik}v^{ik}$ вводят интенсивность I тензора скоростей деформаций

$$I \equiv \sqrt{-4I_2} = \sqrt{2v_{ik}v^{ik}} = \sqrt{2\dot{v}_{ik}\dot{v}^{ik}}, \quad (2.166)$$

так что

$$p'_{ik} = 2\mu(I)\dot{v}_{ik}.$$

Квазилинейная модель, оказывается, достаточно хорошо описывает поведение пластических сред, например, металлов в состоянии пластичности. При этом существенную роль играет величина предела текучести $\sigma_{\text{тек}}$ (см. рис. 76).

Если интенсивность девиатора тензора напряжений $\sqrt{2\dot{p}'_{ik}\dot{p}'^{ik}} = \sqrt{2\dot{p}^{\circ}_{ik}\dot{p}^{\circ ik}}$ превосходит $\sigma_{\text{тек}}$, то в пластическом теле начинается течение, так что металл начинает «течь» при

$$\sqrt{2\dot{p}^{\circ ik}\dot{p}^{\circ}_{ik}} \geq \sigma_{\text{тек}}.$$

Квазилинейные среды, для которых $d\mu/dI < 0$, называются *псевдопластическими*. Это связано с тем, что их поведение близко к течению упругого тела в зоне пластичности. На рис. 78, а пунктирная кривая относится к пластическому телу, а сплошная — к псевдопластической жидкости, для которой $\tau = 0$ при $\dot{\gamma} = 0$. На этом рисунке все кривые относятся к чисто сдвиговому течению ($\tau \equiv |p_{xy}|$, $\dot{\gamma} \equiv |v_{xy}|$).

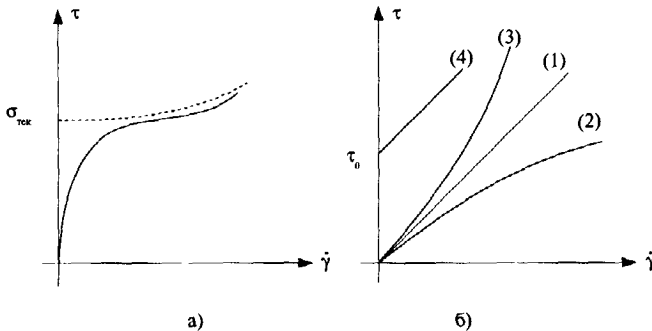


Рис. 78

К псевдопластическим квазилинейным средам относится большинство полимерных растворов, содержащих удлиненные молекулы полимера, которые при увеличении I ориентируются по направлению скорости и уменьшают коэффициент вязкости.

Если для квазилинейной среды $d\mu/dI > 0$, т. е. вязкость увеличивается с ростом скорости деформаций, то среду называют *дилатантной* (лат. *dilatatio* — разбухание). Такое поведение нелинейного коэффициента вязкости характерно для суспензий с большим содержанием твердой фазы. Причину этого обычно относят на счет увеличения сухого трения между частицами этой фазы, которые «разбухают» при больших напряжениях, так что жидкой фазы не хватает для жидкостной смазки твердых частиц.

На рис. 78, б даны характерные кривые: прямая (1) — для ньютоновской жидкости, кривая (2) — для псевдопластической среды, кривая (3) — для дилатантной среды.

Особый класс квазилинейных сред представляют так называемые *степенные среды*, или среды Оствальда — Вале; для них

$$\mu = \mu_n I^n, \quad (2.167)$$

где $\mu_n = \text{const}$.

При $n = -1$ — это среда Сен-Венана, или *идеально пластическая*. Действительно, для данного случая имеем

$$\dot{p}'_{ik} = 2\mu \dot{v}_{ik} = \frac{2\mu_{-1}}{I} \dot{v}_{ik}.$$

Отсюда $\dot{p}'_{ik} \dot{p}'_{ik} = \frac{4\mu_{-1}^2}{I^2} \dot{v}_{ik} \dot{v}_{ik} = 2\mu_{-1}^2$, так что $\sqrt{2 \dot{p}'_{ik} \dot{p}'_{ik}} = 2\mu_{-1} = \text{const}$, т. е. $\sigma_{\text{тек}} = 2\mu_{-1}$ и течение происходит согласно прямой (3) на рис. 77 (идеальная жесткопластическая среда, где $\sigma_0 = 2\mu_{-1}$).

Чтобы избавиться от чрезмерной идеализации, присущей модели Сен-Венана, вводят модель *вязкопластического тела*, или модель Шведова — Бингама. Для нее принято

$$\dot{p}'_{ik} = 2 \left(\mu(\rho, T) + \frac{\mu_{-1}}{I} \right) \dot{v}_{ik}, \quad (2.168)$$

где $\mu(\rho, T)$ — коэффициент вязкости для ньютоновской жидкости.

К вязкопластическим средам относятся коллоидные растворы, суспензии, пены.

Наличие в формуле (2.168) $\mu_{-1} = (1/2)\sigma_{\text{тек}}$ — предельного напряжения сдвига — приводит к тому, что при описании течения таких сред в области потока, где выполнено условие $\sqrt{2 \overset{\circ}{p}_{ik} \overset{\circ}{p}{}^{ik}} < 2\mu_{-1}$, образуется твердое ядро, в котором жидкость ведет себя, как упругое тело. В остальной части потока, где напряжения достаточно велики, вязкопластическая среда движется, как вязкая жидкость. Так, например, при движении по трубам упругое ядро в вязкопластических средах образуется в срединной части трубы, где градиенты скорости малы. Таким образом, для модели Шведова — Бингама имеем

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 + k\dot{\gamma}, & \text{при } \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma}, & \text{при } \tau \leq \tau_0 \end{cases}$$

где $\tau_0 = \mu_{-1} = \sigma_{\text{тек}}/2$, $k = 2\mu$.

Этой модели на рис. 78, б соответствует график (4).

Некоторые модели неньютоновских сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, в частности магнитоупругие и магнитопластичные тела, описаны в [49, 62].

Эффект нормальных напряжений

Этот эффект, присущий почти всем моделям изотропных неньютоновских сред, заключается в том, что деформация чистого сдвига вызывает нормальные напряжения. Такое явление получило название эффекта Кельвина (эффекта Вейссенберга).

Рассмотрим, например, чисто сдвиговое течение, когда $v_{12} \neq 0$, а остальные $v_{ik} = 0$. Тогда из (2.160) следует (в системе прямоугольных декартовых координат)

$$p'_{11} = p'_{22} = 2\mu_c(v_{12})^2; \quad p'_{33} = 0.$$

Таким образом, эффект нормальных напряжений определяется наличием поперечной (μ_c) вязкости. При этом, как следует из (2.164), объемная вязкость $\mu_0 = 0$. В квазилинейных вязких средах этот эффект отсутствует (см. также задачу 14.2).

Заметим, что если в несжимаемой ньютоновской жидкости первый инвариант тензора $\hat{\mathbf{p}}$ равен $-3p$, то для несжимаемой неньютоновской жидкости

$$p_i^i = -3p + 2\mu_c v_{ik} v^{ik} = -3p - \mu_c I_2,$$

так что этот инвариант зависит не только от гидростатического давления, которое определяется в результате решения задачи, но и от функции скоростей деформаций, а именно $I_2 \mu_c (I_2, I_3)$.

**Жидкости с памятью.
Релаксация**

Все предыдущие модели ньютоновских и неньютоновских сред относились к веществам, у которых напряжения возникают в тот же момент времени, когда появляется деформация или скорости деформации, т. е., можно сказать, одномоментно. Среда «не помнит» ни о своем недеформированном состоянии, ни о своей деформации в предыдущие моменты времени. Однако в ряде полимерных растворов, жидкостей со взвешенными упругими частицами, во многих биологических средах напряжения зависят от движения в предыдущие моменты времени, от «истории» движения среды. Такие жидкости с временными эффектами получили название *жидкостей с памятью*. Для подобных жидкостей в предположении их несжимаемости реологическое уравнение (2.110) в системе прямоугольных декартовых координат может быть записано в виде [49]:

$$p_{ik}(t) = -p(t)\delta_{ik} + \int_0^\infty v_{ik}(t-\tau)M(\tau)d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty v_{il}(t-\tau_1)v_{lk}(t-\tau_2)M(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \dots \quad (2.169)$$

Функции $M(\tau)$, $M(\tau_1, \tau_2)$, ... носят название *функций влияния*.

Заметим, что здесь использовать теорему Гамильтона — Кэли для свертки ряда в правой части реологического уравнения нельзя, поскольку матрицы тензора $\hat{\mathbf{V}}$ относятся к разным моментам времени.

В простейшем случае постоянных функций влияния имеем

$$p_{ik}(t) = -p(t)\delta_{ik} + M_1 u_{ik}(t) + M_2 u_{il}(t)u_{lk}(t) + \dots \quad (2.170)$$

Здесь предположено, что $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$, так что материальная производная от u_{ik} равна тензору скоростей деформаций $\left(v_{ik} = \frac{du_{ik}}{dt} \right)$, и, кроме того, $u_{ik}(-\infty) = 0$, т. е. тело было недеформировано в «далеком прошлом».

В этих жидкостях с памятью напряжения $p_{ik}(t)$ зависят в каждый момент времени от $u_{ik}(t)$ так же, как и в нелинейно упругом теле; причем здесь ряд справа уже может быть свернут на основании теоремы Гамильтона — Кэли.

В частном случае

$$M(\tau) = 2\mu\delta(\tau) + 2\mu'; \quad M(\tau_1, \tau_2) = 0; \quad M(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0, \dots$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, μ — коэффициент вязкости, μ' — упругий модуль сдвига, из (2.169) получаем

$$p_{ik} + \delta_{ik} p = 2\mu' u_{ik} + 2\mu v_{ik}. \quad (2.171)$$

Такие жидкости с памятью называют *упруговязкими*.

Если считать упруговязкую жидкость несжимаемой, т. е. $u_{||} = 0, v_{||} = 0$, то $p = -(1/3)p_{||}$ — давление при всестороннем сжатии среды. Тогда (2.171) может быть записано как соотношение между девиаторами тензоров

$$\overset{\circ}{p}_{ik} = 2\mu' \overset{\circ}{u}_{ik} + 2\mu \overset{\circ}{v}_{ik}. \quad (2.172)$$

Это реологическое соотношение определяет модель упруговязкой жидкости, называемую телом *Кельвина — Фойгта*. Примером сред, хорошо следующих уравнению (2.172), могут служить различные суглинки, биологические жидкости, содержащие взвеси из упругих частиц.

Заметим, что соотношение (2.172) может быть получено и для сжимаемой среды (см. задачу 14.3), если исходить из вида упругой энергии $\mathcal{F}(u_{ik})$.

В случае $M(\tau) = \frac{2\mu}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$, где $\tau_0 = \mu/\mu'$, при остальных функциях влияния, равных нулю, из (2.169) имеем

$$p_{ik} + p\delta_{ik} = \frac{2\mu}{\tau_0} \int_0^\infty v_{ik}(t-\tau) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau.$$

Дифференцируя это соотношение по t и вычисляя полученный после дифференцирования интеграл по частям, получим

$$p_{ik} + p\delta_{ik} + \tau_0 \frac{d}{dt} (p_{ik} + p\delta_{ik}) = 2\mu v_{ik}. \quad (2.173)$$

Для несжимаемой упруговязкой жидкости отсюда имеем

$$\dot{p}_{ik} + \tau_0 \frac{d\dot{p}_{ik}}{dt} = 2\mu \dot{v}_{ik}. \quad (2.174)$$

Это уравнение описывает упруговязкую среду, которая получила название *тела Максвелла*. Примерами таких сред являются бетон, ка-нифоль, ряд биологических сред, в которых присутствуют взвешенные крупные молекулы (слизи, стенки сосудов и др.).

В последних двух соотношениях постоянная $\tau_0 = \mu/\mu'$ называется *временем релаксации*.

Чтобы прояснить физический смысл времени релаксации τ_0 , рассмотрим характерные задачи.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ напряжения \dot{p}_{ik} отличны от нуля и имеют значения $\dot{p}_{ik}(0)$, а затем мгновенно обращаются в нуль, т. е.

$$\dot{p}_{ik} = \begin{cases} \dot{p}_{ik}(0), & \text{при } t = 0; \\ 0, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Тогда для $t > 0$ из (2.172) имеем

$$\mu' \dot{u}_{ik}(t) + \mu \dot{v}_{ik}(t) = 0,$$

и, поскольку $\dot{v}_{ik} = \frac{d\dot{u}_{ik}}{dt}$, отсюда интегрированием получаем

$$\dot{u}_{ik} = \dot{u}_{ik}(0)e^{-t/\tau_0}$$

где $\dot{u}_{ik}(0) = \frac{1}{2\mu'} \dot{p}_{ik}(0)$, $\tau_0 = \mu/\mu'$, причем принято $\dot{v}_{ik}(0) = -\dot{u}_{ik}(0)/\tau_0$.

Таким образом, если $\tau_0 \neq 0$, то из-за вязкости среды деформации не исчезают сразу с исчезновением напряжений при $t > 0$, а убывают со временем по экспоненциальному закону. Говорят, деформации релаксируют, причем τ_0 — время релаксации — равно промежутку времени, за который деформации уменьшаются в « e » раз.

При $\tau_0 = 0$ наступает «мгновенная релаксация» деформации, т. е. деформация мгновенно следует за изменением напряжения. Тогда закон (2.172) приобретает вид

$$\dot{p}_{ik} = 2\mu' \dot{u}_{ik},$$

т. е. среда становится чисто упругой. Таким образом, чем меньше время релаксации, тем более в вязкоупругой среде проявляются ее свойства упругости, а чем больше τ_0 , тем более поведение среды похоже на течение вязкой жидкости.

Иная роль времени релаксации τ_0 в реологическом уравнении (2.174) для тела Максвелла. Здесь релаксируют напряжения, отставая от деформации.

При быстрой деформации, когда $\left| \tau_0 \frac{d\dot{p}_{ik}}{dt} \right| \gg \dot{p}_{ik}$, имеем из (2.174) $\tau_0 \frac{d\dot{p}_{ik}}{dt} \approx 2\mu \dot{v}_{ik} = 2\mu \frac{d}{dt} \dot{u}_{ik}$, т. е. $\dot{p}_{ik} = 2\mu' \dot{u}_{ik}$, так что жидкость Максвелла ведет себя, как идеально упругое тело. Но как только деформация прекратилась, возникшие мгновенно напряжения сдвига начинают экспоненциально релаксировать; этот закон получается для $t > 0$ интегрированием из (2.174), когда движения почти нет ($\dot{v}_{ik} = 0$).

При медленной деформации основным в левой части уравнения (2.174) является первый член, и тело Максвелла ведет себя, как вязкая жидкость. Таким образом, отклонение поведения этой упруговязкой жидкости от обычной ньютоновской вязкой жидкости тем больше, чем больше частота исследуемого процесса.

Эффект релаксации в упруговязких средах возрастает с величиной времени релаксации $\tau_0 = \mu/\mu'$; он заметен тогда, когда τ_0 сравнимо с характерным временем задачи — со временем изменения внешних сил (при релаксации деформаций в среде Кельвина — Фойгта) или со временем изменения деформаций, заданных как краевые условия (при релаксации напряжений в среде Максвелла).

Для сред с «короткой памятью» предполагается аналитичность функции $v_{ik}(t - \tau)$, так что, разлагая в общей реологической формуле эти функции в степенной ряд по τ , можно получить формулы [49] для жидкостей различного порядка. Вычисления дают:

для жидкости первого порядка (ньютоновская жидкость)

$$p_{ik}(t) = -p(t)\delta_{ik} + 2\mu v_{ik}(t); \quad \mu = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} M(\tau) d\tau,$$

для жидкости второго порядка

$$p_{ik}(t) = -p(t)\delta_{ik} + 2\mu v_{ik}(t) + 2\mu_c v_{ii}(t)v_{ik}(t) + 2\mu_2 w_{ik}. \quad (2.175)$$

Здесь: $\mu = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} M(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$; $\mu_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \tau M(\tau) d\tau$; $w_{ik} = \left(\frac{Dv_{ik}}{Dt} \right) -$

нижняя производная Олдройда от тензора скоростей деформации («тензор ускорений деформаций»), заданного своими ковариантными компонентами.

Гранулированные среды

Модель сплошной среды с успехом и уже давно применяется для изучения движения таких материалов и веществ, как зерно, рудные материалы, песок, совокупность мелких гранул (дробь, шарики и т. п.), порошки, волокна, пудры и др. Все такие материалы объединены одним названием *гранулированных сред*, и изучение их движения и равновесия (грунтовые основания фундаментов) имеет широкое применение в практике. Сюда подпадают и движение зерна по лоткам и трубопроводам, и движение гранулированных сред в химических реакторах, и вопросы работы землеобрабатывающих машин.

Оказывается, что движение гранулированных сред может успешно изучаться при помощи моделей идеальной жидкости («сухая вода»), вязкой ньютоновской и неньютоновской жидкостей, пластических и упруговязких сред и т. д. При этом применяются как методы феноменологической гидродинамики и теории упругости и пластичности, так и статистический подход, основанный на изучении законов взаимодействия отдельных гранул и получения при помощи функции распределения (обычно рассматривают равновесную функцию распределения) выражений для тензора напряжений, скорости, плотности и т. д.

Приведем в качестве примера основные уравнения, предложенные С. Сэвиджем [84] для изучения быстрого движения гранулированных сред:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \hat{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Здесь: $\rho = \nu\gamma$, $\gamma = \gamma(t, \mathbf{r})$ — плотность гранул в потоке, $\nu = \nu(t, \mathbf{r})$ — объемная доля твердых частиц, \mathbf{f} — массовая сила, $\hat{\mathbf{p}}$ — тензор напряжений.

Во многих задачах принимается $\gamma = \text{const}$ и тогда в качестве замыкающего уравнения этой системы рассматривается зависимость

$$p_{ik} = p_{ik} \left(\nu_0, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial x^s}, \nu_{lm} \right),$$

где ν_0 — исходное значение распределения $\nu(t, \mathbf{r})$.

С. Сэвидж исследует нелинейную зависимость вида

$$\hat{\mathbf{p}} = a_0 \hat{\mathbf{g}} + a_1 \hat{\mathbf{v}} + a_2 \hat{\nu} + a_3 (\hat{\nu} \hat{\nu} + \hat{\nu} \hat{\nu}) + a_4 \hat{\nu}^2 + a_5 (\hat{\nu} \hat{\nu}^2 + \hat{\nu}^2 \hat{\nu}),$$

где компоненты тензора $\hat{\nu}$ имеют вид: $\nu_{ik} = \frac{\partial \nu}{\partial x^i} \frac{\partial \nu}{\partial x^k}$, а коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_5

являются функциями от $\nu_0, \nu, \left(\frac{\partial \nu}{\partial x^l} \right)^2, \nu_l^l, (\nu_l^l)^2, \frac{\partial \nu}{\partial x^l} (\nu_k^k), \frac{\partial \nu}{\partial x^l} (\nu_k^k)^2$.

В качестве «рабочей» формулы используется линейная по $\hat{\nu}$ часть общей реологической зависимости.

Для получения медленных движений гранулированных сред предлагается выражение для тензора напряжений через максвелловскую функцию распределения гранул по скоростям [84].

Жидкие кристаллы

Под жидким кристаллом понимают агрегатное состояние вещества, промежуточное между кристаллическим твердым телом и изотропной (аморфной) жидкостью. Поэтому жидкие кристаллы часто называют мезоморфными средами (греч. *mesos* — средний, промежуточный). Такое промежуточное состояние было впервые обнаружено в 1888 г. австрийским ученым Рейнитцером у полученного им нового вещества — холестерилбензоата. При плавлении этого вещества вначале (при $t^\circ \sim 145^\circ$) образовывался один расплав в виде жидкости, обладающей анизотропией оптических свойств, характерных для твердых кристаллических тел. И только при дальнейшем плавлении (при $t^\circ \sim 178^\circ$) образуется «настоящая» изотропная жидкость, у которой пропадают признаки любой анизотропии. Затем немецкий физик Лемаи нашел (1890 г.), что подобными свойствами обладают и другие вещества (например олеат аммония). У всех подобных веществ молекулы имеют вытянутую, палочкообразную форму, а их ориентация существенно влияет на свойства этих сред. Позже было найдено, что оптически анизотропные фазы возникают и при растворении некоторых веществ (например олеат калия в смеси воды и спирта). Такие жидкие кристаллы весьма многочисленны и распространены в биологических средах: мышечных тканях, в тканях мозга, нервов, мембран и др.

С 60-х годов прошлого века началось интенсивное изучение жидких кристаллов в связи с многочисленными приложениями в оптике, электронике, приборостроении и биомеханике.

Жидкие кристаллы относятся к неньютоновским средам. Для них предполагается, что

$$P_{ik} = P_{ik} \left(v_{em}, n_s, \frac{dn_e}{dt}, \frac{\partial n_\beta}{\partial x_\gamma} \right),$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t, \mathbf{r})$ — вектор, характеризующий преимущественное направление молекул. Этот вектор называется *директором*.

По модели Эриксона *нематических* жидких кристаллов (у них молекулы ориентированы приблизительно параллельно одной оси; у изотропных жидкостей — полностью разориентированы) компоненты тензора напряжений удовлетворяют соотношению

$$P_{ik} - \pi_{li} \frac{\partial n_k}{\partial x_l} + g_i n_k = P_{ki} - \pi_{lk} \frac{\partial n_l}{\partial x_l} + g_k n_l.$$

Здесь: π_{ik} — тензор моментных напряжений, определяющий поверхностную пару сил S_i , действующую на единичную площадку: $S_i = \pi_{ik} V_k$, где V_i — единичная нормаль к площадке; g_i — плотность внутреннего объемного момента сил, действующего на директор \mathbf{n} .

Из этого выражения видно, что тензор напряжений антисимметричен ($P_{ik} = -P_{ki}$). Замыкающие уравнения включают зависимости P_{ik} , π_{ik} и g_i от n_l , $\partial n_\alpha / \partial x_\beta$, $\partial v_\gamma / \partial x_\delta$.

Дальнейшие сведения о жидких кристаллах как модели неньютоновской сплошной среды можно найти, например, в [68, 77].

О типе основной системы уравнений механики сплошной среды

Вопрос о том, к какому типу относится система основных уравнений движения той или иной модели сплошной среды, имеет принципиальное значение.

В зависимости от ответа на него для конкретной задачи механики сплошной среды используются определенные

приемы ее решения, строятся свои вычислительные схемы, а функции, удовлетворяющие уравнениям разных типов, имеют различные аналитические свойства.

В ряде монографий по математике конкретные случаи общей системы уравнений механики сплошной среды рассматриваются в виде иллюстраций исследования того или иного типа уравнений с частными производными. При этом обычно останавливаются на сравнительно легко поддающихся анализу системах уравнений.

Ниже приведены некоторые сведения об этих исследованиях для уравнений различных моделей сплошной среды.

1. Идеальная жидкость (газ)

1. Для баротропной сжимаемой жидкости (газа) (изэнтропическое движение), когда можно считать $p = p(\rho)$, основная система уравнений имеет вид (см. (2.128)–(2.130)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{a^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = f_i, \quad (2.176)$$

где $a^2(\rho) = dp/d\rho$ — известная функция, представляющая собой квадрат скорости звука.

Система четырех уравнений относительно ρ и v_i представляет уравнения с частными производными гиперболического типа. В стационарном случае при $|\mathbf{v}| > a \equiv \sqrt{dp/d\rho}$, т. е. для течений со сверхзвуковыми скоростями, система (2.176) также гиперболическая, а при $|\mathbf{v}| < a$ (дозвуковые потоки) эта система — эллиптическая. Система (2.176) подробно рассматривалась в [66 § 164; 13, гл. I; 31, гл. V § 3, гл. VI § 3а].

2. Интересно отметить, что уравнения для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, \quad (2.177)$$

которые могут быть получены из предыдущей системы как предельный случай при $\rho = \text{const}$, не исследовались так подробно, как (2.176). По-видимому, это связано с тем, что матрица A этой системы, записанной в виде

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = f,$$

становится при $\rho = \text{const}$ вырожденной. Скорость распространения возмущений в среде, описываемой системой (2.176), становится бесконечно большой при $\rho = \rho_0(\text{const})$. Тем не менее, система (2.177), особенно в стационарном случае, наиболее широко использовалась для решения всевозможных задач гидромеханики (исследование плоских, осесимметричных, безвихревых потоков и др.). Именно эти уравнения и их многочисленные практические применения составили основное содержание гидромеханики в начальный период ее развития.

3. В случае идеального политропного газа, когда уравнение состояния $p = \rho RT$ может быть записано через энтропию $s = c_v \ln(p/\rho^\kappa)$ в виде $p = p(\rho, s) = \rho^\kappa e^{s/c_v}$ (неизэнтропическое движение), систему основных уравнений относительно пяти функций ρ , s и v_i можно записать в форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \kappa \rho^{\kappa-2} e^{s/c_v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\rho}{\kappa c_v} \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) &= f_i, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} &= 0. \end{aligned} \quad (2.178)$$

В нестационарном случае система (2.178) — гиперболическая.

Эта система (для одномерного случая) рассмотрена в [31, гл. V § 3]; показано, что в стационарном случае для сверхзвуковых потоков ($|v| > \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$) эта система гиперболическая, а для дозвуковых — эллиптическая.

В монографиях [47], [13] приведен довольно полный анализ проблемы существования и единственности решения этой системы; в частности, показано, что к системе применима теорема Коши — Ковалевской, устанавливающая единственность решения на конечном отрезке времени.

Система (2.178) составляет основное содержание газовой динамики, и здесь обилие решенных конкретных задач сделало газовую динамику весьма разработанной прикладной областью механики сплошной среды.

II. Вязкая жидкость (газ)

1. Если баротропная среда (газ) обладает вязкостью ($\mu > 0$, $\zeta > 0$) и внутренней энергией $c_v T$, то при постоянных μ , ζ , λ основная система уравнений движения приобретает вид (см. (2.117а)–(2.120)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{a^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} &= f_i + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{p(\rho)}{\rho c_v} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= \frac{2\mu}{\rho c_v} \dot{v}_{ik} \dot{v}_{ik} + \frac{\zeta}{\rho c_v} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\lambda}{\rho c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}, \end{aligned} \quad (2.179)$$

$$\text{где } a^2(\rho) = \frac{dp(\rho)}{d\rho}, \quad \dot{v}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ik} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

В этой «расщепляющейся» системе первые четыре уравнения определяют ρ и v_i , а из последнего уравнения (теплопроводности) находим температуру T . Это уравнение в нестационарном случае — параболическое, а в стационарном — эллиптическое.

Система (2.179) в случае установившегося движения относится к эллиптическому типу.

2. Для вязкой несжимаемой жидкости имеем «расщепляющуюся» систему относительно p , v_i и T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= f_i + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} &= \frac{2\mu}{\rho c_p} v_{ik} v_{ik} + \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}, \end{aligned} \quad (2.180)$$

где $v_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$, μ , ρ , λ — положительные постоянные.

Относительно системы первых четырех уравнений для определения p и v_i можно заключить, что в стационарном случае они составляют эллиптическую систему (см., например, [66, т. IV, ч. 2]). Последнее уравнение, уравнение теплопроводности, из которого находится $T(t, x_k)$ по известным теперь $v_i(t, x_k)$, подробно изучено в математической физике (см., например, [66, т. IV; 13, гл. I]).

3. Для вязкого политропного газа ($p = \rho RT$, $p(\rho, s) = \rho^k e^{\frac{s}{c_v}}$) система основных уравнений (см. (2.117а)–(2.120)) может быть записана в виде (λ , μ , ξ — положительные постоянные, ρ , T , v_i — искомые функции):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + R \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho T) &= \rho f_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right), \\ \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_k \frac{\partial s}{\partial x_k} \right) &= 2\mu \dot{v}_{ik} \dot{v}_{ik} + \zeta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2 + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k} \left(s = c_v \ln p / \rho^k \right). \end{aligned} \quad (2.181)$$

Эта система представляет собой эллиптическую систему в стационарном случае.

III. Упругое деформируемое тело

Для этого класса сплошных сред основная система дифференциальных уравнений имеет вид (см. (2.149), (2.150)):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) f_i + \mu' \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left(\lambda' + \frac{\mu'}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (2.181a)$$

$$c \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_k}, \quad (2.181b)$$

где ρ_0 — постоянная плотность, μ' , λ' , λ , c — положительные постоянные, а температурные напряжения не учитываются.

Уравнение (2.181а) в нестационарном случае является гиперболическим, определяющим два типа упругих волн — поперечные и продольные (см. [66, § 165; 31, § 3а]; задача 5.6 § 5); в стационарном случае (равновесие упругих тел) уравнение становится эллиптическим. Уравнение (2.181б) — уравнение теплопроводности в твердых телах. Уравнения движения анизотропных упругих тел анализировались в [66, 31].

О существовании и единственности решения основной системы уравнений

Несмотря на нелинейный характер основной системы уравнений в большинстве случаев удается доказать существование и единственность решения приведенных выше систем уравнений при соответствующих граничных условиях. Эти исследования проводились для конкретных типов задач. Во всяком случае, для систем (2.176), (2.177), (2.181а) и (2.181б) они известны. Сложнее обстоит дело с вязкой жидкостью (газом).

Для стационарных краевых задач движения вязкой несжимаемой жидкости О. А. Ладыженской было доказано [33], что они имеют решения при любых числах Re , причем даже для нерегулярных границ. Нестационарные краевые задачи имеют единственное решение [33], если в них отсутствует зависимость от одной из координат или есть аксиальная симметрия. В остальных случаях нестационарных задач имеется ряд ограничений на начальные данные и числа Re . В частности, исследования О. А. Ладыженской подтвердили достоверность основной системы уравнений вязкой жидкости для не слишком больших чисел Re . Это подтверждают и эксперименты, указывающие на существование в определенном диапазоне чисел Re ламинарной формы движения жидкости (газа), описываемой приведенными системами уравнений.

Ряд интересных выводов и библиография по вопросам существования и единственности решений уравнений гидродинамики приведены в [58].

Задачи с решениями

Задача 14.1. Показать, что для плоского установившегося движения баротропной идеальной жидкости в поле потенциальных массовых сил имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 2\Omega,$$

где $H = v^2/2 + \Pi + \mathcal{P}(\rho)$, $\mathbf{f} = -\nabla\Pi$, $\mathcal{P}(\rho) = \int dp(\rho)/\rho$, $\Omega = \frac{1}{2}(\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y)$ — составляющая вихря скорости по оси, перпендикулярной плоскости потока.

Решение. В рассматриваемом случае уравнение движения имеет вид:

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} = \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi \right) = \nabla H.$$

Отсюда для плоского потока имеем

$$v_y \Omega = \frac{\partial H}{\partial x}; \quad -v_x \Omega = \frac{\partial H}{\partial y}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H}{\partial y} \right),$$

так что в силу выражения для Ω имеем

$$2\Omega = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

Задача 14.2. *Определить силы, действующие на бесконечные параллельные пластинки, отстоящие друг от друга на расстоянии h и движущиеся со скоростями v_0 и v_h (рис. 82), если между ними находится ньютоновская жидкость Рейнера — Ривлина, для которой (в декартовых прямоугольных координатах)*

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + p'_{ik} = (-p + \mu_0)\delta_{ik} + 2\mu(I_1, I_2, I_3)v_{ik} + 2\mu_c(I_1, I_2, I_3)v_{it}v_{lk}. \quad (1)$$

Решение. Поскольку пластины имеют бесконечную протяженность вдоль оси (x), ищем решение в виде

$$\mathbf{v} = (v_x(y), 0, 0).$$

Тогда тензор скоростей деформаций имеет компоненты

$$v_{xx} = v_{yy} = v_{zz} = v_{xz} = v_{yz} = 0, \quad v_{xy} = v_{yx} = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy}.$$

При этом его первый инвариант $I_1 = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = 0$, так что среда течет подобно несжимаемой жидкости. Кроме того, имеем $I_2 = -(1/2)v_{ik}v_{ik} = -v_{xy}^2 = -1/4 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2$; $I_3 = 0$ и, следовательно, интенсивность тензора скоростей деформации $I = \sqrt{-4I_2} = \left| \frac{dv_x}{dy} \right|$. Тогда из (1) имеем:

$$\begin{aligned} p_{xx} = p_{yy} &= -p + 2\mu_c(I)v_{xy}^2 = -p + \frac{\mu_c(I)}{2} \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = -p + p'_{xx}(y), \\ p_{xy} &= 2\mu(I)v_{xy} = p'_{xy}(y), \quad p_{xz} = p_{yz} = 0, \quad p_{zz} = -p. \end{aligned} \quad (2)$$

Обращаясь к уравнениям (2.40) и (2.41) при $\mathbf{f} = 0$, получаем:

$$v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 0, \quad p = p(x, y). \quad (4)$$

Что касается плотности среды, то, поскольку $v_x \neq 0$, уравнение неразрывности будет удовлетворено, если $\rho = \rho(y)$.

Из системы (4) имеем

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dp'_{xy}(y)}{dy} = 0, \quad \frac{dp'_{yy}(y)}{dy} = 0.$$

Отсюда получаем, что подобное течение возможно лишь при постоянном продольном градиенте давления, так что

$$\frac{dp'_{xy}}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} \equiv \frac{\delta p}{L} = \text{const}, \quad p'_{yy} = \sigma_0 = \text{const}.$$

Или, обращаясь к выражениям (2), имеем

$$\mu(I) \frac{dv_x}{dy} = \frac{\delta p}{L} y + C_1, \quad \mu_c(I) \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = 2\sigma_0.$$

Дальнейший анализ зависит от вида функций $\mu = \mu(I)$ и $\mu_c = \mu_c(I)$.

Рассмотрим среды Оствальда — Вале, для которых $\mu(I) = \mu_n I^n$ ($\mu_n = \text{const}$) так, что

$$\mu_n \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^n \frac{dv_x}{dy} = \frac{\delta p}{L} y + C_1. \quad (5)$$

Для чисто сдвигового течения ($\delta p = 0$) из (5) получаем, удовлетворяя граничным условиям для $v_x(y)$

$$v_x = v_0 + (v_h - v_0) \frac{y}{h}.$$

Тогда

$$I = \left| \frac{dv_x}{dy} \right| = \frac{|v_h - v_0|}{h}.$$

Таким образом, на пластинки действуют силы трения (на единицу площади), направленные вдоль оси (x),

$$F_0 = p'_{xy} = 2\mu_n \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^n \frac{v_h - v_0}{h} = 2\mu_n \frac{|v_h - v_0|^n}{h^{n+1}} (v_h - v_0) = -F_h.$$

Здесь: F_0 — сила трения на нижней пластинке, F_h — на верхней.

Кроме того, поскольку $\mu_c \neq 0$, то на них действуют и нормальные усилия P_0 (на нижнюю пластинку) и P_h , направленные по оси y , причем

$$P_0 = p - \frac{1}{2} \mu_c(I) \left(\frac{v_h - v_0}{h} \right)^2 = -P_h.$$

Избыточная нормальная сила $P_0 - p$, действующая на нижнюю пластину, и $P_h - p$ — на верхнюю, при экспериментах наблюдалась как «подъемная сила», так что $\mu_c < 0$. Это явление называется эффектом Пойнтинга.

Заметим, что $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p + \mu_c(I) \frac{(v_h - v_0)^2}{h^2}$, т. е. сдвиговое течение жидкости Рейнера — Ривлина вызывает кажущееся увеличение гидростатического давления ($\mu_c < 0$). Это — эффект Кельвина.

Условие $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$ для ньютоновской жидкости здесь заменяется более слабым: $p_{xx} = p_{yy}$. Но эксперименты не согласуются с этим фактом. Лучшее согласие дает модель жидкости с памятью второго порядка, где учитывается зависимость p_{ik} от тензора ускорения деформации в виде производной Олдройда, и тогда $p_{xx} \neq p_{yy}$. Действительно, на основании (2.175) имеем

$$p'_{ik} = 2\mu v_{ik} + 2\mu_c v_{il} v_{lk} + 2\mu_2 w_{ik},$$

где согласно (2.62) для сдвигового течения имеем

$$w_{xx} = 0, \quad w_{yy} = \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = \left(\frac{v_h - v_0}{h} \right)^2.$$

Таким образом, $p_{xx} = -p + 2\mu_c (I)v_{xy}^2$, а $p_{yy} = -p + 2\mu_c (I)v_{xy}^2 + 8\mu_2 (I)v_{xy}^2 \neq p_{xx}$, что согласуется с экспериментом.

Задача 14.3. Исходя из вида (2.31а) удельной упругой энергии \mathcal{F} для упруговязкой среды (модель Кельвина — Фойгта), получить реологическое уравнение (2.172).

Решение. Поскольку в упруговязкой среде идут диссипативные процессы, то $d_i s > 0$ (см. представление Карно — Клаузиуса (2.16)). Из первого начала термодинамики имеем

$$d_i s = ds - d_e s = ds - \frac{1}{T} (de + \delta w).$$

Используя (2.30) и вводя удельную упругую энергию $\mathcal{F} = e - Ts$, отсюда получаем

$$\rho T \frac{d_i s}{dt} = \rho s \frac{dT}{dt} + p_{ik} \frac{du_{ik}}{dt} - \rho \frac{d\mathcal{F}}{dt}.$$

Предполагая изотермичность процессов ($T = \text{const}$) и малость упругих деформаций, так что $du_{ik}/dt = v_{ik}$, отсюда имеем на основании (2.31а):

$$\begin{aligned} \rho T \frac{d_i s}{dt} &= p_{ik} v_{ik} - 2\mu' \dot{u}_{ik} \dot{v}_{ik} - \lambda' u_{ll} v_{ll} = \\ &= \left(\dot{p}_{ik} + \frac{1}{3} p_{ll} \delta_{ik} \right) \left(\dot{v}_{ik} + \frac{1}{3} v_{ll} \delta_{ik} \right) - 2\mu' \dot{u}_{ik} \dot{v}_{ik} - \lambda' u_{ll} v_{ll} = \\ &= \dot{p}_{ik} \dot{v}_{ik} - 2\mu' \dot{u}_{ik} \dot{v}_{ik}, \end{aligned}$$

ибо из (2.31б) следует $p_{ll} = 3\lambda' u_{ll}$.

Поскольку из второго начала термодинамики $\frac{d_i s}{dt} \geq 0$, то

$$\left(\dot{p}_{ik} - 2\mu' \dot{u}_{ik} \right) \dot{v}_{ik} \geq 0.$$

Для упруговязкой среды, в которой присутствуют сдвиговые вязкие напряжения $2\mu \dot{v}_{ik}$ ($\mu > 0$), это условие выполняется, если

$$\dot{p}_{ik} - 2\mu' \dot{u}_{ik} = 2\mu \dot{v}_{ik},$$

т. е. справедлива реологическая формула модели Кельвина — Фойгта.

Заметим, что этот же результат можно получить, если воспользоваться свойством положительности произведения энтропии (2.79) для случая $T = \text{const}$ и тензора $p'_{ik} = p_{ik} - 2\mu u_{ik}$, представляющего вязкие напряжения в упруговязкой среде.

Задача 14.4. Показать, что в законе Гука для анизотропной среды, имеющем вид $p_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}$, из 81 компоненты тензора модулей упругости λ_{iklm} только 21 являются независимыми.

Решение. Согласно (2.31) существует функция удельной свободной энергии \mathcal{F} , такая, что

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} \right)_T = \frac{1}{\rho} p_{ik}.$$

Выбирая \mathcal{F} в виде $\mathcal{F} = \frac{1}{2\rho} \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}$, получим $p_{ik} = \frac{\lambda_{iklm} + \lambda_{lmik}}{2} u_{lm}$.

Поскольку u_{ik} — тензор симметричный, а \mathcal{F} — скаляр, то

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}.$$

Эти равенства составляют $27 + 27 + 6 = 60$ уравнений, так что из $81 = 3^4$ компоненты λ_{iklm} независимыми будут только 21. При этом компоненты p_{ik} удовлетворяют закону Гука.

Заметим, что систему координат можно сориентировать так, чтобы, например, сделать 3 из 21 модуля упругости нулями. Тогда такая наиболее общего вида анизотропная линейная упругая среда (триклинная система) может быть охарактеризована 18 независимыми модулями упругости.

Задача 14.5. Показать, что если анизотропная среда имеет одну плоскость симметрии, то число независимых модулей упругости равно 13 (моноклинная система (сингония)).

Решение. Из выражения для свободной энергии \mathcal{F} следует, что компоненты тензора λ_{iklm} при изменении системы координат преобразуются как произведения соответствующих координат. Наличие плоскости симметрии (например $(x_1 O x_2)$) означает инвариантность относительно следующего преобразования координат:

$$x_1 \rightarrow x_1, \quad x_2 \rightarrow x_2, \quad x_3 \rightarrow -x_3.$$

Те компоненты λ_{iklm} , которые содержат нечетное число индексов 3, при таком преобразовании меняют знак. С другой стороны, наличие симметрии свойств означает, что они не должны меняться при отражении относительно плоскости симметрии; значит, они должны быть равны нулю. Итак, восемь компонент равны нулю, а именно

$$\lambda_{3111} = \lambda_{3112} = \lambda_{3122} = \lambda_{3133} = \lambda_{3211} = \lambda_{3222} = \lambda_{3233} = \lambda_{3212} = 0.$$

Свободная энергия единицы объема F в моноклинной системе имеет выражение

$$F \equiv \rho \mathcal{F} = \frac{1}{2} (\lambda_{1111} u_{11}^2 + \lambda_{2222} u_{22}^2 + \lambda_{3333} u_{33}^2) + \lambda_{1122} u_{11} u_{22} + \lambda_{1133} u_{11} u_{33} + \lambda_{2233} u_{22} u_{33} + \\ + 2(\lambda_{1212} u_{12}^2 + \lambda_{1313} u_{13}^2 + \lambda_{2323} u_{23}^2 + \lambda_{1112} u_{11} u_{12} + \lambda_{2221} u_{22} u_{12} + \lambda_{1233} u_{12} u_{33} + 2 \lambda_{1323} u_{13} u_{23}).$$

Таким образом, в этом случае из 81 компоненты λ_{iklm} остаются не равными нулю лишь 13. Поскольку фиксируется лишь выбор оси (x_3), а оси (x_1) и (x_2) выбираются произвольно, то этим можно воспользоваться, чтобы сделать одну из 13 величин λ_{iklm} нулем. Тогда 13 независимыми величинами, характеризующими моноклинную систему анизотропии, будут 12 модулей упругости и один угол, определяющий ориентацию осей в плоскости ($x_1 O x_2$).

Задача 14.6. *Рассмотреть анизотропную среду с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии (ромбическая система) и показать, что в этом случае существует и третья плоскость симметрии, перпендикулярная к двум известным, так что среда будет ортотропной.*

Решение. Если кроме плоскости ($x_1 O x_2$) плоскость ($x_2 O x_3$) тоже является плоскостью симметрии, то в дополнение к 8 нулевым модулям упругости, определенным в предыдущей задаче, должны быть равны нулю и те, где нечетное число раз встречается индекс 1, а именно

$$\lambda_{1222} = \lambda_{1112} = \lambda_{1233} = \lambda_{1332} = 0.$$

Тогда свободная энергия приобретает вид

$$F = \frac{1}{2} (\lambda_{1111} u_{11}^2 + \lambda_{2222} u_{22}^2 + \lambda_{3333} u_{33}^2) + \\ + \lambda_{1122} u_{11} u_{22} + \lambda_{1133} u_{11} u_{33} + \lambda_{2233} u_{22} u_{33} + \\ + 2(\lambda_{1212} u_{12}^2 + \lambda_{1313} u_{13}^2 + \lambda_{2323} u_{23}^2).$$

Однако в оставшихся девяти модулях λ_{iklm} индекс 2 тоже встречается лишь четное число раз, что и указывает на то, что плоскость ($x_1 O x_3$) также является плоскостью симметрии, а среда, следовательно, относится к ортотропным средам.

Задача 14.7. *Под осью симметрии порядка n анизотропной среды понимается такая прямая, при повороте вокруг которой на угол $2\pi/n$ всей среды как целого, ее физические свойства не меняются.*

По отношению к упругим свойствам среды, характеризуемым тензором модулей упругости λ_{iklm} , это означает, что λ_{iklm} не меняются при преобразованиях системы координат, представляющих собой поворот вокруг оси симметрии (порядка n) на угол $2\pi/n$.

Ось симметрии порядка n обозначается через C_n . Кристаллы¹ имеют лишь оси порядка 1, 2, 3, 4 и 6.

Рассмотреть вид свободной энергии для сред, имеющих оси C_2 , C_3 , C_4 , C_6 , а также свойства кубической сингонии и изотропии.

Решение. Подсчет числа отличных от нуля модулей упругости для среды, имеющей ось симметрии C_n , например, совпадающей с осью x_3 , удобно вести (см. [35]) при помощи преобразования поворота, вводя комплексные координаты

$$\eta_1 = x_1 + ix_2; \quad \eta_2 = x_1 - ix_2.$$

Тогда поворот вокруг оси (x_3) на угол $2\pi/n$ соответствует преобразованию поворота

¹ Костов И. Кристаллография. Пер. с болгарского. М.: Мир, 1965.

$$\eta_1 \rightarrow \eta_1 \exp \frac{2\pi i}{n}; \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \exp \left(-\frac{2\pi i}{n} \right).$$

1. Рассмотрим среду, имеющую ось симметрии 2-го порядка C_2 , совпадающую с осью (x_3) . Тогда при преобразовании

$$\eta_1 \rightarrow \eta_1 \exp \pi i; \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \exp(-\pi i)$$

или, поскольку $\exp \pi i = -1$, то при $x_1 \rightarrow -x_1$, $x_2 \rightarrow -x_2$, $x_3 \rightarrow x_3$, величины λ_{ikm} не должны меняться. Это означает, что все модули, где индексы 1 и 2 встречаются нечетное число раз (порознь или вместе), обращаются в нуль. Таким образом, остаются неравными нулю лишь девять модулей, а именно

$$\lambda_{1111}, \lambda_{2222}, \lambda_{3333}, \lambda_{1122}, \lambda_{1133}, \lambda_{2233}, \lambda_{1212}, \lambda_{1313}, \lambda_{2323}.$$

Выражение для свободной энергии имеет, следовательно, тот же вид, что и в предыдущей задаче, а сама среда является ортотропной (ромбическая система).

2. Пусть среда имеет ось симметрии C_3 , совпадающую с осью (x_3) . Тогда, рассматривая преобразование

$$\eta_1 \rightarrow \eta_1 \exp \frac{2\pi i}{3}; \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \exp \left(-\frac{2\pi i}{3} \right),$$

приходим к выводу, что отличными от нуля могут быть лишь те компоненты, в кото-

рых индексы 1 и 2 повторяются трижды (ибо $\left(\exp \frac{2\pi i}{3} \right)^3 = 1$) или индекс 1 содержится

столько раз, сколько и индекс 2 (ибо $\exp \frac{2\pi i}{3} \cdot \exp \left(-\frac{2\pi i}{3} \right) = 1$).

Таким образом, в рассматриваемом случае отличны от нуля лишь семь модулей, а именно

$$\lambda_{3333}, \lambda_{1212}, \lambda_{1122}, \lambda_{1233}, \lambda_{1323}, \lambda_{1113}, \lambda_{2223}.$$

В так называемой *ромбоэдрической системе*, когда наряду с вертикальной, например, осью симметрии 3-го порядка допускается наличие еще трех вертикальных плоскостей симметрии, число независимых модулей сокращается на единицу. Действительно, если, скажем, есть вертикальная плоскость симметрии и ось (x_2) перпендикулярна к ней, то должно допускаться преобразование

$$x_1 \rightarrow x_1, \quad x_2 \rightarrow -x_2, \quad x_3 \rightarrow x_3$$

или $\eta_1 \rightarrow \eta_2$; $\eta_2 \rightarrow \eta_1$. Это означает, что при таком преобразовании λ_{1113} переходит в λ_{2223} , что может быть только при $\lambda_{1113} = \lambda_{2223}$.

Выражение для свободной энергии имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{3333} u_{33}^2 + 2\lambda_{1212} (u_{11} + u_{22})^2 + \lambda_{1122} \left[(u_{11} - u_{22})^2 + 4u_{12}^2 \right] + \\ + 2\lambda_{1233} (u_{11} + u_{22}) u_{33} + 4\lambda_{1323} (u_{13}^2 + u_{23}^2) + 4\lambda_{1113} \left[(u_{11} - u_{22}) u_{13} - 2u_{12} u_{23} \right].$$

Если есть только ось C_3 , то все равно минимальное число независимых модулей может быть сведено к шести за счет выбора осей (x_1) и (x_2).

3. Рассмотрим среду, имеющую ось симметрии C_4 (*тетрагональная ось симметрии* класса C_4).

Поворот на угол $\pi/2$ означает преобразование

$$\eta_1 \rightarrow \eta_1 \exp \frac{\pi i}{2}; \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \exp \left(-\frac{\pi i}{2} \right),$$

т. е. $x_1 \rightarrow x_2$, $x_2 \rightarrow -x_1$, $x_3 \rightarrow x_3$. Поэтому

$$\lambda_{1111} = \lambda_{2222}, \quad \lambda_{1133} = \lambda_{2233}, \quad \lambda_{1313} = \lambda_{2323}.$$

Кроме того, дополнительных соотношений между 21 независимым модулем при этом преобразовании будет $2^4 - 3 - 2 = 11$. Таким образом, остается всего 7 независимых модулей упругости.

Если эта ось дополняется четырьмя вертикальными плоскостями симметрии (*тетрагональная система* класса C_{4v}), то, выбирая оси (x_1) и (x_2), перпендикулярные к двум таким плоскостям, получаем, что преобразования

$$x_1 \rightarrow -x_1, \quad x_2 \rightarrow x_2, \quad x_3 \rightarrow x_3 \quad \text{и} \quad x_1 \rightarrow x_1, \quad x_2 \rightarrow -x_2, \quad x_3 \rightarrow x_3$$

обращают в нуль все компоненты λ_{iklm} с нечетным числом одинаковых индексов. Тогда остается всего шесть отличных от нуля компонент λ_{iklm} и свободная энергия принимает вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{1111} (u_{11}^2 + u_{22}^2) + \frac{1}{2} \lambda_{3333} u_{33}^2 + \lambda_{1133} (u_{11} u_{33} + u_{22} u_{33}) + \\ + \lambda_{1122} u_{11} u_{22} + 2 \lambda_{1212} u_{12}^2 + 2 \lambda_{1313} (u_{13}^2 + u_{23}^2).$$

4. Для среды с осью симметрии C_6 (*гексагональная система*) из

$$\eta_1 \rightarrow \eta_1 \exp \frac{\pi i}{3}; \quad \eta_2 \rightarrow \eta_2 \exp \left(-\frac{\pi i}{3} \right)$$

следует, что отличными от нуля будут лишь те компоненты λ_{iklm} , среди индексов которых индексы 1 и 2 встречаются одинаковое число раз, поскольку только в этом случае $\exp \frac{\pi i}{3} \cdot \exp \left(-\frac{\pi i}{3} \right) = 1$. Таковыми являются пять модулей упругости, а именно:

$$\lambda_{3333}, \quad \lambda_{1212}, \quad \lambda_{1122}, \quad \lambda_{1233}, \quad \lambda_{1323}.$$

Свободная энергия имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{3333} u_{33}^2 + 2 \lambda_{1212} (u_{11} + u_{22})^2 + \lambda_{1122} \left[(u_{11} - u_{22})^2 + 4 u_{12}^2 \right] + \\ + 2 \lambda_{1233} u_{33} (u_{11} + u_{22}) + 4 \lambda_{1323} (u_{13}^2 + u_{23}^2).$$

Заметим, что в этом случае деформация в плоскости ($x_1 O x_2$) (когда только u_{11} , u_{12} , u_{22} не равны нулю), определяется всего двумя модулями (λ_{1212} и λ_{1122}), как и для изотропно-го тела.

5. В кубической системе симметрии имеется три оси четвертого порядка C_4 . Направим их по координатным осям (x_1) , (x_2) и (x_3) . Уже наличие оси C_4 , направленной по оси (x_3) , и наличие четырех вертикальных плоскостей симметрии (см. тетрагональную систему) оставляют неравными нулю пять модулей

$$\lambda_{1111}, \lambda_{3333}, \lambda_{1133}, \lambda_{1122}, \lambda_{1212}, \lambda_{1313}.$$

Поворот на $\pi/2$ вокруг оси (x_1) дает преобразование

$$x_1 \rightarrow x_1, \quad x_2 \rightarrow -x_3, \quad x_3 \rightarrow x_2.$$

Это значит, что

$$\lambda_{1133} = \lambda_{1122}, \quad \lambda_{1212} = \lambda_{1313}.$$

Поворот на $\pi/2$ вокруг (x_2) означает преобразование $x_1 \rightarrow x_3$, $x_2 \rightarrow x_2$, $x_3 \rightarrow -x_1$, так что

$$\lambda_{1111} = \lambda_{3333}, \quad \lambda_{1133} = \lambda_{1122}.$$

Таким образом, остается всего три различных модуля упругости, и свободная энергия имеет вид

$$F = \frac{1}{2} \lambda_{1111} (u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2) + \lambda_{1122} (u_{11}u_{22} + u_{11}u_{33} + u_{22}u_{33}) + 2\lambda_{1212} (u_{12}^2 + u_{13}^2 + u_{23}^2).$$

6. В случае *изотропной среды* модули λ_{iklm} не меняются при любом повороте системы координат. Это означает, что они могут представлять собой лишь комбинации компонент тензора δ_{ik} (в декартовых координатах), инвариантного по отношению к любым поворотам. Таким образом, для изотропной среды

$$\lambda_{iklm} = a_1 \delta_{ik} \delta_{lm} + a_2 \delta_{il} \delta_{km} + a_3 \delta_{im} \delta_{kl}.$$

Тогда

$$p_{ik} = a_1 \delta_{ik} u_{ll} + a_2 u_{ik} + a_3 u_{ki}.$$

Используя симметрию u_{ik} и вводя сдвиговой λ' и объемный μ' модули упругости, это соотношение можно записать в виде

$$p_{ik} = 2\mu' \dot{u}_{ik} + \lambda' \delta_{ik} u_{ll}, \quad \text{где } \dot{u}_{ik} = u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ll}.$$

Тогда свободная энергия изотропной упругой среды может быть записана в виде

$$F = \mu' \dot{u}_{ik}^2 + \frac{\lambda'}{2} u_{ll}^2 = \mu' u_{ik}^2 + \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\mu'}{3} \right) u_{ll}^2 = \mu' (u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 + 2u_{12}^2 + 2u_{13}^2 + 2u_{23}^2) + \left(\frac{\lambda'}{2} - \frac{\mu'}{3} \right) (u_{11} + u_{22} + u_{33})^2.$$

Задача 14.8. Найти, насколько давление p_0 в центре кругового цилиндрического вихря отличается от давления на периферии $p_\infty \equiv p|_{r=\infty}$ (см. задачу 5.2).

Решение. Для определения распределения давления (p_1) в области кругового вихря ($r \leq a$) воспользуемся уравнением изменения количества движения (2.129), записанным в цилиндрических координатах ($\mathbf{f} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$, $\rho = \text{const}$, $p = p_1(r)$)

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_1}{dr} = \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\Omega_0^2 r}{4} \quad (r \leq a).$$

Интегрируя, имеем

$$p_1(r) = \frac{\rho \Omega_0^2 r^2}{8} + p_0. \quad (1)$$

В области $r \geq a$ получаем для p_2

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_2}{dr} = \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\Omega_0^2 a^4}{4r^3}; \quad p_2(r) = -\frac{\rho \Omega_0^2 a^4}{8r^2} + p_\infty. \quad (2)$$

Поскольку при $r = a$ давление $p_1 = p_2$, то из (1) и (2) получаем понижение давления в центре вихря

$$p_0 = p_\infty - \frac{\rho \Omega_0^2 a^2}{4}.$$

Упражнения

1. Показать, что в баротропной жидкости для замкнутого материального контура L

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{L},$$

где \mathbf{f} — интенсивность массовых сил.

2. Доказать, что для невязкой жидкости (e — удельная внутренняя энергия)

$$\rho^2 \frac{de}{dt} = p \frac{d\rho}{dt}.$$

3. При $p_{ik} = -p\delta_{ik}$ найти скорость изменения удельной энтропии среды.

4. Для поля скоростей $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$, определить количество движения и момент количества движения единицы объема среды (последний выразить через тензор моментов инерции).

5. Показать, что для невязкой жидкости мощность напряжений $p_{ik} v_{ik}$ равна $p\rho^{-1} d\rho/dt$.

6. Показать, что при движении идеальной среды вектор $\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{f}$ всегда перпендикулярен вектору $\text{rot } \mathbf{a}$.

§ 15. Граничные и начальные условия в механике сплошной среды

Для выделения из множества решений системы уравнений движения сплошной среды одного определенного, характеризуемого заранее заданными признаками, необходимо иметь *начальные и граничные условия*.

Начальные условия определяют состояние среды в начальный, заданный момент времени. Граничные условия задают состояние среды на границах пространственной области, где движется среда. Начальные и граничные условия должны быть заданы таким образом, чтобы на основании уравнений движения можно было однозначно определить все элементы движения среды в любой последующий момент времени в каждой внутренней точке области, занимаемой средой.

Прежде всего заметим, что время, отсчитываемое от некоторого начального момента t_0 (весьма часто принимается $t_0 = 0$), может меняться на бесконечном интервале ($t_0 \leq t < \infty$). Аналогично евклидово пространство, в котором рассматривается движение среды, может включать бесконечно удаленные точки ($|\mathbf{r}| = \infty$) (*внешние задачи*). Физический смысл этих допущений состоит в том, что рассматривается интервал времени значительно больший, чем характерное время (масштаб времени) задачи, а в область определения функций включаются точки, находящиеся от начала выбранной системы координат на значительно большем расстоянии, чем характерный размер (масштаб длины) задачи. Если задача не содержит бесконечно удаленную точку, то говорят о *внутренней задаче*.

Рассмотрим начальные и граничные условия для задач движения сплошной среды, формулируемых методом Эйлера.

Начальные условия Многие нестационарные задачи механики сплошной среды формулируются как задачи Коши, поэтому в классе жидкостей и газов необходимо знать функции точки $\mathbf{f}_v(\mathbf{r})$, $\mathbf{f}_p(\mathbf{r})$ и т. д., совпадающие со значениями искомых функций в начальный момент времени, т. е.

$$\mathbf{v}(t_0, \mathbf{r}) = \mathbf{f}_v(\mathbf{r}), \quad p(t_0, \mathbf{r}) = f_p(\mathbf{r}) \quad \text{и т. д.} \quad (2.182)$$

Что касается нестационарных задач теории упругости, формулируемых дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка (2.149) по времени относительно перемещения, то для них необходимо задавать как начальный вектор смещения, так и его начальную первую производную по времени, а именно

$$\mathbf{u}(t_0, \mathbf{r}) = \mathbf{f}_u(\mathbf{r}), \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \Phi_u(\mathbf{r}). \quad (2.183)$$

Если бесконечный интервал времени включен в рассмотрение, то часто ставится условие ограниченности исследуемых функций при $t \rightarrow \infty$. Когда же это условие не соблюдается, говорят о неустойчивости движения среды.

Периодические нестационарные процессы с известным периодом ($2\pi\omega^{-1}$) не требуют задания начальных условий: определяемые из линейных (или линеаризованных) уравнений функции предполагаются периодическими с тем же периодом, так что любая функция $f(t, \mathbf{r})$ может отыскиваться в виде $f(t, \mathbf{r}) = e^{i\omega t} f_0(\mathbf{r})$, где $f_0(\mathbf{r})$ должна удовлетворять граничным условиям.

Краевые (граничные) условия

Для внешних задач механики сплошной среды необходимо задавать значения отыскиваемых величин в бесконечно удаленной точке. Так, например, во внешних задачах гидроаэромеханики обычно задают

$$\mathbf{v}|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{v}_\infty(t), \quad p|_{r \rightarrow \infty} = p_\infty(t), \quad T|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty(t). \quad (2.184)$$

Иногда (например в случае рассмотрения колебательных процессов в жидкостях или упругих телах) достаточно потребовать конечности функций в бесконечно удаленной точке.

Граничные условия, формулируемые на поверхностях тел, ограничивающих область движения сплошной среды, должны соответствовать физической природе среды и граничного тела. Если эти условия, как и сама задача, сформулированы в таком соответствии, то математическая постановка задачи будет корректной и обеспечит однозначное определение функций во всех внутренних точках области.

Пусть упругая среда контактирует с поверхностью S некоторого тела (рис. 79), которая в каждой своей точке \mathbf{r}_S , с нормалью \mathbf{n} , имеет смещение $\mathbf{u}_S(t)$. Тогда элемент среды, прилегающий к поверхности в точке \mathbf{r}_S , должен иметь в направлении нормали \mathbf{n} то же смещение, чтобы не оторваться от граничной поверхности или не проникнуть через нее. Таким образом, для упругих сред в каждой точке пограничной поверхности необходимо задать краевые условия

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_S \equiv u_n(t, \mathbf{r}_S) = \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}.$$

Ограничения на касательную компоненту смещения среды \mathbf{u}_τ ($\mathbf{u} = u_n \mathbf{n} + \mathbf{u}_\tau$) зависят от физических условий контакта среды с поверхностью тела. Участок у точки \mathbf{r}_S может быть неподвижно закреплен, а может проскальзывать по поверхности крепления с известным коэффициентом трения. Физические условия определяют также и возможность угла поворота упругой среды в месте контакта. Говорят, что упругое тело защемлено в \mathbf{r}_S , когда недопустим поворот вокруг некоторой оси, или просто закреплено, когда недопустимо смещение.

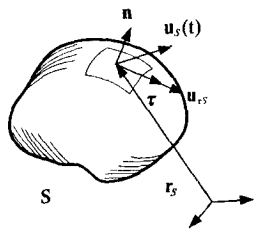


Рис. 79

В гидроаэромеханике в свое время долго дискутировался вопрос о *граничном условии для скорости* жидкостей и газов при контакте с реальными поверхностями твердых тел.

Относительно нормальной компоненты скорости среды все более или менее понятно: если поверхность S непроницаема для среды, то для сохранения сплошности среды вплоть до границ необходимо равенство нормальных компонент скорости поверхности \mathbf{V}_S и среды \mathbf{v} в каждой точке \mathbf{r}_S , т. е.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Big|_S \equiv v_n(t, \mathbf{r}_S) = \mathbf{V}_S \cdot \mathbf{n},$$

где \mathbf{V}_S — заданная скорость поверхности в точке \mathbf{r}_S (если поверхность неподвижна, то $\mathbf{V}_S = 0$). Если же движущаяся поверхность может поглощать среду или испускать ее в поток с заданной скоростью $\boldsymbol{\alpha}(t, \mathbf{r}_S)$, то

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Big|_S \equiv v_n(t, \mathbf{r}_S) = (\mathbf{V}_S + \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{n}.$$

Кстати, возможность поглощения или испускания среды поверхностью твердого тела используется для управления силой трения, действующей на поверхность: у самолетов практикуется устройство, обеспечивающее «отсос» и «вдув» воздуха через перфорированную поверхность крыла. В гидромеханике известен целый класс задач течения жидкостей в каналах с проницаемыми (пористыми) стенками (см., например, [11]).

Однако относительно возможности скольжения реальных жидкостей и газов по непроницаемой поверхности твердых тел долгое время существовало разногласие, которое было обусловлено не только недостатками теории взаимодействия поверхностного слоя твердого тела с молекулами жидкости и газа, но и отсутствием данных тщательно поставленных экспериментов. В настоящее время принято, что реальные жидкости и газы, рассматриваемые в приближении сплошной среды, «прилипают» к поверхности твердых тел независимо от ее обработки, степени гладкости и т. п. Таким образом, граничное условие (в случае проницаемых поверхностей) для касательной компоненты скорости жидкости и газов имеет вид

$$\mathbf{v}_\tau \Big|_S \equiv \mathbf{v}_\tau(t, \mathbf{r}_S) = \mathbf{v}_{\tau S} + \boldsymbol{\alpha}_\tau.$$

Это условие прилипания выполняется для абсолютного большинства реальных газов, жидкостей и твердых тел.

В случае неподвижной и непроницаемой поверхности граничные условия для жидкостей и газов, таким образом, имеют вид:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Big|_S = 0, \tag{2.185}$$

$$\mathbf{v}_\tau \Big|_S = 0, \tag{2.186}$$

или

$$\mathbf{v} \Big|_S = 0. \tag{2.187}$$

Приведем упрощенные теоретические рассуждения из кинетической теории газов о справедливости условия прилипания. Рассмотрим участок поверхности твердого тела, над которой находится газ. Молекулы из слоя толщиной l порядка длины свободного пробега могут встречаться с поверхностью тела. Для некоторых молекул эта встреча проходит без особых последствий, и они отражаются от стенки по законам упругого удара, *зеркально*. Другие же, попав на поверхность, адсорбируются, вступая в хими-

ческое и физическое взаимодействия с молекулами поверхности. В результате эти молекулы газа, покидая поверхность по истечении времени адсорбции, будут иметь случайные импульсы, энергии, направления скорости. Об этих молекулах говорят, что они отражаются от стенки *диффузно*. Характер взаимодействия молекул зависит от физических свойств, состояния и температуры поверхности, от числа и скорости других молекул, падающих на поверхность, и др. Покидающие поверхность молекулы имеют свою функцию распределения. Аппроксимируя ее, можно выделить, следуя Максвеллу, долю молекул, отражаемых от поверхности *зеркально* (рис. 80, а). Все они, сохраняя равенство угла падения углу отражения, «оставляют» на стенке импульс, параллельный стенке, и отличную от нуля среднюю касательную скорость, так что средняя тангенциальная скорость отраженных молекул на стенке не будет равна нулю. Для молекул, отражающихся от стенки *диффузно* (см. рис. 80, б), любое направление скорости отражения будет равновероятным. Эти молекулы не могут сообщить стенке отличный от нуля касательный импульс, поскольку их средняя макроскопическая тангенциальная скорость отражения равна нулю. Эксперименты показывают, что при нормальных условиях у всех жидкостей и газов доля диффузно отраженных молекул составляет 90–95 %. Это и оправдывает условие прилипания. Только в случае сильно разреженных газов, когда неприменимо приближение сплошной среды, значительно увеличивается число зеркально отраженных молекул и появляется так называемое «скольжение» газов вдоль твердых стенок (см., например, [25]). В этом случае должна быть задана скорость скольжения газа на стенке либо из эксперимента, либо из теории на основании функции распределения отраженных молекул.

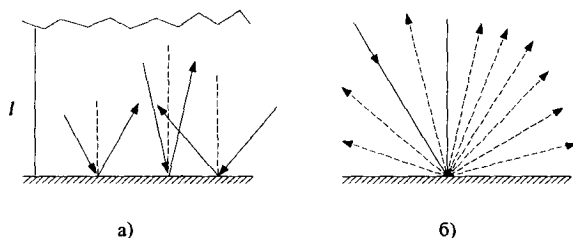


Рис. 80

При принятии условия (2.186) естественно возникает вопрос о перепределенности системы уравнений в приближении идеальной среды, поскольку порядок этой системы понижается (отброшены члены со вторыми производными $\partial^2 v_i / \partial x_i \partial x_k$). Можно показать, что и будет сделано при изучении идеальных сред, что для однозначности решения системы уравнений движения этих сред достаточно ограничения лишь на нормальную компоненту (2.185), а условие (2.186) будет уже лишним, т. е. будет переопределять систему уравнений движения идеальных жидкостей и газов. Для модели идеальных сред, лишенных трения, это вы-

глядит естественным, поскольку они имеют возможность беспрепятственно скользить вдоль твердых стенок. Но как быть с условием прилипания, экспериментально подтвержденным для всех реальных сред? И можно ли тогда использовать вообще модель идеальной среды для описания реальных явлений?

Из этого видимого противоречия был найден выход, состоящий в отбрасывании условия (2.186) не на твердой поверхности, а на внешней поверхности пристеночного *пограничного слоя* среды. О нем уже шла речь в § 14 при рассмотрении модели идеальной среды. Этот слой имеет очень малую толщину как раз при тех условиях течения (силы инерции значительно больше сил вязкости), когда вне пограничного слоя образуется поток, где можно рассматривать реальные жидкость и газ как идеальную среду. Таким образом, в первом приближении толщину пограничного слоя можно не учитывать и граничное условие (2.186) для идеальной среды на границе твердого тела не принимать во внимание.

Компоненты тензора напряжений в случае жидкостей и газов, в частности давление, не могут быть заданы на твердых, неизменных поверхностях. Здесь они определяют силы, действующие на твердые поверхности, а именно эти силы и подлежат определению при решении задач движения сплошной среды. Напряжения задаются на так называемых *свободных поверхностях*, являющихся поверхностями раздела двух жидких (газообразных) сред, вид которых определяется в процессе решения задачи (поверхность свободной струи и др.). Такие поверхности являются поверхностями разрыва в сплошной среде (см. «Введение», § 8), и рассмотрение условий течения среды у этих поверхностей позволяет сформулировать необходимые условия для жидкостей и газов (см. дальше). Для упругих сред значения компонент тензора напряжений могут быть заранее известны на граничных поверхностях. Тогда граничные условия имеют вид

$$\mathbf{p}_n|_S \equiv \mathbf{p}_n(t, \mathbf{r}_S) = \mathbf{p}^S(t),$$

где $\mathbf{p}^S(t)$ — заданный в точках поверхности S вектор внешней нагрузки. Они связаны с особенностями задач теории упругости, которые могут быть сформулированы как относительно смещений, так и относительно напряжений.

Граничные условия для температуры могут быть заданы различными способами в зависимости от физических условий контакта среды с телами за пограничной поверхностью S .

Если за поверхностью S находится тело, обладающее хорошей теплопроводностью, так что по истечении некоторого времени между ним и средой устанавливается тепловой баланс, то температура при переходе через границу остается непрерывной. В этом случае для температуры T среды на границе S ставится условие

$$T|_S \equiv T(t, \mathbf{r}_S) = T_S(t), \quad (2.188)$$

где T_S — заданная в каждой точке граничной поверхности температура тела, которая может меняться со временем.

Тепловой баланс между телом и средой может устанавливаться за счет заданной на поверхности нормальной компоненты потока тепла $Q_n(t, \mathbf{r}_S)$. Тогда на поверхности S непрерывен поток тепла и для температуры T среды с теплопроводностью λ имеем

$$\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = -\frac{1}{\lambda} Q_n(t, \mathbf{r}_S). \quad (2.189)$$

В этом случае температура стенки и температура среды у поверхности S будут, вообще говоря, различными. Так, например, в случае теплоизолированной поверхности S , т. е. когда $Q_n = 0$ (наружный слой тела полностью непроницаем для тепла), во время установления баланса теплообмен между средой и телом будет происходить до тех пор, пока не установится состояние, соответствующее $\partial T / \partial n|_S = 0$. Температура стенки, которая устанавливается при стационарном процессе, называется равновесной.

Если нормальный поток $Q_n(t, \mathbf{r}_S)$ задается законом Ньютона, т. е.

$$Q_n(t, \mathbf{r}_S) = \lambda_S(T - T_S),$$

где λ_S — коэффициент теплопередачи, а T_S — известная температура поверхности, то граничное условие для температуры среды T согласно (2.189) приобретает форму так называемого смешанного условия:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\lambda_s}{\lambda} (T - T_s) \right]_{r=r_s} = 0. \quad (2.190)$$

Отсюда при выполнении неравенства $\lambda_s \delta \gg \lambda$, где δ — характерная толщина слоя теплопередачи, как частный случай получается условие (2.188).

Условия (2.188), (2.189) и (2.190) представляют собой основные граничные условия, используемые в теории теплопроводности.

Граничные условия на поверхности разрыва. Ударные волны. Контактные разрывы

Как было отмечено, дифференциальные уравнения (2.40)–(2.43) справедливы лишь в областях непрерывности входящих в эти уравнения функций и их производных. Между тем

целый ряд задач сплошной среды формулируется для областей, включающих в себя поверхности *сильных разрывов*. Так называют поверхности разрывов самих функций (в отличие от поверхностей *слабых разрывов*, где разрывны лишь производные функций). Таковы, например, задачи, включающие поверхности раздела жидких несмешивающихся сред, задачи газовой динамики с ударными волнами, которые возникают при сверхзвуковых движениях. В этих случаях системы дифференциальных уравнений справедливы в областях вплоть до поверхностей сильных разрывов. Но тогда на этих поверхностях разрыва должны быть сформулированы граничные условия. Они формулируются в виде соотношений между предельными значениями функций по обе стороны разрыва. Эти соотношения получаются из интегральной формы основных уравнений, которые применимы и для разрывных функций.

О поверхностях разрыва и допустимости их рассмотрения в пределах модели сплошной среды уже шла речь во «Введении». Эти поверхности рассматривались и в § 8, 13.

Пусть σ — движущаяся поверхность сильного разрыва (рис. 81). Выберем на ней u нормали \mathbf{n} , направленной из области непрерывности (1) в (2), элемент $\delta\sigma_0$, так что на верхней стороне $\delta\sigma_0$ любая характеристика среды Φ имеет значение Φ_2 , а на нижней — Φ_1 . Построим у $\delta\sigma_0$ цилиндр с объемом $V = V_1 + V_2$ так, как показано на рис. 81: образующие цилиндра направлены вдоль нормали \mathbf{n} , причем V_1 и V_2 — части цилиндра, лежащие соответственно в областях (1) и (2).

Пусть геометрический цилиндр связан и движется вместе с поверхностью сильного разрыва σ , так что элемент $\delta\sigma_0$ имеет скорость

$\mathbf{w}(t, \mathbf{r})$ в выбранной системе отсчета. Применим к движущемуся цилиндру выражение (2.45) для какой-то характеристики среды $\Phi(t, \mathbf{r})$.

Имеем

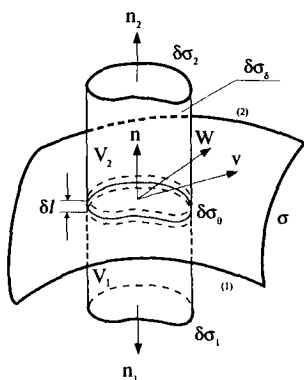


Рис. 81

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_w} \Phi dV - \int_V F dV = \\ = \int_S (\Phi (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + P) dS. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Здесь: $S = \delta\sigma_2 + \delta\sigma_1 + \delta\sigma_\delta$, где $\delta\sigma_\delta$ — боковая поверхность цилиндра; $V_w = V = V_1 + V_2$; $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ — скорость среды. Для предельного вида области V_w , когда величина ее объема стремится к нулю, а основания цилиндра $\delta\sigma_1$ и $\delta\sigma_2$ неограниченно приближаются к $\delta\sigma_0$, так что $\delta\sigma_\delta \rightarrow 0$, в силу того, что объемные интегралы стремятся к нулю быстрее поверхностного, имеем

$$\int_{\delta\sigma_0} \{ [\Phi (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + P]_{(1)} - [\Phi (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + P]_{(2)} \} dS = 0. \quad (2.192)$$

Здесь индексом (1) отмечено значение подинтегральной функции на нижней стороне элемента $\delta\sigma_0$, а индексом (2) — на верхней, со стороны области (2), причем $\mathbf{n}_{(1)} = -\mathbf{n}_{(2)} \equiv -\mathbf{n}$. В силу произвольности элемента $\delta\sigma_0$ из (2.192) получаем

$$\langle \Phi (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + P \rangle = 0. \quad (2.193)$$

Здесь, как и ранее (см. § 8), фигурными скобками обозначена разность величины по обе стороны разрыва, т.е. $\langle A \rangle \equiv A_2 - A_1$. Эти разности в дальнейшем будем называть скачками соответствующих величин.

Заметим, что этот результат следует и из формулы (1.175а) (§ 8), если приравнять интеграл $\frac{d}{dt} \int_V \Phi dV$ силовому воздействию, как это сделано в § 13.

Из этого общего выражения, последовательно подставляя сюда значения Φ , равные ρ , $\rho \mathbf{v}$ и $\rho(v^2/2 + e)$, и соответственно для P : 0 , \mathbf{p}_n , $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} + \lambda \partial T / \partial n$ (см. (2.46)–(2.48)), получаем:

$$\langle \rho U_n \rangle = 0, \quad (2.194)$$

$$\langle \rho U_n \mathbf{v} - \mathbf{p}_n \rangle = 0, \quad (2.195)$$

$$\left\langle \rho U_n \left(\frac{v^2}{2} + e \right) - \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right\rangle = 0. \quad (2.196)$$

Здесь обозначено: $\mathbf{U} \equiv \mathbf{v} - \mathbf{w}$ — скорость среды относительно поверхности разрыва; $U_n \equiv \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}$.

Это и есть соотношения на сильных разрывах, связывающие значения искомых величин по обе стороны поверхности разрыва. Так, например, для неподвижной поверхности разрыва ($\mathbf{w} = 0$) имеем из (2.194)–(2.196):

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}, \quad (2.197)$$

$$\rho_1 v_{1n} \mathbf{v}_1 - \mathbf{p}_{n1} = \rho_2 v_{2n} \mathbf{v}_2 - \mathbf{p}_{n2}, \quad (2.198)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1 v_{1n} \left(\frac{v_1^2}{2} + e_1 \right) - \mathbf{p}_{n1} \cdot \mathbf{v}_1 - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \\ & = \rho_2 v_{2n} \left(\frac{v_2^2}{2} + e_2 \right) - \mathbf{p}_{n2} \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}. \end{aligned} \quad (2.199)$$

Теперь, решая дифференциальные уравнения в области непрерывности (1) при граничных условиях, налагаемых на \mathbf{v}_1 , T_1 , ..., затем — в области (2) при условиях, налагаемых на \mathbf{v}_2 , T_2 , ..., можно «сшить» эти решения в каждой точке поверхности разрыва при помощи (2.197)–(2.199).

Уравнения из (2.194)–(2.196) определяют соотношения на движущихся разрывах, через которые существует поток среды ($U_n \neq 0$). Такие поверхности называются *ударными волнами*. Если ударные волны неподвижны в рассматриваемой системе координат ($\mathbf{w} = 0$), то их

часто называют *скачками уплотнения*¹. На скачках уплотнения соотношения имеют вид (2.197)–(2.199).

В случае, когда через разрывы среда не протекает, т. е. $U_n = 0$, говорят о *контактных разрывах*. Таковы поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей, поверхность, отделяющая воду от воздуха, например, поверхность моря, свободной струи воды и т. п.

На контактных разрывах из (2.194)–(2.196) получаем, полагая $U_n = 0$:

$$\langle \mathbf{p}_n \rangle = 0, \quad (2.200)$$

$$\left\langle \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} + \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right\rangle = 0, \quad (2.201)$$

так что напряжения и мощность поверхностных сил, сложенная с нормальным потоком тепла, непрерывны.

В то же время при $U_n = 0$ имеем $\langle v_n \rangle = 0$, а из (2.194)–(2.196) следует, что скачки $\langle \rho \rangle$, $\langle \mathbf{v}_\tau \rangle$ и $\langle v^2/2 + e \rangle$ могут иметь произвольные значения. Так что несмешивающиеся жидкости по обе стороны от поверхности разрыва могут иметь произвольно различающиеся плотности, свободно скользить одна по другой (в случае идеальных сред), и их внутренние энергии таковы, что скачок $\langle e \rangle = 0$ произволен.

Условия на поверхностях сильного разрыва выглядят иначе, если на них существенны поверхностные явления — поверхностные силы (например, сила поверхностного натяжения), поверхностные токи и заряды (см. § 13 (2.98а)), поверхностные источники массы (в случае, когда поверхность раздела сред является, например, поверхностью испарения жидкости или поверхностью, где идут химические реакции, и др.), поверхностные источники тепла и энергии. В этом случае, обозначая через \mathbf{P}_S , q_S и ε_S интенсивности этих поверхностных источников (сила на единице площади поверхности, мощность источников массы и источников энергии на единице площади поверхности), вместо (2.194)–(2.196) после предельного перехода получим:

¹ В газовой динамике показывается, что скачков разрежения (плотность среды после ее прохождения через поверхность разрыва понижается) в нормальных средах не существует.

$$\begin{aligned} \langle \rho U_n \rangle &= q_s, \\ \langle \rho U_n \mathbf{v} - \mathbf{P}_n \rangle &= \mathbf{P}_s, \\ \left\langle \rho U_n \left(\frac{v^2}{2} + e \right) - \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{v} - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right\rangle &= \varepsilon_s. \end{aligned} \quad (2.202)$$

Поверхностные явления могут играть решающую роль в обеспечении устойчивости (неустойчивости) поверхностей раздела.

Магнитоэлектродинамические разрывы. Уравнения движения среды, взаимодействующей с магнитным полем, когда ее намагниченностью и поляризацией можно пренебречь, получаются из (2.89)–(2.91), если положить $\mathbf{M} = \mathbf{P} = 0$, так что

$$\mathbf{f}_e^e = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}).$$

Преобразуя выражение для \mathbf{f}_e^e с помощью уравнений Максвелла (2.98) (см. также [30]), полагая в них $\mathbf{V} = \mathbf{H}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, получаем

$$\begin{aligned} \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) &= \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left[\left(\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{H} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{8\pi} \nabla (H^2 + E^2) + \mathbf{i}_k \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} (H_k H_l + E_k E_l) = \\ &= -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\mathbf{p}}^{\mathfrak{g}}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ — плотность электромагнитного количества движения, а тензор

$\hat{\mathbf{p}}^{\mathfrak{g}}$ с компонентами $\hat{p}_{ik}^{\mathfrak{g}} = \frac{1}{4\pi} (H_i H_k + E_i E_k) - \frac{\delta_{ik}}{8\pi} (H^2 + E^2)$ называют в электродинамике тензором напряжений электромагнитного поля. Сам вектор электромагнитных напряжений $\mathbf{P}_n^{\mathfrak{g}}$ на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет компоненты $P_{ni}^{\mathfrak{g}} = \hat{p}_{ik}^{\mathfrak{g}} n_k$.

Кроме того (см. [30]), принимается, что

$$\rho \mathbf{f}_e^e \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

а из уравнений Максвелла получаем

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{E} \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2).$$

Таким образом, система уравнений (2.89)–(2.91) для рассматриваемой среды приобретает вид:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV - \int_V \left(\rho \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right) dV &= \int_S (\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n^{\exists}) dS, \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV - \int_V \left(\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + H^2) \right) dV &= \\ &= \int_S \left(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} + \lambda (\nabla T) \mathbf{n} - \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \right) dS. \end{aligned}$$

Используя общую формулу (2.193) и подставляя в нее вместо Φ последовательно ρ , $\rho \mathbf{v}$, $\rho(v^2/2 + e)$ и соответственно вместо P : 0 , $\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n^{\exists}$, $\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} + \lambda (\nabla T) \cdot \mathbf{n} - \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n}$, получаем следующие условия на магнитоэлектродинамических разрывах:

$$\begin{aligned} \langle \rho U_n \rangle &= 0, \\ \langle \rho U_n \mathbf{v} - \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_n^{\exists} \rangle &= 0, \\ \left\langle \rho U_n \left(\frac{v^2}{2} + e \right) - \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p}_n^{\exists} \cdot \mathbf{v} - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, $p_n^{\exists} = \left\{ \frac{1}{4\pi} (H_i H_k + E_i E_k) - \frac{\delta_{ik}}{8\pi} (H^2 + E^2) \right\} n_k$, вектор $\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ определяет плотность электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга).

Заметим, что эти соотношения справедливы для элемента поверхности разрыва, движущегося со скоростью \mathbf{w} .

Скачок энтропии на сильных разрывах. Ударные волны представляют собой сильные разрывы внутри одной среды и являются математической моделью областей весьма интенсивных изменений параметров среды на малых протяжениях.

Как показывают вычисления (см. [34 § 93]), ширина ударной волны в газе δ имеет порядок длины свободного пробега молекул, так что, поскольку она значительно меньше диаметра макродифференциала, допустимо математически интерпретировать ее как поверхность (линию) разрыва основных параметров. Однако физически область ударной волны — это область очень больших градиентов давления, плотности, скорости, энергии. Например, изменение давления от P_1 до $P_2 > P_1$ внутри ударной волны слабой интенсивности может быть представлено функцией [34]

$$p(x) = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\delta},$$

а энтропия изменяется следующим образом:

$$s(x) = s_1 + k \frac{\langle p \rangle^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{\delta}}.$$

Здесь $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$; $\delta = \frac{8d}{\rho^2 \langle p \rangle \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{\rho}\right)_s}$ — толщина ударной волны, а величины d

и k имеют выражения

$$d = \frac{1}{2\rho a^3} \left[\left(\frac{4}{3} \mu + \zeta \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right], \quad k = \frac{\kappa}{2a\rho T \delta} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s.$$

Нетрудно видеть, что внутри ударной волны давление изменяется монотонно, а энтропия имеет максимум при $x = 0$.

Малость поперечного размера ударной волны, в которой все характеристики меняются на конечную величину, дает основание считать ударную волну областью весьма больших значений градиентов T и \mathbf{v} , т. е. областью интенсивных необратимых процессов и, следовательно, интенсивного возрастания энтропии. В то же время, если использовать вместо уравнения энергии (2.48) уравнение изменения энтропии (2.79), то вместо соотношения (2.196) получаем значение скачка величин на ударной волне в виде

$$\left\langle \rho U_n s - \frac{\lambda}{T} \frac{\partial T}{\partial n} \right\rangle = 0. \quad (2.203)$$

В случае идеальной среды ($\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$; $\lambda = 0$) отсюда и из (2.158) имеем два независимых соотношения

$$\langle s \rangle = 0; \quad \left\langle \frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \right\rangle = 0, \quad (2.204)$$

(здесь учтено, что $\langle \rho U_n \rangle = 0$).

Второе соотношение свидетельствует о сохранении полной энтальпии $\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho}$ среды, а первое — о сохранении удельной энтропии на разрывах, так что налицо противоречие.

Но и в модели идеальной среды нельзя, тем не менее, игнорировать ту реальность, которая не может быть учтена в рамках этой модели, а именно — необходимое возрастание энтропии вследствие необратимости процессов внутри ударной волны.

Кроме того, как уже отмечалось в § 13, эквивалентность уравнения энергии (2.43) и уравнения изменения энтропии (2.78) устанавливается только в условиях принципа локального равновесия — при помощи термодинамического соотношения $Tds = de + pd(1/\rho)$. В то же время, как

уже отмечалось, гарантировать справедливость этого принципа в области ударных волн нельзя.

Поэтому основные соотношения на разрывах в идеальных средах должны содержать условие непрерывности полной энтальпии, т. е. $\left\langle \frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \right\rangle = 0$, а не отсутствие скачка энтропии $\langle s \rangle = 0$. Энтропия среды после прохождения через ударную волну с интенсивными диссипативными процессами должна неизбежно возрасти.

Скачок энтропии на разрывах можно найти на основании уравнения состояния, а именно

$$\langle s \rangle = s(\rho_2, T_2) - s(\rho_1, T_1),$$

где $\langle \rho \rangle$ и $\langle T \rangle$ определяются из соотношений (2.194)–(2.196).

Задачи с решениями

Задача 15.1. Сформулировать условия на контактном разрыве в вязкой сжимаемой среде.

Решение. Пусть оси декартовой системы координат у элемента контактного разрыва выбраны так, что (x_3) совпадает с нормалью, а (x_1) и (x_2) лежат в касательной плоскости к разрыву.

Тогда, поскольку для контактного разрыва (см. 2.200)

$$\langle \mathbf{p}_n \rangle = \langle \mathbf{p}_k n_k \rangle = 0,$$

то для $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ имеем:

$$\langle p_{13} \rangle = 0, \quad \langle p_{23} \rangle = 0, \quad \langle p_{33} \rangle = 0.$$

Подставляя сюда из обобщенного закона Навье–Стокса

$$p_{ik} = -\delta_{ik} p + 2\mu \dot{v}_{ik} + \zeta \delta_{ik} v_{ll} = \delta_{ik} \left\{ -p + \left(\zeta - \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} + 2\mu v_{ik}$$

значения компонент тензора напряжений, получаем:

$$\left\langle \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right\rangle = \left\langle \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right\rangle = 0, \quad \left\langle -p + \left(\zeta - \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right\rangle = 0.$$

В случае невязкой среды из этих условий остается $\langle p \rangle = 0$.

Задача 15.2. Течение вязкой несжимаемой жидкости между движущимися пластинами. Исследовать установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами ($y = 0$ и $y = h$), имеющими вдоль оси (x) скорости v_0 и v_h .

Решение. Пусть нижняя пластина имеет скорость v_0 , а верхняя — скорость v_h (рис. 82). Исходными для решения задачи являются уравнения (2.117а) и (2.118), ко-

торые при $\rho = \text{const}$ и $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ приобретают вид

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v} &= 0, \\ (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия для скорости

$$\mathbf{v}|_{y=0} = \mathbf{i}_x v_0, \quad \mathbf{v}|_{y=h} = \mathbf{i}_x v_h.$$

Вследствие бесконечной протяженности пластин вдоль осей x и z , решение можно искать в виде

$$\mathbf{v} = (v_x(y), 0, 0). \quad (2)$$

Уравнение неразрывности решением (2) удовлетворяется, а уравнение количества движения дает в проекциях на оси:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Отсюда $p = p(x)$ и поскольку $v_x = v_x(y)$, получаем $\frac{dp}{dx} = \text{const} \equiv \frac{\delta p}{L}$, так что рассматриваемое течение может осуществляться лишь при постоянном продольном градиенте давления.

Интегрируя (1) и удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$v_x = v_0 + (v_h - v_0) \frac{y}{h} + \frac{1}{\mu} \frac{\delta p}{L} y(y-h). \quad (3)$$

Профиль скорости — линейный при $(dp/dx) = 0$ и параболический при $(dp/dx) \neq 0$ (см. рис. 82), линии тока, совпадающие с траекториями, — прямые, параллельные оси x , завихренность $\text{rot } \mathbf{v} \equiv \Omega$ имеет единственную компоненту по оси z , равную

$$\Omega_z = -\frac{dv_x}{dy} = -\frac{v_h - v_0}{h} - \frac{1}{\mu} \frac{\delta p}{L} (2y - h).$$

Задача 15.3. Проницаемые пластинки. Найти решение задачи 15.2 при нулевом градиенте давления для случая проницаемых пластин, т. е. когда, например, на нижней движущейся с продольной скоростью v_0 пластине среда отсасывается с постоянной скоростью u , направленной нормально к пластине, а через верхнюю то же количество среды вдувается с той же скоростью (рис. 83).

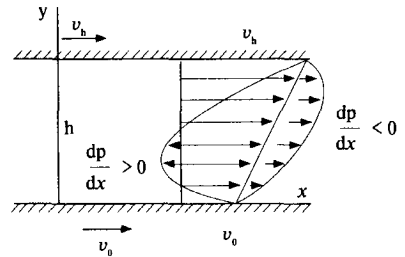


Рис. 82

Решение. В этом случае граничными условиями для системы (1) служат

$$\mathbf{v}|_{y=0} = \mathbf{i}_x v_0 - \mathbf{i}_y u, \quad \mathbf{v}|_{y=h} = \mathbf{i}_x v_h - \mathbf{i}_y u.$$

По тем же соображениям, что и в предыдущей задаче, попытаемся искать решение в виде

$$\mathbf{v} = (v_x(y), -u, 0), \quad p = \text{const.}$$

Тогда из равенства (1) задачи 15.2 получаем

$$-u \frac{dv_x}{dy} = \nu \frac{d^2 v_x}{dy^2},$$

откуда

$$v_x = c_1 + c_2 \exp(-uy/\nu).$$

Удовлетворяя граничным условиям, имеем

$$v_x = v_0 + (v_h - v_0) \frac{1 - \exp(-uy/\nu)}{1 - \exp(-uh/\nu)} \quad (1)$$

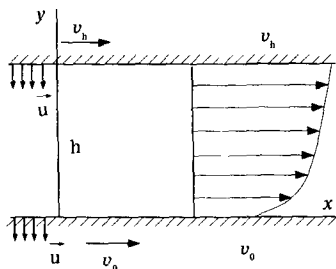


Рис. 83

Примерный профиль скоростей показан на рис. 83. Линии тока и траектории остаются прямолинейными, а завихренность

$$\Omega_z = -\frac{dv_x}{dy} = -\frac{(v_h - v_0)u}{\nu} \frac{\exp(-uy/\nu)}{1 - \exp(-uh/\nu)} \quad (2)$$

по величине убывает при удалении от нижней пластины.

В случае малых значений безразмерного параметра $uh/\nu \ll 1$ (числа Рейнольдса) из (1) получаем приближенно

$$v_x = v_0 + (v_h - v_0) \frac{y}{h}.$$

Другим предельным случаем решения (1) может быть течение у безграничной плоскости $y = 0$, движущейся со скоростью v_0 , через которую отсасывается среда с постоянной скоростью u . Устремляя $h \rightarrow \infty$, из (1) и (2) получаем

$$v_x = v_0 + (v_\infty - v_0)(1 - \exp(-uy/\nu)), \quad \Omega_z = -\frac{(v_\infty - v_0)u}{2\nu} \exp(-uy/\nu). \quad (3)$$

Отсюда, если в бесконечно удаленной точке жидкость покоится ($v_\infty = 0$), имеем

$$v_x = v_0 \exp(-uy/\nu), \quad \Omega_z = \frac{u v_0}{2\nu} \exp(-uy/\nu).$$

В этом случае при удалении от движущейся плоскости с отсосом среды скорость и завихренность быстро убывают и тем быстрее, чем больше скорость отсоса u , или, вернее, чем меньше величина ν/u , имеющая размерность длины (рис. 84, а).

Если же отсасывающая плоскость покоится ($v_0 = 0$), то решение (3), принимая вид

$$v_x = v_\infty \left(1 - \exp(-uy/\nu) \right),$$

$$\Omega_z = -\frac{v_\infty u}{2\nu} \exp(-uy/\nu),$$

может иллюстрировать течение у неподвижной плоскости с отсосом среды (см. рис. 84, б). При этом в бесконечно удаленной точке должна быть задана отличная от нуля продольная скорость v_∞ , которая определяет завихренность у плоскости

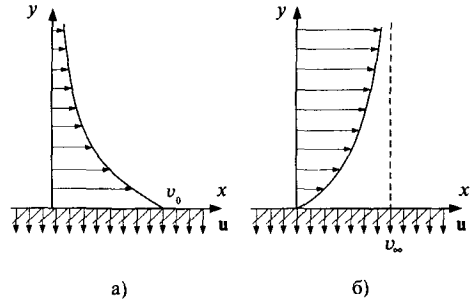


Рис. 84

$$\Omega_{z0} = -\frac{v_\infty u}{2\nu} \equiv \Omega_z|_{y=0}.$$

Эта завихренность диффундирует в потоке за счет вязкости от максимального значения Ω_{z0} до нуля в бесконечно удаленной точке.

В случае отсутствия отсоса ($u = 0$) единственным решением системы (1) для неподвижной плоскости является тривиальное решение $\mathbf{v} = 0$, $p = \text{const}$.

Задача 15.4. Найти стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, стекающей под действием силы тяжести с наклонной плоскости, если задана постоянная глубина потока h и давление p_0 на свободной поверхности (рис. 85), граничащей с воздухом.

Решение. Из системы (2.117а) и (2.118), проектируя на оси (x) и (y), получаем (рис. 85):

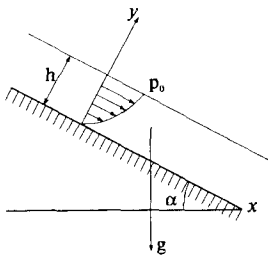


Рис. 85

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right),$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

Чтобы получить полную систему граничных условий, рассмотрим соотношение для напряжений на свободной поверхности ($v_n = 0$), а именно $\langle \mathbf{p}_n \rangle = 0$ (см. (2.220) и задачу 15.1).

Проектируем на оси (x) и (y) вектор

$$\mathbf{p}_n \equiv \mathbf{p}_y = -p'_y \mathbf{i}_y + p'_{yx} \mathbf{i}_x + p'_{yy} \mathbf{i}_y,$$

где p'_{yy} , p'_{yx} — составляющие тензора вязких напряжений, которые согласно (2.117) для рассматриваемого случая имеют выражение

$$p'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad p'_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right).$$

На границе $y = h$ имеем (см. задачу 15.1):

$$\left\langle -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \right\rangle = 0; \quad \left\langle \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right\rangle = 0.$$

Граничными условиями на наклонной плоскости являются условия прилипания, а именно

$$v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0.$$

Решением системы (1), удовлетворяющим сформулированным граничным условиям, могут быть функции

$$v_x = v_x(y), \quad v_y = 0, \quad p = p(y).$$

Тогда из (1) имеем

$$0 = g \sin \alpha + \nu \frac{d^2 v_x}{dy^2}, \quad 0 = g \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy}.$$

Интегрируя уравнения и удовлетворяя граничным условиям для p и v_x , окончательно получаем

$$v_x = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} y(2h - y), \quad p = p_0 + \rho g (h - y) \cos \alpha.$$

Здесь принято, что напряжение трения в воздухе значительно меньше, чем в жидкости, а потому $(dv_x/dy)_{y=h} = 0$.

Задача 15.5. Периодическое движение вязкой жидкости у колеблющейся плоскости.

Предыдущие три задачи иллюстрировали роль краевых условий при изучении установившихся течений вязкой жидкости. Рассмотрим периодические решения в случае неустановившихся потоков.

Пусть плоскость (xOz) совершает гармонические колебания вдоль оси (x) со скоростью $\mathbf{u} = (u_0 e^{i\omega t}, 0, 0)$. Определить движение в вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей полупространство $y \geq 0$, если задан градиент давления $\partial p / \partial x = p_0 e^{i\omega t}$.

Решение. Ищем решение системы

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

в виде

$$\mathbf{v}(y, t) = (\tilde{v}_x(y) e^{i\omega t}, 0, 0), \quad p = p_0 x e^{i\omega t}.$$

Тогда, подставляя этот вид решения в уравнения задачи, имеем

$$i\omega \tilde{v}_x(y) = -\frac{p_0}{\rho} + \nu \frac{d^2 \tilde{v}_x}{dy^2},$$

причем уравнение $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и остальные проекции уравнения движения удовлетворяются тождественно. Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\tilde{v}_x(y) = \frac{ip_0}{\rho\omega} + c_1 \exp\left(y(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) + c_2 \exp\left(-y(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right).$$

Используя граничное условие для $\mathbf{v}(y, t)$

$$\mathbf{v}|_{y=0} = \mathbf{i} u_0 e^{i\omega t}, \quad |\mathbf{v}|_{y=\infty} \text{ — ограничено,}$$

получим

$$c_1 = 0, \quad c_2 = u_0 - \frac{ip_0}{\rho\omega},$$

так что

$$v_x(y, t) = e^{i\omega t} \tilde{v}_x(y) = u_0 \exp\left(i\omega t + y(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) + \frac{ip_0}{\rho\omega} \left\{ \exp(i\omega t) - \exp\left(i\omega t - y(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \right\}.$$

Если величина $u_0 e^{i\omega t}$ задана в виде действительной периодической функции, например $u_0 \sin \omega t$, то соответствующее решение можно получить из предыдущего выражения, взяв от него действительную часть. В этом случае имеем

$$v_x(y, t) = \left(u_0 + \frac{p_0}{\rho\omega}\right) \exp\left(-y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) \sin\left(\omega t - y\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\right) - \frac{p_0}{\rho\omega} \sin \omega t.$$

Таким образом, вязкая жидкость и вдали от пластины совершает колебательные движения с той же частотой ω , но с амплитудой, определяемой не u_0 , а $p_0/\rho\omega$. Эти колебания совершает невязкая жидкость ($\nu \rightarrow 0$) независимо от колебаний пластины, а лишь за счет периодичности градиента давления p_0 .

Упражнения

1. Найти решение задачи 15.3 вида: $\mathbf{v} = (v_x(y), -u, 0)$, $\frac{dp}{dx} \equiv \frac{\delta p}{L} = \text{const}$.
2. Объяснить решение задачи 15.4 при $\alpha = 0$ и значениях α , близких к $\pi/2$. Найти в потоке места максимальных завихренностей.
3. Показать, что на поверхности раздела вязких жидкостей (газов) тепловой поток непрерывен.

Указание: воспользоваться (2.203) и учесть, что скорости вязких сред на поверхности раздела непрерывны.

§ 16. Вариационные принципы механики сплошной среды

В предыдущих разделах было показано, что задачи механики сплошной среды сводятся к уравнениям в частных производных, которые необходимо интегрировать при определенных начальных и граничных условиях. Значительные трудности решения этих задач связаны с нелинейностью основной системы уравнений, и от этой нелинейности зачастую не удастся избавиться в интересных и важных прикладных проблемах. В связи с этим в механике сплошной среды уже давно важное место занимают приближенные и численные методы решения, а в последнее время — компьютерное моделирование.

В методиках приближенного решения математически правильно поставленных задач сплошной среды особый интерес представляют так называемые прямые методы, связанные с вариационными задачами.

Вариационная задача состоит в отыскании подынтегральной функции (или функций), которая придает некоторому функционалу экстремальное значение. Как известно, она равносильна задаче интегрирования одного (или нескольких) дифференциального уравнения при определенных краевых условиях. Однако оказывается, что приближенное решение многих задач механики гораздо эффективнее получать путем прямых методов решения соответствующей вариационной задачи, чем решать приближенными методами системы дифференциальных уравнений движения. В связи с этим в механике сплошной среды представляют интерес вариационные принципы, позволяющие свести задачу интегрирования системы дифференциальных уравнений движения среды к равносильной ей вариационной задаче.

Но не только этим, даже, пожалуй, не столько этим исчерпывается значение вариационных принципов. Они в наиболее краткой форме описывают суть механических и физических явлений, включая в себя не только дифференциальные уравнения, но и граничные условия, отражая в определенной мере направление рассматриваемого физического процесса. Кроме того, характеризуя модель среды в целом, вариационный принцип связан с экстремумом скалярной величины, так что он формулируется независимо от выбора системы координат. Можно сказать, что в этой единственной скалярной функции (функционале) заложена вся информация и о системе дифференциальных уравнений движения, и о физических процессах, описываемых вариационным принципом.

Возникновение вариационных принципов исторически связано, по-видимому, с идеей о том, что природные явления обладают экстремальными свойствами и протекают так, что некоторые величины достигают своего максимального или минимального значения.

Первая научная формулировка вариационного принципа принадлежит П. Ферма¹. Он в 1662 г. предложил принцип кратчайшего времени прохождения луча света, что позволило установить законы преломления света в геометрической оптике. Описание истории возникновения основных вариационных принципов в физике и механике и их формулировки можно найти в монографии [87].

В механике сплошной среды ранее других стали развиваться вариационные методы в теории упругости, в частности в задачах равновесия упругого тела, после того, как В. Ритц² опубликовал в 1908 г. свой метод приближенного решения вариационной задачи. Пожалуй, только с середины прошлого века стали разрабатываться вариационные методы в гидромеханике. Весьма интересна вариационная формулировка уравнения баланса и использование ее в задачах термодинамики и задачах переноса, в том числе в задачах о движении вязкой жидкости [80]. Достаточно полная библиография по вариационным методам в механике сплошной среды содержится в [4].

Принцип Д'Аламбера и принцип Гамильтона — Остроградского в механике сплошной среды

Как известно, эти два принципа связаны между собой в том смысле, что если один из них постулируется, то другой выводится из него как следствие. Будем исходить из постулирования принципа Д'Аламбера, рассмотрев его в эйлеровом и лагранжевом представлениях.

Эйлерово представление

Принцип Д'Аламбера в эйлеровом описании для сплошной среды, занимающей в момент времени t область V , можно получить [24], если умножить уравнение (2.41) на возможное перемещение частицы $\delta \mathbf{r}$ и затем проинтегрировать по области V .

¹ Ферма (Fermat) Пьер (1601–1665) — французский математик. Юрист, математикой занимался в свободное время, при жизни почти не печатался. Работал в области теории чисел, математического анализа и аналитической геометрии. В теории чисел известен знаменитой теоремой Ферма; в области анализа установил закон интегрирования и дифференцирования степени, вывел формулу интегрирования по частям, сформулировал правило нахождения экстремума. В геометрии ввел уравнение прямой и кривой второго порядка. В геометрической оптике впервые научно сформулировал вариационный принцип.

² Ритц (Ritz) Вальтер (1878–1909) — швейцарский физик и математик. Основные труды относятся к решению вариационных задач теоретической физики. Открыл спектральную формулу (формула Ритца). Предложил новый прямой метод решения вариационных задач (метод Ритца), который нашел широкое применение в теории колебаний, теории упругости, строительной механике.

Заметим, что в механике сплошной среды под $\delta \mathbf{r}$ подразумевается произвольное перемещение материальной частицы, а его совместимость со связями определяется требованием непрерывности с изменением положения частицы: у бесконечно близких частиц виртуальные перемещения отличаются на бесконечно малую величину. Так что сплошность среды не нарушается и в ее возможном (виртуальном) перемещении, а в выражении

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} = \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + \operatorname{div} \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (2.205)$$

непрерывными являются все функции.

Проинтегрируем (2.205) по произвольному материальному объему V :

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dV + \int_V \operatorname{div} \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} dV. \quad (2.206)$$

Второй интеграл в правой части преобразуем, используя формулу Гаусса — Остроградского, к виду

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} dV &= \int_V \operatorname{div} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r}) dV - \int_V (\hat{\mathbf{p}} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}) dV = \\ &= \int_S \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS - \int_V (\hat{\mathbf{p}} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}) dV. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Первые интегралы в правых частях (2.206) и (2.207) в сумме представляют собой элементарную работу (на возможном перемещении) внешних сил δW , приложенных к объему V и границе этого объема S , а второй интеграл в (2.207) — элементарную работу внутренних для объема V сил, так что

$$\delta W = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dV + \int_S \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \delta W' = - \int_V (\hat{\mathbf{p}} \cdot \nabla \delta \mathbf{r}) dV. \quad (2.208)$$

В прямоугольных декартовых координатах эти величины имеют выражение

$$\delta W = \int_V \rho f_i \delta x_i dV + \int_S p_{ik} n_k \delta x_i dS,$$

$$\delta W' = - \int_V p_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta x_i dV. \quad (2.209)$$

Таким образом, вариационный принцип Д'Аламбера для сплошной среды имеет формулировку

$$\int_V \rho \frac{dv}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dV = \delta W + \delta W', \quad (2.210)$$

где δW и $\delta W'$ имеют выражения (2.208), (2.209).

Если сплошная среда представляет собой упругое тело, для которого основной кинематической характеристикой является вектор смещения \mathbf{u} , то принцип Д'Аламбера может быть сформулирован в виде

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \delta W + \delta W', \quad (2.210a)$$

где

$$\delta W = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_S \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \delta W' = - \int_V (\hat{\mathbf{p}} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) dV. \quad (2.210б)$$

Важно отметить, что в общем случае величины δW и $\delta W'$ не являются вариациями каких-то конечных функций, а лишь отражают элементарную работу сил на возможных перемещениях (виртуальную работу).

Отметим некоторые частные выражения для $\delta W'$.

В случае симметричного тензора напряжений ($p_{ik} = p_{ki}$) имеем

$$\begin{aligned} -\delta W' &= \int_V p_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta x_i dV = \int_V \frac{1}{2} p_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \delta x_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta x_k \right) dV = \\ &= \int_V \left(p_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} \delta x_1 + p_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} \delta x_2 + p_{33} \frac{\partial}{\partial x_3} \delta x_3 \right) dV + \\ &+ \int_V \left[p_{12} \left(\frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2} \right) + p_{13} \left(\frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_3} \right) + p_{23} \left(\frac{\partial \delta x_3}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_3} \right) \right] dV. \end{aligned}$$

Если рассматривать возможные перемещения в системе главных координат (x'_i) для тензора p_{ik} , имеющего главные значения $p_{(i)}$, то

$$-\delta W' = \int_V p_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta x_i dV = \int_V \left(p_{(1)} \frac{\partial}{\partial x'_1} \delta x'_1 + p_{(2)} \frac{\partial}{\partial x'_2} \delta x'_2 + p_{(3)} \frac{\partial}{\partial x'_3} \delta x'_3 \right) dV.$$

В случае идеальной жидкости ($p_{ik} = -p\delta_{ik}$) получаем

$$\begin{aligned}\delta W' &= - \int_V p_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta x_i dV = \int_V p \frac{\partial}{\partial x_i} \delta x_i dV = \int_V p \operatorname{div} \delta \mathbf{r} dV = \\ &= - \int_V \frac{p}{\rho} \delta \rho dV = \int_V \rho p \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) dV.\end{aligned}$$

Здесь использовано значение вариации для удельного объема $1/\rho$, следующее из уравнения неразрывности для жидкостей и газов.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

так что $d\rho + \rho \operatorname{div} d\mathbf{r} = 0$, или $\delta\rho + \rho \operatorname{div} \delta \mathbf{r} = 0$.

Таким образом, в случае невязкой среды с шаровым тензором напряжений виртуальная работа внутренних сил равна виртуальной работе внутренних сил давления при возможном сжатии среды.

Для упругого тела элементарная работа внутренних сил на возможных перемещениях выражается через упругую энергию (для изэнтропических процессов) либо через свободную энергию (для изотермических процессов), если $p_{ik} = p_{ki}$.

Вследствие симметрии тензора напряжений получаем

$$\delta W' = - \int_V p_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta u_i dV = - \int_V p_{ik} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dV = - \int_V p_{ik} \delta \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dV = - \int_V p_{ik} \delta u_{ik} dV.$$

Используя результаты § 13, из (2.30)–(2.31) имеем

$$p_{ik} = \rho \left(\frac{\partial e}{\partial u_{ik}} \right)_S = \rho \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} \right)_T,$$

так что при $S = \text{const}$

$$\delta W' = - \int_V \rho \frac{\partial e}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik} dV = - \int_V \rho \delta e dV = - \delta \int_V \rho e dV \equiv -\delta e_V,$$

где e_V — внутренняя энергия среды в области V , а при $T = \text{const}$

$$\delta W' = - \int_V \rho \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik} dV = - \delta \int_V \rho \mathcal{F} dV \equiv -\delta \mathcal{F}_V.$$

Здесь использовано равенство $\delta(\rho dV) = 0$ и введены обозначения:

$$e_V = \int_V \rho e(u_{ik}) dV; \quad \mathcal{F}_V = \int_V \rho \mathcal{F}(u_{ik}) dV.$$

Отметим, что в случае закона Гука ($p_{ik} = 2\mu' \dot{u}_{ik} + \lambda' \delta_{ik} u_{\parallel}$) удельная свободная энергия имеет выражение

$$\rho \mathcal{F}(u_{ik}) = \mu' \dot{u}_{ik} \dot{u}_{ik} + \frac{\lambda'}{2} \delta_{ik} (u_{\parallel})^2.$$

Принцип Гамильтона — Остроградского в эйлеровом описании получается из принципа Д'Аламбера (2.210).

Предварительно преобразуем левую часть (2.210) следующим образом:

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dV = \int_V \rho \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} \right] dV. \quad (2.211)$$

Поскольку из определения возможных перемещений вытекает

$$\delta \mathbf{v} = \delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r},$$

то, используя формулу из задачи 9.2 для интеграла слева в (2.211), получаем

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dV &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} dV - \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dV = \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} dV - \int_V \rho \delta \frac{v^2}{2} dV = \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} dV - \delta \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV. \end{aligned} \quad (2.212)$$

Здесь использовано равенство нулю вариации массы частицы, т. е. $\delta(\rho dV) = 0$.

Подставляя (2.212) в (2.210) и интегрируя по конечному интервалу времени $[t_1, t_2]$, получаем, предполагая, что возможные смещения частиц среды на концах интервала времени равны нулю,

$$-\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta W') dt \quad (\delta \mathbf{r}|_{t_1} = \delta \mathbf{r}|_{t_2} = 0). \quad (2.213)$$

Здесь $T = \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV$ — кинетическая энергия среды в рассматриваемом материальном объеме V .

Выражение (2.213) дает описание вариационного принципа Гамильтона — Остроградского в эйлеровом представлении.

Проводя аналогичные преобразования для случая, когда сплошная среда представляет собой упругое тело, получим формулировку вариационного принципа Гамильтона — Остроградского в эйлеровом представлении для упругой среды:

$$-\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta W') dt; \quad \delta \mathbf{u}|_{t_1} = \delta \mathbf{u}|_{t_2} = 0. \quad (2.213')$$

Здесь

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 dV,$$

а δW , $\delta W'$ имеют выражения (2.210б).

**Лагранжево
представление**

Чтобы получить принцип Д'Аламбера в лагранжевом описании, исходим из уравнения непрерывности и уравнения изменения количества движения в лагранжевой форме (см. § 13), а именно:

$$\rho_0 = \rho J, \quad (2.214)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \rho_0 f_i + J_{km} \frac{\partial p_{ik}}{\partial \xi^m} = \rho_0 f_i + \frac{\partial}{\partial \xi^m} (J_{km} p_{ik}). \quad (2.215)$$

Будем считать, что $\delta x_i = 0$ на границе S_0 произвольного объема V_0 — области изменения лагранжевых переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 , т. е. $\delta x_i|_{S_0} = 0$.

Тогда, умножая скалярно (2.215) на $\delta \mathbf{r}$ и интегрируя по V_0 , имеем

$$\int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \delta x_i dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 f_i \delta x_i dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial \xi^m} (J_{km} p_{ik}) \delta x_i dV_0. \quad (2.216)$$

Применяя ко второму интегралу справа в (2.216) теорему Гаусса — Остроградского, получаем для виртуальных работ внешних и внутренних сил выражения:

$$\begin{aligned} \delta W_0 &= \int_{V_0} \rho_0 f_i \delta x_i dV_0 + \int_{S_0} J_{km} p_{ik} n_m \delta x_i dS_0 = \int_{V_0} \rho_0 f_i \delta x_i dV_0, \\ \delta W'_0 &= - \int_{V_0} J_{km} p_{ik} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \delta x_i dV_0 = - \int_{V_0} J_{km} p_{ik} \delta x_{im} dV_0 = - \int_{V_0} \frac{\partial J}{\partial x_{km}} \delta x_{im} p_{ik} dV_0. \end{aligned} \quad (2.217)$$

Здесь использовано условие $\delta x_i|_{S_0} = 0$, а также обозначения $x_{im} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \xi^m}$ и формула $J_{km} = \frac{\partial J}{\partial x_{km}}$ (см. § 13).

Таким образом, принцип Д'Аламбера в лагранжевом представлении имеет вид

$$\int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \delta x_i dV_0 = \delta W_0 + \delta W'_0, \quad (2.218)$$

где

$$\begin{aligned} \delta W_0 &= \int_{V_0} \rho_0 f_i \delta x_i dV_0, \\ \delta W'_0 &= - \int_{V_0} \frac{\partial J}{\partial x_{km}} \delta x_{im} p_{ik} dV_0, \end{aligned} \quad (2.219)$$

причем $\delta \mathbf{r}|_{S_0} = 0$.

Чтобы получить принцип Гамильтона — Остроградского в лагранжевом представлении, проинтегрируем (2.218) по интервалу времени $[t_1, t_2]$, предполагая, что на концах интервала возможные смещения всех частиц обращаются в нуль, т. е. $\delta x_i|_{t_1} = \delta x_i|_{t_2} = 0$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \delta x_i dV_0 &= \int_{V_0} \left[\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \delta x_i \right) - \rho_0 \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \delta x_i \right] dV_0 = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta x_i dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) dV_0, \end{aligned}$$

то, имея в виду обращение первого интеграла в нуль, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \delta x_i dV_0 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) dV_0 = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_0 + \delta W'_0) dt,$$

или

$$-\delta \int_{t_1}^{t_2} T_0 dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_0 + \delta W'_0) dt, \quad (2.220)$$

где $T_0 = \int_{V_0} \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 dV_0 = \int_{V_0} \frac{\rho_0 v^2}{2} dV_0$ — кинетическая энергия среды

в области V_0 ; $\delta \mathbf{r}|_{S_0} = 0$, а δW_0 , $\delta W'_0$ имеют выражения (2.219).

Соотношение (2.220) дает лагранжево описание вариационного принципа Гамильтона — Остроградского для сплошной среды.

Вариационные принципы теории упругости

Общая формулировка принципа Д'Аламбера и Гамильтона — Остроградского в эйлеровом представлении дается выражениями (2.210а) и (2.213'). Для решения конкретных задач используются более частные формулировки принципов. Так, например, для случая равновесия упругого тела при отсутствии массовых сил и сил, действующих на граничную поверхность, из (2.213') следует, что свободная энергия \mathcal{F}_V и упругая энергия e_V приобретают стационарные значения. В других случаях требуется конкретизация граничных условий. Далее рассмотрены некоторые наиболее часто встречающиеся в практике вариационные принципы теории упругости.

Общий принцип равновесия относится к частному случаю кинематически линейно деформируемого упругого тела. Он был сформулирован в 1911 г. Хеллингером¹ [52].

Рассмотрим задачу о равновесии упругого тела, занимающего объем V и находящегося в равновесии под действием внешних поверхностных напряжений \mathbf{p}_S , приложенных к части S_p поверхности S , ограничивающей объем V ; на остальной части S_u поверхности ($S = S_p + S_u$) задан вектор смещения \mathbf{u}_S .

Рассмотрим функционал

$$J(u_i, u_{ik}, p_{ik}) = \int_V \left[p^{ik} \left(u_{ik} - \frac{1}{2} u_{i;k} - \frac{1}{2} u_{k;i} \right) - \rho e(u_{ik}) + \right. \\ \left. + \rho f^i u_i \right] dV + \int_{S_p} p^i_S u_i dS + \int_{S_u} p_{ik} (u^i - u^i_S) n^k dS. \quad (2.221)$$

¹ Хеллингер Эрнст (1883–1950) — немецкий математик. Основные труды по интегральным уравнениям и квадратичным формам с бесконечным числом переменных.

Здесь $e = e(u_{ik})$ — калорическое уравнение состояния упругого тела при постоянной температуре, причем e — удельная внутренняя энергия, а $p_{ik} = p_{ki}$. При неизменной температуре о величине e говорят как об *упругой энергии*. Считая независимыми функциональными аргументами u_i , u_{ik} и p_{ik} , рассмотрим вариацию функционала (ρ , f_i и граничные значения p_S^i , u_S^i — заданные функции, их вариации равны нулю)

$$\delta J = \int_V \left[\delta p^{ik} \left(u_{ik} - \frac{1}{2} u_{i;k} - \frac{1}{2} u_{k;i} \right) + p^{ik} \left(\delta u_{ik} - \frac{1}{2} \delta u_{i;k} - \frac{1}{2} \delta u_{k;i} \right) - \right. \\ \left. - \rho \frac{\partial e}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik} + \rho f^i \delta u_i \right] dV + \int_{S_p} p_S^i \delta u_i dS + \int_{S_u} [\delta p_{ik} (u^i - u_S^i) + p_{ik} \delta u^i] n^k dS.$$

Воспользовавшись симметрией тензора p_{ik} , а затем — теоремой Гаусса — Остроградского, получаем

$$\frac{1}{2} \int_V p^{ik} (\delta u_{i;k} + \delta u_{k;i}) dV = \frac{1}{2} \int_V (p^{ik} \delta u_{i;k} + p^{ik} \delta u_{k;i}) dV = \\ = \int_V p^{ik} \delta u_{i;k} dV = \int_V p^{ik} (\delta u_i)_{;k} dV = \int_V [(p^{ik} \delta u_i)_{;k} - p_{;k}^{ik} \delta u_i] dV = \\ = \int_{S_u + S_p} p^{ik} \delta u_i n_k dS - \int_V p_{;k}^{ik} \delta u_i dV.$$

Приравнявая нулю в δJ коэффициенты при независимых вариациях δp^{ik} , δu_{ik} и δu_i , получаем последовательно:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i;k} + u_{k;i}), \quad p^{ik} = \rho \frac{\partial e}{\partial u_{ik}}, \quad (2.222)$$

$$\rho f^i + p_{;k}^{ik} = 0, \quad (2.223)$$

$$p^{ik} n_k \Big|_{S_p} = p_S^i, \quad u^i \Big|_{S_u} = u_S^i. \quad (2.224)$$

Первое из этих соотношений показывает, что рассматриваются малые деформации, т. е. кинематически линейная деформация упругого тела; второе является определением тензора напряжений при помощи

функции $e = e(u_{ik})$, а последующие суть уравнения равновесия и граничные условия.

Таким образом, соотношения (2.222)–(2.224), представляющие собой постановку задачи о равновесии упругого тела, обращают в нуль первую вариацию функционала (2.221), сообщая ему стационарное значение. Отыскивать эти значения функциональных переменных прямыми методами оказывается во многих задачах удобнее, чем численно решать систему (2.222)–(2.224).

Общий принцип равновесия упругого тела Хеллингера может быть сформулирован следующим образом.

Упругое тело в поле массовых сил \mathbf{f} находится в равновесии, если функционал (2.221) приобретает стационарное значение, причем в этом функционале тензор смещений u_{ik} и тензор напряжений p_{ik} имеют значения (2.222), а \mathbf{p}_S и \mathbf{u}_S — заданные граничные значения вектора напряжений и вектора смещений (см. (2.224)).

Если рассматривать часть соотношений (2.222)–(2.224) как предварительные условия, заранее поставленные, то можно получить вариационные принципы более частного характера.

Вариационный принцип Лагранжа получается, если считать первое соотношение из (2.222) и последнее из (2.224) известными, и тогда функционал (2.221) примет вид

$$J_L = \int_V [\rho f_i u^i - \rho e(u_{ik})] dV + \int_{S_p} p_S^i u_i dS.$$

Нетрудно проверить, что первая вариация δJ_L обращается в нуль, если выполнены остальные соотношения из (2.222)–(2.224).

Вариационный принцип Лагранжа можно трактовать как применение к упругому телу принципа возможных перемещений Д'Аламбера (см. (2.210а), (2.210б)), согласно которому в положении равновесия работа всех сил, в том числе и внутренних, на возможных перемещениях равна нулю. В случае упругого тела с объемными силами $\rho \mathbf{f}$, поверхностными \mathbf{p}_S , приложенными к поверхности S_p , и внутренними p_{ik} имеем

$$\int_V \rho f_i \delta u^i dV + \int_{S_p} p_S^i \delta u_i dS - \int_V p^{ik} \delta u_{ik} dV = 0.$$

Поскольку $p_{ik} = \rho \partial e / \partial u_{ik}$, то это уравнение можно записать $\delta J_L = 0$.

*Вариационный принцип Кастильяно*¹ исходит из того, что выполнены условия равновесия (2.223) и граничные условия первого соотношения из (2.224). Если ввести по-

¹ *Кастильяно (Castiglione) Карло Альберто* (1847–1884) — итальянский математик и инженер. Известен работами в теории упругости и строительной механике (теорема Кастильяно об определении прогибов в шарнирных формах, выражение для упругой энергии стержневых статически неопределимых систем и др.).

тенциал дополнительной упругой энергии $\Psi(p_{ik}) = p_{ik}u^{ik} - \rho e(u_{ik})$, то тогда функционал (2.221) можно преобразовать в функционал Кастильяно J_C , который имеет вид

$$J_C = \int_V \Psi(p_{ik}) dV - \int_{S_u} p^{ik} n_k u_i^S dS.$$

Для этого достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \int_V p^{ik} \frac{1}{2} (u_{i;k} + u_{k;i}) dV &= \frac{1}{2} \int_V (p^{ik} u_{i;k} + p^{ki} u_{k;i}) dV = \int_V p^{ik} u_{i;k} dV = \\ &= \int_V (p^{ik} u_i)_{,k} dV - \int_V p_{,k}^{ik} u_i dV = \int_{S_p+S_u} p^{ik} u_i n_k dS + \int_V \rho f_i u_i dV. \end{aligned}$$

При варьировании функционала J_C следует считать $\delta p_{ik} = 0$ и $\delta p^{ik} n_k|_{S_p} = 0$, поскольку принято, что уравнение (2.223) и первое условие из (2.224) выполнены. Тогда можно показать (см. [52]), что условие $\delta J_C = 0$ приводит к соотношениям

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p_{ik}} = u_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i;k} + u_{k;i}), \quad u_i|_{S_u} = u_i^S,$$

чем исчерпывается доказательство эквивалентности задачи равновесия (2.222)–(2.224) задаче о стационарности функционала J_C .

Обращение в нуль первой вариации функционала означает лишь, что функционал принимает стационарное значение, которое может быть максимальным или минимальным или ни тем ни другим. Однако принципы Лагранжа и Кастильяно экстремальны: функционал Лагранжа при $\delta J_L = 0$ принимает максимальное значение, а функционал Кастильяно — минимальное. Действительно, вычисляя вторую вариацию от J_L , получаем

$$\delta^2 J_L = -\frac{1}{2} \int_V \rho \frac{\partial^2 e}{\partial u_{ik} \partial u_{lm}} \delta u_{ik} \delta u_{lm} dV,$$

поскольку ρ , f_i и p_S^i не варьируются, а $\delta^2 u_i = 0$ в силу того, что вариации δu_i принадлежат линейному множеству. Тогда, если считать, что решение задачи о равновесии упругого тела единственно, то (см. [52], § 8.4) квадратичная форма $(\partial^2 e / \partial u_{ik} \partial u_{lm}) \delta u_{ik} \delta u_{lm}$ — положительно определенная. Тогда $\delta^2 J_L < 0$; аналогичным образом можно показать, что $\delta^2 J_C > 0$ и, следовательно, J_L имеет максимум, а J_C — минимум в стационарных состояниях. Это означает, что если u_i — истинное поле перемещений, а u_i^* — любое другое, не являющееся решением задачи теории упругости (2.222)–(2.224), то

$$J_L(u_i) > J_L(u_i^*), \quad J_C(u_i) < J_C(u_i^*).$$

Принципы Лагранжа и Кастильяно называют энергетическими вариационными принципами, поскольку они связаны с понятием *упругой энергии* тела, равной $\int_V \rho e dV$.

Ее элементарное изменение для изэнтропического процесса равно работе внешних сил, приложенных к телу. Действительно, учитывая (2.30), имеем

$$\delta \int_V \rho e dV = \int_V \rho \left(\frac{\partial e}{\partial u_{ik}} \right)_S \delta u_{ik} dV = \int_V p_{ik} \delta u_{ik} dV = -\delta W,$$

где δW — элементарная работа «против внешних сил».

Принцип минимума свободной энергии. Пусть \mathcal{F} — удельная свободная энергия упругого тела, так что (см. 2.30)

$$d\mathcal{F} = d(e - Ts) = \frac{P^{ik}}{\rho} du_{ik} - s dT.$$

Тогда, вычисляя изменение свободной энергии твердого тела, занимающего объем V , получим

$$\delta \int_V \rho \mathcal{F} dV = \int_V \rho \delta \mathcal{F} dV = \int_V p^{ik} \delta u_{ik} dV - \int_V \rho s \delta T dV.$$

В случае малых деформаций и $p^{ik} = p^{ki}$, как уже было показано при вычислении δJ из (2.221), имеем

$$\int_V p^{ik} \delta u_{ik} dV = \int_V p^{ik} \delta \frac{1}{2} (u_{ik} + u_{ki}) dV = \int_S p^{ik} \delta u_i n_k dS - \int_V p_{,k}^{ik} \delta u_i dV.$$

Поэтому, если тело находится в равновесии, т. е. $\rho f^i + p_{,k}^{ik} = 0$, а к его поверхности приложены напряжения $p_i^S = p_{ik} n^k|_S$, то получаем

$$\delta \int_V \rho \mathcal{F} dV = \int_V \rho f^i \delta u_i dV - \int_V \rho s \delta T dV + \int_S p_i^S \delta u^i dS.$$

Если объемные силы отсутствуют ($\mathbf{f} = 0$) и все возможные деформации изотермичны ($\delta T = 0$), а заданные поверхностные силы \mathbf{p}_S таковы, что множество возможных смещений $\delta \mathbf{u}$ удовлетворяет условию $\mathbf{p}^S \cdot \delta \mathbf{u} = 0$, то

$$\delta \int_V \rho \mathcal{F} dV = 0.$$

Можно показать, что если упругое тело следует закону Гука и свободная энергия (см. задачу 14.4)

$$\mathcal{F}(u_{ik}) = \frac{1}{2} A^{iklm} u_{ik} u_{lm}$$

есть положительно определенная квадратичная форма от u_{ik} , т. е. $\mathcal{F} \geq 0$, то на действительной деформации $\int_V \rho \mathcal{F} dV$ всегда будет меньше, чем на любой из возможных, определяемых тензором деформаций с компонентами $u_{ik} + \delta u_{ik}$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_{ik} + \delta u_{ik}) - \mathcal{F}(u_{ik}) &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ik}} \delta u_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial u_{ik} \partial u_{lm}} \delta u_{ik} \delta u_{lm} + \dots = \\ &= \delta \mathcal{F} + \frac{1}{2} A^{iklm} \delta u_{ik} \delta u_{lm} + \dots = \delta \mathcal{F} + \mathcal{F}(\delta u_{ik}) + \dots \end{aligned}$$

Поэтому в силу $\int_V \rho \delta \mathcal{F} dV = 0$ и $\mathcal{F} \geq 0$ имеем

$$\int_V \rho \delta \mathcal{F}(u_{ik} + \delta u_{ik}) dV > \int_V \rho \mathcal{F}(u_{ik}) dV.$$

Итак, при изотермическом равновесии в отсутствие массовых сил и при поверхностной нагрузке, перпендикулярной возможным смещениям, линейно-упругое тело имеет минимальное значение удельной свободной энергии.

По поводу условия $\mathbf{p}^S \cdot \delta \mathbf{u} = 0$ следует отметить, что оно касается перемещения только точек поверхности и не относится к внутренним точкам. Если поверхность тела не нагружена, то условие выполняется всегда и не накладывает ограничений на перемещения поверхности. Это условие выполняется также либо когда $\mathbf{p}_S \perp \delta \mathbf{u}$, либо когда $\delta \mathbf{u}|_S = 0$.

Принцип Гамильтона — Остроградского. Для упругого тела, имеющего в точках \mathbf{x} смещения \mathbf{u} и скорости \mathbf{V} , можно сформулировать принцип Гамильтона — Остроградского [4]:

Если массовые силы имеют потенциал ($\mathbf{f} = -\nabla \Pi$), поверхностная нагрузка на поверхности S отсутствует, то истинные перемещения \mathbf{u} в упругом теле доставляют стационарное значение функционалу

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \Lambda(x^i, u^i, v^i) dV dt.$$

Здесь

$$\Lambda = \rho \left(\frac{1}{2} v_i v^i - e(x^i) - \Pi(x^i) \right), \quad v^i = \frac{\partial u^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial u^i}{\partial x^k},$$

$$u^i(x^k, t) = x^i(\xi^\alpha, t) - x^i(\xi^\alpha, t_0),$$

где ξ^α — лагранжевы координаты ($\alpha = 1, 2, 3$), а второе соотношение следует рассматривать как систему трех линейных уравнений относительно v^i .

При этом в начальный и конечный моменты движения положения частиц заданы соответственно векторами $x_0^i(\xi^\alpha)$ и $x_1^i(\xi^\alpha)$, причем

$$x^i(\xi^\alpha, t_0) = x_0^i(\xi^\alpha), \quad x^i(\xi^\alpha, t_1) = x_1^i(\xi^\alpha),$$

и поэтому координаты частиц x^i в начальный и конечный моменты времени не варьируются ($\delta x^i|_{t=t_0} = \delta x^i|_{t=t_1} = 0$).

Кроме того, на части S_u поверхности $S(t)$ объема $V(t)$ задан закон движения частиц, т. е. $x^i(\xi^\alpha, t)|_{S_u} = x^i(\xi_S^\alpha, t) \equiv x_S^i$, так что $\delta x^i|_{S_u} = 0$.

В этом случае из $\delta J = 0$ следует уравнение импульсов

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\rho v_i v^k - p_i^k) + \rho \frac{\partial \Pi}{\partial x^i} = 0.$$

Прямые методы решения задач теории упругости

Метод Ритца. Метод Ритца представляет собой приближенный метод решения задачи о равновесии упругого тела и основан на использовании вариационного принципа. Он сводится к построению последовательности функций, минимизирующей функ-

ционал вариационной задачи. Эта последовательность состоит из линейных комбинаций функций, которые должны удовлетворять граничным условиям только на той части S_u поверхности тела S , где задан вектор смещения \mathbf{u}_S ; предполагается, следовательно, что на S_p , где заданы поверхностные силы, граничные условия будут удовлетворены приближенно, хотя это отнюдь не следует из сути метода.

Согласно методу Ритца, N -тое приближение $\mathbf{u}^{(N)}$ для \mathbf{u} , определяющего решения некоторой вариационной задачи (например, отыскание стационарного значения функционала (2.221)), ищется в виде

$$\mathbf{u}^{(N)} = \mathbf{u}_0^{(N)} + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{(N)} a_k^{(N)},$$

где $\mathbf{u}_0^{(N)}$, $\mathbf{u}_k^{(N)}$ — наперед выбранные функции координат (например полиномы), $a_k^{(N)}$ — неизвестные пока постоянные. Функции $\mathbf{u}_0^{(N)}$, $\mathbf{u}_k^{(N)}$ не обязаны удовлетворять уравнениям равновесия, но $\mathbf{u}^{(N)}$ должно удовлетворять граничным условиям задачи для смещений, а именно $\mathbf{u}^{(N)}|_{S_u} = \mathbf{u}_S$. Этого можно достичь, если выбрать

$$\mathbf{u}_0^{(N)}|_{S_u} = \mathbf{u}_S, \quad \mathbf{u}_k^{(N)}|_{S_u} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N).$$

Таким образом, $\mathbf{u}^{(N)}$ могут быть отнесены к классу допустимых функций вариационной задачи.

На основании выбранного выражения для смещений $\mathbf{u}^{(N)}$ можно вычислить компоненты тензора деформаций, внутреннюю энергию $e(u_{ik})$, а из условий $p^{ik} = \rho \partial e / \partial u_{ik}$ — и компоненты тензора напряжений. Подставив эти выражения в (2.221), получим квадратичную (в случае обобщенного закона Гука) функцию постоянных коэффициентов $a_k^{(N)}$. Поскольку $\delta J = 0$ для действительных перемещений, то из всех допустимых перемещений отыскиваем такие, которые придают функционалу стационарное значение. Для этого коэффициенты $a_k^{(N)}$ определяем из системы N линейных уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial a_k^{(N)}} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N).$$

Метод Бубнова¹ — Галеркина². Пусть

$$\mathbf{u}^{(N)} = \mathbf{u}_0^{(N)} + \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{(N)} a_k^{(N)}$$

— последовательность ($N=1, 2, 3, \dots$) допустимых векторов смещения, удовлетворяющих на S_u всем граничным условиям. В этом методе коэффициенты $a_k^{(N)}$ отыскивают-

¹ Бубнов Иван Григорьевич (1872–1919) — русский корабельный инженер и механик. Профессор Петербургского политехнического института и Московской академии. Разработал метод приближенного решения операторного уравнения, усовершенствованный Б. Г. Галеркиным. Развил (1902 г.) теорию пластин, работающих в системе корабля. Основоположник строительной механики корабля.

² Галеркин Борис Григорьевич (1871–1945) — советский ученый в области теории упругости и инженер, академик. Окончил Петербургский политехнический институт (1899 г.), профессор (с 1920 г.) Ленинградского университета, в 1939–1945 гг. — директор Института механики АН СССР. Разработал эффективные методы приближенного решения уравнений теории упругости. Один из создателей теории изгиба пластины. Предложил общий вид решения уравнений упругого равновесия. Развил математическую теорию цилиндрических оболочек.

ся из условий ортогональности левых частей уравнений равновесия и граничных условий для напряжений *каждой* из функций $\mathbf{u}_k^{(N)}$, а именно

$$\int_V (\rho \mathbf{f} + \mathbf{p}_{;k}^{k(N)}) \cdot \mathbf{u}_l^{(N)} dV + \int_{S_p} (\mathbf{p}^S - \mathbf{p}_n^{(N)}) \cdot \mathbf{u}_l^{(N)} dS = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Здесь

$$p_{ik}^{(N)} = 2\mu' u_{ik}^{(N)} + \lambda' \delta_{ik} u_{ll}^{(N)} = 2\mu' u_{ik}^{(N)} + \left(\lambda' - \frac{2}{3} \mu' \right) \delta_{ik} u_{ll}^{(N)},$$

$$u_{ik}^{(N)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(N)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^{(N)}}{\partial x_i} \right), \quad u_i^{(N)} = u_{0i}^{(N)} + \sum_{k=1}^N u_{ki}^{(N)} a_k^{(N)}, \quad \mathbf{p}_n^{(N)} = \mathbf{p}^{k(N)} n_k,$$

$$\mathbf{p}_{;k}^{k(N)} = \mu' \Delta \mathbf{u}^{(N)} + \left(\lambda' + \frac{\mu'}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{(N)}.$$

Эти линейные уравнения служат для определения коэффициентов $a_k^{(N)}$ N -того приближения решения уравнений равновесия упругого тела.

Можно показать (см., например, [38]), что система уравнений для определения $a_k^{(N)}$ в этом методе совпадает с системой уравнений в методе Ритца. Тем не менее, метод Бубнова — Галеркина имеет более общий характер, так как применим не только к положительно определенному оператору, представляющему исходные дифференциальные уравнения.

Вариационные принципы гидромеханики

1. Вариационный принцип Гамильтона — Остроградского для невязкой жидкости (газа) можно получить из выражений (2.213)

и (2.220) для случая $p_{ik} = -p \delta_{ik}$, причем можно рассмотреть баротропную среду ($p = p(\rho)$), но лишенную диссипативных процессов, так что в каждой частице энтропия не меняется и, следовательно, $\delta s = 0$.

Итак, для идеальной среды, движущейся в поле потенциальных массовых сил ($\mathbf{f} = -\nabla \Pi$), из (2.208)–(2.209) имеем

$$\delta W + \delta W' = \int_V \left(\rho f_i \delta x_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \delta x_i \right) dV = - \int_V \left(\rho \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \delta x_i \right) dV.$$

Для баротропной среды, как обычно, введем функцию $\mathcal{P}(\rho) = \int \frac{dp(\rho)}{\rho}$.

Тогда

$$\delta W + \delta W' = - \int_V \rho \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x_i} \right) \delta x_i dV = - \int_V \rho \delta (\Pi + \mathcal{P}) dV.$$

Поскольку $\delta(\rho dV) = \delta(dm) = 0$, то

$$\delta W + \delta W' = -\delta \int_V \rho (\Pi + \mathcal{P}) dV.$$

Таким образом, в эйлеровом представлении формулировка вариационного принципа Гамильтона — Остроградского для невязкой баротропной жидкости (газа) приобретает вид (см. (2.213))

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\frac{\rho v^2}{2} - \rho \Pi - \rho \mathcal{P}(\rho) \right] dV = 0. \quad (2.225)$$

Введем аналог действия Гамильтона в виде интеграла

$$\mathbb{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\frac{\rho v^2}{2} - \rho \Pi - \rho \mathcal{P}(\rho) \right] dV = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi_e - \Pi_i) dt,$$

где $T = \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV$ — кинетическая энергия системы (среды в материальном объеме V), $\Pi_e = \int_V \rho \Pi dV$ — потенциальная энергия системы в поле внешних массовых сил, $\Pi_i = \int_V \rho \mathcal{P}(\rho) dV = \int_V \rho \left(\int \frac{dp(\rho)}{\rho} \right) dV$ — потенциальная энергия системы в поле внутренних сил давления (для несжимаемой жидкости $\Pi_i = \int_V p dV$).

Таким образом, для рассматриваемой системы роль лагранжиана играет интеграл

$$L = \int_V \left[\frac{\rho v^2}{2} - \rho \Pi - \rho \mathcal{P}(\rho) \right] dV = T - \Pi_e - \Pi_i.$$

Тогда для рассматриваемого случая принцип Гамильтона — Остроградского в эйлеровом описании (2.213) может быть сформулирован следующим образом:

Для действительного движения, не нарушающего сплошности баротропной невязкой среды в поле потенциальных массовых сил, действие по Гамильтону

$$\mathbb{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\frac{\rho v^2}{2} - \rho \Pi - \rho \mathcal{P}(\rho) \right] dV$$

принимает стационарное значение, т. е.

$$\delta \mathbb{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (2.225a)$$

причем $\delta \mathbf{r}|_{t_1} = \delta \mathbf{r}|_{t_2} = 0$.

Чтобы сформулировать принцип Гамильтона — Остроградского в лагранжевом представлении для невязкой среды в поле потенциальных массовых сил, исходим из (2.218) и (2.219). Имеем

$$\begin{aligned} \delta W_0 + \delta W'_0 &= \int_{V_0} \rho f_i \delta x_i dV_0 - \int_{V_0} \frac{\partial J}{\partial x_{km}} \delta x_{im} p_{ik} dV_0 = \\ &= - \int_{V_0} \left(\rho_0 \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \delta x_i - \frac{\partial J}{\partial x_{km}} \delta x_{km} p \right) dV_0 = - \int_{V_0} (\rho_0 \delta \Pi - p \delta J) dV_0 = \\ &= - \int_{V_0} \rho_0 \left[\delta \Pi - p \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] dV_0. \end{aligned}$$

Здесь использовано уравнение неразрывности в лагранжевых переменных, а именно $\rho_0 = \rho J$ (см. § 13), из которого следует $\delta J =$

$$= \delta \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) = \rho_0 \delta \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Поскольку для рассматриваемой среды энтропия $s = s_0 = \text{const}$, то из второго начала термодинамики имеем (e — удельная внутренняя энергия среды)

$$0 = de + p d \left(\frac{1}{\rho} \right),$$

так что окончательно получаем формулировку принципа Гамильтона — Остроградского (в лагранжевом представлении) в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} \rho_0 \left(\frac{v^2}{2} - \Pi - e \right) dV_0 = 0,$$

причем $\delta \mathbf{r}|_{t_1} = \delta \mathbf{r}|_{t_2} = 0$, $\delta \mathbf{r}|_{S_0} = 0$.

Итак:

Для действительного, не нарушающего сплошности, движения невязкой среды в области V_0 изменения лагранжевых координат ξ^1 , ξ^2 , ξ^3 в поле потенциальных массовых сил действие по Гамильтону

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} L_0 dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V_0} \left[\rho_0 \frac{v^2}{2} - \rho_0 \Pi - \rho_0 e \right] dV_0$$

принимает стационарное значение, т. е.

$$\delta S_0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L_0 dt = 0, \quad (2.2256)$$

причем $\delta \mathbf{r}|_{t_1} = \delta \mathbf{r}|_{t_2} = 0$, $\delta \mathbf{r}|_{S_0} = 0$.

Здесь $L_0 = \int_{V_0} \left[\rho_0 \frac{v^2}{2} - \rho_0 \Pi - \rho_0 e \right] dV_0 = T_0 - \Pi_0 - e_0$, так что $T_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{v^2}{2} dV_0$ — кинетическая энергия жидкости (газа) в области V_0 , $\Pi_0 = \int_{V_0} \rho_0 \Pi dV_0$ — потенциальная энергия среды в поле внешних массовых сил, $e_0 = \int_{V_0} \rho_0 e dV_0$ — внутренняя энергия жидкости (газа).

2. Принцип Херивела — Луна (Herivel J. W., Lin C. C.) (эйлерово представление). Поскольку в эйлеровом описании движения величины \mathbf{v} , ρ , p и S рассматриваются как функции точек пространства x_1 , x_2 , x_3 и времени t , то связь с частицей, которая находится в данной точке пространства, здесь в некотором смысле теряется. Это вызывает трудности при формулировке вариационного принципа, единого для разных моделей жидкостей. В этом случае идут по пути установления вариационных принципов, каждый раз для новых систем уравнений и граничных условий, относящихся к той или иной модели жидкости (газа) (см. задачу 16.2).

Систему уравнений, описывающую движение идеальной жидкости или газа в поле потенциальных массовых сил ($\mathbf{f} = -\nabla\Pi$), можно представить в виде (см. (2.128)–(2.130)):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0, \quad (2.226)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{v^2}{2} + w + \Pi\right) + T\nabla s, \quad (2.227)$$

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad s = s(\rho, T), \quad p = p(\rho, T). \quad (2.228)$$

Здесь $w = p/\rho + e(\rho, s)$ — удельная энтальпия среды, а в преобразованиях уравнения (2.129) использованы соотношения

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad Tds = dw - \frac{dp}{\rho} = de + pd\frac{1}{\rho}.$$

Рассмотрим функционал

$$J = \int_R \left\{ \frac{\rho v^2}{2} - \rho e(\rho, s) - \rho\Pi + \lambda_1 \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \operatorname{div} \rho\mathbf{v}s \right) + \lambda_3 \left(\frac{\partial(\rho\xi)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v}\xi \right) \right\} dR. \quad (2.229)$$

Здесь R — четырехмерная область, представляющая собой декартово произведение пространственной области среды и промежутка времени (t_0, t_1) , так что

$$\int_R \{ \} dR \equiv \int_{t_0}^{t_1} \int_V \{ \} dV dt,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — лагранжевы множители, из которых λ_1 — произвольная функция точек и времени, а на λ_2 и λ_3 наложены ограничения

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -T, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = 0, \quad (2.230)$$

$\xi = \xi(t, \mathbf{r})$ — произвольная лагранжева координата системы, так что $d\xi/dt = 0$.

Будем считать, что вариации $\delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \delta\lambda_3, \delta\rho, \delta s, \delta\mathbf{v}$ независимы, причем вариации $\delta\rho, \delta s$ и $\delta\mathbf{v}$ обращаются в нуль на границе S_R области R , т. е. при $t = t_0, t = t_1$ и на поверхности S_V пространственной области V .

Тогда оказывается, что уравнение изменения количества движения среды (2.227) можно получить из условия стационарности функционала (2.229), а остальные уравнения — (2.226) и (2.228) — должно рассматривать как связи, накладываемые на вариации $\delta\rho, \delta s$ и $\delta\mathbf{v}$. Покажем это.

Рассмотрим вариацию функционала (2.229):

$$\delta J = \int_R \left\{ \delta \rho \left(\frac{v^2}{2} - e - \Pi \right) + \rho (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} - \delta e) + \delta \left(\lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) \right) + \delta \left(\lambda_2 \left(\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} s \right) \right) + \delta \left(\lambda_3 \left(\frac{\partial (\rho \xi)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \xi \right) \right) \right\} dR. \quad (2.231)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \delta \left(\lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) \right) &= \delta \lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) + \lambda_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \operatorname{div} \delta (\rho \mathbf{v}) \right) = \\ &= \delta \lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_1 \delta \rho) - \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \delta \rho + \operatorname{div} \lambda_1 \delta (\rho \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla \lambda_1) \delta \rho - (\rho \nabla \lambda_1) \cdot \delta \mathbf{v} = \\ &= \delta \lambda_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_1 \delta \rho) + \operatorname{div} \lambda_1 \delta (\rho \mathbf{v}) - \frac{d \lambda_1}{dt} \delta \rho - (\rho \nabla \lambda_1) \cdot \delta \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразовывая два последних слагаемых в интеграле (2.231) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях $\delta \lambda_1$, $\delta \lambda_2$, $\delta \lambda_3$, получаем уравнения: (2.226), $ds/dt = 0$ и $d\xi/dt = 0$, а при вариациях $\delta \rho$, δs и $\delta \mathbf{v}$ — соответственно уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} - e(\rho, s) - \Pi - \rho \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s - \frac{d \lambda_1}{dt} - s \frac{d \lambda_2}{dt} - \xi \frac{d \lambda_3}{dt} &= 0, \\ \rho \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_\rho + \rho \frac{d \lambda_2}{dt} &= 0, \\ \mathbf{v} - \nabla \lambda_1 - s \nabla \lambda_2 - \xi \nabla \lambda_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.232)$$

Интегралы от остальных слагаемых обращаются в нуль в силу $\delta \xi = 0$ и предположения, что вариации $\delta \rho$, δs и $\delta \mathbf{v}$ на границе S_R области R обращаются в нуль, так что, например,

$$\begin{aligned} \int_R \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_1 \delta \rho) dR &= \int_V [\lambda \delta \rho]_{t=t_0}^{t=t_1} dV = 0, \\ \int_R \operatorname{div} \lambda_1 \delta (\rho \mathbf{v}) dR &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{S_V} \lambda_1 (\rho \delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \delta \rho) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку из (2.228) следует $e = e(\rho, s)$, было использовано $\delta e = (\partial e / \partial \rho)_s \delta \rho + (\partial e / \partial s)_\rho \delta s$.

Так как из первого начала термодинамики следует $(\partial e / \partial \rho)_s = p \rho^{-2}$; $(\partial e / \partial s)_\rho = T$, то из уравнений (2.232) имеем выполненное первое условие (2.230) и, кроме того:

$$w = \frac{v^2}{2} - \Pi - \frac{d \lambda_1}{dt} - s \frac{d \lambda_2}{dt} - \xi \frac{d \lambda_3}{dt}, \quad (2.233)$$

$$\mathbf{v} = \nabla\lambda_1 + s\nabla\lambda_2 + \xi\nabla\lambda_3, \quad (2.234)$$

Из этих двух выражений следует

$$w = -\frac{v^2}{2} - \Pi - \frac{\partial\lambda_1}{\partial t} - s\frac{\partial\lambda_2}{\partial t} - \xi\frac{\partial\lambda_3}{\partial t}. \quad (2.235)$$

Непосредственной подстановкой (2.234) и (2.235) в уравнение изменения количества движения (2.227) можно убедиться, что оно удовлетворяется при любых функциях λ_1 , λ_2 и λ_3 , подчиненных условиям (2.230). Заметим, что эти множители, равно как и ξ , должны все же удовлетворять граничным условиям для \mathbf{V} и, если необходимо, для T (для политропного газа $w = c_p T$), а именно

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = v_n^S, \quad \mathbf{v}|_{|\mathbf{r}|=\infty} = \mathbf{v}_\infty, \quad T|_S = T^S, \quad T|_{|\mathbf{r}|=\infty} = T_\infty.$$

Таким образом, условие стационарности функционала (2.229) эквивалентно системе уравнений (2.226)–(2.228), если λ_2 , λ_3 удовлетворяют уравнениям (2.230), а w и \mathbf{v} имеют вид (2.223) и (2.234), где $\lambda_1 = \lambda_1(t, \mathbf{r})$ — произвольная функция, $\xi = \xi(t, \mathbf{r})$ — произвольная лагранжева координата системы.

В этом состоит основная формулировка вариационного принципа Херивела — Лина для идеальных жидкостей и газов.

Формулировка принципа через гидростатическое давление $p = p(w, s)$.

Если предположить, что не только $\delta\rho$, δs и $\delta\mathbf{v}$, но и $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_3$ исчезают на границе S_R области R , то принцип Херивела — Лина получает изящную формулировку.

Представим функционал (2.229) после очевидных преобразований в виде суммы

$$J = \int_R \left\{ \frac{\rho v^2}{2} - \rho e - \rho \Pi - \rho \frac{d\lambda_1}{dt} - \rho s \frac{d\lambda_2}{dt} - \rho \xi \frac{d\lambda_3}{dt} \right\} dR + \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_1 \rho) + \operatorname{div} (\lambda_1 \rho \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_2 \rho s) + \operatorname{div} (\lambda_2 \rho s \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_3 \rho \xi) + \operatorname{div} (\lambda_3 \rho \xi \mathbf{v}) \right\} dR. \quad (2.236)$$

Теперь вариация второго функционала в правой части (обозначим его J') в силу сделанного предположения об обращении в нуль на границе области R указанных выше вариаций равна нулю, поскольку, например,

$$\begin{aligned} \delta \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_1 \rho) + \operatorname{div} (\lambda_1 \rho \mathbf{v}) \right\} dR &= \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \delta (\lambda_1 \rho) + \operatorname{div} \delta (\lambda_1 \rho \mathbf{v}) \right\} dR = \\ &= \int_V [\delta \lambda_1 \rho + \lambda_1 \delta \rho]_{t=t_0}^{t=t_1} dV + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{S_V} (\delta \lambda_1 \rho \mathbf{v} + \delta \rho \lambda_1 \mathbf{v} + \rho \lambda_1 \delta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в первый функционал (2.236) из (2.232) выражение для $\rho v^2/2$, имеем

$$J = \int_R p(w, s) dR + J',$$

поскольку из (2.21) следует $\rho^2 \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s = p$.

Таким образом, вариационный принцип Херивела — Лиана приобретает формулировку

$$\delta J = \delta \int_R p(w, s) dR = 0 \quad (\delta J' = 0), \quad (2.237)$$

где $p = \rho^2 \left(\frac{\partial e(\rho, s)}{\partial \rho} \right)_s = \rho(w - e(\rho, s))$ — гидростатическое давление.

Здесь p надо рассматривать как функцию энтальпии w и энтропии s , а при варьировании использовать представления (2.233), (2.234) при ограничениях (2.230) и равных нулю вариациях $\delta \rho$, δv , δs , $\delta \lambda_1$, $\delta \lambda_2$, $\delta \lambda_3$ на границе области R .

Формулировка принципа (2.237), если воспользоваться выражением (2.235) и равенством $p = \rho(w - e)$, получает следующий вид:

$$\delta \int_R \rho \left(\frac{v^2}{2} + e(\rho, s) + \Pi + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + s \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \xi \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) dR = 0, \quad (2.238)$$

$$v = \nabla \lambda_1 + s \nabla \lambda_2 + \xi \nabla \lambda_3, \quad (2.239)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -T(\rho, s). \quad (2.240)$$

В случае несжимаемой жидкости ($d\rho/dt = 0$; $\operatorname{div} v = 0$; $\delta \rho = 0$ и $w = p/\rho$) из рассмотрения исключается s и, следовательно, λ_2 ; тогда принцип принимает формулировку:

$$\delta \int_R \rho \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \xi \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) dR = 0,$$

$$v = \nabla \lambda_1 + \xi \nabla \lambda_3,$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

В этом случае представление для скорости совпадает с выражением преобразования Клебша (см. задачу 13.6 и [32]).

Канонические уравнения. Обобщенный интеграл уравнения движения. Отметим, что уравнения движения среды при использовании формулировок и выражений вариационного принципа могут быть представлены в форме, близкой к каноническим уравнениям.

Подставим (2.239), считая λ_1 , ξ , λ_2 , λ_3 произвольными функциями, в уравнение движения (2.227). Получим

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + \Pi + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + s \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \xi \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \right) = \left(T + \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \right) \nabla s + \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} \nabla \xi - \frac{d\xi}{dt} \nabla \lambda_3. \quad (2.241)$$

Пусть $d\lambda_2/dt = -T$. Тогда из (2.241) получаем

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_3}, \quad (2.242)$$

где

$$H = H(t, \xi, \lambda_3) = \frac{v^2}{2} + w + \Pi + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + s \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \xi \frac{\partial \lambda_3}{\partial t}.$$

Формулы (2.242) подобны каноническим уравнениям.

Если $d\lambda_3/dt = d\xi/dt = 0$, как принято в вариационном принципе, эквивалентном системе уравнений движения, то из (2.241) следует обобщенный интеграл уравнений движения (сравн. преобразование Клебша):

$$H = f(t) = \frac{v^2}{2} + w + \Pi + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + s \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \xi \frac{\partial \lambda_3}{\partial t},$$

где $\mathbf{v} = \nabla \lambda_1 + s \nabla \lambda_2 + \xi \nabla \lambda_3$, $\lambda_1 = \lambda_1(t, \mathbf{r})$ — произвольная функция, а функции λ_2, λ_3 и ξ таковы, что

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -T.$$

Этот интеграл существует и для вихревого течения ($\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$). В случае безвихревого течения ($\mathbf{v} = \nabla \lambda_1$) имеем интеграл Лагранжа:

$$f(t) = \frac{v^2}{2} + w + \Pi + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - sT.$$

Заметим, что этот интеграл справедлив только для однородного поля температуры, поскольку из равенств $\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} = -T$ и $\nabla \lambda_2 = 0$ следует $\nabla T = 0$.

Другие вариационные принципы. Обобщение принципа Херивела — Лина на случай изотропно намагничивающейся и поляризующейся идеальной среды получено в работах [8, 72]. Целый ряд формулировок вариационных принципов для различных моделей жидкостей и газов и для случаев движения в них твердого тела приведен в монографиях [59, 4] и в работе [64]. В них можно найти весьма полную библиографию по вариационным принципам механики сплошной среды.

В [2] изложено несколько вариационных принципов термодинамики необратимых процессов.

Задачи с решениями

Задача 16.1. Пусть справедлива гипотеза Онсагера для выражения термодинамических сил I_k через термодинамические потоки X_k , а именно

$$I_k = \sum_{l=1}^n L_{kl} X_l, \quad L_{kl} = L_{lk}. \quad (1)$$

Показать, что для функционала

$$J_\sigma = \int_V \left(\sigma - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n L_{lk} X_l X_k \right) dV, \quad (2)$$

где

$$\sigma = \frac{d(\rho s)}{dt} = \sum_{k=1}^n I_k X_k,$$

производство энтропии в термодинамической системе, занимающей постоянный объем V , справедлив следующий вариационный принцип Онсагера:

Для действительно происходящего в термодинамической системе неравновесного процесса функционал (2) имеет максимальное значение по сравнению со всеми обратимыми процессами, имеющими те же потоки, но другие сопряженные с ними термодинамические силы.

Решение. Вычисляя первую вариацию от J_σ при постоянных I_k и переменных X_k , получаем

$$\begin{aligned} \delta J_\sigma &= \delta \int_V \left(\sigma - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n L_{lk} X_l X_k \right) dV = \\ &= \int_V \left\{ \sum_{k=1}^n I_k \delta X_k - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n L_{lk} (X_k \delta X_l + X_l \delta X_k) \right\} dV. \end{aligned}$$

В силу $L_{lk} = L_{kl}$ отсюда имеем

$$\delta J_\sigma = \int_V \left\{ \sum_{k=1}^n \left(I_k - \sum_{l=1}^n L_{kl} X_l \right) \delta X_k \right\} dV.$$

Вычисляя вторую вариацию функционала, получаем

$$\delta^2 J_\sigma = - \int_V \sum_{l=1}^n L_{kl} \delta X_l \delta X_k dV + \int_V \left\{ \sum_{k=1}^n \left(I_k - \sum_{l=1}^n L_{kl} X_l \right) \delta^2 X_k \right\} dV.$$

Отсюда, если справедлива гипотеза Онсагера (1), имеем

$$\delta J_\sigma = 0, \quad \delta^2 J_\sigma < 0,$$

что и свидетельствует о том, что J_σ имеет максимум.

Отметим, что в силу общей формулы (2.69) и уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0,$$

имеем

$$\int_V \sigma dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho s dV + \int_S \mathbf{J}_{\rho s} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho \frac{ds}{dt} dV + \int_V \operatorname{div} \mathbf{J}_{\rho s} dV,$$

так что

$$J_{\sigma} = \int_V \left\{ \rho \frac{ds}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{J}_{\rho s} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n L_{lk} X_l X_k \right\} dV.$$

Можно указать частные формулировки вариационного принципа Онсагера:

1) В адиабатически изолированных системах, когда поток энтропии через поверхность S , ограничивающую V , равен нулю, т. е. $\int_V \operatorname{div} \mathbf{J}_{\rho s} dV = \int_S \mathbf{J}_{\rho s} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, необратимые процессы протекают так, что

$$J_{\sigma} = \int_V \left\{ \rho \frac{ds}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n L_{lk} X_l X_k \right\} dV = \max.$$

2) При стационарных процессах в открытых системах полная энтропия системы постоянна $\left(\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = 0 \right)$, так что $\operatorname{div} \mathbf{J}_{\rho s}$ при заданных постоянных потоках тоже задана; поэтому

$$J_{\sigma} = \int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{J}_{\rho s} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n L_{lk} X_l X_k \right)_{l_k = \text{const}} dV = \max. \quad (3)$$

Функция

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n L_{lk} X_l X_k$$

носит название диссипативной функции, определяющей диссипацию энергии при неравновесном процессе. Поэтому этот случай иногда рассматривают как принцип минимума диссипации энергии в открытых системах, поскольку из (3) при известных $\mathbf{J}_{\rho s}$ следует

$$\int_V \Phi dV = \min.$$

Вышеназванные принципы справедливы лишь для случая постоянных кинетических коэффициентов при условии $L_{lk} = L_{kl}$.

Задача 16.2. Пусть \dot{v}_i , \dot{p} , \dot{p}'_{ik} — скорость, давление и тензор вязких напряжений, относящиеся к некоторому стационарному состоянию, представляющему собой установившийся режим течения вязкой несжимаемой жидкости, т. е. $\dot{v}_i = \dot{v}_i(x_k)$, $\dot{p} = \dot{p}(x_k)$. Показать, что экстремальное значение функционала

$$J = \int_V \left(-\dot{v}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \dot{p} \dot{v}_i \dot{v}_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dot{p} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \dot{p} \dot{v}_j v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dot{p}'_{ik} v_{ik} - \dot{p} v_i f_i \right) dV$$

достигается при независимых вариациях $\delta \dot{p}$ и δv_i , обращающихся на границах области V в нуль, и дополнительных условиях $\dot{v}_i = v_i$, $\dot{p} = p$, если выполнены уравнения неразрывности и движения для вязкой несжимаемой жидкости.

Решение. Рассмотрим вариацию функционала, учитывая, что характеристики стационарного состояния, постоянная плотность $\dot{\rho}$ и интенсивность массовой силы f_i — не варьируются.

$$\delta J = \int_V \left\{ -\dot{v}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta p - \dot{\rho} \dot{v}_i \dot{v}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \delta v_i - \dot{p} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_i + \dot{\rho} \dot{v}_j \left(\delta v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \delta v_i \right) + \right. \\ \left. + \dot{p}'_{ik} \delta v_{ik} - \dot{\rho} f_i \delta v_i \right\} dV.$$

Замечая, что в силу $\dot{p}'_{ik} = \dot{p}'_{ki}$

$$\dot{p}'_{ik} \delta v_{ik} = \frac{1}{2} \dot{p}'_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_k + \frac{\partial}{\partial x_k} \delta v_i \right) = \dot{p}'_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta v_i,$$

после несложных преобразований получаем

$$\delta J = \int_V \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{v}_i \delta p + \dot{p} \delta v_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\dot{p}'_{ik} \delta v_i \right) + \dot{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\dot{v}_j \left(\dot{v}_i - v_i \right) \delta v_i \right] + \right. \\ \left. + \left[\dot{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\dot{v}_j \left(\dot{v}_i - v_i \right) \right) + \dot{\rho} \dot{v}_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{p}'_{ik}}{\partial x_k} - \dot{\rho} f_i + \frac{\partial \dot{p}}{\partial x_i} \right] \delta v_i + \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial x_i} \delta p \right\} dV.$$

Первые три интеграла, преобразованные в интегралы по границе области V , обращаются в нуль в силу условий $\delta p|_S = \delta v_i|_S = 0$. Из оставшихся, приравнявая коэффициенты при независимых вариациях δp и δv_i нулю и полагая в полученных выражениях $\dot{v}_i = v_i$, $\dot{p} = p$, получаем

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \dot{\rho} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dot{\rho} f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k}.$$

Первое выражение является уравнением неразрывности для случая $\rho = \dot{\rho} = \text{const}$, а второе — уравнением установившегося движения для случая $p_{ik} = -p \delta_{ik} + p'_{ik}$.

Задача 16.3. Сформулировать вариационный принцип для электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} в вакууме, описываемого системой уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + c \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \tag{2}$$

Решение задачи может быть получено в двух формах.

I. Вариационный принцип состоит в условии стационарности функционала

$$J = \int_R \left\{ \frac{1}{2} (H^2 - E^2) + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \text{rot } \mathbf{H} \right) + \varphi \text{div } \mathbf{E} \right\} dR, \tag{3}$$

где R — четырехмерная область (декартово произведение пространственного объема и промежутка времени); \mathbf{A} и φ — векторный и скалярный множители Лагранжа, накладывающие ограничения на вариации $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{H}$. Как будет видно из дальнейшего, эти множители представляют известные в электродинамике векторный и скалярный потенциалы, через которые выражается поле \mathbf{E} , \mathbf{H} .

Предполагается, что на границе области R вариации $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{H}$ обращаются в нуль.

Вычисляя δJ и проводя очевидные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_R \left\{ \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \delta\mathbf{E} - c \operatorname{rot} \delta\mathbf{H} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta\varphi \operatorname{div} \mathbf{E} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} \delta\mathbf{E} \right\} dR = \\ &= \int_R \left\{ \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) + \delta\varphi \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{E}) - \right. \\ &\quad \left. - \delta\mathbf{E} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - c (\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \delta\mathbf{H}) + \delta\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}) + \operatorname{div} (\varphi \delta\mathbf{E}) - \delta\mathbf{E} \cdot \nabla\varphi \right\} dR = \\ &= \int_R \left\{ (\mathbf{H} - c \operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \delta\mathbf{H} - \left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right) \cdot \delta\mathbf{E} + \left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) \cdot \delta\mathbf{A} + \right. \\ &\quad \left. + (\operatorname{div} \mathbf{E}) \delta\varphi \right\} dR + \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{E}) - c \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \delta\mathbf{H}) + \operatorname{div} (\varphi \delta\mathbf{E}) \right\} dR. \end{aligned}$$

Последний интеграл в этом выражении обращается в нуль, поскольку $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{H}$ на границе области R исчезают.

Из первого интеграла в силу независимости вариаций $\delta\mathbf{H}$, $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\varphi$ имеем:

$$\mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4) — это известное представление электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} через потенциалы \mathbf{A} и φ , полученные на основании первой пары уравнений Максвелла (1), которое удовлетворяет оставшимся уравнениям (5).

II. Можно сформулировать вариационный принцип как условие стационарности функционала

$$J' = \int_R \frac{1}{2} (E^2 - H^2) dR,$$

если считать, что электромагнитное поле представимо в виде (4) через \mathbf{A} и φ , предполагая $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\varphi$ независимыми и, вместе с $\delta\mathbf{E}$ и $\delta\mathbf{H}$, исчезающими на границе R .

Действительно, интегрируя в (3) последние два слагаемых по частям, получаем ($\delta \mathbf{E}$, $\delta \mathbf{H}$ равны нулю на границе R):

$$\int_R \left\{ \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} \right\} dR = \\ = - \int_R \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \cdot \mathbf{E} - c \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} \right\} dR + \int_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}) + \operatorname{div} [\varphi \mathbf{E} + c (\mathbf{A} \times \mathbf{H})] \right\} dR.$$

Учитывая, что принято представление (4), а $\delta \mathbf{E}$ и $\delta \mathbf{H}$ равны нулю на границе R , отсюда получаем

$$\int_R \left\{ \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} \right) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} \right\} dR = \int_R (E^2 - H^2) dR.$$

Теперь из (3) имеем

$$\delta J = \delta \int_R \left\{ \frac{1}{2} (H^2 - E^2) + E^2 - H^2 \right\} dR = \delta \int_R \frac{1}{2} (E^2 - H^2) dR = \delta J'.$$

Тогда, выражая вариацию J' через независимые вариации $\delta \mathbf{A}$ и $\delta \varphi$ на основании (4), получаем

$$\delta J' = \int_R (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E} - \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H}) dR = \int_R \left\{ -\mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \delta \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \delta \varphi \right) - \mathbf{H} \cdot c \operatorname{rot} \delta \mathbf{A} \right\} dR = \\ = \int_R \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{A}) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{A} - \operatorname{div} (\mathbf{E} \delta \varphi) + (\operatorname{div} \mathbf{E}) \delta \varphi - \right. \\ \left. - c \operatorname{div} (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H}) - c \delta \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \right\} dR.$$

Отсюда в силу указанных ранее свойств вариаций $\delta \mathbf{A}$ и $\delta \varphi$ имеем

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

т. е. те уравнения (5), которые получены в первой формулировке принципа, когда представления (4) считались известными.

Вариационный принцип для бесстолкновительной плазмы в электромагнитном поле сформулирован в [51].

Задача 16.4. Исходя из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского (эйлерово представление)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\frac{\rho v^2}{2} - \rho \Pi - \rho \mathcal{P}(\rho) \right] dV = 0, \quad \delta \mathbf{r}|_{t_1} = \delta \mathbf{r}|_{t_2} = 0,$$

получить уравнения изменения количества движения для баротропной жидкости в поле потенциальных массовых сил

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla\mathcal{P}; \quad \mathbf{f} = -\nabla\Pi; \quad \mathcal{P}(\rho) = \int \frac{dp(\rho)}{\rho}.$$

Решение. Учитывая переместительность операций варьирования и интегрирования по фиксированному отрезку времени и равенство нулю вариации массы частицы ($\delta(\rho dV) = \delta(dm) = 0$), последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\rho}{2} \delta(v^2) dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} dV = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \delta \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r} dV = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}) - \delta \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} dV - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dV = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} dV. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь учтено, что $\delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{r}$, формула из задачи 9.2 и условие $\delta \mathbf{r}|_{t_1} = \delta \mathbf{r}|_{t_2} = 0$.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \Pi dV &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \delta(\rho \Pi) dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \delta \Pi dV = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \nabla \Pi \cdot \delta \mathbf{r} dV = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} dV, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \mathcal{P}(\rho) dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \rho \nabla \mathcal{P}(\rho) \cdot \delta \mathbf{r} dV. \quad (3)$$

Объединяя (1), (2) и (3), получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\frac{\rho v^2}{2} - \rho \Pi - \rho \mathcal{P}(\rho) \right] dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{f} - \rho \nabla \mathcal{P} \right] \cdot \delta \mathbf{r} dV.$$

В силу произвольности интервала (t_1, t_2) , вариаций $\delta \mathbf{r}$ и объема V получаем, что если справедлив принцип Гамильтона — Остроградского, то

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \nabla \mathcal{P}.$$

В случае несжимаемой жидкости получаем уравнение Эйлера

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p.$$

Упражнение

1. Показать, что уравнение изменения количества движения идеальной жидкости

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + \Pi \right) + T\nabla s$$

удовлетворяется тождественно, если

$$\mathbf{v} = \nabla \lambda_1 + s\nabla \lambda_2 + \xi \nabla \lambda_3,$$

где

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -T, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = 0, \quad w = -\frac{v^2}{2} - \Pi - \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} - s \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} - \xi \frac{\partial \lambda_3}{\partial t}.$$

§ 17. Методы теории размерностей и теории подобия явлений в механике сплошной среды

Для системы нелинейных дифференциальных уравнений движения жидкостей и газов известно лишь ограниченное число аналитических решений. До сих пор в полной мере не доказаны существование и единственность решения этой системы, что ограничивает использование схем численного интегрирования. Интенсивно развивающиеся в последние годы методы компьютерного моделирования снижают свою эффективность, если не удастся предварительно выделить минимальное число независимых определяющих параметров задачи. Наконец, не утратил значения и эксперимент в механике сплошной среды, рациональная постановка которого требует определенных теоретических сведений об изучаемом явлении.

В связи с этими обстоятельствами исследователи и сейчас нередко обращаются и к теории размерностей, и к теории физического подобия явлений. Сравнительно простые приемы этих разделов физики позволяют не только рационально отобрать из множества параметров и условий те, которые имеют существенное значение для исследуемого явления, но и грамотно поставить эксперимент. Помимо этого, методы теории размерностей и подобия зачастую способствуют предварительному теоретическому анализу математической модели явления.

Размерные и безразмерные величины. Основные и производные размерные величины

Ценность введения понятия любой величины в естественных науках во многом определяется возможностью ее измерения, т. е. сравнения с выбранным эталоном (единицей измерения, масштабом) и указания, таким образом, ее соответствующего численного значения.

Величина, численное значение которой зависит от выбранной единицы измерения, называется *размерной величиной*. В противном случае мы имеем дело с *безразмерными величинами*.

Время, длина, скорость, ускорение, сила, энергия — величины размерные. Отношение площадей, произведение ускорения на массу, деленное на величину силы, произведение плотности на квадрат скорости и на величину, обратную давлению, — величины безразмерные.

Деление величин на размерные и безразмерные условное, ибо зависит от выбора единиц измерения.

Например, в формуле Ньютона

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

гравитационная постоянная γ — размерная величина, если в качестве основных единиц измерения принять обычные единицы измерения длины, силы и массы; если же за единицу измерения силы принять квадрат частного от деления единицы массы на единицу длины, то γ станет безразмерной величиной.

Среди размерных величин можно выделить группу таких величин, у которых единицы измерения независимы, т. е. размерность ни одной из них не может быть получена посредством других. Такие *размерные величины* называются *основными* (первичными). Все другие размерные величины носят название *производных* (вторичных). Для основных величин единицы измерения вводятся на основании опыта, а единицы измерения производных величин получаются с помощью единиц измерения основных.

Но и это деление величин условно, поскольку также зависит от выбора системы единиц измерения.

Таким образом, деление величин на размерные и безразмерные, равно как и деление размерных величин на основные и производные, целиком определяется выбором системы единиц измерения величин. Этот выбор зависит от исследователя. В то же время формулировка объективных законов, как соотношения между величинами, не должна зависеть от произвола исследователя. Иными словами, правильно сформулированный закон должен быть инвариантен по отношению к выбору системы единиц измерения величин. Аналогично этому, как уже отмечалось, предъявляется требование инвариантности формулировок законов по отношению к выбору систем координат в изотропном и однородном пространстве. Выбор единиц измерения величин, как и выбор системы координат, не связан с существом самих явлений, а потому не должен влиять на их математическое описание.

Что касается выбора основных единиц измерения, то в различных областях физики их принято выбирать столько, чтобы излишне не загромождать формулы и формулировка законов была наиболее обозримой и удобной в пользовании.

Например, если принять за основные размерные величины массу, скорость, силу и время, то тогда закон Ньютона надо писать в виде $\mathbf{F} = cd (m\mathbf{v})/dt$, где c — некоторая

постоянная с размерностью, зависящей от принятых единиц измерения для F , m , t и v . Если же в законе Ньютона $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$ за основные размерные величины принять единицы измерения времени, длины и массы, то единица измерения силы будет уже однозначно выражаться через них, так что сила станет производной размерной величиной.

В механике сплошной среды, как и вообще в механике, обычно ограничиваются тремя основными величинами: длина (сантиметр), время (секунда), масса (грамм) — (система CGS) или: длина (метр), килограмм-сила, время (секунда) — (система MKS). В системе СИ основными единицами измерения служат метр, килограмм-масса, секунда, ампер, градус Кельвина, свеча.

Если инвариантность формулировок законов по отношению к выбору системы координат определяется тензорными свойствами величин, то инвариантность по отношению к выбору системы единиц измерения обеспечивается общим правилом получения размерности любой производной величины через размерности основных. Это правило заключено в так называемой формуле размерности.

Формула размерности *Размерностью основной величины является само название ее единицы измерения: длина, время, масса, градус и т. п. Будем обозначать их символами: L — символ единицы длины, M — символ единицы массы, t — символ единицы времени и т. д., а для символа размерности будут приняты прямые скобки, так что: $[l] = L$, $[m] = M$, $[t] = t$ и т. д.*

Размерностью производной величины называется выражение ее единицы измерения через единицы измерения основных величин. Это выражение и является формулой размерности.

Пусть q_1, q_2, \dots, q_n — основные размерные величины, их размерности (единицы измерения) $[q_1], [q_2], \dots, [q_n]$ — независимы. Пусть имеются Q_1, Q_2, \dots, Q_N — производные размерные величины, размерности которых $[Q_i]$ (единицы измерения) зависят от $[q_1], [q_2], \dots, [q_n]$, так что из $Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$ следует $[Q_i] = F([q_1], [q_2], \dots, [q_n])$.

Найдем эту зависимость, т. е. выразим размерность $[Q_i]$ через $[q_1], [q_2], \dots, [q_n]$.

Будем исходить из физического условия, отражающего очевидную независимость от выбора единиц измерения формулировки простейшего факта, а именно: отношение двух численных значений любой производной величины не зависит от выбора масштабов для основных

единиц измерения. Так, например, если скорость самолета в 100 раз больше скорости автомобиля, то отношение их скоростей не изменится, в чем бы эти скорости не измерялись: километрах в час, метрах в сек, локтях в сутки и т. д. Если площадь поля S_n больше площади участка S_y в 1000 раз, то отношение S_n/S_y не изменится от того, будут ли измерены площади в квадратных километрах или в квадратных миллиметрах.

Таким образом, изменив единицы измерения основных величин q_1, q_2, \dots, q_n соответственно в $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ раз, т. е. выбрав для них другие масштабы, мы оставим неизменным отношение двух значений любой производной величины Q_i , т. е.

$$\frac{Q_i^I}{Q_i^{II}} \equiv \frac{Q_i(q_1^I, q_2^I, \dots, q_n^I)}{Q_i(q_1^{II}, q_2^{II}, \dots, q_n^{II})} = \frac{Q_i(\alpha_1 q_1^I, \dots, \alpha_n q_n^I)}{Q_i(\alpha_1 q_1^{II}, \dots, \alpha_n q_n^{II})}.$$

Отсюда

$$Q_i(\alpha_1 q_1^I, \dots, \alpha_n q_n^I) = \frac{Q_i(q_1^I, q_2^I, \dots, q_n^I)}{Q_i(q_1^{II}, q_2^{II}, \dots, q_n^{II})} Q_i(\alpha_1 q_1^{II}, \dots, \alpha_n q_n^{II}). \quad (2.243)$$

Для выяснения зависимости Q_i от q_1 продифференцируем это выражение по α_1 и, используя произвольность $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, положим их все равными единице. Получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_i(q_1^I, q_2^I, \dots, q_n^I)}{\partial q_1^I} \cdot \frac{q_1^I}{Q_i(q_1^I, q_2^I, \dots, q_n^I)} = \\ & = \frac{q_1^{II}}{Q_i(q_1^{II}, q_2^{II}, \dots, q_n^{II})} \cdot \frac{\partial Q_i(q_1^{II}, q_2^{II}, \dots, q_n^{II})}{\partial q_1^{II}}. \end{aligned}$$

В силу того, что слева — функция только от q_1^I , а справа — только от q_1^{II} (q_2, q_3, \dots, q_n рассматриваются как параметры), эта функция не зависит от q_1 , т. е.

$$\frac{\partial Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial q_1} \cdot \frac{q_1}{Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n)} = l_{1i},$$

где l_{1i} — численный коэффициент. Отсюда, интегрируя, имеем

$$Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = A_i(q_2, \dots, q_n)q_1^{l_{1i}}.$$

Аналогичным образом определяется зависимость размерной величины A_i последовательно от q_2, q_3, \dots, q_n . Окончательно получаем

$$Q_i = C_i q_1^{l_{1i}} q_2^{l_{2i}} \dots q_n^{l_{ni}}, \quad (2.24)$$

где C_i — безразмерная постоянная. Таким образом, отсюда для размерностей имеем

$$[Q_i] = [q_1]^{l_{1i}} [q_2]^{l_{2i}} \dots [q_n]^{l_{ni}}. \quad (2.24)$$

Эти две равнозначные формулировки и представляют формулу размерности, которая может быть прочитана следующим образом:

Размерность любой производной величины представляет собой степенной одночлен из единиц измерения основных величин.

II-теорема Рассмотрим теперь, какой характер имеет функциональная зависимость любой производной величины Q от n основных и N производных величин, т. е. структуру функции f в соотношении

$$Q = f(q_1, q_2, \dots, q_n, Q_1, Q_2, \dots, Q_N), \quad (2.24)$$

выражающем формулировку некоторого закона, инвариантного по отношению к выбору системы единиц измерения.

Изменим масштабы основной системы единиц соответственно в $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ раз. Тогда в новой системе единиц измерения $\alpha_1 q_1, \alpha_2 q_2, \dots, \alpha_n q_n$ получим новые численные значения производных величин (Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N), которые согласно формуле размерности (2.244) выражаются через старые следующим образом:

$$Q' = C (\alpha_1 q_1)^{l_{1i}} (\alpha_2 q_2)^{l_{2i}} \dots (\alpha_n q_n)^{l_{ni}} = Q \alpha_1^{l_{1i}} \alpha_2^{l_{2i}} \dots \alpha_n^{l_{ni}},$$

$$Q'_i = C_i (\alpha_1 q_1)^{l_{1i}} (\alpha_2 q_2)^{l_{2i}} \dots (\alpha_n q_n)^{l_{ni}} = Q_i \alpha_1^{l_{1i}} \alpha_2^{l_{2i}} \dots \alpha_n^{l_{ni}}.$$

При этом в силу требования инвариантности закона (2.246) по отношению к выбору системы единиц измерения имеем

$$Q' = f(\alpha_1 q_1, \dots, \alpha_n q_n, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_N).$$

Переходя здесь к исходной системе единиц измерения, получаем

$$Q \alpha_1^{l_1} \alpha_2^{l_2} \dots \alpha_n^{l_n} = f(\alpha_1 q_1, \dots, \alpha_n q_n, \alpha_1^{l_{11}} \alpha_2^{l_{21}} \dots \alpha_n^{l_{n1}} Q_1, \dots, \alpha_1^{l_{1N}} \alpha_2^{l_{2N}} \dots \alpha_n^{l_{nN}} Q_N). \quad (2.247)$$

Воспользуемся произвольностью выбора масштабов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и выберем их так, чтобы сократить число аргументов функции f , а именно положим

$$\alpha_1 = \frac{1}{q_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{q_2}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{1}{q_n}. \quad (2.248)$$

Тогда в такой системе единиц измерения, которую называют *относительной*, первые n аргументов зависимости (2.247) обращаются в единицы, а из (2.248) получаем

$$\frac{Q}{q_1^{l_1} q_2^{l_2} \dots q_n^{l_n}} = f\left(1, 1, \dots, 1, \frac{Q_1}{q_1^{l_{11}} q_2^{l_{21}} \dots q_n^{l_{n1}}}, \dots, \frac{Q_N}{q_1^{l_{1N}} q_2^{l_{2N}} \dots q_n^{l_{nN}}}\right). \quad (2.249)$$

Величины $Q/q_1^{l_1} q_2^{l_2} \dots q_n^{l_n}$ и $Q_i/q_1^{l_{i1}} q_2^{l_{i2}} \dots q_n^{l_{in}}$ суть величины безразмерные в исходной системе единиц измерения в силу формулы (2.244). Таким образом, в относительной системе единиц измерения зависимость (2.246) упрощается и принимает вид

$$\Pi = f(1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N), \quad (2.250)$$

где Π и Π_i — безразмерные в исходной системе единиц измерения параметры.

Эта запись выражает так называемую Π -теорему («пи»-теорему), которую можно сформулировать так:

Всякую зависимость между размерными величинами, инвариантную по отношению к выбору единиц измерения, всегда, перейдя к относительной системе единиц измерения, можно представить в виде за-

зависимости между безразмерными параметрами, составленными из основных и производных размерных величин.

В частном случае ($N = 0$) из (2.250) имеем формулу размерности (2.244).

О значении формулы размерности и П-теоремы для физического эксперимента и теории

Прежде всего, выводы теории размерностей помогают грамотно поставить физический эксперимент. Действительно, если бы мы попытались экспериментально найти зависимость

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

не привлекая соображений теории размерностей и не пользуясь формулой (2.244), то, скажем, делая по m экспериментов для определения частных зависимостей (Q_i от q_1 , Q_i от q_2 и т. д. при фиксированных остальных), нам бы потребовалось всего m^n замеров (экспериментов), чтобы затем искать приближенные интерполяционные формулы этих частных зависимостей. Формула (2.244) дает вид зависимости Q_i от всех аргументов, а для определения безразмерной постоянной C_i необходимо провести всего один эксперимент: найти Q_i при каком-то одном выборе значений q_1, q_2, \dots, q_n .

Точно так же, определяя экспериментально общую зависимость (2.246) «впрямую», мы должны были бы провести m^{n+N} замеров. П-теорема в виде (2.250) позволяет сократить их число в $m^{n+N}/m^N = m^n$ раз (как и при пользовании формулой размерности, поскольку П-теорема не раскрывает вид функциональной зависимости $f(1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_N)$).

Однако значение П-теоремы не исчерпывается информацией для рациональной постановки эксперимента. При пользовании ею в теоретическом анализе уравнений иногда можно получить решения, в которых уменьшение числа аргументов достигается за счет объединения их в некоторые комбинации, использующиеся в качестве новых аргументов. При этом, конечно, должны быть удовлетворены все граничные условия. Примером таких решений являются так называемые *автомодельные решения*, когда вместо нескольких основных переменных

задачи можно ввести их комбинации в качестве нового одного переменного и при этом сохранить возможность удовлетворения граничным и начальным условиям. Наличие подобных частных решений, позволяющих свести уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, устанавливается весьма часто при помощи соображений теории размерностей, в частности Π -теоремы. Один из подобных примеров будет рассмотрен дальше (см. пример 4); целый ряд интересных автомодельных решений задач гидромеханики можно найти в [61, 3].

Приведем несколько характерных примеров использования формулы размерности и Π -теоремы.

Пример 1. Рассмотрим задачу о струйном движении тяжелой жидкости плотностью ρ , перетекающей через водослив, расположенный на глубине h под уровнем воды (рис. 86).

Требуется определить вес жидкости G , перетекающей в единицу времени через единицу длины водослива; предполагается, что длина водослива значительно больше его глубины.

Теоретическое — да и экспериментальное — решение этой задачи не простое. В то же время достаточно поставить лишь один эксперимент, чтобы найти G , если а priori считать, что определяющие параметры явления есть плотность ρ , глубина h и ускорение силы тяжести g , так что

$$G = f(\rho, g, h). \quad (2.251)$$

Чтобы раскрыть эту зависимость, воспользуемся выводами теории размерностей. Величины ρ , g и h могут быть приняты за основные величины, ибо их размерности

$$[\rho] = ML^{-3}, \quad [g] = Lt^{-2}, \quad [h] = L$$

независимы.

Величина G с размерностью $[G] = Mt^{-3}$ является производной размерной величиной.

В силу формулы размерности (2.244) имеем

$$G = C \rho^4 g^2 h^3$$

и согласно (2.245)

$$[G] = [\rho]^4 [g]^2 [h]^3,$$

или

$$Mt^{-3} = M^4 L^{-3 \cdot 4} L^2 t^{-2 \cdot 2} L^3.$$

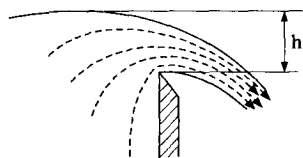


Рис. 86

Отсюда получаем

$$1 = l_1, \quad 0 = -3l_1 + l_2 + l_3, \quad -3 = -2l_2$$

и, следовательно, (2.251) имеет вид

$$G = C \rho (gh)^{3/2}. \quad (2.252)$$

Здесь C — безразмерная постоянная, значение которой может быть найдено, если один раз измерить G для известных ρ , h и g . Для всех других значений этих параметров величина G будет меняться согласно зависимости (2.252).

Решение задачи о водосливе прямоугольной и треугольной формы в поперечном сечении можно найти в [61].

Пример 2. *Сила, действующая на тело, обтекаемое средой.*

Пусть в стационарный поток невязкой среды с плотностью ρ помещено тело, имеющее характерный линейный размер L , причем v — характерная скорость потока (например, значение скорости на бесконечности) (рис. 87). Пренебрежем влиянием других параметров задачи, которые учтем в последующем. Тогда величину силы F , действующей на тело, можно искать как функцию, зависящую от этих трех параметров, т. е.

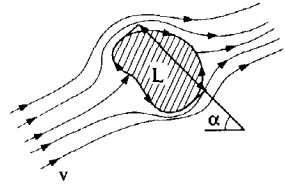


Рис. 87

$$F = F(\rho, v, L).$$

Поскольку размерности $[\rho] = ML^{-3}$, $[v] = LT^{-1}$, $[L] = L$ образуют независимую систему, то согласно формуле размерностей (2.244) имеем

$$F = C \rho^h v^l L^k$$

или для размерностей (2.245)

$$MLt^{-2} = M^h L^{-3h} L^l t^{-l} L^k.$$

Находя отсюда $l_1 = 1$, $l_2 = l_3 = 2$, получаем

$$F = C \rho v^2 L^2, \quad (2.253)$$

где безразмерная величина C может быть определена с помощью одного эксперимента.

Если бы мы попытались из эксперимента определить вид зависимости $F = F(\rho, v, L)$, не используя выводов теории размерностей, то, даже производя для каждой из частных зависимостей F от одного из трех аргументов при фиксированных двух по десять экспериментов, нам пришлось бы провести 10^3 экспериментов, а затем по экспериментальным точкам строить приближенные зависимости. Выводы теории размерностей позволяют получить точную формулу (2.253) зависимости F от ρ , v , L и ограничиться проведением одного эксперимента.

Пусть теперь то же тело, помещенное в нестационарный поток вязкой среды (μ — коэффициент вязкости), где действует массовая сила плотности $|\mathbf{f}| = g$ (ускорение силы тяжести), ориентировано под углом α к скорости потока \mathbf{V} на бесконечности. Тогда сила будет зависеть от ряда величин, не все размерности которых независимы, а именно

$$F = f(\rho, v, L, \mu, g, t, \alpha), \quad (2.254)$$

где t — характерное время нестационарного потока (например период характерных колебаний).

Выберем в качестве основных размерных величин ρ, v и L . Тогда согласно П-теореме (2.250) зависимость (2.254) можно заменить следующей

$$\Pi = f(l_1, l_2, l_3, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \alpha),$$

где

$$\Pi = \frac{F}{\rho^{l_1} v^{l_2} L^{l_3}}, \quad \Pi_1 = \frac{\mu}{\rho^{l_{11}} v^{l_{21}} L^{l_{31}}}, \quad \Pi_2 = \frac{g}{\rho^{l_{22}} v^{l_{22}} L^{l_{32}}}, \quad \Pi_3 = \frac{t}{\rho^{l_{13}} v^{l_{23}} L^{l_{33}}}.$$

Определяя показатели $l_1, l_2, l_3, l_{11}, l_{21}, l_{31}$ из условия, что Π, Π_1, Π_2 и Π_3 — безразмерные величины, получаем

$$F = \rho v^2 L^2 f\left(\frac{\mu}{\rho v L}, \frac{gL}{v^2}, \frac{tv}{L}, \alpha\right). \quad (2.255)$$

Безразмерные параметры Π_1, Π_2, Π_3 имеют в гидромеханике названия по имени ученых: $Re = \rho v L / \mu$ — число Рейнольдса; $Fr = v^2 / gL$ — число Фруда; $Sh = L / vt$ — число Струхала.

Заметим, что в качестве основных размерных величин можно было взять другой набор. Например, если выбрать μ, v и L , то вместо (2.254) получили бы формулу

$$F = \mu v L f_1(Re, Fr, Sh, \alpha),$$

где f_1 — отличная от f функция тех же безразмерных параметров.

Пример 3. Задача о сильном взрыве. В 1945 г. была испытана первая атомная бомба. Ее взрыв с точки зрения механики представляет собой почти мгновенное (в течение $\sim 10^{-3}$ сек) выделение громадного, хотя и конечного количества энергии E (около 10^{20} эрг) в малой области (диаметр около 10 см). В таких условиях пренебрегают массой и размерами вещества, выделяющего энергию. В результате сильного взрыва образуется сферическая ударная волна, представляющая собой фронт газовой среды с очень большим давлением p_b и распространяющаяся с течением времени по среде с плотностью ρ и давлением p (рис. 88). Интерес представляет зависимость радиуса ударной волны R от времени и от параметров взрыва, т. е.

$$R = R(E, \rho, t, p).$$

Поскольку давление за фронтом ударной волны p_b в начальной фазе атомного взрыва значительно (примерно в 10^4 раз) превосходит атмосферное, т. е. $p_b \gg p$, то можно пренебречь влиянием p и считать

$$R = R(E, \rho, t).$$

Заметим, что по мере распространения волны взрыва давление за фронтом волны убывает и пренебрегать влиянием внешнего давления уже нельзя.

Так как E , ρ , t имеют независимые размерности, то согласно формуле размерности (2.244) имеем

$$R = CE^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}}.$$

Определяя l_1, l_2, l_3 из системы уравнений $l_1 + l_2 = 0, 2l_1 - 3l_2 = 1, l_3 - 2l_1 = 0$, получаем

$$R = C \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} t^{3/2}.$$

Эта формула была получена Л. И. Седовым¹ и независимо от него Джеффри Тейлором². Она настолько хорошо совпадала с данными термоядерного взрыва (см., например, [61]), что это, как говорили, дало основание комиссии Маккарти в США заподозрить Д. Тейлора в разглашении государственной тайны. Экспериментальные данные по взрывам атомных бомб почти точно укладывались на прямую, выражающую зависимость $(5 \ln R) / 2$ от $\ln t$, наклоненную под углом 45° . Из этой зависимости можно определить E , ибо, приняв $C = 1$, можно найти, что $0,5 \ln(E/\rho) = 11,915$ (отрезок на оси ординат), откуда $E = 8,45 \cdot 10^{20}$ эрг (см. [61]).

Пример 4. Диффузия прямолинейной вихревой нити в вязкой несжимаемой жидкости. Уравнением, которому удовлетворяет величина $\Omega \equiv \text{rot } v$, служит уравнение

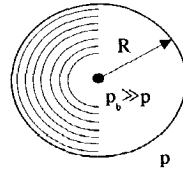


Рис. 88

¹ Седов Леонид Иванович (1907–1999) — видный советский ученый в области механики и прикладной математики. Окончил Московский университет (1931 г.). С 1937 г. — профессор Московского университета, работал (с 1945 г.) в Математическом институте АН СССР. Основные работы по гидроаэромеханике, механике сплошной среды, теории подобия, аэроупругости. Обобщил теорему Жуковского для произвольного движения крыла; построил теорию тонкого крыла, исследовал потенциальное обтекание газом профилей и решеток, развил нестационарную теорию решеток. В теории подобия решил ряд важных задач, в частности задачу о сильном взрыве, построил теорию автомодельных движений газа. Установил закон пульсаций в изотропной турбулентности. Разработал модели сплошной среды с учетом электродинамических явлений и метод решения задач на основе сформулированного им вариационного принципа. Автор ряда фундаментальных монографий по вопросам механики сплошной среды.

² Тейлор (Taylor) Джеффри Инграм (1886–1975) — английский механик, математик и физик. Окончил Кембриджский университет (1911 г.); с 1923 г. — профессор Кембриджского университета; в 1944–1945 гг. работал в Лос-Аламосе. Основные исследования посвящены механике сплошной среды (теория турбулентности, теория устойчивости движения вязкой жидкости, волны в жидкости). Развил идею корреляции в теории турбулентности (1938 г.); в 1941 г. решил задачу о сильном взрыве (опубликовано в 1950 г.).

динамической возможности движения (2.142а), которое в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \Delta \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.256)$$

Рассмотрим такое вихревое движение, в котором бесконечные прямолинейные вихревые линии параллельны оси z . В плоскости $z = 0$ введем полярные координаты r, φ . Тогда, полагая $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{i}_z \Omega$ и проектируя (2.256) на ось z , получаем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + v_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + v_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \Omega \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu \Delta \Omega. \quad (2.257)$$

Ограничимся рассмотрением вихревого движения, обладающего круговой симметрией с постоянной (вдоль вихревых линий) завихренностью.

Это означает, что решение уравнения (2.257) будем искать в виде функции от r и t , т. е. $\Omega = \Omega(t, r)$. Далее, воспользовавшись формулой (1.104), получим для поля скоростей такого движения

$$\mathbf{v}(t, r) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\mathbf{i}_z \Omega(t, r') r' dr' d\varphi' dz'}{\sqrt{z'^2 + (r - r')^2}},$$

где интеграл берется по всему пространству. Отсюда следует

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = v_\varphi(t, r).$$

Для рассматриваемого вихревого движения из (2.257) имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right). \quad (2.258)$$

Начальные и граничные условия задачи формулируются следующим образом.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ всюду, кроме оси z , $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. На оси z ни \mathbf{V} , ни $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ не определены, но зато в малой окрестности оси z определена суммарная вихревая интенсивность Γ . В момент времени t и для окрестности произвольного радиуса R вихревая интенсивность имеет выражение (рис. 89)

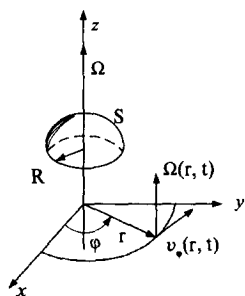


Рис. 89

$$\Gamma_R(t) = \int_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \Omega(t, r) r dr d\varphi = 2\pi \int_0^R r \Omega(t, r) dr.$$

Здесь R — радиус окружности, на которую натянута поверхность S (в данном случае — круг).

Предполагается, что существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma_R(t) = 2\pi \int_0^R r \Omega(0, r) dr \equiv \Gamma, \quad (2.259)$$

который не зависит от R (в частности, существует и при $R \rightarrow 0$).

Таким образом, в момент времени $t = 0$ на оси z (и только на ней) расположена одна вихревая нить. Движение от нее во всем пространстве потенциально, так что при $t = 0$ поле скоростей имеет вид потенциального поля от бесконечной вихревой нити в вязкой среде, а именно

$$v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi(0, r) = \frac{\Gamma_R(0)}{2\pi r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

При $t \rightarrow \infty$ будем считать, что все величины остаются конечными.

В этих условиях теория размерностей позволяет найти решение $\Omega(t, r)$ из обыкновенного дифференциального уравнения как функцию одной переменной, представляющей комплекс переменных r и t .

Из постановки задачи следует

$$\Omega = \Omega(t, r, \nu, \Gamma),$$

а в силу линейности уравнения (2.258) и вида начального условия (2.259) можно считать, что Ω пропорционально Γ , т. е.

$$\Omega = \Gamma f(t, r, \nu).$$

Из трех переменных r, t, ν только две имеют независимые размерности. Выбрав в качестве основных переменных ν и t . Тогда согласно П-теореме имеем

$$\frac{\Omega \nu^{l_1} t^{l_2}}{\Gamma} = f\left(\frac{r^2}{\nu^{l_3} t^{l_4}}\right).$$

Поскольку $[\Omega] = t^{-1}$, $[\Gamma] = L^2 t^{-1}$, $[\nu] = L^2 t^{-1}$, то $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$. Таким образом,

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t} f\left(\frac{r^2}{\nu t}\right)$$

и, следовательно, функция f зависит от одной независимой безразмерной величины $\xi = r^2/\nu t$.

Подставляя $\Omega = \Gamma f(\xi)/\nu t$ в (2.258), получаем

$$\frac{d}{d\xi}(f\xi) = -4 \frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{df}{d\xi}\right).$$

Интегрируя, имеем $f\xi + 4\xi df/d\xi = c$, причем $c = 0$, поскольку f и $df/d\xi$ при $\xi = 0$ конечны. Интегрируя вторично, приходим к выражению

$$f(\xi) = A e^{-\xi/4}.$$

Постоянную A определяем из начального условия (2.259). Имеем

$$\Gamma_R(t) = 2\pi \int_0^R \frac{\Gamma}{\nu t} A \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) dr = 4\pi A \Gamma \left(1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4\nu t}\right)\right).$$

Поскольку $\Gamma = \lim_{t \rightarrow 0} \Gamma_R(t) = 4\pi A \Gamma$, то $A = 1/4\pi$.

Таким образом, решение уравнения (2.258), удовлетворяющее условию (2.259), имеет вид

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \text{ причем } v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right). \quad (2.260)$$

Итак, вихревая нить, расположенная при $t = 0$ на оси z , при $t > 0$ вследствие вязкости мгновенно начинает диффундировать во всю область жидкости и движение сразу и всюду становится вихревым. Формула (2.260) дает изменение завихренности и трансверсальной скорости в зависимости от r и t . В каждой точке поверхности $r = \text{const}$ завихренность возрастает со временем от нуля (при $t = 0$) до некоторого максимума, который тем больше, чем ближе точка находится к оси z , а затем спадает до нуля (при $t \rightarrow \infty$).

Решение задачи для общего начального распределения скорости ($v_\varphi(0, r) = v_0(r)$) можно найти в [28].

Физическое подобие и моделирование явлений. Критерии подобия

Весьма часто исследование явления в его естественных условиях затруднено либо невозможностью его повторения, либо масштабами, требующими специального оборудования, либо, наконец, какими-то другими обстоятельствами, препятствующими изучению рассматриваемого явления в его, так сказать, натуральном виде. В этих случаях прибегают к *моделированию* явления, состоящему в замене изучения «явления в натуре» изучением «явления на модели», в специальных лабораторных условиях, позволяющих провести необходимые измерения. Но тогда нужно уметь пересчитывать результаты модельных экспериментов на соответствующие характеристики явления в натуре. Это можно сделать весьма просто, если явление в натуре *физически подобно* явлению на модели.

Физическое подобие является естественным обобщением геометрического подобия. Для сходственных пространственных точек, координаты которых x_k и x_k^* связаны соотношением $x_k^* = a_l x_k$, где значение a_l одинаково для всех сходственных точек (обозначается $a_l = \text{idem}$ — латинское слово, соответствующее русскому «то же самое»), устанавливаются сходственные моменты времени t и t^* , причем $t^* = a_t t$, где $a_t = \text{idem}$. В дальнейшем о совокупностях (t, x_k) , (t^*, x_k^*) будем говорить как о *сходственных пространственно-временных точках*.

Пусть φ — какая-то характеристика изучаемого явления (скорость среды, плотность, температура и т. п.), а φ и φ^* — значения этой характеристики в сходственных пространственно-временных точках, относящихся к двум явлениям, т. е. $\varphi \equiv \varphi(t, x_k)$, $\varphi^* \equiv \varphi(t^*, x_k^*)$, причем $x_k^* = a_1 x_k$, $t^* = a_1 t$.

Два физических явления называются подобными, если в сходственных пространственно-временных точках отношения соответствующих величин, характеризующих эти явления, одинаковы для всех таких точек.

Итак, для любой характеристики φ двух явлений в случае их физического подобия имеем

$$\frac{\varphi(t^*, x_k^*)}{\varphi(t, x_k)} \equiv \frac{\varphi^*}{\varphi} = a_\varphi = \text{idem.}$$

Таким образом, для физически подобных явлений по известным характеристикам одного явления (например, φ) простым линейным пересчетом можно получить значения характеристик другого явления (характеристики φ^*), взятые в сходственных пространственно-временных точках.

Выберем пару сходственных пространственно-временных точек $(\overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{x}_k)$ и $(\overset{\circ}{t}^*, \overset{\circ}{x}_k^*)$, наиболее характерных для данного явления (например, бесконечно удаленных и начальный момент времени; или, например, критических, где скорость обращается в нуль, и характерный период времени, и т. п.). Тогда для подобных явлений

$$\frac{\varphi^*}{\varphi} = a_\varphi = \frac{\overset{\circ}{\varphi}^*}{\overset{\circ}{\varphi}}, \quad (2.261)$$

или

$$\frac{\varphi^*}{\overset{\circ}{\varphi}^*} = \frac{\varphi}{\overset{\circ}{\varphi}} = \text{idem.} \quad (2.262)$$

Здесь $\overset{\circ}{\varphi}$, $\overset{\circ}{\varphi}^*$ — значения характеристики, взятые в наиболее характерных точках двух явлений.

Назовем значения $\overset{\circ}{\varphi}^*$, $\overset{\circ}{\varphi}$ масштабами характеристики φ двух явлений (масштаб длины — характерный размер, масштаб скорости — характерная скорость, например, в бесконечно удаленной точке, и т. п.).

Тогда величину a_φ можно трактовать как отношение масштабов (характерных значений) величины φ для двух физически подобных явлений.

Необходимые и достаточные условия физического подобия двух явлений устанавливаются следующей теоремой.

Теорема. Для физического подобия двух явлений необходимо и достаточно, чтобы N безразмерных параметров $\dot{P}_1, \dot{P}_2, \dots, \dot{P}_N$, составленных из масштабов n основных и N производных величин, входящих в основные системы уравнений, описывающих эти явления, были одинаковы для обоих явлений.

Параметры \dot{P}_k называются критериями подобия.

Подобие явлений в гидродинамике

Справедливость этой теоремы удобно проиллюстрировать на основе каких-то конкретных движений среды, описываемых определенной

системой уравнений.

В качестве таковых выберем два потока — сжимаемого вязкого газа и несжимаемой вязкой жидкости. В каждом из них выберем по паре явлений: к одному из них относятся переменные t, x_k, ρ, v_k, \dots , а к другому — $t^*, x_k^*, \rho^*, v_k^*, \dots$. Эти потоки описываются системой уравнений (2.102')–(2.105), причем для газа — $p(T, \rho) = \rho RT, e(T, \rho) = c_v T$, для несжимаемой жидкости — уравнение $p = p(T, \rho)$ не учитывается, а $e(T, p) = c_p T$. Тогда, считая для простоты выкладок $\zeta = 0$, из (2.117а)–(2.120) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) &= 0, \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} (2\mu \dot{v}_{ik}), \\ \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + v_k \frac{\partial e}{\partial x_k} \right) &= \left(-p \delta_{ik} + 2\mu \dot{v}_{ik} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ p &= \rho RT, \quad R = c_p - c_v = c_v (\kappa - 1). \end{aligned} \quad (2.263)$$

Пусть эта система относится к первому из рассматриваемых явлений, а второе явление описывается уравнениями в своих переменных, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} (\rho^* v_k^*) &= 0, \\ \rho^* \frac{\partial v_i^*}{\partial t^*} + \rho^* v_k^* \frac{\partial v_i^*}{\partial x_k^*} &= \rho^* f_i^* - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(2\mu^* \dot{v}_{ik}^* \right), \\ \rho^* \left(\frac{\partial e^*}{\partial t^*} + v_k^* \frac{\partial e^*}{\partial x_k^*} \right) &= \left(-p^* \delta_{ik} + 2\mu^* \dot{v}_{ik}^* \right) \frac{\partial v_i^*}{\partial x_k^*} + \frac{\partial}{\partial x_k^*} \left(\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial x_k^*} \right), \\ p^* &= \rho^* R^* T^*, \quad R^* = c_v^* (\kappa^* - 1). \end{aligned} \quad (2.264)$$

В случае рассмотрения движения идеального (совершенного) поли-тропного вязкого газа в качестве основных размерных величин можно выбрать ρ , v и L ; тогда производными величинами будут t , f , p , μ , $e(T)$ и λ (κ — величина безразмерная и сама служит дополнительным критерием подобия).

Следовательно, в рассматриваемом примере должно быть шесть безразмерных параметров, составленных из масштабов всех величин и одинаковых у двух явлений.

Докажем *необходимость* условий теоремы.

Пусть первое и второе явления подобны. Тогда в силу определения подобия, как только

$$\frac{x_k^*}{x_k} = a_l = \text{idem}, \quad \frac{t^*}{t} = a_l = \text{idem} \quad (2.265)$$

для переменных ρ , v , $e(T)$, p , ... имеем

$$\frac{\rho^*}{\rho} = a_\rho = \text{idem}, \quad \frac{v_k^*}{v_k} = a_v = \text{idem}, \quad \frac{e^*}{e} = a_e = \text{idem}, \dots \quad (2.266)$$

где $\rho \equiv \rho(t, x_k)$, $\rho^* \equiv \rho(t^*, x_k^*)$ и т. д.

Перейдя в системе (2.264) к переменным системы (2.263) по формулам (2.265) и (2.266) и разделив полученные уравнения на коэффициенты при конвективных производных, получим из (2.264):

$$\frac{a_l}{a_l a_v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{a_l}{a_l a_v} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= \frac{a_f a_l}{a_v^2} \rho f_i - \frac{a_p}{a_p a_v^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{a_\mu}{a_p a_v a_l} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(2\mu \dot{v}_{ik} \right), \\ \frac{a_l}{a_l a_v} \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial e}{\partial x_k} &= \\ = - \frac{a_p}{a_p a_e} p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{a_\mu a_v}{a_l a_p a_e} 2\mu \dot{v}_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{a_\lambda a_T}{a_v a_l a_p a_e} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ \frac{a_p}{a_p a_T a_R} p &= \rho RT, \quad \frac{a_R}{a_{c_v}} R = c_v (\kappa - 1). \end{aligned} \quad (2.267)$$

Но эта система должна совпадать с (2.263), поскольку она представляет теперь (в переменных x_k, t, ρ, v, \dots) формулировку первого явления. Это возможно лишь при условиях

$$\begin{aligned} \frac{a_l}{a_l a_v} = 1, \quad \frac{a_f a_l}{a_v^2} = 1, \quad \frac{a_p}{a_p a_v^2} = 1, \quad \frac{a_\mu}{a_p a_v a_l} = 1, \\ \frac{a_p}{a_p a_e} = 1, \quad \frac{a_\mu a_v}{a_l a_p a_e} = 1, \quad \frac{a_\lambda a_T}{a_v a_l a_p a_e} = 1, \\ \frac{a_p}{a_p a_T a_R} = 1, \quad \frac{a_R}{a_{c_v}} = 1. \end{aligned} \quad (2.268)$$

Шестое и девятое условия из (2.268) могут быть получены из остальных, а из оставшихся семи, как будет показано, только шесть (по числу производных величин) условий независимы (для каждого из двух случаев — несжимаемой жидкости и политропного газа). Из них и получают критерии подобия.

Из первого условия (2.268) в силу определения (2.261) получаем

$$\frac{l_0^* t_0 v_0}{l_0 t_0^* v_0^*} = 1, \quad (2.269)$$

где v_0, t_0, l_0 — масштабы скорости, времени и длины, введенные для первого явления, а t_0^*, v_0^*, l_0^* — то же для второго явления. Безразмерная комбинация $\Pi_1 \equiv l_0/v_0 t_0$ этих масштабов носит название числа Струхалия, по имени чешского ученого В. Струхалия (Строугаль,

V. Strouhal (1850–1923 гг.)) и обозначается Sh . Тогда (2.269) означает $Sh^* = Sh$, где

$$Sh^* = \frac{l_0^*}{v_0^* t_0^*}, \quad Sh = \frac{l_0}{v_0 t_0}.$$

Аналогичным образом из второго, третьего и четвертого равенств (2.268) получаем

$$Fr^* = Fr, \quad Eu^* = Eu, \quad Re^* = Re,$$

где $Fr = v_0^2 / f_0 l_0$ — число Фруда; $Eu = p_0 / \rho_0 v_0^2$ — число Эйлера; $Re = \rho v_0 l_0 / \mu_0$ — число Рейнольдса.

Равенство этих четырех критериев подобия исчерпывает необходимость подобия явлений для потоков несжимаемой жидкости, у которой не рассматриваются явления теплопроводности, так что исключается из рассмотрения уравнение энергии и уравнение состояния. Если же мы хотим в потоке *несжимаемой жидкости* ($\rho = \text{const}$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$) учесть и тепловые явления, то остаются шестое и седьмое равенства (2.268), причем $e = c_p T$, а два последних уравнения в системе (2.267) и соответственно два последних соотношения в (2.268) следует отбросить. Таким образом, остается шесть независимых критериев подобия (см. основную систему уравнений для несжимаемых сред). Тогда из пятого и третьего условий (2.268) получаем $a_\lambda^2 / a_e^2 = 1$, а из седьмого имеем $a_\lambda a_T / a_\mu a_e = 1$. В этом случае имеем два дополнительных критерия

$$\dot{P}_6^* = \dot{P}_6, \quad Pr^* = Pr,$$

где $\dot{P}_6 = v_0^2 / c_p^0 T_0$; $Pr = c_p \mu / \lambda$ — число Прандтля.

В случае политропного идеального газа получаем из пятого и восьмого условий (2.268) следующий критерий подобия

$$M^* = M \quad (\text{в дополнение } K^* = K),$$

где $M = v_0 (\kappa p_0 / \rho_0)^{-1/2} = v_0 / a_0$ — число Маха¹, представляющее отно-

¹ *Мах (Mach) Эрнст* (1838–1916) — австрийский физик и философ. Окончил Венский университет (1860 г.). Работал в университетах Граца, Праги и Вены. Труды по механике, газовой динамике, акустике. Получил фотографии ударных волн у снаряда, летящего со сверхзвуковой скоростью; установил зависимость характеристик газового потока от отношения скорости к скорости звука (числа Маха). Отрицал атомистическое учение и кинетическую теорию газов. Как философ был субъективным идеалистом.

шение масштаба скорости движения к масштабу скорости распространения звуковых волн (a_0). Кроме того, в этом случае число Эйлера равно $1/\kappa M^2$, так что остается вновь шесть независимых критериев подобия.

Итак, в случае движения политропного вязкого газа необходимым условием подобия двух движений является равенство критериев подобия

$$\text{Sh}^* = \text{Sh}, \quad \text{Fr}^* = \text{Fr}, \quad \text{Re}^* = \text{Re}, \quad M^* = M, \quad \text{Pr}^* = \text{Pr}, \quad \kappa^* = \kappa.$$

а для несжимаемой вязкой и теплопроводной жидкости —

$$\text{Sh}^* = \text{Sh}, \quad \text{Fr}^* = \text{Fr}, \quad \text{Re}^* = \text{Re}, \quad \text{Eu}^* = \text{Eu}, \quad \text{Pr}^* = \text{Pr}, \quad \overset{\circ}{\Pi}_6^* = \overset{\circ}{\Pi}_6.$$

Эти группы безразмерных величин и составляют *критерии подобия гидроаэромеханических явлений*.

При доказательстве *достаточности* условий теоремы следует дополнительно предположить единственность решения системы (2.263).

Для доказательства достаточности перейдем в системах (2.263) и (2.264) к безразмерным (штрихованным) переменным по формулам:

$$x'_k = \frac{x_k}{l_0} = \frac{x_k^*}{l_0^*}, \quad t' = \frac{t}{t_0} = \frac{t^*}{t_0^*}, \quad (2.270)$$

$$v'_k = \frac{v_k}{v_0}, \quad v_k^* = \frac{v_k^*}{v_0^*}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \rho'^* = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \quad \dots \quad (2.271)$$

Тогда из этих систем, например для политропного газа ($e = c_v T$), получаем:

$$\text{Sh} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_k} (\rho' v'_k) = 0,$$

$$\text{Sh} \rho' \frac{\partial v'_i}{\partial t'} + \rho' v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x'_k} = \frac{1}{\text{Fr}} \rho' f'_i - \text{Eu} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(2\mu' \overset{\circ}{v}_{ik} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \rho' c'_v \frac{\partial T'}{dt'} + \rho' c'_v v'_k \frac{\partial T'}{\partial x'_k} = & -(\kappa - 1) p' \text{div} \mathbf{v}' + \\ & + \kappa(\kappa - 1) M^2 \left(2\mu' \overset{\circ}{v}_{ik} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_k} \right) + \frac{\kappa}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'_k} \right), \end{aligned}$$

$$\text{Eu } M^2 \kappa p' = \rho' R' T', \quad R' = c'_v (\kappa - 1). \quad (2.272)$$

$$\text{Sh}^* \frac{\partial \rho^{**}}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_k} (\rho^{**} v'_k) = 0,$$

$$\text{Sh}^* \rho^{**} \frac{\partial v'_i}{\partial t'} + \rho^{**} v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x'_k} = \frac{1}{\text{Fr}^*} \rho^{**} f_i^{**} - \text{Eu}^* \frac{\partial p^{**}}{\partial x'_i} + \frac{1}{\text{Re}^*} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(2\mu^{**} \overset{\circ}{v}_{ik} \right),$$

$$\text{Sh}^* \rho^{**} c_v^{**} \frac{\partial T^{**}}{\partial t'} + \rho^{**} c_v^{**} v'_k \frac{\partial T^{**}}{\partial x'_k} = -(\kappa^* - 1) p^{**} \text{div } \mathbf{v}^{**} +$$

$$+ \kappa^* (\kappa^* - 1) M^{*2} \left(2\mu^{**} \overset{\circ}{v}_{ik} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_k} \right) + \frac{\kappa^*}{\text{Pr}^*} \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\lambda^{**} \frac{\partial T^{**}}{\partial x'_k} \right),$$

$$\text{Eu}^* M^{*2} \kappa^* p^{**} = \rho^{**} R^{**} T^{**}, \quad R^{**} = c_v^{**} (\kappa^* - 1). \quad (2.273)$$

Пусть теперь в системах (2.272) и (2.273) совпадают критерии подобия, так что для политропного газа ($\text{Eu}^{-1} = \kappa M^2$) имеем

$$\text{Sh}^* = \text{Sh}, \quad \text{Fr}^* = \text{Fr}, \quad \text{Re}^* = \text{Re}, \quad M^* = M, \quad \text{Pr}^* = \text{Pr}, \quad \kappa^* = \kappa.$$

Но тогда сами системы (2.272) и (2.273) также совпадают, так что, если решение единственно, то

$$\rho' = \rho^{**}, \quad v'_k = v'_k, \quad p' = p^{**}, \quad \dots$$

Переходя от безразмерных к размерным переменным, имеем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \quad \frac{v_k}{v_0} = \frac{v_k^*}{v_0^*}, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{p^*}{p_0^*}, \quad \dots$$

Это означает, в силу определения (2.262), что оба явления физически подобны, поскольку пространственно-временные точки, в которых все характеристики одинаковы, согласно (2.270) выбраны сходственными.

Теорема доказана.

Из основных критериев подобия течений вязкой теплопроводной жидкости можно составить другие. Так, например, в теории теплопередачи часто пользуются числом

Пекле (Re) (по имени французского физика Пекле Ж. К. (J. C. Péclet, 1793–1857 гг.))

$$Re = Re \cdot Pr = \frac{v_0 l_0}{\nu_0} \frac{c_p \mu_0}{\lambda_0} = \frac{v_0 l_0}{\nu_0} \frac{\nu_0}{\chi_0} = \frac{v_0 l_0}{\chi_0},$$

где $\chi_0 = \lambda_0 / \rho_0 c_p$ — так называемый коэффициент температуропроводности, причем $[\chi_0] = [\nu]$.

При изучении тепловой конвекции в поле сил тяжести удобно пользоваться безразмерным параметром — *числом Грасгофа*¹ (Gr), равным

$$Gr = \frac{g \beta l_0 (\delta T)_0}{v_0^2},$$

где g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения газа, причем $[\beta] = T^{-1}$, $(\delta T)_0$ — характерная разность температур.

Теплопередачу между твердыми телами и газами (жидкостями) изучают, нередко используя *число Нуссельта* (Nu) по имени немецкого физика В. Нуссельта (W. Nußelt, 1882–1957 гг.):

$$Nu = \frac{\alpha l_0}{\lambda},$$

где $\alpha = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_0 / (\delta T)_0$ — коэффициент теплопередачи, равный отношению величины характерного потока тепла к характерной разности температур.

Подобие явлений в теории упругости

Ход доказательства достаточности основной теоремы о физическом подобии в гидромеханике подсказывает простой способ выявления критериев подобия в уравнениях, описывающих физические явления.

Соотношение (2.262) означает, что *два подобных явления в сходственных пространственно-временных точках отличаются между собой только масштабами величин, описывающих явления.*

Следовательно, если в дифференциальных уравнениях, граничных и начальных условиях, а также в других функциональных соотношениях, характеризующих физически подобные явления, перейти к безразмерным переменным *со своими масштабами*, то все эти уравнения и соотношения должны быть *одинаковыми* для обоих сравниваемых по-

¹Грасгоф (Grasgof) Франц (1826–1893) — немецкий механик и машиностроитель. Работы в области прикладной механики, гидравлики, теплотехники, кинематики механизмов.

добных явлений. А значит, и коэффициенты, получающиеся в безразмерных уравнениях и соотношениях, также должны быть равны. Эти безразмерные коэффициенты и составляют критерии подобия.

Проиллюстрируем этот прием на примере уравнений движения упругого тела:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \mathbf{f} + \frac{E}{2(1+m)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+m)(1-2m)} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Переходя в этом уравнении к безразмерным переменным по формулам:

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \mathbf{f}' = \frac{\mathbf{f}}{f}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{l_0},$$

$$E' = \frac{E}{E_0}, \quad x'_k = \frac{x_k}{l_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0},$$

получим

$$\dot{\Pi}_1 \rho' \frac{\partial^2 \mathbf{u}'}{\partial t'^2} = \rho' \mathbf{f}' + \dot{\Pi}_2 \frac{E'}{2(1+m)} \Delta' \mathbf{u}' + \dot{\Pi}_2 \frac{E'}{2(1+m)(1-2m)} \nabla' \operatorname{div}' \mathbf{u}',$$

где безразмерные коэффициенты имеют вид

$$\dot{\Pi}_1 = \frac{l_0}{f_0 t_0^2}, \quad \dot{\Pi}_2 = \frac{E_0}{\rho_0 f_0 l_0}, \quad \dot{\Pi}_3 = m.$$

Таким образом, для подобия двух явлений, связанных с движением в упругих телах, необходимо и достаточно равенство трех критериев подобия:

$$\dot{\Pi}_1 = \dot{\Pi}_1^*, \quad \dot{\Pi}_2 = \dot{\Pi}_2^*, \quad \dot{\Pi}_3 = \dot{\Pi}_3^*.$$

Следует отметить, что моделирование движения путем различия f_0 в земных условиях возможно, например, при помощи центробежных сил. В случае равновесия упругого тела моделирование возможно по критериям $\dot{\Pi}_2$ и $\dot{\Pi}_3$, а в случае одинакового материала — только при помощи изменения размеров l_0 .

Физический смысл критериев подобия

Построение критериев подобия из конкретных уравнений, описывающих физическое явление, позволяет прояснить ряд вопросов, например,

каковы физические характеристики потоков, в которых числа Рейнольдса Re , Струхала Sh принимают очень большие или очень малые значения, и др.

На эти и подобные вопросы можно ответить, если обратиться к рассматриваемой системе уравнений движения и определить физическое содержание соотношений между различными их слагаемыми.

Первое слагаемое в уравнении количества движения из системы (2.263) определяет силу инерции единицы объема среды при неустановившемся движении и порядок ее величины равен $\rho_0 v_0 / t_0$; второе слагаемое — сила инерции единицы объема при установившемся движении — имеет порядок величины $\rho_0 v_0^2 / l_0$; третье слагаемое — массовые силы — имеют порядок $\rho_0 f_0$; четвертое — силы давления в единице объема — имеет порядок p_0 / l_0 , и, наконец, пятое — силы трения — по порядку равны $\mu_0 v_0 / l_0^2$.

Если порядки всех сил сравнить с порядком сил инерции установившегося движения, то получим следующие отношения сил в единице объема

$$\frac{\text{силы инерции установившегося движения}}{\text{силы инерции неустановившегося движения}} = \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} : \frac{\rho_0 v_0}{t_0} = \frac{v_0 t_0}{l_0} = Sh^{-1},$$

$$\frac{\text{силы инерции установившегося движения}}{\text{массовые силы}} = \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} : \rho_0 f_0 = \frac{v_0^2}{f_0 l_0} = Fr,$$

$$\frac{\text{силы инерции установившегося движения}}{\text{силы давления}} = \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} : \frac{p_0}{l_0} = \frac{\rho_0 v_0^2}{p_0} = Eu^{-1},$$

$$\frac{\text{силы инерции установившегося движения}}{\text{силы трения}} = \frac{\rho_0 v_0^2}{l_0} : \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2} = \frac{\rho_0 v_0 l_0}{\mu_0} = Re.$$

Итак, движение жидкости (газа) при больших, скажем, числах Re — это такое движение, когда инерционные силы при установившемся движении значительно больше сил трения. Течения среды при $Re \ll 1$ — это течения, когда силы трения значительно больше инерционных сил; это могут быть и течения очень вязких жидкостей, и движение капелек

тумана (малые l_0) в воздухе. Совершенно аналогичным образом можно говорить о движениях при больших (малых) числах Fr , Eu , Sh .

При рассмотрении соотношений между слагаемыми в уравнении энергии из (2.263) становится ясным, что, например, течения с очень большими числами Fr — это потоки, в которых тепло от процессов трения значительно больше тепла, сообщаемого в результате теплопроводности среды.

Аналогичным образом выясняется физический смысл критериев подобия в теории упругости.

Задачи с решениями

Задача 17.1. *Считая движение волн на свободной поверхности несжимаемой жидкости в поле сил тяжести потенциальным ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$), показать, что угол при вершине гребня двумерной волны равен 120° .*

Решение. Потенциал φ волнового движения тяжелой несжимаемой жидкости в силу $\text{div } \mathbf{v} = 0$ удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в полярных координатах (r, θ) с началом в вершине гребня волны (рис. 90) имеет вид

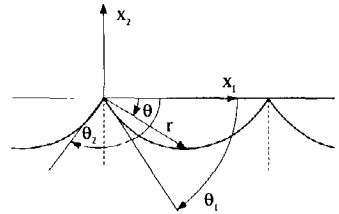


Рис. 90

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0. \quad (1)$$

С другой стороны, поскольку $\varphi = \varphi(r, \theta, g)$, где g — ускорение силы тяжести, на основании формулы размерности имеем

$$\varphi = r^{l_1} g^{l_2} f(\theta),$$

где $f(\theta)$ — безразмерная функция. Поскольку $[\varphi] = L^2 t^{-1}$, то l_1 и l_2 определяем из равенства

$$L^2 t^{-1} = L^{l_1} L^{l_2} t^{-2l_2}.$$

Отсюда $l_1 = 3/2$, $l_2 = 1/2$, и поэтому решение уравнения (1) можно искать в виде

$$\varphi = r^{3/2} \sqrt{g} f(\theta).$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), получаем $f'' + \frac{9}{4} f = 0$ и, следовательно, $f = c_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + c_2)$. Нормальная к поверхности жидкости компонента скорости вблизи вершины гребня равна

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{3}{2} c_1 \sqrt{gr} \cos \frac{3}{2}(\theta + c_2).$$

Но на свободной поверхности у вершины, определенной углами θ_1 и θ_2 (см. рис. 90), $v_\theta = 0$, так что

$$\frac{3}{2}(\theta_1 + c_2) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{2}(\theta_2 + c_2) = \frac{3\pi}{2}.$$

Отсюда получаем угол при вершине волн: $\theta_2 - \theta_1 = \frac{2}{3}\pi$.

В силу симметрии задачи имеем $\theta_2 = \pi - \theta_1$, так что $c_2 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{5}{6}\pi$. Вторую постоянную c_1 можно определить, если использовать интеграл уравнений стационарного движения

$$gx_2 + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{p - p_0}{\rho} = 0$$

и записать его для точек поверхности, где

$$p = p_0, \quad x_2 = -r \sin \theta, \quad v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{3}{2}\sqrt{gr}c_1 \sin \frac{3}{2}(\theta + c_2), \quad v_\theta = 0.$$

Тогда, например, при $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{6}$ получаем

$$gr \sin \theta_1 = c_1^2 \frac{9gr}{4} \sin^2 \frac{3}{2}\left(\theta_1 + \frac{\pi}{6}\right) \text{ и, следовательно, } c_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Задача 17.2. Найти зависимость расхода вязкой несжимаемой жидкости через цилиндрическую трубу с площадью поперечного сечения S от перепада давления на единицу длины трубы ($\delta p \equiv \frac{P_2 - P_1}{L}$), средней скорости движения жидкости v_{cp} по трубе, плотности ρ , вязкости μ и линейного размера R поперечного сечения.

Решение. Отыскиваем зависимость

$$Q = f(\delta p, \rho, \mu, S, R, v_{cp}).$$

В качестве основных единиц измерения выбираем δp , μ , R . Тогда согласно Π -теореме имеем

$$Q = (\delta p)^{h_1} (\mu)^{h_2} R^{h_3} F(1, \Pi_1, 1, \Pi_2, 1, \Pi_3),$$

где $\Pi_1 = \frac{\rho}{(\delta p)^{h_1} \mu^{h_2} R^{h_3}}$, $\Pi_2 = \frac{S}{(\delta p)^{h_2} \mu^{h_2} R^{h_2}}$, $\Pi_3 = \frac{v_{cp}}{(\delta p)^{h_3} \mu^{h_3} R^{h_3}}$ — безразмерные

параметры. Сравнивая размерности, получаем

$$Q = \frac{(\delta p)R^4}{\mu} F\left(1, \frac{\rho R^3(\delta p)}{\mu^2}, 1, \frac{S}{R^2}, 1, \frac{v_{cp}\mu}{(\delta p)R^2}\right).$$

В силу того, что по определению $v_{cp} = Q/S$, то между критериями, как нетрудно видеть, существует зависимость $\Pi_2\Pi_3 = F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$. Полученная формула для Q составляет суть закона Пуазейля, установленного экспериментально Гагеном в 1839 г. Функция F зависит от формы поперечного сечения трубы, а для круглой трубы при ламинарном движении теория дает $F = \pi/8$.

Задача 17.3. Пусть твердый конус с углом при вершине α равномерно со скоростью v погружается под углом β в несжимаемую жидкость плотностью ρ , занимающую полупространство $z < 0$. Определить силу сопротивления жидкости погружению конуса в зависимости от величины смоченной поверхности конуса.

Решение. Поскольку на поверхности жидкости давление равно $p_0 = \text{const}$, то p_0 не может повлиять на силу сопротивления внедрению конуса. Определяющими параметрами являются

$$\rho, t, v, \alpha, \beta.$$

Сила сопротивления определяется функцией

$$P = f(\rho, t, v, \alpha, \beta).$$

Выбирая в качестве основных величин ρ , v и t , согласно П-теореме получаем

$$\rho^h t^k v^l f(1, 1, 1, \alpha, \beta) = \rho v^4 t^2 f(1, 1, 1, \alpha, \beta).$$

Аналогично для величины смоченной поверхности получим

$$S = v^2 t^2 f_1(1, 1, 1, \alpha, \beta).$$

Таким образом,

$$P = \rho v^2 S f_2(1, 1, 1, \alpha, \beta).$$

Функции f, f_1, f_2 могут быть получены из эксперимента.

Задача 17.4. Найти потенциал двумерного потока безвихревого обтекания несжимаемой невязкой жидкостью клина с раствором угла, равным 2α (рис. 91).

Решение. Поскольку $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ и $\text{div } \mathbf{v} = 0$, то потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа (см. (1) задачи 17.1).

Граничные условия следуют из обращения в нуль компоненты скорости $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ на линии тока $O'O$, которая, подходя к критической точке O , раздваивается на стенки клина, т. е.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi-\alpha} = 0. \quad (1)$$

Отыскивая решение задачи в виде $\varphi = \varphi(\alpha, v_0, r, \theta)$, согласно формуле размерности имеем $\varphi = v_0^h r^k \Phi(\alpha, \theta)$, где Φ — безразмерная функция.

Определяя l_1 и l_2 , получаем

$$\varphi = v_0 r \Phi(\alpha, \theta).$$

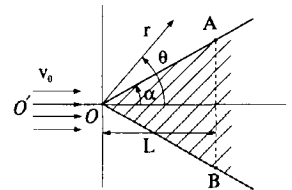


Рис. 91

Подставляя это выражение в уравнение Лапласа (см. уравнение (1) задачи 17.1) получаем $\Phi = C \cos(\theta + \gamma)$, где C — постоянная.

Однако решение $\varphi = C v_0 r \cos(\theta + \gamma)$ не удовлетворяет граничным условиям (1) как бы ни выбрать постоянные C и γ .

Решение задачи можно получить как предельный случай задачи обтекания клина OAB конечных размеров, в которой появляется новая размерная характеристика задачи L (см. рис. 91). В этом случае, используя Π -теорему для отыскания зависимости $\varphi = \varphi(\alpha, v_0, r, \theta, L)$, получаем $\varphi = v_0 r f\left(\alpha, \theta, \frac{r}{L}\right) = v_0 r f(\alpha, \theta, \xi)$, где $\xi = r/L$ — безразмерный параметр.

Предположим существование такого $a > 0$, что при малых $\xi = a/L$, т. е. в окрестности вершины клина (или при увеличении размера L клина), предельное значение φ может быть представлено в виде

$$\varphi = v_0 r \xi^a f_1(\alpha, \theta) = v_0 L \xi^{a+1} f_1(\alpha, \theta) = v_0 L^{-a} r^{a+1} f_1(\alpha, \theta). \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение Лапласа для φ , получаем

$$\frac{d^2 f_1}{d\theta^2} + (a+1)^2 f_1 = 0.$$

Отсюда

$$\varphi = C r^{1+a} \cos((a+1)\theta + \gamma).$$

Требую согласно (1): $\sin((a+1)\theta + \gamma) = 0$ при $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi$, имеем $\sin((a+1)(\pi - \alpha)) = 0$,

$$1 + a = \frac{k\pi}{\pi - \alpha}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Но поскольку $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $a \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, то получаем единственное значение для a (при $k = 1$), а именно

$$a = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}.$$

Постоянная γ в этом решении остается неопределенной ($\gamma = k\pi$).

Упражнения

1. Найти сопротивление P движению корабля по вязкой несжимаемой жидкости (μ — вязкость, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести) с постоянной скоростью v , имеющего смоченную поверхность S и водоизмещение D (размерность $[D] = L^3$).

2. При установившемся обтекании крыла самолета может наступить критический режим полета, характеризуемый скоростью $U_{кр}$, при котором в результате возрастающих амплитуд колебаний наступает разрушение упругой конструкции (явление флаттера), характеризуемой модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона m . Пусть M — мас-

са крыла, участвующего в колебаниях, l — характерный размер крыла, ρ — плотность воздуха (вязкостью пренебрегаем). Показать, что имеет место зависимость

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} f\left(m, \frac{M}{\rho l^3}\right),$$

где f — безразмерная функция.

3. В упругое полупространство $z \leq 0$ с силой F , перпендикулярной плоскости $z = 0$, вдавливается круговой конус с углом при вершине α и осью, параллельной направлению силы F . Определить глубину погружения конуса, если известны модуль Юнга E и коэффициент Пуассона m упругого материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Теория катастроф. — М.: Наука, 1990.
2. Базаров И. П. Термодинамика. — М.: Высш. шк., 1991.
3. Баренблатт Г. К. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеиздат, 1978.
4. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. — М.: Наука, 1983.
5. Блум Э. Я., Майоров М. И., Цеберс А. О. Магнитные жидкости. — Рига: Зинатне, 1990.
6. Борисенко А. И. Аэромеханика: Общие законы. — Х.: Изд-во ХГУ, 1956.
7. Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — 6-е изд. — К.: Вища шк., 1986.
8. Борисов И. Д., Лукина В. А., Тарапов И. Е. Вариационный принцип в гидродинамике поляризующихся сред // Магнит. гидродинамика. — 1984. — № 4.
9. Бриджмен Р. В. Новейшие работы в области высоких давлений: Пер. с англ. — М.: ГИИЛ, 1948.
10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.
11. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. — М.: Наука, 1970.
12. Гогосов В. В., Васильева Н. П., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А. Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследования разрывных решений со скачком магнитной проницаемости / Ин-т механики МГУ. — М.: Изд-во МГУ, 1975. Отчет.
13. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
14. Гроот С. Термодинамика необратимых процессов: Пер. с англ. — М.: ГИТТЛ, 1956.
15. Денбит К. Термодинамика стационарных необратимых процессов: Пер. с англ. — М., 1954.
16. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
17. Жермен П. Курс механики сплошных сред. — М.: Высш. шк., 1983.
18. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. — М.: Наука, 1973.
19. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1965.
20. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред: Пер. с нем. — М., 1954.
21. Илюкович Б. М. Введение в теорию пластичности. — К.: Вища шк., 1983.
22. Ильюшин А. А. Пластичность. — М., 1963.
23. Качанов Л. М. Механика пластических сред. — М.: Гостехиздат, 1948.
24. Кирхгоф Г. Механика: Лекции по мат. физике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962.
25. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967.
26. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей: Пер. с англ. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
27. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М., 1951.

28. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1, 2.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1963.
29. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики.— М.: Высш. шк., 1970.
30. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика.— М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962.
31. *Курант Р.* Уравнения с частными производными: Пер. с англ.— М.: Мир, 1964.
32. *Ламб Г.* Гидродинамика.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
33. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: ГИФМЛ, 1961.
34. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
35. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т.7. Теория упругости.— М.: Наука, 1973.
36. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т.10. Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
37. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т.8. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
38. *Левтов В. А., Регирер С. А., Шадрин Н. Х.* Реология крови.— М.: Медицина, 1982.
39. *Леонтович М. А.* Введение в термодинамику.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
40. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1987.
41. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.— М.: ГИТТЛ, 1952.
42. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.— М.: Гостехиздат, 1956.
43. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред.— М.: Мир, 1974.
44. *Мили-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика: Пер. с англ.— М.: Мир, 1964.
45. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М.: ГИТТЛ, 1957.
46. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
47. *Овсянников Л. Г.* Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
48. *Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справ. пособие.— К.: Наук. думка, 1981.
49. *Polovin R. V. and Demutskii.* Fundamentals of Magnetohydrodynamics. Consultants Bureau.— New York; London, 1990.
50. *Прагер В.* Введение в механику сплошных сред: Пер. с нем.— М.: НИЛ, 1963.
51. *Пригожин И.* От существующего к возникающему: Пер. с англ.— М.: Наука, 1985.
52. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1988.
53. *Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н.* Газовая динамика.— М.: Высш. шк., 1965.
54. *Регирер С. А.* Биомеханика: известные и малоизвестные постановки задач // Изв. АН. Механика жидкостей и газа.— 1992.— № 5.
55. *Регирер С. А.* Лекции по биологической механике.— М.: Изд-во МГУ, 1980.
56. *Рейнер М.* Реология: Пер. с англ.— М.: Наука, 1965.
57. *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика: Пер. с англ.— М.: Мир, 1989.

58. Роуч П. Вычислительная гидродинамика: Пер. с англ.— М.: Мир, 1980.
59. Салтанов Н. В. Аналитическая гидромеханика.— К.: Наук. думка, 1984.
60. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2.— М.: Наука, 1983.
61. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: ГИТТЛ, 1957.
62. Селезов И. Т., Корсунский С. В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах.— К.: Наук. думка, 1991.
63. Селиванов В. В., Зарубин В. С., Ионов В. Н. Аналитические методы механики сплошной среды.— М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э.Баумана, 1994.
64. Seliger R. L., Whitham G. B. Variational principles in continuum mechanics // Proc. Roy. Soc. Ser. A.— 1968.— Vol. 305.— № 1480.
65. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости: Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
66. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4, Ч. 2.— М.: Наука, 1981.
67. Сокольников И. С. Тензорный анализ: Пер. с англ. — М.: Наука, 1971.
68. Сонин А. С. Лекции о жидких кристаллах.— М.: Изд-во МГУ, 1979.
69. Соу С. Гидродинамика многофазных систем: Пер. с англ. — М.: Мир, 1971.
70. Такетоми С., Тикадзуми С. Магнитные жидкости: Пер. с англ. — М.: Мир, 1993.
71. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред // Магнит. гидродинамика.— 1972.— № 1.
72. Тарапов И. Е. Вариационный принцип изотропно намагничивающейся среды // Приклад. математика и механика.— 1984.— Т. 48.
73. Тарг С. М. Основные задачи ламинарных течений.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
74. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.
75. Ферми Э. Термодинамика: Пер. с англ. — Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1973.
76. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.
77. Чандрасекхар С. Жидкие кристаллы: Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.
78. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике: Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
79. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики: Пер. с англ.— М.: Мир, 1967.
80. Шехтер Р. С. Вариационный метод в инженерных расчетах.— М.: Мир, 1971.
81. Теория пластичности: Сб. ст.: Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
82. Современные проблемы биомеханики.— Рига: Зинатне, 1983 — 1985. Вып. 1, 2.
83. Механика биологических сплошных сред.— М.: Изд-во МГУ, 1986.
84. Механика гранулированных сред: Сб. ст.— М.: Мир, 1985.
85. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы: Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.
86. Прикладная гидромеханика: Сб. науч. тр.— К.: Наук. думка, 1989.
87. Вариационные принципы механики: Сб. ст. / Под ред. Л. С. Полака.— М.: ГИФМЛ, 1959.
88. Механика сплошных сред в задачах / Под ред. М. Э. Эглит.— Т. 1, 2. — М.: Моск. лицей, 1996.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Авогадро А. 277
Альманси 66
Альфвен Х. 29
Ампер А. 143
- Бачинский А. И. 369
Бельтрами Э. 81
Био Ж. 142
Больцман Л. 20, 265
Бубнов И. Г. 452
- Ван-дер Ваальс Я. 278
- Галеркин Б. Г. 452
Галилей Г. 16
Гамильтон У. 359
Гаусс К. 95
Гельмгольц Г. 109
Герман В. Л. 387
Гиббс Дж. 285
Грасгоф Ф. 490
Грин Дж. 66, 96
Громека И. С. 126
Гук Р. 384
- Д'Аламбер Ж. 439
Дирак Л. 218
Дирихле Л. 120
- Зеебек Т. 290
- Карно Н. 271
Кастильяно К. 448
Кельвин (Томсон У.) 210
Кирхгоф Г. 24
Клапейрон Б. 277
Клаузиус Р. 264
Клебш Р. 350
Кориолис Г. 310
- Кортевег Д. 30
Коши О. 242
Кристоффель Э. 62, 79
Кэли А. 359
- Лагранж Ж. 38
Лайтхилл Дж. 34
Ламб Г. 313
Ламэ Г. 385
Лаплас П. 117
Леви-Чивита Т. 56
Леонардо да Винчи 24
Лин 456
Лойцянский Л. Г. 335
Лоренц Х. 261
Ляпунов А. М. 17, 24
- Максвелл Дж. К. 21
Мах Э. 487
Менделеев Д. И. 278
Мещерский И. В. 338
Мизес Р. 392
- Навье Л. 361
Нейман К. 120
Нуссельт В. 490
Ньютон И. 24
- Ом Г. 287
Онсагер Л. 286
Остроградский М. В. 95
- Пекле Ж. 490
Пельтье Ж. 290
Планк М. 269
Пойнтинг Дж. 306
Прандтль Л. 370
Пуассон С. 108
- Рейнольдс О. 381
Риман Б. 79
Ритц В. 439
Риччи Г. 82
- Савар Ф. 142
Сегнер Я. 352
Седов Л. И. 22, 479
Сен-Венан А. 78
Стокс Дж. 95
Струхаль В. 486
- Тейлор Дж. 479
- Умов Н. А. 306
- Фарадей М. 28
Ферма П. 439
Ферми Э. 267
Френкель Я. И. 369
Фридман А. А. 226
Фурье Ж. 287
- Хевисайд О. 219
Хеллинггер Э. 446
Херивел Дж. 456
- Шеннон К. 270
- Эйлер Л. 44
- Юнг Т. 387

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автомодельное решение 475

Баланса уравнение 319

Баротропность 375

Биомеханика 32

Больцмана

— постоянная 21

— уравнение кинетическое 20

— формула 269, 290

Вектор плотности потока тепла 299

Вектор Умова — Пойнтинга 306

Векторный потенциал 107

Вероятность термодинамического
состояния системы 268

Взрыв сильный 478

Вихревая

— нить 140, 479

— пелена 144, 166

— трубка 109

Вихревое кольцо 141, 157

Вихрей движение 150

Вихрь

— изолированный 143

— круговой

цилиндрический 158

— поля скорости 93

— присоединенный 174

— сферический (Хилла) 163

Водослив 476

Волна

— ударная 14, 427

— упругая 167

Время релаксации 255

Вязкость

— кинематическая 370

— объемная (вторая) 360, 394

— поперечная 394

— сдвиговая (первая) 360, 394

Газ 7

— вязкий 360

— идеальный (совершенный) 277

— невязкий 370

— уравнение состояния 279

Гармонические функции 117, 120

Гармоническое поле 117

Гельмгольциан векторного поля 230

Гипотеза сплошности 13

Граничные условия

— для напряжений 423

— для скорости 420

— для смещений 420

— для температуры 424

— для электромагнитного поля 343

— на поверхности разрыва 427

Давление

— гидростатическое
(равновесное) 360

— динамическое (неравновесное) 364

— парообразования 363

Движение

— вихревое 109

— деформационное 55, 186

— изолированных особенностей 146

— квазитвердое 55, 59, 184

— ламинарное 17, 37

— потенциальное 106

— стационарное

(установившееся) 47, 91

— турбулентное 17, 37

Девиатор

— тензора скоростей

деформаций 192, 360

— тензора напряжений 243

Деформация 55, 61, 195

Дивергентная форма уравнений
движения 304

- Диполь(и)
 — вихревой 168
 — изолированный 136
 — плоский 140
 — распределенные по поверхности 138
- Диполей движение 146
- Диссипативная функция 349, 365
- Диссипация энергии 271, 463
- Диффузия вихревой нити 479
- Жидкость 7, 275, 279
 — вязкая 360
 — идеальная (невязкая) 371
 — неньютоновская 359
 — несжимаемая 374
 — Рейнера — Ривлина 394
 — сжимаемая 405
 — с памятью 399
 — упруговязкая 400
- Задача краевая
 — внешняя 418
 — внутренняя 418
- Закон
 — Гаука 384
 — Клапейрона — Менделеева 277
 — Навье — Стокса 361
- Закон изменения
 — кинетической энергии 328
 — количества движения 298
 — массы 217, 336
 — момента количества движения 298
 — полной энергии 299, 327
 — энтропии 324
- Изотропность
 — пространства 356
 — среды 356
- Инварианты тензора
 — деформаций 76
 — напряжений 244
 — скоростей деформаций 358
- Интенсивность
 — вихревой трубки 109
 — источников массы, импульса и энергии 336
 — касательных напряжений 244
 — массовых сил 237
 — трубки тока 93
- Источник(и)
 — изолированный 132, 136
 — плоский 136
 — распределенные по поверхности 134
- Источников движение 146
- Кавитация 26
- Кинетические коэффициенты 288
- Кинетическое уравнение 20
- Количество движения среды 298
- Континуум 8
- Критерии
 — пластичности 392
 — подобия 488
- Кристоффеля символы 62
- Лагранжева система координат 39, 63
- Лагранжево описание
 — движения 38, 49
 — деформации 63
- Лагранжевы переменные 39
- Лагранжев тензор конечных деформаций (Грина) 66
- Линейная термодинамика необратимых процессов 286
- Линейность
 — динамическая и кинематическая 383
- Линия отмеченных частиц 91
- Линия тока 36, 89
- Магнитострикция 284
- Магнитная гидродинамика 28, 344
- Макродифференциал 10

- Макропризнак 19
- Материальная
- линия 40
 - поверхность 40
 - производная 43, 46
 - система координат 40
 - точка 41
- Материальный
- объект 40
 - объем 40
- Метод Лагранжа 38
- Метод Эйлера 44
- Механика сплошной среды
- задачи 22, 27
 - предмет 7, 17
 - основные гипотезы 13
- Микропризнак 19
- Модель сплошной среды 8
- Моделирование явлений 482
- Модуль
- всестороннего сжатия 384
 - сдвига 384
 - Юнга 387
- Молекула
- силы молекулярные 7
 - радиус взаимодействия 7, 9, 12
 - длина свободного пробега 10, 12
- Момент
- диполя 136
 - количества движения среды 298
- Напряжений тензор 239
- главные значения 243, 391
 - девiator 243
 - симметрия 302
- Напряжения
- вектор 238
 - главные касательные 243
 - главные нормальные 243
 - касательные 242
 - нормальные 242
 - температурные 386
- Начала термодинамики 262
- Область
- многосвязная 178
 - односвязная 104
- Объема изменение 75
- Однозначность
- потенциала 104
 - функции тока 175
- Определение
- смещений по тензору деформаций 81
 - векторного поля по вихрю и дивергенции 129
- Особенности
- присоединенные 174
- Параметры
- термодинамические 252
 - внешние 253
 - внутренние 254
 - интенсивные 254
 - экстенсивные 254
- Пелена вихревая 144
- Пластически деформируемые среды 389
- Плотность
- массы 10, 19
 - ядерного вещества 9
- Поверхность
- разрыва 425
 - свободная 423
 - тензорная 185
 - тока 92
- Подобие физическое 482
- Подобие явлений
- в гидромеханике 484
 - в теории упругости 490
- Поле векторное
- безвихревое 105
 - гармоническое 117
 - потенциальное 105
 - соленоидальное 107

- Поле скоростей
 — среды 44
 — деформируемой частицы 182
 — однородное 47
- Поле температурное 48
- Поле ускорений 45
- Потенциал
 — векторный 107
 — двойного слоя 118, 139
 — объемный 118
 — простого слоя 118, 135
 — скалярный 104
 — термодинамический 276, 284, 292
 — химический 285
- Поток
 — векторного поля 96
 — тепла 299
 — термодинамический 287
 — энтропии 326
- Предел
 — пропорциональности 389
 — прочности 389
 — текучести 389
 — упругости 389
- Принцип(ы)
 — Галилея 16
 — локального равновесия 272
 — основные термодинамики 262
- Принципы вариационные
 — Д'Аламбера и Гамильтона — Остроградского 439
 — гидромеханики 453
 — теории упругости 446
 — электромагнитного поля в вакууме 464
- Производная
 — конвективная 48
 — локальная 48
 — материальная 43, 46
 — Олдройда 47, 313
 — Яуманна 316
- Производство энтропии 271
- Процесс
 — адиабатический 254
 — естественный 267
 — «запрещенный» 268
 — изобарический 279
 — изохорический 279
 — изэнтропический 375
 — квазистатический 255
 — необратимый 266
 — неравновесный 255
 — обратимый 256
 — равновесный 255
 — реализуемый 267
 — циклический (круговой) 257
- Прямые методы 451
- П-теорема 473
- Пуассона коэффициент 387
- Пьезоэлектрики 283
- Работа
 — обратимая 282
 — как энергообмен 263
 — сил давления 275
 — сил поверхностного натяжения 258
 — термодинамическая 258
 — упругого тела 281
 — сил электромагнитного поля 258, 275
- Равновесие термодинамической системы 254
- Размерная величина
 — основная 470
 — производная 470
- Размерность(и)
 — величины 471
 — формула 471

Разрыв

- контактный 428
- магнитоэлектродинамический 429
- сильный 425
- слабый 425

Релаксация

- время релаксации 401
- среда с релаксацией 356

Реология 355

Свободная энергия 276

Сила(ы) в сплошной среде

- внутренняя 235
- массовая 235
- обобщенная 257
- объемная 235
- поверхностная 237
- термодинамическая 287
- электромагнитная 341

Симметрия

- кинетических коэффициентов 288
- тензора напряжений 302

Синергетика 23

Система координат

- лагранжева (сопутствующая, материальная) 39, 63
- пространственная 36, 64

Система

- термодинамическая 252
- адиабатическая 254
- замкнутая (закрытая) 254
- изолированная 254
- многокомпонентная 254
- однокомпонентная 254
- открытая 336
- равновесная 254
- стационарная 254

Скачок

- уплотнения 428
- энтропии 432

Скорость деформации 55

Скорость изменения физических

- свойств сплошной среды в конечной области 203

Скорость

- объемного расширения 94, 192, 211
- относительного удлинения 187
- угловой деформации 187
- частицы 42, 45

Слой

- двойной 139
- пограничный 372, 423
- простой 135

Смещения вектор 55

Соленоидальное поле 110

Соотношения

- Гиббса 285
- Коши 242
- Максвелла 276
- Онсагера 288
- термодинамическое (взаимности) 277

Состояние системы

- равновесное 254
- стационарное 254
- термодинамически наиболее вероятное 269

Сохраняемость

- векторных линий 225
- интенсивности векторных трубок 209, 227
- линий тока 233
- поля вихря 231
- поля магнитной индукции 232

Сплошность

- среды 8
- гипотеза сплошности 13
- условие сплошности 15, 38, 81, 218

- Среда сплошная 8
- анизотропная 356, 383
 - взаимодействующая с электромагнитным полем 28, 340
 - гипоупругая 393
 - дилатантная 397
 - жесткопластическая 393
 - изотропная 356, 394
 - квазилинейная вязкая 395
 - многофазная 328
 - модель Шведова — Бингама 397
 - неньютоновская 393
 - переменной массы 335
 - пластическая 389
 - псевдопластическая 396
 - степенная 397
 - упругая 382
 - упругопластическая 390
- Статистическое описание 19
- Сток 132
- Структура ударной волны 430
- Твердое тело 7
- Текучесть 389
- Температура 259
- критическая 280
- Температурные напряжения 386
- Тензор
- бесконечно малых деформаций 59
 - вязких напряжений 360
 - конечных деформаций 59
 - Леви-Чивита 56
 - метрический 61
 - напряжений 239
 - плотности потока импульса 306
 - Римана — Кристоффеля 62
 - скоростей деформации 185, 192
- Теорема
- Гельмгольца 182
 - Кельвина — Томсона 120, 122, 210
 - Лагранжа 231, 376
 - Стокса — Гельмгольца 129
 - Фридмана 226
- Теоремы интегральные векторного анализа 95
- Тепло
- необратимое 324
 - обратимое 271
- Теплоемкость
- идеального газа 278
 - несжимаемой жидкости 380
 - системы 274
 - упругого тела 281
- Теплопередача 263
- Теплопроводность 369
- Термодинамика
- линейная неравновесная 286
- Термодинамики
- второе начало 264
 - исходные положения 259
 - «нулевое начало» 260
 - общее начало 260
 - первое начало 263
- Термодинамические
- потенциалы 274, 276
 - потоки 287
 - силы 287
- Термостат 274
- Термоэлектрический эффект 288
- Тока
- линия 36, 89
 - поверхность 92
 - трубка 93
- Точка критическая 36, 90
- Траектория частицы 36, 89
- Угловая деформация 72
- Удлинение относительное 70
- Упругие коэффициенты 383

Уравнение

- баланса 319
- — интегральное 320
- — локальное 321
- — материальное 321
- Ван-дер-Ваальса 278
- динамической возможности движения 382
- индукции 345
- Навье — Стокса 361
- неразрывности 217, 330
- реологическое 355
- Эйлера 374

Уравнение состояния

- воды 281
- газа 277
- калорическое 262, 283
- термическое 262

Уравнения движения сплошной среды

- в лагранжевых переменных 307
- в неинерциальной системе 309
- дивергентная форма 306
- дифференциальные 299
- тип уравнений 405

Уравнения

- Клапейрона 277
- магнитной гидродинамики 345
- Максвелла 342
- электрогидродинамики 346

Ускорение

- конвективное 47
- локальное 47
- частицы 42

Условия

- граничные (краевые) 418
- на поверхности разрыва 425
- начальные 418
- пластичности 390
- прилипания 421
- совместности (Сен-Венана) 78, 197
- сохранения сплошности среды 15, 38

Устойчивость движения 17

Феноменологическое описание 18

Феррогидродинамика 28

Физическая интерпретация

- компонент тензора деформаций 69
- компонент тензора скоростей деформаций 187
- критериев подобия 492
- функции тока 115

Формула(ы)

- Больцмана 269, 290
- Гаусса — Остроградского 95
- Грина 96, 178
- размерности 471
- Стокса 95

Функция(и)

- гармонические 117
- Дирака (δ -функция) 218
- процесса 257
- распределения 19
- состояния 256

Функция тока

- винтового движения 114
- однозначность 116
- осесимметричных потоков 112, 116
- плоских потоков 111, 115
- трехмерного потока 115, 221

Функция Хевисайда 219

Циклическая постоянная 172

Циркуляция векторного поля 96

Частица сплошной среды 10

Число

- Грасгофа 490
- Маха 487
- Нуссельта 490
- Пекле 490
- Прандтля 381, 487
- Рейнольдса 381, 478, 487
- Струхала 478, 486
- Фруда 478, 487
- Эйлера 487

Чисто деформационное движение 59

Эйлерово описание

— движения 44, 49

— деформации 60

Эйлеровы переменные 44

Эйлеров тензор конечных деформаций

(Альманси) 61, 66

Энергообмен 263

Энергия

— внешняя 257

— внутренняя 256

— полная 257

— свободная 276

— упругая 283, 449

Энтальпия 457

Энтропии изменение

— внешнее (обратимое) 271

— внутреннее 271

— в процессах 267

Энтропии производство 287, 326

Энтропия 264

Энтропия совершенного газа 279

Эргодическая гипотеза 260

Эффект

— Зеебека 290

— Кельвина 398, 410

— Пельтье 290

— Пойнтинга 410

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Предмет механики сплошной среды	7
Механическая модель сплошной среды	8
Основные гипотезы механики сплошной среды	13
Методы статистической механики в изучении движения физических тел.	
Связь с механикой сплошной среды	18
Задачи механики сплошной среды	22
Глава 1. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	
§ 1. Основные методы описания механического движения сплошной среды	35
Движение сплошной среды	35
Ламинарное и турбулентное движения	37
Метод Лагранжа	38
Метод Эйлера	44
Связь между методом Лагранжа и методом Эйлера	49
Задачи с решениями	51
Упражнения	53
§ 2. Теория деформаций	55
Тензор Леви-Чивита	56
Тензор бесконечно малых деформаций	57
Тензоры конечных деформаций. Эйлерово и лагранжево описание деформаций	60
Физическая интерпретация компонент тензоров деформаций	69
Изменение объема при деформации	75
Условия совместности	78
Определение вектора смещений по компонентам тензора деформаций	81
Задачи с решениями	85
Упражнения	87
§ 3. Поле скоростей сплошной среды и основные его характеристики	89
Интегральные характеристики поля скоростей	89
Дифференциальные характеристики поля скоростей	93
Интегральные теоремы векторного анализа	95
Задачи с решениями	97
Упражнения	102
§ 4. Основные типы векторных полей и их свойства	104
Безвихревое поле. Скалярный потенциал	104
Соленоидальное поле. Векторный потенциал	107
Поле вихря. Вихревое движение	109
Соленоидальное поле скорости. Функция тока	110

Гармоническое (лапласово) векторное поле. Гармонические функции	117
Задачи с решениями	121
Упражнения	128
5. Определение векторного поля по значению его вихря и дивергенции	129
Теорема Стокса — Гельмгольца	129
Примеры построения векторных полей на основании теоремы Стокса — Гельмгольца	132
Асимптотика на бесконечности поля, восстановленного по дивергенции и вихрю	145
О движении изолированных особенностей в жидкости	146
Задачи с решениями	157
Упражнения	170
6. Безвихревые и соленоидальные поля скорости в неодносвязных областях	171
Циклическое безвихревое поле. Однозначность функции потенциала	171
Присоединенные особенности	174
Циклическое соленоидальное поле. Однозначность функции тока	175
Гармоническое поле. Цикличность и ацикличность	177
О связности области в трехмерном пространстве	178
Формула Грина для многосвязных областей	178
Задачи с решениями	179
Упражнения	181
7. Поле скоростей деформируемой частицы	182
Теорема Гельмгольца	182
Тензор скоростей деформации: главные оси, тензорная поверхность. Деформационная скорость. Скорость изменения объема частицы	185
Задачи с решениями	193
Упражнения	201
8. Скорость изменения физических свойств сплошной среды в конечной пространственной области (объем, поверхность, линия) при ее перемещении	203
Объем	203
Незамкнутая поверхность	206
Замкнутый контур	207
Геометрические и материальные области	208
Теорема Кельвина — Томсона	210
Задачи с решениями	210
Упражнения	216
9. Закон изменения массы. Уравнение неразрывности (сплошности)	217
Задачи с решениями	221
Упражнения	223
10. Сохраняемость векторных линий и интенсивности векторных трубок поля	225
Теоремы А. А. Фридмана	226
Примеры векторных полей, обладающих свойством сохраняемости	230

Интегрирование уравнения helm $A = 0$	232
Задачи с решениями	233
Упражнения	234
Глава 2. ДИНАМИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ	
§ 11. Силы в механике сплошной среды	235
Массовые (объемные) силы	235
Поверхностные силы	237
Тензор напряжений	239
Главные напряжения. Девиатор тензора напряжений	243
Задачи с решениями	245
Упражнения	250
§ 12. Основные положения и законы классической термодинамики	252
Термодинамическая система и термодинамические параметры.	
Параметры внешние, внутренние. Термодинамическое и механическое	
состояния системы. Системы однокомпонентные, изолированные,	
замкнутые, адиабатические, стационарные и равновесные.	
Термодинамический процесс	252
Равновесные (квазистатические) процессы. Обратимые процессы.	
Время релаксации	255
Функция состояния и функция процесса. Внутренняя энергия системы.	
Работа	256
Исходные положения термодинамики. Температура	259
Уравнения равновесного состояния. Простые системы	262
Основные принципы термодинамики. Первое и второе начала	262
Принцип локального равновесия	272
Теплоемкость системы. Термостат	274
Основные термодинамические соотношения для сплошной среды.	
Термодинамические потенциалы	274
Идеальные (совершенные) газы	277
Жидкости	279
Деформируемое твердое тело	281
Многокомпонентная открытая система. Соотношение Гиббса	285
Линейная термодинамика необратимых процессов.	
Термодинамические силы и потоки. Соотношения Онсагера	286
Задачи с решениями	290
Упражнения	296
§ 13. Основные законы движения сплошной среды и система основных	
дифференциальных уравнений движения	297
Закон сохранения массы	297
Закон изменения количества движения	298
Закон изменения момента количества движения	298
Закон изменения полной энергии	299
Дифференциальные уравнения движения	299

Дивергентная форма уравнений	304
Уравнения движения в лагранжевых переменных	307
Уравнения движения сплошной среды в неинерциальной системе координат	309
Производная Олдройда и производная Луманна	313
Уравнения баланса	319
О законе изменения энтропии	324
Закон изменения полной энергии и закон переноса тепла.	
Закон изменения кинетической энергии (закон «живых» сил)	327
Уравнения движения сплошной среды с усложненными свойствами	328
Задачи с решениями	347
Упражнения	353
§ 14. Классификация сплошных сред и их различные модели.	
Замыкание основной системы уравнений движения сплошной среды и ее вид для разных сред	355
1. Класс жидкостей и газов	357
Идеальная среда: невязкие жидкость и газ	371
Несжимаемые жидкость и газ. Баротропные среды	374
Теорема Лагранжа	376
Уравнение динамической возможности движения жидкостей (газов)	381
2. Класс упругих сред	382
3. Класс упругопластических сред	390
4. Класс неьютоновских сред	393
Изотропные неьютоновские среды	394
Квазилинейные вязкие среды	395
Эффект нормальных напряжений	398
Жидкость с памятью. Релаксация	399
Гранулированные среды	403
Жидкие кристаллы	404
О типе основной системы уравнений механики сплошной среды	405
О существовании и единственности решения основной системы уравнений	408
Задачи с решениями	408
Упражнения	417
§ 15. Граничные и начальные условия в механике сплошной среды	418
Начальные условия	418
Краевые (граничные) условия	419
Граничные условия на поверхности разрыва. Ударные волны.	
Контактные разрывы	425
Магнитоэлектродинамические разрывы	429
Скачок энтропии на сильных разрывах	430
Задачи с решениями	432
Упражнения	437

§ 16. Вариационные принципы механики сплошной среды	438
Принцип Д'Аламбера и принцип Гамильтона — Остроградского в механике сплошной среды	439
Эйлерово представление	439
Лагранжево представление	444
Вариационные принципы теории упругости	446
Прямые методы решения задач теории упругости	451
Вариационные принципы гидромеханики	453
Задачи с решениями	461
Упражнения	468
§ 17. Методы теории размерностей и теории подобия явлений в механике сплошной среды	469
Размерные и безразмерные величины. Основные и производные размерные величины	469
Формула размерности	471
П-теорема	473
О значении формулы размерности и П-теоремы для физического эксперимента и теории	475
Физическое подобие и моделирование явлений. Критерии подобия	482
Подобие явлений в гидроаэромеханике	484
Подобие явлений в теории упругости	490
Физический смысл критериев подобия	492
Задачи с решениями	493
Упражнения	496
Список литературы	498
Именной указатель	501
Предметный указатель	502

Научное издание

**Иван Евгеньевич
Тарапов**

**МЕХАНИКА
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

в трех частях

Часть 2

ОБЩИЕ ЗАКОНЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ

Редакторы А. В. Ефименко,

Н.Ф. Пацегон,

С. А. Пославский

Корректор С. А. Щербатая

Компьютерный набор В. И. Легейды, Л. Н. Поповой

Компьютерная верстка А. В. Мостового

Оформление обложки С. М. Нурахметова

Подписано в печать 30.08.2002. Формат 70×100 $\frac{1}{16}$. Вумага офсетная. Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33,54. Уч.-изд. л. 41,6. Тираж 1000. Заказ 105.

ООО «Золотые страницы»
Украина, 61145, Харьков, ул. Космическая, 26. Тел./ факс (0572) 30-32-10, 19-56-65.
Свидетельство сериин ДК № 276 от 12.12.2000.