Е.Н.Погорелов

ФИЗИКА. ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ДИНАМИКУ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСТИТЕТ

ФИЗИКА. ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ДИНАМИКУ

Учебное пособие

Таганрог 2001

УДК 531.011

Составитель Е. Н. Погорелов

Физика. Введение в нелинейную динамику: Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001, 231с.

Предлагаемое пособие представляет собой расширенный конспект лекций по курсу "Физика. Введение в нелинейную динамику", изучаемому студентами 3-го курса специальности 2101 в 5-м семестре. Основная часть пособия посвящена изложению методов аналитической механики, освоение которых является совершенно необходимым для продвижения в такие существенно нелинейные области современной науки, как стохастическая динамика, синергетика и синергетическая теория управления в частности.

Ил. 30. Библиогр.: 35 назв.

Рецензенты: А.А. Лаврентьев, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики ДГТУ.
В.Ф.Сокуров, канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры общей физики ТГПИ.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплину, к изучению которой вы приступаете, можно было бы назвать так: "Основные понятия и методы аналитической механики", поскольку в основе этой дисциплины лежит традиционный курс аналитической механики, читаемый на физических и механико-математических факультетах университетов. Изложение материала также является достаточно традиционным, здесь мы следуем хорошо известным книгам [1,2,3]: вначале рассматриваются нерелятивистские механические системы со связями, для описания эволюции таких систем вводятся обобщенные координаты и формулируются уравнения Лагранжа (второго рода) – уравнения движения в обобщенных координатах. Следующий шаг – переход от так называемых натуральных систем к системам общего типа. Суть этого перехода можно сформулировать так: ньютонов характер систем теряется, а уравнения Лагранжа остаются. Законность такого шага подтверждается по ходу последующего изложения. Далее, таким образом, изучаются произвольные динамические системы, эволюция которых описывается уравнениями Лагранжа – на этом этапе собственно механический аспект отступает на второй план и лагранжевы уравнения рассматриваются как фундаментальные для динамических систем произвольного происхождения. На их основе строится принцип наименьшего действия, канонические уравнения Гамильтона и уравнение Гамильтона – Якоби, причем степень универсальности соответствующих методов динамики, их возможности, а также удобство в практическом плане (т.е. в плане решения конкретных задач) достаточно подробно обсуждаются.

Особенность нашего курса состоит в том, что значительное внимание в нем уделяется применению методов аналитической механики в релятивистской физике. Продвижение в релятивистскую область оказывается весьма поучительным, поскольку при этом в известном смысле требуется изменение логики рассуждений, привлечение таких понятий, как симметрия, инвариантность, трансформационные свойства физических величин и т.д. в качестве стандартного технического набора. У многих студентов, изучающих аналитическую механику, возникает впечатление, что принцип наименьшего действия носит в значительной степени декоративный характер. Установить непосредственную практическую значимость принципа легче всего при работе в релятивистской области. Так, например, оказывается, что наиболее естественный способ вывода уравнений движения релятивистской частицы состоит в конструировании элементарного действия [4].

Универсальность методов аналитической механики физик увидит сразу: уравнения, сформулированные для нерелятивистских объектов, годятся и для релятивистских. Но это еще не все: оказывается, что эти методы являются настолько общими, что они описывают поведение динамических систем любого происхождения: физических, химических, биологических, систем управления и т.д.

В практическом плане важность курса для студентов, изучающих САУ, обусловлена тем, что понятия и методы аналитической механики представляют собой один из разделов языка современной теории управления: попробуйте разобраться в книге [5] и вы в этом убедитесь.

Отметим одну важную деталь. Для того, чтобы понять излагаемый здесь материал хотя бы в основном, необходимо хорошее знание математики. Курс насыщен разнообразной математикой, причем помимо традиционных разделов, таких, как линейная алгебра, дифференциальные уравнения и т.д., здесь используются разделы, не входящие в программу по высшей математике для специальности 2101. Этот новый материал частично изложен в настоящем учебном пособии (как, например, элементы тензорной алгебры), определенная часть нового материала обсуждается на практических занятиях. Однако имеется достаточно большой по объему и важный раздел математики, который студентам желательно посмотреть целиком, а не в эпизодах, как это обычно бывает на практических занятиях из-за дефицита времени Этот раздел называется: "Векторный анализ". Важность его определяется тем обстоятельством, что он представляет собой язык тех наук, которые имеют дело с полями, гидродинамика, электродинамика и т.д. Очень краткое и вполне достаточное для наших целей изложение векторного анализа содержится в методическом пособии [6].

В подготовке настоящего учебного пособия к изданию большую помощь оказали сотрудники кафедры физики Н.Г.Косырева, И.И.Красюк и Ю.А.Минаев, которым автор приносит глубокую благодарность.

§1. Свободные и несвободные механические системы. Связи и их классификация. Классификация систем (по характеру связей)

Наша ближайшая цель состоит в формулировке **уравнений Лагранжа второго рода**, которые мы в дальнейшем будем называть просто **уравнениями Лагранжа.** В разделе "Механика" курса общей физики вы оперировали уравнениями движения в форме Ньютона, с помощью которых, как выяснилось, можно описывать поведение сколь угодно сложных классических (неквантовых) систем. Достаточно общей моделью механической системы служит набор конечного числа материальных точек Именно такую модель вначале мы и будем рассматривать, и именно для такой модели на основе законов Ньютона будут построены уравнения движения в форме Лагранжа. Подчеркнем, что пока речь идет о нерелятивистских (ньютоновых) системах, и везде подразумевается, что система отсчета, в которой пишутся уравнения, – инерциальная.

Начнем с определений и обозначении (они помечаются значком*).

* **Механическая система** – набор конечного числа материальных точек (их всего N).

Точки нумеруются индексом ν, пробегающим значения от 1 до N. m_ν – массы точек, $\vec{r}_\nu$ – их радиус-векторы, $\vec{v}_\nu \equiv \dot{\vec{r}}_\nu$ – скорости, $\vec{a}_\nu \equiv \dot{\vec{v}}_\nu \equiv \ddot{\vec{r}}_\nu$ – ускорения. Точки над буквами обозначают обыкновенную или полную производную по времени, например, $\dot{\vec{r}}_\nu \equiv \dfrac{d\vec{r}_\nu}{dt}$.

* Ограничения геометрического или кинематического характера, наложенные на положения и скорости точек системы, называются **связями**. Системы со связями называются **несвободными**. Система свободна, если связи отсутствуют.

В дальнейшем мы будем рассматривать только так называемые **удерживающие связи**. Аналитически такая связь выражается уравнением

$$f(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0, \tag{1.1}$$

где $\vec{r} \equiv (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$;

$$\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv (\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, ..., \dot{\vec{r}}_N) \equiv \vec{v} \equiv (\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N).$$

Подробная запись уравнения (1.') выглядит так:

$$f(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, ..., \dot{\vec{r}}_N) = 0.$$

* Если скорости $\vec{v}_\upsilon \equiv \dot{\vec{r}}_\upsilon$ не входят в уравнение связи (1.1), то связь называется **конечной** или **геометрической**.

Уравнение конечной связи:

$$f(t, \vec{r}) = 0. \tag{1.2}$$

* В общем случае связь (1.1) называется **кинематической** или **дифференциальной**. В дальнейшем рассматриваются дифференциальные связи вида

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{l}_\upsilon \dot{\vec{r}}_\upsilon + D = 0, \tag{1.3}$$

где $\vec{l}_\upsilon = \vec{l}_\upsilon(t, \vec{r})$, $D = D(t, \vec{r})$, т.е. такие дифференциальные связи, для которых функция f из (1.1) линейна по скоростям.

Конечная связь (1.2) накладывает ограничение на возможные положения системы в момент времени t. При наличии же только дифференциальной связи $\vec{r}_\upsilon$ произвольны, а связь представляет собой ограничение на скорости. Ясно, что первое ограничение автоматически порождает второе (наоборот – не всегда): продифференцировав по времени конечную связь, получаем связь дифференциальную. Из уравнения (1.1) следует:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{\upsilon=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\upsilon} \dot{\vec{r}}_\upsilon + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{1.4}$$

* Здесь $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\upsilon}$ – градиент функции f, вычисляемый по координатам ν-й материальной точки. В декартовых, например, координатах

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\upsilon} = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x_\upsilon} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y_\upsilon} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z_\upsilon}$$

и соответственно

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}_\upsilon} \dot{\vec{r}}_\upsilon = \frac{\partial f}{\partial x_\upsilon} \dot{x}_\upsilon + \frac{\partial f}{\partial y_\upsilon} \dot{y}_\upsilon + \frac{\partial f}{\partial z_\upsilon} \dot{z}_\upsilon.$$

Отметим, что уравнение связи (1.4) имеет вид (1.3). Из (1.4) можно получить интегрированием

$$f(t,\bar{r}) = c, \qquad (1.5)$$

где c – произвольная постоянная. Таким образом, дифференциальная связь (1.4) эквивалентна конечной связи (1.5).

* Дифференциальная связь называется **интегрируемой**, если она эквивалентна некоторой конечной связи; в противном случае (когда такой конечной связи не существует) дифференциальная связь называется **неинтегрируемой**.

* **Конечная связь** (1.2) называется **стационарной**, если $\partial f/\partial t = 0$.

По аналогии с условиями для (1.4), вытекающими из равенства $\partial f/\partial t = 0$,

* **дифференциальная связь** (1.3) называется **стационарной**, если $D = 0$ и $\partial \bar{l}_j/\partial t = 0$.

* Система называется **голономной**, если на нее не наложены неинтегрируемые дифференциальные связи; в противном случае система **неголономная**.

* Система называется **склерономной**, если на нее наложены только стационарные связи; в противном случае – **реономной**.

ПРИМЕРЫ

П1. Материальная точка движется по неподвижной поверхности. Уравнение поверхности имеет вид

$$f(\bar{r}) = 0, \qquad (П1.1)$$

таким образом, система – голономная, склерономная. Если поверхность подвижная или (и) деформирующаяся, то

$$f(t,\bar{r}) = 0, \qquad (П1.2)$$

– система голономная, реономная.

П2. Длина математического маятника меняется по определеному закону: L = L(t). Если x,y – координаты маятника в плоскости колебаний, а начало координат совпадает с отверстием, через которое пропущена нить (рис.1), то уравнение связи имеет вид

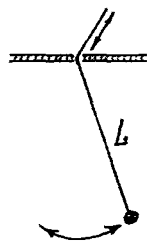

Рис.1

$$(x^2 + y^2)^{1/2} - L(t) = 0 \qquad (П2.1)$$

и, как и в предыдущем случае, система голономная, реономная.

§2. Возможные скорости. Возможные и виртуальные перемещения. Число степеней свободы системы. Активные силы. Реакции связей. Основная задача динамики несвободной системы. Идеальные связи

Пусть на систему наложены d конечных связей:

$$f_\alpha(t, \bar{r}) = 0, \quad (\alpha = 1,2,\dots,d) \tag{2.1}$$

и g связей дифференциальных:

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \bar{l}_{\beta\upsilon}\bar{v}_\upsilon + D_\beta = 0 \quad (\beta = 1,2,\dots,g). \tag{2.2}$$

Заменим (2.1) дифференциальными связями:

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_\upsilon}\bar{v}_\upsilon + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\dots,d). \tag{2.3}$$

* Систему векторов $\bar{v}_\upsilon$ будем называть **возможными скоростями** для некоторого момента времени t и некоторого возможного в этот момент положения системы, если векторы $\bar{v}_\upsilon$ удовлетворяют (d + g) линейным уравнениям (2.2) и (2.3), т.е. допускаются связями.

При действительном движении системы в момент t реализуется одна из бесконечного множества этих систем скоростей
(d + g < 3N)

* Систему бесконечно малых перемещений

$$d\bar{r}_\upsilon = \bar{v}_\upsilon dt, \tag{2.4}$$

где $\bar{v}_\upsilon$ – возможные скорости, будем называть **возможными бесконечно малыми перемещениями** или просто **возможными перемещениями.**

Умножая уравнения (2.2) и (2 3) на dt, получим для возможных перемещений:

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{r}_\upsilon}d\bar{r}_\upsilon + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt = 0 \;(\alpha = [1,d]), \tag{2.5а}$$

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \bar{l}_{\beta\upsilon}d\bar{r}_\upsilon + D_\beta dt = 0 \quad (\beta = [1,g]). \tag{2.5б}$$

Возьмем две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени и для одного и того же положения системы:

$$d\bar{r}_\upsilon = \bar{v}_\upsilon dt; \quad d'\bar{r}_\upsilon = \bar{v}'_\upsilon dt.$$

Как $d\vec{r}_\nu$, так и $d'\vec{r}_\nu$ удовлетворяют уравнениям (2.5а,б), а разности

$$\delta\vec{r}_\nu \equiv d'\vec{r}_\nu - d\vec{r}_\nu, \qquad (2.6)$$

очевидно, удовлетворяют однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\nu}\delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (\alpha = [1,d]). \qquad (2.7а)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{l}_{\beta\nu}\delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (\beta = [1,g]). \qquad (2.7б)$$

* Величины $\delta\vec{r}_\nu \equiv d'\vec{r}_\nu - d\vec{r}_\nu$ называют **виртуальными перемещениями.**

Виртуальные перемещения, как следует из их определения, – это "перемещения" материальных точек системы из одного возможного положения системы в некоторый момент времени (t + dt) в другое, бесконечно близкое, возможное для того же момента времени (t + dt) положение системы (рис.2).

При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными. В самом деле, если связи стационарны, в уравнениях (2.5а,б) следует положить $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$, $D_\beta = 0$, и тогда оказывается, что величины $d\vec{r}_\nu$ и $\delta\vec{r}_\nu$ удовлетворяют одной и той же системе уравнений. Говорят так: виртуальные перемещения совпадают с возможными при "замороженных" связях.

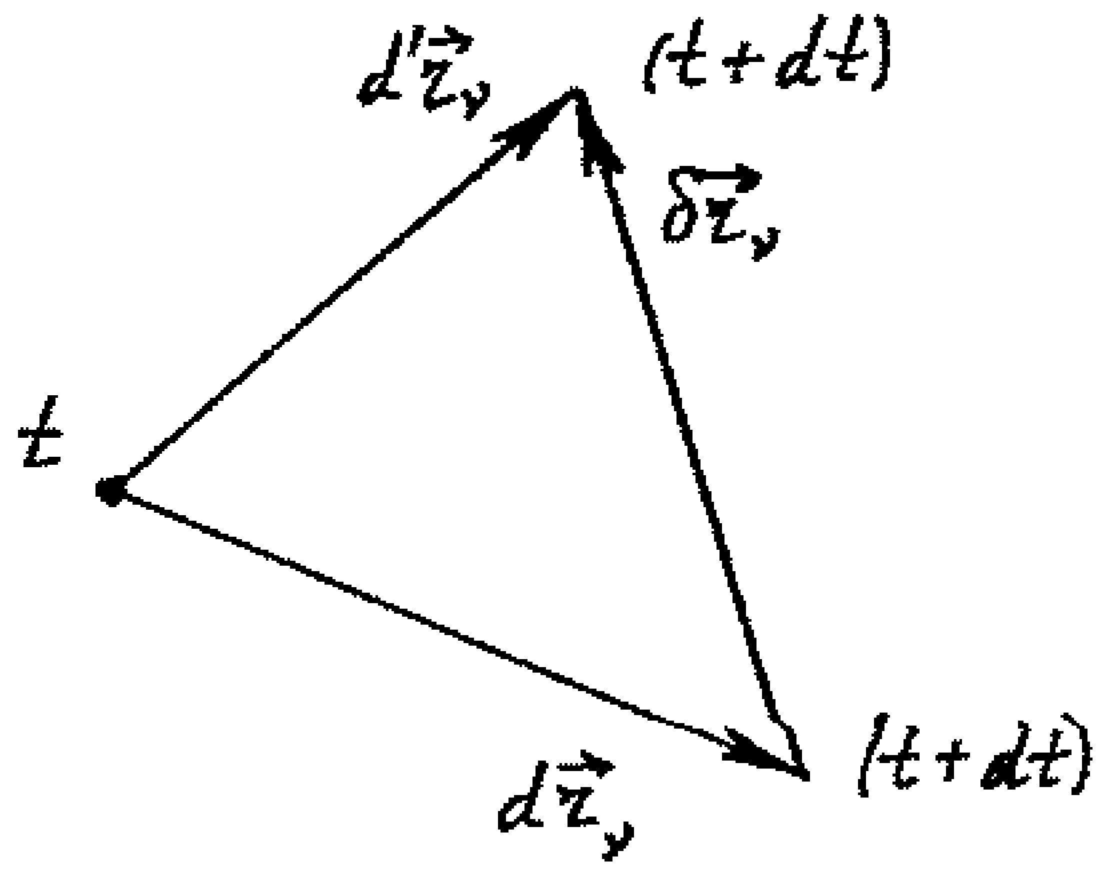

Рис.2

ПРИМЕР

Пусть связь определяется недеформирующейся поверхностью S, движущейся поступательно со скоростью $\vec{u}$ (материальная точка в любой момент времени находится на поверхности). Возможная скорость материальной точки:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u}, \qquad (\Pi 1)$$

ностью S, – касательный к поверхности вектор. Аналогично,

$$\vec{v}' = \vec{v}_1' + \vec{u}. \qquad (П2)$$

Отсюда следует для возможных перемещений:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt = \vec{v}_1 dt + \vec{u}dt, \qquad (П3)$$

$$d'\vec{r} = \vec{v}'dt = \vec{v}_1' dt + \vec{u}dt. \qquad (П4)$$

Виртуальное перемещение

$$\delta\vec{r} = (\vec{v}' - \vec{v})dt = (\vec{v}_1' - \vec{v}_1)dt \qquad (П5)$$

– вектор, касательный к поверхности, т.е. возможное перемещение для остановленной поверхности $S(\vec{u} = 0)$.

Рассмотрим далее систему (2.7) – $(d+g)$ уравнений. Если эти $(d+g)$ уравнений независимы, то среди $3N$ величин δx_υ, δy_υ, δz_υ будет

* $$n = 3N - d - g \qquad (2.8)$$

независимых; число n называется **числом степеней свободы** данной механической системы.

Понятие числа степеней свободы уже встречалось вам в курсе общей физики (раздел "Молекулярная физика"); определение числа степеней свободы, приведенное выше, ничем не отличается от знакомого вам определения, которое гласит: число степеней свободы системы – это минимальное число независимых величин, которые нужно задать одновременно, чтобы однозначно определить положение системы.

ПРИМЕРЫ

П1. Число степеней свободы двухатомной молекулы с жесткой связью равно пяти. Это число можно получить по формуле (2.8), подставив туда $N = 2$, $d = 1$, $g = 0$. Уравнение связи, кстати говоря, записывается в виде

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 - l_0^2 = 0, \qquad (П1.1)$$

где l_0 – расстояние между атомами (постоянная величина), а $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ – радиус-векторы атомов.

Для трехатомной жесткой молекулы имеем 3 уравнения связей:

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 - l_{21}^2 = 0, \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)^2 - l_{31}^2 = 0, \quad (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)^2 - l_{32}^2 = 0 \qquad (П1.2а,б,в)$$

и число степеней свободы равно шести ($3 \cdot 3 - 3$). Таким образом, получились известные результаты, хотя подсчет производился "новым" способом.

П2. Число степеней свободы материальной точки, подвешенной на невесомом жестком стержне длиной l_0, равно двум: имеется одно уравнение связи

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 - l_0^2 = 0, \qquad (П2.1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки подвеса. Число 2 – это два угла, которые нужно задать в сферической системе координат с началом в точке подвеса, чтобы однозначно определить направление стержня в пространстве.

* Пусть на материальные точки системы действуют заданные силы $\vec{F}_\upsilon(t, \vec{r}, \vec{v})$, не имеющие отношения к связям, например, силы тяжести, кулоновские силы, силы Лоренца и т.д. Вообще говоря, силы эти могут зависеть от координат и скоростей всех точек, входящих в состав механической системы:

$$\vec{F}_\upsilon = \vec{F}_\upsilon(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N).$$

Это так называемые **активные силы**, причем под $\vec{F}_\upsilon$ понимается равнодействующая всех активных сил, приложенных к ν-й материальной точке.

Из-за того, что есть связи, нельзя писать $\vec{a}_\upsilon = \vec{F}_\upsilon / m_\upsilon$. В самом деле, продифференцировав уравнения (2.3) и (2.2) по времени, получаем

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \frac{\partial f_\upsilon}{\partial \vec{r}_\upsilon} \vec{a}_\upsilon + \sum_{\upsilon=1}^{N} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_\upsilon} \right) \vec{v}_\upsilon + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right) = 0 \quad (\alpha = [1, d]); \qquad (2.9а)$$

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{l}_{\beta\upsilon} \vec{a}_\upsilon + \sum_{\upsilon=1}^{N} \frac{d \vec{l}_{\beta\upsilon}}{dt} \vec{v}_\upsilon + \frac{dD_\beta}{dt} = 0 \quad (\beta = [1, g]). \qquad (2.9б)$$

Ускорения $\vec{a}_\upsilon = \vec{F}_\upsilon / m_\upsilon$ могут и не удовлетворять этим соотношениям. Причина состоит в том, что материально осуществленные связи действуют на материальные точки системы с некоторыми дополнительными силами $\vec{R}_\upsilon$ (равнодействующая).

* Эти силы воздействия связей $\vec{R}_\upsilon$ называются **реакциями связей**.

Они таковы, что ускорения, определяемые из уравнений

$$m_\upsilon \vec{a}_\upsilon = \vec{F}_\upsilon + \vec{R}_\upsilon \tag{2.10}$$

уже допускаются связями.

* **Основная задача динамики несвободной системы** формулирует-ся следующим образом.

Заданы активные силы $\vec{F}_\upsilon = \vec{F}_\upsilon(t, \vec{r}, \vec{v})$ и даны совместимые со связями начальные положения $\vec{r}_\upsilon^{(0)}$ и начальные скорости $\vec{v}_\upsilon^{(0)}$ точек системы ($v = [1,N]$). Требуется определить закон движения системы $\vec{r}(t)$ и найти реакции связей $\vec{R}_\upsilon$ ($v = [1,N]$)

Если относительно характера связей ничего неизвестно помимо определяющих уравнений (2.1) и (2.2) и, следовательно, ничего не известно относительно вызываемых этими связями реакций $\vec{R}_\upsilon$, то сформулированная выше задача является неопределенной, так как число подлежащих определению скалярных величин $x_\upsilon, y_\upsilon, z_\upsilon$, $R_{\upsilon x}, R_{\upsilon y}, R_{\upsilon z}$ больше числа имеющихся скалярных уравнений – уравнений движения

$$m_\upsilon \ddot{x}_\upsilon = F_{\upsilon x} + R_{\upsilon x}, \quad m_\upsilon \ddot{y}_\upsilon = F_{\upsilon y} + R_{\upsilon y}, \quad m_\upsilon \ddot{z}_\upsilon = F_{\upsilon z} + R_{\upsilon z}$$

и уравнений связей (2.1) и (2.2): $6N > 3N + d + g$.

Необходимо иметь какие-то дополнительные $(6N - (3N + d + g)) = 3N - d - g = n$ независимых соотношений между искомыми величинами. Эти соотношения мы получим, если ограничимся важным классом **идеальных связей.**

* Связи называются идеальными, если сумма работ реакций этих связей на **любых** виртуальных перемещениях всегда равна нулю, т.е.

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{R}_\upsilon \delta \vec{r}_\upsilon = 0, \tag{2.11}$$

или

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} (R_{\upsilon x} \delta x_\upsilon + R_{\upsilon y} \delta y_\upsilon + R_{\upsilon z} \delta z_\upsilon) = 0. \tag{2.11a}$$

Среди 3N величин $\delta x_\upsilon, \delta y_\upsilon, \delta z_\upsilon$ имеется n независимых:

$$n = 3N - d - g.$$

Остальные можно выразить через эти n независимых приращений и приравнять в (2.11а) коэффициенты при n независимых приращениях к нулю. Получаем недостающие n соотношений, и основная задача динамики несвободной системы становится определенной.

ПРИМЕР идеальной связи. Пусть материальная точка находится на гладкой движущейся поверхности. В этом случае сила реакции связи $\vec{R}$ перпендикулярна поверхности, а все $\delta\vec{r}$ – касательные векторы, так что $\vec{R}\delta\vec{r} = 0$. Отметим, что для возможных перемещений это условие не выполняется: $\vec{R}d\vec{r} \neq 0$.

Возникает естественный вопрос: насколько широк класс несвободных систем, для которых имеет место ограничение (2.11)? Оказывается, что практически для любой несвободной механической системы возможна такая постановка задачи, при которой связи выступают как идеальные, в том числе и в случаях, когда, на первый взгляд, неидеальность связей при "лобовой" постановке очевидна (например, система – тело, соскальзывающее с трением по наклонной плоскости [1, с.24]).

В дальнейшем везде предполагается, что все связи,наложенные на рассматриваемую систему, являются идеальными.

Уравнения движения, условие идеальности связей и уравнения связей – вот та система уравнений, которая позволяет решить основную задачу динамики несвободной системы. Однако упомянутая система уравнений неудобна, во-первых, потому, что этих уравнений много, и, во-вторых, в ней фигурирует большое число (3N) величин, носящих вспомогательный характер: эти величины – $\delta x_\upsilon, \delta y_\upsilon, \delta z_\upsilon$ – определению не подлежат (т.е. их вычислять не требуется). Таким образом, возникает очевидная проблема сокращения числа неизвестных в уравнениях динамики несвободной системы.

Ниже мы будем рассматривать только голономные системы. Для этих систем наиболее компактное описание осуществляется с помощью так называемых обобщенных координат. Уравнения движения на языке обобщенных координат называются уравнениями Лагранжа второго рода (или – просто уравнениями Лагранжа). К формулировке системы этих уравнений мы и переходим.

§3. Голономные системы. Независимые обобщенные координаты. Обобщенные силы. Два способа нахождения обобщенных сил. Общее уравнение динамики. Условия равновесия в обобщенных координатах

Напомним, что голономной называется система, на которую не наложены неинтегрируемые дифференциальные связи, так что все имеющиеся связи можно записать в конечном виде. Пусть по-прежнему система состоит из N материальных точек, и движение системы подчинено d связям:

$$f_\alpha(t,\vec{r})=0 \qquad (\alpha=[1,d]), \tag{3.1}$$

где под $\vec{r}$ понимается совокупность радиус-векторов материальных точек: $\vec{r}=(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N)$. Если использовать декартовы координаты x,y,z, то подробная запись (3.1) выглядит так:

$$f_\alpha(t,x_1,x_2,\ldots,x_N,y_1,y_2,\ldots,y_N,z_1,z_2,\ldots,z_N)=0 \quad (\alpha=[1,d]). \tag{3.1a}$$

Будем предполагать, что d функций f_α от 3N аргументов $x_\upsilon,y_\upsilon,z_\upsilon$ независимы, время t здесь рассматривается как параметр. Поэтому мы можем из уравнений (3.1a) выразить d координат как функции (3N – d) остальных и времени t и рассматривать эти (3N – d) координат как независимые величины, определяющие положение системы в момент времени t.

Однако не обязательно в качестве таких независимых координат брать именно декартовы координаты. Можно все 3N декартовых координат $x_\upsilon,y_\upsilon,z_\upsilon$ выразить в виде функций от n = 3N – d независимых параметров $q_1,q_2,\ldots,q_n$ и от времени t:

$$x_\upsilon=\varphi_\upsilon(t,q_1,\ldots,q_n),\; y_\upsilon=\psi_\upsilon(t,q_1,\ldots,q_n);$$
$$z_\upsilon=\chi_\upsilon(t,q_1,\ldots,q_n),\quad \nu=[1,N] \tag{3.2}$$

Выбор параметров $q_i(i=[1,n])$ должен удовлетворять двум требованиям. Во-первых (это очевидно), подстановка функций (3.2) в уравнения связей (3.1a) должна обращать их в тождества. Во-вторых, любое положение системы, совместимое со связями в данный момент времени, должно получаться из равенств (3.2) при некоторых значениях величин q_1, q_2,..., q_n.

Равенства (3.2) эквивалентны векторным равенствам

$$\vec{r}_\upsilon = \vec{r}_\upsilon(t, q_1, ..., q_n) \qquad (\nu = [1.N]). \tag{3.2a}$$

В дальнейшем мы будем использовать и более компактную запись

$$\vec{r}_\upsilon = \vec{r}_\upsilon(t, \vec{q}),$$

и даже

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{q}).$$

Скалярные функции (3.2), а следовательно, и векторные функции (3.2а) предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Отметим, что равенства (3 2) – или (3.2а) – не что иное, как уравнения связей в параметрическом виде.

Минимальное число величин q_i, с помощью которых формулами (3.2) можно охватить все возможные положения голономной системы, совпадает с числом степеней свободы этой системы: $n = 3N - d$.

* Величины $q_1, q_2, ..., q_n$ в формулах (3.2) или (3.2а) (n – число степеней свободы) называются **независимыми обобщенными координатами** системы.

Таким образом, обобщенные координаты – это любые n величин $q_1, q_2, ..., q_n$, полностью характеризующих положение системы (с n степенями свободы).

Для каждого момента времени t между возможными положениями системы и точками некоторой области в n-мерном координатном пространстве $\{q_1, ..., q_n\}$ устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Каждому положению системы в момент t соответствует точка в пространстве $\{q_1, ..., q_n\}$, изображающая это положение системы. Движению системы соответствует движение **изображающей точки** в координатном пространстве $\{q_1, ..., q_n\}$ Это пространство также называют **конфигурационным пространством системы со связями.**

Для склерономной системы (все связи стационарные) всегда можно выбрать независимые координаты так, чтобы в уравнения (3.2), (3.2а) время не входило:

$$x_\upsilon = \varphi_\upsilon(\vec{q}), \quad y_\upsilon = \psi_\upsilon(\vec{q}), \quad z_\upsilon = \chi_\upsilon(\vec{q}) \tag{3.3}$$

или

$$\vec{r}_\upsilon = \vec{r}_\upsilon(\vec{q}). \tag{3.3a}$$

Здесь $\nu = 1, 2, ..., N$; $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$.

ПРИМЕРЫ

П1. Двойной маятник, движущийся в вертикальной плоскости, имеет две степени своды. Обобщенные координаты (рис.3):

$$q_1 \equiv \varphi, \quad q_2 \equiv \psi. \qquad \text{(П1.1а,б)}$$

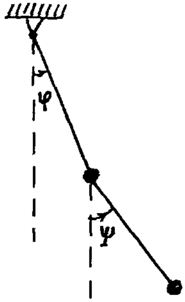

Рис.3

П2. Две материальные точки, соединенные жестким невесомым стержнем (см. §2, с.10) 5 степеней свободы. В качестве независимых координат можно выбрать, например, 3 декартовых координаты 1-й материальной точки x_1, y_1, z_1 и 2 угла φ, ψ, задающих в сферической системе координат (начало которой совпадает с 1-й материальной точкой) направление на 2-ю материальную точку.

П3. Несвободная материальная точка находится на подвижной сфере радиуса r, центр которой движется с постоянной скоростью $\vec{v} = (a, b, c)$. Уравнение связи имеет вид

$$(x-at)^2 + (y-bt)^2 + (z-ct)^2 = r^2. \qquad \text{(П3.1)}$$

Число степеней свободы n = 2, и в качестве обобщенных координат можно выбрать, например, "долготу" q_1 и "широту" q_2 на сфере (рис.4)

$$x' = x - at = r\cos q_2 \cos q_1, \qquad \text{(П3.2а)}$$

$$y' = y - bt = r\cos q_2 \sin q_1, \qquad \text{(П3.2б)}$$

$$z' = z - ct = r\sin q_2. \qquad \text{(П3.2в)}$$

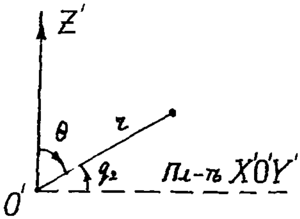

Рис.4

Приведенные равенства – фактически – переход от декартовых координат

$$x' = x - at, \; y' = y - bt, \; z' = z - ct \qquad \text{(П3.3)}$$

к сферическим. Отличие в том, что азимутальный угол θ и широта q_2 не совпадают, они связаны равенством (см.рис.4)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - q_2 \qquad \text{(П3.4)}$$

($\cos q_2 = \sin\theta$) в то время, как "долгота" и полярный угол φ – это одно и то же, если приписать величинам q_1 и q_2 знаки.

Итак, наша ближайшая цель – получить уравнения движения в обобщенных координатах. Поэтому первое, что мы должны сделать, – ввести понятие обобщенной силы.

Каждой обобщенной координате q_i соответствует своя **обобщенная сила** Q_i ($i = 1,2,...,n$). Обобщенные силы определяются следующим образом. Рассмотрим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях (суммарную)

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu . \tag{3.4}$$

Но виртуальные перемещения $\delta \vec{r}_\nu$ – это **виртуальные дифференциалы** (т.е. дифференциалы при фиксированном – "замороженном"– времени t) функций $\vec{r}_\nu(t,\vec{q})$:

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i , \qquad \nu = [1,N]. \tag{3.5}$$

Подставим выражения (3.5) в правую часть формулы (3.4) и выразим элементарную работу активных сил на виртуальных перемещениях системы через **произвольные элементарные приращения** δq_i **независимых координат** q_i :

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i , \tag{3.6}$$

где коэффициенты при δq_i – **обобщенные силы** Q_i, определяемые равенствами

$$Q_i \equiv \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \qquad i = [1,n]. \tag{3.7}$$

Таким образом, обобщенные силы Q_i находятся с помощью выражения

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \tag{3.8}$$

для элементарной суммарной работы активных сил на виртуальных перемещениях системы. Определение (3.7) построено путем сравнения выражений (3.4) и (3.8). **Первый способ** нахождения обобщенных сил и состоит в использовании этого определения. На практике иногда применяют **второй способ**: системе дают такое виртуальное перемещение, при котором только i-я координата получает некоторое приращение, а остальные независимые координаты не меняются. После этого вычисляют работу активных сил δA на таком специально выбранном перемещении. В этом случае, как видно из (3.8), $\delta A \equiv \delta A_i \equiv Q_i \delta q_i$, отсюда

$$Q_i = \frac{\delta A_i}{\delta q_i}. \qquad (3.9)$$

ПРИМЕР. Рассмотрим двойной маятник, движущийся в вертикальной плоскости; положение его определяется независимыми координатами:

$$q_1 \equiv \varphi, \quad q_2 \equiv \psi.$$

Все параметры маятника указаны на рис.5. Вычислим обобщенную силу, соответствующую координате ψ, причем сделаем это двумя способами, указанными выше. **Первый способ** – вычисление Q_ψ с помощью определения (3.7). Перепишем (3.7):

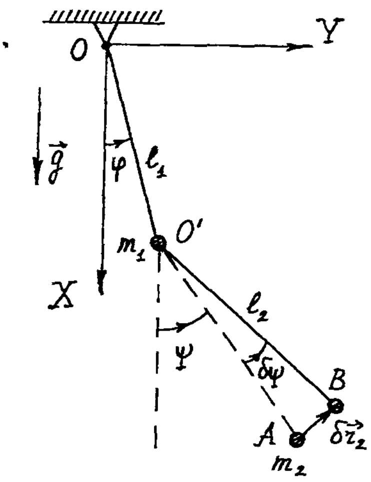

Рис.5

$$Q_\psi = \bar{F}_1 \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \psi} + \bar{F}_2 \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial \psi}, \qquad (П1)$$

где $\bar{F}_1 = m_1 \bar{g}$, $\bar{F}_2 = m_2 \bar{g}$ – активные силы, действующие на систему. Отметим, что положение материальной точки m_1 определяется только углом φ, поэтому

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial \psi} = 0. \qquad (П2)$$

Учитывая, кроме того, равенства

$$F_{2x} = m_2 g, \quad F_{2y} = 0, \qquad (П3)$$

получаем

$$Q_\psi = m_2 g \frac{\partial x_2}{\partial \psi}. \qquad (\text{П4})$$

Декартова координата x_2 второй материальной точки m_2 выражается через обобщенные координаты φ, ψ следующим образом (см. рис.5):

$$x_2 = l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\psi. \qquad (\text{П5})$$

Вычисляя производную в (П4) и используя (П5), находим

$$Q_\psi = -m_2 g\, l_2 \sin\psi. \qquad (\text{П6})$$

Очевидно, Q_ψ представляет собой проекцию на ось OZ (направленную к наблюдателю) момента силы тяжести $m_2\vec{g}$ относительно точки O′ (см. рис.5).

Второй способ. Зафиксируем угол φ и пусть $\delta\vec{r}_2$ – виртуальное перемещение второй частицы, соответствующее приращению обобщенной координаты ψ. Очевидно, рассматриваемая система склерономна, и виртуальные перемещения совпадают с возможными. Для первой частицы в силу $\delta\varphi = 0$ имеем $\delta\vec{r}_1 = 0$

(см. рис.5). Введем вектор $\vec{l}_2 \equiv \overrightarrow{O'A}$, задающий положение второй частицы относительно точки O′. Тогда

$$\delta\vec{r}_2 = [\,\overrightarrow{\delta\psi}, \vec{l}_2\,], \qquad (\text{П7})$$

где

$$\overrightarrow{\delta\psi} = \vec{k}\delta\psi, \qquad (\text{П8})$$

$\vec{k}$ – орт оси OZ. Поскольку первая частица остается неподвижной,то

$$\delta A_\psi = \vec{F}_2 \delta\vec{r}_2 = m_2\vec{g}\,[\vec{k}, \vec{l}_2]\,\delta\psi. \qquad (\text{П9})$$

Используя свойства смешанного и векторного произведений, имеем

$$\delta A_\psi = m_2 \vec{k}[\vec{l}_2\, \vec{g}]\,\delta\psi = -m_2[\vec{g}, \vec{l}_2]\,\vec{k}\,\delta\psi. \qquad (\text{П10})$$

Равенство (П10) можно переписать так:

$$\delta A_\psi = -m_2[\vec{g}, \vec{l}_2]_z \delta\psi = -m_2 g\, l_2 \sin\psi\, \delta\psi. \qquad (\Pi 11)$$

Отсюда получаем

$$Q_\psi = -m_2 g\, l_2 \sin\psi. \qquad (\Pi 12)$$

Результат, естественно, совпадает с (П6).

Из уравнений движения в форме Ньютона (2.10)

$$m_\upsilon \vec{a}_\upsilon = \vec{F}_\upsilon + \vec{R}_\upsilon$$

и условия идеальности связей (2.11)

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{R}_\upsilon \delta\vec{r}_\upsilon = 0$$

легко получить уравнение

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} (\vec{F}_\upsilon - m_\upsilon \vec{a}_\upsilon)\delta\vec{r}_\upsilon = 0. \qquad (3.10)$$

* Это так называемое **общее уравнение динамики**.

Пусть некоторое положение системы является положением равновесия. В этом случае (3.10) дает

$$\sum_{\upsilon=1}^{N} \vec{F}_\upsilon \delta\vec{r}_\upsilon = 0. \qquad (3.11)$$

* Уравнение (3.11) представляет собой необходимое и достаточное условие равновесия.

Отметим следующее. Мы говорим: уравнение (3.10), условие (3.11). На самом деле речь идет об уравнениях и условиях соответственно, поскольку (3.10) и (3.11) справедливы в случае любых виртуальных перемещений. Так, (3.11) означает, что в положении равновесия сумма работ активных сил на любых виртуальных перемещениях системы равна нулю.

Сформулируем условия равновесия в обобщенных координатах, точнее, на языке обобщенных переменных:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = 0. \qquad (3.12)$$

Но δq_i произвольны, так как обобщенные координаты q_i независимы. Поэтому условия равновесия принимают вид

$$Q_i = 0; \quad i = [1, n]. \qquad (3.13)$$

§4. Уравнения Лагранжа второго рода в независимых обобщенных координатах (предварительное обсуждение). Обобщенные скорости. Обобщенные ускорения

Об уравнениях Лагранжа, которые мы собираемся построить, нам известно пока только следующее: а) это дифференциальные уравнения движения несвободной системы в обобщенных координатах; б) в этих уравнениях должны фигурировать обобщенные силы Q_i. Приведенная информация явно недостаточна, так что задача конструирования лагранжевой системы выглядит весьма расплывчато. Добавим еще одну позицию, проясняющую вид искомых уравнений: эти уравнения должны содержать производные от кинетической энергии системы. Систему уравнений Лагранжа второго рода можно вывести строго на основе общего уравнения динамики (что мы и сделаем чуть позже, в §5). Пока же поступим следующим образом: рассмотрим достаточно простой пример несвободной системы с одной степенью свободы – математический маятник, – приведем уравнение движения маятника к тому виду, который удовлетворяет перечисленным трем позициям, а потом выполним необходимые обобщения.

Удобнее всего в качестве обобщенной координаты выбрать угол φ (рис.6) и движение маятника рассматривать в полярных координатах. Тогда уравнение связи выглядит очень просто:

$$r = l. \tag{4.1}$$

Уравнение движения маятника имеет вид [7]

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \tag{4.2}$$

Отметим, что оно, в частности, не содержит угловой скорости $\dot{\varphi}$. Это следствие удачного выбора обобщенной координаты. Для того чтобы уравнение движения имело вид достаточно общий (а мы здесь к этому и стремимся) – необходимо как-нибудь не очень удобно выбрать обобщенную координату.

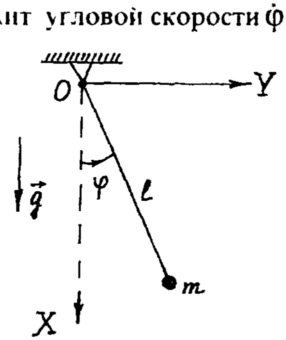

Рис.6

Будем рассматривать в качестве обобщенной координаты декартову координату x материальной точки m. При заданном $x > 0$ координата y определена с точностью до знака, поэтому положим для определенности $y > 0$ (будем интересоваться движением материальной точки именно в области $(x > 0,\ y > 0)$

Координата y выражается через x равенством

$$y=\sqrt{l^2-x^2}\ . \tag{4.3}$$

Это, кстати, и есть уравнение связи.

Активная сила здесь одна:

$$\vec{F}=m\vec{g}. \tag{4.4}$$

Обобщенная сила X, соответствующая координате x, также одна: использование формулы

$$X=\vec{F}\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}$$

приводит к равенству

$$X=mg\,. \tag{4.5}$$

Перепишем теперь уравнение движения маятника (4.2), вводя x вместо φ:

$$\varphi=\arccos(x/l). \tag{4.6}$$

Дифференцирование (4.6) по времени дает:

$$\dot\varphi=-\frac{\dot x}{\sqrt{l^2-x^2}},\qquad \ddot\varphi=-\frac{(l^2-x^2)\ddot x+x(\dot x)^2}{(l^2-x^2)^{3/2}}. \tag{4.7а,б}$$

Используя (4.6), (4.7), приходим к уравнению движения в форме

$$\frac{ml^2}{(l^2-x^2)^2}\left((l^2-x^2)\ddot x+x(\dot x)^2\right)=mg. \tag{4.8}$$

Уравнение (4.8), конечно, "хуже", чем (4.2), хотя бы потому, что здесь появилась первая производная по времени от обобщенной координаты $-\dot x$. Зато мы добились, чего хотели: неудачным выбором обобщенной координаты замаскировали симметрию системы, так что теперь все соотношения и зависимости, которые мы получим, будут носить общий характер.

Рассмотрим кинетическую энергию маятника T:

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{ml^2(\dot\varphi)^2}{2}=\frac{ml^2(\dot x)^2}{2(l^2-x^2)}. \tag{4.9}$$

Отметим, что кинетическая энергия системы зависит от обобщенной координаты и ее производной по времени:

$$T = T(x, \dot{x}). \qquad (4.10)$$

Если бы мы взяли маятник, длина которого является известной функцией времени

$$l = l(t),$$

то уравнение связи приобрело бы вид [сравните с (4.3)]:

$$y = \sqrt{l^2(t) - x^2}\,. \qquad (4.11)$$

Связь (4.11) нестационарная. Для соответствующей системы кинетическая энергия $\tilde{T}$ оказалась бы зависящей явным образом от времени (в чем можно убедиться непосредственно):

$$\tilde{T} = \tilde{T}(x, \dot{x}, t). \qquad (4.12)$$

Зависимость (4.12) носит самый общий характер: кинетическая энергия системы в общем случае представляет собой функцию обобщенных координат, их производных по времени (это так называемые **обобщенные скорости**, см.ниже стр.25) и времени. Опираясь на результат (4.10), можно сделать следующий вывод: если связи стационарны, то кинетическая энергия системы не зависит от времени явно, а зависит лишь от обобщенных координат и их производных по времени.

Вернемся к выражению (4.9) и вычислим производные кинетической энергии $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$ и $\frac{\partial T}{\partial x}$. Это вычисление дает

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{ml^2\dot{x}}{l^2 - x^2}, \qquad (4.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{ml^2x(\dot{x})^2}{(l^2 - x^2)^2}. \qquad (4.14)$$

Мы договорились, что лагранжева система, которую мы строим, должна содержать производные от кинетической энергии системы, однако уравнения движения – это уравнения второго порядка, а выражения (4.13), (4.14) содержат лишь первую производную по времени – $\dot{x}$. Нам ничего не остается, как только взять производную по времени хотя бы от одного из выражений (4.13), (4.14). Такие производные обязательно войдут в систему уравнений Лагранжа. Выражение (4.13) проще – с него и начнем.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{ml^2\ddot{x}}{l^2-x^2}+\frac{2ml^2x(\dot{x})^2}{(l^2-x^2)^2}. \qquad (4.15)$$

С помощью (4.14), (4.15) можно получить

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{ml^2}{\left(l^2-x^2\right)^2}\left((l^2-x^2)\ddot{x}+x(\dot{x})^2\right). \qquad (4.16)$$

Замечая, что выражение (4.16) совпадает с левой частью уравнения движения (4.8), а обобщенная сила (4.5) – с правой, приходим к уравнению движения в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=X. \qquad (4.17)$$

Уравнение (4.17) полностью соответствует сформулированным в начале раздела трем позициям, которые определяют форму искомых уравнений Лагранжа.

Переобозначим:

$$x\to q,\quad \dot{x}\to\dot{q},\quad X\to Q. \qquad (4.18)$$

Тогда (4.17) перепишется так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q. \qquad (4.19)$$

Полученное уравнение (4.19) и есть уравнение Лагранжа второго рода для голономной системы с одной степенью свободы. В случае n степеней свободы будем иметь систему из n уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=[1,n]. \qquad (4.20)$$

Эту систему можно записать и так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{q}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \bar{q}}=\bar{Q}. \qquad (4.20a)$$

* Уравнения (4.20), так же как и уравнения (4.20а), носят название **уравнений Лагранжа второго рода или уравнений Лагранжа в независимых координатах.**

* Величины $\dot{q}_i \ (i=1,2,...,n)$ называются **обобщенными скоростями**.

* Величины $\ddot{q}_i \ (i=1,2,...,n)$ – **обобщенные ускорения** системы. Эти величины содержатся в первом слагаемом в левых частях уравнений (4.20), (4.20a).

Кинетическая энергия системы

$$T \equiv \frac{1}{2}\sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon (\dot{\bar{r}}_\upsilon)^2$$

зависит в общем случае от обобщенных координат, обобщенных скоростей и от времени

$$T = T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t). \qquad (4.21)$$

Величины $\bar{q},\dot{\bar{q}},t$ рассматриваются как независимые переменные. Если система склерономная (связи стационарны), явная зависимость от времени отсутствует:

$$T = T(\bar{q},\dot{\bar{q}}). \qquad (4.22)$$

Обобщенные силы также есть, вообще говоря, функции обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$Q_i = Q_i(\bar{q},\dot{\bar{q}},t). \qquad (4.23)$$

Это обусловлено характером рассматриваемых в механике активных сил

$$\bar{F}_\upsilon = \bar{F}_\upsilon(\bar{r},\dot{\bar{r}},t) \qquad (4.24)$$

и видом связей (3.2a). Подстановка в определение обобщенной силы (3.7) выражений (4.24) и (3.2a) приводит к функциональной зависимости (4 23) В дальнейшем наряду с (4.23) мы будем использовать запись

$$\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t). \qquad (4\ 24a)$$

Уравнения Лагранжа (4.20) – или (4 20a) – образуют систему из **n** обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с **n** неизвестными функциями q_i от независимого переменного t. Порядок системы равен **2n** – это наименьший возможный порядок, поскольку ясно, что для определения закона движения системы нужно знать по крайней мере **2n** начальных условий **n** значений начальных координат $q_i^{(0)} = q_i(0)$ и **n** начальных скоростей $\dot{q}_i^{(0)} = \dot{q}_i(0)$, так что общее решение уравнений движения должно содержать, по крайней мере, **2n** произвольных постоянных.

Таким образом, безусловным преимуществом уравнений Лагранжа второго рода является низкий порядок системы. Еще одно достоинство системы уравнений Лагранжа(4.20), (4.20а) состоит в том, что они не содержат реакций связей $\bar{R}_\upsilon$. Реакции связей определяются после решения системы (4.20). Иначе говоря, метод уравнений Лагранжа предоставляет возможность естественного разбиения основной задачи динамики несвободной системы на две части. Первая – и главная – состоит в решении системы (4.20), имеющей минимальный возможный порядок. Далее на основе найденного решения $\bar{q}(t)$ находят закон движения системы $\bar{r}(t)$ в исходных координатах и вычисляют реакции связей, причем все вычисления второго этапа, как будет показано ниже, выполняются по определенному простому алгоритму и никаких проблем (даже чисто технических) не представляют.

§5. Уравнения Лагранжа второго рода в независимых обобщенных координатах (общий вывод для произвольной голономной системы)

Выведем дифференциальные уравнения движения голономной системы в обобщенных координатах q_i. Будем исходить из общего уравнения динамики (3.10), которое запишем в виде

$$\sum_{\upsilon=1}^{N}\bar{F}_\upsilon\delta\bar{r}_\upsilon+\sum_{\upsilon=1}^{N}(-m_\upsilon\bar{a}_\upsilon)\delta\bar{r}_\upsilon=0. \qquad (5.1)$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части (5.1).

$$\sum_{\upsilon=1}^{N}\bar{F}_\upsilon\delta\bar{r}_\upsilon=\delta A=\sum_{i=1}^{n}Q_i\delta q_i. \qquad (5.2)$$

Здесь δA – суммарная работа активных сил на виртуальных перемещениях системы; Q_i – обобщенные силы. Величина $(-m_\upsilon\bar{a}_\upsilon)$ под знаком суммы во втором слагаемом – это сила инерции, действующая на ν-ю материальную точку системы. Поэтому второе слагаемое в левой части (5.1) можно рассматривать как суммарную работу сил инерции δA_J на виртуальных перемещениях. Запишем по аналогии с (5.2):

$$\delta A_J = -\sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon \bar{a}_\upsilon \delta \bar{r}_\upsilon = -\sum_{i=1}^{n} Z_i \delta q_i. \qquad (5.3)$$

Из (5.3) следует, что величина $(-Z_i)$ представляет собой обобщенную силу инерции. Точное определение Z_i аналогично определению (3.7) обобщенной силы Q_i:

* $$Z_i = \sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon \bar{a}_\upsilon \frac{\partial \bar{r}_\upsilon}{\partial q_i}, \quad i=[1,n]. \qquad (5.4)$$

Преобразуем правую часть (5.4):

$$Z_i = \sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon \frac{d\dot{\bar{r}}_\upsilon}{dt} \frac{\partial \bar{r}_\upsilon}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon \dot{\bar{r}}_\upsilon \frac{\partial \bar{r}_\upsilon}{\partial q_i}\right) - \sum_{\upsilon=1}^{N} m_\upsilon \dot{\bar{r}}_\upsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_\upsilon}{\partial q_i}\right). \qquad (5.5)$$

Для дальнейших вычислений нам понадобятся уравнения связей (3.2а). Выпишем еще раз эти уравнения:

$$\bar{r}_\upsilon = \bar{r}_\upsilon(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad \nu=[1,N].$$

Дифференцируя (3.2а) по времени, получаем для скоростей материальных точек $\bar{v}_\upsilon = \dot{\bar{r}}_\upsilon$:

$$\dot{\bar{r}}_\upsilon = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_\upsilon}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_\upsilon}{\partial t}. \qquad (5.6)$$

Скорости материальных точек $\dot{\bar{r}}_\upsilon$ оказываются, как видно из (5.6), функциями обобщенных координат $\bar{q}$, обобщенных скоростей $\dot{\bar{q}}$ и времени t, которые должны рассматриваться как независимые переменные:

$$\dot{\bar{r}}_\upsilon = \dot{\bar{r}}_\upsilon(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t). \qquad (5.7)$$

Отметим, что зависимость $\dot{\bar{r}}_\upsilon$ от обобщенных скоростей $\dot{q}_k$ является линейной. Дифференцируя (5.6) по $\dot{q}_i$, находим

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_\upsilon}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{r}_\upsilon}{\partial q_i}, \quad i=[1,n], \ \nu=[1,N]. \qquad (5.8)$$

Из того же равенства (5.6) можно получить

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \bar{r}_\nu}{\partial q_i \partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial q_i}\right) \qquad (5.9)$$

С учетом (5.8), (5.9) выражение (5.5) для Z_i может быть записано так:

$$Z_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\bar{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\bar{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\bar{r}}_\nu \frac{\partial \dot{\bar{r}}_\nu}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \qquad (i = [1, n]). \qquad (5.10)$$

где T – кинетическая энергия системы, равная

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\bar{r}}_\nu^{\,2}. \qquad (5.11)$$

Общее уравнение динамики (5.1), используя (5.2) и (5.3), можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i - Z_i)\,\delta q_i = 0, \qquad (5.12)$$

и, поскольку δq_i произвольны, уравнение (5.12) эквивалентно системе

$$Z_i = Q_i. \qquad (5.13)$$

Подставляя выражения (5.10) для Z_i в (5.13), получаем уравнения Лагранжа в обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (5.14)$$

которые мы вывели теперь для **голономной системы с произвольным числом степеней свободы.**

Подчеркнем, что здесь кинетическая энергия T рассматривается как функция обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени; перечисленные величины считаются независимыми переменными:

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) \equiv T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t). \qquad (5.15)$$

§6. Кинетическая энергия системы в обобщенных переменных. Однозначность решения системы уравнений Лагранжа. Процедура решения основной задачи динамики несвободной системы

Для того, чтобы составить уравнения Лагранжа (5.14), нужно предварительно найти выражение для кинетической энергии в виде функции от времени, обобщенных координат q_i и обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ [см.(5.15)]. Для рассматриваемых нами голономных систем радиус-векторы $\bar{r}_\nu$ материальных точек и их скорости $\dot{\bar{r}}_\nu$ выражаются через обобщенные переменные $\bar{q}$, $\dot{\bar{q}}$ и время t по формулам (3.2а), (5.6). Подставляя (5.6) в определение (5.11), получаем в общем случае

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial t}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial t}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}(\bar{q},t)\dot{q}_i\dot{q}_k+\sum_{i=1}^{n} b_i(\bar{q},t)q_i+b_0(\bar{q},t), \qquad (6.1)$$

где коэффициенты b_{ik}, b_i, b_0 определяются равенствами

$$b_{ik}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial q_k};\qquad b_{ik}=b_{ki},\quad i,k=[1,n]; \qquad (6.2а)$$

$$b_i=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial q_i}\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial t}; \qquad (6.2б)$$

$$b_0=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\frac{\partial\bar{r}_\nu}{\partial t}\right)^2. \qquad (6.2в)$$

Таким образом, кинетическая энергия T – полином второй степени относительно обобщенных скоростей. Можно записать T в виде суммы

$$T=T_2+T_1+T_0, \qquad (6.3)$$

где

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i\dot{q}_i, \quad T_0 = b_0. \qquad (6.4а,б,в)$$

Отметим важный частный случай. Для склерономной системы (связи стационарны) $\partial\bar{r}_\upsilon / \partial t = 0$, откуда получаем

$$b_i = 0, \quad b_0 = 0,$$

и, следовательно,

$$T_1 = 0, \quad T_0 = 0;$$

$$T = T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \qquad (6.5)$$

Таким образом, кинетическая энергия склерономной системы – квадратичная форма обобщенных скоростей.

ПРИМЕР. Рассмотрим двойной маятник (см.рис.5). Выразим кинетическую энергию этой системы через обобщенные переменные и запишем уравнение Лагранжа (одно из двух), соответствующее обобщенной координате ψ.

В принципе, проще всего поступить следующим образом: дифференцируя по времени уравнения связей

$$x_1 = l_1\cos\varphi, \quad y_1 = l_1\sin\varphi, \qquad (П1)$$

$$x_2 = l_1\cos\varphi + l_2\cos\psi, \quad y_2 = l_1\sin\varphi + l_2\sin\psi, \qquad (П2)$$

найти скорости $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2$ как функции обобщенных переменных φ, $\psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ и подставить их в выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2). \qquad (П3)$$

Однако выкладки значительно сокращаются, если использовать готовые формулы (6.2), (6.3), (6.4), тем более что в данном случае система склерономна, кинетическая энергия имеет вид (6.5) и нужно вычислять только коэффициенты b_{ik}.

С учетом того, что в формулах (6.2а), (6.5), которые нам понадобятся, обобщенные координаты различаются с помощью цифровых индексов, перепишем уравнения связи ($\varphi \equiv q_1$, $\psi \equiv q_2$).

$$x_1 = l_1 \cos q_1, \quad y_1 = l_1 \sin q_1, \tag{П4}$$

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2, \quad y_2 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2. \tag{П5}$$

Наша система состоит из двух материальных точек (N=2). Запишем выражения для коэффициентов b_{ik} более подробно:

$$b_{ik} = m_1 \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_k} + m_2 \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_i} \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_k} =$$

$$= m_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial x_1}{\partial q_k} + \frac{\partial y_1}{\partial q_i} \frac{\partial y_1}{\partial q_k} \right) + m_2 \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \frac{\partial x_2}{\partial q_k} + \frac{\partial y_2}{\partial q_i} \frac{\partial y_2}{\partial q_k} \right). \tag{П6}$$

Вычисляя производные в правой части (П6), для коэффициентов b_{ik} (i,k = 1,2) получаем:

$$b_{11} = (m_1 + m_2) l_1^2; \tag{П7}$$

$$b_{12} = m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1); \tag{П8}$$

$$b_{22} = m_2 l_2^2. \tag{П9}$$

Выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{q}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2. \tag{П10}$$

Уравнение Лагранжа, соответствующее обобщенной координате $q_2 = \psi$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2, \qquad (\text{П}11)$$

где

$$Q_2 \equiv Q_\psi = -m_2 g\, l_2 \sin q_2 \qquad (\text{П}12)$$

[см.(П12) в §3]. Вычисляем производные в левой части (П11):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1)\dot{q}_1 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2; \qquad (\text{П}13)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_1 l_2 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) +$$

$$+ m_2 l_2^2\, \ddot{q}_2; \qquad (\text{П}14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1 \dot{q}_2. \qquad (\text{П}15)$$

Запишем левую часть уравнения (П11):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial T}{\partial q_2}=$$

$$= m_2 l_2 [l_1 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + l_1 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2 + l_2 \ddot{q}_2]. \qquad (\text{П}16)$$

После сокращения на величину $(m_2 l_2)$ уравнение (П11) приобретает вид

$$l_1 \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + l_1 \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2 + l_2 \ddot{q}_2 = -g \sin q_2 \qquad (\text{П}17)$$

или, в других обозначениях,

$$l_1 \cos(\psi - \varphi)\ddot{\varphi} + l_1 \sin(\psi - \varphi)\dot{\varphi}^2 + l_2 \ddot{\psi} = -g \sin \psi. \qquad (\text{П}18)$$

Аналогичным образом можно получить уравнение, соответствующее обобщенной координате $q_1 = \varphi$.

Займемся теперь вопросом **существования и единственности решения системы уравнений Лагранжа при заданных начальных условиях.**

Отметим сразу два важных свойства квадратичной формы T_2 [см. (6.3), (6.4)], которую приведем здесь еще раз:

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{6.4a}$$

где b_{ik} определяются соотношениями (6.2a).

1. Для произвольной голономной системы форма T является невырожденной*), т.е.

$$\det(b_{ik}) \neq 0. \tag{6.6}$$

2. Поскольку T_2 – кинетическая энергия при "замороженных" связях [в самом деле, $\partial\bar{r}_\upsilon / \partial t = 0$ приводит к тому, что $b_i = 0$, $b_0 = 0$ и, соответственно $T = T_2$, см.(6.2)–(6.4)], то всегда

$$T_2 \geq 0, \tag{6.7}$$

причем $T_2 = 0$ только тогда, когда все $\dot{q}_i$ одновременно равны нулю.

Таким образом, квадратичная форма T_2 является положительно определенной, неравенство (6.6) оказывается простым следствием (6.7) одно из неравенств Сильвестра (критерий положительной определенности квадратичной формы [8]) для T_2 имеет вид $\det(b_{ik}) > 0$.

Рассмотрите в качестве примера кинетическую энергию двойного маятника (П10). Убедитесь в том, что квадратичная форма (П10) удовлетворяет критерию Сильвестра.

Подставляя выражение (6.1) для кинетической энергии в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{6.8}$$

---

*) Это можно показать, используя тот факт, что среди функций $x_\upsilon(\bar{q},t), y_\upsilon(\bar{q},t), z_\upsilon(\bar{q},t)$ именно n функций независимы, – никак не меньше, – см [1, с.54-55].

получаем

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\ddot{q}_k + (\ldots) = Q_i(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}). \tag{6.9}$$

Через (...) здесь обозначена сумма членов в левой части (6.8), не содержащих вторых производных от координат по времени.

Система (6.9) – это система n уравнений, линейная относительно n обобщенных ускорений $\ddot{q}_k$. Так как главный определитель $\det(b_{ik})$ системы отличен от нуля [см.(6.6)], можно единственным образом разрешить эту систему относительно $\ddot{q}_k$. Теперь вместо (6.9) получаем

$$\ddot{q}_i = G_i(t,\vec{q},\dot{\vec{q}}), \quad i = [1,n]. \tag{6.10}$$

Но тогда, как известно из теории дифференциальных уравнений, при некоторых предположениях относительно правых частей G_i, которые в механике всегда предполагаются выполненными (например, при существовании непрерывных частных производных первого порядка у функций G_i по всем аргументам этих функций), существует одно и только одно решение уравнений Лагранжа при произвольных наперед заданных начальных значениях $q_i^{(0)}, \dot{q}_i^{(0)}$ для $t = t_0$ ($i = [1,n]$). Таким образом, движение голономной системы однозначно определяется заданными начальным положением системы ($\vec{q}^{(0)}$) и начальными скоростями ($\dot{\vec{q}}^{(0)}$). Еще говорят так: решение задачи Коши для системы уравнений Лагранжа существует и единственно.

Сформулируем теперь **процедуру решения основной задачи динамики несвободной голономной системы.**

1. Выбираются обобщенные координаты, причем этот выбор диктуется в основном симметрией связей (см. рассмотренные выше примеры). Исходные координаты выражаются через обобщенные координаты и время:

$$\vec{r}_\upsilon = \vec{r}_\upsilon(\vec{q},t), \tag{3.2a}$$

а скорости – через $\vec{q}, \dot{\vec{q}}$, и t:

$$\vec{v}_\upsilon \equiv \dot{\vec{r}}_\upsilon = \dot{\vec{r}}_\upsilon(\vec{q},\dot{\vec{q}},t),$$

$$\dot{\vec{r}}_\upsilon = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\upsilon}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_\upsilon}{\partial t}. \tag{5.6}$$

2. Если начальное состояние задано в форме ($\vec{r}^{(0)}, \dot{\vec{r}}^{(0)}$), необходимо вычислить начальные значения обобщенных координат $q_i^{(0)}$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_i^{(0)}$, используя только что приведенные формулы. Вычисление $\vec{q}^{(0)}, \dot{\vec{q}}^{(0)}$ – процедура определенная. Например, требуется найти начальные координаты $q_i^{(0)}$. В силу наличия связей среди начальных значений $x_\upsilon^{(0)}, y_\upsilon^{(0)}, z_\upsilon^{(0)}$ достаточно знать лишь n величин, а остальные определяются с помощью уравнений связей. Таким образом, из уравнений

$$x_\upsilon^{(0)} = \varphi_\upsilon(0, \vec{q}^{(0)}),\ y_\upsilon^{(0)} = \psi_\upsilon(0, \vec{q}^{(0)}),\ z_\upsilon^{(0)} = \chi_\upsilon(0, \vec{q}^{(0)}) \tag{6.11}$$

(в которых мы положили $t_0 = 0$) нужно выбрать систему из n уравнений относительно n величин $q_i^{(0)}$. Решив эту систему, найдем $q_i^{(0)}$. Начальные значения обобщенных скоростей $\dot{q}_i^{(0)}$ определяются с помощью линейных уравнений (5.6), из которых также достаточно выбрать систему из n уравнений.

3. Находятся выражения для обобщенных сил Q_i.

4. Кинетическая энергия системы T выражается через обобщенные координаты, скорости и время : $T = T(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ [см.(6.1)].

5. Записываются уравнения Лагранжа (5.14).

6. Уравнения Лагранжа интегрируются, т.е. находятся функ-ции $q_i(t)$, удовлетворяющие имеющимся начальным условиям.

7. Вычисляются $\vec{r}_\upsilon(t), \vec{v}_\upsilon(t) = \dot{\vec{r}}_\upsilon(t), \vec{a}_\upsilon(t) = \dot{\vec{v}}_\upsilon(t)$ и $\vec{F}_\upsilon(t, \vec{r}(t), \vec{v}(t))$. После этого неизвестные реакции связей вычисляются по формулам

$$\vec{R}_\upsilon = m_\upsilon \vec{a}_\upsilon - \vec{F}_\upsilon. \tag{6.12}$$

Отметим, что если связи отсутствуют (система свободна), то уравнения Лагранжа (5.14) также можно использовать. При этом выбор обобщенных координат определяется симметрией активных сил, действующих на систему. Например, для частицы в центральном силовом поле (скажем, рассматривается движение планеты в гравитационном поле звезды) естественно в качестве обобщенных выбрать сферические координаты.

§7. Потенциальные, гироскопические и диссипативные силы. Теорема об изменении полной (механической) энергии. Диссипативные системы

* Если обобщенные силы не зависят от обобщенных скоростей

$$\bar{Q} = \bar{Q}(t, \bar{q}) \tag{7.1}$$

и существует функция $\Pi\,(t, \bar{q})$ такая, что

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7.2}$$

то силы Q_i называются **потенциальными**, а функция Π – **потенциалом сил или потенциальной энергией.**

Отметим сразу же, что наряду с (7.2) мы будем использовать эквивалентную запись

$$\bar{Q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}}. \tag{7.2a}$$

Равенство (7.2), определяющее потенциальную энергию Π, позволяет переписать выражение (3.8) для суммарной работы активных сил на виртуальных перемещениях в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \equiv \bar{Q} \delta \bar{q} = -\delta \Pi. \tag{7.3}$$

Здесь $\delta \Pi$ – виртуальный дифференциал функции $\Pi\,(t, \bar{q})$:

$$\delta \Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \delta q_i \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} \delta \bar{q}. \tag{7.4}$$

Отметим следующее. Во-первых, при вычислении виртуального дифференциала время t фиксируется; во-вторых, поскольку q_i – величины независимые, то безразлично, как писать: δq_i или dq_i ($\delta \bar{q}$ или $d\bar{q}$). Поэтому для дифференциала (полного) функции $\Pi\,(t, \bar{q})$ имеем

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{q}} d\bar{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt = \delta\Pi + \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt. \qquad (7.5)$$

В случае, когда силовые поля стационарны, а система склерономна (т.е. связи также стационарны), элементарная работа силовых полей на **возможных** перемещениях системы, как это следует из (7.3) и (7.5), имеет вид

$$\delta A = -d\Pi . \qquad (7.6)$$

Проинтегрировав (7.6), получаем равенство

$$A = -\Delta\Pi, \qquad (7.7)$$

представляющее собой известное из общего курса физики определение потенциальной энергии (см.[7], с.85).

Рассмотрим теперь общий случай, когда помимо потенциальных сил, определяемых потенциалом $\Pi\ (\bar{q},t)$, на систему действуют еще непотенциальные силы

$$\tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i(t,\bar{q},\dot{\bar{q}}). \qquad (7.8)$$

Тогда

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i \qquad (7.9)$$

и уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i, \quad i=[1,n]. \qquad (7.10)$$

Определим полную энергию системы как сумму кинетической и потенциальной:

$$E \equiv T + \Pi \qquad (7.11)$$

и вычислим производную dE/dt, т.е. скорость изменения полной энергии. Для этого найдем сначала dT/dt (напомним: $T = T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$)

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (7.12)$$

Рассмотрим последовательно слагаемые в правой части (7.12).

1) Из уравнений Лагранжа и представления (7.9) следует

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = -\tilde{Q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \qquad (7.13)$$

2) Для преобразования суммы $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$ будем использовать выражение (6.1):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(\vec{q},t) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(\vec{q},t) \dot{q}_k + b_0(\vec{q},t).$$

Вычислим производную $\partial T / \partial \dot{q}_i$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(\vec{q},t) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_j \dot{q}_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\vec{q},t) \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i}. \qquad (7.14)$$

Учитывая симметрию коэффициентов b_{jk} и то обстоятельство, что

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} = \delta_{ik}, \qquad (7.15)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \qquad (7.16)$$

окончательно будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(\vec{q},t) \dot{q}_k + b_i(\vec{q},t). \qquad (7.17)$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}(\vec q,t)\dot q_i \dot q_k + \sum_{i=1}^{n} b_i(\vec q,t)\dot q_i. \qquad (7.18)$$

Используя обозначения (6.4), сумму (7.18) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i = 2T_2 + T_1 = 2T - (T_1 + 2T_0). \qquad (7.19)$$

Тогда [см.(7.12), (7.13)]

$$\frac{dT}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)\dot q_i + 2\frac{dT}{dt} - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial T}{\partial t},$$

и,следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\widetilde Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)\dot q_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (7.20)$$

Скорость изменения потенциальной энергии системы:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \qquad (7.21)$$

Таким образом, для полной энергии окончательно имеем

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\widetilde Q_i \dot q_i + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \qquad (7.22)$$

Уравнение (7.22) и есть **теорема об изменении полной энергии.**

Выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\widetilde Q_i \dot q_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}\widetilde Q_i dq_i}{dt} = \frac{\delta \widetilde A}{dt}, \qquad (7.23)$$

где $\delta\tilde{A}$ – суммарная элементарная работа непотенциальных сил $\tilde{Q}_i$. представляет собой мощность непотенциальных сил.

Теорема (7.22) справедлива для произвольной голономной системы.

Рассмотрим частные случаи.

1. **Система склерономная** (связи стационарны)

$$T_1 = 0, \quad T_0 = 0, \quad \partial T / \partial t = 0. \tag{7.24}$$

Уравнение (7.22) приобретает вид

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{7.25}$$

2. **Система склерономная, и потенциальная энергия не зависит явно от времени.** Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i. \tag{7.26}$$

* 3. **Система консервативная**: а) система склерономная; б) все силы потенциальные; в) потенциальная энергия П не зависит явно от времени.

Для консервативной системы

$$\frac{dE}{dt} = 0, \tag{7.27}$$

т.е. при любом движении системы полная энергия не изменяется со временем (сохраняется):

$$E = E(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \text{const}. \tag{7.28}$$

* Физические величины, определяемые состоянием системы и не изменяющиеся при движении системы (т.е. сохраняющиеся), называются **интегралами движения**. Сохраняющаяся полная энергия консервативной системы – пример такого интеграла

Сформулируем некоторые определения

* Непотенциальные силы называются **гироскопическими**, если их (суммарная) мощность равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = 0. \qquad (7.29)$$

Пример – сила Лоренца, действующая на движущуюся в магнитном поле заряженную частицу.

* Непотенциальные силы называются **диссипативными**, если их мощность отрицательна или равна нулю*)

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_i \dot{q}_i \le 0. \qquad (7.30)$$

Пример – сила сопротивления, действующая на тело, движущееся в вязкой среде. $\vec{F}_c = -f(v)\vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость тела, $v \equiv |\vec{v}|$, $f(v) > 0$.

Пусть система склерономная, а потенциальная энергия не зависит явно от времени. Тогда в случае, если непотенциальные силы являются гироскопическими,

$$\frac{dE}{dt} = 0, \qquad (7.31)$$

а если диссипативными, то

$$\frac{dE}{dt} \le 0, \qquad (7.32)$$

т е полная энергия системы убывает при движении системы. В этом случае сама система называется диссипативной

* **Диссипативные системы** – это динамические системы, у которых энергия упорядоченного процесса переходит в энергию неупорядоченного процесса, в конечном счете – в тепловую В механических диссипативных системах полная энергия (сумма кинетической и потенциальной) при движении непрерывно уменьшается (рассеивается), переходя в другие, немеханические формы энергии (например, в теплоту).

---

*) Если система движется, т.е $\dot{\vec{q}} \ne 0$, мощность диссипативных сил строго меньше нуля

§8. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Обобщенный потенциал, обобщенно потенциальные силы. Натуральные и ненатуральные системы

Пусть обобщенные силы Q_i являются потенциальными, т.е. пусть существует потенциал сил (потенциальная энергия) $\Pi = \Pi\ (t,\vec{q})$:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (8.1)$$

Тогда уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \qquad (8.2)$$

можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = [1,n] \qquad (8.3)$$

или, что то же самое,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0, \qquad (8.4)$$

где

* $$L \equiv T - \Pi. \qquad (8.5)$$

* Функция $L = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ называется **функцией Лагранжа** или **кинетическим потенциалом.**

Подчеркнем, что функция Лагранжа зависит от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени, которые рассматриваются как независимые переменные. Функция Лагранжа L, так же как и кинетическая энергия T, является полиномом второй степени относительно обобщенных скоростей:

$$L = L_2 + L_1 + L_0, \qquad (8.6)$$

где

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}(\vec{q},t)\dot{q}_i\dot{q}_k; \quad L_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i(\vec{q},t)\dot{q}_i; \quad L_0 = c_0(\vec{q},t).$$

(8.7а,б,в)

Сравнивая (8.6) и (8.7) с аналогичными соотношениями для кинетической энергии T [см.(6.3), (6.4) и (8.5)], получаем

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1, \quad L_0 = T_0 - \Pi. \qquad (8.8а,б,в)$$

* Рассмотрим теперь случай, когда вместо обычного потенциала $\Pi\ (t,\vec{q})$ существует **обобщенный потенциал** $V(t,\vec{q},\dot{\vec{q}})$, через который обобщенные силы выражаются с помощью формул

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i = [1,n] \qquad (8.9)$$

или

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{q}} \qquad (8.10)$$

* Силы (8.9), (8.10) мы будем называть **обобщенно – потенциальными.**

Если других сил нет, уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{q}} \qquad (8.11)$$

снова можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0, \qquad (8.12)$$

где теперь

* $$L = T - V. \qquad (8.13)$$

Из формул (8.9) следует, что обобщенные силы, вообще говоря, могут оказаться функциями обобщенных ускорений. В самом деле,

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + (\ldots), \qquad (8.14)$$

где через ( ) обозначены слагаемые, не содержащие обобщенных ускорений $\ddot{q}_k$.

Поскольку в механике мы рассматриваем только тот случай, когда обобщенные силы Q_i не зависят явно от обобщенных ускорений, а зависят лишь от времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей*)

$$Q_i = Q_i(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}), \tag{8.15}$$

то, согласно формулам (8.14), в этом случае все частные производные второго порядка от V по обобщенным скоростям должны быть тождественно равны нулю, т.е. обобщенный потенциал V линейно зависит от обобщенных скоростей,

$$V = V_1 + \Pi\ (\vec{q}, t), \tag{8.16}$$

где

$$V_1 = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i(\vec{q}, t)\dot{q}_i. \tag{8.17}$$

Но тогда в соответствии с (8.13) L снова будет квадратичной функцией скоростей $\dot{q}_i$ и вместо равенств (8.8) будем иметь

$$L_2 = T_2;\ \ L_1 = T_1 - V_1;\ \ L_0 = T_0 - \Pi\ . \tag{8.18а,б,в}$$

Подставляя (8.16), (8.17) в (8.9), получаем для обобщенных сил

$$Q_i = \frac{d\Pi_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{n} \Pi_k \dot{q}_k + \Pi\ \right) =$$

$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Pi_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial \Pi_i}{\partial t}. \tag{8.19}$$

---

*) Силы, описывающие обратное действие излучения на излучающие заряженные частицы (силы торможения излучением, или лоренцевы силы трения) не укладываются в схему (8.15): мгновенные значения этих сил зависят от $d^3\vec{q}/dt^3$ [4, с. 262-267]

Формулы (8.19) показывают, что в случае, когда слагаемое V_i в выражении (8.16) для обобщенного потенциала не зависит явно от времени ($\partial\Pi_i/\partial t = 0, i = [1,n]$), обобщенные силы Q_i складываются из потенциальных сил ($-\partial\Pi/\partial q_i$) и гироскопических сил

$$\widetilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k, \quad i = [1,n], \tag{8.20}$$

где

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki} = \frac{\partial\Pi_i}{\partial q_k} - \frac{\partial\Pi_k}{\partial q_i}. \tag{8.21}$$

Гироскопичность сил (8.20), (8.21) проверяется непосредственно. Запишем их суммарную мощность:

$$N = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_k\right)\dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{8.22}$$

Поскольку **i**,**k** в (8.22) – **немые** индексы, т.е. индексы, по которым производится суммирование, то при одновременной замене **i** на **k**, и **k** на **i** результат не должен измениться:

$$N = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ki}\dot{q}_k\dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ki}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{8.23}$$

С другой стороны, в силу антисимметрии величины γ_{ik},

$$\sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ki}\dot{q}_i\dot{q}_k = -\sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{8.24}$$

Таким образом, мы получаем

$$N = -N,$$

откуда

$$N \equiv \sum_{i=1}^{n} \widetilde{Q}_i\dot{q}_i = 0. \tag{8.25}$$

т е силы $\tilde{Q}_i$ удовлетворяют определению гироскопических сил (7 29), что и требовалось доказать

Важнейший пример обобщенно - потенциальных сил - силы, действующие на электрический заряд e в электромагнитном поле [1.с 80-81]. Мы пока не имеем возможности обсуждать обобщенную потенциальность сил, действующих на заряженную частицу со стороны **произвольного** электромагнитного поля, поскольку нам неизвестен (**пока**) способ описания поля с помощью электромагнитных потенциалов, совершенно необходимый в данном случае. Рассмотрим лишь один частный пример, иллюстрирующий сказанное выше по поводу обобщенно потенциальных сил.

Из курса общей физики известно, что сила, действующая на заряд e в электромагнитном поле, есть сумма электрической и магнитной сил [9]:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}\,\vec{B}], \qquad (8\ 26)$$

где $\vec{E}$ - напряженность электрического, а $\vec{B}$ - индукция магнитного полей; $\vec{v}$ - скорость частицы. Пусть электромагнитное поле представляет собой суперпозицию электро**статического** и магнито**статического** полей. Тогда первое слагаемое в правой части (8.26) - **потенциальная** кулоновская сила. Второе слагаемое - лоренцева сила, которая, как известно, является **гироскопической:** ее мощность (суммарная!)

$$N = e[\vec{v}\vec{B}]\vec{v} = e([\vec{v}\vec{B}])_x v_x + e([\vec{v}\vec{B}])_y v_y + e([\vec{v}\vec{B}])_z v_z = 0. \qquad (8.27)$$

* Классические (ньютоновы) системы, в которых обобщенные силы имеют обычный потенциал $\Pi(\vec{q},t)$ или обобщенный потенциал $V(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$, называются **натуральными.**

Для таких систем функция Лагранжа L является полиномом второй степени от обобщенных скоростей, т.е. представляется выражением (8.6), где L_2 (8 7а) - положительно-определенная квадратичная форма относительно обобщенных скоростей, что следует из (8.18а) и (6.7). Отметим сразу же неравенство

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0, \qquad (8.28)$$

эквивалентное (6.6); оно является следствием (8 8а) и очевидного соотношения [см.(8.6), (8.7)]

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 L_2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}.$$

Следует подчеркнуть, что приведенное здесь определение **натуральной системы** неявным образом содержит и **способ построения** функции Лагранжа, опирающийся, в частности, на определение кинетической энергии системы в ньютоновой механике и, наконец, на уравнения Ньютона (2.10)

* Системы, не являющиеся натуральными в определенном выше смысле, называются **ненатуральными системами.**

Очень простым примером ненатуральной системы, как мы увидим в дальнейшем, является свободно движущаяся релятивистская частица.

§9. Некоторые итоги. Уравнения Лагранжа для систем общего типа

Мы до сих пор рассматривали ньютонову механику несвободных систем. Важнейшим итогом этого рассмотрения следует считать систему уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}. \tag{9.1}$$

Более компактными и, следовательно, более удобными являются уравнения, в которых фигурирует не кинетическая энергия системы, а функция Лагранжа L. Обычно именно эти уравнения и называются уравнениями Лагранжа. Мы выяснили, что если силы обобщенно потенциальны, т.е. определяются обобщенным потенциалом $V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$:

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{q}}, \tag{9.2}$$

то, определив функцию Лагранжа формулой

$$L \equiv T - V, \tag{9.3}$$

уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = 0. \qquad (9.4)$$

Уравнения (9.4) получаются из (9.1) непосредственно. Системы, в которых действуют силы (9.2), мы назвали натуральными.

В общем случае, когда в системе действуют также и силы, не являющиеся обобщенно потенциальными, например силы трения, можно записать

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \bar{q}} + \bar{Q}^*, \qquad (9.5)$$

где $\bar{Q}^*$ – эти самые непотенциальные обобщенные силы. Тогда, сохранив для функции Лагранжа определение (9.3), окончательно будем иметь

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} = \bar{Q}^*. \qquad (9.6)$$

Уравнения Лагранжа (9.6) позволяют однозначно решить основную задачу динамики несвободной системы. Способы построения функции Лагранжа и вычисления (определения) обобщенных – в том числе и обобщенно–непотенциальных – сил изложены выше. Таким образом, если говорить о классической (неквантовой) нерелятивистской механике, уравнения Лагранжа в виде (9.6) являются универсальным математическим аппаратом.

Оказывается, что весьма большой общностью обладают также и уравнения (9.4) с нулевой правой частью. Эволюция очень широкого класса систем описывается этими уравнениями. Ниже мы покажем, что движение релятивистской заряженной частицы в электромагнитном поле (ненатуральная система!) также подчинено этим уравнениям. Нужно, однако, иметь в виду, что для расширения области применимости уравнений (9.4) следует отказаться от того алгоритма построения функции Лагранжа, который нами до сих пор применялся.

В дальнейшем мы будем строить функцию Лагранжа динамической системы на основе **принципа наименьшего действия – принципа Гамильтона**, а формулировку этого принципа подскажут полученные нами уравнения Лагранжа в форме (9.4).

* Далее рассматриваются голономные **системы общего типа** – это такие системы, движение которых определяется уравнениями (9.4) с **произвольной** (не обязательно квадратичной по обобщенным скоростям) функцией $L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Мы будем лишь предполагать, что, как и для натуральных систем, имеет место неравенство (8.28):

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0.$$

Уравнения (9.4) в развернутом виде могут быть записаны так:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (\ldots) = 0, \tag{9.7}$$

где через (...) обозначена сумма членов, не содержащих обобщенных ускорений $\ddot{q}_k$. Поскольку определитель системы линейных (относительно $\ddot{q}_k$) уравнений (9.7) отличен от нуля, то систему можно разрешить относительно обобщенных ускорений и записать в виде

$$\ddot{q}_i = \tilde{G}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \tag{9.8}$$

Задавая начальные значения обобщенных координат $\vec{q}^{(0)}$ и обобщенных скоростей $\dot{\vec{q}}^{(0)}$, мы однозначно определяем с помощью (9.8) закон движения системы $\vec{q}(t)$; для рассматриваемых здесь систем общего типа при некоторых ограничениях на правые части (9.8), которые предполагаются всегда выполненными*), решение задачи Коши для системы (9.8) существует и единственно.

Заключая этот раздел, отметим, что некоторые свойства уравнений Лагранжа (9.4) и функции Лагранжа будут рассмотрены в следующем разделе в связи с обсуждением **принципа наименьшего действия.**

---

*) см. текст после формулы (6.10)

§10. Принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона). Свойства функции Лагранжа и уравнений Лагранжа

Рассмотрим систему общего типа, т.е. произвольную голономную систему, эволюция которой описывается уравнениями Лагранжа (9.4). Выпишем здесь эти уравнения еще раз:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0.$$

* Интеграл

$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)dt \qquad (10.1)$$

называется **действием** (по Гамильтону) **за промежуток времени** (t_0, t_1), а выражение $dS = Ldt$ – **элементарным действием.**

Ясно, что для вычисления действия (10.1) необходимо задать функции $q_i = q_i(t)$ в интервале времени $t_0 \le t \le t_1$. Другими словами, действие есть **функционал,** зависящий от движения системы

* Вообще, **функционалом** называется всякое отображение пространства кривых (функций) в числовую ось [3]

Если мы произвольно зададим функции $q_i = q_i(t)$, $i = [1,n]$, то получим некоторое кинематически возможное (т.е допускаемое связями) движение В **расширенном конфигурационном пространстве,** где координатами являются величины q_i и время t, это движение изображается некоторой кривой. Мы будем рассматривать всевозможные такие кривые – "пути", проходящие через две заданные точки пространства $M_0(t_0, \vec{q}^{(0)})$ и $M_1(t_1, \vec{q}^{(1)})$, т.е. все возможные движения, переводящие систему из данного начального положения ($\vec{q}^{(0)}$), которое она занимала в момент времени t_0, в данное конечное положение ($\vec{q}^{(1)}$), которое она занимает в момент времени t_1 (рис. 7, n=2) При этом заранее фиксируется начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1, начальное и конечное положения системы. В остальном движения произвольны

Допустим*), что среди рассматриваемых путей имеется так

---

*) См. п. 10.2, с.55-56.

называемый **прямой путь,** т.е. путь, по которому может двигаться система при заданной функции Лагранжа $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$. (Напомним, что ее структура определяется активными силами, действующими на систему, и наложенными на систему связями). Для прямого пути функции $q_i = q_i(t)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа (9.4).

Все остальные пути, проходящие через точки M_0 и M_1, будем называть **окольными путями.** На рис.7 прямой путь изображен сплошной линией, а окольные пути – пунктирными линиями.

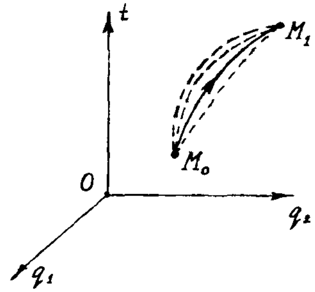

Рис.7

Мы докажем, что действие S имеет для прямого пути экстремальное (точнее, стационарное) значение по сравнению с **близкими** окольными путями. В этом и состоит принцип Гамильтона.

Будем перечислять пути с помощью параметра α, изменяющегося в некотором интервале $[-\gamma,\gamma]$. Рассмотрим произвольное однопараметрическое семейство путей

$$\vec{q} = \vec{q}(t,\alpha), \tag{10.2а}$$

$$t \in [t_0,t_1], \quad \alpha \in [-\gamma,\gamma], \tag{10.2б}$$

содержащее в себе при $\alpha = 0$ прямой путь; при $\alpha \neq 0$ получаются окольные пути. Пусть все эти пути имеют общее начало $M_0(t_0,\vec{q}^{(0)})$ и общий конец $M_1(t_1,\vec{q}^{(0)})$:

$$\vec{q}(t_0,\alpha) = \vec{q}^{(0)}, \ \vec{q}(t_1,\alpha) = \vec{q}^{(1)} \quad \forall\alpha \in [-\gamma,\gamma]. \tag{10.3}$$

Действие S, **вычисленное вдоль пути,** принадлежащего этому семейству, представляет собой функцию параметра α:

$$S(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}(t,\alpha),\dot{\vec{q}}(t,\alpha),t)dt. \tag{10.4}$$

Вычислим **вариацию действия** S, т.е. дифференциал по α:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \qquad (10.5)$$

Здесь мы преобразовали интеграл при помощи интегрирования по частям, использовав для этого перестановочность операции варьирования δ и операции дифференцирования по времени d/dt*):

$$\delta \dot{q}_i = \delta \left(\frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) \right) \delta \alpha =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} q_i(t, \alpha) \delta \alpha \right) = \frac{d}{dt} \delta q_i. \qquad (10.6)$$

Прямой и все окольные пути проходят через фиксированные начальную и конечную точки в расширенном конфигурационном пространстве системы. Поэтому при $t = t_0$ и при $t = t_1$ вариации $\delta q_i = 0$ и проинтегрированная часть [первое слагаемое во второй строке (10.5)] обращается в нуль.

Из равенства (10.5) видно, что для прямого пути (т.е. при $\alpha = 0$) выражение, стоящее под знаком преобразованного интеграла, в силу уравнений Лагранжа равно нулю. Поэтому

* **для прямого пути** $\qquad \delta S = 0$. $\qquad$ (10.7)

Это и есть математическое выражение принципа Гамильтона.

* Верно также и обратное: **если для некоторого пути $\delta S = 0$, то этот путь является прямым.**

Действительно, вследствие произвольности вариаций δq_i (они на концах M_0, M_1 равны нулю, в остальных же точках пути совершенно произвольны) из условия $\delta S = 0$, в силу полученного нами равенства

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt,$$

---

*) Формально $\dfrac{dq_i}{dt} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} q_i(t, \alpha)\Big|_{\alpha=\mathrm{const}}$

следуют уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

определяющие прямой путь. Отметим, что доказательство этого последнего утверждения основано на лемме [3,с.50], которая гласит.

* если непрерывная функция $f(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ такова, что

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$$

для любой непрерывной функции $h(t)$, для которой

$$h(t_0) = h(t_1) = 0,$$

то

$$f(t) \equiv 0.$$

Поскольку из принципа Гамильтона следуют уравнения Лагранжа в независимых координатах (и наоборот), то **принцип Гамильтона может быть положен в основу динамики голономных систем.**

Прямые пути, т.е "истинные" движения при заданной функции Лагранжа, могут быть охарактеризованы как при помощи дифференциальных уравнений движения в форме Лагранжа, так и при помощи **вариационного принципа** Гамильтона Однако между дифференциальными уравнениями движения и вариационными принципами имеется одно существенное различие

Дифференциальные уравнения движения носят локальный характер в пространстве и времени Вариационный же принцип характеризует весь прямой путь в целом Он утверждает экстремальность (стационарность) некоторого функционала, - свойство, выделяющее прямой путь среди других кинематически возможных путей. Вариационные принципы имеют более обозримую и компактную форму и используются в качестве фундамента для новых областей науки, в том числе и новых разделов физики.

Выскажем далее несколько замечаний, касающихся как принципа наименьшего действия непосредственно (п.п 10.1 - 10.2), так и связанных с ним уравнений Лагранжа (п.п. 10.3 - 10.6). В п 10.3 речь идет о важном свойстве симметрии лагранжевых уравнений, которое легко устанавливается с помощью вариационного принципа и состоит в том, что уравнения Лагранжа (9.4) инвариантны относительно преобразования

$$L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) \to L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \frac{df}{dt}, \tag{10.8}$$

где $f = f(\vec{q},t)$ – любая функция обобщенных координат и времени. Указанное свойство уравнений утверждает наличие произвола в выборе функции Лагранжа, описывающей поведение данной динамической системы общего типа: $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ определена с точностью до слагаемого $df(\vec{q},t)/dt$. Здесь же (п.п.10.4, 10.5) обсуждаются свойства функции Лагранжа, о которых мы раньше не упоминали, а также рассмотрены так называемые **циклические координаты** и связанные с ними интегралы движения (п.10.6).

10.1. Дифференциальные уравнения (9.4) представляют собой необходимые и достаточные условия для того, чтобы обращалась в нуль первая вариация δS, где интеграл S имеет вид (10.1) В вариационном исчислении уравнения (9.4) называются уравнениями Эйлера для вариационной задачи

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)dt = 0, \tag{10.9}$$

которая состоит в отыскании **прямого пути** $\vec{q}(t)$, т.е. пути, доставляющего экстремум некоторому функционалу (10.1). Эта задача обладает большой общностью и встречается в многочисленных конкретных реализациях в различных областях науки и техники. В качестве примера такой реализации в теории автоматического управления можно привести задачу о поиске **оптимального** режима эволюции $\vec{q}(t)$ управляемого динамического объекта от заданного начального состояния $(\vec{q}^{(0)},t_0)$ к заданному конечному состоянию $(\vec{q}^{(1)},t_1)$ *), причем под оптимальным понимается такой режим (путь), который соответствует экстремуму критерия качества [функционал (10.1)].

---

*) Точнее, речь идет о начальной и конечной конфигурациях динамического объекта.

10.2. Обсудим вопрос, который остается пока открытым, можно ли подобрать две точки M_0 и M_1 в расширенном конфигурационном пространстве системы $\{\vec{q}, t\}$ так, чтобы через них не проходил ни один прямой путь? Вообще говоря, – да, можно. Вот пример. Пусть функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = L(q,\dot{q}) = -\frac{1}{\dot{q}} - 4q; \tag{10.10}$$

это система с одной степенью свободы, причем координаты и время в (10.10) предполагаются безразмерными (что не принципиально – "обезразмерить" описание всегда можно). Уравнения Лагранжа с L (10.10) дают:

$$\ddot{q} = 2q^3. \tag{10.11}$$

Нетрудно получить общее решение этого дифференциального уравнения второго порядка и убедиться в том, что любое его частное решение обладает следующим свойством $\forall\, t_0, t_1$, где $t_1 > t_0$

$$\left|q^{(1)} - q^{(0)}\right| < \sqrt{t_1 - t_0}. \tag{10.12}$$

Поэтому если выбрать точки $M_0(q^{(0)}, t_0)$ и $M_1(q^{(1)}, t_1)$ так, что

$$\left|q^{(1)} - q^{(0)}\right| > \sqrt{t_1 - t_0}, \tag{10.13}$$

то прямого пути, проходящего через обе эти точки, не существует. Подчеркнем, что неравенство (10.13) означает, что мы выбрали точки M_0 и M_1 **"слишком далеко"** друг от друга

Оказывается, что если M_1 выбрана достаточно близко к M_0, то через M_0, M_1 обязательно проходит, причем только один, прямой путь. При достаточном удалении M_1 от M_0 возникает еще одна возможность через M_0 и M_1 может проходить два или даже целый пучок прямых путей. Такое положение M_0^* точки M_1, когда через M_0, M_1 проходит пучок прямых путей, называют **сопряженным кинетическим фокусом для M_0.** В качестве примера рассмотрим движение материальной точки по гладкой поверхности однородной планеты, имеющей форму шара. Будем считать, что сила гравитационного взаимодействия между точкой и планетой велика и материальная точка от поверхности планеты не отрывается. Очевидно, что прямые пути в этом случае – дуги большого радиуса.

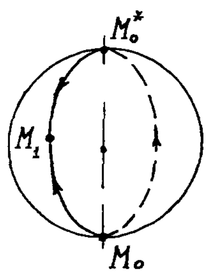

Рис.8

они лежат в плоскостях, проходящих через центр планеты О (рис.8). Через точки M_0, M_1 проходят в данном случае два прямых пути, один из которых – дуга $M_0 M_0^* M_1$ содержащая кинетический фокус M_0^* (см. рис.8). Нетрудно показать, что действие для короткой дуги M_0M_1, не содержащей кинетического фокуса, минимально по сравнению с окольными путями; прямой путь $M_0M_0^*M_1$ этим свойством не обладает [1, с 110-112]. В общем случае ситуация выглядит точно так же, как и в рассмотренном простом примере.

Установлено, что действие вдоль прямого пути $M_0 M_1$ имеет **минимальное** значение по сравнению с близкими окольными путями, если путь M_0M_1 не содержит сопряженного для M_0 кинетического фокуса M_0^*. Таким образом, если требовать **минимальности** *действия для прямого пути (а не экстремальности)*, то окажется, что в такой формулировке принцип наименьшего действия не всегда справедлив для всей траектории в целом, а лишь для каждого из достаточно малых её участков; для всей же траектории может оказаться, что интеграл (10.1) имеет лишь **экстремальное**, не обязательно минимальное значение. Это обстоятельство, однако, совершенно несущественно при выводе уравнений движения из вариационного принципа, выводе, использующем лишь условие экстремальности, даже **стационарности.**

10.3. Приведем доказательство инвариантности уравнений Лагранжа относительно преобразования (10.8). Для этого рассмотрим две функции Лагранжа $L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ и $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$, отличающиеся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени $f(\vec{q},t)$:

$$L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) + \frac{d}{dt}f(\vec{q},t). \qquad (10.14)$$

Вычисленные с помощью этих двух функций интегралы (10.1) связаны соотношением

$$S' = \int_{t_0}^{t_1} L'(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)dt = \int_{t_1}^{t_1} L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{df}{dt}dt =$$

$$=S+f(\bar{q}^{(1)},t_1)-f(\bar{q}^{(0)},t_0), \qquad (10.15)$$

т.е. отличаются друг от друга дополнительным членом, исчезающим при варьировании действия, так что условие $\delta S'=0$ равносильно условию $\delta S=0$ и **вид уравнений движения остается неизменным,** т.е. для L' также имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\bar{q}}}-\frac{\partial L'}{\partial \bar{q}}=0. \qquad (10.16)$$

Таким образом, функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной по времени от любой функции координат и времени. Заметим, что приведенное свойство уравнений Лагранжа можно доказать непосредственно, используя сами лагранжевы уравнения и не обращаясь к принципу наименьшего действия.

10.4. Функция Лагранжа обладает свойством **аддитивности:** если система состоит из двух частей, взаимодействием между которыми можно пренебречь, и L_1 и L_2 – функции Лагранжа этих частей в случае, когда каждая из них является замкнутой, то функция Лагранжа всей системы может быть представлена в виде

$$L=L_1+L_2. \qquad (10.17)$$

Уравнение (10.17) является точным в случае точной замкнутости частей 1 и 2.

Это свойство аддитивности функции Лагранжа выражает тот факт, что уравнения движения каждой из невзаимодействующих частей не могут содержать величины, относящиеся к другим частям системы.

Из аддитивности функции Лагранжа следует аддитивность действия, и наоборот.

10.5. Очевидно, что умножение функции Лагранжа динамической системы на произвольную постоянную само по себе не отражается на уравнениях движения. Отсюда, казалось бы, могла вытекать существенная неопределенность: функции Лагранжа различных изолированных динамических систем могли бы умножаться на любые различные постоянные. Свойство аддитивности устраняет эту неопределенность – оно допускает лишь одновременное умножение лагранжевых функций всех систем на одну и ту же постоянную, что сводится просто к естественному произволу в выборе единиц измерения этой физической величины.

* **10.6.** Обобщенная координата q_k называется **циклической**, если она не входит в функцию Лагранжа явным образом, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \qquad (10.18)$$

* **Обобщенным импульсом** p_k, соответствующим обобщенной координате q_k, называется величина

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \qquad (10.19)$$

Используя определение (10.19), уравнения Лагранжа (9.4) можно представить в форме

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = [1.n]. \qquad (10.20)$$

Очевидно,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow p_k = \text{const}, \qquad (10.21)$$

* т.е. если обобщенная координата q_k является циклической, то соответствующий обобщенный импульс сохраняется (представляет собой интеграл движения).

ПРИМЕР. Рассмотрим движение нерелятивистской частицы массой m в однородном поле силы тяжести напряженностью $\vec{g}$. Будем пользоваться декартовыми координатами x,y,z в качестве обобщенных, полагая что связи отсутствуют:

$$q_1 \equiv x, \quad q_2 \equiv y, \quad q_3 \equiv z. \qquad (\text{П1а,б,в})$$

Считая, что ось OY направлена вертикально вверх (против $\vec{g}$), имеем для потенциальной энергии

$$\Pi = mgy = mgq_2. \qquad (\text{П2})$$

Отсюда функция Лагранжа

$$L = L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, q_2) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_2. \qquad (\text{П3})$$

Обобщенные импульсы в данном случае, как следует из определения (10.19),

$$p_1 = m\dot{q}_1 = m\dot{x} = mv_x \equiv p_x, \qquad (\text{П4а})$$

$$p_2 = m\dot{q}_2 = m\dot{y} = mv_y \equiv p_y; \qquad (П4б)$$

$$p_3 = m\dot{q}_3 = m\dot{z} = mv_z \equiv p_z; \qquad (П4в)$$

это "обычные" или, как говорят, **кинематические** импульсы частицы. Обобщенные координаты q_1 и q_3 цикличны [см.(П3)].

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial q_3} = 0. \qquad (П5а,б)$$

Следовательно, обобщенные импульсы p_1 и p_3 – интегралы движения, т.е.

$$p_1 = p_x = const; \quad p_3 = p_z = const. \qquad (П6а,б)$$

Это – хорошо известный из **школьного** курса физики результат.

В дальнейшем мы будем использовать понятие **вектора обобщенного импульса**

$$\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \qquad (10.22)$$

и, более того, иногда называть **обобщенным импульсом** именно эту величину. В таком случае величины p_k, определенные в (10.19), следует именовать **компонентами обобщенного импульса.**

Еще несколько слов о вариационных принципах.

Вопрос о **происхождении принципа наименьшего действия**, рассмотренного в настоящем разделе, является, очевидно, важнейшим, поскольку, как было сказано, этот принцип не только представляет собой фундамент многих известных областей науки и техники, но и может служить основой при разработке областей новых. Тот путь, который привел **нас** к принципу Гамильтона, позволяет определить его происхождение схемой

опыт: законы Ньютона → уравнения Лагранжа → вариационный принцип или, более коротко,

опыт → вариационный принцип. (10.23)

При формулировке вариационного принципа для конкретного, например, физического, объекта, скажем, электромагнитного поля, проблема состоит в том, как правильно построить выражение для действия S или элементарного действия dS. Оказывается, что так называемых **общих соображений,** в том числе и соображений, связанных с симметрией самого принципа как математического метода (или, что то же самое, симметрией соответствующих уравнений движения),- недостаточно. Необходима информация о свойствах рассматриваемого физического объекта, и эта информация может быть получена только экспериментальным путем Например, такой факт: электромагнитное поле является векторным – его можно отыскать только в природе (а не в голове). При недостатке экспериментальных данных выдвигают гипотезы, которые по форме представляют собой краткое изложение результатов экспериментальных исследований (правда, никем никогда не проводившихся). Заметим, что упомянутые уже **общие соображения** также в конечном счете формируются на основе эксперимента. Таким образом, схема (10.23) является абсолютно достоверной и совершенно универсальной: вариационный принцип возникает как результат систематизации большого объема экспериментальных данных.

§11. Инерциальные системы отсчета. Закон инерции. Принцип относительности Галилея. Преобразование Галилея. Построение функции Лагранжа нерелятивистской свободной частицы

Для изучения физических, в том числе и механических, явлений надо выбрать ту или иную систему отсчета. В разных системах отсчета законы движения выглядят, вообще говоря, по-разному. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики имели бы наиболее простой вид.

По отношению к произвольной системе отсчета пространство является неоднородным и неизотропным. Это значит, что если какое-либо тело не взаимодействует ни с какими другими телами, то, тем не менее, его различные положения в пространстве и его различные ориентации в механическом отношении не эквивалентны. То же самое относится в общем случае и ко времени, которое будет неоднородным, т.е. его различные моменты неэквивалентными. Усложнение, которое вносили бы такие свойства пространства и времени в описание механических явлений, очевидно. Так, например, свободное (т.е. не подвергающееся внешним воздействиям) первоначально покоящееся тело могло бы в некоторый момент начать перемещаться в каком-либо направлении, или вращаться, или, скажем, переместившись и изменив ориентацию в пространстве, сохранять в дальнейшем состояние покоя, проявив таким образом "привязанность" к определенному положению в пространстве, начиная с фиксированного момента времени.

* Оказывается, однако, что всегда можно найти такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время – однородным *) Такая **система отсчета** называется **инерциальной.**

В ней, в частности, свободное тело, покоящееся в некоторый момент времени, остается в покое неограниченно долго

Рассмотрим движение свободной материальной точки (**частицы**) в инерциальной системе отсчета и договоримся, обращаясь к функции Лагранжа частицы, делать вид, что мы забыли, как она выглядит Полезность такого соглашения обсуждается ниже

Однородность пространства и времени и изотропность пространства позволяют сделать некоторые заключения о виде лагранжевой функции частицы. Однородность пространства и времени означает, что она не может явно зависеть ни от радиус-вектора частицы $\vec{r}$, ни от времени t (у нас, кстати, $\vec{q} \equiv \vec{r}$), т е L является функцией лишь от скорости частицы $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$. В силу же изотропии пространства функция Лагранжа не должна зависеть также и от направления вектора $\vec{v}$, так что является функцией лишь от его абсолютной величины, т е от квадрата $\vec{v}^2 = v^2$:

$$L = L(v^2) \qquad (11.1)$$

Ввиду независимости L от $\vec{r}$ имеем $\partial L / \partial \vec{r} = 0$, и поэтому уравнения Лагранжа приобретают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0, \qquad (11.2)$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{const}. \qquad (11.3)$$

Но поскольку $\partial L / \partial \vec{v}$ является функцией только от скорости, то отсюда следует

$$\vec{v} = \text{const}. \qquad (11.4)$$

---

*) Это – постулат, т е положение, основанное на экспериментальных фактах.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в инерциальной системе отсчета свободная материальная точка движется с постоянной по величине и направлению скоростью

* Это утверждение вместе с определением инерциальной системы отсчета (свойства пространства и времени) и постулатом о ее существовании составляет содержание **закона инерции.**

Если наряду с имеющейся у нас инерциальной системой отсчета мы введем другую систему, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то законы свободного движения по отношению к этой новой системе будут теми же, что и по отношению к первоначальной: свободное движение снова будет происходить с постоянной по величине и направлению скоростью

Опыт показывает, что не только законы свободного движения будут одинаковыми в этих системах, но и во всех других механических отношениях системы оказываются полностью эквивалентными. Таким образом, существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно.

* **Принцип относительности Галилея** гласит, во всех инерциальных системах отсчета свойства пространства и времени одинаковы и законы механики имеют один и тот же вид (законы механики формулируются одинаково).

Исключительность свойств инерциальных систем отсчета обуславливает предпочтительность использования именно этих систем при изучении динамики. Ясно, что все инерциальные системы отсчета полностью механически эквивалентны.*)

Пусть имеется материальная точка, за которой следят в двух инерциальных системах отсчета: K и K', причем система отсчета K' движется относительно K со скоростью $\vec{V}$ и в момент времени $t = 0$ начала отсчета 0 и $0'$ в этих системах совмещены

* Один из постулатов **нерелятивистской** механики (и физики вообще) гласит, что **во всех системах отсчета ход времени одинаков** (абсолютное время):

$$t = t'. \qquad (11.5)$$

Координаты $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ частицы в системах отсчета K и K' связаны соотношением

---

*) Полная, а не только механическая, эквивалентность инерциальных систем отсчета обсуждается в следующем параграфе (принцип относительности Эйнштейна).

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t'. \qquad (11.6)$$

Формулы (11.5), (11.6) называют преобразованием Галилея.

Принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование **инвариантности законов механики** [инвариантности уравнений движения или инвариантности принципа наименьшего действия (10 7)] по **отношению к преобразованию Галилея.**

Вернемся к обсуждению функции Лагранжа свободной частицы. Пока мы установили, используя свойства симметрии пространства и времени в инерциальной системе отсчета, что лагранжева функция частицы в такой системе отсчета зависит лишь от величины ее скорости [см (11.1)]. Окончательно вид функции L можно определить, подключив к рассмотрению еще **три** момента: 1) принцип относительности Галилея; 2) инвариантность уравнении движения по отношению к преобразованию (10.8), которое мы перепишем с учетом изменения обозначении ($\vec{q} \equiv \vec{r}$):

$$L \to L' = L + \frac{df}{dt}, \qquad f = f(\vec{r}, t); \qquad (11.7)$$

3) правило преобразования скорости при переходе от одной системы отсчета к другой (правило сложения скоростей)

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}, \qquad (11.8)$$

которое получается при дифференцировании (11.6) по времени.

В силу принципа относительности Галилея функция $L(v^2)$ с точностью до замены (11.7) должна иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. С другой стороны, в системе K'

$$L'(\vec{v}'^2) = L(\vec{v}'^2) = L((\vec{v} - \vec{V})^2). \qquad (11.9)$$

Функциональные зависимости L' и L от своих аргументов мы выбираем одинаковыми именно в силу равноправия инерциальных систем отсчета. Из (11.7) следует, что

$$L(v^2 - 2\,\vec{v}\vec{V} + V^2) - L(v^2) = \frac{df}{dt}. \qquad (11.10)$$

Равенство (11.10) должно выполняться и в случае, когда

$$|\vec{V}| << |\vec{v}|. \qquad (11.11)$$

Используя (11.11), первое слагаемое в уравнении (11.10) можно заменить приближенным выражением*)

$$L(v^2-2\vec{v}\vec{V}+V^2)\approx L(v^2)-\frac{dL(v^2)}{dv^2}2\,\vec{v}\vec{V}. \qquad (11.12)$$

Тогда будем иметь

$$-2\,\vec{v}\vec{V}\frac{dL(v^2)}{dv^2}=\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}\vec{v}+\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}. \qquad (11.13)$$

Сравнивая коэффициенты при векторе скорости $\vec{v}$ в уравнении (11.13), получаем

$$\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}=\text{const},\quad \frac{dL(v^2)}{dv^2}=\text{const}. \qquad (11.14а,б,в)$$

Таким образом, функция Лагранжа пропорциональна квадра-ту скорости свободной частицы:

$$L(v^2)=av^2, \qquad (11.15)$$

где a – постоянная. Непосредственной проверкой легко убедиться в том,что функция Лагранжа (11.15) удовлетворяет равенству (11.10) и для не малых $|\vec{V}|$.

$$L(v^2-2\vec{v}\vec{V}+V^2)-L(v^2)=$$

$$=a(V^2-2\vec{V}\vec{v})=\frac{d}{dt}(aV^2t-2a\vec{V}\vec{r}). \qquad (11.16)$$

У нас получилось $\partial f/\partial t=0$ – равенство (11.14а), а не $\partial f/\partial t=aV^2$, как следует из (11.16), в силу того, что в (11.12) мы ограничились линейным по малому $|\vec{V}|$ приближением.

Обозначим постоянную **a** в (11.15) как m/2, так что окончательно имеем для свободной частицы:

---

*) Подробный вывод см. в приложении I.

$$L = \frac{mv^2}{2}. \qquad (11.17)$$

Величина m – масса частицы, и мы приходим к известной нам функции Лагранжа свободной материальной точки $L = T$ (T – кинетическая энергия).

Казалось бы, зачем было затрачивать усилия только на то, чтобы получить хорошо известный и очень простой результат? Ответ состоит в следующем:

в приведенных выкладках важен не результат, а **способ** его **получения.**

При выводе (11.17) использовались очень общие соображения и позиции:

а) симметрия пространства и времени (в инерциальных системах отчета);

б) инвариантность уравнений движения относительно преобразования (10.8) – общее свойство симметрии лагранжевых уравнений;

в) принцип относительности Галилея;

г) трансформационные свойства вектора скорости (т.е. правило преобразования вектора $\vec{v}$ при переходе в другую систему отсчета).

Если для физической, например, системы фундаментальные уравнения (как уравнения Ньютона в нерелятивистской классической механике) неизвестны, то их строят, используя общие принципы и соображения симметрии, в том числе учитывая известную заранее симметрию искомых уравнений. При этом либо **конструируют** функцию Лагранжа системы способом, аналогичным только что приведенному, либо исходят непосредственно из принципа наименьшего действия и тогда все свойства симметрии и другие общие свойства системы закладываются в **конструкцию** элементарного действия dS. Подчеркнем, что подобное построение **невозможно без учета трансформационных свойств фундаментальных физических величин,** т.е. величин, определяющих состояние системы.

Для фундаментальной физики такой "способ рассуждений", такое мышление являются стандартными.

§12. Релятивистская физика. Принцип относительности Эйнштейна. Событие. Интервал. Преобразование Лоренца. Правило сложения скоростей

В релятивистской ($v \sim c$) физике понятие инерциальной системы отсчета и закон инерции формулируются точно так же, как и в нерелятивистской

* Принцип относительности гласит: **все законы природы** во всех инерциальных системах отсчета имеют один и тот же вид (т.е. одинаковый вид имеют фундаментальные уравнения, выражающие законы природы, эти уравнения инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени, описывающим переход от одной инерциальной системы к другой)

В нерелятивистской физике время носит абсолютный характер (во всех системах отсчета ход времени одинаков). Это связано с представлением о бесконечно большой скорости распространения взаимодействий.

Опыт, однако, показывает, что скорость распространения любого сигнала не превышает некоторой максимальной

* **Существование максимальной скорости распространения взаимодействий** – один из постулатов релятивистской физики

В силу принципа относительности она одинакова во всех инерциальных системах отсчета, т.е. является универсальной постоянной. Как выяснилось, эта постоянная равна скорости света в пустоте:

$$c = 2{,}998 \cdot 10^{10} см/с$$

Приведенный постулат опирается на ряд опытных фактов. В их числе – результат известного опыта Майкельсона (1881г.)*)

* Объединение принципа относительности с постулатом о существовании максимальной скорости распространения взаимодействий называется **принципом относительности Эйнштейна** (1905)

Предельный переход от релятивистской механики к нерелятивистской может быть формально произведен как переход к пределу $c \to \infty$ в формулах релятивистской механики. Ниже мы это увидим и будем этим пользоваться.

Понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности. В самом деле, непосредственным следствием абсолютного характера времени в ньютоновой механике является закон сложения ско-

---

*) Необнаружение "эфирного ветра".

ростей (11.8), который легко выводит в запрещенную область $v > c$. В релятивистской механике (и физике вообще) время носит относительный характер В этой связи здесь рассматривают не пространство отдельно и время отдельно, а единый пространственно-временной континуум, единое пространство–время

Одним из основных понятий релятивистской механики является понятие события.

* **Событие** определяется местом (тремя пространственными координатами), где оно произошло, и моментом времени, когда оно произошло (**временной координатой**). Примеры событий: пребывание материальной точки (**частицы**) в определенном месте в данный момент времени, вспышка маленькой лампочки и т.д.

* Величиной, аналогичной расстоянию между двумя точками в трехмерном пространстве, является в четырехмерном пространстве-времени **интервал** s_{12} **между двумя событиями** (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2):

$$s_{12} \equiv [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}. \quad (12.1)$$

Для двух бесконечно близких событий

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (12.2)$$

Интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т.е. является инвариантом по отношению к преобразованиям, описывающим переход от одной инерциальной системы отсчета к любой другой *)

* Эта инвариантность (как можно показать)**) и является выражением одинаковости скорости света во всех системах отсчета.

Введем обозначения

$$x^{(0)} \equiv ct; \; x^{(1)} \equiv x; \; x^{(2)} \equiv y; \quad x^{(3)} \equiv z. \qquad (12.3а,б,в,г)$$

---

*) Более того, интервал между двумя событиями инвариантен по отношению к переходу от одной произвольной координатной сетки в четырехмерном пространстве-времени, соответствующей, вообще говоря, неинерциальной системе отсчета, к любой другой сетке

**) См. [4, с.15-17].

* Величина $x^{(0)}$ – **временная координата события,** а ($x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$) – совокупность его пространственных координат. Таким образом, событие теперь определяется четырьмя координатами $x^{(i)}$, где $i=0,1,2,3$, или – подробнее – совокупностью ($x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$). Заметим, что размерности временной и пространственных координат совпадают. В обозначениях (12.3) связь между временем и пространством, единство пространства–времени, проступает более отчетливо, выражения (12.1) и (12.2) для интервалов приобретают более симметричную форму:

$$s_{12}^2 = (x_2^{(0)} - x_1^{(0)})^2 - (x_2^{(1)} - x_1^{(1)})^2 - (x_2^{(2)} - x_1^{(2)})^2 - (x_2^{(3)} - x_1^{(3)})^2; \tag{12.4}$$

$$ds^2 = dx^{(0)2} - dx^{(1)2} - dx^{(2)2} - dx^{(3)2}. \tag{12.5}$$

* Четырехмерное пространство, точки которого с координатами $x^{(i)}$ ($i = 0,1,2,3$) сопоставляются с событиями, а расстояния между точками определяются выражением (12.4) или (12.5), называется **пространством** (или пространством–временем) **Минковского.**

* Таким образом, точка пространства Минковского является для события изображающей; она называется **мировой точкой.**

* Кривая в пространстве-времени, изображающая движение классической (неквантовой) точечной частицы, т.е. непрерывную последовательность событий, отвечающих положению частицы в пространстве в каждый момент времени, называется **мировой линией.** Приведенное определение мировой линии распространяют и на световые лучи. В этом случае мировая линия – непрерывная последовательность событий, каждое из которых состоит в приходе светового сигнала в данную точку пространства в данный момент времени.

Преобразование координат событий при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой должно оставлять интервалы инвариантными. Задача поиска такого преобразования выглядит совсем просто, если ввести в рассмотрение величины

$$\xi^{(0)} \equiv x^{(0)};\ \xi^{(1)} \equiv ix^{(1)};\ \xi^{(2)} \equiv ix^{(2)};\ \xi^{(3)} \equiv ix^{(3)}. \tag{12.6а,б,в,г}$$

В самом деле, вместо (12.4) теперь запишем

$$s_{12}^2 = \left(\xi_2^{(0)} - \xi_1^{(0)}\right)^2 + \left(\xi_2^{(1)} - \xi_1^{(1)}\right)^2 + \left(\xi_2^{(2)} - \xi_1^{(2)}\right)^2 + \left(\xi_2^{(3)} - \xi_1^{(3)}\right)^2. \tag{12.7}$$

так что формально s_{12} представляет собой расстояние между двумя точками с радиус-векторами $\bar{\xi}_1$ и $\bar{\xi}_2$ в четырехмерном евклидовом пространстве, и нам нужно найти преобразование координат $\xi^{(i)}$ такое, которое сохраняет расстояние.

Из курса аналитической геометрии известно, что расстояние s_{12} между двумя точками сохраняется (т.е. не изменяется правило (12.7), по которому производится вычисление, и его результат) при поворотах (вращениях) и трансляциях ортонормированного координатного репера. Трансляции – параллельный перенос – нас интересовать не будут, поскольку такое преобразование координатного репера означает просто переход к другому выбору начала отсчета: $\bar{\xi} \to \bar{\xi}' = \bar{\xi} - \bar{\xi}_0$.

При вращениях ортонормированного координатного репера координаты преобразуются по известным правилам; например, при повороте координатного репера в плоскости $\xi^{(0)} O \xi^{(1)}$ на угол φ, связь между старыми $\xi^{(i)}$ и новыми $\xi'^{(i)}$ координатами точки дается формулами:

$$\xi^{(0)} = \xi'^{(0)}\cos\varphi - \xi'^{(1)}\sin\varphi; \qquad (12.8а)$$

$$\xi^{(1)} = \xi'^{(0)}\sin\varphi + \xi'^{(1)}\cos\varphi; \qquad (12.8б)$$

$$\xi^{(2)} = \xi'^{(2)}; \qquad (12.8в)$$

$$\xi^{(3)} = \xi'^{(3)}. \qquad (12.8г)$$

Из всего сказанного следует, что (12.8а,б,в,г) является частным случаем преобразования, описывающего переход от одной инерциальной системы отсчета к другой: оно затрагивает время ($\xi^{(0)}$) и поэтому не может сводиться к тривиальному преобразованию пространственных координат. Для того, чтобы придать преобразованию (12.8) физически ясную форму, нужно поработать с равенствами (12.8а,б). Во-первых, вернемся к величинам $x^{(i)}$:

$$x^{(0)} = x'^{(0)}\cos\varphi - ix'^{(1)}\sin\varphi; \qquad (12.9а)$$

$$ix^{(1)} = x'^{(0)}\sin\varphi + ix'^{(1)}\cos\varphi\,. \qquad (12.9б)$$

При действительном φ (12.9а,б) описывали бы переход к комплексным координатам. Поэтому будем считать, что "угол поворота" φ в (12.8) – чисто мнимый:

$$\varphi = i\theta, \qquad (12.10)$$

где θ – уже действительный параметр. Переходя от тригонометрических к гиперболическим функциям

$$\cos(i\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \mathrm{ch}\theta; \qquad (12.11а)$$

$$-i\sin(i\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = \mathrm{sh}\theta, \qquad (12.11б)$$

вместо (12.9) имеем:

$$x^{(0)} = x'^{(0)}\mathrm{ch}\theta + x'^{(1)}\mathrm{sh}\theta; \qquad (12.12а)$$

$$x^{(1)} = x'^{(0)}\mathrm{sh}\theta + x'^{(1)}\mathrm{ch}\theta. \qquad (12.12б)$$

Нам осталось теперь только выяснить смысл параметра θ.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' такие, что оси OX и $O'X'$ совпадают, оси OY, OZ и $O'Y'$, $O'Z'$ соответственно параллельны и система отсчета K' движется относительно K со скоростью V в направлении оси $OX(V \equiv V_x)$, причем начало отсчета времени (в обеих системах) выбрано в тот момент, когда системы координат в K и K' совпадают. Таким образом, закон движения начала координат O' в системе отсчета K имеет вид

$$x = Vt, \qquad (12.13)$$

или, если использовать координаты $x^{(i)}$ с цифровыми индексами,

$$x^{(1)} = \frac{V}{c}x^{(0)}. \qquad (12.13а)$$

Из равенств (12.12а,б) при $x'^{(1)} = 0$ получаем

$$x^{(1)} = x^{(0)}\mathrm{th}\theta. \qquad (12.14)$$

Сравнение (12.13 а) и (12.14) дает для параметра θ:

$$\mathrm{th}\theta = \frac{V}{c}. \qquad (12.15)$$

Известные соотношения между гиперболическими функциями позволяют выразить коэффициенты линейного однородного преобразования (12.12а,б) через скорость V:

$$\mathrm{ch}\theta = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \qquad \mathrm{sh}\theta = \frac{V/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \qquad (12.16а,б)$$

Запишем полученное преобразование полностью, учитывая также и равенства (12.8 в,г):

$$x^{(0)} = \frac{x'^{(0)} + (V/c)\,x'^{(1)}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \qquad (12.17а)$$

$$x^{(1)} = \frac{x'^{(1)} + (V/c)\,x'^{(0)}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \qquad (12.17б)$$

$$x^{(2)} = x'^{(2)}; \qquad (12.17в)$$

$$x^{(3)} = x'^{(3)}. \qquad (12.17г)$$

Возвращаясь к величинам (t,x,y,z), (t',x',y',z'), вместо (12.17а,б,в,г) имеем:

$$t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \qquad (12.18а)$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \qquad (12.18б)$$

$$y = y'; \qquad z = z'. \qquad (12.18в,г)$$

Формулы (12.17) или, что то же самое, (12.18) называются преобразованием Лоренца*). Нетрудно убедиться в том, что при $V/c \to 0$ (12.8а,б,в,г) приводит к преобразованию Галилея:

$$t = t'; \quad x = x' + Vt'; \quad y = y'; \quad z = z'. \qquad (12.19)$$

Отметим следующее:

1.Преобразование, обратное (12.17а-г) или (12.18а-г), получается из этих же формул одновременной заменой

$$x^{(i)} \to x'^{(i)}, \quad x'^{(i)} \to x^{(i)}, \quad V \to -V \qquad (12.20)$$

или

$$(t,x,y,z) \to (t',x',y',z'), (t',x',y',z') \to (t,x,y,z), \; V \to -V \qquad (12.21)$$

2. При $V>c$ преобразование Лоренца теряет смысл в соответствии с основным постулатом релятивистской физики

3. Выведенное нами преобразование Лоренца (12.17а,б,в,г), (12.18а,б,в,г) – это преобразование **однопараметрическое:** переход от одной системы отсчета к другой характеризуется всего одним параметром (V/c).

4. Правило преобразования скорости (**релятивистский закон сложения скоростей**) устанавливается с помощью замены в (12 18)

$$(t,x,y,z) \to (dt,dx,dy,dz); \qquad (12.22а)$$

$$(t',x',y',z') \to (dt',dx',dy',dz') \qquad (12.22б)$$

и определения

$$\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt \; (\vec{v}' \equiv d\vec{r}'/dt'). \qquad (12.23)$$

Скорость преобразуется по формулам

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}; \qquad (12.24а)$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1-(V/c)^2}}{1 + v'_x V/c^2}; \qquad (12.24б)$$

---

*) Строго говоря, – это частный случай преобразования Лоренца – преобразование, затрагивающее лишь одну пространственную координату.

$$v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-(V/c)^2}}{1+v'_x V/c^2}, \qquad (12.24в)$$

откуда при $V/c\to 0$ получаем закон сложения скоростей по Галилею [см. (12.19)]:

$$v_x = v'_x + V; \quad v_y = v'_y; \quad v_z = v'_z. \qquad (12.25)$$

5. Квадрат интервала (12.2) или (12.1) [а также (12.4) и (12.5) – в дальнейшем будем для определенности говорить о **выражении (12.2)**] может быть положительным, нулевым или отрицательным. Поскольку ds^2 – инвариант, то это свойство (**знак ds^2**) не зависит от выбора системы отсчета и характеризует физически различные взаимоотношения между событиями.

Если $ds^2 > 0$, интервал между двумя событиями называется **времениподобным,** при этом найдется инерциальная система отсчета (ИСО), в которой эти события происходят в одной пространственной точке. Такую ИСО можно связать с движущейся частицей, имеющей конечную массу, тогда ds можно истолковать как умноженный на c промежуток **собственного времени τ:**

$$ds = c d\tau, \qquad (12.26)$$

т.е. времени, измеренного по часам, движущимся вместе с частицей.

Если $ds^2<0$, то интервал называется **пространственноподобным;** в этом случае не существует ИСО, в которой события происходят в одной пространственной точке, но существует ИСО, в которой эти события одновременны. Ясно, что такие события не могут быть причинно связанными друг с другом. Временная последовательность двух событий, разделенных пространственноподобным интервалом, неабсолютна: существует ИСО, в которой первое событие предшествует второму, и другая ИСО, в которой второе предшествует первому.

Нарушение при преобразованиях Лоренца (т.е. при переходе от одной ИСО к другой) временной последовательности событий, разделенных пространственноподобным интервалом, в совокупности с принципами квантовой теории приводит к важному следствию – необходимости существования античастиц [10, с.156]. Рассмотрим два события: P_1, состоящее в испускании нейтроном π^- – мезона с образованием протона ($n\to p+\pi^-$), и P_2, состоящее в поглощении π^- – мезона другим протоном p' с образованием нейтрона $n'(p' + \pi^- \to n')$. Вследствие **соотношения неопределенностей** имеется отличная от нуля вероятность второго события с участием той же частицы π^-, даже если интервал s_{12} между этими событиями пространственноподобен, при условии, что $|s_{12}| \le \lambda$, где λ – комптоновская длина волны π^--мезона. Но тогда найдется такая ИСО, в которой поглощение π^- протоном наблюдалось бы до его испускания. Разрешение парадокса в квантовой теории состоит в том, что событие P_2 можно понимать не как поглощение π^- протоном, а как испускание протоном частицы той же массы, но с противоположным знаком заряда, т.е. ее **античастицы** – π^+-мезона: $p' \to n' + \pi^+$. Аналогично событие P_1 будет состоять в поглощении π^+ нейтроном с образованием протона: $n + \pi^+ \to p$. Таким образом, существование античастиц оказывается тесно связанным со свойствами пространства-времени

Нулевое значение интервала, $ds^2 = 0$ **(изотропный интервал)**, соответствует событиям, лежащим на **мировых линиях** безмассовых частиц (частиц с нулевой массой покоя), например фотонов, движущихся со скоростью **c**. В самом деле, такая частица за время dt проходит расстояние

$$dl = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2} = cdt, \qquad (12.27)$$

где dx, dy, dz – приращения координат частицы за время dt, или проекции элемента мировой линии частицы на координатные оси OX, OY, OZ соответственно. Тогда, очевидно (см. 12.2),

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = 0. \qquad (12.28)$$

Интервал (12.28) вычислен для двух событий, первое из которых состоит в отправлении фотона (светового сигнала) из некоторой точки пространства в некоторый момент времени, а второе – в прибытии этого фотона (светового сигнала)*) в бесконечно близкую точку через малый промежуток времени dt. Инвариантность равенства $ds=0$ по отношению к выбору ИСО является **непосредственным** математическим выражением того физического факта, что скорость света во всех ИСО одинакова [4, с 15-17].

---

*) Понятия "фотон" и "световой сигнал" не являются, вообще говоря, синонимами; полагаем, что читателю это известно.

§13. Трансформационные свойства физических величин. Четырехмерные скаляры, векторы, тензоры. Ковариантные и контравариантные компоненты векторов и тензоров, связь между ними. Примеры

Рассматривая элементы релятивистской физики, мы, в основном, будем ограничиваться рамками специальной теории относительности (СТО), работать в инерциальных системах отсчета, т.е. в пространстве Минковского; некоторые обобщения даны в приложениях, соответствующие ссылки в тексте имеются.

В этом разделе речь идет о трансформационных свойствах физических величин, т.е. о правилах, с помощью которых, зная ту или иную физическую величину в одной системе отсчета, можно вычислить значение этой физической величины в другой системе отсчета, если известно, каково движение второй относительно первой.

Наибольшую важность представляют трансформационные свойства фундаментальных физических величин, (т.е. величин, определяющих состояние физической системы). Например, в теории классических полей фундаментальные величины – это так называемые **полевые функции**; они могут быть однокомпонентными или многокомпонентными, обладать теми или иными свойствами симметрии, т.е., вообще говоря, представляют собой (для различных полей) существенно различные математические объекты, которые при "поворотах" четырехмерной системы координат в пространстве Минковского преобразуются по-разному. Математический характер полевой функции определяется **физической** информацией о том, как устроено данное поле. Оказывается, что скалярные поля (полевая функция – **четырехмерный скаляр**) соответствуют частицам с нулевым **спином** (π – мезоны, например), векторные (полевая функция – четырехмерный вектор) – частицам со спином, равным единице (например, фотон – мы уже упоминали, что электромагнитное поле является векторным); гравитационное поле – **тензорное** (спин гравитона равен двум), а поля, соответствующие фермионам (полуцелый спин – электроны, протоны, нейтроны и т.д.), – **спинорные***).

Таким образом, трансформационные свойства физических величин отражают важнейшие **физические** свойства рассматриваемых систем. В практическом плане знание трансформационных

---

*) См.[11, гл.1, с.17-48]; там же можно посмотреть, как формулируется принцип наименьшего действия и пишутся уравнения Лагранжа *для полей – непрерывно распределенных систем*, в *отличие* от рассмотренных нами систем дискретных.

свойств позволяет при решении конкретной задачи использовать наиболее удобную систему отсчета – иначе говоря, возникает возможность производить замену переменных, без чего никакую сколько-нибудь нетривиальную задачу решить невозможно.

Переходим к определениям. Подчеркнем, что приводимые здесь определения даны в рамках СТО – нам этого вполне достаточно; общие определения четырехмерных скаляров, векторов и тензоров перенесены в приложение 2. Напомним также, что **поворотом четырехмерной системы координат** (в пространстве Минковского) мы называем переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, также инерциальной; преобразование (12 17) соответствует частному случаю такого поворота.

* **Четырехмерным скаляром или 4-скаляром** называется величина, инвариантная по отношению к поворотам четырехмерной системы координат.

Примеры 4-скаляров: скорость света **с** (постулат), интервал между двумя событиями, электрический заряд частицы.

Совокупность координат события (ct,x,y,z) можно рассматривать как компоненты **четырехмерного радиус-вектора** (или **4-радиус-вектора)** X в четырехмерном пространстве. Будем обозначать эти компоненты через x^i, где индекс i пробегает значения 0,1,2,3, причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z; \tag{13.1}$$

таким образом,

$$X = (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{13.2}$$

Отметим, что обозначения (13.1) мы, собственно, уже использовали [см.(12.3)]. Договоримся в дальнейшем не заключать цифровые индексы в скобки, как это было сделано в §12, чтобы избежать путаницы.

Квадрат "длины" 4-радиус-вектора (13 2) дается выражением

$$|X|^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{13.3}$$

Величина $|X|^2$ – инвариант по отношению к поворотам **4-системы координат,** т.е. 4-скаляр. В самом деле, выражение (13.3) представляет собой квадрат интервала между двумя событиями, (0,0,0,0) и (t,x,y,z), что и доказывает его инвариантность

* Вообще **четырехмерным вектором (4-вектором)** A^i (или **4-тензором первого ранга)** называется совокупность четырех величин A^0, A^1,A^2,A^3, которые при поворотах четырехмерной системы координат преобразуются, как компоненты 4-радиус-вектора x^i.

Например, при переходе от системы отсчета K к системе K′, движущейся относительно K со скоростью V в направлении оси OX, имеем [см.(12.17)].

$$A^0 = \frac{A'^0 + (V/c)A'^1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \qquad (13.4а)$$

$$A^1 = \frac{A'^1 + (V/c)A'^0}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \qquad (13.4б)$$

$$A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3. \qquad (13.4в,г)$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$|A|^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2. \qquad (13.5)$$

Для удобства записи подобных выражений вводят два "сорта" компонент 4-векторов, обозначая их буквами A^i и A_i с индексами сверху и снизу. При этом

* $$A_0 = A^0, \; A_1 = -A^1, \; A_2 = -A^2, \; A_3 = -A^3. \qquad (13.6а,б,в,г)$$

* Величины A^i называют **контравариантными**, а A_i – **ковариантными компонентами** 4-вектора.

Квадрат 4-вектора представится теперь в виде

$$|A|^2 = \sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0A_0 + A^1A_1 + A^2A_2 + A^3A_3. \qquad (13.7)$$

Такие суммы принято записывать просто как A^iA_i, опуская знак суммирования. Вообще принимается правило, согласно которому по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, подразумевается суммирование, а знак суммы опускается. При этом в каждой паре одинаковых индексов один должен стоять наверху, а другой внизу. Такой способ обозначения суммирования по, как говорят, **немым индексам** очень удобен и значительно упрощает запись формул.

Аналогично квадрату 4-вектора составляется **скалярное произведение** двух разных **4-векторов:**

$$A^iB_i = A^0B_0 + A^1B_1 + A^2B_2 + A^3B_3. \tag{13.8}$$

Очевидно, его можно записать как в виде A^iB_i, так и в виде A_iB^i,– результат от этого не меняется. Вообще во всякой паре немых индексов всегда можно переставлять верхний и нижний индексы.

Скалярное произведение A^iB_i является 4-скаляром. Инвариантность A^iB_i по отношению к преобразованию Лоренца (12.17) проверяется непосредственно, надо лишь иметь в виду, что определение (13.6) ковариантных компонент 4-векторов инвариантно, т.е. равенства (13.6) справедливы во всех инерциальных системах отсчета, в частности

$$B'_0 = B'^0,\ \ B'_1 = -B'^1,\ \ B'_2 = -B'^2,\ \ B'_3 = -B'^3. \tag{13.9а,б,в,г}$$

Компоненту 4-вектора A^0 называют временной, а компоненты A^1, A^2, A^3 – пространственными (по аналогии с 4-радиус–вектором). Квадрат 4-вектора *может быть положительным* (**времениподобный вектор**), отрицательным (**пространственноподобный вектор**) и нулевым (**изотропный вектор**)*).

По отношению к чисто пространственным поворотам (т.е. преобразованиям, не затрагивающим оси времени) три пространственные компоненты 4-вектора A^i составляют трехмерный вектор $\bar{A}$. Временная же компонента A^0 представляет собой (по отношению к тем же преобразованиям) трехмерный скаляр. Перечисляя компоненты 4-вектора, их часто записывают в виде

$$A^i = (A^0, \bar{A}). \tag{13.10}$$

Ковариантные компоненты того же 4-вектора:

$$A_i = (A^0, -\bar{A}). \tag{13.11}$$

Квадрат 4-вектора:

$$|A|^2 = A^iA_i = (A^0)^2 - \bar{A}^2. \tag{13.12}$$

*) По аналогии с интервалами (см.§ 12).

ПРИМЕРЫ

П1. Волновой 4-вектор k^i.

$$k^i = (\omega/c, \vec{k}), \qquad (\text{П}1.1)$$

где ω – круговая (или циклическая) частота электромагнитной волны; $\vec{k}$ – трехмерный волновой вектор. Величина $\omega/|\vec{k}|=V_\phi$ – фазовая скорость электромагнитной волны. В вакууме V_ϕ=c, следовательно,

$$\omega/|\vec{k}| = c, \qquad (\text{П}1.2)$$

откуда получаем для квадрата волнового 4-вектора

$$|k|^2 = k^i k_i = (\omega/c)^2 - \vec{k}^2 = 0. \qquad (\text{П}1.3)$$

Таким образом, k^i – изотропный 4-вектор.

Умножив k^i на постоянную Планка, получаем 4-вектор

$$p^i_{(ph)} = \hbar k^i = (\hbar\omega/c, \hbar\vec{k}) = (\varepsilon_{(ph)}/c, \vec{p}_{(ph)}). \qquad (\text{П}1.4)$$

Это 4-вектор импульса фотона.

Четырехмерный вектор импульса для частиц с отличной от нуля массой покоя будет введен в следующем параграфе.

П2. 4-потенциал электромагнитного поля.

В электродинамике часто используются не "поля" $\vec{E}$ и $\vec{B}$, а электромагнитные потенциалы $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$. Величину $\varphi(\vec{r},t)$ называют скалярным потенциалом, а $\vec{A}(\vec{r},t)$ – векторным. Напряженность электрического и индукция магнитного полей выражаются через потенциалы по формулам

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}; \qquad (\text{П}2.1)$$

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \qquad (\text{П}2.2)$$

где c– скорость света в вакууме*).

---

*) Здесь и далее используется гауссова система единиц (в механике соответственно система СГС), принятая в классических разделах теоретической физики. В системе СИ, например, уравнение (П2.2) имеет тот же вид, а уравнение (П2.1) немного отличается:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t.$$

Смысл использования электромагнитных потенциалов, помимо прочего, состоит в том, что, решая основную задачу электродинамики – вычисление полей по заданным источникам, не нужно беспокоиться о том, чтобы найденное решение удовлетворяло первой паре уравнений Максвелла (не содержащей источников – зарядов и токов) – подстановка (П2.1), (П2.2) удовлетворяет первой паре автоматически, и задача сводится, таким образом, к определению электромагнитных потенциалов (всего 4 неизвестные функции координат и времени) из уравнений второй пары.

Электромагнитные потенциалы образуют 4-вектор, который называется 4-потенциалом электромагнитного поля:

$$A^i = (\varphi, \vec{A}). \qquad (П2.3)$$

Для ковариантных компонент, в соответствии со сказанным выше, имеем

$$A_i = (\varphi, -\vec{A}). \qquad (П2.4)$$

Таким образом, скалярный потенциал φ оказывается временной (или нулевой) компонентой 4-потенциала, а пространственные компоненты 4-потенциала образуют векторный потенциал $\vec{A}$.

Правило преобразования компонент 4-потенциала A^i при переходе (12.17) в другую систему отсчета у нас уже есть – это формулы (13.4), перепишем их, используя (П2.3):

$$\varphi = \frac{\varphi' + (V/c)A'_{x'}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad (П2.5а)$$

$$A_x = \frac{A'_{x'} + (V/c)\varphi'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \qquad (П2.5б)$$

$$A_y = A'_{y'}; \quad A_z = A'_{z'}. \qquad (П2.5в,г)$$

П3. 4-градиент 4-скаляра.

Пусть имеется функция

$$\Phi(X) \equiv \Phi(x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad (П3.1)$$

которая является 4-скаляром. 4-градиент этой функции

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{r}} \right) \qquad (П3\ 2)$$

есть ковариантный 4-вектор В самом деле, скалярное произведение 4-градиента Ф на **контравариантный вектор** $\mathbf{dx^i}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dx^i = d\Phi \qquad (П3\ 3)$$

представляет собой дифференциал 4-скаляра, т е также скаляр Градиент скаляра Ф формально можно представить как произведение оператора дифференцирования по координатам x^i,$\partial/\partial x^i$, на скаляр Отсюда следует, что этот оператор $\partial/\partial x^i$ должен рассматриваться как ковариантный вектор

* **Четырехмерным тензором (4-тензором) второго ранга** называется совокупность 16 величин A^{ik}, которые при преобразовании координат преобразуются как произведения компонент двух 4-векторов

Аналогичным образом определяются и 4-тензоры высших рангов

Компоненты 4-тензора 2-го ранга могут быть представлены в трех видах как контвариантные A^{ik}, ковариантные A_{ik} и смешанные A^i_k В последнем случае надо, вообще говоря, различать A^i_k и A_k^i, т е следить за тем, какой именно (первый или второй) индекс стоит вверху, а какой внизу Чтобы избежать недоразумений, часто под верхним индексом ставят точку – тогда ясно, с какой позиции поднят индекс, примеры такой записи

$A^{i}_{\bullet k}$, $B_{i\bullet}^{\ k}$, $D_{i\bullet lm}^{\ k}$

Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1,2,3) меняет знак компоненты Примеры

$$A_{00} = A^{00},\ A_{01} = -A^{01},\ A_{11} = A^{11},\ldots \qquad (13\ 13а)$$

$$A^{0}_{\bullet 0} = A^{00},\ A_{0\bullet}^{\ 1} = A^{01},\ A^{0}_{\bullet 1} = -A^{01},\ A_{1\bullet}^{\ 1} = -A^{11},\ldots \qquad (13\ 13б)$$

По отношению к чисто пространственным преобразованиям девять компонент A^{11},A^{12}, ,A^{33} составляют **трехмерный тензор,** три компоненты A^{10},A^{20},A^{30} составляют **трехмерный вектор**, это же касается тройки A^{01}, A^{02}, A^{03}, компонента A^{00} является **трехмерным скаляром**.

Во всяком тензорном равенстве – это относится и к тензорам первого ранга, т.е. 4-векторам,– выражения с обеих сторон должны содержать одинаковые и одинаково расположенные (вверху или внизу) **свободные**, т.е. не немые, **индексы**. Свободные индексы в тензорных равенствах можно перемещать (вверх или вниз), но обязательно одновременно во всех членах уравнения. Приравнивание же контра - и ковариантных компонент различных тензоров "незаконно": такое равенство, даже если бы оно случайно имело место в какой-либо системе отсчета, нарушилось бы при переходе к другой системе.

Из компонент тензора A^{ik} можно образовать скаляр путем образования суммы

$$A^{i}_{\bullet i} = A^{0}_{\bullet 0} + A^{1}_{\bullet 1} + A^{2}_{\bullet 2} + A^{3}_{\bullet 3} \qquad (13.14)$$

(при этом, конечно, $A^{i}_{\bullet i} = A_{i\bullet}^{\ i}$).

* Сумму $A^{i}_{\bullet i}$ называют **следом тензора**, а об операции его образования говорят как о **свертывании или упрощении тензора.**

У симметричных тензоров $A_{ik}=A_{ki}$ смешанные компоненты подчинены равенству $A_{i\bullet}^{\ k} = A^{k}_{\bullet i}$, поэтому индексы можно располагать один над другим, что всегда и делают:

$$A_{i\bullet}^{\ k} = A^{k}_{\bullet i} \equiv A^{k}_{i}. \qquad (13.15)$$

* **Единичным 4-тензором** называется тензор δ^{i}_{k}, для которого имеет место равенство

$$\delta^{i}_{k} A^{k} = A^{i} \qquad (13.16)$$

при **любом** 4-векторе A^{i}. Очевидно, что компоненты этого тензора

$$\delta^{i}_{k} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k, \\ 0, \text{ если } i \neq k. \end{cases} \qquad (13.17)$$

Его след $\delta^{i}_{i} = 4$.

* Поднимая у тензора δ^i_k один или опуская другой индекс, мы получаем контра- или ковариантный тензор, который обозначают как g^{ik} или g_{ik} соответственно и называют **метрическим тензором.**

Тензоры g^{ik} и g_{ik} имеют одинаковые компоненты, которые можно представить в виде таблиц:

$$(g_{ik})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix};\quad (g^{ik})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad (13.18а,б)$$

где индекс i нумерует строки, а k – столбцы, номера которых 0,1,2,3. Тензор g_{ik} (а также g^{ik}) имеет так называемый **диагональный вид:** отличны от нуля только компоненты с $i=k$. В подобных случаях вместо (13.18) удобнее использовать записи вида

$$g_{ik}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1),\quad g^{ik}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1). \qquad (13.19а,б)$$

С помощью метрического тензора "поднимают" и "опускают" индексы 4-тензоров, т.е. переходят от ковариантных компонент к контравариантным и наоборот. Например,

$$g_{ik}A^k=A_i,\quad g^{ik}A_k=A^i,$$

$$A^i_{\bullet k}=g_{mk}A^{im},\qquad A^{ik}=g^{im}g^{kn}A_{mn}. \qquad (13.20а,б,в,г)$$

Равенство (13.20а) можно записать и так:

$$g_{ki}A^k=A_i. \qquad (13.21)$$

т.е. "поднимающим" или "опускающим" может быть как первый, так и второй индекс метрического тензора [ср.(13.20б) и (13.20в)] – это безразлично, поскольку **метрический тензор симметричен:**

$$g_{ik}=g_{ki},\quad g^{ik}=g^{ki}. \qquad (13.22а,б)$$

Ясно,что тензоры g_{ik} и g^{ik} являются взаимно обратными:

$$g_{ik}g^{mk}=\delta^m_i. \qquad (13.23)$$

Скалярное произведение двух 4-векторов и след тензора второго ранга можно записать, используя метрический тензор, в виде

$$A^iB_i = g_{im}A^iB^m, \qquad (13.24)$$

$$A^i_{\bullet i} = g_{ik}A^{ik}. \qquad (13.25)$$

Введенные здесь тензоры g_{ik}, g^{ik} исключительны в том отношении, что их компоненты одинаковы во всех **инерциальных** системах отсчета.

Тензор δ^i_k обладает инвариантностью "более высокого порядка", его вид (13.17) не изменяется при произвольном преобразовании 4-мерной системы координат (не только при повороте), в том числе и при переходе к произвольной криволинейной координатной сетке

Отметим важный момент.

Тензор g_{ik}, называемый **метрическим** (или обратный ему тензор g^{ik}), определяет, как говорят, **метрику** пространства-времени, с помощью этого тензора вычисляется интервал между двумя бесконечно близкими событиями (x^0,x^1,x^2,x^3) и $(x^0+dx^0, x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)$ по формуле

$$ds^2 = g_{ik}dx^idx^k, \qquad (13.26)$$

причем, как уже говорилось ранее, интервал – это величина, играющая роль расстояния в четырехмерном пространстве-времени. Величина g_{ik} определяет, таким образом, **структуру** пространства-времени.

Формула (13.26) является универсальной в том смысле, что для определения структуры **любого** пространства **любой** размерности квадратичная форма $g_{ik}dx^idx^k$ должна быть задана, или, что то же самое, обязательно должен быть задан метрический тензор g_{ik}, определяющий правило вычисления расстояния между двумя бесконечно близкими точками пространства.

Если речь идет именно о пространстве-времени (четырехмерный случай), то переход от инерциальной системы отсчета к неинерциальной приводит к тому, что время, вообще говоря, становится неоднородным, а пространство (трехмерное)– неоднородным и неизотропным. Тогда компоненты метрического тензора становятся функциями координат.

$$g_{ik} = g_{ik}(x), \qquad (13.27)$$

где $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)$.*) Зависимость (13.27) может означать и наличие сильного гравитационного поля, искривляющего пространство-время. В последнем случае метрический тензор $g_{ik}(x)$ содержит как информацию о физическом поле, так и информацию о "неинерциальности" координатной сетки. В эйнштейновой теории гравитации величина $g_{ik}(x)$ является полевой функцией.

С учетом сказанного определение пространства Минковского можно, очевидно, дать в следующей редакции:

* пространство с метрикой (13.18) – или (13.19) – называется пространством Минковского

Это частный случай так называемого псевдоевклидова пространства.

Метрический тензор евклидова пространства любой размерности имеет вид

$$\gamma_{ik} = \mathrm{diag}\,(1,1,\ldots,1). \tag{13.28}$$

ПРИМЕРЫ

П4. Вычисление производных в пространстве Минковского

Мы ввели в рассмотрение оператор $\partial/\partial x^i$ (см.П3) и показали, что формально этот оператор должен рассматриваться как ковариантный вектор. Отсюда следует, в частности, что величина $\partial A^k/\partial x^i$ представляет собой смешанный тензор 2-го ранга $B_{i\bullet}^{\ k}$ (либо $C_{\bullet i}^{k}$)

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^i} \equiv B_i^{\ k}. \tag{П4.1}$$

Сумма $\partial A^i/\partial x^i$, таким образом, есть след тензора второго ранга и поэтому – скаляр.

* Эта сумма называется **4-дивергенцией вектора** A^i. Подчеркнем, что в данном случае речь идет о пространстве Минковского. В общем случае ($\partial g_{ik}/\partial x^m \neq 0$) образование тензора на единицу большего ранга (чем данный) с помощью операции дифференцирования выглядит не так просто.

---

*) Совокупность (x^0, x^1, x^2, x^3) теперь, вообще говоря, не образует 4-вектора, как в пространстве Минковского, поэтому введено новое обозначение x [вместо X – для 4-радиус-вектора, см.(13.2)].

П5. Тензор электромагнитного поля

Для вычисления полей $\bar{E}$ и $\bar{B}$ нужно дифференцировать компоненты 4-потенциала электромагнитного поля A^i [см.(П2.1), (П2.2)]. Ясно, что при такой процедуре мы получим компоненты некоего 4-тензора второго ранга. Таким образом, наши 3-векторы $\bar{E}$ и $\bar{B}$ оказываются в четырехмерном пространстве компонентами 4-тензора. Этот тензор именуется **тензором электромагнитного поля.** Его определение

$$F_{ik} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \qquad (\text{П5.1})$$

имеет один и тот же вид в 4-пространствах с произвольным*) $g_{ik}(x)$. Очевидно, тензор (П5.1) антисимметричен

$$F_{ik} = -F_{ki}. \qquad (\text{П5.2})$$

В пространстве Минковского

$$(F_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}. \qquad (\text{П5.3})$$

П6. Диэлектрическая и магнитная проницаемости анизотропных сред

В анизотропных средах вектор электрического смещения $\bar{D}$ не параллелен, вообще говоря, вектору напряженности электрического поля $\bar{E}$. В простейшем случае связь между этими 3-векторами (в гауссовой системе единиц) выражается равенством

$$D^\alpha = \varepsilon^\alpha_\beta E^\beta, \qquad (\text{П6.1})$$

где $\alpha,\beta=1,2,3$; ε^α_β – симметричный тензор диэлектрической прони-

---

*) Этот произвол ограничен тем обстоятельством, что существуют функциональные зависимости $g_{ik}(x)$, не соответствующие никакой реальной физике; обсуждение данного вопроса выходит за рамки нашего курса.

цаемости. В равенстве (П6.1) по немому индексу β производится суммирование. В соответствующих разделах физики криволинейные координаты обычно не используются; таким образом, трехмерное пространство – евклидово, и различать ко- и контравариантные компоненты не имеет смысла. Поэтому все индексы пишут внизу

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \qquad (П6.2)$$

причем по β по-прежнему предполагается суммирование.

Для изотропной среды

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\,\delta_{\alpha\beta}, \qquad (П6.3)$$

где ε – 3-скаляр, а $\delta_{\alpha\beta}$ – так называемый символ Кронекера

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \qquad (П6.4)$$

или, по-другому,

$$\delta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1,1,1). \qquad (П6.5)$$

Ясно, что $\delta_{\alpha\beta}$ – единичный 3-тензор. Поэтому вместо (П6.2) в случае (П6.3) имеем

$$D_\alpha = \varepsilon E_\alpha \qquad (П6.6)$$

или

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \qquad (П6.7)$$

Здесь, очевидно, ε – известная из общего курса физики относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Компоненты векторов напряженности $\vec{H}$ и индукции $\vec{B}$ магнитного поля в анизотропной среде связаны равенством, аналогичным (П6.2):

$$B_\alpha = \mu_{\alpha\beta} H_\beta, \qquad (П6.8)$$

где $\mu_{\alpha\beta}$ – тензор магнитной проницаемости среды, причем

$$\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha} \qquad (П6.9)$$

Напомним, что при использовании цифровых индексов нужно иметь в виду (в данном случае),

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) \qquad (П6.10)$$

Детали, касающиеся описания электромагнитного поля в анизотропных средах и – конкретно – области применимости материальных уравнений вида (П6.2) и (П6.8), можно посмотреть в [12]

Знание трансформационных свойств физических величин позволяет легко переходить от одной инерциальной системы отсчета к другой, конструировать инварианты (4-скаляры) и предсказывать новые физические результаты. Мы уже упоминали об античастицах. Их существование было предсказано П.Дираком в1931г. Первая из античастиц – позитрон – была экспериментально обнаружена К. Андерсоном **год спустя** в ливнях, образованных космическими лучами. К концу 70-х годов античастицы почти всех элементарных частиц зафиксированы в эксперименте. Еще пример. Оказывается, что очень интересный и важный электромагнитный эффект Доплера есть простое следствие того факта, что величины ω/c и $\vec{k}$ образуют волновой 4-вектор*), знание преобразования (13.4) позволяет описать все детали эффекта.

И еще одно замечание. Во многих задачах электродинамики и механики заряженных частиц необходимо преобразовывать векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ к другой инерциальной системе отсчета. Это можно сделать, используя преобразование 4-потенциала A^i и **определения** (П2.1), (П2.2), но в этом случае приходится много дифференцировать и вообще выполнять большой объем чисто технической работы. Результат получается гораздо быстрее, если обращаться с компонентами векторов $\vec{E}, \vec{B}$ как с компонентами тензора электромагнитного поля F_{ik}, тем более, что формулы преобразования тензора второго ранга известны – мы их, правда, не строили и не выписывали, но это легко сделать.

§14. Принцип наименьшего действия в релятивистской физике. Действие для свободной релятивистской частицы. Функция Лагранжа свободной релятивистской частицы и ее 4-импульс

Принцип наименьшего действия, напомним, состоит в том, что для системы существует такой интеграл (функционал) S, называемый действием, который для действительного движения экстремален (и вариация его δS соответственно равна нулю). Условие экстремальности действия должно иметь место независимо от выбора той или иной инерциальной системы отсчета. Отсюда следует важный вывод:

* **действие** в релятивистской физике **должно быть** лоренц-инва-

---

*) Все такого рода факты носят, в конечном счете, экспериментальный характер.

риантом, т.е. **4-скаляром.**

* Это же относится и к элементарному действию dS.

* При записи выражения для действия (конструировании действия) следует иметь в виду, что под знаком интеграла должны стоять дифференциалы в первой степени.

Единственной величиной, удовлетворяющей перечисленным требованиям, для свободной частицы, является интервал ds или величина αds, где α – некоторая постоянная (4-скаляр).

Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int_{M_0}^{M_1} ds, \tag{14.1}$$

где M_0,M_1 – точки в пространстве Минковского. Каждой точке (напомним) соответствует событие, так что интеграл (14.1) берется вдоль кривой в пространстве событий.

С другой стороны, действие можно представить в виде интеграла по времени

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt\,, \tag{14.2}$$

где L – функция Лагранжа. Для элементарного интервала имеем

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - (d\bar{r})^2} = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \tag{14.3}$$

Сравнивая выражения (14.1) и (14.2), с учетом (14.3) получим выражение для функции Лагранжа

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - v^2/c^2}\,. \tag{14.4}$$

Найдем коэффициент α, имея в виду, что при $v^2/c^2 \ll 1$ из (14.4) должна получиться функция Лагранжа (11.17) нерелятивистской свободной частицы. Для этого разложим функцию L в ряд по (v^2/c^2)·

$$L_{\text{нер}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} \tag{14.5}$$

В (14.5) опущены члены высших порядков. Наличие постоянной $(-\alpha c)$ в правой части (14.5) несущественно в силу неоднозначности функции Лагранжа (см.§ 11), так что

$$\frac{\alpha v^2}{2c} = \frac{mv^2}{2}. \tag{14.6}$$

Отсюда

$$\alpha = mc, \tag{14.7}$$

где m – масса частицы (4-скаляр!), это так называемая масса покоя: в фундаментальной физике понятие "масса движущейся частицы" практически не используется.

Таким образом, действие для свободной материальной точки равно

$$S = -mc\int_{M_0}^{M_1} ds, \tag{14.8}$$

а функция Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}\ . \tag{14.9}$$

Очевидно, что релятивистская частица не удовлетворяет определению натуральной системы: ее функция Лагранжа не является квадратичной функцией проекций скорости (см.§8,с.46,47).

В соответствии с определениями (10.19), (10.22) назовем импульсом частицы величину

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ . \tag{14.10}$$

(Очевидно, при $v^2/c^2 << 1$ из (14.10) получается знакомое выражение $\vec{p} = m\vec{v}$ для импульса нерелятивистской частицы). Покажем, что компоненты вектора $\vec{p}$ представляют собой пространственные компоненты некоторого 4-вектора p^i. В самом деле,

$$\vec{p} = \frac{mc\vec{v}dt}{cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mcd\vec{r}}{ds}. \tag{14.11}$$

Величины m, c, ds – 4-скаляры, $d\vec{r}$ – пространственная часть 4-вектора $dx^i = (dx^0, d\vec{r})$. Утверждение доказано.

Вид временной компоненты p^0 ясен из (14.11):

$$p^0 = mc\frac{dx^0}{ds} = \frac{mc^2dt}{cdt\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{14.12}$$

Таким образом, мы построили 4-вектор импульса частицы

$$p^i = mc\frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{14.13}$$

* **Энергией ε частицы** называется величина

$$\varepsilon \equiv \vec{p}\vec{v} - L\,. \tag{14.14}$$

Вычисление дает

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{14.15}$$

Нетрудно убедиться в том, что между энергией частицы и нулевой компонентой ее 4-импульса имеется соотношение

$$\varepsilon = p^0c, \tag{14.16}$$

так что ε/c – временная компонента вектора p^i, и вместо (14.13) можно записать

$$p^i = (\varepsilon/c, \vec{p}). \tag{14.17}$$

Отсюда следуют законы преобразования для **релятивистской энергии** ε и компонент **релятивистского импульса** $\vec{p}$ при переходе от одной системы отсчета к другой.

Отметим, что при v = 0 из (14.15) получаем

$$\varepsilon_0 = mc^2. \tag{14.18}$$

Это так называемая энергия покоя частицы.

Вычислим квадрат величины 4-вектора импульса:

$$|p|^2 = p_ip^i = \varepsilon^2/c^2 - \vec{p}^2 = (mc)^2. \tag{14.19}$$

Таким образом, p^i – временподобный вектор.

§15. Четырехмерный потенциал электромагнитного поля. Действие для заряженной частицы в электромагнитном поле. Функция Лагранжа и уравнения движения. Скорость изменения энергии частицы. Уравнения движения заряженной частицы в четырехмерной форме. Первая пара уравнений Максвелла

Многочисленные экспериментальные факты позволяют сделать вывод о том, что электромагнитное поле может быть описано с помощью 4-вектора потенциала A^i (или A_i), компоненты которого являются функциями координат и времени.*) Свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего лишь одним параметром частицы – ее электрическим зарядом e (мы будем использовать именно это обозначение, поскольку q у нас уже использовано для обозначения координаты). Этот параметр является, как уже упоминалось, 4-скаляром. Действие для частицы в электромагнитном поле складывается из двух частей

$$S = S_m + S_{mf}, \tag{15.1}$$

где S_m – действие (14.8) для свободной частицы, а S_{mf} – член, описывающий взаимодействие частицы с полем. Требования, которые мы предъявляли к S_m при построении этой величины, распространяются, очевидно, и на второе слагаемое S_{mf} : S_{mf} – скаляр, и под знаком интеграла действия должны стоять дифференциалы в первой степени.

Выберем S_{mf} в виде, отвечающем этим требованиям:

$$S_{mf} = -\frac{e}{c}\int_{M_0}^{M_1} A_i dx^i. \tag{15.2}$$

Конкретный выбор коэффициента перед интегралом в (15.2) может сказаться на выборе единиц измерения потенциала и заряда. Как станет ясно впоследствии, запись S_{mf} в виде (15.2) предоставляет определенные удобства: те уравнения, которые получаются из принципа наименьшего действия, оказываются достаточно компактными.

---

*) Понятие 4-потенциала электромагнитного поля мы, собственно, уже ввели (см. П2 в § 13).

Таким образом, **действие для заряженной частицы в электромагнитном поле** имеет вид

$$S=\int_{M_1}^{M_2}\left(-mcds-\frac{e}{c}A_i dx^i\right). \qquad (15.3)$$

Используя представления*)

$$A^i=(\varphi,\vec{A}),\quad A_i=(\varphi,-\vec{A}), \qquad (15.4а,б)$$

интеграл действия можно теперь записать так.

$$S=\int_{M_1}^{M_2}\left(-mcds+\frac{e}{c}\vec{A}d\vec{r}-e\varphi dt\right). \qquad (15.5)$$

Вводя скорость частицы $\vec{v}=d\vec{r}/dt$ и переходя в (15.5) к интегрированию по времени получаем

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+(e/c)\,\vec{A}\vec{v}-e\varphi\right)dt \qquad (15.6)$$

Подынтегральное выражение есть **функция Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле:**

$$L=-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+(e/c)\vec{A}\vec{v}-e\varphi. \qquad (15.7)$$

Производная $\partial L/\partial\vec{v}$ есть обобщенный импульс частицы, обозначим его через $\vec{P}$. Дифференцируя (15.7), находим.

$$\vec{P}\equiv\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}=\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}, \qquad (15.8)$$

где $\vec{p}$ – обычный или, как говорят, **кинематический импульс** (14.10).

---

*) См. (П2.3), (П2.4), §13, с 80

Уравнения движения релятивистской заряженной частицы в заданном электромагнитном поле получаются варьированием действия (15.6), т.е. являются уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0 \qquad (15.9)$$

с функцией Лагранжа (15.7). С учетом определения (15.8) можно переписать (15.9) в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}. \qquad (15.10)$$

Напомним, что $\partial L/\partial\vec{r}$ – это обозначение для $\mathrm{grad}L$.

Займемся правой частью уравнения (15.10). Подставляя сюда выражение (15.7), получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}\equiv \mathrm{grad}L=\frac{e}{c}\mathrm{grad}(\vec{A}\vec{v})-e\,\mathrm{grad}\varphi. \qquad (15.11)$$

По известной формуле векторного анализа (см.приложение 3):

$$\mathrm{grad}(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b}+(\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a}+\left[\vec{b}\,\mathrm{rot}\vec{a}\right]+\left[\vec{a}\,\mathrm{rot}\vec{b}\right], \qquad (15.12)$$

где $\vec{a},\vec{b}$ – любые два векторных поля, а $\vec{\nabla}$ – набла-оператор Гамильтона:

$$\vec{\nabla}\equiv\partial/\partial\vec{r}. \qquad (15.13)$$

Применяя эту формулу к $(\vec{A}\cdot\vec{v})$ и помня, что дифференцирование по $\vec{r}$ производится при фиксированном $\vec{v}$, находим:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=\frac{e}{c}(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}+\frac{e}{c}[\vec{v}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}]-e\,\mathrm{grad}\varphi. \qquad (15.14)$$

Рассмотрим теперь левую часть уравнений Лагранжа (15.10):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}. \tag{15.15}$$

Векторный потенциал $\vec{A}$ – функция координат и времени, и "полная" зависимость от времени для этой величины определяется, в частности, законом движения частицы $\vec{r}(t)$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}v_z. \tag{15.16}$$

Используя набла-оператор, равенство (15.16) можно переписать в виде

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}. \tag{15.17}$$

Подставляя это выражение в левую часть уравнений Лагранжа (15.10) $cd\vec{P}/dt$ из (15.15) и используя (15.14), окончательно будем иметь

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\,\mathrm{grad}\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}[\vec{v}\ \mathrm{rot}\vec{A}] \tag{15.18}$$

Это и есть уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части (15.18) есть сила, действующая на заряд в электромагнитном поле. Мы видим, что эта сила состоит из двух частей. Первая часть [первые два слагаемых в правой части (15.18)] не зависит от скорости частицы. Вторая часть (третье слагаемое) зависит от этой скорости: она пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней.

Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют напряженностью электрического поля $\vec{E}$. Итак, **по определению,**

$$\vec{E} \cong -\mathrm{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \qquad (15.19)$$

Множитель при $\vec{v}/c$ в выражении для силы второго рода, действующей на единичный заряд, называют индукцией магнитного поля

$$\vec{B} \equiv \mathrm{rot}\vec{A}. \qquad (15.20)$$

С учетом определений (15.19), (15.20) уравнения движения (15.18) перепишутся в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{B}]. \qquad (15.21)$$

Стоящее справа в (15.21) выражение носит название **лоренцевой силы.**

С помощью уравнений движения можно получить уравнение, определяющее скорость изменения энергии заряженной частицы в электромагнитном поле.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\vec{E}\vec{v}. \qquad (15.22)$$

Попробуйте сами сообразить, как это делается

Систему уравнений (15.21),(15.22) можно представить в виде тензорного равенства

$$\frac{dp^i}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^{ik}p_k, \qquad (15.23)$$

где p^i – 4-вектор импульса, F^{ik} – тензор электромагнитного поля [4, с.86].

Отметим следующее.

1. Сила, действующая на заряженную частицу со стороны электромагнитного поля, является обобщенно потенциальной. Уравнения движения частицы представляют собой уравнения Лагранжа (15.9) с нулевой правой частью, в которых функция Лагранжа в соответствии с определением (8.13) представлена в виде разности

$$L = L_m - V, \qquad (15.24)$$

где

$$L_m = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (15.25)$$

– функция Лагранжа свободной частицы, и

$$V = e\varphi - \frac{e}{c}(\vec{A}\vec{v}) \qquad (15.26)$$

– обобщенный потенциал. Замена $T \to L_m$ [ср.(8 13) с (15.24)] отражает переход от нерелятивистской механики к релятивистской

2 Фундаментальной величиной, описывающей электромагнитное поле, является 4-вектор A^i – 4-потенциал электромагнитного поля. Об электромагнитном поле говорят как о **поле векторном***).

Подчеркнем, что равенства (15.19), (15.20) представляют собой **определения.**

Первая пара уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (15.27а)$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad (15.27б)$$

(как уже упоминалось в П2, §13) не содержит источников – зарядов и токов, уравнения (15.27) являются соотношениями, которым должны удовлетворять величины, описывающие поле. Эти уравнения можно получить из определений (15.19), (15 20).

Применим операцию rot к уравнению (15.19):

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \mathrm{rot\,grad}\varphi. \qquad (15.28)$$

Поскольку $\mathrm{rot\,grad} \equiv 0$, а операции rot (дифференцирование по координатам) и $\partial/\partial t$ (дифференцирование по времени)

*) Квант электромагнитного поля – фотон – оказывается, таким образом, **векторной частицей.**

можно поменять местами, вместо (15.28) получаем

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\vec{A}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

На последнем шаге мы использовали определение (15.20). Из этого же равенства следует

$$\mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div\,rot}\vec{A},$$

и, учитывая, что $\mathrm{div\,rot} \equiv 0$, приходим к уравнению (15.27б).

Уравнение (15.27а) – это **закон электромагнитной индукции Фарадея** (в дифференциальной форме), а (15.27б) выражает **физический факт отсутствия в природе магнитных зарядов** (вихревой характер магнитного поля). Таким образом, с формальной точки зрения важнейшая физическая информация, которая содержится в первой паре уравнений Максвелла, оказывается просто эффектом $(\vec{E},\vec{B})$ – языка, т.е. эффектом описания. При использовании 4-потенциала $(\varphi,\vec{A})$ заботиться о том, чтобы решение основной задачи электродинамики (вычисление полей по заданным источникам) удовлетворяло уравнениям (15.27), не нужно – **первая пара** удовлетворяется автоматически. При переходе от $(\vec{E},\vec{B})$ – описания электромагнитного поля к A^i – описанию информация об электромагнитном поле, заложенная в первой паре уравнений Максвелла, "перекочевывает" в **постулат** о векторном характере поля, причем он должен рассматриваться вместе с теми общими принципами, на основе которых строится выражение для действия заряженной частицы в электромагнитном поле.

§16. Гамильтонова механика. Преобразование Лежандра и его свойства. Примеры. Неравенство Юнга

Мы переходим к формулировке аппарата гамильтоновой механики, очень, как выяснится ниже, симметричного и достаточно удобного для решения как задач общего характера, так и конкретных задач не только механики, но и других разделов физики.

В лагранжевом формализме состояние системы с n степенями свободы определяется 2n величинами – это n обобщенных координат и n соответствующих им обобщенных скоростей, –

а основными уравнениями являются уравнения Лагранжа – n уравнений 2-го порядка. В гамильтоновом формализме состояние системы задается с помощью n обобщенных координат и n соответствующих им – как говорят, канонически сопряженных – обобщенных импульсов. **Уравнения движения в гамильтоновой механике** представляют собой симметричную систему 2n обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка – это так называемые **уравнения Гамильтона** или **канонические уравнения.** Гамильтонов формализм может быть выведен непосредственно из принципа наименьшего действия [1]. Мы же здесь при построении основных уравнений гамильтоновой механики будем исходить из уравнений Лагранжа. Этот переход – от системы уравнений Лагранжа к системе уравнений Гамильтона – осуществляется с помощью преобразования Лежандра.

16.1. Преобразование Лежандра [3]

Пусть $y = f(x)$ – выпуклая функция, $f''(x) > 0$.

* Преобразованием Лежандра функции $f(x)$ называется новая функция $g(p)$ новой переменной p, которая строится следующим образом (рис.9). Нарисуем на плоскости XOY график функции $f(x)$. Пусть дано число p. Рассмотрим прямую $y = px$. Возьмем точку $x = x(p)$, в которой кривая $f(x)$ всего дальше от прямой по вертикали: функция

$$F(p,x) = px - f(x) \qquad (16.1)$$

в точке $x(p)$ имеет максимум по x при фиксированном p; тогда

$$g(p) = F(p,x(p)) \qquad (16.2)$$

– преобразование Лежандра функции $f(x)$.

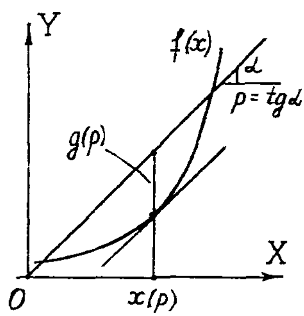

Рис.9

Точка $x(p)$ определяется из условия экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow f'(x) = p. \qquad (16.3)$$

Ввиду выпуклости функции $f(x)$ такая точка $x(p)$ единственна, если существует.

Пример1. Пусть $f(x) = x^2$. Тогда

$$F(p, x) = px - x^2. \qquad (\Pi 1.1)$$

Из условия (16.3) получаем

$$x(p) = \frac{p}{2}. \qquad (\Pi 1.2)$$

Подставляя это значение в (16.2), находим

$$g(p) = \frac{1}{4}p^2. \qquad (\Pi 1.3)$$

Таким образом,

$$x^2 \to \frac{1}{4}p^2. \qquad (\Pi 1.4)$$

16.2. Свойства преобразования Лежандра

1.Преобразование Лежандра **переводит выпуклые функции в выпуклые:**

$$f''(x) > 0, \quad f(x) \to g(p), \quad g''(p) > 0, \qquad (16.4)$$

поэтому его можно применить дважды.

Попробуйте сами это доказать

2. Инволютивность преобразования Лежандра

Теорема. Преобразование Лежандра **инволютивно,** т.е. его **квадрат равен тождественному преобразованию:** если f при преобразовании Лежандра переходит в g, то преобразование Лежандра от g снова будет f.

Доказательство.Чтобы выполнить преобразование Лежандра функции g(p), мы должны, по определению, рассмотреть новую независимую переменную (обозначим ее через x), составить функцию

$$G(x, p) = xp - g(p), \qquad (16.5)$$

найти точку p(x), в которой функция G имеет максимум (по p при фиксированном x):

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 0 \Rightarrow g'(p) = x \qquad (16.6)$$

и тогда преобразованием Лежандра g(p) будет функция от x, равная G(x, p(x)).

Докажем, что

$$G(x, p(x)) = f(x). \qquad (16.7)$$

С этой целью заметим, что выражение $G(x,p) = xp - g(p)$ имеет простой геометрический смысл: это ордината касательной к графику $f(x)$; при фиксированном p уравнение

$$y = G(x,p) = xp - g(p) \qquad (16.8)$$

есть уравнение касательной к графику $f(x)$, имеющей наклон **p**. В самом деле, при фиксированном **p** функция $G(x,p)$ – линейная функция от x, причем $\partial G / \partial x = p$ и при некотором значении x: $x = x(p)$ имеем (рис.10)

$$G(x,p) = xp - g(p) = f(x) \qquad (16.9)$$

по определению $g(p)$.

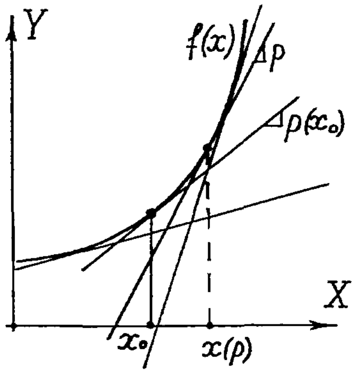

Рис.10

Зафиксируем теперь $x = x_0$ и будем менять **p**. Тогда значения $G(x,p)$ будут ординатами точек пересечения прямой $x = x_0$ с касательными к графику $f(x)$, имеющими разный наклон p. Из выпуклости графика следует, что **все эти касательные лежат ниже кривой f(x)**, а потому максимум $G(x_0,p)$ при фиксированном x_0 равен $f(x_0)$ и достигается при $p = p(x_0) = f'(x_0)$ (рис.10).
Таким образом,

$$G(x_0, p(x_0)) = f(x_0), \; p = f'(x_0), \qquad (16.10)$$

что и требовалось доказать.

П2.Рассмотрим преобразование Лежандра функции $g(p) = p^2 / 4$ (см. П1, с.100).

$$G(x,p) = xp - g(p) = xp - p^2 / 4 \, . \qquad (П2.1)$$

Найдем точку $p(x)$, в которой G имеет максимум (при фиксированном x). Она определяется из уравнения

$$g'(p) = x \, . \qquad (П2.2)$$

Вычисляя производную $g'(p)$, получаем

$$g'(p) = p/2 = x \Rightarrow p = 2x\ . \qquad (\text{П}2.3)$$

Подставляя последнее равенство в $G(x,p)$ (П2.1), получим преобразование Лежандра функции $g(p) = p^2/4$:

$$g(p) \to f(x) = x^2\ . \qquad (\text{П}2.4)$$

Этот результат (см.П1) подтверждает инволютивность преобразования Лежандра.

16.3. Неравенство Юнга

* Две функции f, g, являющиеся преобразованиями Лежандра друг друга, называются **двойственными по Юнгу.**

По определению преобразования Лежандра,

$$F(x,p) = px - f(x) \le g(p) \qquad (16.11)$$

при любых x, p (для которых, разумеется, обе функции f(x) и g(p) выпуклы). Отсюда вытекает **неравенство Юнга**

$$px \le f(x) + g(p), \qquad (16.12)$$

справедливое для любой пары функций f, g, двойственных по Юнгу.

П3. Если $f(x) = x^2/2$, то $g(p) = p^2/2$, и мы получаем известное неравенство

$$px \le \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2} \qquad (\text{П}3.1)$$

для всех x, p.

П4. Если $f(x) = x^\alpha/\alpha$, то $g(p) = p^\beta/\beta$, где $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$, и неравенство Юнга имеет вид

$$px \le \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}, \qquad (\text{П}4.1)$$

$$\forall x > 0,\ p > 0;\ \ \alpha > 1,\ \beta > 1,\ \ \alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1\ . \qquad (\text{П}4.2)$$

§17. Преобразование Лежандра в случае многих переменных. Уравнения Гамильтона. Теорема об эквивалентности уравнений Лагранжа и Гамильтона; канонически сопряженные переменные. Принцип неопределенности. Следствия теоремы об эквивалентности. Примеры

17.1. Определения

Пусть функция $f(\vec{x})$ является функцией n переменных. $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Будем называть **функцию** $f(\vec{x})$ **выпуклой,** если второй дифференциал d^2f представляет собой положительно-определенную квадратичную форму.

* **Преобразованием Лежандра функции** $f(\vec{x})$ называется функция $g(\vec{p})$ векторной переменной $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, определенная аналогичными (16.1), (16.2) и (16.3) равенствами:

$$F(\vec{p}, \vec{x}) \equiv \vec{p}\vec{x} - f(\vec{x}); \tag{17.1}$$

$$g(\vec{p}) = F(\vec{p}, \vec{x}(\vec{p})) = \max_{x}(F(\vec{p}, \vec{x})); \tag{17.2}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}. \tag{17.3}$$

Все рассуждения предыдущего параграфа без изменений переносятся на этот – неодномерный – случай.

17.2. Уравнения Гамильтона. Теорема об эквивалентности уравнений Лагранжа и Гамильтона. Канонически сопряженные переменные

После преобразования Лежандра лагранжева система n дифференциальных уравнений второго порядка переходит, как уже указывалось, в замечательно симметричную систему $2n$ уравнений первого порядка – систему уравнений Гамильтона или, как говорят, канонических уравнений.

Рассмотрим систему уравнений Лагранжа

$$\dot{\bar{p}} = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}}. \tag{17.4}$$

где

$$\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}}, \tag{17.5}$$

заданную функцией Лагранжа $L = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$. Предположим, что функция Лагранжа является выпуклой по второму аргументу $\dot{\bar{q}}$.

Теорема. Система n уравнений Лагранжа эквивалентна системе 2n уравнений первого порядка – уравнений Гамильтона:

$$\dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}}, \tag{17.6а}$$

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}, \tag{17.6б}$$

где

$$H(\bar{p}, \bar{q}, t) = \bar{p}\dot{\bar{q}} - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \tag{17.7}$$

есть преобразование Лежандра функции Лагранжа, рассматриваемой как функция от $\dot{\bar{q}}$.

Доказательство. По определению, преобразование Лежандра $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ по $\dot{\bar{q}}$ есть функция (опустим аргументы, не затрагиваемые преобразованием)

$$H(\bar{p}) = \bar{p}\dot{\bar{q}} - L(\dot{\bar{q}}), \tag{17.8}$$

в которой $\dot{\bar{q}}$ выражено через $\bar{p}$ по формуле (17.5)

$$\bar{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}},$$

и которая зависит еще от параметров $\bar{q}, t$.

* Эта функция H называется **функцией Гамильтона.**
Полный дифференциал функции Гамильтона

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} d\vec{p} + \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} d\vec{q} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (17.9)$$

равен полному дифференциалу выражения $(\vec{p}\dot{\vec{q}} - L)$ при $\vec{p} = \partial L / \partial \dot{\vec{q}}$:

$$dH = \dot{\vec{q}} d\vec{p} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} d\vec{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \qquad (17.10)$$

Оба выражения для dH должны совпадать. Поэтому

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}; \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \qquad (17.11\text{а,б,в})$$

Принимая во внимание (17.4), получаем уравнения Гамильтона (17.6).

Итак, если $\vec{q}(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, то $(\vec{p}(t), \vec{q}(t))$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона Обратное утверждение доказывается аналогичным образом – следует определить функцию Лагранжа как преобразование Лежандра функции Гамильтона по переменной $\vec{p}$ и вспомнить об инволютивности **лежандрова** преобразования.

Итак, функция Гамильтона зависит от обобщенных координат $\vec{q}$, обобщенных импульсов $\vec{p}$ и времени t:

$$H = H(\vec{p}, \vec{q}, t). \qquad (17.12)$$

* Координаты q_i и импульсы p_i образуют пары (q_i, p_i) **канонически сопряженнных переменных.** Имея в виду именно это, говорят о канонической сопряженности величин $\vec{q}$ и $\vec{p}$.

Замечание 1. Доказанная теорема относится ко всем вариационным задачам, а не только к лагранжевым уравнениям механики.

Замечание 2. В ряде случаев функция Гамильтона представляет собой полную энергию системы. Пример: энергия свободной релятивистской частицы ε была определена именно как функция Гамильтона [см.(14.14)]. Другие примеры будут приведены ниже.

17.3. Принцип неопределенности

Соотношение неопределенности сформулировано В.Гейзенбергом **для пары канонически сопряженных динамических переменных***). Оно имеет вид [13, с.68]

$$\Delta p_i \Delta q_i \geq \hbar / 2, \qquad (17.13)$$

где q_i – обобщенные координаты и p_i – канонически сопряженные им обобщенные импульсы. Если число степеней свободы системы больше единицы, то, очевидно, (17.13) представляет собой **систему** соотношений, $i = [1,n]$.

ПРИМЕРЫ

П1. Рассмотрим движение нерелятивистской частицы массой m в статическом потенциальном силовом поле. Сила, действующая на частицу, определяется потенциальной энергией, зависящей только от координат:

$$\Pi = \Pi\ (\vec{r}), \qquad (\Pi 1.1)$$

где $\vec{r}$ –радиус-вектор частицы. Функция Лагранжа частицы имеет вид

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} - \Pi(\vec{r}), \qquad (\Pi 1.2)$$

а функция Гамильтона есть преобразование Лажандра L по переменной $\dot{\vec{r}}$:

$$H = H(\vec{p}, \vec{r}) = \vec{p}\dot{\vec{r}} - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}), \qquad (\Pi 1.3)$$

причем обобщенные скорости $\dot{\vec{r}}$ в (П1.3) следует выразить с помощью равенства

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}. \qquad (\Pi 1.4)$$

В итоге получим

$$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}, \qquad (\Pi 1.5)$$

---

*) Динамические переменные – это величины, описывающие состояние динамической системы; в гамильтоновом формализме динамическими переменными являются обобщенные координаты и обобщенные импульсы.

$$H(\vec{p},\vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \Pi(\vec{r}). \qquad (\Pi 1.6)$$

Таким образом, обобщенные импульсы в данном случае совпадают с кинематическими, а функция Гамильтона представ-ляет собой полную энергию частицы. Если в качестве обобщенных взять декартовы координаты частицы

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \qquad (\Pi 1.7а,б,в)$$

то неравенства (17.13) эквивалентны системе

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2; \qquad (\Pi 1.8а)$$

$$\Delta p_y \Delta y \geq \hbar/2; \qquad (\Pi 1.8б)$$

$$\Delta p_z \Delta z \geq \hbar/2. \qquad (\Pi 1.8в)$$

П2. Пусть имеется математический маятник массой **m** и длиной **b** с точкой подвеса O (рис.11), движущийся в вертикальной плоскости. Это, как мы знаем, система с одной степенью свободы, причем в качестве обобщенной координаты следует выбрать угол φ (см. рис.11). Поскольку вертикальная ось OX направлена не вверх, а вниз, потенциальная энергия маятника

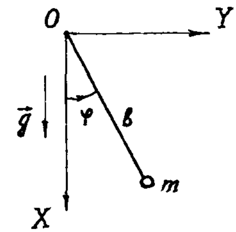

Рис.11

$$\Pi = -mgx = -mgb\cos\varphi. \qquad (\Pi 2.1)$$

Его кинетическая энергия

$$T = \frac{I \cdot \dot{\varphi}^2}{2} \qquad (\Pi 2.2)$$

где

$$I = mb^2 \qquad (\Pi 2.3)$$

– момент инерции маятника относительно оси OZ. Таким образом,

$$T = \frac{mb^2\dot{\varphi}^2}{2}. \qquad (\Pi 2.4)$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = L(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{mb^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgb\cos\varphi. \qquad (\Pi 2.5)$$

Обобщенный импульс, сопряженный координате φ, определяется равенством

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mb^2\dot\varphi. \qquad (П2.6)$$

Это не что иное, как проекция момента импульса частицы на ось OZ

$$p_\varphi = l_z. \qquad (П2.7)$$

Мы получили следующий результат для частицы, вращающейся относительно некоторой оси, обобщенным импульсом, соответствующим (канонически сопряженным) угловой координате, является проекция момента импульса частицы на эту ось*)

Соотношение неопределенности для вращающейся вокруг оси OZ частицы должно иметь вид

$$\Delta l_z \Delta\varphi \geq \hbar/2. \qquad (П2.8)$$

Используя (П2.8), оценим минимальную величину проекции момента импульса электрона $|l_z|$, движущегося в поле протона в атоме водорода, который находится в стационарном состоянии. Будем при этом полагать, что $l_z = 0$ невозможно, и существует отличная от нуля нижняя граница для величины $|l_z|$

Напомним, что такого рода оценки основаны на следующем соображении: модуль $|f|$ физической величины f не может быть меньше минимального значения неопределенности этой величины, $|f| \geq (\Delta f)_{min}$, что вполне обеспечивается равенством $|f|_{min} = (\Delta f)_{min}$, которое и используют в качестве оценки. В нашем случае

$$|l_z|_{min} = (\Delta l_z)_{min}. \qquad (П2.9)$$

Отметим также любопытный факт, который состоит в том, что если в соотношении неопределенности сделать замену

$$\hbar \to h = 2\pi\hbar, \qquad (П2.10)$$

*) Здесь, конечно, подразумевается, что на оси выбрано положительное направление.

то простая оценка часто приводит к точному результату. С учетом сказанного вместо (П2.8) нам следует написать

$$\left|l_z\right|_{min} = \frac{h}{2\Delta\varphi}, \qquad (П2.11)$$

и поскольку, очевидно,

$$\Delta\varphi = \pi, \qquad (П2.12)$$

окончательно имеем

$$\left|l_z\right|_{min} = \hbar. \qquad (П2.13)$$

Точный квантовомеханический результат гласит [13]:

$$l_z = m\hbar, \qquad (П2.14)$$

где величина m может принимать значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Если изъять из обращения вариант $l_z = 0$, что мы, собственно, и сделали с самого начала, выдвинув соответствующее предположение, то (П2.13) оказывается **точным** результатом.

Заметим, что оценка (П2.13) **точно соответствует** правилу квантования электронных орбит в боровской теории атома водорода [13].

Задание. Постройте функцию Гамильтона математического маятника и запишите уравнения Гамильтона, сопоставьте полученные уравнения с уравнением движения маятника, известного из общего курса физики [7, с.197].

17.4. Следствия теоремы об эквивалентности

Из теоремы об эквивалентности уравнений движения гамильтоновой системе вытекает ряд важных следствий. Например, закон сохранения энергии (см. замечание 2, с.105) принимает простой вид.

Следствие 1. Справедливо равенство

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (17.14)$$

так что в случае , когда функция Гамильтона системы не зависит явно от времени ($\partial H / \partial t = 0$), она является интегралом движения (т е. сохраняется):

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \Rightarrow H(\vec{p}(t),\vec{q}(t))=\text{const.} \qquad (17.15)$$

Равенство (17.14) доказывается непосредственной проверкой.

Второе следствие касается циклических координат, которые в гамильтоновом описании определяются точно так же, как и в лагранжевом [см. определение (10.18)]:

* Если координата q_1 не входит явно в функцию Гамильтона, так что

$$\partial H/\partial q_1=0, \quad H=H(p_1,p_2,\dots,p_n,q_2,q_3,\dots,q_n,t), \qquad (17.16)$$

то такая координата называется **циклической.**

Эквивалентность определений (10.18) и (17.16) подтверждается равенством (17.11б).

Из гамильтонова вида уравнений движения вытекает замечательное

Следствие 2. Пусть q_1 – циклическая координата. Тогда p_1 – первый интеграл*). При этом изменение остальных переменных со временем такое же, как в системе с n – 1 независимой координатой $q_2,q_3,\dots,q_n$ и с функцией Гамильтона

$$H=H(p_2,\dots,p_n,q_2,\dots,q_n,t,c), \qquad (17.17)$$

зависящей от параметра $c=p_1$.

Доказательство. Положим

$$\vec{p}'\equiv(p_2,\dots,p_n), \quad \vec{q}'\equiv(q_2,\dots,q_n). \qquad (17.18)$$

---

*) Функция $f(\vec{x})$ называется **первым интегралом** дифференциального уравнения

$$\dot{\vec{x}}=\vec{v}(\vec{x}), \qquad (*)$$

если ее производная по направлению векторного поля $\vec{v}$ равна нулю.

$$L_{\vec{v}}f=0. \qquad (**)$$

[14 с.70-72]. Уравнения (*) следует здесь понимать как уравнения Гамильтона с присоединенным к ним уравнением $\dot{t}=1$; очевидно, $\vec{x}\equiv(\vec{p},\vec{q},t)$. (см.также §28).

Тогда система Гамильтона (полная, исходная) примет вид

$$\frac{d\vec{q}'}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}'},\quad \frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1};\qquad (17.19а,б)$$

$$\frac{d\vec{p}'}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \vec{q}'},\quad \frac{dp_1}{dt}=0.\qquad (17.20а,б)$$

Последнее уравнение показывает, что $p_1=\text{const}$. Поэтому в систему уравнений для $\vec{p}',\vec{q}'$ величина p_1 входит лишь как параметр в функции Гамильтона. После того, как система **2n – 2** уравнений решена, уравнение для q_1 принимает вид

$$\frac{dq_1}{dt}=f(t),\qquad (17.21)$$

где

$$f(t)=\frac{\partial}{\partial p_1}H(p_1,\vec{p}'(t),\vec{q}'(t),t),\qquad (17.22)$$

и легко интегрируется.

Таким образом, в гамильтоновом формализме наличие циклической координаты позволяет **автоматически** сократить размерность задачи

Почти все решенные в механике задачи решаются с помощью следствия 2 [3, с.60].

Прежде, чем сформулировать **Следствие 3**, выскажем замечание по поводу определения **числа степеней свободы динамической системы.** В гамильтоновой механике состояние системы с одной, например, степенью свободы, задается с помощью обобщенной координаты и обобщенного импульса, сопряженного этой координате. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\dot{q}=\partial H/\partial p,\quad \dot{p}=-\partial H/\partial q,\qquad (17.23)$$

где $H=H(p,q,t)$ – функция Гамильтона Можно было бы определить динамическую систему с одной степенью свободы как систему, состояние которой в данный момент времени определяется двумя параметрами, а эволюция – двумя дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, t); \qquad (17.24а)$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x\ , x_2, t). \qquad (17.24б)$$

Такое определение вполне согласуется с приводимым ранее определением числа степеней свободы механической системы (см.§2). Подчеркнем, что речь здесь идет о **детерминированных динамических системах,** т.е. таких, для которых с формальной точки зрения начальное состояние и уравнения движения однозначно определяют эволюцию системы во времени (т.е. решение задачи Коши существует и единственно)

Оказывается, однако, что весьма важно, является ли система уравнений движения (17.24а,б) автономной, или правые части (17.24) зависят от времени явно При определенных условиях динамическая система (детерминированная!), описываемая неавтономными уравнениями (17.24), может демонстрировать поведение, которое носит стохастический характер. Если уравнения (17.24) автономны, то ничего подобного нет. В этой связи в современной динамике различают эти два случая.

* **Определение.** Динамической системой с одной степенью свободы называется система, состояние которой в данный момент времени задается двумя величинами, а эволюция определяется двумя **автономными** дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \qquad (17.25а)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \qquad (17.25б)$$

* Вообще, система с $\gamma = m^* / 2$ степенями свободы описывается m^* автономными уравнениями первого порядка.

Из приведенного определения, в частности, следует, что число степеней свободы динамической системы, описываемой неавтономными уравнениями (17 24), равно 3/2: систему (17 24) можно переписать в форме

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3); \qquad (17.26а)$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3); \qquad (17.26б)$$

$$\dot{x}_3 = 1, \qquad (17\ 26в)$$

где $x_3 \equiv t$. В соответствии со сделанным выше замечанием поведение детерминированной системы с одной степенью свободы (17.25) может носить лишь регулярный характер – стохастичность возникает в системах с $\gamma \geq 3/2$.

Следствие 3. Всякая система с двумя степенями свободы $(H = H(p_1, p_2, q_1, q_2))$, имеющая циклическую координату, **интегрируема.***)

В самом деле, в этом случае система уравнений для p', q' одномерная и может быть проинтегрирована с помощью интеграла $H(p', q') = h = \text{const}$.

§18. Функция Гамильтона заряженной частицы в электромагнитном поле. Уравнения движения в форме Гамильтона

Для заряженной частицы с зарядом e и массой m, взаимодействующей с электромагнитным полем, мы построили функцию Лагранжа [см.(15.7)]:

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e\varphi(\vec{r}, t) + (e/c)\vec{A}(\vec{r}, t)\cdot\vec{v}. \quad (18.1)$$

Обобщенный импульс $\vec{P}$ имеет вид

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad (18.2)$$

где

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.3)$$

– кинематический импульс или просто – импульс. Функцию Гамильтона строим с помощью преобразования Лежандра

$$H = \vec{P}\cdot\vec{v} - L = (\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})\vec{v} + mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + e\varphi - \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}. \quad (18.4)$$

---

*) **Интегрируемые системы** – системы, для которых нахождение общего решения уравнений движения сводится к квадратурам.

Преобразуя (18 4), получаем

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\varphi = \varepsilon' + e\varphi. \qquad (18\ 5)$$

Используя связь между релятивистской энергией ε' и импульсом $\vec{p}$

$$\varepsilon' = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} \qquad (18\ 6)$$

и выражая импульс $\vec{p}$ в (18 6) с помощью (18 2), окончательно найдем

$$H = H(\vec{P}, \vec{r}, t) = c\sqrt{(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + (mc)^2} + e\varphi. \qquad (18\ 7)$$

Уравнение движения частицы в электромагнитном поле теперь совпадает с уравнением Гамильтона

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}, \qquad (18\ 8)$$

а второе уравнение системы Гамильтона

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{P}} \qquad (18\ 9)$$

эквивалентно, как нетрудно убедиться, соотношению

$$\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon'}. \qquad (18\ 10)$$

Отметим, что при $\partial\vec{A}/\partial t = 0$, $\partial\varphi/\partial t = 0$ функция Гамильтона представляет собой сохраняющуюся полную энергию частицы (включающую потенциальную энергию частицы в электростатическом поле, которое описывается скалярным потенциалом $\varphi(\vec{r})$).

§19. Фазовое пространство. Фазовая точка. Фазовая траектория. Фазовый портрет. Примеры

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы сформулировать (и доказать) теорему Лиувилля – в гамильтоновой механике это один из наиболее важных результатов, имеющий, в частности, большую практическую значимость. Вначале необходимо ввести несколько новых понятий. Те, что перечислены в заголовке этого раздела, являются общими в том смысле, что они используются в **любой** динамике, не только в динамике **гамильтоновой.**

Пусть рассматривается **эволюция динамической системы,** состояние которой в данный момент времени определяется вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, где **n** – число степеней свободы в смысле **старого** определения. Очевидно, что при лагранжевом описании вектор $\vec{x}$ строится так:

$$\vec{x} = (\vec{q}, \dot{\vec{q}}), \tag{19.1}$$

а при гамильтоновом, соответственно –

$$\vec{x} = (\vec{q}, \vec{p}). \tag{19.2}$$

* **Фазовым пространством М динамической системы** называется множество всевозможных состояний рассматриваемого процесса (эволюции) [14].

Мы будем говорить так: **2n**-мерное пространство с координатами $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ – это и есть фазовое пространство системы с **n** степенями свободы при условии, что набор $(x_1, \dots, x_{2n})$ определяет ее состояние.

* Точка в фазовом пространстве соответствует определенному состоянию динамической системы и является, таким образом, для системы изображающей точкой. Будем называть точки фазового пространства **фазовыми точками.**

* Движению (эволюции) системы соответствует движение изображающей точки в фазовом пространстве вдоль некоторой линии, которую будем называть **фазовой траекторией.** На фазовой траектории всегда указывают направление движения.

* Объем

$$J = \int \underset{D}{\dots} \int \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_{2n} \tag{19.3}$$

некоторой области D в фазовом пространстве называется **фазовым объемом.**

Уравнения движения динамической системы, вообще говоря, имеют вид (см.сноску в п.17.4)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{v}(\bar{x}, t) \tag{19.4}$$

* Прямое произведение вещественной оси времени t и фазового пространства M называется **расширенным фазовым пространством.** Ясно, что это **2n+1** – мерное координатное пространство $(x_1, \ldots, x_{2n}, t)$. Отметим, что правые части уравнении движения (19.4) заданы на расширенном фазовом пространстве

Рассмотрим пример, поясняющий роль явного присутствия времени t в уравнениях движения (19.4), $\partial\bar{v}/\partial t \neq 0$. Пусть имеется система, движение которой описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2; \tag{19.5а}$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha(t)x_1 \tag{19.5б}$$

[гипотетический пружинный маятник массой m = 1 с заданной временной зависимостью коэффициента упругости $\alpha(t)$] Фазовое пространство системы (19 5) – плоскость x_1x_2 Рассмотрим фазовую траекторию, проходящую через точку с координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Наклон этой траектории в точке (1,1), как следует из (19 5), определяется равенством

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\alpha(t)\frac{x_1}{x_2} = -\alpha(t). \tag{19 6}$$

Таким образом, через данную точку проходит не одна, а бесконечное множество фазовых траекторий, соответствующих системам, которые оказываются в состоянии (1,1) в разные моменты времени Ясно, что это копии одной и той же динамической системы (19.5), различающиеся начальными условиями.

Очевидно, при $\alpha = \text{const}$, т.е $\partial\bar{v}/\partial t = 0$, ничего подобного нет, имеется только **одна фазовая траектория,** проходящая через данную точку фазовой плоскости x_1x_2. Отсюда можно сделать вывод, что взаиморасположение в фазовом пространстве фазовых траекторий динамических систем с автономными уравнениями движения

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}) \tag{19.7}$$

должно обладать определенным порядком, и поэтому такие системы представляют в этом смысле особый интерес

Именно динамические системы, описываемые автономными дифференциальными уравнениями первого порядка и обсуждаются ниже в этом разделе

Итак, пусть уравнения движения системы имеют вид (19.7), где $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Подчеркнем два момента

1 Координатное пространство $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – **фазовое**, а не **расширенное фазовое**, т е ни один из параметров x_k (k=[1,m]) не совпадает с временем t.

2 Приведенные выше определения мы формулировали так, чтобы легко просматривался непосредственный переход к лагранжеву и гамильтонову формализмам [см.(19.1), (19 2)], поэтому предполагалось, что размерность фазового пространства **четна** (вектор $\vec{x}$ имеет **четное** число компонент **2n**) Вообще говоря, динамическая система может иметь и полуцелое число степеней свободы $\gamma = m/2$, где m – число уравнений (19 7) Определения буквально переносятся и на этот случай Например, фазовый объем записывается так [см.(19 3)]

$$J = \int \underset{D}{\ldots} \int \delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_m, \tag{19 8}$$

причем m в равенстве (19 8) может быть как четным, так и нечетным.

Примеры динамических систем с числом степеней свободы $\gamma = 3/2$ $(m = 3)$ можно найти в книгах [5], [15].

Еще раз: мы сейчас говорим о динамических системах, поведение которых описывается **автономными** дифференциальными уравнениями первого порядка, число которых **может быть** и

нечетным – не потому, что мы формально ввели еще одну координату – t (см. сноску в подразд.17.4 и замечание по поводу **следствия** 3), а потому, что системы могут быть **такими.**

Через каждую точку фазового пространства динамической системы (19.7) проходит только одна траектория. Исключение составляют так называемые **особые точки**, которые соответствуют состояниям равновесия системы (или ее стационарным движениям).

Состояние равновесия $\vec{x}^0$ системы (19.7) определяется, очевидно, уравнениями

$$\vec{v}(\vec{x}^0) = 0. \tag{19.9}$$

* Состояние равновесия (19.9) называется **устойчивым**, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого другого движения $\vec{x} = \vec{x}(t)$ с начальными условиями, отличающимися от $\vec{x}^0$ менее чем на δ:

$$\rho(\vec{x}(0), \vec{x}^0) < \delta, \tag{19.10}$$

при всех последующих значениях t имеет место неравенство

$$\rho(\vec{x}(t), \vec{x}^0) < \varepsilon, \tag{19.11}$$

где $\rho(\vec{x}(t), \vec{x}^0)$ – расстояние между фазовыми точками с координатами $\vec{x}(t)$ и $\vec{x}^0$.

* Состояние равновесия называется **асимптотически устойчивым**, если помимо (19.11) выполняется соотношение

$$\lim_{t \to \infty} \rho(\vec{x}(t), \vec{x}^0) = 0. \tag{19.12}$$

Характер особой точки определяется характером поведения фазовых траекторий в ее малой окрестности. На рис.12 показаны окрестности состояний равновесия на фазовой плоскости.

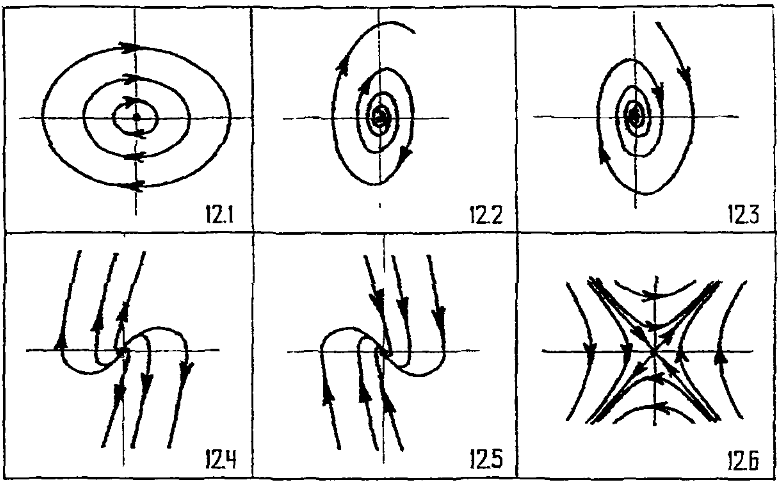

Рис.12 Окрестности состояний равновесия на фазовой плоскости

12.1 – равновесное состояние типа центр (устойчивое состояние);
12.2 – неустойчивый фокус;
12.3 – устойчивый фокус;
12.4 – неустойчивый узел;
12.5 – устойчивый узел;
12.6 – седло (неустойчивое состояние); кривые, проходящие через седло, – ветви так называемой **сепаратрисы** седла

Отметим, что все эти варианты состояний равновесия реализуются в модели **линейного осциллятора**, которая определяется уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{19.13а}$$

эквивалентным системе

$$\dot{x}_1 = x_2; \tag{19.14а}$$

$$\dot{x}_2 = -2\beta x_2 - \omega^2 x_1, \tag{19.14б}$$

где, очевидно, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv \dot{x}$. Линейный осциллятор имеет единственное состояние равновесия

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = 0. \qquad (19.15а.б)$$

При различных соотношениях между коэффициентом затухания β и частотой ω осциллятора получаем один из типов равновесного состояния, представленных на рис.12. Седлу, например, соответствуют $\beta = 0$ и $\omega^2 < 0$ (т.е. частота ω – чисто мнимая).

* Структура разбиения фазового пространства на фазовые траектории называется **фазовым портретом** рассматриваемой динамической системы. С геометрической точки зрения под структурой разбиения фазового пространства на траектории понимается геометрическая картина взаиморасположения фазовых траекторий.

Основную роль в описании структуры фазового портрета динамической системы играет разделение фазовых траекторий на обыкновенные и особые. К особым принадлежат: особые точки, изолированные замкнутые траектории, называемые предельными циклами, которые соответствуют периодическим движениям; сепаратрисные кривые и поверхности, являющиеся границами областей притяжения к различным устойчивым особым траекториям [16].

Ясно, что фазовое пространство системы с одной степенью свободы (уравнения движения (19.7), $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $m = 2$) – двумерная поверхность – может содержать лишь особые траектории (сепаратрисных поверхностей нет). Если взаимное расположение этих особых траекторий известно и, кроме того, определена устойчивость состояний равновесия и предельных циклов, то мы получаем полную качественную картину разбиения поверхности $x_1 x_2$ на траектории, т.е. фазовый портрет системы.

Рассмотрим примеры динамических систем с одной степенью свободы. Наибольший интерес для нас представляют в данном случае фазовые портреты этих систем. Сразу же отметим, что уравнения движения всегда можно "обезразмерить", что, кстати, совершенно необходимо сделать, если эти уравнения предполагается решать численно. Мы продемонстрируем процедуру "обезразмеривания" в Примере 1, а при обсуждении следующих примеров будем считать, что эта процедура уже проведена.

ПРИМЕРЫ

П1. Одномерный гармонический осциллятор

Уравнение движения гармонического осциллятора имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (П1.1)$$

где ω – собственная частота осциллятора, $\omega^2 > 0$. Введем безразмерное время

$$\tau \equiv \omega t. \qquad (П1.2)$$

Тогда (П1.1) переписывается в виде

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = 0. \qquad (П1.3)$$

Выберем какой-нибудь масштаб l_0 для измерения координаты x и введем безразмерную величину

$$\xi \equiv x / l_0. \qquad (П1.4)$$

Уравнение (П1.3) теперь перепишется так:

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \xi = 0, \qquad (П1.5)$$

и все величины в (П1.5) уже безразмерны. Положим

$$x_1 \equiv \xi, \quad x_2 \equiv d\xi / d\tau \qquad (П1.6а ,б)$$

и запишем систему, эквивалентную (П1.5):

$$\dot{x}_1 = x_2; \qquad (П1.7а)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1, \qquad (П1.7б)$$

в которой точки означают дифференцирование по безразмерному времени τ.

Фазовый портрет гармонического осциллятора показан на рис.13. Здесь имеется одна особая точка – состояние равновесия (0,0) типа центр (см.рис.12); все остальные траектории неособые; они имеют форму эллипсов, если масштабы по осям OX_1 и OX_2 выбраны разные, и окружностей, если – одинаковые.

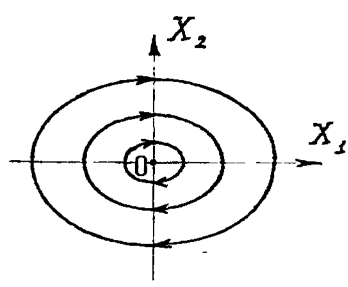

Рис.13

П2. Математический маятник – материальная точка, подвешенная на легком жестком **стержне.**

Если φ – угол отклонения маятника от направления ускорения свободного падения $\vec{g}$, то уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \sin\varphi = 0. \qquad (П2.1)$$

Здесь уже введено безразмерное время $\tau = \omega t$, где

$$\omega = \sqrt{g/l}. \qquad (П2.2)$$

а l – длина маятника. Уравнение второго порядка (П2.1) заменим системой

$$\dot{x}_1 = x_2; \qquad (П2.3а)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1, \qquad (П2.3б)$$

в которой $x_1 \equiv \varphi$, $x_2 \equiv \dot{\varphi}$. Маятник имеет 2 состояния равновесия: одно из них устойчивое (центр), а другое – неустойчивое (седло).

Фазовый портрет математического маятника представлен на рис.14. Состояния равновесия легко найти и нетрудно идентифицировать с помощью рис.12. Сепаратриса с ветвями I и II **отделяет** на

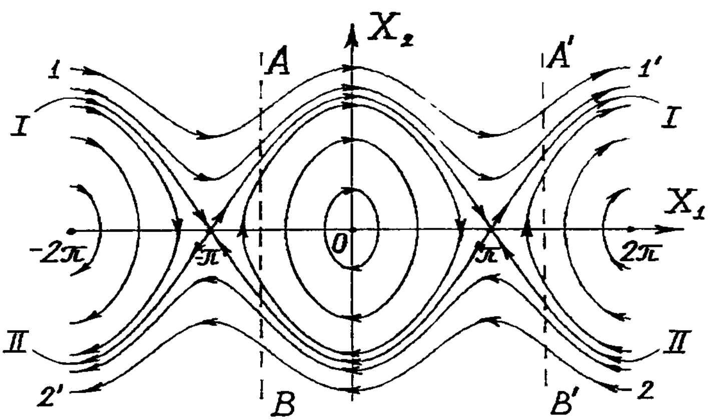

Рис.14

плоскости x_1x_2 замкнутые траектории, соответствующие **финитным** движениям, от траекторий незамкнутых, таких, например, как $1 \to 1'$, $2 \to 2'$, соответствующих движениям **инфинитным.** Траектория первого типа полностью лежит в пределах некоторой ограниченной области, принадлежащей x_1x_2. Отсюда и название движения – **финитное.**

Финитное движение – это колебание маятника, инфинитное – его вращение в вертикальной плоскости, причем траектории $1 \to 1'$ и $2 \to 2'$, как нетрудно сообразить, соответствуют вращениям в противоположных направлениях.

Фазовый портрет маятника периодичен по x_1 с периодом 2π – это хорошо видно на рис.14.

Поэтому любая полоса шириной 2π с вертикальными, т.е. параллельными оси OX_2 границами (как у нас AB и $A'B'$) содержит полную информацию о фазовых траекториях маятника. В связи с этим можно поступить следующим образом: из плоскости x_1x_2 вырезать эту полосу и склеить из нее цилиндр, соединив прямые AB и $A'B'$ так, что ось OX_2 окажется одной из его образующих. Полученный таким образом **фазовый цилиндр** и есть **фазовое пространство математического маятника** (П2.1). Очевидно, что для данной динамической системы или системы, аналогичной маятнику в смысле периодичности плоского фазового портрета, выбор в качестве **фазовой поверхности** именно **фазового цилиндра** представляется естественным. На фазовом цилиндре действительно имеется именно **два** состояния равновесия (центр и седло). Теперь понятно, почему это утверждение, выдвинутое с самого начала [см текст после системы (П2.3)] и, казалось бы, противоречащее рис.14, оказывается верным.

Задание. Написать уравнение сепаратрисы.

П3. Материальная точка с единичной массой, движение которой ограничено осью OX, в силовом поле с потенциальной энергией

$$\Pi = \Pi(x) = \frac{1}{2}x^2(x^2 - 1). \qquad (\text{П3.1})$$

График П(x) приведен на рис.15. Уравнение движения частицы имеет вид

$$\ddot{x} + x(2x^2 - 1) = 0. \qquad (\text{П3.2})$$

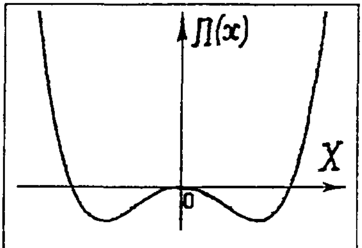

Рис 15

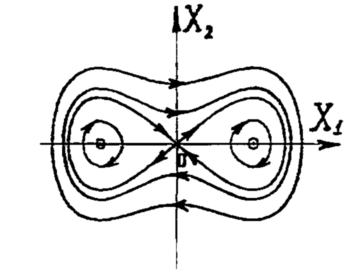

Рис 16

Используя обозначения

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv \dot{x}, \qquad \text{(П3.3а,б)}$$

заменяем уравнение (П3.2) системой уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2; \qquad \text{(П3.4а)}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1(2x_1^2 - 1). \qquad \text{(П3.4б)}$$

Динамическая система имеет 3 состояния равновесия: (0, 0), $(\sqrt{2}/2, 0)$ и $(-\sqrt{2}/2, 0)$.

Первое – седло, второе и третье – равновесные состояния типа центр. Фазовый портрет системы (П3.4) дан на рис.16. Все движения системы – финитные, **сепаратрисная петля** делит фазовую плоскость на 3 области, в которых располагаются 3 группы фазовых траекторий (на рис.16 все хорошо видно).

Задание. Написать уравнения: 1) сепаратрисы; 2) фазовой траектории, **охватывающей** сепаратрисную петлю; 3) фазовой траектории, **охватываемой** сепаратрисной петлей.

Указание. Поскольку рассматриваемая динамическая система, очевидно, консервативна, ее механическая энергия – интеграл движения. Если функция Гамильтона $H = H(p,q)$ известна, то можно сразу записать:

$$H(p,q) = E = \text{const}. \qquad \text{(П3.5)}$$

Это и есть уравнение фазовой траектории в плоскости (q,p). Воспользуйтесь этим обстоятельством.

§20. Гамильтоновы динамические системы. Фазовое пространство. Фазовая точка. Фазовая траектория. Фазовый объем. Фазовый поток. Теорема Лиувилля

В предыдущем параграфе обсуждалось поведение динамических систем, состояние которых задается вектором $\bar{x}$, а уравнения движения имеют вид

$$\vec{x} = \vec{v}(\vec{x}). \tag{20.1}$$

Такой способ описания является достаточно общим как уже упоминалось, уравнения (20.1) могут, **в частности,** представлять собой систему уравнений Лагранжа или систему уравнении Гамильтона

Мы переходим к изучению **гамильтоновых динамических систем,** которые отличаются от прочих специфическими, особыми свойствами и образуют особый класс динамических систем. Сам факт того, что эволюция динамической системы может быть описана с помощью канонических уравнений Гамильтона (17.6), содержит нетривиальную физическую информацию, которая проявляется – геометрически – в характерной структуре фазовых траекторий. В этом легко убедиться на простом примере системы с одной степенью свободы, пусть движение системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1, x_2), \tag{20.2а}$$

$$\dot{x}_2 = v_2(x_1, x_2). \tag{20.2б}$$

Если это гамильтонова система, то (20.2а,б) – уравнения Гамильтона. Тогда x_1, например, – обобщенная координата, а x_2 – обобщенный импульс, и правые части (20.2) должны иметь вид частных производных от функции Гамильтона $H = H(x_1, x_2)$:

$$v_1(x_1, x_2) = \frac{\partial H}{\partial x_2}; \tag{20.3а}$$

$$v_2(x_1, x_2) = -\frac{\partial H}{\partial x_1}. \tag{20.3б}$$

Но из очевидного равенства

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{20.4}$$

и системы уравнений (20.3а,б) следует, что векторное поле $\vec{v} = (v_1, v_2)$ должно удовлетворять требованию

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\operatorname{div}\vec{v}=0. \qquad (20.5)$$

Отмечая, что $\vec{v}(\vec{x})$ касателен к фазовой траектории в точке $M(\vec{x})$ [см.(20.1)], нетрудно усмотреть аналогию между условием (20.5) и уравнением Максвелла $\operatorname{div}\vec{B}=0$. Последнее описывает специфику структуры силовых линий магнитного поля и выражает **физический факт** отсутствия в природе магнитных зарядов. Ясно, что и условие (20.5) носит **физический характер.** Оно означает, что векторное поле $\vec{v}(\vec{x})$ является вихревым, т.е. фазовые траектории не имеют источников и стоков Факт их отсутствия обеспечивается выполнением определенных физических условий.

Мы уже рассматривали уравнения движения линейного осциллятора, записанные в виде (20.2а,б). Для линейного осциллятора [см.(19.14)]

$$v_1(x_1,x_2)=x_2;\quad v_2(x_1,x_2)=-2\beta x_2-\omega^2 x_1 \qquad (20.6а,б)$$

и, соответственно

$$\operatorname{div}\vec{v}=-2\beta. \qquad (20.7)$$

Таким образом, в данном случае **гамильтоновость** системы – осциллятора – **эквивалентна** простому **физическому условию:** отсутствию сил трения

$$\beta=0. \qquad (20.8)$$

В силу сказанного становится очевидным, что в гамильтоновых системах невозможны такие состояния равновесия, которые представлены на рис.12.2, 12.3, 12.4, 12.5. Неустойчивые фокус и узел представляют собой источники, а устойчивые фокус и узел – стоки фазовых траекторий. В самом деле, эти состояния равновесия реализуются при $\beta\neq 0$.

Задание. Убедитесь в том, что все системы, рассмотренные в примерах 1–3 предыдущего параграфа, – гамильтоновы.

20.1. Некоторые определения

Мы уже вводили такие понятия, как фазовое пространство, фазовая точка, фазовая траектория, фазовый объем. Здесь мы воспроизводим известные определения применительно к **гамильтоновым** динамическим системам. Гамильтонова система задана, если известна ее функция Гамильтона

$$H = H(\vec{p}, \vec{q}, t), \qquad (20.9)$$

где $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ – обобщенные координаты и $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – сопряженные им обобщенные импульсы.

* 2n-мерное пространство с координатами $q_1, q_2, ..., q_n$, $p_1, p_2, ..., p_n$ называется **фазовым пространством.**

* Точка $\widetilde{M}(\vec{q}, \vec{p})$ в фазовом пространстве соответствует определенному состоянию гамильтоновой динамической системы и является, таким образом, для системы **изображающей точкой.** Будем называть точки фазового пространства **фазовыми точками.**

* Движению (эволюции) системы соответствует движение изображающей точки в фазовом пространстве вдоль некоторой линии, которую будем называть **фазовой траекторией.**

* Объем

$$J = \int_D \int \delta q_1 \delta p_1 \delta q_2 \delta p_2 ... \delta q_n \delta p_n \qquad (20.10)$$

некоторой области D в фазовом пространстве называется **фазовым объемом.**

20.2. Теорема Лиувилля [3]

Рассмотрим некоторую область D_0 фазового пространства, и будем считать, что фазовые точки, принадлежащие этой области, изображают возможные начальные состояния $(\vec{q}^{(0)}, \vec{p}^{(0)})$ некоторой гамильтоновой системы. Имеется, таким образом, бесконечное множество одинаковых гамильтоновых систем, отличающихся лишь начальными условиями $(\vec{q}^{(0)}, \vec{p}^{(0)}) \equiv (\vec{q}(0), \vec{p}(0))$. С течением времени состояние каждой системы меняется, соответствующие фазовые точки движутся в фазовом пространстве по закону

$$\vec{q} = \vec{q}(t, \vec{q}^{(0)}, \vec{p}^{(0)}); \quad \vec{p} = \vec{p}(t, \vec{q}^{(0)}, \vec{p}^{(0)}), \qquad (20.11а,б)$$

определяемому уравнениями Гамильтона: функции (20.11) – решение этих уравнений. В момент времени t изображающие точки переходят в некоторую область D (она состоит из этих точек). Оказывается , что объемы областей D_0 и D одинаковы. Теорема Лиувилля, сформулированная ниже, сводится к утверждению этого факта.

В современной формулировке теоремы Лиувилля фигурирует понятие **фазовый поток** [3], используемое в теории дифференциальных уравнений [14]. В свою очередь, для того чтобы дать определение фазового потока, необходимо познакомиться с понятием **группы** (см.,например, [17])

* Класс G объектов (элементов) **a, b, c,...** называется **группой**, если определена бинарная операция, которая каждой паре элементов **a,b** класса G ставит в соответствие некоторый объект (результат операции) **a** $\otimes$ **b** так, что:

1) $a \otimes b \in G$ (замкнутость по отношению к определяющей операции);

2) $a \otimes (b \otimes c)=(a \otimes b) \otimes c$ (ассоциативный закон);

3) G содержит (левую) единицу E такую, что для каждого элемента **a** из **G** имеет место $E \otimes a = a$;

4) для каждого элемента $a \in G$ в G существует (левый) обратный элемент a^{-1} такой, что $a^{-1} \otimes a = E$

Группы преобразований или операторов

* Множество G всех взаимно однозначных преобразований $x' = f(x)$ любого класса C на себя образует группу, определяющей операцией в которой является последовательное применение двух преобразований (умножение преобразований или операторов).

Рассмотренные нами преобразования Лоренца (12.17) образуют группу, причем эта **группа – однопараметрическая:** в самом деле, преобразование (12.17) определяется **одним** параметром (v/c).

* **Определение. Фазовым потоком** называется однопараметрическая группа преобразований фазового пространства

$$g^t : (\vec{q}(0), \vec{p}(0)) \to (\vec{q}(t), \vec{p}(t)), \qquad (20.12)$$

где $\vec{q}(t), \vec{p}(t)$ – решение системы уравнений Гамильтона [при заданных начальных условиях $\vec{q}(0) = \vec{q}^{(0)}$, $\vec{p}(0) = \vec{p}^{(0)}$, см.(20.11а,б)].

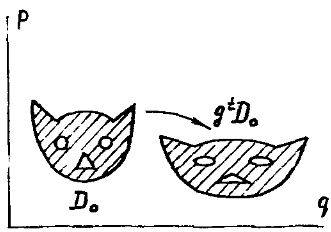

Рис.17

Теорема Лиувилля. Фазовый поток сохраняет объем (рис.17): для любой области D_0 имеем*)

$$\text{объем } g^t D_0 = \text{объем } D_0. \qquad (20.13)$$

Докажем вначале несколько более общее предложение, также принад-

---

*) Изображенных на рис.17 котов называют "котами Арнольда".

лежащее Лиувиллю

Предложение (*). Пусть дана система обыкновенных дифференциальных автономных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}), \qquad (20.14)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, и начальные условия

$$\vec{x}(0) = \vec{x}^{(0)}. \qquad (20.15)$$

Пусть g^t – соответствующая группа преобразований. Для малых t

$$g^t(\vec{x}) = \vec{x} + v(\vec{x})t + 0(t^2), \quad (t \to 0). \qquad (20.16)$$

Если учесть, что $\vec{x}(0) = \vec{x}^{(0)}$, то (20.16) можно уточнить:

$$\vec{x}(t) = g^t(\vec{x}^{(0)}) = \vec{x}^{(0)} + \vec{v}(\vec{x}^{(0)})t + 0(t^2), \quad (t \to 0). \qquad (20.17)$$

Пусть $D(0) \equiv D_0$ – область в пространстве $\{\vec{x}\}$ и $J(0) \equiv J_0$ – ее объем, а $J(t) \equiv J$ – объем области $D(t) \equiv D$, так что $D(t) = g^t D(0)$.

* Если

$$\operatorname{div} \vec{v} \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \qquad (20.18)$$

g^t сохраняет объем:

$$J = J_0. \qquad (20.19)$$

Доказательство основано на двух леммах .

* **Лемма 1.** Для любой матрицы $A = (a_{ij})$ справедливо соотношение

$$\det(E + At) = 1 + t \cdot \operatorname{tr} A + 0(t^2), \quad (t \to 0), \qquad (20.20)$$

где

$$\mathrm{tr}A \equiv \sum_{i=1}^{m} a_{ii} \qquad (20.21)$$

– след матрицы A (сумма диагональных элементов); $E = (\delta_{ij})$ – единичная матрица.

Доказательство **леммы 1** проводится методом математической индукции. Сделайте это сами.

* **Лемма 2.** Справедливо соотношение

$$\left.\frac{dJ}{dt}\right|_{t=0} = \int\limits_{D_0} \mathrm{div}\,\vec{v}\,\delta x_1^{(0)}\delta x_2^{(0)}\ldots\delta x_m^{(0)}. \qquad (20.22)$$

Доказательство леммы 2. При любом t

$$J \equiv J(t) = \int\limits_{D_0} \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}}\right)\delta x_1^{(0)}\delta x_2^{(0)}\ldots\delta x_m^{(0)}. \qquad (20.23)$$

Величина под знаком интеграла в (20.23) – якобиан преобразования (20.17); знак модуля опущен, поскольку при t = 0 якобиан равен единице и поэтому при достаточно малых t, которые нас и интересуют, положителен в силу непрерывности.

Перепишем для удобства преобразование (20.17) в виде

$$x_i = x_i^{(0)} + v_i(\vec{x}^{(0)})t + O(t^2), \quad (t \to 0). \qquad (20.24)$$

Дифференцируя (20.24) по $x_j^{(0)}$, получаем

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}} = \delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j^{(0)}}t + O(t^2), \quad (t \to 0). \qquad (20.25)$$

По **лемме 1**, если положить упомянутую там матрицу $A = (a_{ij})$ равной

$$a_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j^{(0)}}, \qquad (20.26)$$

получаем

$$\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}}\right) = 1 + \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v_i}{\partial x_i^{(0)}}\right) t + 0(t^2), \quad (t \to 0), \qquad (20.27)$$

или, используя обозначение из (20.18),

$$\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{(0)}}\right) = 1 + t\operatorname{div} \vec{v} + 0(t^2). \qquad (20.28)$$

Подставляя (20.28) в (20.23), приходим к выражению

$$J = \int\limits_{D_0} (1 + t \cdot \operatorname{div} \vec{v} + 0(t^2))\delta x_1^{(0)} \delta x_2^{(0)} \ldots \delta x_m^{(0)}, \qquad (20.29)$$

откуда и следует соотношение (20.22).

Доказательство предложения (*). Любой момент t_0 можно считать начальным (физические результаты не должны зависеть от момента включения секундомера), и лемму 2 можно записать в виде

$$\left.\frac{dJ}{dt}\right|_{t=t_0} = \int\limits_{D(t_0)} \operatorname{div} \vec{v} \delta x_1^{(0)} \delta x_2^{(0)} \ldots \delta x_m^{(0)}. \qquad (20.30)$$

Если $\operatorname{div} \vec{v} \equiv 0$, то $dJ/dt = 0$, что и требовалось доказать. Из доказанного предложения вытекает теорема Лиувилля. Покажем это

Выберем вектор $\vec{x}$ так·

$$\vec{x} = (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots p_n). \qquad (20.31)$$

Размерность **m** рассматриваемого пространства $\{\vec{x}\}$ равна, таким образом, **2n**. Уравнения (20.14) следует рассматривать как систему уравнений Гамильтона (2n уравнений) Вектор $\vec{v}$ из системы (20 14) имеет вид

$$\bar{v} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \qquad (20.32)$$

Отсюда с учетом (20.31) получаем:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} + \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} \right) \right] = 0, \qquad (20.33)$$

что и доказывает теорему Лиувилля

Отметим следующее.

1. Мы провели доказательство теоремы Лиувилля, основываясь на том, что уравнения движения системы (20.14) автономны. Для гамильтоновой системы это означает стационарность функции Гамильтона: $\partial H / \partial t = 0$. Теорема Лиувилля справедлива для любых гамильтоновых систем, обобщение доказательства теоремы на нестационарный случай не добавляет проблем, которые носили бы принципиальный характер.

2. Теорема Лиувилля представляет собой фундаментальный результат динамики, имеющий чрезвычайно широкий спектр приложений. В теории бесстолкновительных систем заряженных частиц, например, теорема Лиувилля лежит в основе кинетического уравнения; хорошо известное в физике плазмы **уравнение Власова** является непосредственным следствием только что доказанной нами теоремы. Имеется ряд достаточно простых следствий. Пример: теорема Лиувилля запрещает гамильтоновой системе иметь асимтотически устойчивые состояния равновесия и т.д.

3. Приложения теоремы Лиувилля в статистической механике, как отмечено в [3], являются наиболее важными. Она позволяет, например, применить **теорему Пуанкаре о возвращении** к эволюции динамических систем [3, с.62–63]. Парадоксальным выводом из теорем Пуанкаре и Лиувилля является следующее предсказание: если открыть перегородку, разделяющую камеру с газом и камеру с вакуумом, то через **некоторое время** молекулы газа снова соберутся в первой камере. Разгадка парадокса в том, что "некоторое время" оказывается больше времени существования Солнечной системы.

§21. Интегральный инвариант Пуанкаре – Картана (прямая и обратная теоремы). Относительный интегральный инвариант Пуанкаре

Прямую и обратную **теоремы об интегральном инварианте Пуанкаре – Картана** мы здесь приведем без доказательств.

Рассмотрим расширенное фазовое $(2n+1)$ – мерное пространство $\{\vec{p},\vec{q},t\}$ гамильтоновой системы.

* **Теорема (прямая).** Пусть две замкнутые кривые γ_1 и γ_2 охватывают одну и ту же трубку фазовых траекторий (рис.18). Тогда интегралы формы $\vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t$ по ним одинаковы:

$$\oint_{\gamma_1} \vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t = \oint_{\gamma_2} \vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t. \qquad (21.1)$$

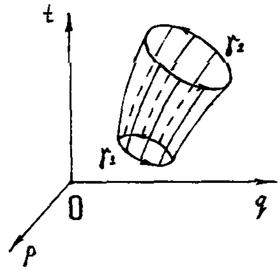

Рис.18

Здесь $H = H(\vec{p},\vec{q},t)$ – функция Гамильтона системы.

* **Форма** $\vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t$ **называется интегральным инвариантом Пуанкаре – Картана.**

Теорема доказывается с помощью принципа Гамильтона [1, с.113-116].

* **Обратная теорема** [1, с.117-119]. Пусть известно, что прямые пути определяются системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{a}(\vec{p},\vec{q},t); \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{b}(\vec{p},\vec{q},t), \qquad (21.2а,б)$$

где

$$\vec{q} = (q_1,q_2,...,q_n); \quad \vec{p} = (p_1,p_2,...,p_n). \qquad (21.3а,б)$$

Такое предположение является естественным, поскольку движение системы должно определяться однозначно по заданным $q_i^{(0)}, p_i^{(0)} (i = [1,n])$. Пусть, кроме того, дано, что **интеграл Пуанкаре – Картана**

$$I \equiv \oint_{\gamma} \vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t \qquad (21.4)$$

является инвариантом по отношению к прямым путям, определяемым системой уравнений (21.2), т.е. что для любой трубки этих путей интеграл (21.4), вычисленный вдоль охватывающего трубку замкнутого контура, не изменяет своей величины при произвольном смещении точек контура вдоль образующих трубки (прямых путей).

Тогда между функцией $H = H(\bar{p},\bar{q},t)$ и функциями a_i, b_i имеют место зависимости

$$a_i = \frac{\partial H}{\partial p_i};\quad b_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i = [1,n], \qquad (21.5а,б)$$

т.е. уравнения (21.2) являются каноническими уравнениями Гамильтона с той функцией H, которая входит в подынтегральное выражение в интеграле Пуанкаре–Картана.

При доказательстве **обратной теоремы** заодно выводится равенство $dH/dt = \partial H/\partial t$.

Из этих двух теорем следует, что инвариантность интеграла Пуанкаре – Картана может быть положена в основу механики, так как из этой инвариантности вытекает, что движение системы подчиняется каноническим уравнениям Гамильтона (и наоборот).

Прямая теорема об интегральном инварианте Пуанкаре – Картана приводит к важному **следствию**.

Рассмотрим в фазовом пространстве замкнутые кривые, составленные из одновременных состояний, т.е. состояний, лежащих в гиперплоскостях $t = \text{const}$ (рис.19).

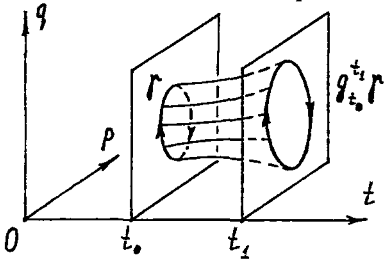

Рис.19

Вдоль таких кривых $\delta t = 0$ и

$$\oint \bar{p}\delta\bar{q} - H\delta t = \oint \bar{p}\delta\bar{q}. \qquad (21.6)$$

Следствие прямой теоремы [3]. Фазовый поток сохраняет интеграл формы $\bar{p}\delta\bar{q}$ по замкнутым кривым.

Действительно, пусть $g_{t_0}^{t_1}: R^{2n} \to R^{2n}$ – преобразование фазового пространства $\{\bar{p},\bar{q}\}$, осуществляемое фазовым потоком за время от t_0 до t_1 (т.е. $g_{t_0}^{t_1}(\bar{p}^{(0)},\bar{q}^{(0)})$ есть решение уравнений Гамильтона с начальными условиями $\bar{p}(t_0)=\bar{p}^{(0)}$, $\bar{q}(t_0)=\bar{q}^{(0)}$). Пусть γ – любая замкнутая кривая в пространстве $R^{2n}\subset R^{2n+1}$ $(t=t_0)$. Тогда $g_{t_0}^{t_1}\gamma$ есть замкнутая кривая в пространстве R^{2n} $(t=t_1)$, охватывающая ту же трубку фазовых траекторий в расширенном фазовом пространстве R^{2n+1}. По **прямой теореме**, так как $\delta t=0$ на γ и на $g_{t_0}^{t_1}\gamma$, находим

$$\oint\limits_{\gamma}\bar{p}\delta\bar{q}=\oint\limits_{g_{t_0}^{t_1}\gamma}\bar{p}\delta\bar{q}. \tag{21.7}$$

* Форма $\bar{p}\delta\bar{q}$ называется **относительным интегральным инвариантом Пуанкаре**, а интеграл (21.7) – **интегралом Пуанкаре.**

§22. Замена переменных в канонических уравнениях. Канонические преобразования. Преобразование, осуществляемое фазовым потоком. Теорема о каноническом виде уравнений движения в новых переменных, полученных с помощью канонического преобразования [3]

Метод канонических уравнений Гамильтона является, как мы отчасти уже убедились, достаточно эффективным методом интегрирования уравнений движения. Эффективность его проявляется, прежде всего, в том, что технология использования простой симметрии задачи оказывается, в свою очередь, элементарной (см. §17, **следствие теоремы об эквивалентности** уравнений Лагранжа и Гамильтона). Проблема учета всех свойств симметрии данной динамической системы или, что то же самое, проблема упрощения описания эволюции системы решается путем замены переменных. Очевидно, чем шире класс преобразований, реализующих такую замену, тем мощнее соответствующий метод. Гамильтоново описание динамических систем предоставляет в этом смысле большие возможности. Ниже рассматриваются **канонические отображения** (или **канонические преобразования**), с помощью которых выполняется замена переменных в каноническом формализме. Мы убедимся в том, что, с одной стороны, класс этих преобразований чрезвычайно широк, с другой же – структура таких преобразований оказывается достаточно простой: замена одной системы 2n переменных $(\vec{p},\vec{q})$ другой 2n–системой $(\vec{p}',\vec{q}')$ задается с помощью всего лишь **одной** производящей функции.

Пусть g – дифференцируемое отображение фазового пространства $R^{2n}=\{\vec{p},\vec{q}\}$ в R^{2n}.

* **Определение. Отображение** g называется **каноническим,** если

$$\oint_{\gamma}\vec{p}\delta\vec{q}=\oint_{g\gamma}\vec{p}\delta\vec{q}, \tag{22.1}$$

т.е. если форма $\vec{p}\delta\vec{q}$ – относительный интегральный инвариант g.

* **Теорема.** Преобразование фазового пространства, осуществляемое фазовым потоком, – каноническое.

Для доказательства достаточно сравнить равенства (21.7) и (22.1).

Пусть $g: R^{2n}\to R^{2n}$ – каноническое преобразование фазового пространства, переводящее точку с координатами $(\vec{p},\vec{q})$ в точку с координатами $(\vec{P},\vec{Q})$.

Функции $\vec{P}(\vec{p},\vec{q}),\vec{Q}(\vec{p},\vec{q})$ можно рассматривать как новые координаты в фазовом пространстве.

* **Теорема*)**. В новых координатах $(\vec{P},\vec{Q})$ канонические уравнения

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\vec{q}};\quad \frac{d\vec{q}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\vec{p}} \tag{22.2а,б}$$

имеют канонический вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial\vec{Q}};\quad \frac{d\vec{Q}}{dt}=\frac{\partial K}{\partial\vec{P}} \tag{22.3а,б}$$

---

*) Каноническое преобразование и преобразование, сохраняющее канонический вид уравнений движения, – понятия, вообще говоря, не эквивалентные [3, сноска на с.207].

со старой функцией Гамильтона:

$$K(\vec{P},\vec{Q},t)=H(\vec{p},\vec{q},t). \qquad (22.4)$$

Доказательство. Рассмотрим форму $\vec{p}\delta\vec{q}-\vec{P}\delta\vec{Q}$ в R^{2n}. Для любой замкнутой кривой γ (рис.20) имеем

$$\oint_\gamma \vec{p}\delta\vec{q}-\vec{P}\delta\vec{Q}=\oint_\gamma \vec{p}\delta\vec{q}-\oint_\gamma \vec{P}\delta\vec{Q}=0 \qquad (22.5)$$

ввиду каноничности g. В самом деле, во втором интеграле (22.5) $\vec{P},\vec{Q}$ понимаются как функции $\vec{p},\vec{q}$. Поэтому замена переменных $(\vec{p},\vec{q})\to(\vec{P},\vec{Q})$ в этом интеграле дает

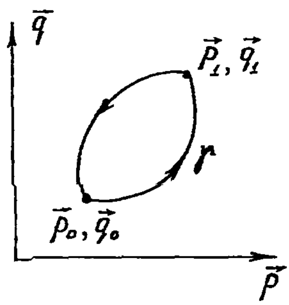

Рис.20

$$\oint_\gamma \vec{P}(\vec{p},\vec{q})\delta\vec{Q}(\vec{p},\vec{q})=\oint_{g\gamma} \vec{p}\delta\vec{q}, \qquad (22.6)$$

и равенство (22.5) выполняется в силу определения (22.1). Отсюда следует, что величина

$$F=\int_{\vec{p}_0\vec{q}_0}^{\vec{p}_1\vec{q}_1} \vec{p}\delta\vec{q}-\vec{P}\delta\vec{Q} \qquad (22.7)$$

не зависит от пути интегрирования, но зависит лишь от конечной точки $(\vec{p}_1,\vec{q}_1)$ (при фиксированной начальной точке $(\vec{p}_0,\vec{q}_0)$).

Таким образом,

$$\delta F=\vec{p}\delta\vec{q}-\vec{P}\delta\vec{Q} \qquad (22.8)$$

есть полный дифференциал. Следовательно, в расширенном фазовом пространстве

$$\vec{p}\delta\vec{q}-H\delta t=\vec{P}\delta\vec{Q}-H\delta t+\delta F. \qquad (22.9)$$

Вдоль замкнутой кривой γ, охватывающей трубку прямых путей в расширенном фазовом пространстве, имеем

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t = \oint\limits_{\gamma} \vec{P}\delta\vec{Q} - H\delta t = \text{inv}. \qquad (22.10)$$

Во втором интеграле делаем замену переменных $(\vec{q},\vec{p}) \to (\vec{Q},\vec{P})$, при этом $\gamma \to g\gamma \equiv \Gamma$:

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{P}\delta\vec{Q} - K\delta t = \text{inv}, \qquad (22.11)$$

где Γ – контур, охватывающий трубку прямых путей в расширенном фазовом пространстве $\{\vec{P},\vec{Q},t\}$,

$$K(\vec{P},\vec{Q},t) = H(\vec{p}(\vec{P},\vec{Q}),\vec{q}(\vec{P},\vec{Q}),t). \qquad (22.12)$$

С другой стороны, имеются уравнения первого порядка, определяющие прямые пути в расширенном фазовом пространстве $\{\vec{P},\vec{Q},t\}$:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{a}(\vec{P},\vec{Q},t); \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{b}(\vec{P},\vec{Q},t). \qquad (22.13а,б)$$

Первое из этих уравнений получается, например, так: дифференцируем по времени функции $Q_i(\vec{p},\vec{q})$:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial Q_i}{\partial \vec{q}}\frac{d\vec{q}}{dt} + \frac{\partial Q_i}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial Q_i}{\partial \vec{q}}\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial Q_i}{\partial \vec{p}}\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} \qquad (22.14)$$

и далее пишем

$$a_i \equiv \frac{\partial Q_i}{\partial \vec{q}}\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial Q_i}{\partial \vec{p}}\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \qquad (22.15)$$

где $\vec{p},\vec{q}$ выражены через $\vec{P},\vec{Q}$.

По обратной теореме об интегральном инварианте Пуанкаре – Картана получаем: уравнения (22.13) являются каноническими уравнениями Гамильтона с функцией Гамильтона, фигурирующей в интеграле Пуанкаре – Картана (22.11), что и требовалось доказать.

Отметим, что вид интеграла (22.11) ($\vec{P},\vec{Q}$ – новые переменные) не противоречит записи правой части (22.6): в (22.6) $\vec{p},\vec{q}$ означает то же самое, что $\vec{P},\vec{Q}$ в (22.11); интеграл полностью определяется кривой, по которой ведется интегрирование.

Пусть теперь $g(t): R^{2n} \to R^{2n}$ – каноническое преобразование фазового пространства, зависящее от параметра t (время):

$$g(t)(\vec{p},\vec{q}) = (\vec{P}(\vec{p},\vec{q},t), \vec{Q}(\vec{p},\vec{q},t)). \qquad (22.16)$$

Докажем, что канонические уравнения (22.2) в переменных $\vec{P},\vec{Q},t$ имеют канонический вид с новой функцией Гамильтона

$$K(\vec{P},\vec{Q},t) = H(\vec{p},\vec{q},t) + \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad (22.17)$$

где

$$F(\vec{p}_1,\vec{q}_1,t) = \int_{p_0\,q_0}^{p_1\,q_1} \vec{p}\delta\vec{q} - \vec{P}\delta\vec{Q}. \qquad (22.18)$$

В уравнении (22.18) t – параметр; предполагается что старые импульсы и координаты в правой части (22.17) выражены через новые – $\vec{P},\vec{Q}$ – и время t.

Рассматриваемый случай отличается от предыдущего наличием явной зависимости преобразования от времени t, которое рассматривается как параметр. Учесть эту явную зависимость можно следующим образом. В уравнениях (22.8) и (22.9) под δF будем теперь понимать не дифференциал функции F, а ее виртуальный (т.е. при "замороженном" времени t) дифференциал. Снабдив виртуальный дифференциал значком V, перепишем уравнение (22.9):

$$\vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t = \vec{P}\delta\vec{Q} - H\delta t + \delta_V F. \qquad (22.19)$$

В правой части (22.19) прибавим и вычтем величину $(\partial F/\partial t)\delta t$:

$$\vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t = \vec{P}\delta\vec{Q} - \left(H + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\delta t + \delta_V F\right) \qquad (22.20)$$

Очевидно, последнее слагаемое в скобках (22.20) есть полный дифференциал δF, поэтому

$$\vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t = \vec{P}\delta\vec{Q} - \left(H + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\delta t + \delta F. \qquad (22.21)$$

Дословно повторяя все рассуждения предыдущего случая, придем к каноническим уравнениям (22.3) с функцией гамильтона (22.17).

§23. Производящая функция свободного канонического преобразования. Производящая функция канонического преобразования, зависящая от старых координат и новых импульсов. Точечное каноническое преобразование. Тождественное преобразование

Пусть 2n функций $\vec{P}(\vec{p},\vec{q},t)$, $\vec{Q}(\vec{p},\vec{q},t)$ от (2n+1) переменных задают каноническое преобразование $g(t): R^{2n} \to R^{2n}$. Предположим, что в окрестности некоторой точки $(\vec{p}_0,\vec{q}_0)$ за независимые координаты можно принять $(\vec{Q},\vec{q})$. Другими словами, предположим, что в точке $(\vec{p}_0,\vec{q}_0)$ отличен от нуля якобиан

$$\det\left(\frac{\partial(\vec{Q},\vec{q})}{\partial(\vec{p},\vec{q})}\right)=\det\left(\frac{\partial\vec{Q}}{\partial\vec{p}}\right)\neq 0. \tag{23.1}$$

* Такие **канонические преобразования** называют **свободными***)

Поясним обозначения, используемые в (23.1) – мы будем и в дальнейшем их использовать:

$$\frac{\partial(\vec{Q},\vec{q})}{\partial(\vec{p},\vec{q})} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial Q_1}{\partial q_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial Q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial q_1}{\partial p_n} & \frac{\partial q_1}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial q_1}{\partial q_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial q_n}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial q_n}{\partial q_n} \end{pmatrix} \tag{23.2}$$

---

*) Тождественное преобразование, очевидно, таковым не является.

Учитывая, что $p_i, q_i (i=[1,n])$ – независимые переменные, получаем

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_k}=0;\quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k}=\delta_{ik}. \qquad (23.3а,б)$$

Подставляя производные (23.3) в матрицу (23.2), будем иметь

$$\frac{\partial(\bar{Q},\bar{q})}{\partial(\bar{p},\bar{q})}=\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial Q_1}{\partial q_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial Q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial Q_n}{\partial q_n} \\ \cdots\cdots & 1\cdots\cdots 0\,.. \\ \cdots 0\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & 0\cdots\cdots 1\,.. \end{pmatrix}. \qquad (23.4)$$

Левая нижняя четверть матрицы (23.4) – матрица $n\times n$ с нулевыми элементами, а правая нижняя – единичная матрица. Теперь становится понятным равенство определителей в (23.1). Из этого равенства, между прочим, следует, что дроби, обозначающие матрицы, при вычислении определителей можно сократить. Отметим это обстоятельство. Очень короткое и ясное изложение правил работы с якобианами дано в [18].

Условие (23.1) позволяет, в частности, функцию F предыдущего раздела локально [т.е. в окрестности точки $(\bar{p}_0,\bar{q}_0)$] выразить через эти координаты $(\bar{Q},\bar{q})$ и время:

$$F(\bar{p},\bar{q},t)=F_1(\bar{Q},\bar{q},t). \qquad (23.5)$$

* Функция $F_1(\bar{Q},\bar{q},t)$ называется **производящей функцией** нашего **канонического преобразования g.**

Подчеркнем, что F_1 не есть функция на расширенном фазовом пространстве R^{2n+1}: эта функция задана в области прямого произведения $R^n_{\bar{q}}\times R^n_{\bar{Q}}\times R^1_t$ некоторых двух n-мерных координатных пространств с точками $\bar{q}$ и $\bar{Q}$ и оси t.

Из (22.21) следует

$$\delta F_1(\bar{Q},\bar{q},t) = \bar{p}\delta\bar{q} - \bar{P}\delta\bar{Q} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\delta t. \qquad (23.6)$$

Отсюда получаем

$$\bar{p} = \frac{\partial F_1(\bar{Q},\bar{q},t)}{\partial \bar{q}}; \quad -\bar{P} = \frac{\partial F_1(\bar{Q},\bar{q},t)}{\partial \bar{Q}}. \qquad (23.7\text{а,б})$$

И обратно, оказывается всякая функция F_1 задает некоторое каноническое преобразование g(t) по формулам (23.7).

Сформулируем теорему и докажем ее для случая $F_1 = F_1(\bar{Q},\bar{q})$. По ходу доказательства станет очевидным, что оно буквально переносится на случай, когда функция F_1 зависит также и от времени.

* **Теорема.** Пусть $F_1(\bar{Q},\bar{q})$ – функция, заданная в окрестности некоторой точки $(\bar{Q}_0,\bar{q}_0)$ прямого произведения двух n-мерных координатных пространств. Если

$$\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\bar{Q}\partial\bar{q}}\bigg|_{\bar{Q}_0,\bar{q}_0}\right) \neq 0, \qquad (23.8)$$

то функция F_1 является производящей функцией некоторого свободного канонического преобразования.

Доказательство. Рассмотрим уравнение относительно координат $\bar{Q}$:

$$\frac{\partial F_1(\bar{Q},\bar{q})}{\partial \bar{q}} = \bar{p}. \qquad (23.9)$$

По теореме о неявной функции это уравнение разрешимо и определяет в окрестности точки $\left(\bar{q}_0, \bar{p}_0 = \frac{\partial F_1(\bar{Q},\bar{q})}{\partial\bar{q}}\bigg|_{\bar{Q}_0\,\bar{q}_0}\right)$ функцию $\bar{Q}(\bar{p},\bar{q})$, причем $\bar{Q}(\bar{p}_0,\bar{q}_0) = \bar{Q}_0$. Действительно, нужный определитель здесь как раз $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial\bar{Q}\partial\bar{q}}\bigg|_{\bar{Q}_0\,\bar{q}_0}\right)$, а он, по условию, отличен от нуля.

Рассмотрим теперь функцию

$$\vec{P}_1(\vec{Q},\vec{q}) = -\frac{\partial F_1(\vec{Q},\vec{q})}{\partial \vec{Q}} \qquad (23.10)$$

и положим

$$\vec{P}(\vec{p},\vec{q}) \equiv \vec{P}_1(\vec{Q}(\vec{p},\vec{q}),\vec{q}). \qquad (23.11)$$

Тогда локальное отображение $g: R^{2n} \to R^{2n}$, переводящее точку $(\vec{p},\vec{q})$ в точку $(\vec{P}(\vec{p},\vec{q}),\vec{Q}(\vec{p},\vec{q}))$, будет каноническим с производящей функцией F_1, ибо, по построению,

$$\vec{p}\delta\vec{q} - \vec{P}\delta\vec{Q} = \frac{\partial F_1(\vec{Q},\vec{q})}{\partial \vec{q}}\delta\vec{q} + \frac{\partial F_1(\vec{Q},\vec{q})}{\partial \vec{Q}}\delta\vec{Q}, \qquad (23.12)$$

и интеграл формы $\vec{p}\delta\vec{q} - \vec{P}\delta\vec{Q}$ по замкнутой кривой γ [см.(22.5)] равен нулю в силу того, что в правой части (23.12) стоит полный дифференциал.

Рассматриваемое каноническое преобразование свободно, так как

$$\det\left(\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{p}}\right) = \left(\det\left(\frac{\partial^2 F_1(\vec{Q},\vec{q})}{\partial \vec{Q}\partial \vec{q}}\right)\right)^{-1} \neq 0. \qquad (23.13)$$

Теорема доказана.

Итак, если свободное каноническое преобразование задано производящей функцией, зависящей от старых и новых координат и не зависящей от времени, $F_1 = F_1(\vec{Q},\vec{q})$, – то связь между старыми и новыми каноническими переменными определяется равенствами

$$\vec{p} = \frac{\partial F_1(\vec{Q},\vec{q})}{\partial \vec{q}}; \quad \vec{P} = -\frac{\partial F_1(\vec{Q},\vec{q})}{\partial \vec{Q}}, \qquad (23.14а,б)$$

а новая функция Гамильтона совпадает со старой:

$$K(\vec{P},\vec{Q},t) = H(\vec{p}(\vec{P},\vec{Q}),\vec{q}(\vec{P},\vec{Q}),t). \qquad (23.15)$$

ПРИМЕРЫ

П1. Производящая функция

$$F_1(\vec{Q},\vec{q}) = \vec{q}\vec{Q} \qquad \text{(П1.1)}$$

определяет преобразование

$$\vec{p} = \vec{Q}; \qquad \vec{P} = -\vec{q}. \qquad \text{(П1.2а,б)}$$

Здесь координаты и импульсы фактически меняются ролями. Как указано в [2], "Широта канонических преобразований в значительной степени лишает в гамильтоновом методе понятие обобщенных координат их первоначального смысла. Поскольку эти преобразования связывают каждую из величин P_i, Q_i как с координатами q_k, так и с импульсами $p_k (i,k=[1,n])$, то переменные Q_i уже не имеют смысла чисто пространственных координат. Различие между обеими группами переменных (импульсами и координатами) становится в основном вопросом номенклатурным". Это обстоятельство наглядно проявляется в преобразовании (П1.2а,б), которое сводится просто ко взаимному переименованию координат и импульсов. "Ввиду этой условности терминологии переменные $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в гамильтоновом методе часто называют просто **канонически сопряженными величинами**" [2, с.181].

Если свободное каноническое преобразование задается производящей функцией, зависящей от времени явно, $F_1 = F_1(\vec{Q},\vec{q},t)$, то в этом случае связь между старыми и новыми каноническими переменными определяется уравнениями (23.7), которые мы выпишем здесь еще раз:

$$\vec{p} = \frac{\partial F_1(\vec{Q},\vec{q},t)}{\partial \vec{q}}; \quad \vec{P} = -\frac{\partial F_1(\vec{Q},\vec{q},t)}{\partial \vec{Q}}, \qquad \text{(23.7а,б)}$$

а новая функция Гамильтона вычисляется по правилу

$$K(\vec{P},\vec{Q},t) = H(\vec{p}(\vec{P},\vec{Q},t),\vec{q}(\vec{P},\vec{Q},t),t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad \text{(23.16)}$$

[см.(22.20), (22.21), (23.5), (23.6)].

Дифференциал δF_1, очевидно, записывается в виде

$$\delta F_1 = \vec{p}\delta\vec{q} - \vec{P}\delta\vec{Q} + (K - H)\delta t. \qquad \text{(23.17)}$$

Может оказаться удобным выражать производящую функцию не через переменные $\vec{q}$ и $\vec{Q}$, а через старые координаты $\vec{q}$ и новые импульсы $\vec{P}$. Соответствующая производящая функция является преобразованием Лежандра функции $(-F_1)$ по переменной $\vec{Q}$:

$$G(\vec{P},\vec{q},t)=\vec{P}\vec{Q}-(-F_1). \tag{23.18}$$

Дифференциал функции G [см.(23.17)] имеет вид

$$\delta G=\vec{Q}\delta\vec{P}+\vec{p}\delta\vec{q}+(K-H)\delta t. \tag{23.19}$$

Отсюда следуют формулы, связывающие старые и новые канонические переменные

$$\vec{Q}=\frac{\partial G}{\partial\vec{P}};\quad \vec{p}=\frac{\partial G}{\partial\vec{q}}, \tag{23.20а,б}$$

а также выражение для новой функции Гамильтона

$$K=H+\frac{\partial G}{\partial t}. \tag{23.21}$$

Частным случаем канонических преобразований являются так называемые **точечные канонические преобразования**

* $$\vec{Q}=\vec{f}(\vec{q},t), \tag{23.22}$$

при которых новые координаты выражаются только через старые координаты (но не импульсы) и время. Производящая функция точечного преобразования имеет вид

$$G(\vec{P},\vec{q},t)=\vec{f}(\vec{q},t)\vec{P}. \tag{23.23}$$

П2. Тождественное преобразование представляет собой точечное каноническое преобразование с производящей функцией

$$G=G(\vec{q},\vec{P})=\vec{q}\vec{P}. \tag{П2.1}$$

Уравнения (23.20), (23 21) дают в этом случае

$$\vec{Q} = \vec{q},\ \vec{p} = \vec{P},\ K = H. \qquad (\text{П2.2 а,б,в})$$

Несмотря на исключительную простоту точечных преобразований (очевидна связь структуры производящей функции с преобразованием координат), эти преобразования могут оказаться весьма эффективными в задачах, не слишком, на первый взгляд, простых. Например, движение заряженной частицы в электромагнитном поле, потенциалы которого зависят лишь от комбинации (фазы)

$$\psi = \omega t - \vec{k}\vec{r}, \qquad (23.24)$$

где $\omega, \vec{k} = \mathrm{const}$ (плоская волна), после преобразования

$$x \to x, \quad y \to y, \quad z \to \psi \qquad (23.25\ \text{а,б,в})$$

может рассматриваться как одномерное со всеми вытекающими отсюда последствиями. При этом совершенно неважно, как соотносится фазовая скорость волны со скоростью света в пустоте: больше или меньше с. Другие примеры – соответствующие другой симметрии электромагнитного поля – приведены в [19].

Нетрудно показать, что преобразование Лоренца представляет собой не что иное, как точечное каноническое преобразование

$$\vec{Q} = \vec{f}(\vec{q}) \qquad (23.26)$$

в пространстве событий.

В общем случае каноническое преобразование сохраняет объем (фазовый).

В [4] показано, что преобразование Лоренца сохраняет 4-объем, т.е. объем в пространстве событий. В силу сказанного ясно, что сохраняемость 4-объема является проявлением того факта, что преобразование Лоренца, как точечное, не затрагивает непосредственно обобщенных импульсов – они преобразуются параллельно [с помощью (23.23), (23.20)].

Очевидной целью любых преобразований является по возможности более полное использование симметрии задачи и соответственно сокращение ее размерности. При этом чем шире класс используемых преобразований, тем выше их эффективность. Если задача является гамильтоновой, то в руках исследователя оказывается мощнейший инструмент – канонические преобразования. Известно немало примеров, скажем, в механике заряженных частиц, когда движение релятивистской частицы в непростой композиции силовых полей "вталкивается" в одномерную задачу – и делается это с помощью канонических преобразований.

§24. Действие как функция координат и времени. Уравнение Гамильтона – Якоби [2]

24.1. При формулировке принципа наименьшего действия мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt, \tag{24.1}$$

взятый вдоль кривой (пути) в расширенном $(n+1)$ – мерном конфигурационном пространстве системы $\{\vec{q}, t\}$ между двумя заданными положениями $\vec{q}_0$ и $\vec{q}_1$, которые система занимает в заданные моменты времени t_0 и t_1. При варьировании действия сравнивались значения этого интеграла для близких путей (траекторий) с одними и теми же значениями

$$\vec{q}_0 = \vec{q}(t_0), \quad \vec{q}_1 = \vec{q}(t_1). \tag{24.2 а,б}$$

Полученное нами выражение для вариации действия выглядело так [см.(10.5)]:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta\vec{q} \Bigg|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right] \delta\vec{q} dt. \tag{24.3}$$

Далее в силу условий (24.2) первое слагаемое в правой части уравнения (24.3) мы приравнивали к нулю, откуда следовала эквивалентность уравнений Лагранжа экстремальности функционала действия.

Посмотрим теперь на уравнение (24.3) несколько по-другому. Будем считать, во-первых, что в интеграле действия (24.1) варьируются также конечные координаты системы:

$$\delta\bar{q}(t_0) = 0;\ \delta\bar{q}(t_1) \equiv \delta\bar{q} \neq 0. \qquad (24.4\ \text{а,б})$$

Во-вторых, будем рассматривать интеграл действия **только для прямых путей** (имеют место уравнения Лагранжа). Тогда второе слагаемое в (24.3) обращается в нуль. Переобозначим

$$t_1 \equiv t \qquad (24.5)$$

и перепишем (24.3) в виде

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}}\delta\bar{q} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}}\delta\bar{q}(t). \qquad (24.6)$$

Момент времени $t(t_1!)$ в (24.6) – фиксирован. Поэтому ясно, что выражение (24.6) – виртуальный дифференциал действия S. Используя определение обобщенного импульса, напишем вместо последнего равенства

$$\delta S = \bar{p}\delta\bar{q}. \qquad (24.7)$$

Из этого соотношения следует, что частные производные от действия по координатам равны соответствующим импульсам:

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{q}} = \bar{p}. \qquad (24.8)$$

Аналогично предыдущему можно было бы рассматривать траектории, начинающиеся в заданный момент времени t_0 в заданном положении $\bar{q}_0$ и заканчивающиеся в разных точках $\bar{q}_1$ в разные моменты времени t_1. Таким образом можно построить полный дифференциал dS **действия как функции координат и времени** [1, с.113–115].

Но это – не самый короткий путь. Проще воспользоваться уже известной формулой (24.8) и определением (24.1).

Полная производная действия по времени (вдоль прямого пути) равна

$$\frac{dS}{dt} = L\ . \qquad (24.9)$$

С другой стороны, **рассматривая действие как функцию координат** и времени, имеем

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\frac{d\vec{q}}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\vec{p}\dot{\vec{q}}. \qquad (24.10)$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{dS}{dt}-\vec{p}\dot{\vec{q}}=L-\vec{p}\dot{\vec{q}}. \qquad (24.11)$$

Но выражение в правой части (24.11) – функция Гамильтона, взятая со знаком "–". Окончательно

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H\,. \qquad (24.12)$$

С учетом (24.8) полный дифференциал действия $S=S(\vec{q},t)$ запишем в виде

$$dS=\vec{p}d\vec{q}-Hdt. \qquad (24.13)$$

24.2. Уравнение Гамильтона – Якоби

Перепишем уравнение (24.12) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(\vec{p},\vec{q},t)=0. \qquad (24.14)$$

Заменяя импульсы $\vec{p}$ в соответствии с (24.8), придем к уравнению, которому должна удовлетворять функция $S(\vec{q},t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{q}},\vec{q},t\right)=0. \qquad (24.15)$$

* Это нелинейное, вообще говоря, уравнение в частных производных – первого порядка – называется **уравнением Гамильтона – Якоби.**

§25. Метод Гамильтона – Якоби интегрирования уравнений движения. Общий и полный интегралы уравнения Гамильтона - Якоби. Идея метода. Процедура интегрирования уравнений движения на основе полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби. Главная функция Гамильтона

Наряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями Гамильтона уравнение Гамильтона – Якоби также является основой некоторого общего метода интегрирования уравнений движения.

Переходя к изложению этого метода, напомним предварительно, что всякое дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка имеет решение, зависящее от произвольной функции;

* **такое решение** называют **общим интегралом уравнения.**

Приведем очень простой пример. Пусть S – функция двух переменных (x и y): S=S(x,y). Общий интеграл уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial x}=0 \qquad (25.1)$$

имеет вид

$$S=f(y), \qquad (25.2)$$

где f – произвольная функция.

В механических приложениях, однако, основную роль играет не общий интеграл уравнения Гамильтона – Якоби, а так называемый **полный интеграл:**

* так называется **решение дифференциального уравнения в частных производных, содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных** (в списке аргументов).

В уравнении Гамильтона – Якоби независимыми переменными являются время и координаты. Поэтому для системы с n степенями свободы полный интеграл этого уравнения должен содержать (n+1) произвольных постоянных. При этом поскольку функция S входит в уравнение только через свои производные, то одна из произвольных постоянных (A) содержится в полном интеграле, как говорят, аддитивным образом, т.е. полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби имеет вид

$$S=G(t,\vec{q},\vec{\alpha})+A, \qquad (25.3)$$

где $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, α_i и A – произвольные постоянные.

Идея метода Гамильтона – Якоби состоит в том, чтобы заменить задачу интегрирования уравнений движения исходной гамильтоновой системы интегрированием для более простой гамильтоновой системы, эквивалентной исходной. Эквивалентная система может быть получена только с помощью канонического преобразования исходного гамильтонова формализма. Проблема, таким образом, сводится к поиску производящей функции нужного преобразования.

Оказывается, что полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби как раз и представляет собой такую производящую функцию.

Выясним теперь, каким образом можно проинтегрировать уравнения движения, если известен полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби.

Рассмотрим каноническое преобразование от величин $(\vec{p}, \vec{q})$ к новым переменным, причем в качестве производящей функции выберем функцию старых координат $\vec{q}$, новых импульсов, которые мы обозначим через $\vec{\alpha}$, и времени t:

$$G = G(\vec{q}, \vec{\alpha}, t). \qquad (25.4)$$

Новые координаты обозначим посредством $\vec{\beta}$. Старые импульсы, новые координаты и новая функция Гамильтона определяются равенствами (23.20), (23.21):

$$\vec{p} = \frac{\partial G}{\partial \vec{q}}; \quad \vec{\beta} = \frac{\partial G}{\partial \vec{\alpha}}; \quad K = H + \frac{\partial G}{\partial t}. \qquad (25.5\ \text{а,б,в})$$

Пусть функция $G(\vec{q}, \vec{\alpha}, t)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона – Якоби (аддитивную постоянную A – опустим). Тогда новая функция Гамильтона тождественно (т.е. при всех значениях своих аргументов) равна нулю:

$$K = H + \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \qquad (25.6)$$

Поэтому канонические уравнения в новых переменных имеют вид

$$\dot{\vec{\alpha}} = 0; \quad \dot{\vec{\beta}} = 0, \tag{25.7 а,б}$$

откуда следует

$$\vec{\alpha} = \text{const}; \quad \vec{\beta} = \text{const}. \tag{25.8 а,б}$$

С другой стороны, n уравнений (25.5 б)

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad i = [1, n] \tag{25.9}$$

дают возможность выразить n координат q_i через время t и 2n постоянных ($\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$), если только система (25.9) разрешима относительно q_i. Тем самым будет найдено общее решение уравнений движения.

Отметим, что условие разрешимости системы (25.9) относительно $\vec{q}$ имеет вид

$$\det\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \vec{q} \partial \vec{\alpha}}\right) \neq 0. \tag{25.10}$$

Таким образом, решение задачи о движении динамической системы методом Гамильтона – Якоби сводится к следующим операциям.

1. По функции Гамильтона составляется уравнение Гамильтона – Якоби и находится полный интеграл (25.4) этого уравнения.

2. Дифференцируя интеграл (25.4) по произвольным постоянным α_i и приравнивая производные к новым постоянным β_i $(i = [1, n])$, получаем систему n алгебраических уравнений (25.9), решая которую найдем координаты q_i как функции времени и 2n произвольных постоянных.

3. Зависимость импульсов p_i от времени можно затем найти с помощью уравнений (25.5 а).

Выскажем далее два важных замечания.

Замечание 1. Если мы имеем неполный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби, зависящий от меньшего, чем n, числа произвольных постоянных, то хотя с его помощью нельзя найти общее решение уравнений движения, но можно несколько упростить задачу его нахождения. Так, если известна функция G – решение уравнения Гамильтона – Якоби, содержащая одну произвольную постоянную α, то соотношение

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \beta = \text{const} \tag{25.11}$$

дает одно уравнение, связывающее $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и t.

Замечание 2. Уравнение Гамильтона – Якоби принимает несколько более простую форму для консервативных $(\partial H / \partial t = 0)$ систем. В этом случае

$$H = E = \text{const}, \tag{25.12}$$

и действие имеет вид

$$S = S_0(\vec{q}) - Et, \tag{25.13}$$

где S_0 – так называемое **укороченное действие.** Для укороченного действия уравнение Гамильтона – Якоби записывается в форме

$$H\left(\vec{q}, \frac{\partial S_0}{\partial \vec{q}}\right) = E\,. \tag{25.14}$$

Главная функция Гамильтона

Мы записали уравнение Гамильтона – Якоби для действия, а затем "отстроились" от этой величины и рассматривали в дальнейшем уравнение для производящей функции G. Действие S и производящая функция канонического преобразования – это, вообще говоря, совершенно **разные** вещи. Но, оказывается, существует функция, которая одновременно является и тем и другим.

Рассмотрим действие

$$S = \int_{t_0}^{t} L dt \qquad (25.15)$$

за время (t_0, t) как функцию координат $\vec{q}$, времени t и начальных координат $\vec{q}_0$:

$$S = S(t, \vec{q}, \vec{q}_0). \qquad (25.16)$$

* Действие, представленное в виде (25.16), называется **главной функцией Гамильтона.**

Если при варьировании действия варьировать величины $\vec{q}(t)$, t *и* $\vec{q}_0$, *т.е. рассматривать* ***прямые пути****, начинающиеся в* фиксированный момент времени t_0 в разных точках $\vec{q}_0$ и оканчивающиеся в разные моменты времени t в разных точках $\vec{q}$, то, как следует из (24.3), (24.12), будем иметь

$$\delta S = \vec{p}\delta\vec{q} - H\delta t - \vec{p}_0\delta\vec{q}_0. \qquad (25.17)$$

Очевидно, главная функция Гамильтона удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби и является его полным интегралом. Кроме того, в силу (25.17) функция $(-S)$ есть производящая функция свободного канонического преобразования от начальных координат и импульсов $\vec{q}_0, \vec{p}_0$ к координатам и импульсам в произвольный момент времени. Ранее было показано, что преобразование, осуществляемое фазовым потоком, – каноническое. Главная функция Гамильтона (взятая со знаком "–") как раз и есть производящая функция этого преобразования.*)

---

*) В самом деле, старая функция Гамильтона равна $H - \left(-\dfrac{\partial S}{\partial t}\right) = 0.$

§26. Разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби. Примеры. Циклические переменные

В ряде важных случаев нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби может быть достигнуто путем так называемого **разделения переменных**, сущность которого состоит в следующем.

Допустим, что какая-либо координата – обозначим ее q_1 – и соответствующая ей производная $\partial S / \partial q_1$ входят в уравнение Гамильтона – Якоби только в виде некоторой комбинации $\varphi(q_1, \partial S / \partial q_1)$, не содержащей никаких других координат, времени и производных, т.е. уравнение имеет вид

$$\Phi\left(\vec{q}', t, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}'}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right) = 0, \qquad (26.1)$$

где $\vec{q}' = (q_2, q_3, ..., q_n)$. Будем искать в этом случае решение (26.1) в виде суммы,

$$S = S'(\vec{q}', t) + S_1(q_1). \qquad (26.2)$$

Подставив это выражение в уравнение (26.1), получим

$$\Phi\left(\vec{q}', t, \frac{\partial S'}{\partial \vec{q}'}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right)\right) = 0. \qquad (26.3)$$

Предположим, что решение (26.2) найдено. Тогда после подстановки его в уравнение (26.3) последнее должно обратиться в тождество, справедливое, в частности, при любом значении координаты q_1. Но при изменении q_1 может меняться только функция φ, поэтому тождественность равенства (26.3) требует, чтобы и функция φ сама по себе была постоянной. Таким образом, уравнение (26.3) распадается на два уравнения:

$$\varphi\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1; \qquad (26.4)$$

$$\Phi\left(\bar{q}', t, \frac{\partial S'}{\partial \bar{q}'}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right) = 0, \qquad (26.5)$$

где α_1 – произвольная постоянная. Первое из них есть обыкновенное дифференциальное уравнение, из которого функция $S_1(q_1)$ может быть определена простым интегрированием. После этого остается дифференциальное уравнение в частных производных (26.5), но уже с меньшим числом независимых переменных.

Если таким способом можно последовательно отделить все n координат и время, то **нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби сведется к квадратурам.** Для консервативной системы речь фактически идет лишь о разделении n переменных (координат) в уравнении

$$H\left(\bar{q}, \frac{\partial S_0}{\partial \bar{q}}\right) = E \qquad (26.6)$$

(S_0 – укороченное действие), и при полном разделении искомый интеграл уравнения (26.6) имеет вид

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k(q_k, \bar{\alpha}) - E(\bar{\alpha})t, \qquad (26.7)$$

где каждая из функций S_k зависит лишь от одной из координат, а энергия E как функция произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ получается подстановкой

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k \qquad (26.8)$$

в уравнение (26.6).*)

Приведем три примера консервативных систем с полностью разделяющимися переменными.

---

*) Говоря о консервативных системах, мы называем сохраняющуюся функцию Гамильтона энергией. Точнее будет термин "обобщенная энергия", так как E может оказаться величиной, имеющей совсем другой физический смысл и соответственно другую размерность.

ПРИМЕРЫ

П1. Пусть гамильтониан системы имеет вид

$$H = H(\vec{q},\vec{p}) = f(\varphi_1(q_1,p_1),\varphi_2(q_2,p_2),\dots,\varphi_n(q_n,p_n)). \quad (\text{П1.1})$$

Здесь, очевидно, переменные уже фактически разделены. Положим

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k(q_k). \quad (\text{П1.2})$$

Поскольку $\partial S_0 / \partial q_k = dS_k / dq_k$, мы можем записать

$$\varphi_k\left(q_k,\frac{dS_k}{dq_k}\right) \equiv \alpha_k = \text{const}. \quad (\text{П1.3})$$

Разрешая уравнение (П1.3) относительно производной dS_k / dq_k и интегрируя, получим

$$\frac{dS_k}{dq_k} = F_k(q_k,\alpha_k); \quad (\text{П1.4})$$

$$S_k = S_k(q_k,\alpha_k) = \int F_k(q_k,\alpha_k)dq_k. \quad (\text{П1.5})$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби можно записать теперь в форме

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k(q_k,\alpha_k) - E(\vec{\alpha})t, \quad (\text{П1.6})$$

где S_k определяются соотношением (П1.5), а энергия системы

$$E(\vec{\alpha}) = f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n). \quad (\text{П1.7})$$

П2. Пусть теперь

$$H = \varphi_n(\dots\varphi_3\ (\varphi_2(\varphi_1(q_1,p_1),q_2p_2),q_3,p_3)\dots,q_n,p_n). \quad (\text{П2.1})$$

Перепишем уравнение (26.6), подставляя в гамильтониан (П2.1) вместо импульсов производные укороченного действия по соответствующим координатам:

$$\varphi_n\left(\dots\varphi_3\left(\varphi_2\left(\varphi_1\left(q_1,\frac{\partial S_0}{\partial q_1}\right),q_2,\frac{\partial S_0}{\partial q_2}\right),q_3,\frac{\partial S_0}{\partial q_3}\right),\dots,q_n,\frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right) = E. \quad (\text{П2.2})$$

Вводим произвольные постоянные $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}$ и $\alpha_n \equiv E$ и полагаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1\left(q_1,\frac{\partial S_0}{\partial q_1}\right)=\alpha_1;\\
&\varphi_2\left(\alpha_1,q_2,\frac{\partial S_0}{\partial q_2}\right)=\alpha_2;\\
&\varphi_3\left(\alpha_2,q_3,\frac{\partial S_0}{\partial q_3}\right)=\alpha_3;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\varphi_n\left(\alpha_{n-1},q_n,\frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)=\alpha_n.
\end{aligned}\right\} \tag{П2.3}$$

Пишем по-прежнему

$$S_0=\sum_k S_k, \tag{П2.4}$$

однако вместо (П1.3) теперь имеем

$$\varphi_k\left(\alpha_{k-1},q_k,\frac{dS_k}{dq_k}\right)=\alpha_k. \tag{П2.5}$$

Таким образом,

$$S_k=S_k(q_k,\alpha_{k-1},\alpha_k), \tag{П2.6}$$

т.е. каждое слагаемое в выражении (П2.4) для укороченного действия зависит от двух произвольных постоянных. Все остальное – точно так же, как и в предыдущем случае.

П3. Рассмотрим консервативную систему с гамильтонианом (в определенном смысле это вариант, промежуточный между первым и вторым):

$$H=\varphi_n(\varphi_{n-1}(q_{n-1},p_{n-1}),\ \varphi_{n-2}(q_{n-2},p_{n-2}),\dots,\varphi_1(q_1,p_1),q_n,p_n). \tag{П3.1}$$

Ясно, что для $k\le n-1$ можно написать:

$$\varphi_k\left(q_k,\frac{\partial S_0}{\partial q_k}\right)=\alpha_k, \qquad (П3.2)$$

где α_k – по-прежнему произвольные постоянные. С учетом (П3.2) уравнение (26.6) перепишется в виде

$$\varphi_n(\alpha_{n-1},\alpha_{n-2},\ldots,\alpha_1,q_n,p_n)=E=\text{const}. \qquad (П3.3)$$

Положим

$$E\equiv\alpha_n \qquad (П3.4)$$

и вместо (П3.3) запишем

$$\varphi_n\left(\alpha_{n-1},\alpha_{n-2},\ldots,\alpha_2,\alpha_1,q_n,\frac{dS_n}{dq_n}\right)=\alpha_n. \qquad (П3.5)$$

Очевидно, по-прежнему укороченное действие представимо в виде суммы (П2.4), однако теперь

$$S_k=S_k(q_k,\alpha_k),\quad k\le n-1; \qquad (П3.6\ а)$$

$$S_n=S_n(q_n,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n). \qquad (П3.6\ б)$$

Таким образом, рассмотренные примеры показывают,что, вообще говоря, каждое слагаемое S_k в укороченном действии может зависеть от n произвольных постоянных α_k. Это же касается и сохраняющейся обобщенной энергии [см.(П1.7)].

Посмотрим теперь, что дает с точки зрения разделения переменных в методе Гамильтона – Якоби наличие циклических переменных.

Пусть q_l – циклическая координата, т.е. координата, не входящая явным образом в функцию Гамильтона, а поэтому и в уравнение Гамильтона – Якоби. Тогда функция $\varphi\left(q_l,\frac{\partial S}{\partial q_l}\right)$, фигурирующая в (26.1), (26.3), (26.4), сводится просто к $\varphi(\partial S/\partial q_l)$, и из уравнения (26.4) имеем $S_l=\alpha_l q_l$, так что действие переписывается в виде [см.(26.2)]

$$S=S'(\vec{q}',t)+\alpha_l q_l. \qquad (26.9)$$

Постоянная α_1 есть при этом не что иное, как постоянное значение обобщенного импульса $p_1 = \partial S / \partial q_1$, отвечающего циклической координате. Отметим два момента.

1. Отделение времени в виде члена $(-E \cdot t)$ для консервативной системы тоже соответствует методу разделения переменных для циклической переменной t.

2. Если, скажем, импульс p_1 оказывается циклической переменной, то каноническое преобразование (см. § 23, пример 1)

$$p_1 = Q_1, \quad P_1 = -q_1 \tag{26.10}$$

сводит этот вариант к уже известному (координата Q_1 циклична).

Таким образом, все рассматривавшиеся ранее случаи упрощения интегрирования уравнений движения, основанные на использовании циклических переменных, охватываются методом разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби. К ним добавляется еще ряд случаев, когда разделение переменных возможно, хотя координаты не являются циклическими. Все это приводит к выводу о том, что метод Гамильтона – Якоби является наиболее мощным методом нахождения общего решения уравнений движения. Многие задачи, решенные Якоби, вообще не поддаются решению другими методами, например, задача о притяжении двумя неподвижными центрами [3, с.225-227].

Для разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби существен удачный выбор координат. В "Лекциях по динамике" Якоби писал: "Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена" [3]. В [2 с.188 – 191] рассмотрены частные случаи разделения переменных в различных координатах, представляющие физический интерес в связи с задачами о движении материальной точки в различных внешних силовых полях. Используемые здесь координаты (сферические, параболические и эллиптические) и есть примеры тех самых "замечательных подстановок", о которых говорил Якоби.

§27. Движение нерелятивистской частицы в центральном поле. Сравнение "по мощности" трех методов интегрирования уравнений движения: а) метода уравнений Лагранжа; б) метода канонических уравнений Гамильтона; в) метода уравнения Гамильтона - Якоби

Рассмотрим движение нерелятивистской частицы массы m в силовом поле с потенциалом (потенциальной энергией)

$$\Pi = \Pi(r) \qquad (27.1)$$

и на этом относительно простом примере сравним возможности трех методов интегрирования уравнений движения: лагранжева, гамильтонова и метода Гамильтона - Якоби. Величина r в (27.1) - расстояние между частицей и неподвижной (относительно ИСО) фиксированной точкой - силовым центром О. Отметим сразу же, что, поскольку силовое поле обладает центральной симметрией, необходимо использовать сферические координаты r, θ, φ (рис.21). На рис.21 показаны также три взаимно перпендикулярные составляющие вектора $\bar{v}$ скорости частицы.

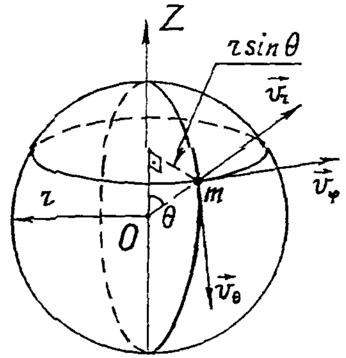

Рис.21

27.1. Лагранжево описание

Функция Лагранжа частицы имеет вид

$$L = T - \Pi, \qquad (27.2)$$

где T - кинетическая энергия частицы. Проще всего построить выражение для T в сферических координатах, разложив скорость частицы на три взаимно перпендикулярных составляющих, как это показано на рис.21:

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta + \bar{v}_\varphi. \qquad (27.3)$$

После разложения имеем:

$$T = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2). \qquad (27.4)$$

Очевидно,

$$v_r = \dot{r};\qquad (27.5а)$$

$$v_\theta = r\dot{\theta};\qquad (27.5б)$$

$$v_\varphi = r\sin\theta\cdot\dot{\varphi},\qquad (27.5в)$$

где точки обозначают производную по времени. Подставляя эти выражения в (27.4) и затем в (27.2), получаем

$$L = L(r,\theta,(\varphi),\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2) - \Pi(r).\qquad (27.6)$$

Функция Лагранжа (27.6) не зависит от координаты φ, т.е. φ – циклическая координата. Следовательно, соответствующий обобщенный импульс p_φ есть интеграл движения:

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi} \equiv \alpha_1 = \mathrm{const}.\qquad (27.7)$$

Интеграл (27.7) не что иное, как проекция вектора момента импульса частицы на ось OZ.

Система с функцией Лагранжа (27.6) консервативна, поэтому имеет место закон сохранения энергии:

$$E = T + \Pi = \mathrm{const}.\qquad (27.8)$$

Два интеграла движения (27.7) и (27.8) – вот и все, что можно "выжать" из структуры функции Лагранжа (27.6). Заметим при этом, что размерность задачи не понижена, т.е. переменные $\varphi, \dot{\varphi}$ не отделяются: разумеется, наличие интеграла, скажем, (27.7) позволяет одно из трех уравнений Лагранжа заменить уравнением (27.7), однако в оставшихся уравнениях при вычислении частных производных считается параметром не константа (27.7), а обобщенная скорость $\dot{\varphi}$, и лишь когда эти производные вычислены, можно производить в полученных выражениях замену по уравнению (27.7):

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha_1}{mr^2\sin^2\theta}.\qquad (27.9)$$

Отметим также, что интеграл энергии (27.8) возникает в лагранжевом описании отнюдь не автоматически – это следствие отдельной теоремы об изменении полной (механической) энергии (см. § 7).

27.2. Метод канонических уравнений Гамильтона

С помощью преобразования Лежандра по обобщенным скоростям перейдем от лагранжева к гамильтонову формализму. Обобщенные импульсы, соответствующие координатам r,θ,φ, связаны с лагранжевыми переменными равенствами

$$p_r = \partial L / \partial \dot{r} = m\dot{r}; \qquad (27.10а)$$

$$p_\theta = \partial L / \partial \dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}; \qquad (27.10б)$$

$$p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi} = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}, \qquad (27.10в)$$

а функция Гамильтона частицы имеет вид

$$H = H(r,\theta,(\varphi),p_r,p_\theta,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \Pi(r) \qquad (27.11)$$

и, как нетрудно убедиться, представляет собой (в данном случае) механическую энергию частицы E.

Отметим сразу же цикличность координаты φ. Отсюда, как и в лагранжевом формализме, получаем

$$p_\varphi = \alpha_1 = \text{const}. \qquad (27.12)$$

Но теперь размерность задачи сократилась: мы имеем

$$H = H(r,\theta,p_r,p_\theta,\alpha_1) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{\alpha_1^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \Pi(r), \qquad (27.13)$$

где α_1 – некоторый постоянный параметр. Функция Гамильтона (27.13) описывает систему с двумя (**а не тремя**) степенями свободы.

Интеграл энергии

$$H = E = \text{const} \qquad (27.14)$$

возникает в гамильтоновом описании как автоматическое следствие того факта, что функция Гамильтона не зависит явно от времени.

Таким образом, мы видим, что в гамильтоновом описании упрощение исходной задачи продвинуто несколько дальше, чем в лагранжевом. Тем не менее, по получении функции Гамильтона (27.13), как и в предыдущем – лагранжевом – случае ничего не остается, как писать уравнения движения и пытаться их проинтегрировать: циклические переменные φ и t уже использованы. Конечно, есть и другой путь: поиск канонических преобразований, существенно упрощающих полученную гамильтонову систему. Но, во-первых, не существует простых универсальных алгоритмов такого поиска, а, во-вторых, этот путь скорее связан, как мы убедились в §25, с методом уравнения Гамильтона – Якоби.

27.3. Метод разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби

Рассматриваемая система консервативна, поэтому действие может быть представлено в форме

$$S = S_0(r,\theta,\varphi) - Et, \qquad (27.15)$$

где S_0 – укороченное действие. Уравнение Гамильтона – Якоби эквивалентно уравнению (26.6) для укороченного действия. С помощью (27.11) запишем его в виде

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}\right)^2\right]\right\} + \Pi(r) = E\,. \qquad (27.16)$$

Переменные в (27.16) разделяются. Укороченное действие можно представить в виде суммы

$$S_0 = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi), \qquad (27.17)$$

и тогда (27.16) распадается на три уравнения:

$$\frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha_1 = \text{const}; \qquad (27.18а)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta} = \alpha_2 = \text{const}; \qquad (27.18б)$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{r^2}\right] + \Pi(r) = \alpha_3 = \text{const}, \qquad (27.18в)$$

где мы положили

$$E = \alpha_3. \qquad (27.19)$$

Слагаемые S_r, S_θ, S_φ, как следует из уравнений (27.18), можно записать в виде

$$S_r = \int\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi(r)) - \alpha_2/r^2}\,dr; \qquad (27.20а)$$

$$S_\theta = \int\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/\sin^2\theta}\,d\theta; \qquad (27.20б)$$

$$S_\varphi = \alpha_1\varphi. \qquad (27.20в)$$

Таким образом, мы получаем полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби, который записывается в квадратурах:

$$S = \int\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi(r)) - \alpha_2/r^2}\,dr +$$

$$+\int\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/\sin^2\theta}\,d\theta + \alpha_1\varphi - \alpha_3 t \qquad (27.21)$$

(аддитивную постоянную опускаем).

Общее решение уравнений движения может быть теперь найдено с помощью уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i = \text{const}, \quad (i = [1,3]): \qquad (27.22)$$

$$\varphi-\alpha_1\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{\alpha_2-\alpha_1^2/\sin^2\theta}}=\beta_1; \qquad (27.23а)$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2-\alpha_1^2/\sin^2\theta}}-\frac{1}{2}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_3-\Pi(r))-\alpha_2/r^2}}=\beta_2; \qquad (27.23б)$$

$$\int\frac{m dr}{\sqrt{2m(\alpha_3-\Pi(r))-\alpha_2/r^2}}-t=\beta_3. \qquad (27.23в)$$

Не нарушая общности, можно выбрать сферические координаты так, чтобы начальная скорость частицы $\vec{v}_0$ лежала в плоскости меридиана (см.рис.21). Тогда

$$(\dot{\varphi})_0=0\Rightarrow(p_\varphi)_0=\alpha_1=0. \qquad (27.24)$$

Отсюда следует [см.(27.23 а)]

$$\varphi=\beta_1=\text{const}, \qquad (27.25)$$

т.е движение частицы происходит в плоскости меридиана, и (27.23б) несколько упрощается:

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}}\theta-\frac{1}{2}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2m(\alpha_3-\Pi(r))-\alpha_2/r^2}}=\beta_2. \qquad (27.26)$$

Итак, общее решение уравнений движения найдено в квадратурах [оно определяется равенствами (27.23в), (27.25) и (27.26)], причем метод разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби позволил сделать это по известному стандартному алгоритму.

Отметим, что с помощью уравнений (27.23в) и (27.26) легко получить 2-й закон Кеплера.

Действительно, дифференцируя эти уравнения по времени, имеем

$$\frac{m}{\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi(r)) - \alpha_2 / r^2}} \frac{dr}{dt} = 1; \qquad (27.27а)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2r^2\sqrt{2m(\alpha_3 - \Pi(r)) - \alpha_2 / r^2}} \frac{dr}{dt}. \qquad (27.27б)$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2m} = \text{const}. \qquad (27.28)$$

Уравнение (27.28) утверждает постоянство секториальной скорости, которая представляет собой производную от площади, описываемой радиус-вектором частицы, проведенным из силового центра. Нетрудно сообразить, что, умножив секториальную скорость (27.28) на массу частицы, мы получаем момент импульса частицы относительно силового центра, так что второй закон Кеплера эквивалентен закону сохранения момента импульса частицы, движущейся в центральном силовом поле.

Отметим, что для ньютонова поля притяжения потенциал имеет вид

$$\Pi(r) = -\gamma / r, \quad \gamma = \text{const} > 0. \qquad (27.29)$$

Предпринятое нами сравнение "по мощности" трех **методов интегрирования уравнений движения** показывает, что мощность нарастает в последовательности

уравнения Лагранжа → уравнения Гамильтона →
→ уравнение Гамильтона – Якоби.

Важно отметить, что, с одной стороны, выбранная в качестве предмета исследования задача является относительно простой и может быть решена в рамках методов общей физики на основе ньютоновых уравнений движения, поэтому фактически сравнивались возможности, предоставляемые упомянутыми методами на уровне простых и универсальных алгоритмов. С другой стороны, полученная нами иерархия, тем не менее, справедлива абсолютно; достаточно указать на упоминавшиеся уже случаи, когда задача решается методом уравнения Гамильтона – Якоби и не решается по-другому. Что же касается метода ньютоновых уравнений движения, то они, вообще говоря, неконкурентоспособны. Это утверждение представится очевидным, если вспомнить о том, каким громоздким оказывается ньютоново описание систем со связями; мы, наконец, надеемся, что универсальность лагранжева метода, проявившаяся, в частности, в возможности аксиоматического построения функции Лагранжа и интеграла действия (см §11,14,15) произвела впечатление, достаточное для завершения построения "цепочки мощности" фрагментом

уравнения Ньютона $\rightarrow$ уравнения Лагранжа.

И последнее замечание. В решении фундаментальных вопросов, таких, как формулировка основных уравнений, описывающих поведение новых, ранее неизвестных физических обьектов (например, полей), чаще всего до недавнего времени использовался лагранжев формализм. Однако ситуация здесь меняется, и гамильтоновы методы глубоко проникают в релятивистскую механику и релятивистскую теорию поля, т.е. в разделы, где их использование традиционно считалось не вполне удобным (см.,например.,[20]). Учитывая эту тенденцию, мы и назвали абсолютно верной выстроенную здесь "цепочку мощности".

§28. Интегрируемые динамические сиситемы. Первые интегралы. Скобки Пуассона: определение и свойства. Теорема Пуассона. Конструирование новых интегралов с помощью скобок Пуассона. Пример. Критерий каноничности преобразования. Инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований (прямая и обратная теоремы)

В заключительной части пособия рассматриваются **интегрируемые динамические системы** и **системы, близкие к интегрируемым.**

* Напомним, что **интегрируемой** называется **система,** для которой нахождение общего решения уравнений движения сводится к квадратурам (см.сноску на с 113).

В теории интегрируемых систем существенно используется аппарат **скобок Пуассона** (СП), с изложения которого мы и начнем. Из предыдущего ясно (см.§25,26), что интегрируемые системы следует искать среди систем консервативных, однако **скобки Пуассона** (СП) универсальны в том смысле, что они определены и работают в равной мере и в случае систем с нестационарным гамильтонианом $(\partial H / \partial t \neq 0)$. Поэтому при изложении аппарата СП мы будем рассматривать **произвольные гамильтоновы системы.**

Следует отметить исключительную важность скобок Пуассона в квантовой теории.

28.1. Основной путь решения уравнений движения (в любой динамике) связан с определением некоторых полезных инвариантных величин, позволяющих понизить порядок системы уравнений. Это так называемые **первые интегралы** системы уравнений движения; часто говорят просто: "первые интегралы". С этим понятием мы уже знакомы (см. сноску на с. 110). Тем не менее, в силу важности для дальнейшего приведем еще раз необходимые определения.

Пусть имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\vec{x}} = \vec{v}(t, \vec{x}), \qquad (28.1)$$

где $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, а точка над буквой означает производную по независимой переменной t: $\dot{\vec{x}} \equiv d\vec{x}/dt$.

* **Решением, интегралом** или **интегральной кривой** системы (28.1) называется совокупность **m** дифференцируемых функций

$$x_i = x_i(t), \quad i = [1, m], \qquad (28.2а)$$

удовлетворяющих уравнениям (28.1). Ясно, что вместо (28.2а) можно записать

$$\vec{x} = \vec{x}(t). \qquad (28.2б)$$

* Непрерывно дифференцируемая функция $f(t, \vec{x})$, которая вдоль каждой интегральной кривой (28.2) рассматриваемой системы имеет некоторое постоянное значение

$$f(t, \vec{x}) = c = \mathrm{const}, \qquad (28.3)$$

называется **первым интегралом** системы уравнений (28.1).

Отметим, что первый интеграл (28.3) удовлетворяет однородному линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}(t, \vec{x}) \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = 0. \qquad (28.4)$$

В случае, когда уравнения (28.1) представляют собой систему канонических уравнений Гамильтона, мы имеем следующее определение.

* Некоторая непрерывно дифференцируемая функция $f(\vec{p},\vec{q},t)$ называется **первым интегралом уравнений движения**

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \vec{q}},\quad \frac{d\vec{q}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \qquad (28.5а,б)$$

или просто **первым интегралом**, если для любого движения данной системы (вдоль любой фазовой траектории) эта функция сохраняет постоянное значение c:

$$f(\vec{p}(t),\vec{q}(t),t)=c=\text{const}. \qquad (28.6)$$

Интеграл (28.6) удовлетворяет уравнению, аналогичному (28.4):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{\partial f}{\partial \vec{q}}\frac{d\vec{q}}{dt}=0, \qquad (28.7)$$

левая часть которого равна df/dt.

28.2. Рассмотрим теперь **скобки Пуассона, их определение и свойства** [1].

Пусть $f(\vec{p},\vec{q},t)$ – интеграл движения (28.6) Подставим в уравнение (28.7), которому удовлетворяет первый интеграл f, вместо производных $\dot{\vec{p}}$ и $\dot{\vec{q}}$ правые части уравнений движения (28.5); тогда вместо (28.7) имеем

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{q}}\frac{\partial H}{\partial \vec{p}}-\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}\right)=0. \qquad (28.8)$$

Пуассон ввел специальное обозначение (**скобки Пуассона**) для следующего выражения, составленного из частных производных двух произвольных функций $\varphi(t,\vec{q},\vec{p})$ и $\psi(t,\vec{q},\vec{p})$:

$$(\varphi,\psi)\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{q}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{p}}-\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{p}}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{q}}. \qquad (28.9)$$

При помощи СП равенство (28.8) – необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $f(\bar{p},\bar{q},t)$ была первым интегралом уравнений (28.5), записывается так:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(f,H)=0. \qquad (28.10)$$

Перечислим **свойства скобок Пуассона.**

Для любых функций $\varphi(t,\bar{q},\bar{p}),\psi(t,\bar{q},\bar{p}),\chi(t,\bar{q},\bar{p})$:

1) $(\varphi,\psi)=-(\psi,\varphi)$; (28.11а)

2) $(c\varphi,\psi)=c(\varphi,\psi)$, где c – постоянная; (28.11б)

3) $(\varphi+\psi,\chi)=(\varphi,\chi)+(\psi,\chi)$; (28.11в)

4) $((\varphi,\psi),\chi)+((\psi,\chi),\varphi)+((\chi,\varphi),\psi)=0$; (28.11г)

5) $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi,\psi)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t},\psi\right)+\left(\varphi,\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$. (28.11д)

Тождества 1, 2, 3, 5 получаются непосредственно из определения (28.9) скобок Пуассона.

Тождество 4 носит специальное название: тождество Якоби. Мы приводим его здесь без доказательства [1, с.98-99]. Отметим лишь, что слагаемые в (28.11г) получаются друг из друга циклическими перестановками.

Отвлечемся пока от гамильтоновой динамики и вернемся к системе (28.1) для того, чтобы высказать некоторые общие соображения по поводу первых интегралов.

Первые интегралы понижают порядок системы уравнений движения. Поэтому, казалось бы, чем их больше, тем легче решать систему. С другой стороны, очевидно, если фунции $f_1(t,\bar{x})$, $f_2(t,\bar{x}),\ldots,f_r(t,\bar{x})$ являются первыми интегралами системы (28.1), то произвольная функция

$$F=F(f_1,f_2,\ldots,f_r) \qquad (28.12)$$

также будет первым интегралом. Ясно, что способом (28.12) можно построить бесконечное множество интегралов движения системы (28.1). Среди этого множества интерес представляют только **независимые интегралы.** Точное определение **системы независимых первых интегралов** мы приведем ниже. Пока отметим следующее: если имеется ℓ первых интегралов системы, то, добавляя к ним еще один интеграл, **зависящий** от этих ℓ интегралов, мы, очевидно ничего не добавляем к той **физической информации** о системе, которая у нас уже есть; в этом смысл зависимости интегралов. В идеале хорошо бы иметь **полный набор** независимых первых интегралов. Для произвольной динамической системы (28.1), если имеется m независимых первых интегралов

$$f_i(t,\bar{x}) = c_i, \quad i = [1,m], \tag{28.13}$$

то разрешая равенства (28.13) относительно $x_k (k = [1,m])$, мы получаем закон движения системы в виде

$$x_k = x_k(t,\bar{c}), \tag{28.14}$$

где $\bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

Таким образом, мы всегда заинтересованы в нахождении возможно большего числа независимых интегралов.

В **гамильтоновой динамике** существует очень эффективный способ отыскания новых первых интегралов по уже имеющимся, и основан этот способ на **теореме Пуассона.**

* **Теорема Пуассона.** Если f и g – интегралы движения, то СП (f,g) также является интегралом движения.

Доказательство. Требуется доказать, что для функции (f,g) выполняется соотношение (28.10):

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial t} + ((f,g),H) = 0, \tag{28.15}$$

когда такое же соотношение имеет место для каждой из функций $f(t,\bar{q},\bar{p})$; $g(t,\bar{q},\bar{p})$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) = 0; \quad \frac{\partial g}{\partial t} + (g,H) = 0 \tag{28.16а,б}$$

Действительно, по свойству СП (5):

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial t}=\left(\frac{\partial f}{\partial t},g\right)+\left(f,\frac{\partial g}{\partial t}\right)=-((f,H),g)-(f,(g,H))=$$

$$=((H,f),g)+((gH),f). \qquad (28.17)$$

Поэтому, используя тождество Якоби (28.11г), получаем

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial t}+((f,g),H)=((f,g),H)+((g,H),f)+((H,f),g)=0, \qquad (28.18)$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема дает автоматическое правило, позволяющее из двух интегралов $f(t,\bar{q},\bar{p})$ и $g(t,\bar{q},\bar{p})$ при помощи алгебраических операций и операции дифференцирования получить третий интеграл:

$$(f,g)=\frac{\partial f}{\partial\bar{q}}\frac{\partial g}{\partial\bar{p}}-\frac{\partial f}{\partial\bar{p}}\frac{\partial g}{\partial\bar{q}}. \qquad (28.19)$$

Взяв скобки Пуассона, например, от f и (f,g), мы снова получим интеграл и т.д.

Пусть имеется ℓ независимых интегралов $f_1,f_2,...,f_\ell$. Образовав **СП** от какой-либо пары из этих интегралов, мы оказываемся перед одним из трех вариантов: а) полученный нами новый интеграл тождественно равен нулю; б) новый интеграл является функцией ℓ имеющихся интегралов f_i; в) получен независимый интеграл (т.е. интеграл, не сводящийся к функции интегралов f_i $(i=[1,\ell])$).

Пример. Для свободной материальной точки список обобщенных координат и обобщенных импульсов можно выбрать так: (x,y,z,p_x,p_y,p_z). Рассмотрим 3 интеграла движения – одну проекцию импульса $\bar{p}$ и две проекции момента импульса $\bar{l}$ на декардовы оси:

$$p_x;\ l_x=yp_z-zp_y;\ l_y=zp_x-xp_z. \qquad (\text{П}1)$$

Составляя различные скобки Пуассона, можно получить интегралы движения p_y, p_z, l_z. Вычислим, например, величину (l_x, l_y):

$$(l_x, l_y) = \frac{\partial l_x}{\partial x}\frac{\partial l_y}{\partial p_x} + \frac{\partial l_x}{\partial y}\frac{\partial l_y}{\partial p_y} + \frac{\partial l_x}{\partial z}\frac{\partial l_y}{\partial p_z} -$$

$$-\frac{\partial l_x}{\partial p_x}\frac{\partial l_y}{\partial x} - \frac{\partial l_x}{\partial p_y}\frac{\partial l_y}{\partial y} - \frac{\partial l_x}{\partial p_z}\frac{\partial l_y}{\partial z}. \qquad (\Pi 2)$$

В выражении (П2) отличны от нуля только третье и последнее слагаемое. Вычисляя производные, получаем:

$$(l_x, l_y) = xp_y - yp_x = l_z. \qquad (\Pi 3)$$

Интегралы p_y, p_z получаются аналогично. Проделайте это самостоятельно.

Рассмотрим преобразование $(\vec{p}, \vec{q}) \to (\vec{P}, \vec{Q})$:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{p}, \vec{q}, t); \quad \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{p}, \vec{q}, t). \qquad (28.20а,б)$$

Приведем без доказательства следующее **(важнейшее!)** утверждение:

* **условия каноничности преобразования (28.20) могут быть записаны с помощью скобок Пуассона в виде** [1, с.180-183]

* $$(Q_i, Q_k) = 0; \; (P_i, P_k) = 0; \; (Q_i, P_k) = \delta_{ik}, \qquad (28.21а,б,в)$$

где $i, k = 1, 2, \ldots, n$; δ_{ik} – символ Кронекера.

Инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований – важнейшее их свойство. Рассмотрим две функции φ и ψ от величин $\vec{q}, \vec{p}, t$. Пусть имеется каноническое преобразование $(\vec{q}, \vec{p}) \to (\vec{Q}, \vec{P})$. Обратное преобразование $(\vec{Q}, \vec{P}) \to (\vec{q}, \vec{p})$ также является каноническим, используя это преобразование, можно выразить $\vec{q}$ и $\vec{p}$ через $\vec{Q}, \vec{P}$ и время t и рассматривать φ и ψ как функции канонических переменных $\vec{Q}, \vec{P}, t$. Соответственно скобки Пуассона от φ и ψ можно вычислить как по отношению к переменным $\vec{q}, \vec{p}$ (обозначение

$(\varphi,\psi)_{\vec q\,\vec p}$), так и по отношению к переменным $\vec Q,\vec P$ (обозначение $(\varphi,\psi)_{Q\,P}$).

Теорема. Скобки Пуассона инвариантны относительно канонических преобразований:

$$(\varphi,\psi)_{\vec q\,\vec p}=(\varphi,\psi)_{\vec Q\,\vec P}. \tag{28.22}$$

Обратная теорема. Если для любых двух функций φ и ψ выполняется тождество (28.22), то переход от 2n переменных $(\vec q,\vec p)$ к 2n переменным $(\vec Q,\vec P)$ является каноническим преобразованием.

Для доказательства **обратной теоремы** достаточно заметить, что, подставляя вместо φ и ψ в (28.22) Q_i и P_k, мы получаем условия каноничности преобразования (28.21). (Доказательство прямой теоремы см.,например, в [1 с. 187-188]).

§29. Теорема Лиувилля – Арнольда. Следствие (2 степени свободы). Системы, интегрируемые методом Гамильтона – Якоби. Инвариантные торы. Резонансы [3,21]

Чтобы проинтегрировать систему 2n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, нужно знать 2n первых интегралов. Общее решение уравнений движения (28.1), как уже упоминалось, строится с помощью 2n независимых первых интегралов [см.(28.13), (28.14), в которых следует положить m = 2n].

Оказывается, что если дана **каноническая система дифференциальных уравнений** (28.5), то во многих случаях для того, чтобы ее проинтегрировать, достаточно знать лишь n первых интегралов – каждый из них позволяет понизить порядок системы не на одну, а на **две** единицы.

Будем считать, что имеется некоторая консервативная гамильтонова система с n степенями свободы. Гамильтониан системы сохраняется:

$$H=H(\vec p,\vec q)=h=\text{const}. \tag{29.1}$$

Переобозначением $E\to h$ в (29.1) мы подчеркиваем, что сохраняющаяся функция Гамильтона – это **обобщенная** энергия.

Для консервативной системы первые интегралы не зависят от времени явно:

$$F = F(\vec{p},\vec{q}) = f = \text{const.} \qquad (29.2)$$

Величины F не изменяются вдоль фазовой траектории:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \vec{q}}\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial F}{\partial \vec{p}}\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = 0. \qquad (29.3)$$

Используя скобку Пуассона, условие (29.3) перепишем в виде

$$(F, H) = 0. \qquad (29.4)$$

Рассмотрим две функции, заданные на фазовом пространстве системы:

$$A = A(\vec{q},\vec{p}); \quad B = B(\vec{q},\vec{p}). \qquad (29.5а,б)$$

* Говорят, что функции A,B находятся **в инволюции**, если их скобка Пуассона **равна нулю тождественно,** т.е. во всем фазовом пространстве:

$$(A, B) \equiv 0. \qquad (29.6)$$

Отличительное свойство гамильтоновых уравнений движения состоит в том, что, как уже упоминалось, их можно проинтегрировать, если известны всего лишь n первых интегралов.

В действительности имеет место еще более сильное утверждение: первых независимых интегралов не может быть больше n (речь идет, подчеркиваем, о **консервативной гамильтоновой системе**) и первые интегралы не интегрируют задачу, если их число $M < n$.

Лиувилль доказал, что если в системе с n степенями свободы (т.е. 2n-мерным фазовым пространством) известны n независимых первых интегралов в инволюции, то система интегрируема в квадратурах.

Точная формулировка теоремы принадлежит В.И.Арнольду, поэтому ее называют **теоремой Лиувилля – Арнольда.**

Прежде, чем переходить к формулировке теоремы Лиувилля – Арнольда*), выскажем одно замечание и введем два определения.

Замечание. Для интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы с n степенями свободы необходимо иметь n **независимых интегралов в инволюции.** Может сложиться впечатление, что роль скобок Пуассона в теории интегрируемых

---

*) Формулировка у нас здесь несколько не соответствует оригиналу [3] и дается по [21].

систем сводится только к проверке условия (29.6), однако это не так. Вернемся к простому примеру системы с 3 степенями свободы, рассмотренному в §28. Для системы интегралов p_x, l_x, l_y, как мы убедились, условия (29.6) не выполняются. С другой стороны, непосредственное вычисление дает:

$$(p_x, l_y) = p_z; \quad (p_z, l_x) = p_y. \qquad (29.7а,б)$$

С учетом результата (П3) §28 у нас теперь 6 интегралов. Выберем из низ 3: p_x, p_y, p_z. Во-первых, очевидно,

$$(p_x, p_y) = 0; \ (p_x, p_z) = 0; \ (p_y, p_z) = 0. \qquad (29.8а,б,в)$$

Во-вторых, интуитивно ясно, что интегралы

$$p_x = c_1; \ p_y = c_2; \ p_z = c_3 \qquad (29.9а,б,в)$$

независимые. В соответствии со сказанным выше, эти интегралы должны интегрировать уравнения движения.

В самом деле, пусть наша частица (материальная точка) нерелятивистская. В этом случае

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m} = \frac{c_1}{m}; \quad x = \frac{c_1}{m}t + x_0, \qquad (29.10а,б)$$

где m – масса частицы; x_0 – произвольная постоянная. Аналогично, для координат y и z имеем

$$y = \frac{c_2}{m}t + y_0; \quad z = \frac{c_3}{m}t + z_0. \qquad (29.11а,б)$$

Таким образом, мы получаем общее решение уравнений движения, зависящее от 2n (n = 3) произвольных постоянных:

$$\bar{r} = \frac{\bar{c}}{m}t + \bar{r}_0, \qquad (29.12)$$

где $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$.

Отметим **конструктивную роль скобок Пуассона:** с их помощью мы, используя теорему Пуассона, получили два интеграла p_x и p_z, недостающие до **полного набора независимых n=3 интегралов,** позволяющих проинтегрировать уравнения движения.

Рассмотрим n первых интегралов гамильтоновой системы с n степенями свободы

$$F_i(\vec{p},\vec{q}) = f_i = \text{const}, \quad i=[1,n] \qquad (29.13)$$

и множество уровня функций F_i в фазовом пространстве системы

$$M_{\vec{f}} = \{\vec{x} : F_i(\vec{x}) = f_i, \quad i=[1,n]\} \qquad (29.14)$$

$M_{\vec{f}}$ представляет собой n-мерную гиперповерхность в 2n-мерном фазовом пространстве; $\vec{x}$ – точки этой поверхности.

* **Определение 1.** n функций F_i независимы на $M_{\vec{f}}$, если n величин dF_i линейно независимы в каждой точке $M_{\vec{f}}$ *).

* **Определение 2.** Тором размерности n (n-мерным тором) называется прямое произведение n окружностей.

Положение точки на окружности радиуса ρ задается **угловой переменной** θ. Постоянная ρ служит в данном случае идентификатором окружности: разные окружности перечисляются с помощью этого параметра. Для n-мерного тора имеем, соответственно, набор n постоянных параметров $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$, идентифицирующий тор, так что теперь нам следует рассматривать вектор $\vec{\rho}=(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n)$ в качестве величины, с помощью которой перечисляются разные n-мерные торы.

---

*) Это "определение" позволяет свести понятие независимости функций к хорошо известному понятию линейной независимости.

Положение точки на n-мерном торе задается набором угловых переменных $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$.

Таким образом, n-мерный тор определяется так:

$$T^n = \left\{\bar{\theta}\right\}_{\bar{\rho}}. \qquad (29.15)$$

Иногда мы будем писать просто: $T^n = \left\{\bar{\theta}\right\}$, либо $M_{\bar{\rho}}$.

Двумерный тор в 3–мерном пространстве представляет собой хорошо всем известный "бублик" (рис.22).

Отметим, что величины ρ_i – это **обобщенные** радиусы формирующих тор окружностей; физический смысл и соответственно, размерности этих величин определяются рассматриваемой динамической системой.

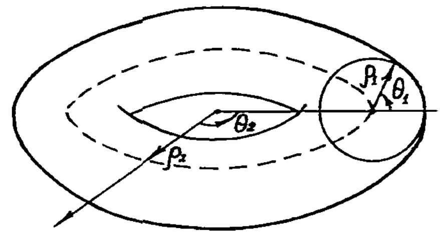

Рис 22

* 29.1. Теорема Лиувилля – Арнольда [21]

Пусть дана консервативная гамильтонова система $H = H(\bar{p}, \bar{q})$ с n степенями свободы, совершающая **финитное** движение и имеющая n первых интегралов

$$F_i = F_i(\bar{p}, \bar{q}); \quad i = [1, n], \qquad (29.16)$$

независимых и находящихся в инволюции, т.е.

$$(F_i, F_j) = 0; \qquad i, j = [1, n]. \qquad (29.17)$$

Тогда:

1) фазовые траектории системы лежат на n-мерном торе;

2) движение является условно-периодическим*) и характеризуется n частотами:

$$\omega_i = \omega_i(F_1, F_2, \ldots, F_n), \quad i = [1, n]; \qquad (29.18)$$

3) угловые переменные θ_i, характеризующие координаты

---

*) Определение условно-периодического движения см. ниже, в подразд. 29.5.

на торе, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(\vec{F}), \quad i = [1, n]; \tag{29.19}$$

эти уравнения сразу интегрируются и дают:

$$\theta_i = \omega_i t + \theta_{i0}, \tag{29.20}$$

где $\theta_{i0} = \text{const}, \quad i = [1, n]$.

Мы приводим эту теорему без доказательства: смысл теоремы Лиувилля – Арнольда выявляется по ходу дальнейшего изложения; некоторые разъяснения даны уже в этом параграфе, причем часть их оформлена в виде замечаний, а часть вынесена в отдельные подразделы (см.п.29.4,29.5).

Замечание 1. Сохраняющийся гамильтониан H входит в число n первых интегралов, фигурирующих в теореме Лиувилля – Арнольда. Можно положить $H = F_1$.

Замечание 2. Торы, о которых идет речь в теореме, называют **инвариантными торами:** они **инвариантны** относительно фазового потока, т.е. на n-мерном торе в интегрируемом случае лежит **вся** фазовая траектория системы.

Замечание 3. Теорема Лиувилля – Арнольда устанавливает условия интегрируемости консервативной системы с n степенями свободы.

Еще одно формальное замечание. Поскольку у нас

$$\vec{F}(\vec{p}, \vec{q}) = \vec{f} = \text{const}, \tag{29.21}$$

можно записать равенства (29.18), (29.19), (29.20) в форме

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{f}); \tag{29.22а}$$

$$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}(\vec{f}); \tag{29.22б}$$

$$\vec{\theta} = \vec{\omega} t + \vec{\theta}_0. \tag{29.22в}$$

29.2. Следствие (2 степени свободы)

* Если для консервативной динамической системы с двумя степенями свободы, совершающей финитное движение, известен один первый интеграл F, не зависящий от функции Гамильтона H, то система интегрируема в квадратурах; **подмногообразие** фазового пространства, определяемое равенствами

$$H(\vec{p},\vec{q}) = h; \quad F(\vec{p},\vec{q}) = f, \qquad (29.23а,б)$$

представляет собой инвариантный тор, а движение на нем условно-периодично.

Действительно, F и H находятся в инволюции, так как $F(\vec{p},\vec{q})$ – первый интеграл системы с функцией гамильтона $H(\vec{p},\vec{q})$.

29.3. Системы, интегрируемые методом Гамильтона - Якоби

* Если каноническая система уравнений движения интегрируется методом Гамильтона – Якоби, то она *имеет n первых интегралов в* инволюции.

В самом деле, метод состоит в использовании канонического преобразования $(\vec{p},\vec{q}) \to (\vec{P},\vec{Q})$, такого, что P_i – первые интегралы (i = [1,n]). Но функции P_i, P_k, очевидно, находятся в инволюции, поскольку условия каноничности преобразования [см.(28.21)] содержат соотношения

$$(P_i, P_k) = 0, \quad i,k = [1,n]. \qquad (29.24)$$

Обсудим деталь, упомянутую в **замечании 1.**

Сохраняющаяся функция Гамильтона выражается через сохраняющиеся новые импульсы $\vec{P} = \vec{\alpha} = \mathrm{const}$:

$$H(\vec{p},\vec{q}) = h = h(\vec{\alpha}) \qquad (29.25)$$

[см (26.7) и (П1.7) в §26]. Вместо (29.25) можно записать

$$H = H(\vec{P}). \qquad (29.26)$$

Интегралы $P_1, P_2, \dots, P_n, H$ связаны лишь одним равенством (29.26), поэтому n интегралов $H, P_2, P_3, \dots, P_n$ – независимы. Обозначив (в соответствии с замечанием 1)

$$F_1 \equiv H; \;\; F_2 \equiv P_2, \dots; \;\; F_n \equiv P_n, \qquad (29.27)$$

мы получаем n первых интегралов $F_1, F_2, \dots, F_n$ в инволюции, один из которых **совпадает с гамильтонианом.**

29.4. Инвариантные торы

Каждому фиксированному набору n независимых первых интегралов движения $\vec{F} = \vec{f}$, находящихся в инволюции, соответствует инвариантный тор $T^n = \left\{\vec{\theta}\right\}_{\vec{f}}$. Изменением интегралов движения F_i получаем семейство инвариантных торов. Их взаимное расположение в фазовом пространстве определяется размерностью фазового пространства динамической системы.

При n=2 торы, соответствующие различным значениям интегралов (F_1, F_2), вложены друг в друга и не пересекаются. В этом случае говорят, что торы **делят пространство.** При n>2 торы **не делят фазовое пространство** и пересекаются. Это легко понять из следующих соображений.

В 2n-мерном фазовом пространстве поверхность уровня обобщенной энергии имеет размерность 2n-1. Границы, которые ее должны делить на различные области, имеют размерность 2n-2. Если торы делят пространство, то их размерность n должна удовлетворять условию

$$n \geq 2n - 2, \qquad (29.28)$$

откуда

$$n \leq 2. \qquad (29.29)$$

29.5. Резонансы

Пример движения на двумерном торе приведен на рис.23. Оно характеризуется двумя частотами: ω_1 и ω_2. **В общем случае** частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы, т.е. отношение частот представляет собой иррациональное число, и траектория всюду плотно покрывает поверхность тора*) и является незамкнутой

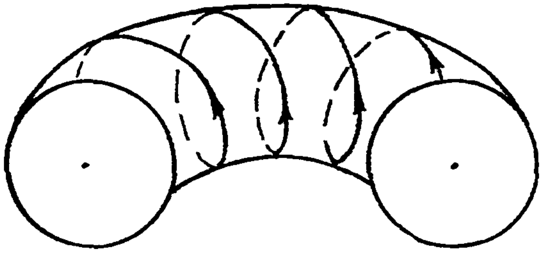

Рис.23

* Это и есть **условно-периодическое движение.**

Если же отношение

$$\omega_1 / \omega_2 = m_1 / m_2 \qquad (29.30)$$

есть рациональное число (m_1 и m_2 – целые числа), то возникает так называемый резонансный случай. Траектория замыкается через конечное число оборотов на торе.

Очевидно, что условие (29 30) означает некоторое **вырождение.** Поскольку ω_1 и ω_2 являются функциями от F_1 и F_2 [см.(29.18)], равенство (29.30) выражает **соотношение между F_1 и F_2.**

В общем случае многомерного движения вырождение означает существование ненулевого n-мерного вектора

$$\bar{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_n), \qquad (29\ 31)$$

такого, что выполняется условие

$$\bar{m}\bar{\omega} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \omega_i = 0, \qquad (29.32)$$

где m_i – целые числа.

Если соотношения типа (29.32) могут выполняться для $r \leq n$ различных векторов $\bar{m}^{(r)}$, то говорят об **r-кратном** вырождении. Общее условие отсутствия вырождения мы запишем ниже, после введения **переменных действие–угол.**

---

*) Это означает, что любая ε - окрестность любой точки тора содержит точки, принадлежащие траектории системы.

§30. Переменные действие-угол. Построение переменных действие-угол для системы с одной степенью свободы. Переменные действие-угол для гармонического осциллятора

30.1. Переменные действие-угол

Если динамическая система удовлетворяет условиям теоремы Лиувилля – Арнольда, то она является интегрируемой уравнения движения – уравнения Гамильтона – эквивалентны системе

$$\frac{d\vec{F}}{dt}=0; \quad \frac{d\vec{\theta}}{dt}=\vec{\omega}(\vec{F}), \qquad (30.1а,б)$$

которая немедленно интегрируется:

$$\vec{F}(t)=\vec{F}(0); \quad \vec{\theta}(t)=\vec{\theta}(0)+\vec{\omega}(\vec{F}(0))t. \qquad (30.2а,б)$$

Таким образом, чтобы явно проинтегрировать исходную каноническую систему дифференциальных уравнений, **достаточно в явном виде найти переменные** $\vec{\theta}$. Оказывается, это можно сделать, используя **лишь квадратуры.** Такое построение переменных приведено ниже.

Заметим, что величины $(\vec{F},\vec{\theta})$ не являются, вообще говоря, канонически сопряженными. Оказывается, существуют некоторые функции от $\vec{F}$ [мы обозначим их $\vec{I}=\vec{I}(\vec{F})$, $\vec{I}=(I_1,I_2,\ldots,I_n)$], такие, что переменные $(\vec{I},\vec{\theta})$ уже являются канонически сопряженными.

* Переменные $\vec{I}$ называются **переменными действия** и вместе с угловыми переменными $\vec{\theta}$ они образуют в **окрестности инвариантного тора** в фазовом пространстве **систему канонических переменных действие–угол.**

Величины I_i являются первыми интегралами динамической системы с функцией Гамильтона $H=F_1$, и их можно выразить через интегралы F_k. В свою очередь, **переменные** F_k (речь идет об **окрестности** инвариантного тора!) можно выразить через $\vec{I}$, и, в частности, $H = F_1 = H(\bar{I})$.

В переменных действие-угол дифференциальные уравнения фазового потока имеют вид

$$\frac{d\bar{I}}{dt} = 0; \quad \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \bar{\omega}(\bar{I}). \qquad (30.3а,б)$$

Замечание. В переменных $(\bar{I},\bar{\theta})$ уравнения потока имеют канонический вид с функцией Гамильтона $H(\bar{I})$. Следовательно,

$$\bar{\omega}(\bar{I}) = \partial H / \partial \bar{I}, \qquad (30.4)$$

поэтому, если число степеней свободы системы **n** $\geq$ **2**, то функции $\bar{\omega}(\bar{I})$ не произвольны, а удовлетворяют условиям симметрии

$$\partial\omega_i / \partial I_j = \partial\omega_j / \partial I_i. \qquad (30.5)$$

Переменные действие-угол особенно важны при рассмотрении **систем, близких к интегрируемым.** На их основе строятся, в частности, т.н. **адиабатические инварианты** – величины, сохраняющиеся с высокой степенью точности (см ниже §35)

30.2. Построение переменных действие-угол для системы с одной степенью свободы [3]

Поведение консервативной системы с одной степенью свободы на фазовой плоскости (p,q) определяется функцией Гамильтона $H(p,q)$. Приведем два простых примера таких систем.

П1. Гармонический осциллятор массой m

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2, \qquad (П1.1)$$

где **k** > 0 – эффективный коэффициент упругости. Отметим, что канонические уравнения гармонического осциллятора можно "обезразмерить", вводя, в частности, безразмерное время

$$\tau \equiv \omega_0 t, \qquad (П1.2)$$

где

$$\omega_0 = (k/m)^{1/2} \qquad (П1.3)$$

– собственная частота осциллятора. В безразмерных переменных вместо (П1.1) будем иметь

$$\tilde{H}(p,q)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2. \qquad (\text{П1.4})$$

П2. Математический маятник массой m и длиной ℓ .

В П2 §17 (п.17.3) даны выражения для кинетической и потенциальной энергий маятника, а также определен обобщенный импульс, сопряженный углу отклонения φ маятника от положения равновесия.(Мы здесь сменили обозначение длины маятника: ℓ вместо b). Нетрудно сообразить, что функция Гамильтона математического маятника имеет вид

$$H=H(p,q)=\frac{p^2}{2m\ell^2}-mg\ell\cos q, \qquad (\text{П2.1})$$

где

$$q\equiv\varphi;\quad p\equiv p_\varphi=m\ell^2\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (\text{П2.2а,б})$$

причем (напомним) величина p_φ представляет собой проекцию момента импульса материальной точки m на ось вращения.

Безразмерному варианту уравнений движения математического маятника соответствует гамильтониан

$$\tilde{H}=\frac{1}{2}p^2-\cos q. \qquad (\text{П2.3})$$

В обоих рассматриваемых случаях имеются замкнутые фазовые траектории M_h, соответствующие финитному движению, и мы находимся в условиях теоремы Лиувилля – Арнольда при n=1.

Чтобы построить переменные действие–угол, мы будем искать каноническое преобразование

$$(p,q)\to(I,\theta), \qquad (30.6)$$

удовлетворяющее условиям

$$I=I(h);\quad \oint\limits_{M_h}\delta\theta=2\pi. \qquad (30.7\text{а,б})$$

Отметим, что вместо $\delta\theta$ под знаком интеграла в (30.7б) можно было бы написать $d\theta$: в самом деле, интегрирование выполняется по контуру, совпадающему с фазовой траекторией M_h. Однако в дальнейшем рассматриваются случаи, когда такого совпадения – нет. Имея это обстоятельство в виду, мы везде в дальнейшем в обозначении элемента интегрирования пишем δ, а не **d**.

Будем искать производящую функцию канонического преобразования (30.6), (30.7), считая ее зависящей от старой координаты q и нового (сохраняющегося) импульса I:

$$S = S(I, q) \qquad (30.8)$$

[см.(23.18) – (23.21)]. Дифференциал производящей функции имеет вид

$$\delta S = p\delta q + \theta\delta I, \qquad (30.9)$$

так что

$$p = \frac{\partial S(I,q)}{\partial q}; \quad \theta = \frac{\partial S(I,q)}{\partial I}. \qquad (30.10\text{а,б})$$

Для гамильтониана в этом случае имеем

$$H\left(\frac{\partial S(I,q)}{\partial q}, q\right) = h(I). \qquad (30.11)$$

Предположим, что функция h(I) **известна и обратима**; тогда каждая кривая M_h определяется значением I ($M_h = M_{h(I)}$). При фиксированном I, как следует из (30.9),

$$\delta S\big|_{I=\mathrm{const}} = p\delta q. \qquad (30.12)$$

Интегрируя вдоль кривой $M_{h(I)}$ эту форму, мы получаем (в окрестности точки q_0) функцию

$$S(I, q) = \int_{q_0}^{q} p\delta q. \qquad (30.13)$$

На кривой $M_{h(I)}$ импульс p, стоящий под знаком интеграла в (30.13), является функцией координаты q, зависящей от параметра I:

$$p = p(I, q) \qquad (30.14)$$

– в соответствии с (30.10а).

Определенная равенством (30.13) функция $S(I,q)$ и будет производящей функцией преобразования (30.10) – или (30.6) – в окрестности точки (I,q_0). Первое из условий (30.7) выполнено автоматически: $I = I(h)$. Чтобы удовлетворить второму условию (30.7б), рассмотрим поведение $S(I,q)$ "в целом".

При обходе замкнутой кривой $M_{h(I)}$ интеграл от $p\delta q$ получает приращение

$$\Delta S(I) = \oint\limits_{M_{h(I)}} p\delta q, \tag{30.15}$$

равное площади П области, ограниченной кривой $M_{h(I)}$ на плоскости (p,q). Поэтому функция S – "многозначная функция" на кривой $M_{h(I)}$: она определена с точностью до прибавления целого кратного П. На производную $\partial S(I,q)/\partial q$ это слагаемое не влияет, но оно приводит к неоднозначности $\theta = \partial S/\partial I$. Последняя производная оказывается определенной лишь с точностью до слагаемого, кратного $d(\Delta S(I))/dI$.

При обходе замкнутой кривой θ получает приращение, равное приращению производной $\partial S/\partial I$:

$$\oint\limits_{M_h} \delta\theta = \frac{d}{dI}\Delta S(I). \tag{30.16}$$

Чтобы выполнить условие (30.7б), положим

$$\frac{d}{dI}\Delta S(I) = 2\pi, \tag{30.17}$$

откуда следует

$$I = \frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{\Pi}{2\pi}, \tag{30.18}$$

где $\Pi = \oint\limits_{M_h} p\delta q$ – площадь, ограниченная фазовой кривой $H = h$.

* **Определение. Переменной действия в одномерной задаче** с функцией Гамильтона $H(p,q) = h$ называется величина

$$I(h) \equiv \frac{1}{2\pi}\Pi(h) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{M_h} p\delta q. \tag{30.19}$$

Окончательно приходим к следующему выводу.

Пусть $d\Pi / dh \neq 0$. Тогда определена обратная $I(h)$ функция $h(I)$.

* **Теорема.** Положим

$$S(I,q) \equiv \int_{q_0}^{q} p\delta q \Big|_{H=h(I)} . \qquad (30.20)$$

Тогда формулы (30.10), (30.11) задают каноническое преобразование $(p,q) \to (I,\theta)$, удовлетворяющее условиям (30.7).

Отметим, что производящая функция (30.13), реализующая преобразование к переменным действие–угол, представляет собой не что иное, как **укороченное действие.**

30.3. Переменные действие-угол для гармонического осциллятора

Рассмотрим гармонический осциллятор с функцией гамильтона (П1.1) (см.подразд.30.2):

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}kq^2 = h = \mathrm{const} \qquad (30.21)$$

– это уравнение эллипса (рис.24). Эллипс M_h ограничивает площадь

$$\Pi(h) = \pi\sqrt{2mh}\sqrt{2h/k} = \frac{2\pi h}{\sqrt{k/m}} = \frac{2\pi h}{\omega}, \qquad (30.22)$$

где $\omega = (k/m)^{1/2}$ – собственная частота гармонического осциллятора. Переменная действия для гармонического осциллятора есть отношение энергии к частоте.

В самом деле,

$$I = \frac{1}{2\pi}\Pi(h) = \frac{h}{\omega}. \qquad (30.23)$$

Угловая переменная – это фаза. Действительно, в новых переменных I, θ функция Гамильтона имеет вид

$$H = H(I) = \omega I . \qquad (30.24)$$

Запишем одно из уравнений Гамильтона:

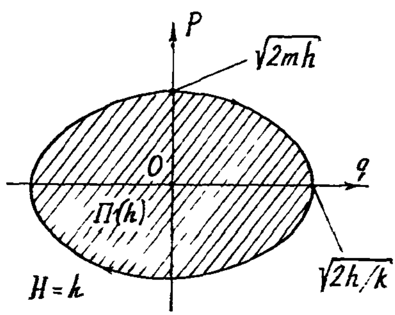

Рис.24

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega, \tag{30.25}$$

отсюда

$$\theta = \omega t + \theta_0. \tag{30.26}$$

§31. Переменные действие-угол в R^{2n}. Замечание о расширении области применимости теоремы Лиувилля – Арнольда: математический маятник и заряженная частица в продольной волне. Теорема об однозначности инвариантных торов

31.1. Переменные действие-угол в R^{2n}

Перейдем теперь к системе с n степенями свободы, заданной в $R^{2n} = \{\vec{p},\vec{q}\}$ функцией Гамильтона $H(\vec{p},\vec{q})$ и имеющей n первых интегралов в инволюции $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$ $(\vec{F} = \vec{f} = \text{const})$. Нам необходимо определить n переменных действия $\vec{I}$.

Рассмотрим интеграл по замкнутой кривой γ, принад-лежащей n-мерному тору $T^n = \{\vec{\theta}\}_f = M_f$, на котором лежит фазовая траектория системы:

$$J = \oint_\gamma \vec{p}\delta\vec{q}\,. \tag{31.1}$$

Это интеграл Пуанкаре (см.§21) – величина, **инвариантная относительно фазового потока.**

Оказывается, что в наших условиях (n независимых первых интегралов в инволюции $\vec{F}; \gamma \in M_f$):

а) интеграл (31.1) **инвариантен относительно произвольной непрерывной деформации контура на торе;**

б) на n–мерном инвариантном торе M_f можно выбрать ровно n контуров (**циклов**), которые не могут быть ни стянуты в точку, ни переведены непрерывным образом друг в друга [21]

Это так называемые **базисные циклы** (контуры) тора. Будем называть их также **неприводимыми циклами.**

Определим **базисные (или неприводимые) одномерные циклы** тора $M_{\bar{f}}$ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ следующим образом:

* приращение координаты θ_j на цикле γ_i равно 2π, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$:

$$\Delta\theta_j(\gamma_i) = 2\pi\delta_{ij}, \tag{31.2}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. На рис.25 показаны базисные циклы для случая **n = 2**. При **n = 1**, очевидно, базисный цикл один и он совпадает с тором T^1.

Рассмотрим n величин

$$I_i(\bar{f}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_i}\bar{p}\delta\bar{q}. \tag{31.3}$$

Интеграл в правой части (31.3) не зависит от выбора кривой γ_i, представляющей базисный цикл (см.рис.26, n = 2).

* **Определение.** n величин $I_i(\bar{f})$, заданных формулами (31.3), называются **переменными действия.**

Предположим теперь, что при заданных значениях f_i n интегралов F_i n величин I_i независимы:

$$\det\left(\frac{\partial\bar{I}}{\partial\bar{f}}\bigg|_{f}\right) = \det\left(\frac{\partial I_i}{\partial f_j}\bigg|_{M_f}\right) \neq 0. \tag{31.4}$$

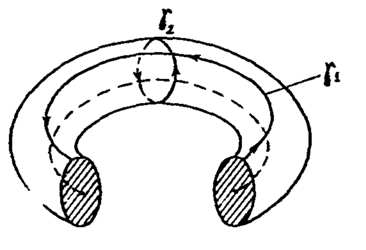

Рис.25

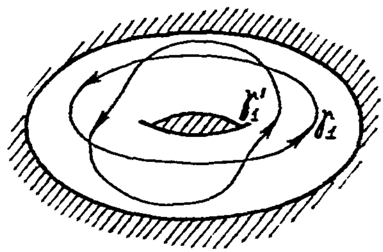

Рис.26

Тогда **в окрестности** тора $M_{\bar f}$ можно принять переменные $\vec{I}, \vec{\theta}$ за координаты в $R^{2n} = \{\vec{x}\} = \{\vec{p}, \vec{q}\}$.

* **Теорема. Преобразование** $(\vec{p}, \vec{q}) \to (\vec{I}, \vec{\theta})$ **– каноническое.**

Пусть $\vec{x}_0$ – такая точка на торе $M_{\bar f}$, в окрестности которой n переменных $\vec{q}$ служат координатами на $M_{\bar f}$, так что по\[многообразие $M_{\bar f} \subset R^{2n}$ задается n уравнениями вида

$$\vec{p} = \vec{p}(\vec{I}, \vec{q}); \quad \vec{q}(\vec{x}_0) = \vec{q}_0. \qquad (31.5а,б)$$

В односвязной окрестности точки $\vec{q}_0$ определена однозначная функция

$$S(\vec{I}, \vec{q}) = \int\limits_{\vec{q}_0}^{\vec{q}} \vec{p}(\vec{I}, \vec{q}) \delta \vec{q}, \qquad (31.6)$$

и мы можем принять ее за **производящую функцию канонического преобразования** $(\vec{p}, \vec{q}) \to (\vec{I}, \vec{\theta})$:

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}; \quad \vec{\theta} = \frac{\partial S}{\partial \vec{I}}. \qquad (31.7а,б)$$

Путь интегрирования в (31.6) лежит на торе, и интеграл не меняется при деформации пути интегрирования. Формулы (31.7) в действительности задают каноническое преобразование не только в окрестности рассматриваемой точки $\vec{x}_0$, но и "в целом" в окрестности тора $M_{\bar f}$. При этом координаты $\vec{\theta}$ будут многозначными с периодами

$$\Delta_i \theta_j \equiv \Delta \theta_j(\gamma_i) = \Delta_i \frac{\partial S}{\partial I_j} = \frac{\partial}{\partial I_j} \Delta_i S = \frac{\partial}{\partial I_j}(2\pi I_i) = 2\pi \delta_{ij}, \qquad (31.8)$$

что и требовалось. В самом деле, величина

$$\Delta_i S \equiv \oint\limits_{\gamma_i} \vec{p} \delta \vec{q} \qquad (31.9)$$

равна $2\pi I_1$ в силу определения (31.3) [3]. Ясно, что сформулированное здесь определение переменных действие-угол аналогично определению этих величин в одномерном случае. Сравните равенства (31.2), (31.3), (31.6), (31.7), (31.9) с соответствующими равенствами (30.7), (30.19), (30.13), (30.10), (30.15).

Отметим, что все наши построения содержат лишь "алгебраические" операции (обращение функций) и "квадратуру" – вычисление интеграла известной функции. Таким образом, задача интегрирования канонической системы **2n** уравнений, у которых известны **n** независимых первых интегралов в инволюции, решается в квадратурах [3].

Замечание 1. О расширении области применимости теоремы Лиувилля – Арнольда.

Вернемся к задаче о математическом маятнике (см.пример 2, §30). Функция Гамильтона маятника

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \cos q, \qquad (31.10)$$

а уравнения движения имеют вид

$$\frac{dp}{d\tau} = -\sin q; \quad \frac{dq}{d\tau} = p, \qquad (31.11а.б)$$

где τ – безразмерное время. Фазовый портрет математического маятника приведен на рис.27. (см.также рис.14). Финитному движению маятника соответствуют колебания, а инфинитному – вращения маятника.

Аналогичная задача возникает также для заряженной нерелятивистской частицы, движущейся в поле плоской продольной (электростатической) волны:

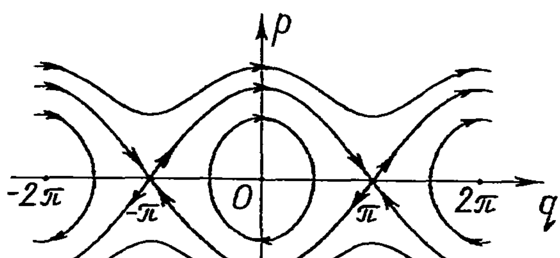

Рис.27

$$m\ddot{x} = -eE_0 \sin(kx - \omega t), \tag{31.12}$$

где e, m – заряд и масса частицы, а проекция вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ на ось OX имеет вид

$$E_x = E_0 \sin(\omega t - kx). \tag{31.13}$$

В равенстве (31.13) ω, k и E_0 – круговая частота, волновое число и амплитуда волны соответственно. Волны типа (31.13) могут распространяться в плазме. Для таких волн фазовая скорость не превышает скорость света в вакууме:

$$u = \omega / k < c. \tag{31.14}$$

Выполним в уравнении (31.12) замену переменных: введем новую переменную

$$\xi \equiv k(x - ut). \tag{31.15}$$

Очевидно, величина ξ представляет собой фазу волны (в точке, где находится частица в данный момент времени), взятую со знаком минус. Нетрудно убедиться в том, что после замены (31.15) уравнение (31.12) перепишется в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\xi = 0, \tag{31.16}$$

где

$$\omega_0 \equiv (keE_0 / m)^{1/2} \tag{31.17}$$

– частота малых колебаний частицы*).

Отметим, что при условии $u \ll c$ замена $x \to \xi$ эквивалентна переходу в систему отсчета, движущуюся относительно исходной (лабораторной) со скоростью, равной фазовой скорости волны; такая СО называется **сопутствующей** или (иногда) **сопровождающей**.

Таким образом, движение заряженной частицы в волне (31.13) также описывается уравнением математического маятника (31.16). Положив

$$\tau \equiv \omega_0 t; \quad q \equiv \xi; \quad p \equiv \frac{d\xi}{d\tau}, \tag{31.18а,б,в}$$

*) Мы полагаем e>0, что непринципиально.

где τ – безразмерное время, мы приходим к уравнениям движения частицы в виде (31.11). Следовательно, фазовый портрет, изображенный на рис.27, является также фазовым портретом заряженной частицы в волне (31.13).

Инфинитное движение совершают пролетные частицы, не захваченные потенциальным полем волны. Их движение, однако, также является периодическим. Это показывает, что можно изображать фазовый портрет частицы не на неограниченной по координате фазовой плоскости, а на поверхности цилиндра (см.рис.28). Для этого необходимо отождествить значения переменной ξ, которые отличаются на 2π.

Рис.28

На **фазовом цилиндре инфинитные движения** пролетных частиц **представлены как финитные** и, таким образом, теорема Лиувилля – Арнольда может быть применена. Общий вывод состоит в том, что **теорема Лиувилля – Арнольда распространяется и на некоторые инфинитные движения.**

Отметим, однако, следующее. Математический маятник и система, описываемая уравнением (31 16), эквивалентная заряженной частице в поле (31.13), – это **физически существенно различные системы.** Для математического маятника цилиндрическое фазовое пространство является естественным, поскольку координата, задающая положение маятника, – угол между невесомым стержнем и вектором $\bar{g}$ – носит, как говорят, **циклический характер:** нет смысла различать углы, отличающиеся на целое кратное 2π. В случае заряженной частицы [система (31.16)] возможность перехода к цилиндрическому фазовому пространству возникает благодаря строгой периодичности внешнего силового поля (проекция силы на ось ξ имеет вид $f_\xi = -(keE_0)\sin\xi$), заданного, тем не менее, во всем пространстве:

$$-\infty < \xi < \infty. \qquad (31.19)$$

Отмечая это физическое различие двух рассмотренных систем, систему типа маятника называют **консервативным ротатором**, а систему типа (31.16), (31.19) – **консервативным осциллятором** (см.[15], с.11).

Замечание 2. Уже в одномерном случае переменные действие-угол I, θ определены не однозначно условиями (30.7): за переменную действия можно было бы принять $I' = I + \text{const}$, а за угловую переменную $\theta' = \theta + c(I)$.

31.2. Теорема об однозначности инвариантных торов

В силу неоднозначности выбора переменных действие–угол для *динамической системы* (интегрируемой) создается впечатление, что для заданной системы, удовлетворяющей теореме Лиувилля – Арнольда (n независимых первых интегралов $F_i = f_i = \text{const}$ в инволюции, движение финитно), перебирая **разные наборы канонических переменных** $(\bar{I}, \bar{\theta})$, мы получим **различные** n-мерные торы, на которых лежит фазовая траектория системы, причем движение *системы на каждом из этих торов – условно-периодическое с* частотами [см.(29.22а)]

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(\bar{f}). \qquad (31.20)$$

Однако ясно, что дело не в выборе переменных, а в свойствах самой фазовой траектории, и вопрос здесь решается следующим образом.

* Если **система невырождена** [см. (30.4)]:

$$\det\left(\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\bar{I}}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial\bar{I}^2}\right) \neq 0, \qquad (31.21)$$

то инвариантные торы $\bar{I} = \mathrm{const}$ определены однозначно, независимо от выбора координат действие-угол $(\bar{I}, \bar{\theta})$, в построении которых имеется всегда некоторый произвол.*)

Действительно, торы $\bar{I} = \mathrm{const}$ можно определить как **замыкание фазовых траекторий,** соответствующих независимым $\bar{\omega}$ [3].

Последнее утверждение нужно понимать следующим образом. Условие (31.21) означает функциональную независимость n частот ω_i. В этом случае так называемые резонансы (подразд.29.5) отсутствуют и фазовая траектория **всюду плотно** покрывает поверхность тора (движение условно-периодическое). **Всюду плотное покрытие** означает, что каждая точка тора является предельной точкой фазовой траектории **Замыкание** множества – это множество, которое получается присоединением к данному множеству всех его предельных точек. Таким образом, "замыкая" фазовую траекторию, мы получаем тор. Ясно, что для данного $\bar{I}$ такой тор – один единственный. Если, скажем, n = 2, и мы посмотрим в трехмерном пространстве H = const на фазовую траекторию, соответствующую условно-периодическому движению, то глаз не сможет различить отдельные витки из-за "всюду плотности": **мы увидим тор (один тор).**

Если же динамическая **система вырождена,** то можно построить такие системы переменных действие-угол, что торы $\bar{I} = \mathrm{const}$ в одной и в другой системах будут **разными.** Это объясняется тем, что замыкания траекторий вырожденной системы – это торы размерности $k < n$**), и их можно **по-разному** соединять в n-мерные торы.

Пример такой динамической системы – **плоский** гармонический осциллятор [3]:

$$\ddot{\bar{x}} = -\bar{x}; \tag{П1}$$

$$n = 2, \ k = 1. \tag{П2а,б}$$

---

*) Простые примеры приведены в [3, с.251].

**) k – число независимых частот ω_i

Разделение переменных в декартовых и в полярных координатах приводит к разным переменным действие–угол и к разным торам.

§32. Усреднение. Пространственное и временное средние функции $f(\bar{\theta})$ на торе T^n. Теорема об усреднении и ее следствия

32.1. Усреднение

Пусть $f(\bar{\theta})$ – интегрируемая функция на торе T^n; будем считать, что эта функция может зависеть также и от параметров, набор которых мы обозначим через $\bar{I}$: $f = f(\bar{I}, \bar{\theta})$.

* **Пространственным средним функции f на торе** T^n называется **число**

$$< f >= (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} .... \int_0^{2\pi} f(\bar{\theta}) \delta\theta_1 \delta\theta_2 ... \delta\theta_n . \qquad (32.1)$$

Рассмотрим значение функции $f(\bar{\theta})$ **на траектории динамической системы** (интегрируемой):

$$\bar{\theta}(t) = \bar{\theta}_0 + \bar{\omega} t . \qquad (32.2)$$

Это – функция времени $f(\bar{\theta}_0 + \bar{\omega} t)$. Рассмотрим ее среднее.

* **Временным средним функции f на торе** T^n называется **функция**

$$\bar{f}(\bar{\theta}_0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\bar{\theta}_0 + \bar{\omega} t) dt \qquad (32.3)$$

(определенная там, где предел существует).

* 32.2. Теорема об усреднении

Временное среднее всюду существует и совпадает с пространственным, если функция f непрерывна (или хотя бы интегрируема по Риману), а частоты ω_i независимы.

Напомним, во-первых, что частоты условно-периодического движения называются независимыми, когда они **линейно**

независимы над полем рациональных чисел: если $\vec{k} \in \vec{Z}^n$ (k_i – целые) и $(\vec{k}\vec{\omega}) = 0$, то $\vec{k} = 0$.

Отметим (во-вторых), что Теорема утверждает **совпадение функции** $\bar{f}(\vec{\theta}_0)$ **с числом** $< f >$; таким образом, в частности, временное среднее $\bar{f}$ одинаково для всех траекторий на торе.

Теорема об усреднении неявно встречается уже в работах Лапласа, Лагранжа и Гаусса по небесной механике, она является одной из первых "**эргодических теорем**". Строгое доказательство дали лишь в 1909 г. П.Боль, В.Серпинский и Г.Вейль в связи с задачей Лагранжа о среднем движении перигелия Земли [3, с.247-249].

Доказательство теоремы. Будем рассматривать функцию f, зависящую от параметров $\vec{I}$: пусть $f = f(\vec{I}, \vec{\theta})$, причем по всем θ_k ($k = 1, 2, ..., n$) функция f периодична с периодом 2π.

Разложим $f(\vec{I}, \vec{\theta})$ в ряд Фурье (кратный):

$$f(\vec{I}, \vec{\theta}) = \sum_{\vec{m}} f_m(\vec{I}) \exp(i\vec{m}\vec{\theta}) =$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} f_{m_1 m_2 \dots m_n}(\vec{I}) \exp[i(m_1\theta_1 + \dots + m_n\theta_n)]. \qquad (32.3)$$

На инвариантном торе T^n

$$I_k = \text{const}; \quad \theta_k = \omega_k t + \theta_{0k}, \quad (k = 1, \dots, n). \qquad (32.4\text{а,б})$$

Подставляем выражение для θ_k в (32.3) и применяем оператор временного усреднения:

$$\bar{f}(\vec{I}, \vec{\theta}_0) = \sum_{\vec{m}} f_{\vec{m}}(\vec{I}) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \exp[i(\vec{m}\vec{\omega}t + \vec{m}\vec{\theta}_0)] =$$

$$= \sum_{\vec{m}} f_{\vec{m}}(\vec{I}) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{\exp(i\vec{m}\vec{\theta}_0)[\exp(i\vec{m}\vec{\omega}T) - 1]}{i\vec{m}\vec{\omega}}. \qquad (32.5)$$

По условию, частоты ω_k независимы, следовательно, при $\vec{m} \neq 0$ имеем $(\vec{m}\vec{\omega}) \neq 0$. Таким образом, сумма всех слагаемых с $\vec{m} \neq 0$, как это видно из (32.5), обращается в нуль, и в ряде Фурье остается лишь одно отличное от нуля слагаемое с $\vec{m} = 0$. Вычислим это слагаемое, положив при вычислении дроби в (32.5) $\vec{m} \to 0$:

$$\lim_{\vec{m}\to 0} \frac{[\exp(i\vec{m}\vec{\omega}T) - 1]}{i(\vec{m}\vec{\omega})} \approx \frac{1 + i\vec{m}\vec{\omega}T - 1}{i(\vec{m}\vec{\omega})} = T; \qquad (32.6)$$

$$\lim_{\vec{m}\to 0} \frac{1}{T} \frac{\exp(i\vec{m}\vec{\theta}_0)[\exp(i\vec{m}\vec{\omega}T) - 1]}{i\vec{m}\vec{\omega}} = 1. \qquad (32.7)$$

Окончательно будем иметь:

$$\bar{f}(\vec{I}, \vec{\theta}_0) = f_0(\vec{I}). \qquad (32.8)$$

Пространственное среднее функции $f(\vec{I}, \vec{\theta})$, которая у нас представлена рядом (32.3), очевидно, также совпадает с нулевой Фурье – гармоникой $f_0(\vec{I})$, что и доказывает теорему об усреднении.

* **Следствие 1.** Если частоты независимы, то **каждая** траектория $\{\vec{\theta}(t)\}$ всюду плотна на торе T^n.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в окрестности **D** некоторой точки тора нет точек траектории $\vec{\theta}(t)$. Легко построить непрерывную функцию f, равную нулю вне **D** и с пространственным средним <f>=1. Временное среднее $\bar{f}(\vec{\theta}_0)$ на траектории $\vec{\theta}(t)$ равно $0 \neq 1$. Противоречие с утверждением теоремы доказывает следствие 1.

* **Следствие 2*)**. Если частоты независимы, то каждая траектория **равномерно распределена на торе** T^n.

Это означает, что доля времени, которое траектория проводит в области D, пропорционально **мере** D. Приведем точный вариант формулировки последнего утверждения.

---

*) Приводится без доказательства.

Обозначим через $\tau_D(T)$ время, в течение которого отрезок траектории $\bar{\theta}(t)$, где $t \in [0,T]$, находится внутри **D**. Тогда

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\text{mes}D}{(2\pi)^n}. \qquad (32.9)$$

§33. Приближенные методы интегрирования уравнений движения. Системы, близкие к интегрируемым. Примеры. Типичная постановка задачи динамики для системы, близкой к интегрируемой. Малый параметр. Теория возмущений. Асимптотические методы теории возмущений [3]

33.1. Системы, близкие к интегрируемым. Примеры

Выше мы рассмотрели **интегрируемые динамические** системы и изучили характер фазовых траекторий этих систем: они оказались "обмотками торов", заполняющими всюду плотно инвариантные торы в фазовом пространстве; каждая траектория распределена на торе равномерно.

Не следует думать, что такая ситуация типична для задач общего вида. В действительности свойства траекторий в многомерных системах могут быть весьма разнообразными и совсем не похожими на свойства условно-периодических движений. В частности, **замыкание** траектории системы с n степенями свободы может заполнять в 2n-мерном фазовом пространстве сложные множества размерности больше n; траектория может быть всюду плотной и равномерно распределенной на всем 2n–1-мерном многообразии, заданном уравнением H = h. Термин "неинтегрируемая" в применении к этим системам оправдан, так как они не допускают однозначных первых интегралов, не зависящих от H.

Исследование таких сложных систем еще далеко от завершения; оно составляет задачу "эргодической теории" (см.[22]).

Один из подходов к неинтегрируемым системам – изучение **систем, близких к интегрируемым.**

Например, задача о движении планет вокруг Солнца близка к интегрируемой задаче о движении невзаимодействующих материальных точек вокруг неподвижного силового центра; упомянем **также задачу о нелинейных колебаниях вблизи положения равновесия системы** (близкая интегрируемая задача – линейная). Задача о движении заряженной частицы в медленно эволюционирующей электромагнитной волне также представляет собой пример задачи, близкой к интегрируемой (интегрируемая задача – определение закона движения частицы в волне с постоянными параметрами – амплитудой, частотой и волновым числом).

Такого рода задачи являются предметом так называемой **теории возмущений.**

Теория возмущений представляет собой весьма полезный набор приемов, предназначенных для приближенного решения "возмущенных" задач, близких к "невозмущенным", решенным точно

33.2. Типичная постановка задачи динамики для системы, близкой к интегрируемой

Эта постановка формулируется следующим образом.

Пусть невозмущенная динамическая система интегрируема и описывается гамильтонианом

$$H_0 = H_0(\bar{I}), \quad \bar{I} = (I_1, I_2, \ldots, I_n); \qquad (33.1а,б)$$

гамильтониан исследуемой задачи имеет вид

$$H = H_0(\bar{I}) + \varepsilon V(\bar{I}, \bar{\theta}, \varepsilon), \qquad (33.2)$$

где ε – безразмерный параметр возмущения, а $V(\bar{I}, \bar{\theta}, \varepsilon)$ – потенциал возмущения. В выражении (33.2) для гамильтониана H отметим два важных момента:

1) невозмущенная часть гамильтониана H_0 зависит только от n действий I_j и соответствует, как уже было сказано, интегрируемому случаю;

2) возмущение V зависит от углов θ_i. Почему это так? Если бы V не зависело от $\bar{\theta}$, то задача оказалась бы тривиальной. Гамильтониан H, так же как и H_0, имел бы циклические переменные θ_j и поэтому

$$\dot{I}_j = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j} = 0; \quad \dot{\theta}_j = \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j(\bar{I}) + \varepsilon \frac{\partial V(\bar{I},\varepsilon)}{\partial I_j} \equiv \tilde{\omega}_j(\bar{I}). \quad (33.3а,б)$$

Эти равенства означают, что инвариантные торы сохраняются, а изменяются лишь частоты движения на торе, при этом уравнения движения мгновенно интегрируются:

$$I_j = \mathrm{const}; \quad \theta_j = \tilde{\omega}_j(\bar{I})t + \theta_{j0}; \quad j = [1,n]. \qquad (33.4а,б,в)$$

Этот случай назовем тривиальным и далее обсуждать не будем. Таким образом, всюду в дальнейшем возмущение зависит от $\bar{\theta}$.

33.3. Малый параметр. Теория возмущений. Асимптотические методы теории возмущений

Основная часть физических задач, допускающих аналитические исследования, связана с тем, что какие-то безразмерные параметры, фигурирующие в задаче, являются либо малыми, либо большими (малые и большие параметры). Методов, использующих **малые(и большие) параметры,** достаточно много.

Теория возмущений учитывает влияние небольших изменений дифференциальных уравнений на поведение решений.

Если величина возмущения характеризуется **малым параметром** ε ($\varepsilon \ll 1$), то влияние возмущений на временах порядка 1 приводит к изменению решения на величину порядка ε. Эту величину можно приближенно получить, решая уравнения в вариациях вдоль невозмущенного решения.

Однако если нас интересует поведение решения в течение большого отрезка времени, скажем, порядка $1/\varepsilon$, то возникает гораздо более сложная задача, составляющая предмет так называемых **асимптотических методов** исследования **теории возмущений.** Важнейшим из этих методов является **метод усреднения** (см.ниже §34,35).

Метод усреднения используется в небесной механике со времен Лагранжа и Лапласа для определения эволюции планетных орбит под влиянием взаимных возмущений планет . Гаусс формулировал его так: для определения эволюции следует "размазать" массу каждой планеты по орбите пропорционально времени, проводимому в каждой части орбиты, и заменить притяжение планет притяжением полученных колец [3].

Однако обоснование метода усреднения – задача и сейчас далеко не до конца решенная (см.[23], с.131).

§34. Принцип усреднения для систем, близких к интегрируемым. Пример. Применение принципа усреднения к гамильтоновой системе. Теорема Лапласа [3]

При исследовании систем, близких к интегрируемым, чрезвычайно плодотворным оказывается метод, основанный на **принципе усреднения.**

34.1. Принцип усреднения

Пусть $\bar{I},\bar{\theta}$ – переменные действие-угол в интегрируемой ("невозмущенной") системе с функцией Гамильтона $H_0(\bar{I})$:

$$\dot{\bar{I}} = 0; \quad \dot{\bar{\theta}} = \bar{\omega}(\bar{I}); \quad \bar{\omega}(\bar{I}) = \frac{\partial H_0}{\partial \bar{I}}. \qquad (34.1а,б,в)$$

В качестве близкой "возмущенной" системы рассмотрим систему

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\omega}(\bar{I}) + \varepsilon \bar{f}(\bar{I},\bar{\theta},\varepsilon); \qquad (34.2а)$$

$$\dot{\bar{I}} = \varepsilon \bar{g}(\bar{I},\bar{\theta},\varepsilon), \qquad (34.2б)$$

где $\varepsilon \ll 1$.

Забудем временно о гамильтоновости нашей системы и будем рассматривать произвольную систему дифференциальных уравнений (34.2), заданную на прямом произведении $T^k \times D$ k-мерного тора $\{\bar{\theta} = (\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)\}$ и области D ℓ – мерного пространства $D \subset R^\ell = \{\bar{I} = (I_1,I_2,...,I_\ell)\}$. При $\varepsilon = 0$ движение (34.2) условно-периодическое, $\leq k$ – частотное с k-мерными инвариантными торами.

* **Принцип усреднения для системы (34.2) состоит в ее замене другой системой, которая называется усредненной:**

$$\dot{\bar{J}} = \varepsilon \bar{G}(\bar{J}); \qquad (34.3а)$$

$$\vec{G}(\vec{J}) \equiv <\vec{g}> \equiv (2\pi)^{-k}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\vec{g}(\vec{J},\vec{\theta},0)\delta\theta_1\ldots\delta\theta_k \qquad (34.3б)$$

в ℓ – мерной области $D \subset R^{\ell} = \{\vec{J} = (J_1,\ldots,J_{\ell})\}$.

* Утверждается, что система (34.3) "хорошо аппроксимирует" систему (34.2).

"Заметим, что этот **принцип** – не теорема, не аксиома и не определение, а **физическое предложение,** т.е. расплывчато сформулированное и , строго говоря, неверное утверждение" [3,с.253].

Удовлетворительное исследование связи между решениями системы (34.2) и (34.3), как уже упоминалось, в общем случае не проведено и до сих пор.

При замене системы (34.2) системой (34.3) мы отбрасываем в правой части слагаемое

$$\varepsilon\tilde{\vec{g}}(\vec{I},\vec{\theta},\varepsilon) = \varepsilon\vec{g}(\vec{I},\vec{\theta},\varepsilon) - \varepsilon <\vec{g}>. \qquad (34.4)$$

Это слагаемое имеет порядок ε, точно такой же, как и оставленное слагаемое $\varepsilon<\vec{g}>$. Чтобы понять различие роли слагаемых $<\vec{g}>$ и $\tilde{\vec{g}}$ в $\vec{g}$, рассмотрим простой пример.

34.2. Пример

Пусть имеется возмущенная система

$$\dot{\theta} = \omega; \quad \dot{I} = \varepsilon(a + b\cos\theta), \qquad (П1.1а,б)$$

где a и b – постоянные. Усредненное уравнение записывается в виде

$$\dot{J} = \varepsilon a. \qquad (П1.2)$$

Таким образом, при переходе к усредненному уравнению мы действительно отбрасываем в правой части уравнения для I величины такого же порядка, как и оставляемые. На временах порядка 1 как отбрасываемые, *так и оставляемые величины* дают одинаковый эффект (порядка ε). Однако их влияние на временах порядка 1/ε совершенно различно: оставленные члены приводят к **систематическому дрейфу**, а отброшенные – лишь к **малому дрожанию.**

Решение возмущенной системы (П1.1а,б) дает (скажем, для $\theta_0 = 0$)

$$I(t) = I_0 + \varepsilon a t + (\varepsilon b / \omega)\sin(\omega t), \qquad (П1.3)$$

что лишь осциллирующей малой добавкой отличается от решения усредненного уравнения (П1.2) (рис.29):

$$J(t) = I_0 + \varepsilon a t, \qquad (П1.4)$$

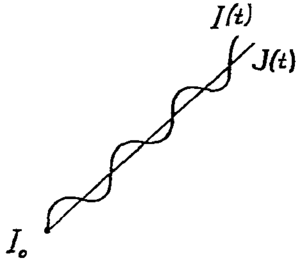

Рис.29

где мы положили $J(0) = I(0) = I_0$. Таким образом, изменение I со временем состоит из двух частей: осцилляций порядка ε, зависящих от $\tilde{g}$, и систематической "эволюции" со скоростью порядка $\varepsilon < g >$.

Принцип усреднения основан на представлении о том, что и в общем случае движение системы (34.2) можно разделить на "эволюцию" и малые осцилляции. В общем виде такое представление не обоснованно, а сам принцип неверен.

Ясно, по крайней мере, что для разделения системы на эволюцию и осцилляции необходимо, чтобы осцилляции были быстрыми (а эволюция – медленной). В соответствующей задаче характерные времена изменения J_m (обозначим эти времена τ_m) должны быть много больше периодов осцилляций: для любых $i \in [1,k]$, $m \in [1,\ell]$

$$2\pi / \omega_i << \tau_m. \qquad (34.5)$$

Уравнения усредненной системы можно получить из уравнений (34.2) усреднением по времени и последующей заменой временного среднего правой части (34.2б) на пространственное среднее. Необходимо, однако иметь в виду, что (см.§32):

1) *такая замена незаконна, если торы вырожденные, т.е. вблизи резонансов;*

2) замена не точна, так как усреднение по времени необходимо проводить по конечному временному промежутку ($\vec{I} \neq$ const!), и переход к пределу $T \to \infty$ невозможен.

Указанные проблемы свидетельствуют о том, что, вообще говоря, усреднение может привести к результату, не имеющему ничего общего с реальным поведением возмущенной системы.

Попробуем, тем не менее, применить принцип усреднения к гамильтоновой системе.

34.3. Применение принципа усреднения к гамильтоновой системе

Уравнения движения возмущенной гамильтоновой системы имеют вид [см.(33.2)]

$$\dot{\bar{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \bar{I}}(H_0(\bar{I}) + \varepsilon V(\bar{I},\bar{\theta},\varepsilon)); \qquad (34.6а)$$

$$\dot{\bar{I}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}(H_0(\bar{I}) + \varepsilon V(\bar{I},\bar{\theta},\varepsilon)). \qquad (34.6б)$$

В качестве правой части (34.3б) усредненной системы получаем:

$$<\bar{g}> = -\varepsilon(2\pi)^{-n}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}V(\bar{J},\bar{\theta},0)\delta\theta_1\ldots\delta\theta_n = 0, \qquad (34.7)$$

где n – число степеней свободы системы.

* Смысл результата (34.7) состоит в утверждении, что в **гамильтоновой невырожденной системе эволюции нет.**

Один из вариантов этого совсем не строгого вывода приводит к так называемой теореме Лапласа.

34.4. Теорема Лапласа:

* Большие полуоси кеплеровых эллипсов планет не имеют вековых возмущений.

Сказанного достаточно, чтобы убедиться в важности принципа усреднения.

Отметим, что при вычислении правой части (34.7) замену $V(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon) \to V(\bar{J},\bar{\theta},0)$ можно было не делать: результат оказался бы точно таким же – нулевым.

§35. Теорема об усреднении в одночастотной системе. Адиабатические инварианты

Сформулируем теперь теорему, обосновывающую принцип усреднения в одном весьма важном частном случае одночастотных колебаний (k = 1) . Эта теорема показывает, что усредненное уравнение правильно описывает эволюцию на большом отрезке времени ($0 < t \le 1/\varepsilon$).

35.1. Теорема об усреднении в одночастотной системе

Фазовое пространство одночастотной системы представляет собой прямое произведение области **D** евклидова пространства R^{ℓ} и окружности S^1. Угловая координата на окружности обозначается θ, а точка из **D** – через $\vec{I}$. Рассмотрим систему $\ell+1$ дифференциальных уравнений

$$\dot{\theta} = \omega(\vec{I}) + \varepsilon f(\vec{I},\theta,\varepsilon); \qquad (35.1а)$$

$$\dot{\vec{I}} = \varepsilon \vec{g}(\vec{I},\theta,\varepsilon), \qquad (35.1б)$$

где функции f и $\vec{g}$ – 2π – периодичны по θ.

Усредненная система:

$$\dot{\vec{J}} = \varepsilon \vec{G}(\vec{J}), \quad \vec{G}(\vec{J}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \vec{g}(\vec{J},\bar{\theta},0)\delta\theta. \qquad (35.2а,б)$$

Рассмотрим начальную точку $\vec{I}_0$ из **D** и предположим, что решение $\vec{J}(t)$ усредненного уравнения с начальным условием

$$\vec{J}(0) = \vec{I}(0) = \vec{I}_0 \qquad (35.3)$$

остается в области **D** в течение времени $\Delta t \sim 1/\varepsilon$ (например, $\Delta t = T/\varepsilon$, где $T \sim 2\pi/\omega$).

Теорема. Предположим, что частота ω не обращается в нуль в области **D** (отсутствие вырождения для одночастотной системы). Тогда для любого $t \in [0, T/\varepsilon]$

$$\left|\vec{I}(t) - \vec{J}(t)\right| < C\varepsilon, \qquad (35.4)$$

если ε достаточно мало, и постоянная C не зависит от ε.

Некоторые приложения этой теоремы будут даны ниже (адиабатические инварианты). Заметим, что основная идея доказательства этой теоремы (замена переменных, убивающая возмущение) важнее самой теоремы: это одна из основных идей в теории дифференциальных уравнений; она встречается уже в элементарном курсе в виде "метода вариации постоянных" [3].

Доказательство теоремы.

Вместо переменных $\vec{I}$ введем новые переменные $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \vec{I} + \varepsilon\vec{k}(\vec{I},\theta), \tag{35.5}$$

где 2π – периодические по θ функции $\vec{k}$ подберем так, чтобы вектор $\vec{P}$ удовлетворял более простому дифференциальному уравнению. Скорость изменения $\vec{P}(t)$ определяется так:

$$\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{I}} + \varepsilon\frac{\partial\vec{k}}{\partial\vec{I}}\dot{\vec{I}} + \varepsilon\frac{\partial\vec{k}}{\partial\theta}\dot{\theta} =$$

$$= \varepsilon[\vec{g}(\vec{I},\theta,\varepsilon) + \frac{\partial\vec{k}}{\partial\theta}\omega(\vec{I})] + \varepsilon^2\frac{\partial\vec{k}}{\partial\vec{I}}\vec{g} + \varepsilon^2\frac{\partial\vec{k}}{\partial\theta}f. \tag{35.6}$$

Напомним, что

$$\frac{\partial\vec{k}}{\partial\vec{I}}\dot{\vec{I}} \equiv \sum_{i=1}^{\ell}\frac{\partial\vec{k}}{\partial I_i}\dot{I}_i. \tag{35.7}$$

Предположим, что замену (35.5) можно обратить, так что

$$\vec{I} = \vec{P} + \varepsilon\vec{h}(\vec{P},\theta,\varepsilon), \tag{35.8}$$

где функции $\vec{h}$ периодичны по θ с периодом 2π. Тогда имеем [см.(35.6)]:

$$\dot{\vec{P}} = \varepsilon[\vec{g}(\vec{P},\vec{\theta},0) + \frac{\partial\vec{k}}{\partial\theta}\omega(\vec{P})] + \vec{R}, \tag{35.9}$$

где

$$\vec{R} \sim \varepsilon^2. \tag{35.10}$$

Постараемся теперь выбрать замену переменных (35.5) так, чтобы обратить в нуль член, имеющий порядок ε в (35.9). Мы получим для $\vec{k}$ уравнение

$$\frac{\partial\vec{k}}{\partial\theta} = -\frac{1}{\omega}\vec{g}(\vec{P},\theta,0), \tag{35.11}$$

которое нам достаточно удовлетворить в нулевом по ε порядке. Вообще говоря, такое уравнение неразрешимо в классе периодических по θ функций $\vec{k}$. Действительно, среднее значение (по θ) левой части всегда равно нулю, а среднее значение правой части может быть и отлично от нуля. Поэтому мы не можем выбрать $\vec{k}$ так, чтобы убить целиком часть с ε в (35.9). Однако мы можем убить всю "осциллирующую" часть $\vec{g}$:

$$\tilde{\vec{g}}(\vec{P},\theta,0)=\vec{g}(\vec{P},\theta,0)-<\vec{g}>, \tag{35.12}$$

если положим

$$\vec{k}(\vec{P},\theta)=-\int_0^\theta \frac{\tilde{\vec{g}}(\vec{P},\theta,0)}{\omega(\vec{P})}d\theta. \tag{35.13}$$

Итак, определим функции $\vec{k}$ формулой (35.13).

Сравним теперь дифференциальные уравнения для $\vec{J}$

$$\dot{\vec{J}}=\varepsilon<\vec{g}> \tag{35.14}$$

и для $\vec{P}$; последнее, в силу (35.13), имеет вид

$$\dot{\vec{P}}=\varepsilon<\vec{g}>+0(\varepsilon^2), \tag{35.15}$$

где $0(\varepsilon^2)$ – величина порядка ε^2. Поскольку разность между правыми частями $\lesssim\varepsilon^2$, то за время $t\lesssim 1/\varepsilon$ решения разойдутся на расстояние

$$\left|\vec{P}-\vec{J}\right|\lesssim\varepsilon. \tag{35.16}$$

С другой стороны,

$$\left|\vec{I}-\vec{P}\right|=\varepsilon\left|\vec{k}\right|\lesssim\varepsilon. \tag{35.17}$$

Отсюда

$$\left|\vec{I}-\vec{J}\right|\lesssim\varepsilon \tag{35.18}$$

при любом $t\lesssim 1/\varepsilon$. Теорема доказана.*)

---

*) Точную формулировку теоремы и строгое ее доказательство см. в [3, с. 255-258].

Рассмотрим далее в качестве приложения теоремы об усреднении в одночастотной системе адиабатические инварианты.

35.2. Адиабатические инварианты [3]

Будем рассматривать гамильтонову систему с одной степенью свободы – с функцией Гамильтона

$$H = H(p, q, \lambda), \tag{35.19}$$

зависящей от параметра λ.

Примером может служить математический маятник. Если нас интересуют **малые колебания маятника,** то гамильтониан его можно записать в виде

$$H = \frac{p^2}{2m\ell^2} + \frac{mg\ell q^2}{2}, \tag{35.20}$$

где $q = \varphi$ – угол отклонения маятника от положения равновесия, а $p = m\ell^2\dot{\varphi}$ – проекция момента импульса маятника на ось OZ, совпадающую с осью вращения. В качестве параметра λ можно взять в (35.20), например, длину маятника ℓ.

Предположим, что параметр медленно меняется.

Оказывается, в пределе, когда скорость изменения параметра стремится к нулю, появляется замечательное асимптотическое явление: две величины, вообще независимые, становятся функциями одна другой.

Пусть, например, длина маятника медленно (по сравнению с его собственными колебаниями) изменяется [см.(34.5)]:

$$2\pi / \omega \ll \tau, \tag{35.21}$$

где ω – частота колебаний маятника, а τ – характерное время, за которое длина маятника изменяется существенно.*) В этом случае амплитуда его колебаний становится функцией длины. Например, если очень медленно увеличить вдвое длину нити маятника, а затем очень медленно ее уменьшить до прежней величины, то в конце этого процесса амплитуда колебаний станет такой же, какой была вначале.

---

*) Очевидно, $\tau \sim \ell / \dot{\ell}$.

Более того, оказывается, отношение энергии маятника H к частоте ω при медленном изменении параметров почти не меняется, хотя сами энергия и частота могут изменяться сильно.

* Такие величины, которые мало меняются при медленном изменении параметров системы, называются **адиабатическими инвариантами.**

Нетрудно сообразить, что адиабатическая инвариантность отношения энергии маятника, совершающего малые колебания, к частоте есть утверждение физического характера, т.е. утверждение без дополнительных предположений неверное. Действительно, изменяя длину маятника сколь угодно медленно, но выбирая фазу колебаний, при которой его длина увеличивается (или уменьшается), можно раскачать маятник (**параметрический резонанс** – качели). Чувствуя это, физики предложили формулировать определение адиабатической инвариантности так: лицо, меняющее параметры системы, не должно видеть, в каком состоянии находится система. Дать этому определению строгий математический смысл – весьма деликатная, до сих пор не решенная задача.

К счастью, мы можем обойтись суррогатом, заменяя невмешательство лица, меняющего параметры, во "внутренние дела" системы требованием того, чтобы изменение параметров было плавным, а именно: два раза непрерывно дифференцируемым [3].

Точнее, пусть $H(p,q,\lambda)$ – фиксированная дважды непрерывно дифференцируемая функция λ. Положим

$$\lambda = \varepsilon t \tag{35.22}$$

($\varepsilon \ll 1, t$ – время) и будем рассматривать полученную систему с медленно меняющимся параметром $\lambda = \varepsilon t$:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q};\quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p};\quad H = H(p,q,\varepsilon t)\,. \qquad \text{(35.23а,б,в)}$$

* **Определение.** Величина $I(p,q,\lambda)$ называется **адиабатическим инвариантом системы (35.23)**, если для всякого $\chi > 0$ существует

$\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $\varepsilon < \varepsilon_0$, $0 < t \le 1/\varepsilon$, то

$$|I(p(t),q(t);\varepsilon t) - I(p(0),q(0);0)| < \chi. \tag{35.24}$$

Оказывется, **всякая одномерная система (35.23) имеет адиабатический инвариант.** А именно, **адиабатическим инвариантом является переменная действия в соответствующей задаче с постоянными параметрами.**

Предположим, что фазовые траектории системы с гамильтонианом $H(p,q,\lambda)$ при фиксированных значениях λ замкнуты. Определим функцию $I(p,q,\lambda)$ следующим образом. При фиксированном λ функция Гамильтона была бы интегралом движения $H(p,q,\lambda)=h=\text{const}$, и мы имели бы определенный фазовый портрет системы, представляющий собой совокупность замкнутых траекторий, соответствующих **разным** значениям h, но всего лишь **одному** значению λ.

Рассмотрим одну такую замкнутую фазовую траекторию, проходящую через точку (p,q), – рис.30. Она ограничивает на фазовой плоскости некоторую площадь. Обозначим эту площадь через $2\pi I(p,q;\lambda)$. На каждой фазовой траектории (при данном λ) $I = \text{const}$. Очевидно, I не что иное, как переменная действия [см.(30.19)].

* **Теорема.** Если частота рассматриваемой системы (35.23) $\omega(I,\lambda)$ не обращается в 0, то $I(p,q,\lambda)$ – адиабатический инвариант.

Доказательство. При фиксированном λ в системе (35.23) можно ввести переменные действие-угол (I,θ) каноническим преобразованием, зависящим от λ (подразд.30.2):

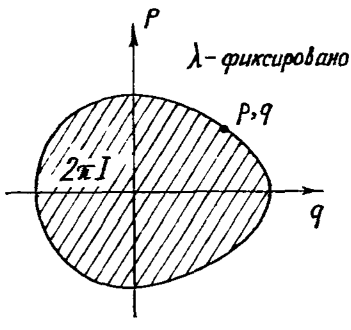

Рис.30

$$p,q \to I,\theta;\quad \dot{\theta}=\omega(I,\lambda),\quad \dot{I}=0;\quad \omega(I,\lambda)=\frac{\partial H_0}{\partial I},$$

$$H=H_0(I,\lambda). \qquad (35.25\text{а,б,в,г,д})$$

Обозначим через $S(I,q;\lambda)$ производящую функцию этого преобразования. Напомним (см.подразд.30.2), что функция $S(I,q;\lambda)$ неоднозначна, причем неоднозначность ее сводится к прибавлению кратных $2\pi I$. Связь между старыми и новыми каноническими переменными определяется равенствами

$$p=\frac{\partial S}{\partial q};\quad \theta=\frac{\partial S}{\partial I}. \tag{35.26а,б}$$

Пусть теперь $\lambda=\varepsilon t$. Тогда производящая функция канонического преобразования явно зависит от времени; уравнения движения в новых переменных I, θ имеют гамильтонов вид, но с функцией Гамильтона

$$K=H_0+\frac{\partial S}{\partial t}=H_0+\varepsilon\frac{\partial S}{\partial\lambda}. \tag{35.27}$$

Важно отметить, что производная $\partial S(I,q;\lambda)/\partial\lambda$, вычисляемая при I = const есть однозначная функция на фазовой плоскости. Отсюда следует однозначность новой функции Гамильтона K.

Мы получаем, таким образом, уравнения движения в виде

$$\dot\theta=\omega(I,\lambda)+\varepsilon f(I,\theta,\lambda);\quad f=\frac{\partial^2 S}{\partial I\partial\lambda}; \tag{35.28а,б}$$

$$\dot I=\varepsilon g(I,\theta,\lambda);\quad g=-\frac{\partial^2 S}{\partial\theta\partial\lambda}, \tag{35.29а,б}$$

$$\dot\lambda=\varepsilon. \tag{35.30}$$

Поскольку $\omega\neq 0$, применима теорема об усреднении. Усредненная система имеет вид

$$\dot J=\varepsilon<g>_{\lambda=\mathrm{const}},\quad \dot\lambda=\varepsilon. \tag{35.31а,б}$$

Но $g=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)$, а $\frac{\partial S}{\partial\lambda}$, как уже указывалось, есть однозначная функция на траектории (окружности) I = const. Поэтому

$$< g >_{\lambda=\text{const}} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} g\delta\theta = 0, \qquad (35.32)$$

и в усредненной системе J не меняется вовсе:

$$J(t) = J(0). \qquad (35.33)$$

По теореме об усреднении

$$|I(t) - I(0)| < C\varepsilon \ \forall t: 0 \le t \le 1/\varepsilon, \qquad (35.34)$$

что и требовалось доказать.

Пример. Вернемся к математическому маятнику, совершающему малые колебания. Будем считать, что длина маятника медленно изменяется по закону, например, $\ell = \ell_0(1+2\varepsilon t)/(1+\varepsilon t)$. Гамильтониан маятника имеет вид (35.20), траектория, соответствующая фиксированной длине ℓ, представляет собой эллипс с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2H}{mg\ell}}; \quad b = \sqrt{2m\ell^2 H}. \qquad (35.35а,б)$$

Площадь эллипса

$$\sigma = \pi ab, \qquad (35.36)$$

а переменная действия в задаче с фиксированной длиной маятника ℓ

$$I = \frac{\sigma}{2\pi} = H / \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \qquad (35.37)$$

Учитывая, что частота маятника $\omega = \sqrt{g/\ell}$, можно переписать (35.37) в виде

$$I = H / \omega. \qquad (35.38)$$

Таким образом, отношение энергии маятника к его частоте при медленном изменении длины маятника есть адиабатический инвариант.

Используя (35.38), мы можем найти амплитуду отклонения маятника от положения равновесия q_{max} в момент времени t $(0 < t \lesssim 1/\varepsilon)$, если известна амплитуда при $t = 0$. В самом деле, из (35.20) следует

$$H(t) = mg\ell(t)q^2_{max}(t)/2. \tag{35.39}$$

Учитывая соотношение

$$\omega(t) = g^{1/2}\ell^{-1/2}(t) \tag{35.40}$$

и подставляя далее (35.39), (35.40) в (35.38), получаем:

$$I = mg^{1/2}\ell^{3/2}(t)q^2_{max}(t)/2\ . \tag{35.41}$$

Откуда

$$q_{max}(t) = q_{max}(0)(\ell(0)/\ell(t))^{3/4}. \tag{35.42}$$

Отметим сразу же, что закон, по которому изменяется длина маятника со временем, не имеет ровно никакого значения, лишь бы это изменение было медленным и нерезонансным. То обстоятельство, что в рассмотренном примере малый параметр ε имеет размерность частоты, непринципиально. Мы могли бы написать в выражении для длины маятника $(\varepsilon\omega(0)t)$ – с безразмерным ε – вместо (εt).

Рассмотренный пример очень важен, поэтому здесь оставлена сквозная нумерация формул. Результат (35.38), который мы получили, носит общий характер.

* для гармонического осциллятора с частотой, медленно меняющейся со временем, отношение энергии к частоте является адиабатическим инвариантом.

Этот результат служил предметом исследований многих известных физиков. В частности, существенный прогресс в понимании поведения динамических систем с медленно меняющимися параметрами был достигнут на I Сольвеевском конгрессе в 1911 году благодаря дискуссии между Лоренцем и Эйнштейном, который указал, что адиабатическое постоянство действия прямо связано с физическим представлением о неизменности числа квантов в медленно эволюционирующих системах. Появившийся в результате метод Венцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ – приближение) стал основой волновой механики, а также теории распространения волн в неоднородных средах. Соответствующую математическую теорию развили Крылов, Боголюбов, Митропольский [24] и Крускал [25].

Термин **"адиабатический инвариант"** был введен П.Эренфестом в серии работ, которые сыграли важную роль для развития квантовой механики в период ее становления [26]. Идея Эренфеста заключалась в том, что квантовать можно только адиабатические инварианты, и, таким образом, проблема квантования сводилась к задаче, решаемой методами классической физики: к отысканию адиабатических инвариантов данной системы. Этот метод квантования (квазиклассическое квантование) используется и в современных исследованиях.

В классической физике метод адиабатических инвариантов используется давно и плодотворно. Сфера применения его чрезвычайно обширна: от движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях, в том числе в магнитных ловушках [4, с.78-79], до современной нелинейной теории волн [27,28] и стохастической динамики [21].

Следует отметить, что метод адинвариантов применим и в случае многомерных систем.

Важнейшее преимущество этого асимптотического метода заключается в относительно легкой обозримости получаемых результатов: мало того, что адинварианты сохраняются с высокой точностью, обычно это величины достаточно компактные. Исключительное удобство метода и наличие необычайно широкого класса задач, поддающихся решению на основе адинвариантов, способствует тому, что новые результаты здесь появляются непрерывно.

Отметим серию работ, выполненных научной группой В.Я.Давыдовского на кафедре физики ТРТУ и посвященных развитию теории нелинейного взаимодействия релятивистских заряженных частиц с сильными электромагнитными волнами. Методически эти работы объединяет активное использование динамических инвариантов частиц, в том числе и адиабатических инвариантов. Полученные здесь результаты достаточно впечатляющи. Приведем лишь несколько примеров:

1) открыта бесстолкновительная релаксация фазовых колебаний заряженных частиц, захваченных на фазовой скорости ускоряющимися электромагнитными волнами [29];

2) явление релаксации колебаний продемонстрировано для частиц, захваченных на групповой скорости амплитудно-модулированной волной с ускоряющейся огибающей [30];

3) на основе конструирования функции распределения частиц по интегралам движения и адиабатическим инвариантам рассмотрена самосогласованная задача об эволюции системы волна–частицы [31,32], причем в [32] медленная амплитудная модуляция представлена как эволюция высокочастотной волны;

4) обнаружен и исследован новый эффект – резонансная монохроматизация амплитудно-модулированной волны; эффект основан, как выяснилось, на явлении релаксации фазовых колебаний частиц в ускоряющихся волнах, которое приводит к возможности значительного ускорения захваченных частиц и связанного с этим сильного поглощения амплитудной модуляции волны [33];

5) предложено объяснение природы быстрых вариаций излучения пульсаров [34].

Таким образом, метод адиабатических инвариантов представляется весьма эффективным и современным. Интересный и достаточно полный обзор широкого круга вопросов, связанных с применением адинвариантов для изучения медленно эволюционирующих динамических систем, содержится в [35].

Заключение

В аннотации пособия указано, что оно предназначено для студентов специальности 2101, однако ясно, что объем материала, изложенного здесь, несколько великоват для предусмотренного программой семестрового курса, даже если учесть серьезность поставленной задачи, выраженной в его названии: "Введение в нелинейную динамику". Несмотря на достаточно большой объем пособия, следует признать, что **введение** реализовано, в основном, в динамику гамильтоновых систем. И это объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, теория диссипативных систем, в практическом плане наиболее интересных для будущих специалистов по современной теории управления, достаточно подробно обсуждается в монографии А.А.Колесникова [5], где дается список необходимой литературы. Во-вторых, автор преследовал свои интересы, которые заключаются, в частности, в том, чтобы подготовить читателя к изучению достаточно сложных разделов современной физики. Отметим, однако, что понятия и соотношения, общие для систем обоих типов, также рассмотрены в настоящем пособии (см.§ 1–7, 19, 34,35).

Строго говоря, тяготение курса к гамильтоновым системам не является недостатком даже с чисто практической (для специальности 2101) точки зрения: для будущих специалистов по современной теории управления знание гамильтоновой динамики представляется совершенно необходимым [36-38]. Важен на самом деле не характер рассматриваемых систем, а суть методов динамики, которые здесь используются. Важно также понять, что чем сложнее поведение системы, тем более отчетливо нужно представлять себе свойства модели. Одна из основных целей, которую ставил себе автор, – по возможности максимально точное представление материала. Этим объясняется достаточно большое количество ссылок на классические монографии и учебные пособия. В рамках того объема знаний по математике, которым располагают студенты ТРТУ (этот объем определяется программой по высшей математике и соответствующим количеством часов) абсолютно строгое и отчетливое изложение современной динамики представляется совершенно невозможным в реальном масштабе времени. Понять, скажем, книгу В.И.Арнольда [3] в полной мере и оценить уровень этой книги по достоинству способен только тот, кто, помимо всего прочего, хорошо знает математику. Для нас с вами это затруднительно. Вместе с тем нельзя не заметить настойчивых попыток автора держаться как можно ближе к классическому тексту [3], даже ценой отказа от строгих доказательств, а иногда – замены доказательств комментариями. Мы полагаем, что с точки зрения поставленной цели – максимально точного представления результатов классической динамики – такая манера изложения вполне приемлема и выражает разумный компромисс между нашими реальными возможностями и желанием продвинуться в изучении современной динамики как можно дальше.

Мы надеемся, что пособие окажется полезным для тех студентов, которые займутся изучением квантовой механики на фундаментальном уровне – такие занятия крайне желательны для будущих специалистов, скажем, по твердотельной электронике.

И, наконец, можно положительно утверждать, что освоение представленного здесь материала является совершенно необходимым для изучения таких разделов физики, как релятивистская динамика заряженных частиц в электромагнитных волнах, динамическая теория волн в бесстолкновительных системах заряженных частиц, т.е. разделов, имеющих практические применения в физике плазмы, релятивистской высокочастотной электронике, теории ускорителей и т.д. Эта связь была проиллюстрирована в §35 перечислением некоторых результатов, полученных сравнительно недавно и связанных с давно известным методом адиабатических инвариантов.

Приложение 1

Рассмотрим $L(\vec{v}'^2)$ как функцию $\vec{v}$, где

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad |\vec{V}| << |\vec{v}|. \qquad (\text{п1.1а,б})$$

Введем обозначения

$$\Delta\vec{v} \equiv -\vec{V}, \quad \psi \equiv \vec{v}'^2 = v^2 + 2\vec{v}\Delta\vec{v} + (\Delta\vec{v})^2,$$
$$\psi_0 \equiv \psi\big|_{\Delta\vec{v}=0} = v^2. \qquad (\text{п1.2а,б,в})$$

Вместо (п1.1б) теперь будем иметь

$$|\Delta\vec{v}| << |\vec{v}|. \qquad (\text{п1.3})$$

Разложим $L(\vec{v}'^2)$ в ряд в окрестности точки $\vec{v}' = \vec{v}$ и ограничимся линейным по $\Delta\vec{v}$ приближением:

$$L(\vec{v}'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\Big|_{\Delta\vec{v}=0}\Delta\vec{v}, \qquad (\text{п1.4})$$

при этом нужно использовать представление

$$L = L(\psi(v)). \qquad (\text{п1.5})$$

Поскольку

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\Big|_{\Delta\vec{v}=0} = \frac{dL}{d\psi}\Big|_{\psi=\psi_0}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{v}}\Big|_{\Delta\vec{v}=0}; \qquad (\text{п1.6а})$$

$$\frac{dL}{d\psi}\Big|_{\psi=\psi_0} = \frac{dL(\psi_0)}{d\psi_0} \equiv \frac{dL(v^2)}{dv^2}; \qquad (\text{п1.6б})$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vec{v}}\Big|_{\Delta\vec{v}=0} = 2\vec{v}, \qquad (\text{п1.6в})$$

с учетом определения (п1.2а) приходим к выражению (11.12):

$$L(\vec{v}'^2) \equiv L(v^2 - 2\vec{v}\vec{V} + V^2) \approx L(v^2) - \frac{dL(v^2)}{dv^2}\cdot 2\vec{v}\vec{V}. \qquad (\text{п1.7})$$

Приложение 2 [4,§83, с.294-298]

В некоторых разделах физики, например при изучении гравитационных полей, приходится использовать произвольные координатные сетки в 4-пространстве. В этой связи возникает необходимость развить четырехмерную геометрию в форме, пригодной для произвольных координат.

Рассмотрим преобразование одной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 в другую $x'^0 x'^1, x'^2, x'^3$:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \qquad (\text{п}2.1)$$

где f^i – некоторые функции, $i = 0,1,2,3$.

* **4-скаляром** называется величина, инвариантная по отношению к **произвольному** преобразованию координат (п2.1).

Те примеры 4-скаляров, которые мы привели в §13, остаются и в общем случае (п2.1).

При преобразовании координат их дифференциалы преобразуются согласно формулам

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k, \qquad (\text{п}2.2)$$

где по дважды повторяющемуся индексу **k** проводится суммирование от 0 до 3.

* **Контравариантным 4-вектором** называется всякая совокупность четырех величин A^i, которые при преобразовании координат преобразуются, как их дифференциалы:

*
$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \qquad (\text{п}2.3)$$

Пусть φ – 4-скаляр, представляющий собой функцию координат. Дифференциал $d\varphi$ также, очевидно, является 4-скаляром, поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} dx'^k. \qquad (\text{п}2.4)$$

С другой стороны, правило преобразования дифференциалов координат (п2.2) **универсально**, поэтому мы можем записать

$$dx'^{k} = \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{i}} dx^{i}, \tag{п2.5}$$

и тогда из (п2.4) следует

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{k}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{i}} \right) dx^{i} = 0 \tag{п2.6}$$

для двух **любых** координатных сеток. Отсюда получаем правило преобразования производной 4-скаляра:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^{i}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{k}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{i}}. \tag{п2.7}$$

* **Ковариантным 4-вектором** называется всякая совокупность четырех величин A_i, которые при преобразовании координат преобразуются как производные от 4-скаляра:

$$A_i = \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{i}} A'_k. \tag{п2.8}$$

Аналогичным образом определяются 4-тензоры различных рангов. Так,

* **контравариантным 4-тензором 2-го ранга** A^{ik} называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведения двух контравариантных векторов, т.е. по закону

$$A^{ik} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x'^{n}} A'^{mn}. \tag{п2.9}$$

Ковариантный тензор 2-го порядка A_{ik} преобразуется по закону

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{k}} A'_{mn}, \tag{п2.10}$$

а **смешанный 4-тензор** $A^{i}_{\bullet k}$ — по формулам

$$A^{i}_{k} = \frac{\partial x^{i}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{k}} A'^{m}_{\ n}. \qquad (п2.11)$$

Приведенные определения являются естественным обобщением тех определений 4-скаляров, 4-векторов и 4-тензоров, которые мы дали в §13. Следует, однако, обратить внимание на некоторые отличия от случая пространства Минковского (§13). В криволинейных координатах, как уже указывалось, **нет** 4-радиус-вектора: сами координаты x^{i} вектора **не составляют.** Поэтому определение 4-вектора привязывается не к преобразованию координат, как было раньше, а к преобразованию их дифференциалов dx^{i}, **составляющих 4-вектор** и в случае произвольной сетки.

Правила образования 4-тензоров путем перемножения или упрощения произведений других 4-тензоров, рассмотренные ранее, остаются в силе и в криволинейных координатах. Например, произведение $A^{i}B_{i}$ есть 4-скаляр, в чем легко убедиться непосредственно, используя правила преобразования (п2.3) и (п2.8). Таким образом, квадрат длины 4-вектора $|A|^{2}$ есть величина инвариантная по отношению к **любому** преобразованию (п2.1):

$$|A|^{2} = A^{i}A_{i} = \mathrm{inv}, \qquad (п2.12)$$

и деление 4-векторов на пространственно–, времениподобные и изотропные сохраняет смысл.

Определение единичного 4-тензора δ^{i}_{k} при переходе к криволинейным координатам не меняется: его компоненты $\delta^{i}_{k} = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ равны 1. Если A^{k} – 4-вектор, то при умножении на δ^{i}_{k} мы получим

$$A^{k}\delta^{i}_{k} = A^{i}, \qquad (п2.13)$$

т.е. снова 4-вектор; этим и доказывается, что δ^{i}_{k} является тензором 2-го ранга.

Квадрат элемента длины в криволинейных координатах есть квадратичная форма дифференциалов dx^{i}:

$$ds^{2} = g_{ik}dx^{i}dx^{k}, \qquad (п2.14)$$

где g_{ik} – функции координат; g_{ik} симметричны по индексам i и k:

$$g_{ik} = g_{ki}. \qquad (п2.15)$$

Поскольку произведение (упрощенное) g_{ik} на контравариантный тензор $dx^i dx^k$ есть скаляр, то g_{ik} составляют ковариантный тензор; он называется **метрическим тензором** (см.§13).

Повторим здесь (для относительной полноты картины) еще раз некоторые позиции, приведенные ранее в §13.

Два тензора A_{ik} и B^{ik} называются обратными друг другу, если

$$A_{ik} B^{km} = \delta_i^m. \qquad (п2.17)$$

Одна и та же векторная физическая величина может быть представлена как в контра-, так и в ковариантных компонентах. Очевидно, что единственными величинами, которые могут определять связь между теми и другими, являются компоненты метрического тензора. Именно с помощью этого тензора, как мы говорили, можно "поднимать и опускать индексы":

$$A^i = g^{ik} A_k; \quad A_i = g_{ik} A^k. \qquad (п2.18а,б)$$

Сказанное относится и к тензорам ранга выше единицы. Переход между различными формами одного и того же тензора совершается с помощью метрического тензора по формулам

$$A^i{}_k = g^{im} A_{mk}, \quad A^{ik} = g^{im} g^{kn} A_{mn} \qquad (п2.19а,б)$$

и т.п. [см.(13.20) – (13.25)].

Приложение 3

Покажем, что для двух любых векторных полей $\vec{a}(\vec{r}), \vec{b}(\vec{r})$ имеет место соотношение

$$\mathrm{grad}(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\vec{\nabla})\vec{a} + [\vec{b}\,\mathrm{rot}\vec{a}] + [\vec{a}\,\mathrm{rot}\vec{b}]. \qquad (15.12)$$

Рассмотрим выражение

$$[\vec{a}\,\mathrm{rot}\vec{b}] \equiv [\vec{a}[\vec{\nabla}\vec{b}]], \qquad (п3.1)$$

где $\vec\nabla$ – набла-оператор [6, с.51-55]. Используя известную формулу векторной алгебры для двойного векторного произведения, перепишем (п3.1):

$$[\vec a[\vec\nabla\vec b]] = \vec\nabla(\vec a\,\overset{\downarrow}{\vec b}) - (\vec a\vec\nabla)\,\overset{\downarrow}{\vec b}. \qquad \text{(п3.2)}$$

Стрелка в (п3.2) указывает векторы, на которые действует оператор $\vec\nabla$. Очевидно, что во втором слагаемом правой части (п3.2) стрелку можно и не ставить; таким образом, имеем:

$$[\vec a\,\mathrm{rot}\vec b] = \vec\nabla(\vec a\,\overset{\downarrow}{\vec b}) - (\vec a\vec\nabla)\vec b. \qquad \text{(п3.3)}$$

Произведя в последнем равенстве замену $\vec a \to \vec b, \vec b \to \vec a$, получаем аналогичное равенство:

$$[\vec b\,\mathrm{rot}\vec a] = \vec\nabla(\vec b\,\overset{\downarrow}{\vec a}) - (\vec b\vec\nabla)\vec a. \qquad \text{(п3.4)}$$

Сложим (п3.3) и (п3.4):

$$[\vec a\,\mathrm{rot}\vec b] + [\vec b\,\mathrm{rot}\vec a] = \vec\nabla(\vec a\,\overset{\downarrow}{\vec b}) + \vec\nabla(\vec b\,\overset{\downarrow}{\vec a}) - (\vec a\vec\nabla)\vec b - (\vec b\vec\nabla)\vec a. \qquad \text{(п3.5)}$$

Но

$$\vec\nabla(\vec a\,\overset{\downarrow}{\vec b}) + \vec\nabla(\vec b\,\overset{\downarrow}{\vec a}) = \vec\nabla(\vec a\vec b) = \mathrm{grad}(\vec a\vec b), \qquad \text{(п3.6)}$$

так что формула (п3.5) эквивалентна (15.12).

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.

3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 432 с.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.

5. Колесников А.А. Синергетическая теория управления (инварианты, оптимизация, синтез). Таганрог: ТРТУ; М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.

6. Давыдовский В.Я., Погорелов Е.Н., Филиппов Ю.С. Математическое приложение к методическому пособию "Основы физики". Для студентов 1-го и 2-го курсов. Таганрог: ТРТУ, 1996. 60 с.№ 453

7. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1 . М.: Наука,1977. 416 с.

8. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры . М.: Наука, 1987. 320 с.

9. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2 . М.: Наука,1982. 496 с.

10.Физическая энциклопедия. Т.3. М.: Большая Российская энциклопедия, 1992. 672 с.

11. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантованные поля.М.. Наука, 1980. 320 с.

12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика Т.8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.

13. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.3. М.: Наука,1979.304 с.

14. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 240 с.

15. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.

16. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.

17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. С.371-373.

18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.5. Статистическая физика. Ч.1. М.: Наука, 1976. 584 с.

19. Давыдовский В.Я., Погорелов Е.Н., Филиппов Ю.С. Адиабатические инварианты заряженных частиц в полях некоторых симметрий// Изв. вузов. Физика. 1990. N1. С.13-17.

20. Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1985. 338 с.

21. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука,1988. 368 с.

22. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т.2. М.: Мир, 1978. С.354-390.

23. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.

24. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

25. Крускал М. Адиабатические инварианты. М.: ИЛ, 1962. 91 с.

26.Эренфест П. Относительность. Кванты. Статистика. М.: Наука, 1972.

27. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир,1977. 622 с.

28. Хейес У.Д. В сб.: Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 13-53.

29. Давыдовский В.Я. Бесстолкновительная релаксация фазовых колебаний захваченных ускоряющимися волнами частиц. ЖЭТФ, 1981. Т.81. N5. С.1701-1705.

30. Давыдовский В.Я., Филиппов Ю.С. Бесстолкновительная релаксация фазовых колебаний частиц, захваченных ускоряющейся амплитудно модулированной волной ЖТФ. 1982. Т.52, N10.С.1910-1914.

31. Давыдовский В.Я., Уколов А.С. К нелинейному взаимодействию волн с захваченными частицами в неоднородных средах ЖТФ. 1983. Т.53, N6. С.1048-1054.

32.Филиппов Ю.С. Нелинейные стационарные амплитудно-модулированные волны в однородной плазме. Физика плазмы. 1986. Т.12, N1. С.48-53.

33. Давыдовский В.Я., Сапогин В.Г., Филиппов Ю.С. Резонансная монохроматизация поперечных амплитудно-модулированных волн в плазме. ЖТФ, 1978. Т.48. N12. С.2455.

34. Давыдовский В.Я., Филиппов Ю.С. О природе быстрых вариаций излучения пульсаров. Письма в АЖ. 1980. Т.6. N5. С.282.

35. Филиппов Ю.С. К нелинейному взаимодействию заряженных частиц с амплитудно-модулированными волнами в плазме Канд. дис. М.: МГУ им. Ломоносова - НИИ ЯФ при МГУ, 1985. 101 с.

36. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф./ Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

37. Колесников А.А. Синергетическая концепция энергосберегающего управления. В Сб: Синтез алгоритмов сложных систем. Москва - Таганрог: ТРТУ, 1997. С.27-51.

38. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. /Пер.с англ. под ред. Топчеева Ю.И. / М.: Машиностроение, 1968. 764 с.

Оглавление

Погорелов Евгений Николаевич

Физика. Введение в
нелинейную динамику

Учебное пособие

Ответственный за выпуск Погорелов Е.Н.
Редактор Маныч Э.И.
Корректоры Селезнева Н.И., Чиканенко Л.В., Надточий З.И.

ЛР № 020565 от 23.06.1997г. Подписано к печати 1.
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Усл.п.л.-14,4. Уч.-изд.л. 14,0
Печать офсетная.
Заказ № 346 Тираж 500 экз.

«С»

Издательство Таганрогского государственного радиотехнического
университета
ГСП17А, Таганрог, 28, Некрасовский,44
Типография Таганрогского государственного радиотехнического
университета
ГСП17А,Таганрог,28,Энгельса,1